

**T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

CLIFFORD CEBİRİ VE GEOMETRİK UYGULAMALARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Tezi Hazırlayan:Fatma Sezgin

İSTANBUL,2008

**T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

CLIFFORD CEBİRİ VE GEOMETRİK UYGULAMALARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Tezi Hazırlayan:

Fatma Sezgin

Öğrenci No:

060860004

Danışman :

Prof.Dr.Mehmet Erdoğan

İSTANBUL,2008

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
TEZLİ YÜKSEK LİSANS TEZ SINAV TUTANAĞI

10/07/2008

Enstitümüz Matematik Bilgisayar Anabilim dalı Uygulamalı Matematik Programı yüksek lisans öğrencilerinden 060862020 numaralı **Fatma Sezgin'e** "Beykent Üniversitesi Lisansüstü Eğitim - Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddesine göre hazırlayarak, Enstitümüze teslim ettiği "**CLIFFORD CEBİRİ ve GEOMETRİK UYGULAMALARI**" tezini, Yönetim Kurulumuzun 19.06.2008 tarih ve 2008/10 sayılı toplantısında seçilen ve Fakülte binasında toplanan jüri üyeleri huzurunda, ilgili yönetmeliğin (c) bendi gereğince aday tarafından savunulmuş ve sonuçta adayın tezi hakkında **oybirliği** ile **Kabul** kararı verilmiştir.

İşbu tutanak, 4 nüsha olarak hazırlanmış ve Enstitü Müdürlüğü'ne sunulmak üzere tarafımızdan düzenlenmiştir.

DANIŞMAN
PROF. DR. MEHMET ERDOĞAN



ÜYE
PROF. DR. MAHİR RESULOV



ÜYE
YRD. DOÇ. DR. BAHADDİN SİNSOYSAL



TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bana yardımcı olan danışman hocam, Sayın Prof.Dr.Mehmet ERDOĞAN'a teşekkür ederim.

Fatma SEZGİN
İstanbul, 2008

ÖZET

Bu tez çalışması 4 bölümden oluşmaktadır.

Birinci Bölümde Clifford Cebiri (Geometrik Cebir) ve tarihçesi anlatıldı ve Unipodal sayı sistemi ile geometrik cebir ile matris cebiri arasında bir izomorfizmanın varlığı gösterildi.

İkinci bölümde, düzlemde geometrik sayılar, Minkowski uzay-zamanın geometrik cebiri, genelleştirilmiş iç ve dış çarpım ve özellikleri verilerek genelleştirilmiş geometrik cebir incelendi. Bu bölümde ayrıca, k -vektörlerin ters sıralanması, inversi ve normu tanımlandı.

Üçüncü bölümde geometrik cebirin uygulamaları olarak izdüşüm, doğru ve düzlem, kompleks sayılar, yansıma ve 3-boyutlu dönme hareketleri geometrik cebirin elemanları sayesinde açıklandı.

Dördüncü ve son bölüm ise sonuçları ve bir değerlendirmeyi kapsamaktadır.

ABSTRACT

This study consists of four chapters.

In the first chapter, it is given an historical development of the Clifford Algebra also called as Geometrical Algebra and introduced the unipodal number system and furthermore an isomorphism is constructed between Clifford algebra and matrix algebra.

The second chapter includes the generalized inner and outer products as well as the geometrical product. In this chapter we also define the reversion and the norm of a k -vector and inverse of a k -blade.

In the third chapter, we present some applications of geometrical algebra such as projection, line and plane, complex numbers, reflection and the rotation of three dimensional.

Finally, the last chapter covers an evaluation of the thesis.

İÇİNDEKİLER

CLIFFORD CEBİRİ VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

TEŞEKKÜR

ÖZET

ABSTRACT

1. GİRİŞ.....	1
1.1 Geometrik Cebirin Tarihçesi.....	1
1.2 Unipodal Sayı Sistemi.....	2
1.3 Clifford Cebiri ile Matris Cebiri İzomorfizmi.....	3
2. GEOMETRİK CEBİR.....	5
2.1 Düzlemin Geometrik Sayıları.....	5
2.2 Minkowski Uzay-Zaman' ın Geometrik Cebiri.....	7
2.3 Genelleştirilmiş Geometrik Cebir.....	10
2.4 Vektörlerin İç ve Dış Çarpımlarının Özellikleri.....	14
2.5 Genelleştirilmiş Dış Çarpımın Özellikleri.....	19
2.6 Genelleştirilmiş İç Çarpımın Özellikleri.....	20
2.7 k-vektörlerin Ters Sıralanması, İnversi ve Normu.....	23
3. GEOMETRİK CEBİRİN BAZI UYGULAMALARI	24
3.1 Dik İzdüşüm.....	24
3.2 Doğru ve Düzlem.....	25
3.3 Kompleks Sayılar.....	25
3.4 Yansıma.....	26
3.5 3-boyutlu Dönme Hareketi.....	26
4. SONUÇLAR.....	28
5. KAYNAKLAR.....	29
ÖZGEÇMİŞ.....	30

CLIFFORD CEBRİ VE GEOMETRİK UYGULAMALARI

1. GİRİŞ

1.1 Geometrik Cebirin Tarihçesi

Gerçel sayılar kümesi R nin cebirsel kapalı olmaması nedeniyle bir gerçel sayı olmayan $i = \sqrt{-1} \notin R$ sayısını katmak suretiyle gerçel sayı kümesi kompleks sayıların kümesi C oluşturulmuş, böylece gerçel sayıların tüm özelliklerini sağlayan cebirsel kapalı kompleks sayılar kümesi elde edilmişti. Herhangi bir $z \in C$ kompleks sayısı $x, y \in R$ olmak üzere $\{1, i\}_R$ bazına göre $z = x + iy$ şeklinde ifade edilebilir. Böylece 2-boyutlu kompleks düzlem oluşturulur. Kompleks analiz 150 yıldan bu yana ilerleme kaydetmesine karşın kompleks sayıların artık daha genişletilmesine gerek olmadığı düşüncesi yaygın hale gelmişti. Kompleks sayıların çarpımının geometrik anlamı

$$\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.1)$$

şeklinde verilen Euler formülü sayesinde açık biçimde anlaşılabilir.

Kompleks sayıların Hamilton quaternion' lara genişletilmesi fikri matematikçiler tarafından çok tartışılmış, ancak Grassmann' ın iç çarpım ve dış çarpım işlemlerinin özelliklerini geliştirme çabaları sonucunda bu iki işlemin birleştirilerek *geometrik çarpım* denilen işleme ulaşılmıştır. Bu birleştirme düzenli bir biçimde daha sonra W.K.Clifford tarafından gerçekleştirilmiş ve aksiyomatik bir biçimde bir cebirsel yapı olarak ortaya konmuştur. Günümüzde bu cebir *Clifford Cebiri* olarak anılmaktadır. Bu cebir esasen Euclid, Descartes ve Grassmann' ın düşüncelerinin bir genellemesinden ibarettir. Grassmann tarafından ortaya atılan ve Clifford tarafından aksiyomatik bir cebirsel yapı şekline dönüştürülen geometrik çarpım esasen iki vektörün biri birine göreceli doğrultularını , daha açık olarak biri birine ortogonal olma büyüklüğünü iç çarpım ile ve ortogonalliğin doğrultusunu ise dış çarpım ile ölçer. Geometrik çarpım işlemi daha sonra detaylı olarak verilecektir.

Gerçel sayıların kompleks sayılara genişletilmesi dışında genişlemelerin ele alınmasındaki gecikme, +1 gerçel sayısının yeni kare köklerini içerecek şekilde gerçel sayıları genişletme fikrinin zayıf görülmesine dayanır. Gerçel sayılar kümesi R nin yeni $u = \sqrt{1} \notin R$ şeklinde bir karekökünü içerecek şekilde genişletilmesi fikri çoğu bakımdan kompleks düzleme benzeyen hiperbolik sayı düzlemi H nin ortaya çıkmasını sağladı. Hiperbolik sayıların daha iyi anlaşılmasıyla birlikte gerçel sayıların geometrik genişlemeleri fikride önem kazanmıştır.

1.2 Unipodal Sayı Sistemi

Bu kısımda geometrik cebirler için en basit modeli oluşturan hiperbolik sayıları tanımlayan unipodal sayı sistemini inceleyeceğiz. Hiperbolik sayılar bir kübik denklemin çözümlerini bulmak için ve düzlemin ve özel relativitenin Lorentzian geometrisinin basit özelliklerini türetmek için kullanılır.

$u^2 = 1$ ve $\omega_0, \omega_1 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\{1, u\}$ bazına göre *unipodal* bir $\omega \in U$ sayısı

$$\omega = \omega_0 + u\omega_1$$

şeklinde yazılır. Şimdi $u_+ + u_- = 1$ ve $u_+ - u_- = u$ koşulunu gerçekleyen ve

$$u_+ = \frac{1}{2}(1+u), u_- = \frac{1}{2}(1-u) \quad (1.2.1)$$

şeklinde tanımlanan *idempotent* $\{u_+, u_-\}$ bazını göz öüne alalım. Bu bazın idempotent olması $u_+^2 = u_+$ ve $u_-^2 = u_-$ koşullarını sağlaması demektir, ayrıca bu baz $u_+u_- = 0$ koşulunu da sağlar yani baz elemanları *karşılıklı sıfırlayıcı* elemanlardır.

$\omega_+ = \omega_0 + \omega_1, \omega_- = \omega_0 - \omega_1$ olmak üzere idempotent bazın izdüşel özellikleri kullanılarak

$$\omega = \omega(u_+ + u_-) = \omega_+u_+ + \omega_-u_- \quad (1.2.2)$$

elde ederiz. Tersine eğer $\omega_+, \omega_- \in \mathbb{C}$ kompleks sayıları verilmiş ise $\omega = \omega_+u_+ + \omega_-u_-$ şeklinde verilen bir unipodal sayının standart baza göre koordinatları

$$\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-) \text{ ve } \omega_1 = \frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-) \quad (1.2.3)$$

şeklinde bulunur. Bu tanımlama ile idempotent bazın kendine has özellikleri bize bazı kolaylıklar sağlar. Örneğin Binom teoremini bu baz sayesinde basit bir biçimde

$$(\omega_+u_+ + \omega_-u_-)^k = (\omega_+)^k u_+^k + (\omega_-)^k u_-^k = (\omega_+)^k u_+ + (\omega_-)^k u_- \quad (1.2.4)$$

olarak ifade edebiliriz. Bu ifade sadece pozitif tam sayılar için değil $\forall k \in \mathbb{R}$ için geçerlidir. Örneğin; $k = -1$ için $\omega_+u_+ \neq 0$ olmak üzere bir $\omega \in U$ unipodal sayısının inversi

$$\omega^{-1} = \frac{1}{\omega} = \left(\frac{1}{\omega_+} \right) u_+ + \left(\frac{1}{\omega_-} \right) u_-$$

şeklindedir.

Ayrıca, (1.2.4) ifadesi elemanter fonksiyonları kompleks unipodal düzleme genişletmekte de kullanılabilir. Eğer öyle bir fonksiyon $f(\omega)$ ise $f(\omega_+)$ ve $f(\omega_-)$ fonksiyonları tanımlı olmak üzere

$$f(\omega) \equiv f(\omega_+)u_+ + f(\omega_-)u_- \quad (1.2.5)$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

1.3 Clifford Cebiri ile Matris Cebiri İzomorfizmi

Kompleks elemanlı 2X2 mertebeli köşegen matrislerin kümesi ile unipodal sayılar kümesi arasında bir izomorfizma aşağıdaki şekilde tanımlanır :

$$\omega = \omega_+ u_+ + \omega_- u_- \leftrightarrow \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix}$$

Buna göre sonlu boyutlu her Clifford cebiri matris cebirine izomorf yapılabilir. Tersine her matris cebirini bir Clifford cebirine veya bir alt cebirine izomorf yapabiliriz.

Yukarıdaki eşleştirmeye göre sadece köşegen 2X2 mertebeli matrisler ile unipodal sayılar arasında bir eşleme söz konusudur. Şimdi acaba unipodal sayıları genişleterek 2X2 mertebeli bütün matrisler ile eşleştirmemiz mümkün olurmu sorusuna cevap arayalım. Yukarıdaki eşleştirmede değişme özelliğine sahip unipodal sayılar sözkonusu idi. Ancak şimdi unipotent u sayısının anti komutatif özellikte birim elemanların çarpımı şeklinde ifade edebilmeliyiz. Böyle anti-komutatif iki birim e ve f olsun.

$$u = ef = -fe, \quad e^2 = 1 = -f^2 \quad (1.3.1)$$

olmak üzere $u = ef$ anti-komutatif iki birimin çarpımı olduğundan bir *bi-vektör* tanımlar. Böylece bir Clifford geometrik cebiri tanımlarız. Bu cebiri $Cl_{1,1}$ şeklinde gösterelim. Bu cebir aynı zamanda $\{1, e, f, ef\}$ bazı tarafından gerilen bir vektör uzayı tanımlar. Bir $\omega \in Cl_{1,1}$ elemanı bu baz sayesinde bir lineer birleşim olarak

$$\omega = a_0 + a_1 u + e(b_0 + b_1 u) \quad (1.3.2)$$

veya

$$\omega = \omega(u_+ + u_-) = (a_0 + a_1)u_+ + (b_0 - b_1)eu_- + (b_0 + b_1)eu_+ + (a_0 - a_1)u$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece,

$$\omega \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 + a_1 & b_0 - b_1 \\ b_0 + b_1 & a_0 - a_1 \end{pmatrix}$$

şeklindeki bir eşleme ile istenen izomorfizmayı tanımlayabiliriz.

Şimdi yukarıdaki tanımlamaları genişleterek genelleştirilmiş $Cl_{n,n}$ Clifford cebirini oluşturmak istiyoruz. Bunun için gerçel sayılar kümesine $u_1, u_2, \dots, u_n$ gibi n -tane aralarında değişme özelliğine sahip unipotent elemanları dahil edelim. Böylece unipodal $\mathbb{R}[u_1, u_2, \dots, u_n]$ cebirini oluşturalım. $n \times n$ -mertebeli köşegen matrislerin kümesi 2^n -boyutlu $M(2^n)$ reel matris cebirini oluşturur. Yukarıdaki unipotent $u_1, u_2, \dots, u_n$ elemanlarının belirlediği

$$u_{j\pm} \equiv \frac{1}{2}(1 \pm u_j)$$

şeklindeki elemanlar sayesinde 2^n -tane ilkel işaretli idempotenti tanımlayabiliriz. Örneğin;

$$u_{++++} \equiv u_{1+}u_{2+}\dots u_{n+} \text{ veya } u_{+---} \equiv u_{1+}u_{2-}u_{3+}\dots u_{n+}$$

tanımlamalarını hemen yapabiliriz. Bu türdeki elemanları genel olarak u_{sgn} şeklinde gösterebiliriz. Böylece bir $u \in \mathbb{R}[u_1, \dots, u_n]$ elemanı ilkel idempotent baz cinsinden

$$\omega = \sum_{\text{sgn}} \omega_{\text{sgn}} u_{\text{sgn}}$$

biçiminde yazılabilir. Burada 2^n -tane ω_{sgn} katsayısı reel skalerlerdir. Böylece $\mathbb{R}[u_1, u_2, \dots, u_n]$ ile köşegen matrislerin $M(2^n)$ kümesinin elemanları arasında

$$\omega \leftrightarrow \begin{pmatrix} \omega_{++++} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{+---} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \omega_{----} \end{pmatrix} \quad (1.3.3)$$

şeklindeki bir eşleştirme ile bir cebir izomorfizması tanımlayabiliriz.

Unipotent u_j elemanlarını parçalayarak veya birim elemanların aşağıda verildiği gibi çarpanlara ayrılmasıyla Nötral Clifford cebiri $Cl_{n,n}$ yi elde ederiz şöyle ki; $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$u_j = e_j f_j = -f_j e_j \text{ ve } e_j^2 = 1 = -f_j^2.$$

Aşağıda ise reel Clifford cebiri $Cl_{n,n}$ ile reel matris cebiri $M(2^n)$ arasındaki cebir izomorfizmasını tanımlayan tablo verilmektedir :

$$\begin{pmatrix}
u_{++++} & e_1 u_{-+++} & \cdots & e_\lambda^{-1} u_{\text{sgn},s} & \cdots & e_{1\dots n}^{-1} u_{- \dots -} \\
e_1 u_{++++} & u_{-+++} & \cdots & e_1 e_\lambda^{-1} u_{\text{sgn},s} & \cdots & e_1 e_{1\dots n}^{-1} u_{- \dots -} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
e_\lambda u_{++++} & e_\lambda e_1 u_{-+++} & \cdots & u_{\text{sgn},s} & \cdots & e_\lambda e_{1\dots n}^{-1} u_{- \dots -} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
e_{1\dots k} u_{++++} & e_{1\dots n} e_1 u_{-+++} & \cdots & e_{1\dots k} e_\lambda^{-1} u_{\text{sgn},s} & \cdots & u_{- \dots -}
\end{pmatrix} \quad (1.3.4)$$

(1.3.4) deki matris içinde bulunan Clifford sayıları Clifford cebiri $Cl_{n,n}$ nin 2^{2n} - boyutlu bazını tamamlar. Bu matriste bulunan her bir elemanın satır-kolon numarası aynı numaralı elemanı 1 ve diğer elemanlarının hepsi sıfır olan bir matrise karşılık gelir. u_{sgn} şeklindeki elemanlar 2^n tane karşılıklı birbirini sıfırlayan ilkel idempotent elemanları göstermektedir ve $e_1, \dots, e_n$ elemanları işareti +1 olan ortonormal baz vektörleridir ve $Cl_{n,0}$ cebirini üretirler. e_λ ' lar λ indeks kümesine göre e_i lerin çarpımı ile üretilen elemanlardır. Örneğin; $\lambda = \{1, 2, n\}$ indeks kümesi $e_\lambda \equiv e_1 e_2 e_n$ şeklindeki elemanı üretir. e_λ elemanları ile u_{sgn} elemanları eşlenik değişimlidirler, yani örneğin e_{12n} elemanı için

$$u_{++++} = u_{--++} e_{12n}$$

eşitliği yazılabilir.

2. GEOMETRİK CEBİR

2.1 Düzlemin Geometrik Sayıları

2-boyutlu Öklid düzlemi R^2 yi genişletmek için +1 in R deki antikomütatif olan iki karekökü e_1 ve e_2 yi

$$e_1^2 = e_2^2 = 1, e_{12} = e_1 e_2 = -e_2 e_1 \quad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlayalım. Gerçekten, e_1 ve e_2, R^2 nin ortonormal baz vektörleri olmak üzere $x e_1 + y e_2$ vektörünün karesini $x^2 + y^2$ skalerine eşitlersek $(x e_1 + y e_2)^2 = x^2 + y^2$ ifadesinden

$$e_1^2 = e_2^2 = 1 \text{ ve } e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_{12}$$

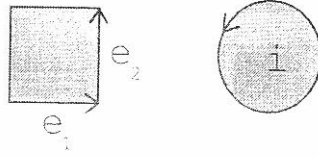
elde ederiz. Diğer taraftan,

$$e_{12}^2 = e_1 e_2 e_1 e_2 = -e_1^2 e_2^2 = -1$$

olduğundan e_{12} ne bir skalerdir ne de bir vektördür, hatta bir skaler ile bir vektörün birleşimi de değildir. İşte biz bu nesneye bir *bivektör* diyeceğiz. Burada e_1 ve e_2 R^2 nin sırasıyla x ve y eksenleri boyunca olan ortonormal birim vektörlerini göstermektedir ve $e_1 e_2$ çarpımı ise tanımını az sonra vereceğimiz e_1 ile e_2 nin geometrik çarpımını göstermektedir. Buna göre R^2 Öklid düzlemi ile birleştireceğimiz G_2 geometrik (Clifford) cebirinin standard ortonormal bazı $\{1, e_1, e_2, e_1 e_2\}$ kümesi ile verilir ve

$$G_2 = \text{ger}\{1, e_1, e_2, e_1 e_2\}_R \quad (2.1.2)$$

olarak geometrik cebri tanımlar. $i = e_{12}$ şeklinde göstereceğimiz i ise *birim bivektör* adını alır ve şekil.2.1.1 deki gibi bir vektör uzayı olarak R^2 düzleminin doğrultu ve yönünü tanımlar.



Şekil.2.1.1 R^2 nin i birim bivektörü

G_2 , sıfır bölenlere sahip olma dışında gerçel sayılar cismi R nin sağladığı bütün cebirsel özelliklere sahiptir ancak genel olarak değişimli değildir. Diğer taraftan (1.3.1) den

$$i^2 = (e_1 e_2)(e_1 e_2) = e_1 (e_2 e_1) e_2 = -e_1 (e_1 e_2) e_2 = -(e_1 e_1)(e_2 e_2) = -1$$

elde edilir ki bu i^2 nin kompleks sayılardaki imajiner birim ile aynı özellikte olduğunu gösterir. Böylece genel olarak bir $g \in G_2$ geometrik sayısını

$$g = (x + iy) + (u_1 e_1 + u_2 e_2) = z + u \quad (2.1.3)$$

şeklinde yazabileceğimizi elde ederiz. Burada $x, y \in R$ olmak üzere $z = x + iy$ *spinör* adını alır ve $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 \in R^2$ şeklinde bir vektördür. $z \in S_i$ lerin S_i kümesini $i = e_1 e_2$ bivektörünün *Spin Düzlemi* olarak adlandıracağız. Şimdi

$$e_1 i = (e_1 e_1) e_2 = e_2 \text{ ve } e_2 i = e_2 (e_1 e_2) = -e_2 (e_2 e_1) = -(e_2 e_2) e_1 = -e_1 \quad (2.1.4)$$

olduğunu göz önüne alırsak herhangi bir $v \in R^2$ vektörünü i ile sağdan geometrik çarpımını yaparsak v vektörünün i bivektörü düzlemi içerisinde $\frac{\pi}{2}$ radyan kadar pozitif yönde bir dönme yaptığını görürüz. Böylece $e^{i\theta}$ spinörleri yönlendirilmiş R^2 düzlemi içindeki dönme hareketlerini meydana getirirler.

Tanım.2.1.1: Şimdi R^2 düzlemi içinde $a^2 = b^2 = 1$ olacak şekilde iki birim vektör $a, b \in R^2$ olsun. Bu vektörlerin

$$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba) = \cos \theta \quad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlanan *simetrik iç çarpımı*, ve

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba) = i \sin \theta \quad (2.1.6)$$

şeklinde tanımlanan *anti-simetrik dış çarpımı* sayesinde bu iki vektörün *geometrik çarpımı*'nı

$$ab = a \circ b + a \wedge b = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \quad (2.1.7)$$

biçiminde tanımlarız.

(2.1.7.) geometrik çarpımı R^2 nin vektörleri ile R^2 nin S_i spinörleri arasında kuvvetli bir ilişkiyi ortaya koymaktadır. R^2 nin $i = e_1 e_2$ bivektörünün düzlemi içindeki bütün vektörlerden oluştuğunu göstermek üzere $R^2 = R^2_i$ yazacağız.

G_2 geometrik cebiri ile 2×2 mertebeli reel sayı bileşenli matrislerin $M(\mathbb{R}_2^2)$ cebiri arasında G_2 nin $\{1, e_1, e_2, e_{12}\}$ baz elemanlarını $M(\mathbb{R}_2^2)$ nin $\{E_0, E_1, E_2, E_{12}\}$ bazı ile yani,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

baz matrisleri ile birebir eşlemek suretiyle bir izomorfizma tanımlayabiliriz.

2.2 Minkowski Uzay-Zaman' ın Geometrik Cebiri

Bu kısımda, M_1^3 Minkowski uzayı ile onun G_1^3 geometrik cebirini ele alacağız. M_1^3 Minkowski uzayının non-dejenere metrik tensörü g olsun. Buna tekabül eden karesel form, M_1^3 in tanjañt uzayının bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ye göre c ışık hızını göstermek ve zaman yönündeki koordinat fonksiyonu t olmak üzere $\{x_1, x_2, x_3, t\}$ koordinat fonksiyonlarına göre $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2$ şeklindedir. O halde

$$\begin{aligned} (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 - c t e_4)^2 &= x_1^2 e_1^2 + x_2^2 e_2^2 + x_3^2 e_3^2 + c^2 t^2 e_4^2 \\ &\quad + 2 \sum_{i \neq j}^3 x_i^2 x_j^2 (e_i e_j + e_j e_i) - 2 \sum_{i=1}^3 c t x_i (e_i e_4 + e_4 e_i) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1 \text{ ve } e_4^2 = -1$$

ve ayrıca

$$e_i e_j = -e_j e_i, i \neq j$$

olduğunu elde ederiz. Birim vektörlerin geometrik çarpımları için

$$e_{ij} = e_i e_j, i \neq j, e_{ijk}, i \neq j \neq k \text{ ve } e_{ijkl} = e_i e_j e_k e_l, i \neq j \neq k \neq l$$

gösterimlerini kullanacağız, örneğin; $e_{1234} = e_1 e_2 e_3 e_4$ yazarız. M_1^3 Minkowski uzayının G_1^3 geometrik cebiri birim elemanı 1 olan 16 boyutlu birleşmeli bir cebirdir, bu cebirin baz elemanları skalerler, vektörler, bivektörler(2-blade), 3-vektörler(3-blade) ve 4-vektörler(4-blade) den oluşur. Bunlar sırası ile

$$1; e_1, e_2, e_3, e_4; e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}; e_{123}, e_{124}, e_{134}, e_{234}; e_{1234}$$

elemanlarından ibarettir. Bu terminolojiye göre kastedilenler aslında bi-vektörler yönlü alanlara, 3-vektörler yönlü hacimlere ve 4-vektörler ise yönlü 4-boyutlu hacimlere karşılık gelmektedir.

Minkowski uzayının geometrik cebirini 4×4 mertebeli matrislerin uzayı ile aşağıdaki baz matrislerini sırasıyla $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ baz vektörleri ile çeşleştirelim:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu matrisler aşağıdaki koşulları sağlar:

$$E_1^2 = E_2^2 = E_3^2 = I_{2 \times 2} \text{ ve } E_4^2 = -I_{2 \times 2}, E_i E_j = -E_j E_i, i \neq j.$$

Örnek.2.2.1 $a = (1 + e_1)(1 + e_{234}) \in G_1^3$ elemanı matrislerle

$$\begin{aligned} A &= (I + E_1)(I + E_2 E_3 E_4) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

matrisine eşdeğerdir.

Şimdi,

$$a = (1 + e_1)(1 + e_{234}) = 1 + e_1 + e_{234} + e_{1234}$$

elemanı

nın Clifford veya geometrik eşleniği

$$\bar{a} = (1 + e_{234})(1 - e_1) = 1 - e_1 + e_{234} + e_{1234}$$

şeklinde verilir ve $\bar{a}a = 0$ olmasına karşın

$$a\bar{a} = (1 + e_1 + e_{234} + e_{1234})(1 - e_1 + e_{234} + e_{1234}) = 4(e_{234} + e_{1234}) \neq 0$$

dır ve bu sonuç bir sayı bile değildir. Geometrik cebirdeki bu durum matrislerlede gerçekleşebilir. Gerçekten, yukarıda elde ettiğimiz A matrisinin anti-otomorfizmi, ki bu Clifford eşleniğine karşılık gelir, $\bar{A} = E_4 A' E_4^{-1}$ matrisiyle hesaplanır. O halde,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\bar{A}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olmasına karşın,

$$A\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan $\bar{A}A \neq A\bar{A}$ dır. Üstelik $A\bar{A}$ bir köşegen matris olmadığı gibi birim matris $I_{4 \times 4}$ ün de bir skaler katı değildir, yani bir skaler matris değildir.

2.3 Genelleştirilmiş Geometrik Cebir

Yukarıda tanımladığımız geometrik cebiri bu kısımda keyfî reel vektör uzaylarına genişletmek istiyoruz.

V , sonlu boyutlu olmak zorunda olmayan herhangi bir vektör uzayı ve V üstünde $v_1, v_2 \in V$ olmak üzere $v_1 \cdot v_2$ şeklinde tanımlı bir iç çarpım fonksiyonunu göz önüne alalım. V deki vektörlerin $v_1 v_2 \dots v_k$ şeklindeki çarpımlarının toplamından oluşan ve aşağıdaki koşulları sağlayan birleşimli $G(V)$ geometrik cebirini tanımlayalım:

i) $\forall v \in V$ için $v^2 = v \cdot v$ dir,

ii) $v_i \in V$ vektörleri ikişer ikişer ortogonal yani $i \neq j$ için $v_i \cdot v_j = 0$ ise bu durumda $v_1 v_2 \dots v_k$ geometrik çarpımı antisimetrik, yani herhangi iki vektör aralarında yer değiştiriyor ise çarpım işaret değiştirir ve bu çarpımların her birine bir *basit k-vektör* adı verilir.

Genel olarak bir *k-vektör* birer basit k-vektör olan $B_k, C_k, \dots$ lerin

$$A_k = B_k + C_k + \dots$$

şeklinde bir toplamından oluşur. $G(V)$ nin elemanları üstünde tanımlayacağımız toplama ve çarpma işlemleri gerçel sayılar cisminin sağladığı tüm özellikleri çarpmanın değişme kuralı dışında sağlar.

Tanım.2.3.1 Yukarıdaki V vektör uzayı üstünde iç çarpım yerine genel olarak *non-dejenere* bir metrik alınırsa oluşan geometrik cebire bu metriğe göre V üstünde bir *Clifford Cebiri* adı verilir.

O halde $\mathbb{R}_n \equiv G(\mathbb{R}^n)$ geometrik cebiri n-boyutlu Öklid vektör uzayı $\mathbb{R}^n$ nin vektörlerinin geometrik çarpımlarının bütün toplamalarından oluşturulur. $\mathbb{R}_n$ nin bütün k-vektörlerinin oluşturduğu küme $\mathbb{R}_n$ nin $\binom{n}{k}$ - boyutlu bir alt vektör uzayıdır, bu alt uzayı

$\mathbb{R}_n^k \equiv \langle \mathbb{R}_n \rangle_k$ şeklinde gösterirsek, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ -boyutlu $\mathbb{R}_n$ geometrik cebirini

$$\mathbb{R}_n = \langle \mathbb{R}_n \rangle_0 + \langle \mathbb{R}_n \rangle_1 + \dots + \langle \mathbb{R}_n \rangle_n \quad (2.3.1)$$

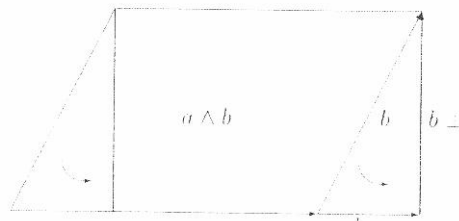
şeklinde parçalı gösterimle yazabiliriz.

Böylece $\mathbb{R}_n$ geometrik cebiri, $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}_n^0 \subset \mathbb{R}_n$ şeklindeki gerçel sayılar cisminin bir genişletilmesi şeklinde olmaktadır. Bu durumda 1-vektörlerin oluşturduğu alt uzay ise $\mathbb{R}^n$ nin kendisidir, yani $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}_n^1$ dir. Şimdi $\mathbb{R}^n$ nin vektörlerinin geometrik çarpımlarını açıklayacağız. Bunun için $a, b \in \mathbb{R}^n$ alalım. b nin a ya paralel ve dik vektör bileşenlerini

sırasıyla b_p ve b_d şeklinde göstermek üzere $b = b_p + b_d$ yazalım, (Şekil.2.3.1). Geometrik çarpımın dağılma özelliğini kullanarak

$$ab = a(b_p + b_d) = ab_p + ab_d \quad (2.3.2)$$

yazabiliriz. Burada, $ab_p \equiv \langle ab \rangle_0$ şeklinde bir skaler veya ab nin 0-vektör parçası ve $ab_d \equiv \langle ab \rangle_2$ şeklinde ab nin 2-vektör parçası veya bi-vektör kısmıdır.



Şekil.2.3.1 b nin a dik ve paralel bileşenleri

Burada, (2.1.7) ile (2.3.2) yi karşılaştıracak olursak

$$ab_p = a.b \equiv \frac{1}{2}(ab + ba) , \quad ab_d = a \wedge b \equiv \frac{1}{2}(ab - ba)$$

olduğu görülür.

Şimdi genel olarak diğer geometrik çarpımları ele alacağız. $r, s \geq 1$ olmak üzere $A_r \in \mathbb{R}_n^r$ ve $B_s \in \mathbb{R}_n^s$ olsun. A_r ve B_s nin iç çarpımı ve dış çarpımını sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$A_r.B_s \equiv \langle A_r.B_s \rangle_{|r-s|} \quad (2.3.3)$$

$$A_r \wedge B_s \equiv \langle A_r.B_s \rangle_{r+s} \quad (2.3.4)$$

Eğer, $a \in \mathbb{R}_n^1$ ve $B_r \in \mathbb{R}_n^r$, $r \geq 1$, ise bu durumda,

$$a.B_r = \frac{1}{2}(aB_r + (-1)^{r+1}B_r.a) = (-1)^{r+1}B_r.a$$

ve

$$a \wedge B_r = \frac{1}{2}(aB_r + (-1)^rB_r.a) = (-1)^rB_r \wedge a$$

genelleştirmeleri yapılarak

$$aB_r = a.B_r + a \wedge B_r \quad (2.3.5)$$

yazabiliriz. (2.3.5) in kanıtını daha önceki gibi yapabiliriz. Şöyleki a nın B_r basit r -vektörün içinde bulunduğu alt uzaydaki izdüşümü a_p ve B_r ye ortogonal olan tamamlayıcı alt uzay üzerine a nın dik izdüşümü de a_d olmak üzere $a = a_p + a_d$ yazarsak

$$aB_r = (a_pB_r + a_dB_r) = (-1)^{r+1}B_r.a_p + (-1)^rB_r.a_d \quad (2.3.6)$$

ve

$$B_r a = B_r(a_p + a_d) = B_r a_p + B_r a_d \quad (2.3.7)$$

elde ederiz. (2.3.6) ve (2.3.7) özdeşliklerinden $(r-1)$ ve $(r+1)$ -vektör parçalarını almak suretiyle

$$a.B_r = a_p.B_r = (-1)^{r+1} B_r a_p$$

ve

$$a \wedge B_r = a_d.B_r = (-1)^r B_r a_d$$

elde ederiz ve bunları kullanarak

$$B_r a = B_r a_p + B_r \wedge a_d$$

sonucunu yazabiliriz. Böylece (2.3.5) ifadesinin kanıtı bu özdeşliklerden gereken işaret kombinasyonlarını almak suretiyle tamamlanır. Bu özdeşliklerin bir uygulaması olarak

$$a.(b \wedge B_r) = (a.b)B_r - b \wedge (a.B_r) \quad (2.3.8)$$

ifadesini kanıtlayalım:

$$\begin{aligned} a.(b \wedge B_r) &= \langle a(b \wedge B_r) \rangle_r = \frac{1}{2} \langle abB_r + (-1)^r aB_r b \rangle_r \\ &= (a.b)B_r + \frac{1}{2} \langle -baB_r + (-1)^r aB_r b \rangle_r \\ &= (a.b)B_r + \frac{1}{2} \langle -b(a.B_r + a \wedge B_r) + (-1)^r (a.B_r + a \wedge B_r)b \rangle_r \\ &= (a.b)B_r - b \wedge (a.B_r) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Bu kısımda geometrik cebirin bir aksiyomatik tanımını vermek istiyoruz.

Tanım.2.3.1 Bir G kümesi üstünde tanımlanan iki iç işlem ve bir operatör ile birlikte aşağıdaki aksiyomları gerçekliyor ise bu işlemler ve operatörle birlikte G kümesine bir *geometrik cebir* adını vereceğiz:

$$\begin{array}{ll} \text{Çarpma;} & G \times G \rightarrow G \\ & (a,b) \rightarrow ab \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ll} \text{Toplama;} & G \times G \rightarrow G \\ & (a,b) \rightarrow a + b \end{array}$$

$\forall i \in \mathbb{N}$ için Grade-işlemi: $\langle . \rangle_i: G \rightarrow G$

Halka Aksiyomları:

$\forall A, B, C \in G$ elemanları için;

- 1) $A + B = B + A$,
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- 3) $(AB)C = A(BC)$,
- 4) $A(B + C) = AB + AC, (A + B) + C = AC + BC$,
- 5) $A + 0 = A$ olacak şekilde bir $0 \in G$ vardır,
- 6) $1A = A1 = A$ olacak şekilde bir $1 \in G$ vardır,
- 7) $\forall A \in G, A + (-A) = 0$ olacak şekilde bir $-A \in G$ vardır.

Bu aksiyomlarla birlikte G bir değişimli olmayan halka yapısı oluşturur.

Grade (derecelendirme) Aksiyomları: Bu aksiyomlar farklı mertebeli vektörlerin varlığını garanti eder.

- 1) $\forall A \in G$ k -vektörlerin aşağıdaki gibi bir toplamından ibarettir;

$$A = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 + \dots$$

- 2) 0-vektörler reel sayılardan ibarettir ve *skaler* adını alırlar. Bunların toplamı ve çarpımı bilinen toplama ve çarmadan ibarettir, geometrik cebirin sıfır ve birim elemanları ise sırasıyla 0 ve 1 dir. skalerler ile k -vektörlerin toplama işlemi değişmelidir.

- 3) derecelendirme işlemi 0-vektörler üstünde lineerdir. Yani, örneğin λ bir 0-vektör yani bir skaler ve A, B de multi-vektörler ise

$$\langle \lambda A + B \rangle_k = \lambda \langle A \rangle_k + \langle B \rangle_k$$

yazılabilir.

- 4) Bir k -blade a_i ' ler sıfırdan farklı 1-vektörler ve $i \neq j$ için $a_i a_j = -a_j a_i$ anti-komutatif olmak üzere $a_1 a_2 a_3 \dots a_k$ şeklindeki bir multi-vektördür. Böylece, bir k -blade sıfırdan farklı bir k -vektördür ve k -blade' lerin bir toplamı olarak ifade edilebilir. Bu ise multi-vektörleri vektörlerin çarpımlarının bir toplamı biçiminde ifade edebilmemize olanak sağlar.

Öklid İşaret Aksiyomu: Her bir 1-vektör yani bir a vektörünün karesi a^2 bir pozitif reel sayıdır. Bu aksiyomla cebir üzerinde bir Öklidyen yapı tanımlanabilecektir.

Şu halde bir *geometrik cebir*; reel sayılar üzerinde yukarıdaki 3. ve 4. derecelendirme aksiyomlarını ve Öklid işaret aksiyomunu sağlayan derecelendirilmiş değişmeli olmayan bir cebirdir.

2.4 Vektörlerin İç ve Dış Çarpımlarının Özellikleri

Bu kısımda 1-vektörlerin iç ve dış çarpımlarının bazı özelliklerini vereceğiz.

İki vektör a, b olsun. Bunların iç çarpımını

$$a.b = \frac{1}{2}(ab + ba)$$

şeklinde tanımlamıştık. $(a+b)^2$, a^2, b^2 skalerler olduğundan $a.b$ de bir skalerdir, çünkü

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + b^2 + 2a.b$$

dir. İç çarpımın yukarıdaki tanımına göre bilineer, simetrik ve pozitif tanımlı olduğu kolayca görülür. Böylece ortogonallığın $a.b = 0$ şeklinde tanımlandığı bir Öklid uzayı sözkonusu olur. Şu halde sonlu boyutlu durumda $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ şeklinde bir ortonormal baz tanımlayabiliriz. Yukarıdaki gibi tanımlı iç çarpımın aşağıdaki özellikleri vardır:

1) a ve b ortogonaldır $\Leftrightarrow ab = -ba$.

2) a ve b paraleldir, yani bir λ skaleri için $a = \lambda b$ dir $\Leftrightarrow a.b = ab$ veya eşdeğer olarak $ab = ba$ ise.

Çünkü, eğer bir λ skaleri için $a = \lambda b$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} a.b &= (\lambda b).b = \frac{1}{2}(\lambda bb + b\lambda b) \\ &= \lambda b^2 = (\lambda b)b = ab \end{aligned}$$

elde ederiz. Diğer taraftan, b nin a ya paralel ve dik bileşenleri sırasıyla $b_{\parallel}$ ve $b_{\perp}$ olmak üzere $b = b_{\parallel} + b_{\perp}$ yazalım. Eğer $ab = ba$ ise o zaman $0 = ab - ba = 2ab_{\perp}$ yazabiliriz ki yukarıdaki derecelendirme aksiyomu 4. den ya $b_{\perp} = 0$ veya $a = 0$ elde ederiz, bunların her ikisinde $a \parallel b$ olduğunu gösterir.

3) Eğer $b = b_{\parallel} + b_{\perp}$ yazılabilirse bu durumda $a.b = ab_{\parallel}$ elde ederiz.

4) Bir a vektörünün uzunluğunu bilinen şekilde $|a| = \sqrt{a.a} = \sqrt{a^2}$ olarak tanımlarız.

Şimdi de vektörlerin dış çarpımı inceleyelim. İki vektör a, b olsun. Bunların dış çarpımını

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba)$$

şeklinde tanımlamıştık. Bu işlem aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) İşlem bilineer ve anti-komutatiftir : $a \wedge b = -\frac{1}{2}(ba - ab) = -b \wedge a$ dir.

2) a ve b ortogonaldır $\Leftrightarrow a \wedge b = ab$.

3) a ve b paraleldir $\Leftrightarrow a \wedge b = 0$ ise. Özel olarak $a \wedge a = 0$ elde ederiz.

4) Eğer $b = b_{\parallel} + b_{\perp}$ yazılabilirse bu durumda $a \wedge b = ab_{\perp}$ elde ederiz. O halde 4.derecelendirme aksiyomuna göre $a \neq 0$ ve $b \nparallel a$ iken $a \wedge b$ daima bir 2-blade yani böylece daima bir bi-vektördür.

5) $ab = a.b + a \wedge b$ daima yazılabilir. Böylece iki vektörün geometrik çarpımı daima bir skaler parçaya ve bir bivektör parçaya sahiptir. Bu durumda $a \wedge b = \langle ab \rangle_2$ yazabiliriz ki bu bize iki vektörün geometrik çarpımının en yüksek dereceli parçasını gösterir. Bu özellik dış çarpımın genelleştirilmesinde işe yarayacaktır.

Şimdi Bölüm.2.3 de verdiğimiz genelleştirilmiş geometrik çarpım işlemini biraz daha açıklamak istiyoruz. Bunu bazların ortonormallik koşullarına uygularsak;

$$\begin{aligned} i \neq j \text{ ise } e_i e_j &= -e_j e_i \\ e_i^2 &= 1 \end{aligned}$$

kurallarını kullanarak örneğin, $a = a_1 e_1 + a_2 e_2, b = b_1 e_1 + b_2 e_2$ vektörlerinin geometrik çarpımı olarak

$$\begin{aligned} ab &= (a_1 e_1 + a_2 e_2)(b_1 e_1 + b_2 e_2) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 e_2 \end{aligned}$$

buluruz, buna göre

$$\begin{aligned} a.b &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ a \wedge b &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 e_2 \end{aligned}$$

olduğu açıkça görülecektir. Burada $e_1 e_2$ tanıma göre bir bi-vektör ve $a_1 b_2 - a_2 b_1$ ise $a \wedge b$ nin büyüklüğü, yani a ve b nin oluşturduğu paralelkenar dörtgenin yönlü alanıdır. Buradaki yöntemle herhangi multi-vektörlerin bu baza göre geometrik çarpımlarını yapabiliriz, ancak buradaki baz G^1 için verilmiştir, G nin tamamında geçerli bir bazı nasıl bulacağımızı aşağıda açıklayacağız:

2-vektörlerin (bivektörlerin) G^2 uzayının elemanları yani bivektörlerin $a_1 a_2 = -a_2 a_1$ koşulunu sağlayan (ortogonal olan) $a_1 a_2$ şeklindeki 2-blade' lerin bir toplamı şeklinde olduğunu

biliyoruz. $a_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, a_2 = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$ dersek,

$$a_1 a_2 = \sum_{i \neq j} \lambda_i \mu_j e_i e_j = \sum_{i < j} (\lambda_i \mu_j - \lambda_j \mu_i) e_i e_j$$

yazabiliriz. $i = j$ halinde $\sum \lambda_i \mu_j e_i e_j = a_1 a_2 = 0$ olacağı açıktır. O halde geriye kalan kısım $e_i e_j$ nin diğer bütün katlarından oluşur, yani bütün bi-vektörleri $\lambda_{ij} e_i e_j$ lerin bir toplamı olarak ifade edebiliriz. Şu halde sadece

$$\{e_i e_j : i, j = 1, \dots, n, i < j\}$$

Kümesinin bivektörlerin uzayının bir bazı olduğunu kanıtlamak için bu kümenin bir lineer bağımsız küme olduğunu göstermeliyiz. Bunun için

$$\sum_{i < j} \lambda_{ij} e_i e_j = 0$$

olsun. Bu ifadeyi soldan $e_k e_l$, $1 \leq k < l \leq n$ ile çarptığımızda

$$\lambda_{lk} + \{2 \text{ ve } 4. \text{ mertebeden grading terimler}\} = 0$$

Şeklindeki multi-vektörü buluruz ki bu $\lambda_{lk} = 0$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde yukarıdaki ifade herhangi l ve k ya uygulanırsa bütün λ_{ij} leri sıfır buluruz. Böylece $\{e_i e_j : i, j = 1, \dots, n, i < j\}$ kümesi bivektörlerin uzayının bazıdır.

Şimdide $G^k \subset G$ alt vektör uzayını ele alalım. $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ olmak üzere $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}$ şeklindeki k -vektörler $G^k \subset G$ alt uzayının bazını oluştururlar. Böylece G^k nin boyutunun $\binom{n}{k}$ şeklinde olacağı sonucuna varırız. Lineer bağımsız en çok n - tane baz vektör söz konusu olduğundan n -grade' den büyük grading yoktur. Böylece G^k ların hepsinin bazları bir araya getirilirse G nin bazını elde etmiş oluruz. Örneğin G^1 vektör uzayı 3-boyutlu ise G nin bazını

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_1 e_2, e_1 e_3, e_2 e_3, e_1 e_2 e_3\}$$

şeklinde elde ederiz ki bunu daha öncede bulmuştuk. Eğer G^1 vektör uzayı n -boyutlu ise G nin bir bazı

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

şeklinde 2^n tane lineer bağımsız elemana sahip olacağından G nin boyutu 2^n dir.

Şimdi de k -blade kavramını biraz daha açıklayalım: Bunun için bir k -blade $A_k = a_1 \dots a_k$ şeklinde verilsin, bu durumda $a_1, a_2, \dots, a_k$ vektörleri tarafından gerilen bir tek $\hat{A}_k \subset G^1$ alt vektör uzayını tanımlayabiliriz. Tersine G^1 de verilen her hangi bir alt vektör uzayı V bir

skaler çarpan farkıyla bir A_k , k -blade' i tanımlar. Bunları kanıtlayalım: Önce bir $A_k = a_1 \dots a_k$ k -blade' inin verilmiş olduğunu kabul edelim. $\hat{A}_k$ alt uzayının $a_1, a_2, \dots, a_k$ vektörlerinden bağımsız şekilde tanımlanabileceğini göstermeliyiz. Bir $b = b_{\parallel} + b_{\perp}$ vektörü, $a_1, a_2, \dots, a_k$ ' ye paralel ve dik bileşenlerinin toplamı ile verilsin. A_k nın b vektörü ile çarpımını inceleyelim:

$A_k b_{\perp} = a_1 a_2 \dots a_k b_{\perp}$ bir $(k+1)$ -blade' dir. Diğer taraftan $b_{\parallel} = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$ olduğunu göz önüne alırsak $A_k b_{\parallel}$ nin $a_1 a_2 \dots a_k a_i$ şeklindeki terimlerin bir toplamı olduğunu görürüz. Bu terimleri $a_i a_j = -a_j a_i$ ve a_i^2 lerin skalerler olduğu göz önüne alınarak yeniden düzenlenebilir. O halde sonuç $j \neq i$ olacak şekildeki a_j vektörlerinin bir katından oluşan bir $(k-1)$ -blade' dir. Sonuç olarak, A_k nın b vektörü ile çarpımı

$$A_k b = A_k b_{\parallel} + A_k b_{\perp}$$

şeklinde bir $(k-1)$ -blade ile bir $(k+1)$ -blade' in toplamından ibarettir. O halde grade'in mertebesinin bir eksiği ile bir fazlasının toplamından oluşmaktadır. Böylece

$$A_k b = \langle A_k b \rangle_{k-1} + \langle A_k b \rangle_{k+1}$$

elde ederiz ki bu $\langle A_k b \rangle_{k+1} = 0$ ise b , $a_1, a_2, \dots, a_k$ vektörlerine paraleldir, eğer $\langle A_k b \rangle_{k-1} = 0$ ise b , $a_1, a_2, \dots, a_k$ vektörlerine ortogondur. Bu ifadeler ise $a_1, a_2, \dots, a_k$ vektörlerinin seçiminden bağımsız olup $\hat{A}_k$ alt uzayı, $\langle A_k b \rangle_{k+1} = 0$ koşulunu sağlayan b vektörlerinin uzayı olarak bulunur. Diğer taraftan G^1 in k -boyutlu bir V alt uzayı ve iki k -blade A_k ve B_k verilsin ve $V = \hat{A}_k = \hat{B}_k$ olsun yani iki k -blade aynı bir alt uzayı tanımlasın.

$B_k = \lambda A_k$ olduğunu gösterebiliriz, yani G^1 in bir alt uzayı bir skaler katına kadar bir k -blade' i tek türlü belirleyebilir. Bunu kanıtlamak için a_i ye ortogonal olan $A_k = a_1 a_2 \dots a_k$ ve b_j ye ortogonal $B_k = b_1 b_2 \dots b_k$ tanımlayalım. $\{a_i\}$ ve $\{b_j\}$ vektör kümesinin her ikisinde tanıma göre V nin bazlarıdır. Böylece bazlardan birisini diğerinin bir lineer kombinasyonu biçiminde ifade edebiliriz. Böylece λ_{ij} ' ler skalerler olmak üzere

$$b_j = \sum_{i=1}^k \lambda_{ij} a_i$$

yazabiliriz. Bunları $B_k = b_1 b_2 \dots b_k$ de yerine koyarsak $\lambda_{i_1} a_{i_1} \dots a_{i_k}$ şeklindeki terimlerin bir toplamını buluruz ki bütün a_{i_j} lerin farklı olması nedeniyle bu terimler birer k -blade' dir. Eğer aynı bir a_{i_j} iki kez varsa sonuç bir skaler olur ve terim en çok bir $(k-2)$ -blade olur, bu ise B_k nın bir k -blade oluşuna aykırıdır, dolayısıyla hiçbir a_{i_j} iki kez bulunmayacaktır. Ancak bu terimleri $\lambda_{i_1} a_{i_1} \dots a_{i_k}$ biçiminde olacak şekilde yeniden numaralandırmamız ve sonra

toplamamız mümkündür, yani sonuç $B_k = \lambda A_k$ şeklinde olacaktır. Böylece bir k -blade'ın G^1 in k -boyutlu alt uzaylarında bulunacağını ve böyle iki k -blade'ın bir skaler farkıyla aynı olduğunu göstermiş olduk. Bu skaler geometrik bir anlama sahiptir ve blade'ın k - boyutlu hacimlerini ifade eder, yani bir k -blade'ın yönlendirilmiş alanlar olarak yorumlanabileceği gerçeğini bize gösterir. Örneğin $e_1 e_2$ 2-blade'i e_1, e_2 vektörlerinin gerdiği düzlemdeki birim alanı tanımlar ve $e_1 e_2 = -e_2 e_1$ olduğundan $e_2 e_1$ blade' di de aynı düzlemde bulunmasına karşın ters yönlendirilmiş birim alanı tanımlar. Genel olarak alanın yönlendirilmiş ölçümünü bir $A_k = a_1 a_2 \dots a_k$ k -blade'ının alanının mutlak değeri olarak $\sqrt{a_1^2 a_2^2 \dots a_k^2}$ şeklinde tanımlayabiliriz.

Şimdi de dış çarpımı G nin tamamına genelleştirelim ve genelleştirilmiş dış çarpımın bazı özelliklerini inceleyelim. İki vektörün dış çarpımının bu vektörlerin oluşturduğu paralelkenar dörtgenle temsil edildiğini biliyoruz. Bu düşüncüyü genelleştirirsek üç vektörün $a \wedge b \wedge c$ dış çarpımı da bu vektörlerin oluşturacağı paralelyüz sayesinde açıklanabilir. O halde k -tane $a_1, a_2, \dots, a_k$ vektörlerinin dış çarpımı bunların $a_1, a_2, \dots, a_k$ vektörleri tarafından gerilen uzaydaki ortogonal uzunluklarının çarpımından elde edilen aynı hacimde bir $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k$ k -blade'ını ortaya koyar. Eğer $a_1, a_2, \dots, a_k$ vektörleri ortogonal iseler o durumda $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k = a_1 a_2 \dots a_k$ olmalıdır. A_k , k -blade'leri için

$$A_k b = \langle A_k b \rangle_{k-1} + \langle A_k b \rangle_{k+1}$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca, $\langle A_k b \rangle_{k+1} = A_k b_\perp$ olduğunu da biliyoruz. Yani $(k+1)$ -blade $a_1, a_2, \dots, a_k, b$ vektörlerinin ortogonal kısımları tarafından oluşturulur.

Böylece,

$$A_k \wedge b = \langle A_k b \rangle_{k+1}$$

olarak tanımlamalıyız. Şimdi bu tanımları k -blade'lere doğal olarak genişletebiliriz. A_r ve B_s sırasıyla iki r ve s blade olsun.

$$A_r \wedge B_s = \langle A_r B_s \rangle_{r+s}$$

tanımlarımız ve bunu lineer şekilde uzayın tamamına genişletiriz. Üstelik bu çarpım birleşmelidir. Bu çarpımı bazı elemanları üstünde ele alalım. Örneğin iki bazı elemanları $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}$ ve $e_{j_1} e_{j_2} \dots e_{j_m}$ şeklinde verilsin, bu iki çarpımda ortak vektörlerin bulunup bulunmadığına bakmalıyız. Eğer ortak bir vektör varsa bu çarpımın derecesini azaltacağı için dış çarpımda $k+m$ -dereceli vektör bileşeni yer almayacak böylece dış çarpım sıfır olacaktır. Aksi takdirde bütün vektörler ortogonal olacaklarından dış çarpım

$$e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} e_{j_1} e_{j_2} \dots e_{j_m}$$

şeklinde bulunacaktır. Örneğin;

$$\begin{aligned} (e_1 + e_3) \wedge (e_3 + e_2 e_3) &= e_1 \wedge e_3 + e_1 \wedge (e_2 e_3) + e_3 \wedge e_3 + e_3 \wedge (e_2 e_3) \\ &= e_1 e_3 + e_1 e_2 e_3 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

2.5 Genelleştirilmiş Dış Çarpımın Özellikleri

1) A_k bir k -blade ve $k > 0$ olsun. $A_k^2 = a_1 a_2 \dots a_k a_1 a_2 \dots a_k$ olduğundan $A_k \wedge A_k = 0$ dir.

2) A_k bir k -blade ve a bir vektör ise

$$A_k \wedge a = A_k \wedge a_{\perp} = A_k a_{\perp} \quad (2.5.1)$$

dir.

3) $A_k \wedge a = A_k a$ ise a ile A_k ortogondir, $A_k \wedge a = 0$ ise a ile A_k paraleldir.

4) $a_1, a_2, \dots, a_k$ lineer bağımsız vektörler ve bu vektörleri Gram-Schmidt yöntemi ile ortonormal hale getirdiğimizde elde edeceğimiz vektörler $b_1, b_2, \dots, b_k$ şeklinde ise bu durumda

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k = b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_k = b_1 b_2 \dots b_k \quad (2.5.2)$$

elde ederiz. Eğer $a_1, a_2, \dots, a_k$ lineer bağımlı vektörler iseler bu durumda sonuç sıfırdır.

5) Eğer $a_1, a_2, \dots, a_k$ lineer bağımsız vektörler ise $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k$ bir k -blade' dir ve hacmi $\sqrt{b_1^2 b_1^2 \dots b_k^2}$ dir.

6) Eğer $a_1, a_2, \dots, a_k$ lineer bağımlı vektörler ise $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k = 0$ veya tersi doğrudur.

2.6 Genelleştirilmiş İç Çarpımın Özellikleri

Önce iç çarpımı blade'lere genişletelim. Bunun için A_r ve B_s sırasıyla iki r ve s blade olsun. Bunların iç çarpımını G nin tamamına

$$A_r \cdot B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|}$$

şeklinde genişletelim, burada λ skalerleri için iç çarpım $\lambda.A_k = A_k.\lambda = 0$ ilave koşulla tanımlanmaktadır.

Şimdi a bir vektör ve A_k bir $k-blade$ olsun,

$$A_k a = \langle A_k a \rangle_{k-1} + \langle A_k a \rangle_{k+1}$$

olduğunu biliyoruz. İç çarpımın yukarıdaki genelleştirilmiş ve genelleştirilmiş dış çarpım ile

$$A_k a = A_k .a + A_k \wedge a$$

yazarız. Böylece iç çarpımın, bir vektör ile bir $k-blade$ 'in geometrik çarpımının dereceyi indirgeyen ve dış çarpımında dereceyi yükselten parçası olduğunu görürüz. İç çarpımın nasıl yapılacağını görmek yine baz vektörlerle açıklanabilir, eğer baz vektörlerden biri diğerinde kapsanırsa bu durumda o çarpım dikkate alınır, aksi takdirde sıfır olacağından dikkate alınmaz, böylece iç çarpımın derecesi $|r-s|$ oluncaya kadar indirgeme sürer. Örneğin;

$$\begin{aligned} (e_1 + e_2 e_3)(e_2 e_3 + e_1 e_2) &= e_1.(e_2 e_3) + e_1.(e_1 e_2) + (e_2 e_3).(e_2 e_3) + (e_2 e_3).(e_1 e_2) \\ &= e_1 e_1 e_2 + e_2 e_3 e_2 e_3 \\ &= e_2 - 1 \end{aligned}$$

elde ederiz. Genelleştirilmiş iç çarpımın aşağıdaki özelliklerini sıralayabiliriz:

1) a bir vektör ve A_k bir $k-blade$ ise

$$A_k .a = A_k .a_{||} = A_k a_{||} \quad (2.6.1)$$

2) $A_k .a = A_k a$ ise a ile A_k paraleldir, $A_k .a = 0$ ise a ile A_k ortogonaldir.

3) a bir vektör ve A_k bir $k-blade$ ve $A_k = a_1 a_2 \dots a_k$ ise $A_k .a$ iç çarpımı A_k içinde bir

$(k-1)$ -vektör dür ve a nın A_k üstüne paralel izdüşümü olan $a_{||}$ ya ortogonaldir. Bunu göstermek için $(A_k .a).a_{||} = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten,

$$\begin{aligned} (A_k .a).a_{||} &= (A_k a_{||}).a_{||} \\ &= \langle A_k a_{||} a_{||} \rangle_{k-2} \\ &= \langle A_k a_{||}^2 \rangle_{k-2} = 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Benzer iç çarpım iki blade içinde yapılabilir. İç çarpım daima izdüşüm ortogonal olacaktır.

- 4) Farklı iki $k-blade$ $e_I = e_{i_1} \dots e_{i_k}$ ve $e_J = e_{j_1} \dots e_{j_k}$ olsun , eğer $e_I \cdot e_J = 0$ ise bu iki $k-blade$ 'in ortogonal olduğunu söyleriz.

Yukarıda incelediğimiz genelleştirilmiş dış ve iç çarpım işlemlerini göz önüne alarak geometrik çarpımın genel şeklini biraz daha yakından inceleyelim.

$$A_k a = \langle A_k a \rangle_{k-1} + \langle A_k a \rangle_{k+1}$$

ifadesi A_k ya göre lineerdir ve bu durum A_k nın bir k -vektör olmasında da geçerlidir. Bu ifadenin her iki yanını a ya ortogonal olan bir b vektörü ile çarpıp formülü tekrar uygularsak ,

$$\begin{aligned} A_k ab &= (\langle A_k a \rangle_{k-1} + \langle A_k a \rangle_{k+1})b \\ &= (B_{k-1} + B_{k+1})b \\ &= \langle B_{k-1} b \rangle_{k-2} + \langle B_{k-1} b \rangle_k + \langle B_{k+1} b \rangle_k + \langle B_{k+1} b \rangle_{k+2} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $A_k ab$, $k-2$, k ve $k+2$ mertebeden bileşenler içerir. O halde,

$$A_k ab = \langle A_k ab \rangle_{k-2} + \langle A_k ab \rangle_k + \langle A_k ab \rangle_{k+2}$$

yazarız. Bu durumda minimal derece A_k nın sağındaki vektör sayısının k dan çıkarılmasıyla, maksimal derece ise A_k nın sağındaki vektör sayısının k ya eklenmesiyle bulunmaktadır, o halde $k-2$ ile $k+2$ arasındadır. Bu düşünceye göre; A_r ve B_s sırasıyla iki r ve s blade ve $r \geq s$ ise ,

$$A_r B_s = \langle A_r B_s \rangle_{r-s} + \langle A_r B_s \rangle_{r-s+2} + \dots + \langle A_r B_s \rangle_{r+s}$$

yazabiliriz. Eğer $r \leq s$ ise aynı düşünceyi soldan çarparak uygularsak

$$A_r B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} + \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2} + \dots + \langle A_r B_s \rangle_{r+s}$$

elde ederiz. O halde en büyük mertebeden grade dış çarpıma karşılık gelir, yani

$$\langle A_r B_s \rangle_{r+s} = A_r \wedge B_s$$

dir. En küçük mertebeden grade ise iç çarpıma karşılık gelecektir, yani

$$\langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} = A_r \cdot B_s$$

dir. Burada tanımladığımız işlemler baz vektörler kullanıldığı zaman oldukça basitleşecektir, örneğin bir baz vektör kendisiyle çarpıldığında mertebe bir azalacak aksi durumda mertebe bir artırılabacaktır. Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz:

$$\begin{aligned}(e_1 + e_3)(e_2 e_3 + e_3 e_4) &= e_1 e_2 e_3 + e_1 e_3 e_4 + e_3 e_2 e_3 + e_3 e_3 e_4 \\ &= e_1 e_2 e_3 + e_1 e_3 e_4 - e_2 + e_4.\end{aligned}$$

Tanım.2.6.1 A ve B iki multi-vektör olsun. A ile B nin skaler çarpımı

$$A * B = \langle AB \rangle_0$$

şeklinde bu vektörlerin geometrik çarpımlarının sıfırıncı mertebeden bileşeni yani bir skaler olarak tanımlanır.

2.7. k-vektörlerin Ters Sıralanması, İnversi ve Normu

$A_k = a_1 a_2 \dots a_k$ bir k -vektör ise onun A_k 'nın *ters sıralanmış*

$$\tilde{A}_k = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} A_k = (-1)^{\binom{k}{2}} A_k$$

şeklinde bir k -vektördür. Bir k -blade için

$$a_k \dots a_1 = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} a_1 \dots a_k = (a_1 \dots a_k)^\sim$$

dır, burada $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ olduğunu biliyoruz. Buna göre herhangi iki vektör a ve b ise

$$(ab)^\sim = a.b + (a \wedge b)^\sim = a.b - a \wedge b = ba$$

elde ederiz.

Bir A multi-vektörünün normu

$$|A| = \sqrt{A * A}$$

şeklinde tanımlanır. Bunun iyi tanımlanmış olduğu hemen görülebilir. Gerçekten

$$\tilde{A} * A = \sum_r \langle \tilde{A} \rangle_r * \langle A \rangle_r$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$\langle A \rangle_r = \sum_i \lambda_i e_{i_1} \dots e_{i_r} = \sum_i A_r^i$$

parçalanmasını kullanarak bütün karışık terimler silinirse

$$\langle \bar{A} \rangle_r * \langle A \rangle_r = \sum_i (A_r^i) \bar{A}_r^i$$

buluruz. Bir baz r -blade $e_I = e_{i_1} \dots e_{i_r}$ ise

$$\bar{e}_I e_I = e_{i_r} \dots e_{i_1} e_{i_1} \dots e_{i_r} = 1$$

elde ederiz, bu durumda

$$\langle \bar{A} \rangle_r * \langle A \rangle_r = \sum_i \lambda_i^2 \geq 0$$

olacağından bu $\bar{A} * A \geq 0$ olduğunu gösterir, yani norm iyi tanımlıdır.

Şimdi de sıfırdan farklı bir k -blade $A_k = a_1 a_2 \dots a_k$ olsun. Bu k -blade'ın çarpımsal inversi

$$A_k \bar{A}_k = \bar{A}_k A_k = a_1^2 \dots a_k^2 = |A_k|^2 > 0$$

olmak üzere $A_k^{-1} = \frac{\bar{A}_k}{|A_k|^2}$ şeklinde tanımlanır.

3. GEOMETRİK CEBİRİN BAZI UYGULAMALARI

3.1 İzdüşüm

Bir k -blade $A_k = a_1 a_2 \dots a_k$ olsun. A_k ya göre $b = b_{\perp} + b_{\parallel}$ şeklinde parçalanmış bir b vektörü göz önüne alalım. (2.5.1) ve (2.6.1) ifadelerini kullanarak,

$$\begin{aligned} b_{\parallel} &= b_{\parallel} A_k A_k^{-1} \\ &= (b_{\parallel} A_k) A_k^{-1} \\ &= (b A_k) A_k^{-1} \end{aligned}$$

ve

$$b_{\perp} = b_{\perp} A_k A_k^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= (b_{\perp} \wedge A_k) A_k^{-1} \\
&= (b \wedge A_k) A_k^{-1}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece $b_{\parallel}$ ve $b_{\perp}$ parçalarını A_k ve b cinsinden ifade etmiş olduk. Buna göre b nin A_k üstüne olan paralel izdüşümünü

$$P_{A_k}(b) = (b \cdot A_k) A_k^{-1}$$

şeklinde ve bunun tümleyenini de yani ortogonal izdüşümünü de

$$P_{A_k}^{\perp}(b) = (b \wedge A_k) A_k^{-1}$$

şeklinde tanımlayabiliriz ve böylece $b = P_{A_k}(b) + P_{A_k}^{\perp}(b)$ şeklinde ifade edebiliriz.

3.2 Doğru ve Düzlem

Bir k -blade $A_k = a_1 a_2 \dots a_k$ olsun. Bir a vektörü A_k tarafından oluşturulan k -boyutlu hacim içerisinde bulunuyor ise bu durumda $a \wedge A_k = 0$ olacaktır. Bir b vektörü tarafından gerilen doğru ise bu durumda

$$x \wedge b = 0$$

denklemi ile tanımlanacaktır. a dan geçen ve b ye paralel olan bir doğru ise

$$(x - a) \wedge b = 0$$

denklemi ile verilir. Şu halde bir düzlemin denklemi

$$(x - a) \wedge A_2 = 0$$

şeklinde olacaktır. Keyfi bir p noktasından böyle bir düzleme olan en kısa uzaklık ta

$$d = P_{A_2}^{\perp}(a - p) = ((a - p) \wedge A_2) A_2^{-1}$$

vektörü sayesinde tanımlanır ve bu vektörün büyüklüğü istenen en kısa uzaklığı verir.

3.3 Kompleks Sayılar

$A = a_1 a_2$, $|A|^2 = a_1^2 a_2^2 = 1$ olacak şekilde bir birim uzunluklu $2-blade$ olsun. Bu durumda

$$A^2 = a_1 a_2 a_1 a_2 = -a_1^2 a_2^2 = -1$$

ve x_1, x_2, y_1, y_2 skalerler olmak üzere

$$(x_1 + y_1 A)(x_2 + y_2 A) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2) A$$

yazabiliriz. O halde $\{1, A\}$ tarafından üretilen alt cebir kompleks sayılar kümesine izomorfik olacak ve A , sanal birim olan i rolünü oynayacaktır. Bu alt cebir vektör uzayları üstünde işleme tabiidir. Örneğin, $v \in \bar{A}$ de $v = x a_1 + y a_2$ şeklinde herhangi bir vektör ise o zaman

$$Av = -y a_1 + x a_2$$

v vektörünün 90° döndürülmüşü olacaktır. Böylece $z = \cos \alpha + A \sin \alpha$ multi-vektörü ile çarpma

$$(\cos \alpha + A \sin \alpha)v = (x \cos \alpha - y \sin \alpha)a_1 + (x \sin \alpha + y \cos \alpha)a_2$$

şeklinde olur ve v nin $\alpha = \arg z$ açısı kadar dönmesine karşılık gelir. Böylece düzlemdeki bütün dönme hareketlerini bu şekilde multi-vektörler sayesinde tanımlayabiliriz.

3.4 Yansıma

Bir u birim vektör göz önüne alalım, u ya dik bir düzleme göre vektörlerin yansıma hareketleri

$$R_u(x) = -uxu$$

operatörü sayesinde tanımlanır. Bunu görmek için x vektörünün u ya paralel ve dik ayrışmaları ile $x = x_{\parallel} + x_{\perp}$ yazabiliriz. Ayrıca,

$$ux_{\parallel} = u \cdot x_{\parallel} = x_{\parallel} \cdot u = x_{\parallel} u \quad \text{ve} \quad ux_{\perp} = u \wedge x_{\perp} = -x_{\perp} \wedge u = -x_{\perp} u$$

olduğundan

$$\begin{aligned} R_u(x_{\parallel} + x_{\perp}) &= -ux_{\parallel}u - ux_{\perp}u \\ &= x_{\parallel} - x_{\perp} \end{aligned}$$

elde ederiz.

3.5 3-Boyutlu Dönme Hareketi

Üç boyutlu bir uzayda dönme hareketinin iki yansıma hareketinin bileşkesi olduğunu biliyoruz. Böylece bir dönme hareketi u ve v vektörler olmak üzere $R_u \circ R_v$ şeklindedir. O halde,

$$(R_u \circ R_v)(\vec{x}) = uvxvu$$

yazabiliriz. $A = uv = u \cdot v + u \wedge v$ dersek bir dönme hareketini

$$Rot_A(x) = \tilde{A}x A$$

olarak ifade edebiliriz. Bir A multi-vektörü bir skaler ile bir bivektörün birleşimi olduğundan öyle bir multi-vektörün bir dönme hareketini tanımlayacağını kolayca görürüz. Öylesi bütün multi-vektörlerin uzayı, $\{1, e_1 e_2, e_2 e_3, e_3 e_1\}$ şeklinde bir baza sahip olduğundan

$$i = e_1 e_2, j = e_2 e_3, k = e_3 e_1$$

gösterimini kullanırsak,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$

$$ijk = -1$$

şeklinde tanımlayabileceğimiz dönme hareketlerinin *kuaternionlar* gösterimini elde ederiz. Bu gösterim genelleştirilerek kuantum fiziğinde kullanılan *spinör teorisine* ulaşılır.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, sonlu boyutlu halde tüm geometrik cebir için geçerli olan bir baz tanımladık ve bu baz sayesinde bazı cebirsel işlemleri ve onların sağladıkları bazı kuralları kanıtladık.

Yönlendirilmiş düzlemler, hacimler ve k -boyutlu hacimlere genişletebileceğimiz k -blade kavramını tanımlayıp bunun üzerine bir geometrik yorum inşa ederek anlaşılması güç genelleştirmelere açıklık getirdik.

Geometrik cebirin farklı çarpımlarını genelleştirerek bu çarpımların gerçekleştiği temel özellikleri ifade edip onları kanıtlamaya çalıştık ve sonuçta bazı uygulamalar vererek geometrik cebirin nasıl kullanılabileceğini ve ne denli farklı uygulamalar ele alabileceğimizi bu örneklerle kanıtlamış olduk.

KAYNAKLAR

- [1] D. Hestenes and G. Sobczyk, Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics, 2nd edition, Kluwer 1992.
- [2] D. Hestenes, Spacetime physics with geometric algebra, American Journal of Physics 71(6), 2003.
- [3] G. Sobczyk, Spacetime Vector Analysis, Physics Letters, 84A, 45-49 (1981).
- [4] G. Sobczyk, Geometry of Moving Planes, AMS Notices, June 2007.
- [5] G. Sobczyk, Special relativity in complex vector algebra, arXiv:0710.0084v1, 29 Sept. 2007.
- [6] G. Sobczyk, Hyperbolic Number Plane, The College Mathematics Journal, Vol.26, No.4, pp. 269-280, Sept.1995.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında İstanbul’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul’da tamamladı. 2000 yılında İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümüne kayıt oldu ve 2004 yılında lisanstan mezun oldu. 2006 yılında Beykent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.Halen özel bir dershanede öğretmenlik görevine devam etmektedir.