

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİZGELERİN DİFERANSİYELİNİN
HESAPLANMASI



Akın KANLI

Eylül, 2021

İZMİR

ÇİZGELERİN DİFERANSİYELİNİN HESAPLANMASI

**Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi
Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı**

Akın KANLI

Eylül, 2021

İZMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

AKIN KANLI, tarafından **DOÇ. DR. ZEYNEP NİHAN BERBERLER** yönetiminde hazırlanan “**ÇİZGELERİN DİFERANSİYELİNİN HESAPLANMASI**” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

.....
Doç. Dr. Zeynep Nihan BERBERLER

Danışman

.....
Doç. Dr. Mete EMİNAĞAOĞLU

Jüri Üyesi

.....
Doç. Dr. Tufan TURACI

Jüri Üyesi

.....
Prof.Dr. Özgür ÖZÇELİK
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bilgi, birikim ve tecrübeleriyle bana destek olan, konulara farklı bir bakış açısı ile bakmamı sağlayarak doğru bir sorgulama yapmama yardımcı olan, olumsuz düşüncelere daima pozitif bir yaklaşımda bulunarak her zaman doğru yolda olmam için sonsuz çaba sarf eden, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, değerli danışman hocam Doç. Dr. Zeynep Nihan BERBERLER'e, yüksek lisans dönemim boyunca eğitim ve diğer konularda her türlü destek ve bilgi veren, çözülemez sandığım soruları çözmemi sağlayan, ufkumu genişleten hocam Doç. Dr. Murat Erşen BERBERLER'e, yardımda bulunan diğer değerli bölüm hocalarıma, maddi ve manevi destekleri ile bu yolda her zaman güçlü bir şekilde ilerlememe yardımcı olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Akın KANLI

ÇİZGELERİN DİFERANSİYELİNİN HESAPLANMASI

ÖZ

$G = (V(G), E(G))$ çizgesinin, her $D \subseteq V(G)$ kümesi için, $B(D)$, D tepe kümesinde komşusu olan $V(G) \setminus D$ kümesindeki tepelerin kümesi olsun. D kümesinin diferansiyeli $\partial(D) = |B(D)| - |D|$ ve G çizgesinin diferansiyeli $\partial(G) = \max\{\partial(D) : D \subseteq V(G)\}$ olarak tanımlanır. $\partial(D) = \partial(G)$ eşitliğini sağlayan D kümesine ∂ -kümesi veya diferansiyel küme denir. Bir çizgenin diferansiyelinin araştırma ve uygulama alanı temel olarak hesaplamalı matematiktir. G çizgesinde D tepeler kümesi için eğer $V(G) \setminus D$ kümesindeki her tepe D kümesindeki bir tepeye komşu ise D kümesine baskın küme denir. G çizgesi, aynı zamanda baskın küme olan bir ∂ -kümesi içeriyor ise G çizgesine baskın diferansiyel çizge denir.

Bu tezde ilk olarak, yol, çevre ve tekerlek benzeri çizgelerin diferansiyel değerleri hesaplanmış ve baskın diferansiyel olan çizgeler belirlenmiştir. Daha sonra, temel çizgelere ait tümleyen prizmaların diferansiyel değerleri hesaplanmış ve baskın diferansiyel olan tümleyen prizmalar belirlenmiştir. Bir çizgeye ait parametrelerle ilişkili olarak, bu çizgenin tümleyen prizmasının diferansiyel değeri araştırılmıştır. Son olarak, bir çizgenin diferansiyelini hesaplayan algoritma önerilmiştir.

Anahtar kelimeler: Diferansiyel, baskınlık, yol çizge, çevre çizge, tekerlek çizge, tümleyen prizmalar

COMPUTING THE DIFFERENTIAL IN GRAPHS

ABSTRACT

For every set $D \subseteq V(G)$ of the graph $G = (V(G), E(G))$, for every set $D \subseteq V(G)$, let $B(D)$ be the set of vertices in $V(G) \setminus D$ that have a neighbor in the vertex set D . The differential of the set D is defined as $\partial(D) = |B(D)| - |D|$ and the differential of a graph G is defined as $\partial(G) = \max\{\partial(D) : D \subseteq V(G)\}$. A set D satisfying $\partial(D) = \partial(G)$ is called a ∂ -set or differential set. The research and application area of the differential of a graph is mainly computational mathematics. A set D of G is a dominating set if every vertex in $V(G) \setminus D$ is adjacent to a vertex in D . A graph G is said to be dominant differential graph if it contains a ∂ -set which is also a dominating set.

In this thesis, firstly the differentials of path, cycle and wheel related graphs are computed and the graphs which are dominant differential are recognized. Then, the differentials of complementary prisms of specific types of graphs are computed and dominant differential complementary prisms are determined. Also, the differential of the complementary prism of a graph is investigated related to the parameters of that graph. Finally, an algorithm is proposed that computes the differential of a graph.

Keywords: Differential, domination, path, cycle, wheel, complementary prisms

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZ.....	iv
ABSTRACT	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
BÖLÜM BİR – GİRİŞ	1
BÖLÜM İKİ – TEMEL TANIMLAR.....	3
BÖLÜM ÜÇ – DİFERANSİYEL	6
BÖLÜM DÖRT – YOL BENZERİ ÇİZGELERİN DİFERANSİYELİ.....	10
4.1 Kuyruklu Yıldız Çizge.....	10
4.2 Çift Kuyruklu Yıldız Çizge	11
4.3 Lolipop Çizge	14
4.4 E_p^t Çizge.....	16
4.5 Düzenli Tırtıl Çizge.....	17
BÖLÜM BEŞ – ÇEVRE BENZERİ ÇİZGELERİN DİFERANSİYELİ	19
5.1 Yelpaze Çizge	19
5.2 k -Piramit Çizge.....	20
5.3 n -gen Kitap Çizge	21
BÖLÜM ALTI – TEKERLEK BENZERİ ÇİZGELERİN DİFERANSİYELİ..	23
6.1 Dişli Çizge.....	23

6.2 Dümen Çizge	25
6.3 Ayçiçeği Çizge	27
6.4 Arkadaşlık Çizge	29
BÖLÜM YEDİ – TÜMLEYEN PRİZMALARIN DİFERANSİYELİ.....	31
BÖLÜM SEKİZ – DİFERANSİYEL ALGORİTMASI	45
8.1 Tek Tepenin ve Bir Kümenin Diferansiyeli.....	45
8.2 Çizgenin Diferansiyelini Hesaplama ve Optimizasyonu	46
8.3 Optimize Edilmiş Diferansiyel Hesaplama Algoritması.....	48
BÖLÜM DOKUZ – SONUÇLAR.....	50
KAYNAKLAR.....	52

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1 8 tepeli iki-parçalı tam çizge $K_{3,5}$	7
Şekil 4.1 $s + t$ tepeli kuyruklu yıldız çizge $C_{s,t}$	10
Şekil 4.2 n tepeli çift kuyruklu yıldız çizge $DC(n, a, b)$	12
Şekil 4.3 $n = 10, d = 5$ için lolipop çizge $L_{n,d}$	15
Şekil 4.4 $pt + 2$ tepeli E_p^t çizge	16
Şekil 4.5 $n = 5$ ve $m = 3$ için düzenli tırtıl çizge $T_{n,m}$	18
Şekil 5.1 $n = 6$ için yelpaze çizge F_n	19
Şekil 5.2 $n = 4$ için 6 tepeli ikipiramit çizge $BP(n)$	20
Şekil 5.3 $n = 4, k = 5$ için k -sayfalı n -gen kitap çizge $B(n, k)$	21
Şekil 6.1 $n = 6$ için 13 tepeli, 18 ayrıtlı dişli çizge G_n	23
Şekil 6.2 $n = 5$ için 11 tepeli dümen çizge H_n	25
Şekil 6.3 $n = 6$ için 13 tepeli, 24 ayrıtlı ayçiçeği çizge SF_n	28
Şekil 6.4 $n = 5$ için 11 tepeli arkadaşlık çizge f_n	30
Şekil 7.1 Petersen çizge $C_5\overline{C_5}$	31
Şekil 8.1 $n = 6$ tepeli G_n çizgesinin tepe kümesinin birli ve ikili kombinasyonlarını gösteren ağaç	47

BÖLÜM BİR

GİRİŞ

Sosyal medya platformları, bilginin hızlı bir biçimde yayıldığı ve kullanıcılar arasındaki iletişimin güçlenerek arttığı ortamlardır. Dolayısıyla bu ortamlar, ürün pazarlama ve politik kampanyaların tanıtımı amacıyla sıklıkla kullanılmaktadır. Bu kullanımdan dolayı bu ortamlarda hangi kullanıcı grubunun diğer kalan kullanıcıları en iyi şekilde etkilediği problemi ortaya çıkar. Diğer bir deyişle, bir grubu temsil eden bir ağı en iyi şekilde etkileyen grup aranmaktadır. Bu düşünceden hareketle diferansiyel tanımı yapılmıştır.

Ağ, merkezlerden ve bu merkezleri birbirine bağlayan bağlantı hatlarından oluşur. Bu ağdaki merkezler bireyler ve insan gruplarını, bağlantı hatları ise merkezler arasındaki ilişkileri temsil eder. Ağın temelini oluşturan topoloji bir çizge ile modellendiğinde çizgenin tepeler kümesi ağın merkezlerine, çizgenin ayrıtlar kümesi ağın bağlantı hatlarına karşılık gelir.

Çizgelerde diferansiyelin hesaplanması, çizgeye ait bir tepe kümesinin çizgenin geriye kalanını nasıl etkilediğini belirten bir ölçüm yapabilme olanağı sağlar. Örneğin, popüler bir kahve dükkanı ele alınırsa ve bu dükkanın bulunduğu şehirdeki çok sayıda müşteriye ulaşmak istediği düşünülürse, o zaman doğal olarak çok sayıda müşteriye kahve satabilmek için şehirdeki en uygun noktaları bulma ihtiyacı doğar. Ancak maliyetten dolayı her noktada bir kahve dükkanı açılmayacağı da unutulmamalıdır. Şehir bir çizge modeli olarak ele alınırsa ve müşterilerin de makul uzaklıktaki bir kahve dükkanına gideceği düşünülürse çizgenin baskın kümesini seçmek olası bir yaklaşımdır. Ancak baskın küme, sadece kendini ya da sadece tek bir komşusunu baskılayan tepeler içerebilir. Dolayısıyla, çok az kişinin geleceği öngörülen bir noktaya yeni bir dükkan açmak maliyet açısından düşünüldüğünde mantıklı olmayabilir. O halde, bu örnekte en az elemana sahip olan diferansiyel kümeyi bulmak daha isabetli tercihler yapılmasına zemin hazırlayacaktır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde diğer bölümlerde kullanılacak olan genel tanımlar

verilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde diferansiyel tanımlanmış ve diferansiyel ile ilgili bilinen sonuçlar verilmiştir. Dördüncü, beşinci, altıncı ve yedinci bölümde, sırasıyla, yol, çevre ve tekerlek benzeri çizgelerin ve tümleyen prizmaların diferansiyel değerleri araştırılmıştır. Sekizinci bölümde, bir çizgenin diferansiyelini hesaplayan algoritma önerilmiştir.



BÖLÜM İKİ

TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde, bu tezde kullanılan temel tanımlar verilmiştir. Bu tezde, bukle ve katlı ayrıt içermeyen basit yönsüz çizgeler üzerinde çalışılmıştır.

Tanım 2.1: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinin her tepe çifti arasında en az bir yol var ise, G çizgesine birleştirilmiş veya bağlantılı çizge denir.

Tanım 2.2: (Chartrand ve Lesniak, 1996) G çizgesi, $V(G)$ tepeler kümesi ve $E(G)$ ayrıtlar kümesine sahip olan bir çizge olsun. $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ olacak şekilde $V(H)$ tepeler kümesi ve $E(H)$ ayrıtlar kümesine sahip olan H çizgesine, G çizgesinin alt çizgesi denir ve $H \subset G$ ile gösterilir.

Tanım 2.3: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinde, $S \subseteq V(G)$ boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $G[S]$ etkilenmiş alt çizge S tepeler kümesini ve G çizgesinde S kümesindeki tepe çiftleri arasında bulunan ayrıtları içerir.

Tanım 2.4: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Ağaç, çevre içermeyen birleştirilmiş çizgedir.

Tanım 2.5: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinde, herhangi bir v tepesi herhangi bir ayrıt ile bitişik değilse, bu tepeye izole tepe denir.

Tanım 2.6: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinin herhangi bir v tepesine bitişik olan ayrıtların sayısına v tepesinin derecesi denir ve $deg(v)$ veya $deg_G(v)$ ile gösterilir.

Tanım 2.7: (Chartrand ve Lesniak, 1996) Bir G çizgesinin tüm tepelerinin dereceleri içerisinde en büyük olan tepe derecesine G çizgesinin en büyük tepe derecesi denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.8: (Chartrand ve Lesniak, 1996) G bir ağaç olmak üzere G ağacında tepe derecesi 1 olan tepeye yaprak ya da yaprak tepe denir.

Tanım 2.9: (West, 2001) Bir G çizgesinde $v \in V(G)$ olmak üzere, v tepesinin komşuluğu ya da açık komşuluğu $N_G(v)$ ya da $N(v)$ ile gösterilir ve v tepesine komşu olan tepelerin kümesi $N(v) = \{u \in V(G) | uv \in E(G)\}$ şeklinde tanımlanır. $v \in V(G)$ tepesinin kapalı komşuluğu $N[v] = N(v) \cup v$ olarak tanımlanır. $S \subseteq V(G)$ olmak üzere S kümesinin açık komşuluğu ve kapalı komşuluğu sırasıyla $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ ve $N[S] = N(S) \cup S$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.10: (West, 2001) G çizgesi, $V(G)$ tepeler kümesi ve $E(G)$ ayrıtlar kümesine sahip bir çizge olmak üzere, G çizgesinin tümleyen çizgesi $V(G)$ tepeler kümesine ve G çizgesindeki tepeler arasında olmayan tüm ayrıtlara sahiptir ve $\bar{G}$ ile gösterilir.

Tanım 2.11: (Buckley ve Harary, 1990) Bir G çizgesinde, herhangi iki tepeyi birbirine bağlayan yollardan en az ayrıta sahip olan yola en kısa yol denir.

Tanım 2.12: (Buckley ve Harary, 1990) Bir G çizgesinde, herhangi iki tepe arasındaki en kısa yolda bulunan ayrıt sayısına iki tepe arasındaki uzaklık denir. $u, v \in V(G)$ olmak üzere, G çizgesinde u ve v tepeleri arasındaki uzaklık $d(u, v)$ veya $d_G(u, v)$ ile gösterilir.

Tanım 2.13: (Buckley ve Harary, 1990) G birleştirilmiş bir çizge ve $v \in V(G)$ olsun. v tepesinin açıklık değeri $e(v)$ veya $e_G(v)$ ile gösterilir ve $e(v) = \max\{d(u, v) | u \in V(G)\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.14: (Buckley ve Harary, 1990) Bir G çizgesinin çapı $diam(G)$ ile gösterilir ve $diam(G) = \max\{e(v) | v \in V(G)\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.15: (Chartrand ve Lesniak, 1996) G_1 ve G_2 ayrık tepe kümelerine sahip iki çizge olsun. G_1 ve G_2 çizgelerinin birleşim işlemi sonucunda elde edilen $G = G_1 \cup G_2$

izgesi $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ tepeler kümesi ve $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ ayrıtlar kümesine sahiptir. G izgesi, bir H çizgesinin n ($n \geq 2$) adet ayrık kopyasından oluşuyorsa $G = nH$ ile gösterilir.

Tanım 2.16: (Chartrand ve Lesniak, 1996) G_1 ve G_2 ayrık tepe kümelerine sahip iki çizge olsun. G_1 ve G_2 çizgelerinin toplama işlemi sonucunda elde edilen $G = G_1 + G_2$ izgesi $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ tepeler kümesi ve $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(u, v) | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ ayrıtlar kümesine sahiptir.

Tanım 2.17: (Chartrand ve Lesniak, 1996) G_1 ve G_2 çizgelerinin talama işlemi sonucunda elde edilen izge $G_1 \circ G_2$ şeklinde gösterilir. $G_1 \circ G_2$ izgesinde G_1 çizgesinin her bir tepesine karşılık G_2 çizgesinin bir kopyası alınır. Ardından G_1 çizgesinin her bir tepesinden bu tepeye karşılık gelen G_2 çizgesinin kopyasının her bir tepesine bir ayrıt zilir. izgelerde talama işleminin değişme özelliği yoktur.

BÖLÜM ÜÇ

DİFERANSİYEL

Bu bölümde, bir çizgenin diferansiyeli ve baskın diferansiyel çizge tanımlanmış ve bilinen temel sonuçlar verilmiştir.

Tanım 3.1: (Mashburn, Haynes, Hedetniemi, Hedetniemi, ve Slater, 2006) $G = (V(G), E(G))$ çizgesinin, her $D \subseteq V(G)$ kümesi için, $B(D)$, D tepe kümesinde komşusu olan $V(G) \setminus D$ kümesindeki tepelerin kümesi olsun. D kümesinin diferansiyeli $\partial(D) = |B(D)| - |D|$ ve G çizgesinin diferansiyeli $\partial(G) = \max\{\partial(D) | D \subseteq V\}$ olarak tanımlanır. $\partial(G) = \partial(D)$ eşitliğini sağlayan D kümesine ∂ -kümesi veya diferansiyel küme denir. G çizgesi $G_1, \dots, G_k$ birleştirilmiş bileşenlerine sahip bir çizge ise $\partial(G) = \partial(G_1) + \dots + \partial(G_k)$ olur.

Bir çizgenin diferansiyelinin araştırma ve uygulama alanı temel olarak hesaplamalı matematiktir. Ayrıca çizgelerin diferansiyeli hem teorik hem de uygulamalı matematikte artan ilgi gören bir konudur.

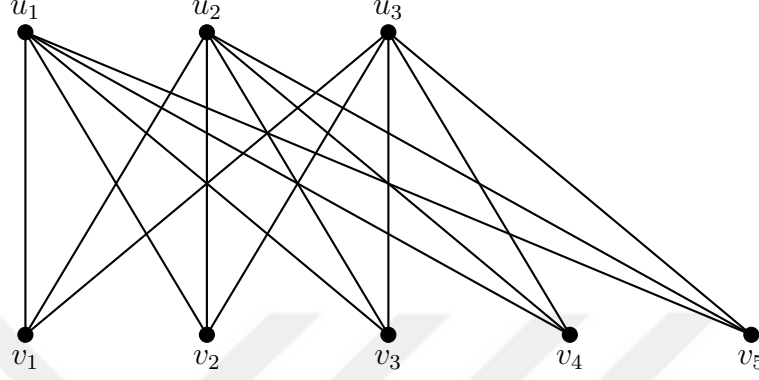
Tanım 3.2: (Haynes, Hedetniemi, ve Slater, 1998) $G = (V(G), E(G))$ çizgesinde D tepeler kümesi için eğer $V(G) \setminus D$ kümesindeki her tepe D kümesindeki bir tepeye komşu ise D kümesine baskın küme denir. G çizgesinde, en az sayıda elemana sahip olan baskın kümenin eleman sayısına G çizgesinin baskınlık sayısı denir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir.

Tanım 3.3: (Bermudo, Hernández-Gómez, Rodríguez, ve Sigarreta, 2014) G çizgesi, aynı zamanda baskın küme olan bir ∂ -kümesi içeriyor ise G çizgesine baskın diferansiyel çizge denir.

Tam çizge, yıldız çizge, tekerlek çizge, $n = 3k$ veya $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) olmak üzere yol çizge P_n ve çevre çizge C_n baskın diferansiyel çizge örnekleridir.

Örnek 3.1’de, $K_{3,5}$ çizgesinin diferansiyeli hesaplanmıştır.

Örnek 3.1: $K_{3,5}$ 8 tepeli çizgenin diferansiyelinin hesaplanması:



Şekil 3.1 8 tepeli iki-parçalı tam çizge $K_{3,5}$

$u_i \in V(K_{3,5})$ ($1 \leq i \leq 3$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_1 = \{u_i\}$, $B(D_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $\partial(D_1) = |B(D_1)| - |D_1| = 4$ olur ve D_1 kümesine $\{u_1, u_2, u_3\} \setminus \{u_i\}$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_1) < 4$ olur.

$v_j \in V(K_{3,5})$ ($1 \leq j \leq 5$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_2 = \{u_i, v_j\}$, $B(D_2) = V(K_{3,5}) \setminus \{u_i, v_j\}$, $\partial(D_2) = |B(D_2)| - |D_2| = 4$ olur ve D_2 kümesine $V(K_{3,5})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_2) < 4$ olur.

$v_j \in V(K_{3,5})$ ($1 \leq j \leq 5$) tepesi D_3 kümesine eklenirse $D_3 = \{v_j\}$, $B(D_3) = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\partial(D_3) = |B(D_3)| - |D_3| = 2$ olur ve D_3 kümesine $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \setminus \{v_j\}$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_3) < 2$ olur.

$u_i \in V(K_{3,5})$ ($1 \leq i \leq 3$) tepesi D_3 kümesine eklenirse $D_4 = \{u_i, v_j\}$, $B(D_4) = V(K_{3,5}) \setminus \{u_i, v_j\}$, $\partial(D_4) = |B(D_4)| - |D_4| = 4$ olur ve D_4 kümesine $V(K_{3,5})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_4) < 4$ olur.

Diferansiyel tanımından,

$$\partial(K_{3,5}) = \max\{\partial(D_k)\} \quad (1 \leq k \leq 4) \quad (3.1)$$

$$\partial(K_{3,5}) = 4 \quad (3.2)$$

elde edilir.

Açıklama 3.1: Şekil 3.1'deki $K_{3,5}$ iki-parçalı tam çizge için $D = \{u_i, v_j\}$ ($1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 5$) kümesi baskın kümedir. $D = \{u_i, v_j\}$ kümesi aynı zamanda $K_{3,5}$ iki-parçalı tam çizgenin ∂ -kümesidir. O halde, $K_{3,5}$ iki-parçalı tam çizge baskın diferansiyel çizgedir.

Teorem 3.1: (Bermudo, Rodríguez, ve Sigarreta, 2015)

- a) K_n , n tepeli bir tam çizge olmak üzere, $\partial(K_n) = n - 2$.
- b) P_n , n tepeli bir yol çizge olmak üzere, $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.
- c) C_n , n ($n \geq 3$) tepeli bir çevre çizge olmak üzere, $\partial(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.
- d) $K_{1,n}$, $n + 1$ tepeli bir yıldız çizge olmak üzere, $\partial(K_{1,n}) = n - 1$.
- e) $K_{m,n}$, $m + n$ tepeli bir iki-parçalı tam çizge olmak üzere,
 $\partial(K_{m,n}) = \max\{m - 1, n - 1, m + n - 4\}$.
- f) W_n , $n + 1$ tepeli bir tekerlek çizge olmak üzere, $\partial(W_n) = n - 1$.

Teorem 3.2: (Bermudo ve Fernau, 2012) G , n ($n \geq 3$) tepeli birleştirilmiş bir çizge olmak üzere, $\partial(G) \geq \frac{n}{5}$ olur.

Teorem 3.3: (Bermudo, Hernández-Gómez, Rodríguez, ve Sigarreta, 2014) Bir G çizgesinin baskın diferansiyel olması için gerek ve yeter koşul $\partial(G) = n - 2\gamma(G)$ olmasıdır.

Önerme 3.1: (Bermudo, De La Torre, Márting-Caraballo, ve Sigarreta, 2015) G ve H , tepe sayıları, sırasıyla n_1 ve n_2 ; maksimum tepe dereceleri, sırasıyla, $\Delta(G)$ ve $\Delta(H)$ olan iki çizge olsun. O zaman,

a) $n_1 + n_2 - 4 \leq \partial(G + H) \leq n_1 + n_2 - 2$;

b) $\partial(G + H) = n_1 + n_2 - 2 \iff \Delta(G) = n_1 - 1$ veya $\Delta(H) = n_2 - 1$;

c) $\partial(G + H) = n_1 + n_2 - 3 \iff \Delta(G) = n_1 - 2$ ve $\Delta(H) \leq n_2 - 2$ veya $\Delta(G) \leq n_1 - 2$ ve $\Delta(H) = n_2 - 2$;

d) $\partial(G + H) = n_1 + n_2 - 4 \iff \Delta(G) \leq n_1 - 3$ ve $\Delta(H) \leq n_2 - 3$.

Önerme 3.2: (Bermudo, De La Torre, Márting-Caraballo, ve Sigarreta, 2015) G ve H , tepe sayıları, sırasıyla n_1 ve n_2 olan iki çizge olsun. O zaman,

a) $n_2 \geq 2 \Rightarrow \partial(G \circ H) = n_1(n_2 - 1)$;

b) $n_2 = 1 \Rightarrow \partial(G \circ H) = n_1 - \gamma(G)$.

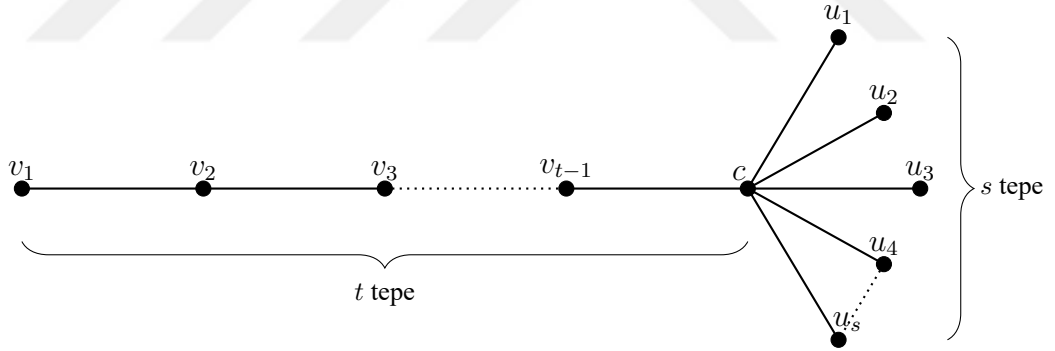
BÖLÜM DÖRT

YOL BENZERİ ÇİZGELERİN DİFERANSİYELİ

Bu bölümde, yol benzeri çizge tiplerinden kuyruklu yıldız çizge, çift kuyruklu yıldız çizge, lolipop çizge ve düzenli tırtıl çizgenin diferansiyel değerleri hesaplanmıştır, baskın diferansiyel çizgeler belirlenmiştir.

4.1 Kuyruklu Yıldız Çizge

Tanım 4.1: Kuyruklu yıldız çizge $C_{s,t}$ ($s, t \in \mathbb{Z}^+$), $K_{1,s}$, $s + 1$ tepeli yıldız çizgenin tepe derecesi 1 olan tepelerine komşu olan merkez tepesini t tepeli P_t yol çizgenin tepe derecesi 1 olan bir tepesi olarak belirlenmesiyle elde edilen bir ağaçtır. Dolayısıyla, $C_{s,1} = K_{1,s}$ ve $C_{1,p-1} = P_p$ olur (Hattingh ve Ungerer, 1998). c tepesi, $K_{1,s}$ yıldız çizgenin merkez tepesi; yani P_t çizgenin tepe derecesi 1 olan bir tepesidir.



Şekil 4.1 $s + t$ tepeli kuyruklu yıldız çizge $C_{s,t}$

Teorem 4.1: $C_{s,t}$, $s+t$ tepeli kuyruklu çizge olmak üzere, $C_{s,t}$ kuyruklu yıldız çizgenin diferansiyeli $\partial(C_{s,t}) = s + \left\lfloor \frac{t-2}{3} \right\rfloor$ olur.

İspat: $C_{s,t}$ çizgesinde, $K_{1,s}$ yıldız çizgenin c merkez tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_1 = \{c\}$ ve $\partial(D_1) = s$ olur.

$S_1 = V(C_{s,t}) \setminus N_{C_{s,t}}[c]$ için $C_{s,t}[S_1] = P_{t-2}$ olur. $C_{s,t}[S_1]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_1 kümesine eklenirse D_2 kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan

$\partial(D_2) = s + \left\lfloor \frac{t-2}{3} \right\rfloor$ elde edilir ve D_2 kümesine $V(C_{s,t})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_2) < s + \left\lfloor \frac{t-2}{3} \right\rfloor$ olur.

$C_{s,t}$ çizgesinde $K_{1,s}$ yıldız çizgenin merkez tepesi dışında bir tepesi D_3 kümesine eklenirse $\partial(D_3) = 0$ olur.

$S_2 = V(C_{s,t}) \setminus N_{C_{s,t}}[D_3]$ için $C_{s,t}[S_2] = P_{t-1}$ olur. $C_{s,t}[S_2]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_3 kümesine eklenirse D_4 kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan $\partial(D_4) = \left\lfloor \frac{t-1}{3} \right\rfloor$ elde edilir ve D_4 kümesine $V(C_{s,t})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_4) < \left\lfloor \frac{t-1}{3} \right\rfloor$ olur.

$C_{s,t}$ çizgesinde, $c \in B(D_5)$ olacak şekilde P_t yol çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_5 kümesine eklenirse, $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan, $\partial(D_5) = \left\lfloor \frac{t}{3} \right\rfloor$ olur.

$C_{s,t}$ çizgesinde $K_{1,s}$ yıldız çizgenin merkez tepesi c , D_5 kümesine eklenirse D_6 kümesi elde edilir ve $\partial(D_6) = \left\lfloor \frac{t}{3} \right\rfloor + s - 2$ olur. D_6 kümesine $V(C_{s,t})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_6) < \left\lfloor \frac{t}{3} \right\rfloor + s - 2$ olur.

Diferansiyel tanımından,

$$\partial(C_{s,t}) = \max\{\partial(D_i)\} \quad (1 \leq i \leq 6) \quad (4.1)$$

$$\partial(C_{s,t}) = s + \left\lfloor \frac{t-2}{3} \right\rfloor \quad (4.2)$$

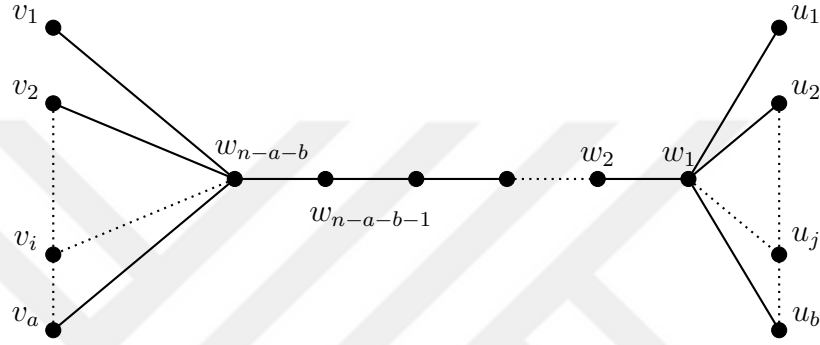
elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 4.1: $\gamma(C_{s,t}) = 1 + \left\lfloor \frac{t-2}{3} \right\rfloor$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, Teorem 3.3'ten, $t = 3k+2$ veya $t = 3k+4$ ($k \in \mathbb{Z}$) için kuyruklu yıldız çizge $C_{s,t}$ baskın diferansiyeldir.

4.2 Çift Kuyruklu Yıldız Çizge

Tanım 4.2: Çift kuyruklu yıldız çizge $DC(n, a, b)$ ($a, b \geq 1, n \geq a + b + 2$) $n - a - b$ tepeli yol çizgenin tepe derecesi 1 olan bir tepesine tepe derecesi 1 olan a adet komşu tepe, diğer tepe derecesi 1 olan tepesine tepe derecesi 1 olan b adet komşu tepe eklenmesiyle elde edilir. Dolayısıyla, $DC(n, a, b)$ çift kuyruklu yıldız çizge

$a + b$ tanesi yaprak tepe olmak üzere n adet tepeye sahiptir (Cygan, Pilipczuk, ve Škrekovski, 2011). $v_1, \dots, v_a, u_1, \dots, u_b, w_1, \dots, w_{n-a-b}$ tepeleri $DC(n, a, b)$ çift kuyruklu yıldız çizgenin tepeleri olsun. $DC(n, a, b)$ çift kuyruklu çizgede P_{n-a-b} yol çizgenin tepeleri w_1 ve w_{n-a-b} tepeleri tepe derecesi 1 olan tepeler olmak üzere $w_1, w_2, \dots, w_{n-a-b}$ olsun. w_1 tepesine komşu olan tepe derecesi 1 olan tepeler $u_1, u_2, \dots, u_b$ tepeleri, w_{n-a-b} tepesine komşu olan tepe derecesi 1 olan tepeler $v_1, v_2, \dots, v_a$ tepeleri olsun.



Şekil 4.2 n tepeli çift kuyruklu yıldız çizge $DC(n, a, b)$

Teorem 4.2: $DC(n, a, b)$ ($a, b > 1, n - a - b > 2$), n tepeli çift kuyruklu yıldız çizge olmak üzere, $DC(n, a, b)$ çift kuyruklu yıldız çizgenin diferansiyeli $\partial(DC(n, a, b)) = a + b + \left\lfloor \frac{n - a - b - 4}{3} \right\rfloor$ olur.

İspat: $w_1 \in V(DC(n, a, b))$ tepesi D_1 kümesine eklenirse, $\partial(D_1) = a$ olur.

$S_1 = V(DC(n, a, b)) \setminus N_{DC(n, a, b)}[w_1]$ için $DC(n, a, b)[S_1] = C_{b, n-a-b-2}$ olur.

$C_{b, n-a-b-2}$, $n - a - 2$ tepeli kuyruklu yıldız çizgedir. $DC(n, a, b)[S_1]$ çizgesinin

maksimal ∂ -kümesi D_1 kümesine eklenirse D_2 kümesi elde edilir.

$\partial(C_{s,t}) = s + \left\lfloor \frac{t-2}{3} \right\rfloor$ olduğundan, $\partial(D_2) = a + b + \left\lfloor \frac{n - a - b - 4}{3} \right\rfloor$ olur ve D_2

kümesine $V(DC(n, a, b))$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse

$\partial(D_2) < a + b + \left\lfloor \frac{n - a - b - 4}{3} \right\rfloor$ olur.

$w_{n-a-b} \in V(DC(n, a, b))$ tepesi D_3 kümesine eklenirse $\partial(D_3) = b$ olur.

$S_2 = V(DC(n, a, b)) \setminus N_{DC(n, a, b)}[w_{n-a-b}]$ için $DC(n, a, b)[S_2] = C_{a, n-a-b-2}$ olur.

$DC(n, a, b)[S_2]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_3 kümesine eklenirse D_4 kümesi

elde edilir. $\partial(C_{s,t}) = s + \left\lfloor \frac{t-2}{3} \right\rfloor$ olduğundan, $\partial(D_4) = a + b + \left\lfloor \frac{n - a - b - 4}{3} \right\rfloor$

ve $V(DC(n, a, b))$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_4 kümesine eklenirse $\partial(D_4) < a + b + \left\lfloor \frac{n-a-b-4}{3} \right\rfloor$ olur. $v_i \in V(DC(n, a, b))$ ($1 \leq i \leq a$) tepesi D_5 kümesine eklenirse $\partial(D_5) = 0$ olur. $S_3 = V(DC(n, a, b)) \setminus N_{DC(n, a, b)}[v_i]$ için $DC(n, a, b)[S_3] = \overline{K}_{a-1} \cup C_{b, n-a-b-1}$ olur. $DC(n, a, b)[S_3]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_5 kümesine eklenirse D_6 kümesi elde edilir. $\partial(C_{s,t}) = s + \left\lfloor \frac{t-2}{3} \right\rfloor$ olduğundan, $\partial(D_6) = \partial(C_{b, n-a-b-1}) = b + \left\lfloor \frac{n-a-b-3}{3} \right\rfloor$ olur ve $V(DC(n, a, b))$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_6 kümesine eklenirse $\partial(D_6) < b + \left\lfloor \frac{n-a-b-3}{3} \right\rfloor$ olur.

$u_j \in V(DC(n, a, b))$ ($1 \leq j \leq b$) tepesi D_7 kümesine eklenirse $\partial(D_7) = 0$ olur. $S_4 = V(DC(n, a, b)) \setminus N_{DC(n, a, b)}[u_j]$ için $DC(n, a, b)[S_4] = \overline{K}_{b-1} \cup C_{a, n-a-b-1}$ olur. $DC(n, a, b)[S_4]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_7 kümesine eklenirse D_8 kümesi elde edilir. $\partial(C_{s,t}) = s + \left\lfloor \frac{t-2}{3} \right\rfloor$ olduğundan, $\partial(D_8) = \partial(C_{a, n-a-b-1}) = a + \left\lfloor \frac{n-a-b-3}{3} \right\rfloor$ olur ve $V(DC(n, a, b))$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_8 kümesine eklenirse $\partial(D_8) < a + \left\lfloor \frac{n-a-b-3}{3} \right\rfloor$ olur.

$n-a-b = 3k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$) için, $w_1 \in B(D_9)$ veya $w_{n-a-b} \in B(D_9)$ olacak şekilde P_{n-a-b} çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_9 kümesine eklenirse $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan $\partial(D_9) = \left\lfloor \frac{n-a-b}{3} \right\rfloor$ olur ve $w_1 \in B(D_9)$ ise $S_5 = V(DC(n, a, b)) \setminus N_{DC(n, a, b)}[D_9 \cup B(D_9)]$ için $DC(n, a, b)[S_5] = \overline{K}_b \cup K_{1,a}$ olur. $DC(n, a, b)[S_5]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_9 kümesine eklenirse D_{10} kümesi elde edilir. $\partial(K_{1,n}) = n-1$ olduğundan, $\partial(D_{10}) = (a-1) + \left\lfloor \frac{n-a-b}{3} \right\rfloor$ olur. $w_1 \in V(DC(n, a, b))$ tepesi D_{10} kümesine eklenirse D_{11} kümesi elde edilir ve $\partial(D_{11}) = (a+b-3) + \left\lfloor \frac{n-a-b}{3} \right\rfloor$ olur. D_{11} kümesine $V(DC(n, a, b))$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_{11}) < (a+b-3) + \left\lfloor \frac{n-a-b}{3} \right\rfloor$ olur. $w_{n-a-b} \in B(D_9)$ ise $S_6 = V(DC(n, a, b)) \setminus N_{DC(n, a, b)}[D_9 \cup B(D_9)]$ için $DC(n, a, b)[S_6] = \overline{K}_a \cup K_{1,b}$ olur. $DC(n, a, b)[S_6]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_9 kümesine eklenirse D_{10} kümesi elde edilir. $\partial(K_{1,n}) = n-1$ olduğundan, $\partial(D_{10}) = (b-1) + \left\lfloor \frac{n-a-b}{3} \right\rfloor$ olur. $w_1 \in V(DC(n, a, b))$ tepesi D_{10} kümesine eklenirse D_{11} kümesi elde edilir ve $\partial(D_{11}) = (b+a-3) + \left\lfloor \frac{n-a-b}{3} \right\rfloor$ olur. D_{11}

kümesine $V(DC(n, a, b))$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_{11}) < (b + a - 3) + \left\lfloor \frac{n - a - b}{3} \right\rfloor$ olur. $n - a - b = 3k$ veya $n - a - b = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) için, $w_1, w_{n-a-b} \in B(D_{12})$ olacak şekilde P_{n-a-b} çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_{12} kümesine eklenirse $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan $\partial(D_{12}) = \left\lfloor \frac{n - a - b}{3} \right\rfloor$ olur. $w_1 \in V(DC(n, a, b))$ tepesi D_{12} kümesine eklenirse D_{13} kümesi elde edilir ve $\partial(D_{13}) = (b - 2) + \left\lfloor \frac{n - a - b}{3} \right\rfloor$ olur. $w_{n-a-b} \in V(DC(n, a, b))$ tepesi D_{13} kümesine eklenirse D_{14} kümesi elde edilir ve $\partial(D_{14}) = (b + a - 4) + \left\lfloor \frac{n - a - b}{3} \right\rfloor$ olur. D_{14} kümesine $V(DC(n, a, b))$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_{14}) < (b + a - 4) + \left\lfloor \frac{n - a - b}{3} \right\rfloor$ olur. $w_{n-a-b} \in V(DC(n, a, b))$ tepesi D_{12} kümesine eklenirse D_{15} kümesi elde edilir ve $\partial(D_{15}) = \left\lfloor \frac{n - a - b}{3} \right\rfloor + a - 2$ olur. Diferansiyel tanımından,

$$\partial(DC(n, a, b)) = \max\{\partial(D_l)\} \quad (1 \leq l \leq 15) \quad (4.3)$$

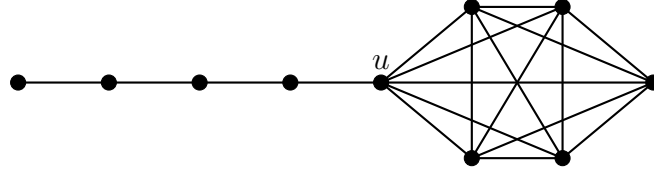
$$\partial(DC(n, a, b)) = a + b + \left\lfloor \frac{n - a - b - 4}{3} \right\rfloor \quad (a, b > 1, n - a - b > 2) \quad (4.4)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 4.2: $a, b > 1$ için $\gamma(DC_{n,a,b}) = 2 + \left\lfloor \frac{n - a - b - 4}{3} \right\rfloor$ olduğu açıktır ve dolayısıyla Teorem 3.3'ten, $n - a - b = 3k$ veya $n - a - b = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) için $DC(n, a, b)$ çift kuyruklu yıldız çizge baskın diferansiyeldir.

4.3 Lolipop Çizge

Tanım 4.3: Lolipop çizge $L_{n,d}$, P_d d tepeli yol çizgenin tepe derecesi 1 olan bir u tepesinin, K_{n-d} $n - d$ tepeli tam çizgenin tüm tepelerine birer ayrıt ile birleşmesiyle elde edilir (Morgan, Mukwembi, ve Swart, 2011).



Şekil 4.3 $n = 10, d = 5$ için lolipop çizge $L_{n,d}$

Teorem 4.3: $L_{n,d}$ ($d > 1$), n tepeli lolipop çizge olmak üzere, $L_{n,d}$ çizgenin diferansiyeli $\partial(L_{n,d}) = n - d + \left\lfloor \frac{d-2}{3} \right\rfloor$ olur.

İspat: $u \in V(L_{n,d})$ tepesi, D_1 kümesine eklenirse $D_1 = \{u\}$ ve $\partial(D_1) = n - d$ olur.

$S_1 = V(L_{n,d}) \setminus N_{L_{n,d}}[u]$ için $L_{n,d}[S_1] = P_{d-2}$ olur. $L_{n,d}[S_1]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_1 kümesine eklenirse D_2 kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan

$\partial(D_2) = n - d + \left\lfloor \frac{d-2}{3} \right\rfloor$ olur. D_2 kümesine $V(L_{n,d})$ tepeler kümesinin herhangi bir

alt kümesi eklenirse $\partial(D_2) < n - d + \left\lfloor \frac{d-2}{3} \right\rfloor$ olur.

K_{n-d} çizgesinin bir tepesi D_3 kümesine eklenirse $\partial(D_3) = n - d - 1$ olur. $S_2 =$

$V(L_{n,d}) \setminus N_{L_{n,d}}[D_3]$ için $L_{n,d}[S_2] = P_{d-1}$ olur. $L_{n,d}[S_2]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_3 kümesine eklenirse D_4 kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan $\partial(D_4) =$

$n - d - 1 + \left\lfloor \frac{d-1}{3} \right\rfloor$ olur. D_4 kümesine $V(L_{n,d})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt

kümesi eklenirse $\partial(D_4) < n - d - 1 + \left\lfloor \frac{d-1}{3} \right\rfloor$ olur.

$u \in B(D_5)$ olacak şekilde P_d çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_5 kümesine eklenirse, $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan, $\partial(D_5) = \left\lfloor \frac{d}{3} \right\rfloor$ olur.

K_{n-d} çizgesinin ∂ -kümesi D_5 kümesine eklenirse D_6 kümesi elde edilir. $\partial(K_n) = n - 2$ olduğundan $\partial(D_6) = \left\lfloor \frac{d}{3} \right\rfloor + n - d - 2$ olur. D_6 kümesine $V(L_{n,d})$ tepeler

kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_6) < \left\lfloor \frac{d}{3} \right\rfloor + n - d - 2$ olur.

Diferansiyel tanımından,

$$\partial(L_{n,d}) = \max\{\partial(D_i)\} \quad (1 \leq i \leq 6) \quad (4.5)$$

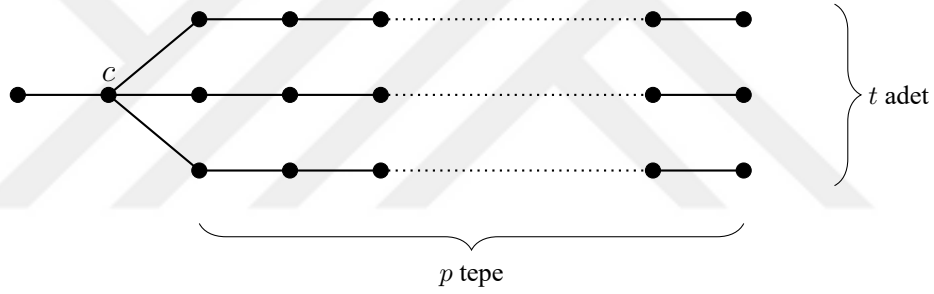
$$\partial(L_{n,d}) = n - d + \left\lfloor \frac{d-2}{3} \right\rfloor \quad (d > 1) \quad (4.6)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 4.3: $d > 1$ için $\gamma(L_{n,d}) = 1 + \left\lfloor \frac{d-2}{3} \right\rfloor$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, Teorem 3.3'ten, $d = 3k + 2$ veya $d = 3k + 4$ ($k \in \mathbb{Z}$) için $L_{n,d}$ lolipop çizge baskın diferansiyeldir.

4.4 E_p^t Çizge

Tanım 4.4: E_p^t çizge, 2 tepeli bir yol çizge ile bu yol çizgenin tepelerinden birinin her biri p tepeye sahip olan t adet yol çizgeyle birleştirilmesinden elde edilen $pt + 2$ tepeli bir ağaçtır (Cormen, Leiserson, Rivest, ve Stein, 2009). c tepesi, t adet yol çizgeyle birleştirilen 2 tepeli yol çizgenin tepelerinden biri olmak üzere, c tepesinin derecesi $\deg(c) = t + 1$ 'dir.



Şekil 4.4 $pt + 2$ tepeli E_p^t çizge

Teorem 4.4: E_p^t , $pt + 2$ tepeli ağaç çizge olmak üzere, E_p^t çizgenin diferansiyeli $\partial(E_p^t) = t \left(\left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor + 1 \right)$ olur.

İspat: $c \in V(E_p^t)$ tepesi D_1 kümesine eklenirse $\partial(D_1) = t$ olur.

$S_1 = V(E_p^t) \setminus N_{E_p^t}[c]$ için $E_p^t[S_1] = \bigcup_{i=1}^t P_{p-1}$ olur. $E_p^t[S_1]$ çizgesinin maksimal

∂ -kümesi D_1 kümesine eklenirse D_2 kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan

$\partial(D_2) = t + t \left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor$ olur. D_2 kümesine $V(E_p^t)$ tepeler kümesinin herhangi bir alt

kümesi eklenirse $\partial(D_2) < t + t \left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor$ olur.

P_2 çizgesinde c tepesine komşu olan diğer uç tepe D_3 kümesine eklenirse, $\partial(D_3) = 0$ olur.

$S_2 = V(E_p^t) \setminus N_{E_p^t}[D_3]$ için $E_p^t[S_2] = \bigcup_{i=1}^t P_p$ olur. $E_p^t[S_2]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_3 kümesine eklenirse D_4 kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan $\partial(D_4) = t \left\lfloor \frac{p}{3} \right\rfloor$ olur. D_4 kümesine $V(E_p^t)$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_4) < t \left\lfloor \frac{p}{3} \right\rfloor$ olur.

$c \in B(D_5)$ olacak şekilde p tepeli t yol çizgeden birinin maksimal ∂ -kümesi D_5 kümesine eklenirse $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan $\partial(D_5) = \left\lfloor \frac{p+1}{3} \right\rfloor$ olur.

E_p^t çizgesinde p tepeli $t-1$ yol çizgenin maksimal ∂ -kümeleri D_5 kümesine eklenirse D_6 kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan $\partial(D_6) = \left\lfloor \frac{p+1}{3} \right\rfloor + (t-1) \left\lfloor \frac{p}{3} \right\rfloor$ olur. D_6 kümesine $V(E_p^t)$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_6) < t + t \left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor$ olur.

Diferansiyel tanımından,

$$\partial(E_p^t) = \max\{\partial(D_i)\} \quad (1 \leq i \leq 6) \quad (4.7)$$

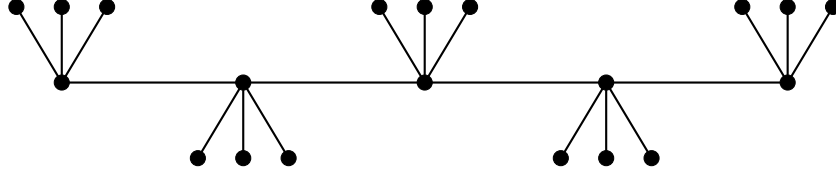
$$\partial(E_p^t) = t \left(\left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor + 1 \right) \quad (4.8)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 4.4: $\gamma(E_p^t) = 1 + t \left\lfloor \frac{p-1}{3} \right\rfloor$ olduğu açıktır ve dolayısıyla Teorem 3.3'ten, $p = 3k$ veya $p = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) için E_p^t çizgesi baskın diferansiyeldir.

4.5 Düzenli Tırtıl Çizge

Tanım 4.5: $T_{n,m}$, $n(m+1)$ tepeli düzenli tırtıl çizge, P_n , n tepeli yol çizgenin her bir tepesine bitişik bir ayrıtla tepe derecesi 1 olan m adet tepe eklenmesiyle elde edilir (Gallian, 2012). $T_{n,m}$ düzenli tırtıl çizge $T_{n,m} = P_n \circ mK_1$ olacak şekilde taçlama işlemi ile de tanımlanabilir.



Şekil 4.5 $n = 5$ ve $m = 3$ için düzenli tırtıl çizge $T_{n,m}$

Sonuç 4.5: $T_{n,m}$, $n(m+1)$ tepeli düzenli tırtıl çizge olmak üzere, $T_{n,m}$ düzenli tırtıl

$$\text{çizgenin diferansiyeli } \partial(T_{n,m}) = \begin{cases} n - \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil, & m = 1 \text{ ise;} \\ n(m-1), & m \geq 2 \text{ ise.} \end{cases}$$

İspat: $T_{n,m}$, $n(m+1)$ tepeli düzenli tırtıl çizge $T_{n,m} = P_n \circ mK_1$ taçlama işlemi ile de tanımlanabildiğinden, $|V(P_n)| = n$, $|V(mK_1)| = m$ ve $\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ olduğundan, Önerme 3.2(a)-(b)'den, $T_{n,m}$ düzenli tırtıl çizgenin diferansiyeli

$$\partial(T_{n,m}) = \begin{cases} n - \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil, & m = 1 \text{ ise;} \\ n(m-1), & m \geq 2 \text{ ise.} \end{cases} \quad \text{olarak elde edilir ve ispat tamamlanır.}$$

Açıklama 4.5: $T_{n,m}$, $n(m+1)$ tepeli düzenli tırtıl çizge için $\gamma(T_{n,m}) = n$ olduğu açıktır, dolayısıyla Teorem 3.3'ten, $m \geq 2$ için $T_{n,m}$ düzenli tırtıl çizge baskın diferansiyeldir.

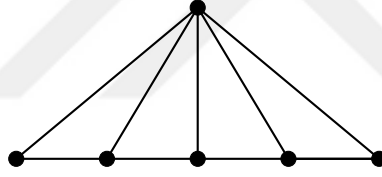
BÖLÜM BEŞ

ÇEVRE BENZERİ ÇİZGELERİN DİFERANSİYELİ

Bu bölümde, çevre benzeri çizge tiplerinden yelpaze çizge, k -piramit çizge ve k -sayfalı n -gen kitap çizgenin diferansiyel değerleri hesaplanmıştır, baskın diferansiyel çizgeler belirlenmiştir.

5.1 Yelpaze Çizge

Tanım 5.1: Yelpaze çizge F_n , n tepeli C_n çevre çizgenin bir tepesinin çizgenin diğer tüm tepeleri ile birer ayrıt ile birleştirilmesiyle elde edilir. $n = 3$ için $F_3 = C_3$ olur. Yelpaze çizge F_n , $F_n = P_{n-1} + K_1$ olmak üzere $n - 1$ tepeli P_{n-1} yol çizge ve 1 tepeli K_1 tam çizgenin toplamı olarak da tanımlanabilir.



Şekil 5.1 $n = 6$ için yelpaze çizge F_n

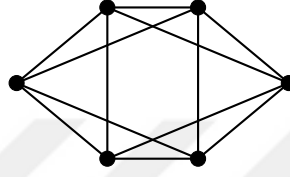
Sonuç 5.1: F_n , n tepeli yelpaze çizge olmak üzere, F_n yelpaze çizgenin diferansiyeli $\partial(F_n) = n - 2$ olur.

İspat: F_n , n tepeli yelpaze çizge $F_n = P_{n-1} + K_1$ toplama işlemi ile tanımlanabildiğinden, $\Delta(K_1) = 0$, $|V(K_1)| = 1$ ve $\Delta(K_1) = |V(K_1)| - 1$ olduğundan, Önerme 3.1(b)'den
 $\partial(F_n) = \partial(P_{n-1} + K_1) = |V(P_{n-1})| + |V(K_1)| - 2 = n - 2$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 5.1: F_n , n tepeli yelpaze çizge için $\gamma(F_n) = 1$ olduğu açıktır, dolayısıyla Teorem 3.3'ten, F_n , n tepeli yelpaze çizge baskın diferansiyeldir.

5.2 k -Piramit Çizge

Tanım 5.2: k -piramit çizge $kP(n)$, C_n , n tepeli çevre çizge ve N_k , k adet izole tepeden oluşan bir çizge olmak üzere, $kP(n) = C_n + N_k$ toplama işlemi ile tanımlanır. 2-piramit çizge $BP(n)$, $BP(n) = C_n + N_2$ toplama işlemi ile tanımlanır ve bu çizgeye ikipiramit çizge denir. 1-piramit çizge, W_n , $n + 1$ tepeli tekerlek çizgedir ve $W_n = C_n + N_1$ toplama işlemi ile tanımlanır (Gallian, 2012).



Şekil 5.2 $n = 4$ için 6 tepeli ikipiramit çizge $BP(n)$

Sonuç 5.2: $kP(n)$, $n + k$ tepeli k -piramit çizge olmak üzere, $kP(n)$ k -piramit çizgenin

$$\partial(kP(n)) = \begin{cases} n + k - 2, & n = 3 \text{ veya } k = 1 \text{ ise;} \\ n + k - 3, & n = 4 \text{ ve } k \geq 2 \text{ veya } n \geq 4 \text{ ve } k = 2 \text{ ise;} \\ n + k - 4, & n \geq 5 \text{ ve } k \geq 3 \text{ ise.} \end{cases}$$

İspat: $kP(n)$ k -piramit çizge $kP(n) = C_n + N_k$ toplama işlemi ile tanımlanabildiğinden, $|V(G_1)| = n$, $\Delta(G_1) = 2$, $|V(G_2)| = k$, $\Delta(G_2) = 0$ olduğundan, Önerme 3.1(a)'dan $n + k$ tepeli $kP(n)$ k -piramit çizgenin diferansiyeli için $n + k - 4 \leq \partial(kP(n)) \leq n + k - 2$ aralığı elde edilir. Önerme 3.1(b)-(d)'den,

$$\partial(kP(n)) = \partial(C_n + N_k) = \begin{cases} n + k - 2, & n = 3 \text{ veya } k = 1 \text{ ise;} \\ n + k - 3, & n = 4 \text{ ve } k \geq 2 \text{ veya } n \geq 4 \text{ ve } k = 2 \text{ ise;} \\ n + k - 4, & n \geq 5 \text{ ve } k \geq 3 \text{ ise.} \end{cases}$$

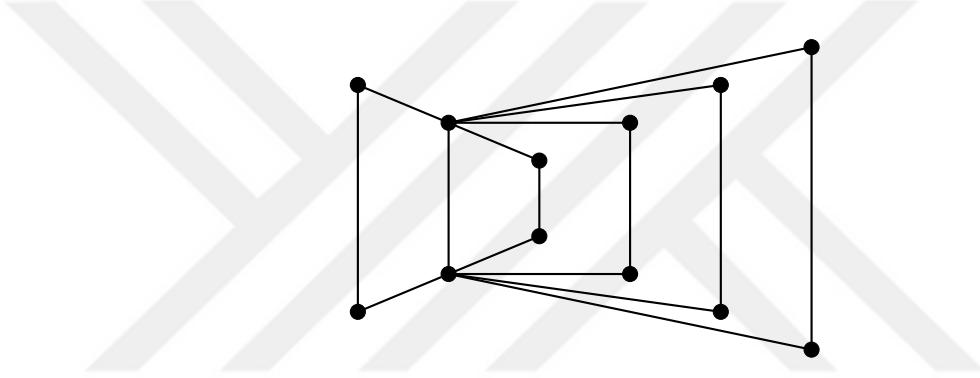
elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 5.2: $kP(n)$, $n + k$ tepeli k -piramit çizge için $\gamma(kP(n)) = \min \left\{ k, \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \right\}$

olduğu açıktır, dolayısıyla Teorem 3.3'ten, $n = 3$ veya $k = 1$ ise; $n = 5$ ve $k \geq 3$ ise; $n = 6$ ve $k \geq 3$ ise $kP(n)$ k -piramit çizge baskın diferansiyeldir.

5.3 n -gen Kitap Çizge

Tanım 5.3: k -sayfalı n -gen kitap çizge $B(n, k)$, k adet n ($n > 3$) tepeli C_n çevre çizgenin ortak bir ayrıtı paylaşmasıyla elde edilir. $B(n, k)$ k -sayfalı n -gen kitap çizgenin tepelerinin dereceleri 2 veya $k + 1$ 'dir (Gallian, 2012). $k = 1$ için $B(n, k) = C_n$ olur.



Şekil 5.3 $n = 4, k = 5$ için k -sayfalı n -gen kitap çizge $B(n, k)$

Teorem 5.3: $B(n, k)$ ($k > 1$), $(n - 2)k + 2$ tepeli k -sayfalı n -gen kitap çizge olmak üzere, $B(n, k)$ k -sayfalı n -gen kitap çizgenin diferansiyeli $t \in \mathbb{Z}$ için $\partial(B(n, k)) =$

$$\begin{cases} \frac{nk}{3}, & n = 3t \quad \text{ise;} \\ k \left(\left\lfloor \frac{n-4}{3} \right\rfloor + 2 \right) - 2, & n \neq 3t \quad \text{ise.} \end{cases}$$

İspat: $u \in V(B(n, k))$, tepe derecesi $k + 1$ olan bir tepe olmak üzere, u tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_1 = \{u\}$ olur ve $|N_{B(n, k)}(u)| = k + 1$ olduğundan $\partial(D_1) = k$ elde edilir.

$S_1 = V(B(n, k)) \setminus N_{B(n, k)}[u]$ için $B(n, k)[S_1] = \bigcup_{i=1}^k P_{n-3}$ olur. $B(n, k)[S_1]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_1 kümesine eklenirse D_2 kümesi elde edilir.

$\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan $\partial(D_2) = k \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + k$ olur.

$n = 3t + 1$ ($t \in \mathbb{Z}$) için, $v \in V(B(n, k))$ ($v \neq u$) tepe derecesi $k + 1$ olan bir tepe

olmak üzere, v tepesi D_2 kümesine eklenirse D_3 kümesi elde edilir ve $\partial(D_3) \leq (k \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + k) + (k-2) = k \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + 2k-2$ olur. D_3 kümesine $V(B(n, k))$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_3) < k \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + 2k-2$ olur.

D_4 kümesine u ve v tepeleri eklenirse $D_4 = \{u, v\}$ ve $\partial(D_4) = 2k-2$ olur.

$n \neq 3t+1$ ($t \in \mathbb{Z}$) olmak üzere, $S_2 = V(B(n, k)) \setminus N_{B(n, k)}[D_3]$ için $B(n, k)[S_2] = \bigcup_{i=1}^k P_{n-4}$ olur. $B(n, k)[S_2]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_4 kümesine

eklenirse D_5 kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan

$\partial(D_5) = 2k-2 + k \left\lfloor \frac{n-4}{3} \right\rfloor$ olur. D_5 kümesine $V(B(n, k))$ tepeler kümesinin

herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_5) < 2k-2 + k \left\lfloor \frac{n-4}{3} \right\rfloor$ olur.

Diferansiyel tanımından, $k > 1$ ve $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\partial(B(n, k)) = \max\{\partial(D_i)\} \quad (1 \leq i \leq 5) \quad (5.1)$$

$$\partial(B(n, k)) = \begin{cases} k \left(\left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + 1 \right), & n = 3t \text{ ise;} \\ k \left(\left\lfloor \frac{n-4}{3} \right\rfloor + 2 \right) - 2, & n \neq 3t \text{ ise.} \end{cases} \quad (5.2)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 5.3: $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\gamma(B(n, k)) = \begin{cases} 1 + k \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor, & n = 3t \text{ veya } n = 3t+2 \text{ ise;} \\ 2 + k \left\lfloor \frac{n-4}{3} \right\rfloor, & n = 3t+1 \text{ ise.} \end{cases} \quad \text{olduğu açıktır.}$$

Dolayısıyla Teorem 3.3'ten, k -sayfalı n -gen kitap çizge $n = 3t+2$ ve $k = 2$ için veya $n = 3t$ için veya $n = 3t+1$ için baskın diferansiyeldir.

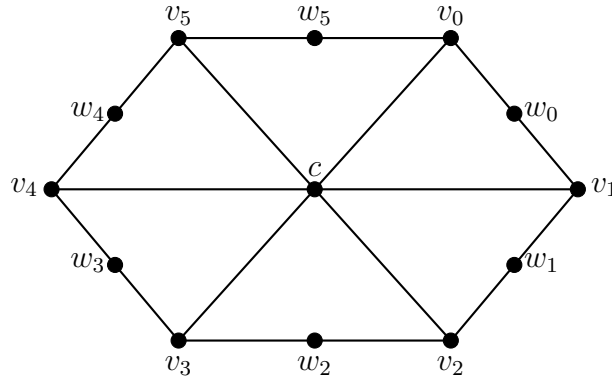
BÖLÜM ALTI

TEKERLEK BENZERİ ÇİZGELERİN DİFERANSİYELİ

Bu bölümde, tekerlek benzeri çizgeler olan dişli çizge, dümen çizge, ayçiçeği çizge ve arkadaşlık çizgenin diferansiyel değeri hesaplanmıştır, baskın diferansiyel çizgeler belirlenmiştir.

6.1 Dişli Çizge

Tanım 6.1: Dişli çizge, dış çevrede bulunan her bir tepe çifti arasına bir tepe eklenmesiyle elde edilen bir tekerlek çizgedir ve G_n ile gösterilir. G_n dişli çizge $2n + 1$ tepe ve $3n$ ayrıta sahiptir (Gallian, 2012). G_n dişli çizgenin dış çevresi $2n$ tepe içerir. Bu tepeler $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ ve $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ olmak üzere $\forall v_i \in V(G_n)$ için $\deg(v_i) = 3$ ve $\forall w_i \in V(G_n)$ için $\deg(w_i) = 2$ olur ($0 \leq i \leq n - 1$). w_i tepesi, v_i ve v_{i+1} ($0 \leq i \leq n - 1$) $((i + 1) \bmod(n))$ tepelerine komşu olan bir tepe olsun. c tepesi, G_n dişli çizgenin merkez tepesi olmak üzere $\deg(c) = n$ olur.



Şekil 6.1 $n = 6$ için 13 tepeli, 18 ayrıtlı dişli çizge G_n

Teorem 6.1: $G_n, 2n + 1$ tepeli dişli çizge olmak üzere, G_n dişli çizgenin diferansiyeli

$$\partial(G_n) = \begin{cases} 2 + \left\lfloor \frac{2n-3}{3} \right\rfloor, & n = 3 \text{ ise;} \\ n - 1, & n \geq 4 \text{ ise.} \end{cases}$$

İspat: $c \in V(G_n)$ merkez tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_1 = \{c\}$, $B(D_1) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$, $\partial(D_1) = n - 1$ olur ve D_1 kümesine $V(G_n)$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_1) \leq n - 1$ olur.

$v_i \in V(G_n)$ ($0 \leq i \leq n - 1$) tepesi G_n çizgesinde tepe derecesi 3 olan bir tepe olmak üzere eğer v_i tepesi D_2 kümesine eklenirse $D_2 = \{v_i\}$, $B(D_2) = \{c, w_{i-1}, w_i\}$ ($((i - 1) \bmod(n))$) ve $\partial(D_2) = 2$ olur.

$S_1 = V(G_n) \setminus N_{G_n}[v_i]$ için $G_n[S_1] = C_{2n-3}$ olur. $G_n[S_1]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_2 kümesine eklensin. Yeni elde edilen küme D_3 kümesi olsun. $\partial(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan, $\partial(D_3) = \partial(D_1) + \partial(C_{2n-3}) = 2 + \left\lfloor \frac{2n-3}{3} \right\rfloor$ olur ve D_3 kümesine $V(G_n)$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_3) < 2 + \left\lfloor \frac{2n-3}{3} \right\rfloor$ olur.

$w_i \in V(G_n)$ ($0 \leq i \leq n - 1$) tepesi G_n çizgesinde tepe derecesi 2 olan bir tepe olmak üzere eğer w_i tepesi D_4 kümesine eklenirse $D_4 = \{w_i\}$, $B(D_4) = \{v_i, v_{i+1}\}$ ($((i + 1) \bmod(n))$) ve $\partial(D_4) = 1$ olur.

$S_2 = V(G_n) \setminus \{c, N_{G_n}[w_i]\}$ için $G_n[S_2] = C_{2n-3}$ olur. $G_n[S_2]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_4 kümesine eklensin. Yeni elde edilen küme D_5 kümesi olsun. $\partial(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan ve $G_n[S_2]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi en az 1 adet tepe derecesi 3 olan tepe içerdiğinden, $\partial(D_5) = \partial(D_4) + (\partial(C_{2n-3}) + 1) = 2 + \left\lfloor \frac{2n-3}{3} \right\rfloor$ elde edilir ve D_5 kümesine $V(G_n)$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_5) = 2 + \left\lfloor \frac{2n-3}{3} \right\rfloor$ olur.

Diferansiyel tanımından,

$$\partial(G_n) = \max\{\partial(D_k)\} \quad (1 \leq k \leq 5) \quad (6.1)$$

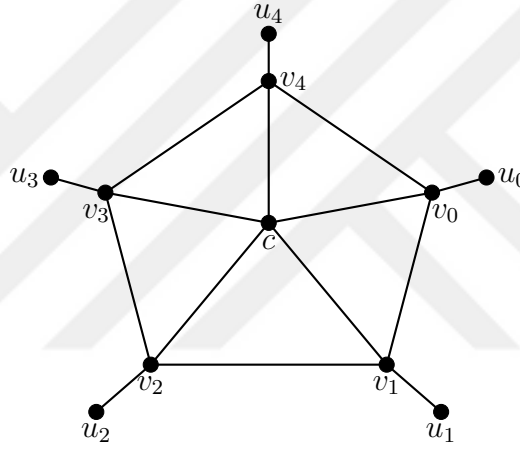
$$\partial(G_n) = \begin{cases} 2 + \left\lfloor \frac{2n-3}{3} \right\rfloor, & n \leq 6 \quad \text{ise;} \\ n - 1, & n \geq 4 \quad \text{ise.} \end{cases} \quad (6.2)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 6.1: $\gamma(G_n) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$ olduğu açıktır ve dolayısıyla Teorem 3.3'ten, $n = 3, 4, 6$ için G_n dışlı çizgeler baskın diferansiyeldir.

6.2 Dümen Çizge

Tanım 6.2: Dümen çizge H_n , W_n tekerlek çizgenin dış çevresinde bulunan her bir tepeye bitişik bir ayrıtla tepe derecesi 1 olan komşu bir tepe eklenmesiyle elde edilen $2n + 1$ tepeli bir çizgedir. H_n dümen çizge $V(H_n) = \{v_i | 0 \leq i \leq n - 1\} \cup \{u_i | 0 \leq i \leq n - 1\} \cup \{c\}$ tepeler kümesi ve $E(H_n) = \{v_i v_{i+1} | 0 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_i u_i | 0 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_i c | 0 \leq i \leq n - 1\} ((i + 1) \bmod(n))$ ayrıtlar kümesine sahiptir (Gallian, 2012). c tepesi, H_n dümen çizgenin merkez tepesi olmak üzere $\deg(c) = n$ olur. H_n dümen çizgede, $\deg(v_i) = 4$ ve $\deg(u_i) = 1$ ($0 \leq i \leq n - 1$) olur.



Şekil 6.2 $n = 5$ için 11 tepeli dümen çizge H_n

Teorem 6.2: H_n , $2n + 1$ tepeli dümen çizge olmak üzere, H_n dümen çizgenin diferansiyeli, $\partial(H_n) = \begin{cases} 3 + 2 \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor, & n = 3 \text{ ise;} \\ n - 1, & n \geq 4 \text{ ise.} \end{cases}$

İspat: $c \in V(H_n)$ merkez tepesi D_1 kümesine eklenirse, $D_1 = \{c\}$, $B(D_1) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$, $\partial(D_1) = n - 1$ olur ve D_1 kümesine $V(H_n)$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_1) < n - 1$ olur. $v_i \in V(H_n)$ ($0 \leq i \leq n - 1$), tepe derecesi 4 olan bir tepe olmak üzere, v_i tepesi D_2 kümesine eklenirse, $D_2 = \{v_i\}$, $B(D_2) = \{c, u_i, v_{i+1}, v_{i-1}\} ((i + 1) \bmod(n), (i - 1) \bmod(n))$ ve $\partial(D_2) = 3$ olur. $S_1 = V(H_n) \setminus N_{H_n}[v_i]$ için P_n^* n tepeli yol çizgenin her bir tepesine bitişik bir ayrıtla

tepe derecesi 1 olan bir tepe eklenmesiyle elde edilen çizge olmak üzere $H_n[S_1] = P_{n-3}^*$ olur. D_2 kümesine P_{n-3} çizgesinin maksimal ∂ -kümesi eklenmesiyle elde edilen küme D_3 kümesi olsun. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan ve P_{n-3} çizgesinin her bir tepesi tepe derecesi 1 olan bir tepeye komşu olduğundan, $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$\partial(D_3) = \begin{cases} \partial(D_2) + \partial(P_{n-3}) + \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor, & n = 3k \text{ veya } n = 3k + 1 \text{ ise;} \\ \partial(D_2) + \partial(P_{n-3}) + \left\lceil \frac{n-3}{3} \right\rceil, & n = 3k + 2 \text{ ise.} \end{cases} \quad (6.3)$$

$$\partial(D_3) = \begin{cases} 3 + 2 \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor, & n = 3k \text{ veya } n = 3k + 1 \text{ ise;} \\ 3 + \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n-3}{3} \right\rceil, & n = 3k + 2 \text{ ise.} \end{cases} \quad (6.4)$$

elde edilir ve D_3 kümesine $V(H_n)$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse,

$$\partial(D_3) < \begin{cases} 3 + 2 \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor, & n = 3k \text{ veya } n = 3k + 1 \text{ ise;} \\ 3 + \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n-3}{3} \right\rceil, & n = 3k + 2 \text{ ise.} \end{cases} \quad (6.5)$$

olur.

$u_i \in V(H_n)$ ($0 \leq i \leq n-1$), tepe derecesi 1 olan bir tepe olmak üzere, u_i tepesi D_4 kümesine eklenirse $D_4 = \{u_i\}$, $B(D_4) = \{v_i\}$ ve $\partial(D_4) = 0$ olur. $S_2 = V(H_n) \setminus N_{H_n}[u_i]$ için H_n çizgesinin c merkez tepesi, tepe derecesi 4 olan $n-1$ tepe ve tepe derecesi 1 olan $n-1$ tepesini içeren $H_n[S_2]$ çizgesi elde edilir. Ayrıca $H_n[S_2]$ çizgesinde tepe derecesi 4 olan $n-1$ tepe P_{n-1} çizgesini etkilenmiş alt çizge olarak içerir. Eğer D_4 kümesine P_{n-1} çizgesinin maksimal ∂ -kümesi eklenirse D_5 kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan ve tepe derecesi 4 olan her tepe, tepe derecesi 1 olan bir tepe ve c merkez tepesine komşu olduğundan, $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak

üzere,

$$\partial(D_5) = \begin{cases} \partial(D_4) + \partial(P_{n-1}) + 1 + \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor, & n = 3k + 1 \text{ veya } n = 3k + 2 \text{ ise;} \\ \partial(D_4) + \partial(P_{n-1}) + 1 + \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil, & n = 3k \text{ ise.} \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\partial(D_5) = \begin{cases} 2 \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1, & n = 3k + 1 \text{ veya } n = 3k + 2 \text{ ise;} \\ \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil + 1, & n = 3k \text{ ise.} \end{cases} \quad (6.7)$$

elde edilir ve D_5 kümesine $V(H_n)$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse,

$$\partial(D_5) < \begin{cases} 2 \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1, & n = 3k + 1 \text{ veya } n = 3k + 2 \text{ ise;} \\ \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil + 1, & n = 3k \text{ ise.} \end{cases} \quad (6.8)$$

olur.

Diferansiyel tanımından,

$$\partial(H_n) = \max\{\partial(D_l)\} \quad (1 \leq l \leq 5) \quad (6.9)$$

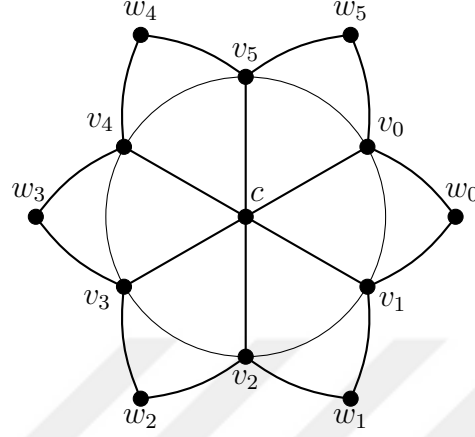
$$\partial(H_n) = \begin{cases} 3 + 2 \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor, & n = 3 \text{ ise;} \\ n - 1, & n \geq 4 \text{ ise.} \end{cases} \quad (6.10)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

6.3 Ayçiçeği Çizge

Tanım 6.3: Ayçiçeği çizge SF_n , c merkez tepe ve tepeleri $v_0, \dots, v_{n-1}$ olan n tepeli çevreden oluşan tekerlek çizge ve ek olarak $w_0, \dots, w_{n-1}$ olmak üzere n tepeden oluşur. w_i ($0 \leq i \leq n-1$) tepesi v_i ve v_{i+1} tepelerine komşudur ($(i+1) \bmod(n)$). Ayçiçeği

çizge SF_n , $2n + 1$ tepe ve $4n$ ayrıta sahiptir (Gallian, 2012). SF_n ayçiçeği çizgenin merkez tepesi c 'nin tepe derecesi $\deg(c) = n$, v_i ($0 \leq i \leq n - 1$) tepesinin derecesi $\deg(v_i) = 5$ ve w_i ($0 \leq i \leq n - 1$) tepesinin derecesi $\deg(w_i) = 2$ olur.



Şekil 6.3 $n = 6$ için 13 tepeli, 24 ayrıtlı ayçiçeği çizge SF_n

Teorem 6.3: SF_n , $2n + 1$ tepeli ayçiçeği çizge olmak üzere, SF_n ayçiçeği çizgenin diferansiyeli $\partial(SF_n) = n + 1$ olur.

İspat: $c \in V(SF_n)$ merkez tepe D_1 kümesine eklenirse $D_1 = \{c\}$, $B(D_1) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ ve $\partial(D_1) = n - 1$ olur. $V(SF_n)$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_1 kümesine eklenirse $\partial(D_1) \leq n - 1$ olur.

$n \neq 3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) olmak üzere SF_n çizgesinde $v_0, \dots, v_{n-1}$ tepelerini içeren n tepeli çevrenin maksimal ∂ -kümesi D_2 kümesine eklenirse $|D_2| = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ ve $\partial(D_2) = n + 1$ olur. $V(SF_n)$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_2 kümesine eklenirse $\partial(D_2) < n + 1$ olur.

$n = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) olmak üzere SF_n çizgesinde $v_0, \dots, v_{n-1}$ tepelerini içeren n tepeli çevrenin maksimal ∂ -kümesi D_2 kümesine eklenirse $|D_2| = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ ve $\partial(D_2) = n$ olur. $v_t \in V(SF_n)$ ($0 \leq t \leq n - 1, v_t \notin D_2, v_t \notin B(D_2)$) tepesi D_2 kümesine eklenirse $|D_2| = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ ve $\partial(D_2) = n + 1$ olur. $V(SF_n)$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_2 kümesine eklenirse $\partial(D_2) < n + 1$ olur.

$w_i \in V(SF_n)$ ($0 \leq i \leq n - 1$) tepesi D_3 kümesine eklenirse $D_3 = \{w_i\}$, $B(D_3) = \{v_i, v_{i+1}\} ((i + 1) \bmod(n))$ ve $\partial(D_3) = 1$ olur.

$n \neq 3k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) olmak üzere SF_n çizgesinde $v_0, \dots, v_{n-1}$ tepelerini içeren n tepeli çevre için $S_1 = V(C_n) \setminus B(D_3)$ olsun. O zaman $C_n[S_1] = P_{n-2}$ olur. $C_n[S_1]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_3 kümesine eklenirse D_4 kümesi elde edilir. D_4 kümesi için $|D_4| = 1 + \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor$ ve $\partial(D_4) = n$ olur. $V(SF_n)$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_4 kümesine eklenirse $\partial(D_4) < n$ olur.

$n = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) olmak üzere SF_n çizgesinde $v_0, \dots, v_{n-1}$ tepelerini içeren n tepeli çevre için $S_2 = V(C_n) \setminus B(D_3)$ olsun. O zaman $C_n[S_2] = P_{n-2}$ olur. $C_n[S_2]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_3 kümesine eklenirse D_4 kümesi elde edilir. $k > 1$ için $|D_4| = 1 + \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor$ ve $\partial(D_4) = n - 1$ olur. $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $v_p \in V(SF_n)$ ($0 \leq p \leq n - 1, v_p \notin D_4, v_p \notin B(D_4)$) tepesi D_4 kümesine eklenirse $|D_4| = 2 + \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor$ ve $\partial(D_4) = n$ olur. $V(SF_n)$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_4 kümesine eklenirse $\partial(D_4) < n$ olur.

Diferansiyel tanımından,

$$\partial(SF_n) = \max\{\partial(D_r)\} \quad (1 \leq r \leq 4) \quad (6.11)$$

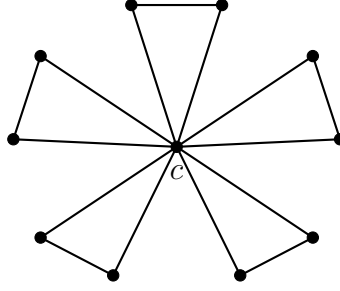
$$\partial(SF_n) = n + 1 \quad (6.12)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 6.3: SF_n ayçiçeği çizge için $\gamma(SF_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ olduğu açıktır. Dolayısıyla Teorem 3.3'ten, $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}^+, k > 1$) için $2n + 1$ tepeli ayçiçeği çizge SF_n baskın diferansiyeldir.

6.4 Arkadaşlık Çizge

Tanım 6.4: Arkadaşlık çizge f_n , ortak bir tepeyi paylaşan n adet 3 tepeli çevreden oluşur. Arkadaşlık çizge f_n , $f_n = K_1 + nK_2$ olarak da tanımlanabilir. f_n arkadaşlık çizgenin merkez tepesi c 'nin tepe derecesi $\deg(c) = 2n$ 'dir. Merkez tepe dışındaki diğer tepelerin dereceleri 2'dir.



Şekil 6.4 $n = 5$ için 11 tepeli arkadaşlık çizge f_n

Sonuç 6.4: f_n , $2n + 1$ tepeli arkadaşlık çizge olmak üzere, f_n arkadaşlık çizgenin diferansiyeli $\partial(f_n) = 2n - 1$ olur.

İspat: f_n arkadaşlık çizge $f_n = K_1 + nK_2$ toplama işlemi ile tanımlanabildiğinden, $|V(K_1)| = 1$, $\Delta(G_1) = 0$ ve $\Delta(G_1) = |V(K_1)| - 1$ olduğundan, Önerme 3.1(b)'den, $\partial(f_n) = \partial(K_1 + nK_2) = |V(K_1)| + |V(nK_2)| - 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 6.4: f_n arkadaşlık çizge için $\gamma(f_n) = 1$ olduğu açıktır, dolayısıyla Teorem 3.3'ten, $2n + 1$ tepeli f_n arkadaşlık çizge baskın diferansiyel bir çizgedir.

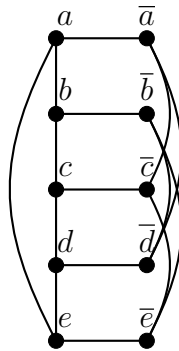
BÖLÜM YEDİ

TÜMLEYEN PRİZMALARIN DİFERANSİYELİ

Bu bölümde, özel çizge tiplerinin tümleyen prizmalarının diferansiyel değerleri hesaplanmıştır ve baskın diferansiyel tümleyen prizmalar belirlenmiştir. Açıklık değeri küçük olan bir çizgenin tümleyen prizmasının diferansiyeli için en iyi alt sınır değeri bulunmuştur. Az sayıda tepe içeren bir çizgenin tümleyen prizması için diferansiyel değerleri hesaplanmıştır. Bir çizgenin veya bu çizgenin tümleyeninin çapı küçük ise ilgili çizgenin tümleyen prizmasının diferansiyeli verilmiştir.

Tanım 7.1: $\overline{G}$, G çizgesinin tümleyen çizgesi olsun. G çizgesinin tümleyen prizması, G ve $\overline{G}$ çizgelerinin ayrık $G \cup \overline{G}$ birleşiminde aynı etiketlemeye sahip tepeler arasına birer ayrıt eklenmesiyle oluşur ve $G\overline{G}$ ile gösterilir (Haynes, Henning, Slater, ve van der Merwe, 2007). $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ tepeler kümesi ve $E(G)$ ayrıtlar kümesine sahip G çizgesi için, G çizgesinin tümleyen prizması $G\overline{G}$, $V(G\overline{G}) = \{v_1, \dots, v_n\} \cup \{\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n\}$ tepeler kümesi ve $E(G\overline{G}) = E(G) \cup \{\overline{v}_i\overline{v}_j | 1 \leq i < j \leq n \text{ ve } v_i v_j \notin E(G)\} \cup \{v_1\overline{v}_1, \dots, v_n\overline{v}_n\}$ ayrıtlar kümesine sahiptir.

$C_5\overline{C}_5$ tümleyen prizması Petersen çizgedir. $G = K_n$ için, $K_n\overline{K}_n$ tümleyen prizması $K_n \circ K_1$ taçlama işlemi sonucunda elde edilen çizgedir.



Şekil 7.1 Petersen çizge $C_5\overline{C}_5$

Önerme 7.1: (Haynes, Henning, ve van der Merwe, 2009)

- a) $G = K_n \Rightarrow \gamma(G\overline{G}) = n$;
- b) $G = tK_2 \Rightarrow \gamma(G\overline{G}) = t + 1$;
- c) $G = K_t \circ K_1 \ (t \geq 3) \Rightarrow \gamma(G\overline{G}) = \gamma(G) = t$;
- d) $G = C_n \ (n \geq 3) \Rightarrow \gamma(G\overline{G}) = \left\lceil \frac{n+4}{3} \right\rceil$;
- e) $G = P_n \ (n \geq 2) \Rightarrow \gamma(G\overline{G}) = \left\lceil \frac{n+3}{3} \right\rceil$.

Önerme 7.2: (Haynes, Henning, ve van der Merwe, 2009) G , n tepeli bir çizge olsun.

O zaman,

- a) $\gamma(G\overline{G}) = 1 \iff G = K_1$;
- b) $\gamma(G\overline{G}) = 2 \iff n \geq 2$ ve G çizgesi $V(G)$ tepeler kümesini baskılayan tepe derecesi 1 olan bir tepe veya tepelere komşu olan bir tepeye sahiptir veya $\overline{G}$ çizgesi $V(\overline{G})$ tepeler kümesini baskılayan tepe derecesi 1 olan bir tepe veya tepelere komşu olan bir tepeye sahiptir.

Teorem 7.1: $G = K_n$ olmak üzere, G çizgesinin tümleyen prizmasının diferansiyeli $\gamma(G\overline{G}) = n - 1$ olur.

İspat: $v_i \in V(G) \ (1 \leq i \leq n)$ tepesi D_1 kümesine eklenirse, $D_1 = \{v_i\}$, $B(D_1) = \{\overline{v}_i\} \cup V(K_n) \setminus \{v_i\}$, dolayısıyla $\partial(D_1) = n - 1$ elde edilir ve D_1 kümesine $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_1) < n - 1$ olur.

$\overline{v}_i \in V(\overline{G}) \ (1 \leq i \leq n)$ tepesi D_2 kümesine eklenirse $D_2 = \{\overline{v}_i\}$, $B(D_2) = \{v_i\}$ ve dolayısıyla $\partial(D_2) = 0$ olur.

D_2 kümesine $V(\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_2)$ değeri değişmez.

$v_j \in V(G) \ (\forall j \neq i, 1 \leq j \leq n)$ tepesi D_2 kümesine eklenirse $D_3 = \{\overline{v}_i, v_j\}$ kümesi elde edilir. $B(D_3) = \{\overline{v}_j\} \cup V(G) \setminus \{v_j\}$ olduğundan $\partial(D_3) = n - 2$ olur ve D_3

kümesine $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_3) < n - 2$ olur.

Diferansiyel tanımından,

$$\partial(G\overline{G}) = \max\{\partial(D_k)\} \quad (1 \leq k \leq 3) \quad (7.1)$$

$$\partial(G\overline{G}) = n - 1 \quad (7.2)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 7.2: $G = tK_2$ ($t > 1$) olmak üzere, G çizgesinin tümleyen prizmasının diferansiyeli $\partial(G\overline{G}) = 2t - 2$ olur.

İspat: $G\overline{G}$ çizgesinde, $V(G)$ tepeler kümesinde bulunan $2t$ tepe $u_i v_i \in E(G)$ olmak üzere u_i ve v_i ($1 \leq i \leq t$) olarak adlandırılınsın.

$\overline{u}_i \in V(\overline{G})$ ($1 \leq i \leq t$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_1 = \{\overline{u}_i\}$, $B(D_1) = \{u_i\} \cup V(\overline{G}) \setminus \{\overline{u}_i, \overline{v}_i\}$, dolayısıyla $\partial(D_1) = 2t - 2$ olur ve D_1 kümesine $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_1) \leq 2t - 2$ olur.

$u_i \in V(G)$ ($1 \leq i \leq t$) tepesi D_2 kümesine eklenirse $D_2 = \{u_i\}$, $B(D_2) = \{\overline{u}_i, v_i\}$ ve dolayısıyla $\partial(D_2) = 1$ olur.

$\overline{v}_i \in V(\overline{G})$ tepesi D_2 kümesine eklenirse $D_3 = \{u_i, \overline{v}_i\}$ kümesi elde edilir. $B(D_3) = \{v_i\} \cup V(\overline{G}) \setminus \{\overline{v}_i\}$ dolayısıyla $\partial(D_3) = 2t - 2$ olur ve D_3 kümesine $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_3) \leq 2t - 2$ olur. $u_i \in V(G)$ ($1 \leq i \leq t$) olmak üzere $D_4 = \{u_1, \dots, u_t\}$ kümesi için $\overline{u}_i \in V(\overline{G})$, $v_i \in V(G)$ ($1 \leq i \leq t$) olmak üzere $B(D_4) = \{\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_t\} \cup \{v_1, \dots, v_t\}$ ve $\partial(D_4) = t$ olur.

$\overline{v}_k \in V(\overline{G})$ ($1 \leq k \leq t$) tepesi D_4 kümesine eklenirse $D_5 = \{\overline{v}_k\} \cup \{u_1, \dots, u_t\}$ kümesi elde edilir. $B(D_5) = \{v_1, \dots, v_t\} \cup V(\overline{G}) \setminus \{\overline{v}_k\}$ olduğundan $\partial(D_5) = 2t - 2$ olur ve $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_5 kümesine eklenirse $\partial(D_5) < 2t - 2$ olur.

Diferansiyel tanımından,

$$\partial(G\overline{G}) = \max\{\partial(D_l)\} \quad (1 \leq l \leq 5) \quad (7.3)$$

$$\partial(G\overline{G}) = 2t - 2 \quad (t > 1) \quad (7.4)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 7.1: $G = tK_2$ olmak üzere Önerme 7.1(b)'den $\gamma(G\overline{G}) = t + 1$ olur. $|V(G\overline{G})| = 4t$ ve Teorem 3.3'ten $\partial(G\overline{G}) = 2t - 2 = |V(G\overline{G})| - 2\gamma(G\overline{G})$ olduğundan, $G = tK_2$ ($t \geq 1$) olmak üzere G çizgesinin tümleyen prizma çizgesi $G\overline{G}$ baskın diferansiyeldir.

Teorem 7.3: $G = K_t \circ K_1$ ($t > 1$) olmak üzere G çizgesinin tümleyen prizmasının diferansiyeli $\partial(G\overline{G}) = 3t - 3$ olur.

İspat: G çizgesinde K_t çizgesine ait olan tepeler $a_1, \dots, a_t$ olarak adlandırılınsın ve $A = \{a_1, \dots, a_t\}$, $\overline{A} = \{\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_t\}$ olsun. G çizgesinde A kümesinde bulunan tepelere komşu olan tepe derecesi 1 olan tepeler $a_i b_i \in E(G)$ ($1 \leq i \leq t$) olmak üzere $b_1, \dots, b_t$ olarak adlandırılınsın ve $B = \{b_1, \dots, b_t\}$, $\overline{B} = \{\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_t\}$ olsun. $a_i \in A$ ($1 \leq i \leq t$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_1 = \{a_i\}$, $B(D_1) = \{\overline{a}_i, b_i\} \cup A \setminus \{a_i\}$ ve $\partial(D_1) = t$ olur.

$b_i \in B$ ($1 \leq i \leq t$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $\partial(D_1) < t$ olur.

$b_j \in B$ ($1 \leq j \leq t, j \neq i$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_2 = \{a_i, b_j\}$ kümesi elde edilir. $B(D_2) = \{\overline{a}_i, \overline{b}_j, b_i\} \cup A \setminus \{a_i\}$ olduğundan $\partial(D_2) = t$ olur. $\overline{b}_j \in \overline{B}$ ($1 \leq j \leq t, j \neq i$) tepesi D_2 kümesine eklenirse $D_3 = \{a_i, b_j, \overline{b}_j\}$ kümesi elde edilir. $B(D_3) = \{b_i\} \cup A \setminus \{a_i\} \cup \overline{A} \setminus \{\overline{a}_j\} \cup \overline{B} \setminus \{\overline{b}_j\}$ olduğundan $\partial(D_3) = 3t - 5$ olur ve $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_3 kümesine eklenirse $\partial(D_3) < 3t - 5$ olur. $\overline{b}_k \in \overline{B}$ ($1 \leq k \leq t, k \neq j$) tepesi D_2 kümesine eklenirse $D_4 = \{a_i, b_j, \overline{b}_k\}$ kümesi elde edilir ve $\partial(D_4) = 3t - 4$ olur. $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_4 kümesine eklenirse $\partial(D_4) < 3t - 4$ olur.

$\overline{a}_i \in \overline{A}$ ($1 \leq i \leq t$) tepesi D_2 kümesine eklenirse $D_5 = \{a_i, b_j, \overline{a}_i\}$ kümesi elde edilir.

$B(D_5) = \{b_i\} \cup A \setminus \{a_i\} \cup \overline{B} \setminus \{\overline{b}_i\}$ olduğundan $\partial(D_5) = 2t - 4$ olur ve $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_5 kümesine eklenirse $\partial(D_5) \leq 3t - 6$ olur. $\overline{a}_j \in \overline{A}$ ($1 \leq j \leq t, j \neq i$) tepesi D_2 kümesine eklenirse $D_6 = \{a_i, b_j, \overline{a}_j\}$ kümesi elde edilir. $B(D_6) = \{b_i, \overline{a}_i\} \cup \overline{B} \cup A \setminus \{a_i\}$ olduğundan $\partial(D_6) = 2t - 2$ olur ve $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_6 kümesine eklenirse $\partial(D_6) \leq 3t - 6$ olur. $\overline{a}_k \in \overline{A}$ ($1 \leq k \leq t, k \neq i, j$) tepesi D_2 kümesine eklenirse $D_7 = \{a_i, b_j, \overline{a}_k\}$ kümesi elde edilir. $B(D_7) = \{b_i, \overline{a}_i\} \cup A \setminus \{a_i\} \cup \overline{B} \setminus \{\overline{b}_k\}$ olduğundan $\partial(D_7) = 2t - 3$ olur ve $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_7 kümesine eklenirse $\partial(D_7) \leq 3t - 5$ olur.

$\overline{a}_i \in \overline{A}$ ($1 \leq i \leq t$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_8 = \{a_i, \overline{a}_i\}$ kümesi elde edilir. $B(D_8) = \{b_i\} \cup A \setminus \{a_i\} \cup \overline{B} \setminus \{\overline{b}_i\}$ olduğundan $\partial(D_8) = 2t - 3$ olur ve $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_8 kümesine eklenirse $\partial(D_8) \leq 3t - 5$ olur. $\overline{a}_j \in \overline{A}$ ($1 \leq j \leq t, j \neq i$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_9 = \{a_i, \overline{a}_j\}$ kümesi elde edilir. $B(D_9) = \{b_i, \overline{a}_i\} \cup A \setminus \{a_i\} \cup \overline{B} \setminus \{\overline{b}_j\}$ olduğundan $\partial(D_9) = 2t - 2$ olur ve $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_9 kümesine eklenirse $\partial(D_9) \leq 3t - 4$ olur. $\overline{b}_j \in \overline{B}$ ($1 \leq j \leq t$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_{10} = \{a_i, \overline{b}_j\}$ kümesi elde edilir ve $\partial(D_{10}) = 3t - 3$ olur. $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_{10} kümesine eklenirse $\partial(D_{10}) < 3t - 3$ olur.

B tepeler kümesi $D_{11} = B$ olarak alınırsa $B(D_{11}) = A \cup \overline{B}$ ve $\partial(D_{11}) = t$ olur. $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_{11} kümesine eklenirse $\partial(D_{11}) \leq 2t - 3$ olur. $\overline{b}_i \in \overline{B}$ ($1 \leq i \leq t$) tepesi D_{12} kümesine eklenirse $D_{12} = \{\overline{b}_i\}$, $B(D_{12}) = \{b_i\} \cup \overline{A} \setminus \{\overline{a}_i\} \cup \overline{B} \setminus \{\overline{b}_i\}$ ve $\partial(D_{12}) = 2t - 2$ olur. $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_{12} kümesine eklenirse $\partial(D_{12}) \leq 3t - 3$ olur.

$\overline{a}_i \in \overline{A}$ ($1 \leq i \leq t$) tepesi D_{13} kümesine eklenirse $D_{13} = \{\overline{a}_i\}$, $B(D_{13}) = \{a_i\} \cup \overline{B} \setminus \{\overline{b}_i\}$ ve $\partial(D_{13}) = t - 1$ olur.

$a_i \in A$ ($1 \leq i \leq t$) tepesi D_{13} kümesine eklenirse $D_{14} = \{a_i, \overline{a}_i\}$ kümesi elde edilir. $B(D_{14}) = \{b_i\} \cup A \setminus \{a_i\} \cup \overline{B} \setminus \{\overline{b}_i\}$ olduğundan $\partial(D_{14}) = 2t - 3$ olur ve $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_{14} kümesine eklenirse $\partial(D_{14}) \leq 3t - 5$ olur.

$a_j \in A$ ($1 \leq j \leq t, j \neq i$) tepesi D_{13} kümesine eklenirse $D_{15} = \{a_j, \overline{a}_i\}$ kümesi elde edilir. $B(D_{15}) = \{b_j, \overline{a}_j\} \cup A \setminus \{a_j\} \cup \overline{B} \setminus \{\overline{b}_i\}$ olduğundan $\partial(D_{15}) = 2t - 2$ olur ve

$V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_{15} kümesine eklenirse $\partial(D_{15}) \leq 3t - 4$ olur.

$\overline{a}_j \in \overline{A}$ ($1 \leq j \leq t, j \neq i$) tepesi D_{13} kümesine eklenirse $D_{16} = \{\overline{a}_j, \overline{a}_i\}$ kümesi elde edilir. $B(D_{16}) = \{a_i, a_j\} \cup \overline{B}$ olduğundan $\partial(D_{16}) = t$ olur ve $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_{16} kümesine eklenirse $\partial(D_{16}) \leq 3t - 6$ veya $\partial(D_{16}) \leq 2t - 2$ olur.

Diferansiyel tanımından,

$$\partial(G\overline{G}) = \max\{\partial(D_p)\} \quad (1 \leq p \leq 16) \quad (7.5)$$

$$\partial(G\overline{G}) = 3t - 3 \quad (7.6)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 7.4: $G = K_{1,n}$ ($n > 1$) olmak üzere G çizgesinin tümleyen prizmasının diferansiyeli $\partial(G\overline{G}) = 2n - 2$ olur.

İspat: G çizgesinde tepe derecesi 1 olan tepelere komşu olan tepe t tepesi olsun. t tepesi $\overline{G}$ çizgesinde izole tepedir ve dolayısıyla $G\overline{G}$ çizgesinde tepe derecesi 1 olan $\overline{t}$ tepesi olur. G çizgesindeki tepe derecesi 1 olan tepeler $u_1, \dots, u_n$ olarak adlandırılınsın. G çizgesindeki $u_1, \dots, u_n$ tepeleri $\overline{G}$ çizgesinde n tepeli bir tam çizge oluşturur ve $\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n$ olarak adlandırılır.

$t \in V(G)$ tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_1 = \{t\}$, $B(D_1) = \{\overline{t}, u_1, \dots, u_n\}$ ve $\partial(D_1) = n$ olur.

$\overline{u}_i \in V(\overline{G})$ ($1 \leq i \leq n$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_2 = \{t, \overline{u}_i\}$ kümesi elde edilir. $B(D_2) = \{\overline{t}, u_1, \dots, u_n\} \cup V(\overline{G}) \setminus \{\overline{u}_i\}$ olduğundan $\partial(D_2) = 2n - 2$ olur ve D_2 kümesine $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_2) < 2n - 2$ olur.

$\overline{t} \in V(\overline{G})$ tepesi D_3 kümesine eklenirse $D_3 = \{\overline{t}\}$, $B(D_3) = \{t\}$ ve $\partial(D_3) = 0$ olur.

$\overline{u}_i \in V(\overline{G})$ ($1 \leq i \leq n$) tepesi D_3 kümesine eklenirse $D_4 = \{\overline{t}, \overline{u}_i\}$ kümesi elde edilir. $B(D_4) = \{t, u_i\} \cup V(\overline{G}) \setminus \{\overline{u}_i\}$ olduğundan $\partial(D_4) = n - 1$ olur.

$t \in V(G)$ tepesi D_4 kümesine eklenirse $D_5 = \{\overline{t}, \overline{u}_i, t\}$ kümesi elde edilir.

$B(D_5) = \{u_1, \dots, u_n\} \cup V(\overline{G}) \setminus \{\bar{u}_i\}$ olduğundan $\partial(D_5) = 2n - 4$ olur ve D_5 kümesine $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_5) < 2n - 4$ olur.

$u_i \in V(G)$ ($1 \leq i \leq n$) tepesi D_6 kümesine eklenirse $D_6 = \{u_i\}$, $B(D_6) = \{t, \bar{u}_i\}$ ve $\partial(D_6) = 1$ olur.

$\bar{u}_j \in V(\overline{G})$ ($1 \leq j \leq n, j \neq i$) tepesi D_6 kümesine eklenirse $D_7 = \{u_i, \bar{u}_j\}$ kümesi elde edilir. $B(D_7) = \{t, u_j\} \cup V(\overline{G}) \setminus \{\bar{u}_j\}$ olduğundan $\partial(D_7) = n - 1$ olur.

$t \in V(G)$ tepesi D_7 kümesine eklenirse $D_8 = \{u_i, \bar{u}_j, t\}$ kümesi elde edilir. $B(D_8) = \{\bar{t}\} \cup V(G) \setminus \{u_i, t\} \cup V(\overline{G}) \setminus \{\bar{u}_j\}$ olduğundan $\partial(D_8) = 2n - 4$ olur ve D_8 kümesine $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi eklenirse $\partial(D_8) < 2n - 4$ olur.

Diferansiyel tanımından,

$$\partial(G\overline{G}) = \max\{\partial(D_k)\} \quad (1 \leq k \leq 8) \quad (7.7)$$

$$\partial(G\overline{G}) = 2n - 2 \quad (n > 1) \quad (7.8)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 7.2: $G = K_{1,n}$ ($n > 1$) çizgesi için Önerme 7.2(b)'den $\gamma(G\overline{G}) = 2$ olur. $|V(G\overline{G})| = 2n + 2$ ve Teorem 3.3'ten, $\partial(G\overline{G}) = |V(G\overline{G})| - 2\gamma(G\overline{G})$ olduğundan $G = K_{1,n}$ ($n > 1$) çizgesinin tümleyen prizması $G\overline{G}$ baskın diferansiyeldir.

Teorem 7.5: $G = K_{m,n}$ ($2 \leq m \leq n$) olmak üzere G çizgesinin tümleyen prizmasının diferansiyeli $\partial(G\overline{G}) = \begin{cases} 2n - 2, & m < 3 \text{ ise;} \\ 2n + 2m - 8, & m \geq 3 \text{ ise.} \end{cases}$

İspat: $G = K_{m,n}$ ($2 \leq m \leq n$) çizgesinin parçalı kümeleri m tepeye sahip R kümesi ve n tepeye sahip S kümesi olsun. $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ ve $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ olmak üzere $\bar{R} = \{\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_m\}$ ve $\bar{S} = \{\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n\}$ olur. $\overline{G}$ çizgesinde, R kümesinin tepeleri m tepeli K_m tam çizgeyi, S kümesinin tepeleri n tepeli K_n tam çizgeyi oluşturur.

$r_i \in V(G)$ ($1 \leq i \leq m$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_1 = \{r_i\}$, $B(D_1) = \{\bar{r}_i\} \cup S$

ve $\partial(D_1) = n$ olur.

$s_j \in V(G)$ ($1 \leq j \leq n$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_2 = \{r_i, s_j\}$ kümesi elde edilir. $B(D_2) = \{\bar{r}_i, \bar{s}_j\} \cup R \setminus \{r_i\} \cup S \setminus \{s_j\}$ olduğundan $\partial(D_2) = m + n - 2$ olur.

$\bar{s}_j \in V(\bar{G})$ ($1 \leq j \leq n$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_3 = \{r_i, \bar{s}_j\}$ kümesi elde edilir.

$B(D_3) = \{\bar{r}_i\} \cup S \cup \bar{S} \setminus \{\bar{s}_j\}$ olduğundan $\partial(D_3) = 2n - 2$ olur. $m < 3$ için, $V(G\bar{G})$

tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_3 kümesine eklenirse $\partial(D_3) \leq 2n - 2$ olur.

$m \geq 3$ için ise, $\bar{s}_j \in V(\bar{G})$ ($1 \leq j \leq n$) tepesi D_2 kümesine eklenirse $D_4 = \{r_i, s_j, \bar{s}_j\}$

kümesi elde edilir. $B(D_4) = \{\bar{r}_i\} \cup R \setminus \{r_i\} \cup S \setminus \{s_j\} \cup \bar{S} \setminus \{\bar{s}_j\}$ olduğundan

$\partial(D_4) = 2n + m - 5$ olur.

$\bar{r}_i \in V(\bar{G})$ ($1 \leq i \leq n$) tepesi D_4 kümesine eklenirse $D_5 = \{r_i, s_j, \bar{s}_j, \bar{r}_i\}$ kümesi

elde edilir. $B(D_5) = R \setminus \{r_i\} \cup S \setminus \{s_j\} \cup \bar{R} \setminus \{\bar{r}_i\} \cup \bar{S} \setminus \{\bar{s}_j\}$ olduğundan $\partial(D_5) =$

$2n + 2m - 8$ olur ve $V(G\bar{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_5 kümesine

eklenirse $\partial(D_5) < 2n + 2m - 8$ olur.

Diferansiyel tanımından,

$$\partial(G\bar{G}) = \max\{\partial(D_k)\} \quad (1 \leq k \leq 5) \quad (7.9)$$

$$\partial(G\bar{G}) = \begin{cases} 2n - 2, & m < 3 \text{ ise;} \\ 2n + 2m - 8, & m \geq 3 \text{ ise.} \end{cases} \quad (7.10)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 7.3: $G = K_{m,n}$ ($2 \leq m \leq n$) çizgesi için $\gamma(G\bar{G}) = \begin{cases} 3, & m < 3 \text{ ise;} \\ 4, & m \geq 3 \text{ ise.} \end{cases}$

olduğu açıktır. $|V(G\bar{G})| = 2m + 2n$ ve Teorem 3.3'ten,

$\partial(G\bar{G}) = |V(G\bar{G})| - 2\gamma(G\bar{G})$ olduğundan $G = K_{m,n}$ ($2 \leq m \leq n$) çizgesinin

tümleyen prizması $G\bar{G}$ baskın diferansiyeldir.

Teorem 7.6: $G = C_n$ ($n > 3$) olmak üzere G çizgesinin tümleyen prizmasının diferansiyeli $\partial(G\bar{G}) = n + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - 3$ olur.

İspat: $G = C_n$ çizgesinin tepeleri $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ olsun ve $\bar{G} = \bar{C}_n$ çizgesinin tepeleri

$\bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-1}$ olsun.

$\bar{v}_i \in V(\bar{G})$ ($0 \leq i \leq n-1$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_1 = \{\bar{v}_i\}$, $B(D_1) = N_{\bar{G}\bar{G}}(\bar{v}_i)$ ve $\partial(D_1) = n-3$ olur.

$S_1 = V(\bar{G}\bar{G}) \setminus N_{\bar{G}\bar{G}}[\bar{v}_i]$ için $\bar{G}\bar{G}[S_1] = C_{n+1}$ olur. $\bar{G}\bar{G}[S_1]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_1 kümesine eklenirse D_2 kümesi elde edilir. $\partial(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan,

$\partial(D_2) = \partial(D_1) + \partial(C_{n+1}) = n-3 + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$ olur ve $V(\bar{G}\bar{G})$ tepeler kümesinin

herhangi bir alt kümesi D_2 kümesine eklenirse $\partial(D_2) < n-3 + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$ olur.

$n=4$ için $\bar{v}_{i+2}$ veya $\bar{v}_{i-2}$ ($(i+2) \bmod(n)$, $(i-2) \bmod(n)$) tepesi D_3 kümesine eklenirse

$D_3 = \{\bar{v}_i, \bar{v}_{i+2}\}$ veya $D_3 = \{\bar{v}_i, \bar{v}_{i-2}\}$ elde edilir ve $\partial(D_3) = 0$ olur. $S_2 = V(\bar{G}\bar{G}) \setminus$

$N_{\bar{G}\bar{G}}[D_3]$ için $\bar{G}\bar{G}[S_2] = P_n$ olur. $\bar{G}\bar{G}[S_2]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_3 kümesine

eklenirse D_4 kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan, $\partial(D_4) = \partial(D_3) + \partial(P_n) +$

$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olur ve $V(\bar{G}\bar{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_4 kümesine eklenirse

$\partial(D_4) < \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olur.

$n > 4$ için $\bar{v}_{i+2}$ veya $\bar{v}_{i-2}$ ($(i+2) \bmod(n)$, $(i-2) \bmod(n)$) tepesi D_3 kümesine eklenirse

$D_3 = \{\bar{v}_i, \bar{v}_{i+2}\}$ veya $D_3 = \{\bar{v}_i, \bar{v}_{i-2}\}$ olur ve $\partial(D_3) = n-3$ elde edilir. $S_2 =$

$V(\bar{G}\bar{G}) \setminus N_{\bar{G}\bar{G}}[D_3]$ için $\bar{G}\bar{G}[S_2] = P_2 \cup P_{n-3}$ olur. $\bar{G}\bar{G}[S_2]$ çizgesinin ∂ -kümesi D_3

kümesine eklenirse D_4 kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan, $\partial(D_4) = n -$

$3 + \partial(P_2 \cup P_{n-3}) = n-3 + \partial(P_2) + \partial(P_{n-3}) = n + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 4$ olur ve $V(\bar{G}\bar{G})$ tepeler

kümesinin herhangi bir alt kümesi D_4 kümesine eklenirse $\partial(D_4) \leq n + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 4$ olur.

$n > 5$ için $B(D_1) \setminus \{\bar{v}_i, \bar{v}_{i+2}, \bar{v}_{i-2}\}$ ($(i+2) \bmod(n)$, $(i-2) \bmod(n)$) kümesinde bulunan

bir $\bar{v}$ tepesi D_1 kümesine eklenirse D_5 kümesi elde edilir ve $\partial(D_5) = n-2$ olur.

$S_3 = V(\bar{G}\bar{G}) \setminus N_{\bar{G}\bar{G}}[\bar{v}_i, \bar{v}]$ için $\bar{G}\bar{G}[S_3] = P_k \cup P_t$ ($k+t = n-2$) olur. $\bar{G}\bar{G}[S_3]$

çizgesinin ∂ -kümesi D_5 kümesine eklenirse D_6 kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

oldüğundan, $\partial(D_6) = n-2 + \partial(P_k \cup P_t) = n-2 + \partial(P_k) + \partial(P_t) = n-2 + \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{t}{3} \right\rfloor$

($k+t = n-2$) olur. $\partial(D_6)$ değeri $k = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor, t = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$ için en büyük değerini

alır ve $\max\{\partial(D_6)\} = n-2 + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}{3} \right\rfloor$ olur. $V(\bar{G}\bar{G})$ tepeler

kümesinin herhangi bir alt kümesi D_6 kümesine eklenirse $\partial(D_6) \leq \max\{\partial(D_6)\}$ olur.

$v_i \in V(G)$ ($0 \leq i \leq n-1$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_7 = \{\bar{v}_i, v_i\}$ kümesi elde edilir. $B(D_7) = \{v_{i+1}, v_{i-1}\} \cup N_{G\bar{G}}(\bar{v}_i) \setminus \{v_i\}$ ($((i+1) \bmod(n), (i-1) \bmod(n))$) olduğundan $\partial(D_7) = n-3$ olur. $S_4 = V(G\bar{G}) \setminus N_{G\bar{G}}[D_7]$ için $G\bar{G}[S_4] = P_{n-3} \cup P_2$ olur. $G\bar{G}[S_4]$ çizgesinin ∂ -kümesi D_7 kümesine eklenirse D_8 kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan $\partial(D_8) = n-3 + \partial(P_2 \cup P_{n-3}) = n-3 + \partial(P_2) + \partial(P_{n-3}) = n-3 + \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor = n + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 4$ olur ve $V(G\bar{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_8 kümesine eklenirse $\partial(D_8) \leq n + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 4$ olur.

$v_i \in V(G)$ ($0 \leq i \leq n-1$) tepesi D_9 kümesine eklenirse $D_9 = \{v_i\}$, $B(D_9) = \{\bar{v}_i, v_{i-1}, v_{i+1}\}$ ($((i+1) \bmod(n), (i-1) \bmod(n))$) ve $\partial(D_9) = 2$ olur.

$\bar{v}_j \in V(\bar{G})$ ($j \neq i$) tepesi D_9 kümesine eklenirse $D_{10} = \{v_i, \bar{v}_j\}$ kümesi elde edilir ve $\partial(D_{10}) = n-2$ olur.

$S_5 = V(G\bar{G}) \setminus N_{G\bar{G}}[D_{10}]$ için $G\bar{G}[S_5] = P_{n-2}$ olur. $G\bar{G}[S_5]$ çizgesinin ∂ -kümesi D_{10} kümesine eklenirse D_{11} kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan $\partial(D_{11}) = n-2 + \partial(P_{n-2}) = n-2 + \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor$ olur ve $V(G\bar{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_{11} kümesine eklenirse $\partial(D_{11}) \leq n-2 + \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor$ olur.

$\bar{v}_i \in V(\bar{G})$ ($0 \leq i \leq n-1$) tepesi D_9 kümesine eklenirse $D_{12} = \{v_i, \bar{v}_i\}$ kümesi elde edilir ve $\partial(D_{12}) = n-3$ olur.

$S_6 = V(G\bar{G}) \setminus N_{G\bar{G}}[D_{12}]$ için $G\bar{G}[S_6] = P_2 \cup P_{n-3}$ olur. $G\bar{G}[S_6]$ çizgesinin ∂ -kümesi D_{12} kümesine eklenirse D_{13} kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan $\partial(D_{13}) = n-3 + \partial(P_2 \cup P_{n-3}) = n-3 + \partial(P_2) + \partial(P_{n-3}) = n-3 + \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor = n + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 4$ olur ve $V(G\bar{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_{13} kümesine eklenirse $\partial(D_{13}) \leq n + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 4$ olur.

$S_7 = V(G) \setminus N_G[v_i]$ için $G[S_7] = P_{n-3}$ olur. $G[S_7]$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_9 kümesine eklenirse D_{14} kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan, $\partial(D_{14}) = \begin{cases} 2 + (\partial(P_{n-3}) + \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor), & n = 3k+1 (k \in \mathbb{Z}) \text{ ise;} \\ 2 + (\partial(P_{n-3}) + \left\lceil \frac{n-3}{3} \right\rceil), & \text{aksi durumda.} \end{cases}$ olur. $\bar{G}$ çizgesinin herhangi

bir tepesi D_{14} kümesine eklenirse D_{15} kümesi elde edilir ve $\partial(D_{15}) \leq n-2 + \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor$

veya $\partial(D_{15}) \leq n - 1 + \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor$ olur.

$V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_{15} kümesine eklenirse $\partial(D_{15}) \leq n - 2 + \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor$ veya $\partial(D_{15}) \leq n - 1 + \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor$ olur.

Diferansiyel tanımından,

$$\partial(G\overline{G}) = \max\{\partial(D_r)\} \quad (1 \leq r \leq 15) \quad (7.11)$$

$$\partial(G\overline{G}) = n + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - 3 \quad (n > 3) \quad (7.12)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 7.4: $G = C_n$ ($n > 3$) çizgesi için Önerme 7.1(d)'den $\gamma(G\overline{G}) = \left\lfloor \frac{n+4}{3} \right\rfloor$ olur. $|V(G\overline{G})| = 2n$ ve Teorem 3.3'ten, $n = 3k + 1$ veya $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) için $\partial(G\overline{G}) = |V(G\overline{G})| - 2\gamma(G\overline{G})$ olduğundan $G = C_n$ ($n > 3$) için $n = 3k + 1$ veya $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) olmak üzere $G\overline{G}$ tümleyen prizması baskın diferansiyeldir.

Teorem 7.7: $G = W_n$ ($n > 3$) olmak üzere G çizgesinin tümleyen prizmasının diferansiyeli $\partial(G\overline{G}) = 2n - 4$ olur.

İspat: $G = W_n$ $n + 1$ tepeli tekerlek çizge olmak üzere, W_n tekerlek çizgede her tepeye komşu olan tepe merkez tepe c olsun. $\overline{G}$ çizgesinde c merkez tepesi izole bir tepedir ve dolayısıyla $G\overline{G}$ çizgesinde tepe derecesi 1 olan $\bar{c}$ tepesidir.

$V(W_n) \setminus \{c\} = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ ve $V(\overline{W}_n) \setminus \{\bar{c}\} = \{\bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-1}\}$ olsun.

$c \in V(G)$ tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_1 = \{c\}$, $B(D_1) = \{\bar{c}\} \cup \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ ve $\partial(D_1) = n$ olur.

$\bar{v}_i \in V(\overline{G})$ ($0 \leq i \leq n - 1$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_2 = \{c, \bar{v}_i\}$ kümesi elde edilir ve $\partial(D_2) = 2n - 4$ olur. $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_2 kümesine eklenirse $\partial(D_2) \leq 2n - 4$ olur.

$\bar{c} \in V(\overline{G})$ tepesi D_3 kümesine eklenirse $D_3 = \{\bar{c}\}$, $B(D_3) = \{c\}$ ve $\partial(D_3) = 0$ olur.

$S_1 = V(G\overline{G}) \setminus N_{G\overline{G}}[\bar{c}]$ için $G\overline{G}[S_1] = C_n \overline{C}_n$ olur. $C_n \overline{C}_n$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_3 kümesine eklenirse D_4 kümesi elde edilir ve

$\partial(D_4) = \partial(D_3) + \partial(C_n \overline{C}_n) = n + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - 3$ olur. $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_4 kümesine eklenirse $\partial(D_4) < n + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - 3$ olur. $C_n \overline{C}_n$ çizgesinin maksimal ∂ -kümesi D_5 kümesine eklenirse $C_n \overline{C}_n$ çizgesinin ∂ -kümesindeki en az bir tepe $c \in V(G)$ merkez tepeye komşu olduğundan $\partial(D_5) = \partial(C_n \overline{C}_n) + 1 = n + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - 2$ elde edilir. $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_5 kümesine eklenirse $\partial(D_5) < n + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - 2$ olur.

Diferansiyel tanımından,

$$\partial(G\overline{G}) = \max\{\partial(D_k)\} \quad (1 \leq k \leq 5) \quad (7.13)$$

$$\partial(G\overline{G}) = 2n - 4 \quad (7.14)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 7.5: $G = W_n$ ($n > 3$) çizgesi için $\gamma(G\overline{G}) = 1 + \gamma(\overline{C}_n) = 1 + 2 = 3$ olduğu açıktır. $|V(G\overline{G})| = 2n + 2$ ve Teorem 3.3'ten $\partial(G\overline{G}) = |V(G\overline{G})| - 2\gamma(G\overline{G})$ olduğundan $G = W_n$ ($n > 3$) çizgesinin tümleyen prizması $G\overline{G}$ baskın diferansiyeldir.

Teorem 7.8: $G = P_n$ ($n \geq 3$) olmak üzere G çizgesinin tümleyen prizmasının diferansiyeli $\partial(G\overline{G}) = n + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2$ olur.

İspat: $G = P_n$ çizgesinin tepeleri v_0 ve v_{n-1} tepe derecesi 1 olan tepeler olmak üzere $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ olsun. $\overline{G}$ çizgesinin tepeleri G çizgesinin $\overline{G}$ çizgesindeki tepelere karşılık gelmek üzere $\overline{v}_0, \overline{v}_1, \dots, \overline{v}_{n-1}$ olsun.

$\overline{v}_i \in V(\overline{G})$ ($i = 0$ veya $i = n - 1$) tepesi D_1 kümesine eklenirse $D_1 = \{\overline{v}_i\}$ ve $\partial(D_1) = n - 2$ olur.

$S_1 = V(G\overline{G}) \setminus N_{G\overline{G}}[D_1]$ için $G\overline{G}[S_1] = P_n$ olur. $G\overline{G}[S_1]$ çizgesinin ∂ -kümesi D_1 kümesine eklenirse D_2 kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan $\partial(D_2) = n - 2 + \partial(P_n) = n - 2 + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olur. $V(G\overline{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_2 kümesine eklenirse $\partial(D_2) \leq n + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2$ olur.

$\bar{v}_j \in V(\bar{G})$ ($\forall j \neq i$) tepesi D_3 kümesine eklenirse $D_3 = \{\bar{v}_j\}$, $B(D_3) = \{v_j\} \cup V(\bar{G}) \setminus \{\bar{v}_j, \bar{v}_{j+1}, \bar{v}_{j-1}\}$ ($(j+1) \bmod(n), (j-1) \bmod(n)$) ve $\partial(D_3) = n - 3$ olur. $S_2 = V(G\bar{G}) \setminus N_{G\bar{G}}[D_3]$ için $G\bar{G}[S_2] = P_{n+1}$ olur. $G\bar{G}[S_2]$ çizgesinin ∂ -kümesi D_3 kümesine eklenirse D_4 kümesi elde edilir. $\partial(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ olduğundan $\partial(D_4) = n - 3 + \partial(P_{n+1}) = n - 3 + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$ olur. $V(G\bar{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D_4 kümesine eklenirse $\partial(D_4) \leq n + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor - 3$ olur. Diferansiyel tanımından,

$$\partial(G\bar{G}) = \max\{\partial(D_k)\} \quad (1 \leq k \leq 4) \quad (7.15)$$

$$\partial(G\bar{G}) = n + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2 \quad (n \geq 3) \quad (7.16)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Açıklama 7.6: $G = P_n$ ($n \geq 3$) olmak üzere Önerme 7.1(e)'den $\gamma(G\bar{G}) = \left\lceil \frac{n+3}{3} \right\rceil$ olur. $|V(G\bar{G})| = 2n$ ve Teorem 3.3'ten $n = 3k$ ve $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) olmak üzere $\partial(G\bar{G}) = |V(G\bar{G})| - 2\gamma(G\bar{G})$ olduğundan $G = P_n$ ($n \geq 3$) çizgesinin tümleyen prizması $G\bar{G}$ $n = 3k$ veya $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) için baskın diferansiyeldir.

Teorem 7.9: G , n tepeli bir çizge olsun. G çizgesinde bir tepenin açıklık değeri 1 ise, o zaman $\partial(G\bar{G}) \geq n - 1$ olur.

İspat: G çizgesinde açıklık değeri 1 olan bir v tepesi var ise, o zaman v tepesi G çizgesinin diğer tüm tepelerine komşudur. Aynı zamanda v tepesi $\bar{G}$ çizgesinde izole bir tepe dolayısıyla $G\bar{G}$ çizgesinde tepe derecesi 1 olan bir tepedir. $D = \{v\}$ ise $B(D) = \{\bar{v}\} \cup V(G) \setminus \{v\}$ ve $\partial(D) = n - 1$ olur. $V(G\bar{G})$ tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi D kümesine eklenirse $\partial(D) < n - 1$ veya $\partial(D) \geq n - 1$ olur. O halde, $\partial(G\bar{G}) \geq n - 1$ bir alt sınırdır.

Açıklama 7.7: Teorem 7.9'da elde edilen alt sınır değeri en iyi alt sınır değeridir. $G = K_n, K_{1,2}, P_3, W_4$ çizgeleri için bu alt sınır değeri eşitlik olarak sağlanır.

Teorem 7.10: G , n tepeli bir çizge olmak üzere, G çizgesinin tümleyen prizması için $\partial(G\overline{G}) = 0 \iff n = 1$ olur.

İspat: $n = 1$ ise, o zaman $G\overline{G} = K_2$ olur. Teorem 3.1(a)'dan $\partial(G\overline{G}) = 0$ olur. $\partial(G\overline{G}) = 0$ olsun. Teorem 3.2'den birleştirilmiş bir G çizgesinde $n \geq 3$ için $\partial(G\overline{G}) \geq \frac{n}{5}$ ise $n > 1$ için $\partial(G\overline{G}) > 0$ olur. O halde $\partial(G\overline{G}) = 0$ sadece $G = K_1$ çizgesi için sağlanır.

Teorem 7.11: G , n tepeli bir çizge olmak üzere, G çizgesinin tümleyen prizması için $\partial(G\overline{G}) = 1 \iff n = 2$ olur.

İspat: $n = 2$ ise, o zaman $G\overline{G} = P_4$ olur. Teorem 3.1(b)'den $\partial(G\overline{G}) = 1$ olur. $\partial(G\overline{G}) = 1$ olsun. Teorem 3.2'den birleştirilmiş bir G çizgesinde $n \geq 3$ için $\partial(G) \geq \frac{n}{5}$ ise $n \geq 10$ için $\partial(G) \geq 2$ olur ve herhangi bir G çizgesi için $n > 2$ olmak üzere $\partial(G\overline{G}) > 1$ olur. Teorem 7.10'dan $n = 1$ için $\partial(G\overline{G}) = 0$ olur. O halde $\partial(G\overline{G}) = 1$ sadece $G = K_2$ veya $G = \overline{K}_2$ için sağlanır.

Teorem 7.12: G , n tepeli bir çizge olmak üzere, G veya $\overline{G}$ çizgesinin çapı 1 ise o zaman $\partial(G\overline{G}) = n - 1$ olur.

İspat: G veya $\overline{G}$ çizgesinin çapı 1 ise o zaman $G\overline{G} = K_n \circ K_1$ olur. O halde Teorem 7.1'den $\partial(G\overline{G}) = \partial(K_n \circ K_1) = n - 1$ olur ve ispat tamamlanır.

BÖLÜM SEKİZ

DİFERANSİYEL ALGORİTMASI

Bu bölümde bir çizgenin diferansiyelinin hesaplanabilmesi için teorik bazı sonuçlardan ve çizgelerin diferansiyel yapılarından yola çıkılarak dinamik programlama tekniğinden esinlenilmiş bir algoritma tasarlanmıştır.

8.1 Tek Tepenin ve Bir Kümenin Diferansiyeli

Bu kısımda çizgede bulunan tek bir tepe için ve bir tepe alt kümesi için diferansiyel hesaplama algoritması verilecektir. Tek tepe için verilen algoritma ayrıca ana algoritma içinde de kullanılacaktır.

Tek bir tepenin diferansiyeli o tepenin komşularının sayısının toplamının bir eksiğidir.

Algoritma 1 Tek Bir Tepenin Diferansiyelini Hesaplama

```
procedure DIFFTEPE(cizge, tepe)
  toplam  $\leftarrow$  0
  for i  $\leftarrow$  0, cizgeUzunlugu do
    if cizge[tepe][i] = 1 then
      toplam ++
    end if
  end for
  return toplam - 1      ▷ Diferansiyel toplam komşu sayısının bir eksiğidir
end procedure
```

Algoritma 2 Bir Tepe Alt Kümesinin Diferansiyelini Hesaplama

```
procedure DIFFKUME(cizge, kume)  
    liste ▷ Komşuların tutulduğu liste  
    for  $i \leftarrow 0, kumeUzunlugu$  do  
        for  $j \leftarrow 0, çizgeUzunlugu$  do  
            if  $cizge[i][j] == 1 \& !liste.contains(i)$  then  
                liste.add(i)  
            end if  
        end for  
    end for  
    for  $k \leftarrow 0, kumeUzunlugu$  do  
        liste.remove(kume[k])  
    end for  
    return listeUzunlugu – kumeUzunlugu  
end procedure
```

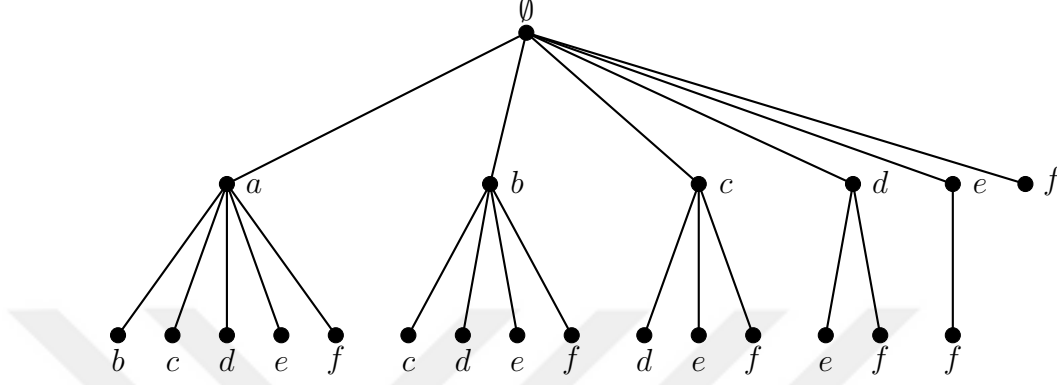
8.2 Çizgenin Diferansiyelini Hesaplama ve Optimizasyonu

Bu bölümde çizgenin diferansiyelinin hesaplanması ve bu hesabın optimizasyonu verilmiştir. Bir çizgenin diferansiyelinin hesaplanabilmesi için tepe kümesinin tüm alt kümelerinin diferansiyelinin hesaplanması gerekmektedir. Bu diferansiyellerden en büyük olanı, kümenin diferansiyelidir. Fakat bu şekilde bir hesaplama çok uzun süreceği için ve gereksiz bazı hesaplamalar da yapacağı için bazı noktalarda hesaplamanın azaltılması gerekmektedir.

İlk olarak, hesap yapılması gereken alt küme sayısı düşürülmelidir. Bir çizgenin diferansiyelini hesaplayabilmek için $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ 'den büyük elemana sahip alt kümelerin diferansiyelini hesaplamaya gerek yoktur. Zira bu sayıdan büyük bir alt kümenin diferansiyeli hiçbir zaman sıfırdan büyük olamayacaktır. Boş kümenin diferansiyeli sıfır olduğuna göre, sadece $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ 'e kadar eleman sayısı bulunan alt kümelerin diferansiyelini hesaplamak yeterlidir.

Diğer bir optimizasyon ise dinamik programlama metodunun daha önceden yapılmış hesaplamaları kullanma yöntemine dayanmaktadır. Ancak bunun için hesaplamalar arasında hiyerarşik bir bağ kurmak ve bir sonraki adıma geçerken önceki hesaplamanın kullanılmasını sağlayacak bir bağıntı bulunması gereklidir.

Hiyerarşik bağ için derinlik öncelikli arama algoritması ile kombinasyonların alfabetik veya nümerik bir sırayla oluşturulması gereklidir. Örneğin bir G çizgesinin tepe kümesi $\{A, B, C, D, E, F\}$ olsun. Bu çizgenin bahsedilen kombinasyonlarının bir ağaç şeklinde gösterilebilmesi mümkündür:



Şekil 8.1 $n = 6$ tepeli G_n çizgesinin tepe kümesinin birli ve ikili kombinasyonlarını gösteren ağaç

Yukarıdaki ağaç yapısındaki bağlar bir toplama fonksiyonu olarak düşünülürse ve bu ağaç derinlik öncelikli arama ile gezilirse kombinasyonlar sıralı bir şekilde oluşacaktır. Örneğin A tepesinden sonra sırasıyla AB, AC, AD, AE, AF kombinasyonları çıkacaktır. Bu kombinasyonlar oluşturulurken de eğer diferansiyeller hafızada tutulursa daha sonraki diferansiyeller için bu hesaplamalar kullanılabilir. Bunun için bahsedilen geçiş esnasında bir ilişki kurabilmek gerekmektedir. İlgili ilişkiyi gösteren fonksiyon da şu şekildedir:

A bir tepe veya tepe alt kümesi ve B bir tepe ve A ile B ardışık olmak üzere,

$$diff_{AB} = diff_A + diff_B - (|kotuAlan_B \cap kotuAlan_A|) \quad (8.1)$$

Burada A , yukarıdaki ağaç yapısında belirtilen B 'ye gelinmeden önceki tepe alt kümesidir. $kotuAlan$ kümesi ise bir tepe veya tepe kümesinin kendisinin ve komşularının bulunduğu kümedir. Bu fonksiyonda ilk diferansiyel hesabı hafızadan alınır, ikinci diferansiyel ise yukarıda verilen $diffNokta$ fonksiyonu ile önceden

hesaplanmış bir listeden alınır, *kotuAlan* kümesi ise algoritma esnasında hesaplanır ve diferansiyel gibi hafızada tutulur.

Bu iki optimizasyon ile yapılan hesaplama sayısı azaltılarak ve tekrardan belirli bir ölçüde sıyrılarak diferansiyeli bulma süresi kaba güç yöntemine göre belirgin bir şekilde daha kısa sürmektedir.

8.3 Optimize Edilmiş Diferansiyel Hesaplama Algoritması

Bu bölümde bir önceki kısımda bahsedilmiş olan iki optimizasyon kullanılarak elde edilen algoritma paylaşılmıştır. Algoritma temel olarak tepe kümesinin alt kümelerini özyinelemeli bir şekilde bulmakta ve bu esnada diferansiyel hesaplamaları yapılmaktadır.

Algoritma 3 Bir Çizgenin Diferansiyelini Hesaplama

```
procedure DIFF(tepeler, kombinasyonlar, altKume, index, diffList, BD,  
kotuAlanList, tekliDiffList, maksimum)  
    kombinasyonlar.add(altKume)  
    for  $i \leftarrow index, tepeler$  do  
        altKume.add(tepeler[i])  
        toplama  $\leftarrow 0$   
        for  $j \leftarrow 1, BD(tepeler[i])$  do  
            if kotuAlan(son - 1).contains(BD(tepeler[i])(j)) then  
                toplama ++  
            else if  $\neg i.kotuAlanList(son).contains(BD(tepeler[i])(j))$  then  
                kotuAlanList(son).add(BD(tepeler[i])(j))  
            end if  
        end for  
        diffList.add(diffList(son - 1) + tekliDiffList(i) - toplama)  
        if diffList(son) > maksimum then  
            maksimum = diffList(son)  
        end if  
        if altKumeUzunlugu  $< \lceil \frac{n}{2} \rceil$  then  
            diff(tepeler, kombinasyonlar, altKume, index + 1,  
diffList, BD, kotuAlanList, tekliDiffList, maksimum)  
        end if  
        diffList.remove(son)  
        altKume.remove(son)  
        kotuAlanList.remove(son)  
    end for  
end procedure
```

BÖLÜM DOKUZ

SONUÇLAR

Bu tezde, çizgelerin diferansiyeli çalışılmıştır. Diferansiyel parametresinin tanımı yapılmış ve bu parametre ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Yol benzeri çizge tiplerinden kuyruklu yıldız çizge, çift kuyruklu yıldız çizge, lolipop çizge, E_p^t çizge ve düzenli tırtıl çizgenin diferansiyel değerleri hesaplanmıştır. $C_{s,t}$ kuyruklu yıldız çizgenin $t = 3k + 2$ veya $t = 3k + 4$ ($k \in \mathbb{Z}$) için $DC(n, a, b)$ çift kuyruklu yıldız çizgenin $n - a - b = 3k$ veya $n - a - b = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) için, $L_{n,d}$ lolipop çizgenin $d = 3k + 2$ veya $d = 3k + 4$ ($k \in \mathbb{Z}$) için, E_p^t çizgesinin $p = 3k$ veya $p = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) için, $T_{n,m}$ düzenli tırtıl çizgenin $m \geq 2$ için baskın diferansiyel çizge olduğu belirlenmiştir.

Çevre benzeri çizge tiplerinden yelpaze çizge, k -piramit çizge, n -gen kitap çizgenin diferansiyel değerleri hesaplanmıştır. F_n yelpaze çizgenin, $kP(n)$ k -piramit çizgenin $n = 3$ veya $k = 1$ ise; $n = 5$ ve $k \geq 3$ ise; $n = 6$ ve $k \geq 3$ ise, $B(n, k)$ k -sayfalı n -gen kitap çizgenin $n = 3t + 2$ ($t \in \mathbb{Z}$) ve $k = 2$ ise veya $n = 3t$ ($t \in \mathbb{Z}$) ise baskın diferansiyel çizge olduğu belirlenmiştir.

Tekerlek benzeri çizge tiplerinden dişli çizge, dümen çizge, ayçiçeği çizge ve arkadaşlık çizgenin diferansiyel değerleri hesaplanmıştır. G_n dişli çizgenin $n = 3, 4, 6$ için, SF_n ayçiçeği çizgenin $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}^+, k > 1$) için, f_n arkadaşlık çizgenin baskın diferansiyel çizge olduğu belirlenmiştir.

$G = K_n, tK_2$ ($t > 1$), $K_t \circ K_1$ ($t > 1$), $K_{1,n}$ ($n > 1$), $K_{m,n}$ ($2 \leq m \leq n$), C_n ($n > 3$), W_n ($n > 3$), P_n ($n \geq 3$) için $G\overline{G}$ tümleyen prizma çizgelerin diferansiyel değerleri hesaplanmıştır. $G = tK_2$ ($t > 1$), $K_{1,n}$ ($n > 1$), $K_{m,n}$ ($2 \leq m \leq n$), W_n ($n > 3$) için, $n = 3k + 1$ veya $n = 3k + 2$ olmak üzere $G = C_n$ ($n > 3$) için, $n = 3k$ veya $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) olmak üzere $G = P_n$ ($n \geq 3$) için G çizgesinin tümleyen prizması $G\overline{G}$ çizgesinin baskın diferansiyel çizge olduğu belirlenmiştir.

Belirli bir açıklık değerine sahip olan bir tepe içeren G çizgesinin tümleyen

prizmasının diferansiyeli için bir alt sınır değeri bulunmuştur. Bulunan bu değerin en iyi alt sınır değeri olduğu belirlenmiştir. Tepe sayısı ve çapı küçük olan çizgelerin tümleyen prizmalarının diferansiyel değerleri bulunmuştur. Bir çizgenin diferansiyelini hesaplayan algoritma önerilmiştir.



KAYNAKLAR

- Bermudo, S. ve Fernau, H. (2012). Lower bound on the differential of a graph. *Discrete Mathematics*, 312, 3236–3250.
- Bermudo, S., De la Torre, L., Martín-Caraballo, A. M. ve Sigarreta, J. M. (2015). The differential of the strong product graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 92(6), 1124–1134.
- Bermudo, S., Hernández-Gómez, J. C., Rodríguez, J. M. ve Sigarreta, J. M. (2014). Relations between the differential and parameters in graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 46, 281-288.
- Bermudo, S., Rodríguez, J. M. ve Sigarreta, J. M. (2015). On the differential in graphs. *Utilitas Mathematica*, 97, 257-270.
- Buckley, F. ve Harary, F. (1990). *Distance in graphs*. California: Addison-Wesley.
- Chartrand, G. ve Lesniak, L. (1996). *Graphs and digraphs*. London: CRC Press.
- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L. ve Stein, C. (2009). *Introduction to Algorithms*. Cambridge: The MIT Press.
- Cygan, M., Pilipczuk, M. ve Škrekovski, R. (2011). Relation between Randić index and average distance of trees. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 66, 605-612.
- Gallian, J. A. (2012). A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 19, DS6.
- Hattingh, J. H. ve Ungerer, E. (1998). The signed and minus k-subdomination numbers of comets. *Discrete Mathematics*, 183, 141-152.
- Haynes, T. W., Hedetniemi, S. ve Slater, P. J. (1998). *Fundamentals of Domination in Graphs*. New York: CRC Press.

- Haynes, T. W., Henning, M. A., Slater, P. J. ve van der Merwe, L. C. (2007). The complementary product of two graphs. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 51, 21-30.
- Haynes, T. W., Henning, M. A. ve van der Merwe, L. C. (2009). Domination and total domination in complementary prisms. *Journal of Combinatorial Optimization*, 18(1), 23-37.
- Mashburn, J. L., Haynes, T. W., Hedetniemi, S. M., Hedetniemi, S. T. ve Slater, P. J. (2006). Differentials in graphs. *Utilitas Mathematica*, 69, 43-54.
- Morgan, M. J., Mukwembi, S. ve Swart, H. C. (2011). On the eccentric connectivity index of a graph. *Discrete Mathematics*, 311(13), 1229-1234.
- West, D. B. (2001). *Introduction to Graph Theory*. Singapore: Prentice Hall.