



**CLIFFORD CEBİRLERİ ÜZERİNDE
ÜNİTER UZAYLAR**

Yüksek Lisans Tezi

Esra PARLAK

Eskişehir, 2021

CLIFFORD CEBİRLERİ ÜZERİNDE ÜNİTER UZAYLAR

Esra PARLAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şenay BULUT

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Ocak, 2021

ÖZET

CLIFFORD CEBİRLERİ ÜZERİNDE ÜNİTER UZAYLAR

Esra PARLAK

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ocak, 2021

Danışman: Prof. Dr. Şenay BULUT

Bu tez çalışmasında $n = p + q$ boyutlu $\mathbb{C}l(p, q)$ kompleks Clifford cebirleri üzerinde üniter uzaylar incelenmiştir. Öncelikle Clifford Cebiri, reel ve kompleks Clifford Cebirleri ile ilgili temel tanım ve teoremler ele alınmıştır. $\mathbb{C}l(p, q)$ üzerinde Hermityen skaler çarpım tanımlanmış ve Hermityen skaler çarpımın sağladığı bazı özellikler irdelenmiştir. Bu skaler çarpım $\mathbb{C}l(p, q)$ kompleks Clifford cebirinin (p, q) durumuna bağlıdır. $\mathbb{C}l(p, q)$ cebir üzerinde Hermityen idempotent kavramı tanımlanmış ve Hermityen idempotentler yardımıyla kompleks Clifford cebirinin normal matris temsillerinin elde edilmesi ile ilgili bir yöntem inşa edilmiştir. Bu normal temsiller yardımıyla kompleks Clifford cebiri üzerinde üniter uzayların yapısı irdelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Clifford Cebiri; Üniter Uzay; Hermityen İdempotent;
Normal Matris Temsilleri; Hermityen Skaler Çarpım.

ABSTRACT

UNITARY SPACES ON CLIFFORD ALGEBRAS

Esra PARLAK

Department of Mathematics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, January, 2021

Supervisor: Prof. Dr. Şenay BULUT

In this thesis, unitary spaces on complex Clifford algebras $\mathbb{C}l(p, q)$ of dimension $n = p + q$ are studied. First of all, the basic definitions and theorems about the Clifford algebra, real and complex Clifford algebra are discussed. Hermitian scalar product on $\mathbb{C}l(p, q)$ is defined. Some properties provided by Hermitian scalar product are examined. This scalar product depends on the signature (p, q) of complex Clifford algebra. The Hermitian idempotent concept is defined on $\mathbb{C}l(p, q)$ and a method is constructed to obtain normal matrix representations of the complex Clifford algebra with the aid of Hermitian idempotents. By using these normal representations the structure of unitary spaces on complex Clifford algebra is examined.

Keywords: Clifford Algebra; Unitary Space; Hermitian Idempotent;
Normal Matrix Representations; Hermitian scalar product.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında büyük emeği olan ve her türlü desteğini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Şenay BULUT'a, yüksek lisans çalışmam boyunca her zaman yanımda olan sevgili eşime ve aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Esra PARLAK

Ocak 2021

05/01/2021

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Esra PARLAK

İçindekiler

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. Clifford Cebiri	2
3. Clifford Cebirlerinin Temsilleri	9
3.1. Bir Cebirin Temsili	9
3.2. Kompleks Clifford Cebirlerinin Tekrarlı Temsilleri	10
4. Komütatör ve Anti-Komütatör	11
5. Clifford Cebirleri Üzerinde Konjugasyon Dönüşümü	19
6. Clifford Cebirleri Üzerinde Üniter(Öklidyen) Uzaylar	24
7. Hermityen İdempotentler ve İlgili Yapılar	30
8. Clifford Cebirlerinin Normal Temsilleri	37
8.1. Düşük Boyutlarda Kompleks Clifford Cebirlerinin Normal Temsillerinin Bulunması	41

	<u>Sayfa</u>
9. Clifford Cebirlerinin Üniter Grupları	64
10.Kompleks Clifford Cebirlerinin Determinantı	68
KAYNAKÇA	71
ÖZGEÇMİŞ	



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$T(V)$	: Tensör cebir
(V, Q)	: Kuadratik uzay
$Cl(V, Q)$	: (V, Q) Kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebiri
$Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$	: Clifford cebiri
$\mathbb{C}l(p, q)$	: Kompleks Clifford cebiri
$Cl(p, q)$	: Reel Clifford cebiri
$\wedge$	: Dış çarpım
$[\quad]$	: Komütatör
$\{ \}$	: Anti-komütatör
ℓ	: Hacim elemanı
e^a	: Clifford cebirinin üretici
$< \quad >$	: Projeksiyon operatörü
$Tr(U)$	: İz operatörü
$\hat{U}$	: Grade involution operatörü
$\tilde{U}$	: Anti involüsyon operatörü
$\bar{U}$	: Kompleks konjuge operatörü
U^*	: Clifford konjuge operatörü
$\dagger$	: Clifford cebirinin Hermityen konjugasyonu
t	: Hermityen idempotent

1. GİRİŞ

Clifford cebirleri günümüzde hem matematikte hem de matematiksel fizikte yaygın olarak çalışılmaktadır. Clifford cebirleri kavramı ilk olarak 1878 de W. K. Clifford tarafından ortaya konulmuştur [2]. Clifford cebirinin orjinal adı geometrik kavramların cebirsel temsili olan geometrik cebirdir. Günümüze kadar çok farklı geometrik cebir sistemleri matematikçiler tarafından bulunmuştur ancak matematiksel fizikte kuantum mekaniği, elektromanyetik teori, robotikler gibi olayları açıklayabilen geometrik cebir Clifford cebiridir. Bu nedenle matematiksel fizikte en önemli teorilerden biri olarak yerini almıştır. Özellikle Clifford çarpımı olarak tanımlanan çarpım oldukça önemlidir.

Geometrik cebirin başlangıcında 1843 yıllarında William Rowan Hamilton, kompleks sayıların genellemesi olarak kuaterniyon cebirini ifade etti. Daha sonra Grassman, yönlü doğru parçası yani vektörler için iç çarpım ve dış çarpım tanımladı. Clifford; Grassman cebirini ve kuaterniyon cebirini tek bir cebir haline getirerek bu cebire geometrik cebir adını verdi. Clifford cebirleri başlangıçta reel sayılar üzerinde tanımlanmış daha sonra kompleks sayılar üzerinde tanımlanarak kompleks Clifford cebiri ve hiperbolik sayılar üzerinde tanımlanarak Clifford cebiri genişletilmiştir. Clifford cebirlerinin Dirac temsillerinden sonra spinörler ile ifade edilen çalışmalar Clifford cebiri ile tekrardan tanımlanmıştır.

Dirac-Yang-Mills denklemlerinde $\mathbb{Cl}(1, 3)$ Clifford cebiri kullanılmıştır [7]. Clifford cebirlerinde üniter uzay kavramı $\mathbb{Cl}(1, 3)$ Clifford cebiri için geliştirilmiş ve birkaç yapı eşitlikleri bulunmuştur. Daha sonra Clifford cebirleri üzerindeki üniter uzay kavramı $n = p + q > 4$ olmak üzere $\mathbb{Cl}(p, q)$ Clifford cebiri için genelleştirilmiştir. Yine $\mathbb{Cl}(p, q)$ için birkaç yapı eşitlikleri ispatlanmıştır.

Hermityen idempotentler tanımlanmış ve bunlar yardımıyla Clifford cebirlerinin normal matris temsillerinin yeni bir inşası elde edilmiştir. Bu normal temsiller Clifford cebirleri üzerindeki üniter uzayın yapısını kavramada önemli bir rol oynamaktadır [12].

Bu tez çalışmasında düşük boyutlarda Clifford cebirlerinin normal temsilleri araştırılmış ve bunlar yardımıyla Clifford cebirleri üzerindeki üniter uzaylar incelenmiştir.

2. Clifford Cebiri

Tanım 2.1. $V, \mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ dönüşümü her $x, y, z \in V$ ve $\lambda \in \mathbb{F}$ için

$$\begin{aligned} b(\lambda x + y, z) &= \lambda b(x, z) + b(y, z) \\ b(x, \lambda y + z) &= \lambda b(x, y) + b(x, z) \end{aligned} \quad (2.1)$$

koşullarını sağlıyorsa b dönüşümüne bilineer form, (V, b) ikilisine de bilineer uzay denir. Ayrıca her $x, y \in V$ için

$$b(x, y) = b(y, x)$$

koşulu da sağlanıyorsa (V, b) uzayına simetrik bilineer uzay denir.

Tanım 2.2. V vektör uzayı için $\xi = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bir taban olmak üzere bu taban kullanılarak oluşturulan matrise b bilineer formunun ξ tabanına göre matrisi denir. b bilineer formunun ξ tabanına göre matrisi

$$B = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) & \dots & b(e_1, e_n) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) & \dots & b(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b(e_n, e_1) & b(e_n, e_2) & \dots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

matrisi karşılık gelir.

Herhangi $x, y \in V$ elemanları ξ tabanına göre $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ve $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ şeklinde yazılırsa

$$\begin{aligned} b(x, y) &= b\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j} x_i b(e_i, e_j) y_j \\ &= \sum_{i,j} x_i b_{ij} y_j = \sum_i x_i (B \cdot y)_i = x^t B y \end{aligned} \quad (2.3)$$

elde edilir.

Tanım 2.3. $b(x, y)$ simetrik bilineer form olmak üzere eğer her $y \in V$ için $b(x, y) = 0$ iken $x = 0$ ise b simetrik bilineer formuna non-dejenere simetrik bilineer form denir.

Tanım 2.4. $V, \mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $Q : V \longrightarrow \mathbb{F}$ dönüşümü

$$1. \forall x \in V, \lambda \in \mathbb{F} \quad \text{için} \quad Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x),$$

$$2. \forall x, y \in V \quad \text{için,} \quad b(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)) \quad \text{dönüşümü } V \text{ üzerinde simetrik bilinear formdur,}$$

koşullarını sağlıyorsa Q 'ya V üzerinde kuadratik form denir. (V, Q) ikilisine de kuadratik uzay denir.

Clifford cebirinin literatürde bilinen farklı denk tanımlamaları mevcuttur [6]. Biz bu tez çalışmamızda Clifford cebirinin aşağıdaki tanımını kullanacağız.

Tanım 2.5. V bir vektör uzayı, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ ve $Q : V \rightarrow \mathbb{F}$ kuadratik form olsun. (V, Q) kuadratik uzayı tarafından belirlenen Clifford cebiri aşağıdaki özellikleri sağlayan $(Cl(V, Q), i)$ çiftidir.

i. $Cl(V, Q)$, birimli ve birleşmeli cebirdir.

ii. $i : V \longrightarrow Cl(V, Q), \quad i(v)^2 = Q(v) \cdot 1$ dir.

iii. A birimli ve birleşmeli başka bir cebir, $f : V \longrightarrow A, \quad f(v)^2 = Q(v) \cdot 1$ şartını sağlayan bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{f} & \\ Cl(V, Q) & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde tek türlü belirli

$$\tilde{f} : Cl(V, Q) \longrightarrow A$$

cebir homomorfizması vardır. $(\tilde{f} \circ i = f$ ve $\tilde{f}, f$ nin genişletilmiştir.)

Bu özellik Clifford cebirinin evrensel özelliği olarak adlandırılır.

B birimli ve birleşmeli başka bir cebir $j : V \longrightarrow B$ ve $j(v)^2 = q(v) \cdot 1$ şartını sağlayan bir lineer dönüşüm olmak üzere yukarıdaki özellikler B içinde sağlanıyor ise

$h : Cl(V, Q) \longrightarrow B$ cebir homomorfizması vardır ve aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & B \\ i \downarrow & \nearrow h & \\ Cl(V, Q) & & \end{array}$$

Önerme 2.6. i ve j gömme dönüşümlerine göre $Cl(V, Q)$ ve B cebirleri izomorftir.

Kanıt. Bunu görebilmek için i ve j test dönüşümlerini kullanalım. $Cl(V, Q)$ ve B nin evrenselliğinden $\tilde{i}$ ve $\tilde{j}$ cebir homomorfizmlerini elde ederiz öyle ki $\tilde{j} \circ i = j$ ve $\tilde{i} \circ j = i$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & B \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{j} & \\ Cl(V, Q) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & B \\ i \downarrow & \nwarrow \tilde{i} & \\ Cl(V, Q) & & \end{array}$$

$\tilde{i}$ ve $\tilde{j}$ birbirlerinin tersidir. i yi test dönüşümü olarak kullanırsak ($f = i$)

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & Cl(V, Q) \\ i \downarrow & \nearrow Id & \\ Cl(V, Q) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & Cl(V, Q) \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{i} \circ \tilde{j} & \\ Cl(V, Q) & & \end{array}$$

Id ve $\tilde{i} \circ \tilde{j}$, i nin genişletilmiştir:

$$(\tilde{i} \circ \tilde{j}) \circ i = \tilde{i} \circ (\tilde{j} \circ i) = \tilde{i} \circ j = i$$

Genişletmenin tekliğinden $\tilde{i} \circ \tilde{j} = Id_{Cl(V, Q)}$ olur. Benzer şekilde

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & B \\ j \downarrow & \nwarrow Id & \\ B & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & B \\ j \downarrow & \nwarrow \tilde{j} \circ \tilde{i} & \\ B & & \end{array}$$

diyagramlarından dolayı $\tilde{j} \circ \tilde{i} = Id_B$ olmalıdır. Böylece $\tilde{i}$ ve $\tilde{j}$, biri diğerinin tersi olan izomorfizmlerdir. $\square$

Teorem 2.7. (V, Q) , n boyutlu reel veya kompleks kuadratik uzay olsun. Bu durumda

(V, Q) kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebiri $Cl(V, Q)$ 2^n boyutlu vektör uzayıdır [3].

Teorem 2.8. (V, Q) , n boyutlu reel veya kompleks kuadratik uzay olsun. b, Q kuadratik formuna karşılık gelen bilineer form olmak üzere V nin $\{e_1, \dots, e_n\}$ tabanı $i \neq j$ iken $b(e_i, e_j) = 0$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $Cl(V, Q)$ Clifford cebiri $e_1, \dots, e_n \in V$ elemanları tarafından üretilir ve

$$e_i^2 = Q(e_i) \cdot 1 \quad \text{ve} \quad e_i e_j + e_j e_i = 0$$

eşitliklerini sağlar [3].

$V = \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2, \quad (p + q = n)$$

nondejenere kuadratik formdur. Bu durumda $(\mathbb{R}^n, Q)$ kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebiri $Cl(p, q)$ ile gösterilir.

$q = 0$ olduğunda kuadratik form

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

olur ve karşılık gelen Clifford cebiri $Cl(n, 0)$ veya $Cl(n)$ dir.

$p = 0$ olduğunda kuadratik form

$$Q(x) = -x_1^2 - x_2^2 + \dots - x_n^2$$

olur ve karşılık gelen Clifford cebiri $Cl(0, n)$ olur.

$e_1, \dots, e_n, \mathbb{R}^n$ vektör uzayının standart taban vektörleri olmak üzere

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}, e_1, e_2, \dots, e_n \\ & e_1 e_2, e_1 e_3, \dots, e_1 e_n, e_2 e_3, \dots, e_2 e_n, \dots, e_{n-1} e_n \\ & e_1 e_2 e_3, e_1 e_2 e_4, \dots, e_{n-2} e_{n-1} e_n, \\ & \dots \\ & e_1 e_2 e_3 \dots e_n \end{aligned} \tag{2.4}$$

taban elemanları tarafından üretilen reel vektör uzayı

$$Cl(p, q) = \langle \{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k} | 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, \quad k = 1, \dots, p+q\} \rangle$$

şeklindeki reel Clifford cebiridir öyle ki

$$\begin{aligned} & \mathbf{1} \text{ birim eleman} \\ & 1 \leq i \leq p, \quad e_i^2 = 1 \\ & p+1 \leq j \leq p+q, \quad e_j^2 = -1 \\ & i < j \quad \text{için} \quad e_i.e_j = e_ie_j \quad \text{ve} \quad i > j \quad \text{için} \quad e_i.e_j = -e_j.e_i \end{aligned} \tag{2.5}$$

koşulları sağlanır.

Benzer şekilde $V = \mathbb{C}^n$ ve $Q(z_1, \dots, z_n) = z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_{p+q}^2$ kuadratik form olmak üzere $(\mathbb{C}^n, Q)$ kuadratik uzayına karşılık gelen Clifford cebrine kompleks Clifford cebiri denir ve $Cl(p, q)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $Cl(p, q) \cong Cl(p, q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dir.

$\mathbb{C}^n$ üzerindeki tüm kuadratik formlar $Q(z) = z_1^2 + \dots + z_n^2$ kuadratik formuna denktir. Bu nedenle $\mathbb{C}^n$ üzerinde hangi kuadratik formu alırsak alalım bu kuadratik forma karşılık gelen Clifford cebirleri izomorftur yani $\mathbb{C}^n$ üzerinde tek bir Clifford cebiri vardır.

Önerme 2.9. [3]

- a) $n = 2k$ ise $Cl(p, q) \cong End(\mathbb{C}^{2^k})$
- b) $n = 2k + 1$ ise $Cl(p, q) \cong End(\mathbb{C}^{2^k}) \oplus End(\mathbb{C}^{2^k})$

izomorfizmleri vardır.

Bu önerme yardımıyla kompleks Clifford cebirlerinin izomorfizm tablosu aşağıdaki şekilde verilebilir:

$n = p + q$	$\mathbb{C}l(p, q)$
1	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$
2	$\mathbb{C}(2)$
3	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$
4	$\mathbb{C}(4)$
5	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$
6	$\mathbb{C}(8)$
7	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$
8	$\mathbb{C}(16)$

$n = 2k$ durumunda $\mathbb{C}l(p, q)$ kompleks Clifford cebirinin κ_n temsili

$$\kappa_n : \mathbb{C}l(p, q) \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{2^k})$$

yukarıdaki önermede ifade edilen izomorfizmdir.

$n = 2k + 1$ durumunda $\mathbb{C}l(p, q)$ kompleks Clifford cebirinin κ_n temsili

$$\kappa_n : \mathbb{C}l(p, q) \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{2^k}) \oplus \text{End}(\mathbb{C}^{2^k}) \xrightarrow{Pr_1} \text{End}(\mathbb{C}^{2^k})$$

yukarıdaki önermede ifade edilen izomorfizm ile 1. izdüşüm dönüşümünün bileşkesidir.

p, q negatif olmayan tam sayılar ve $p + q = n$ olsun. n boyutlu bir diagonal matris

$$\eta = \eta(p, q) = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$$

diagonalinde p tane 1, q tane -1 vardır. Bu durumda $a < b$ olmak üzere (2.5) koşulu

$$e_a e_b + e_b e_a = 2\eta^{ab} \cdot 1 \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada η^{ab} , η diagonal matrisinin ab . girdisidir. $Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$, reel veya kompleks Clifford cebiri olmak üzere $U \in Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ ise

$$U = u \cdot \mathbf{1} + \sum_a u_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + u_{1\dots n} e^{1\dots n}$$

formunda yazılabilir. Burada $u, u_a, u_{a_1a_2}, \dots, u_{1\dots n} \in \mathbb{F}$, katsayıları sıralı indislerdir ve $e^{a_1a_2} = e^{a_1}e^{a_2}$, $e^{1\dots n} = e^1e^2 \dots e^n$ dir.

$$Cl_k^{\mathbb{F}}(p, q) = \left\{ \sum_{a_1 < \dots < a_k} u_{a_1 \dots a_k} e^{a_1 \dots a_k} \mid u_{a_1 \dots a_k} \in \mathbb{F} \right\}$$

şeklinde tanımlanan $Cl_k^{\mathbb{F}}(p, q)$, $Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ vektör uzayının bir alt uzayıdır. $Cl_k^{\mathbb{F}}(p, q)$ 'nın elemanları rankı k olan elemanlar olarak tanımlanır. $\overset{k}{U} \in Cl_k^{\mathbb{F}}(p, q)$ şeklinde gösterilir.

$$\begin{aligned} Cl_{even}^{\mathbb{F}}(p, q) &= Cl_0^{\mathbb{F}}(p, q) \oplus Cl_2^{\mathbb{F}}(p, q) \oplus \dots, \\ Cl_{odd}^{\mathbb{F}}(p, q) &= Cl_1^{\mathbb{F}}(p, q) \oplus Cl_3^{\mathbb{F}}(p, q) \oplus \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

olmak üzere $Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ Clifford cebiri

$$Cl^{\mathbb{F}}(p, q) = Cl_0^{\mathbb{F}}(p, q) \oplus \dots \oplus Cl_n^{\mathbb{F}}(p, q) = Cl_{even}^{\mathbb{F}}(p, q) \oplus Cl_{odd}^{\mathbb{F}}(p, q)$$

şeklinde yazılabilir. $Cl_k^{\mathbb{F}}(p, q)$ alt uzayının boyutu

$$\dim Cl_k^{\mathbb{F}}(p, q) = \binom{n}{k}$$

şeklindedir. Buradan kolaylıkla

$$\dim Cl_{even}^{\mathbb{F}}(p, q) = \dim Cl_{odd}^{\mathbb{F}}(p, q) = 2^{n-1}$$

olduğu görülebilir.

$\overset{k}{U} = \sum_{a_1 < \dots < a_k} u_{a_1 \dots a_k} e^{a_1 \dots a_k} \in Cl_k^{\mathbb{F}}(p, q)$ elemanını aldığımızda $a_1 \dots a_k$ sıralanışını dikkate almadığımızda

$$\overset{k}{U} = \sum_{a_1 < \dots < a_k} u_{a_1 \dots a_k} e^{a_1 \dots a_k} = \sum_{b_1 \dots b_k} \frac{1}{k!} u_{b_1 \dots b_k} e^{b_1 \dots b_k}$$

şeklinde yazabiliriz. O halde $U \in Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ elemanını

$$U = u \cdot \mathbf{1} + \sum_a u_a e^a + \sum_{a_1, a_2} \frac{1}{2!} u_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + \sum_{a_1, a_2, \dots, a_n} \frac{1}{n!} u_{1 \dots n} e^{1 \dots n}$$

şeklinde yazabiliriz. [12]

Örnek 2.10. $U \in Cl^{\mathbb{F}}(1, 2)$ olsun. Bu durumda $Cl^{\mathbb{F}}(1, 2)$ Clifford cebirinin taban elemanları

$$\mathbf{1}, e^1, e^2, e^3, e^{12}, e^{13}, e^{23}, e^{123}$$

şeklindedir. U elemanını

$$U = u \cdot \mathbf{1} + u_1 e^1 + u_2 e^2 + u_3 e^3 + u_{12} e^{12} + u_{13} e^{13} + u_{23} e^{23} + u_{123} e^{123}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu nedenle

$$Cl^{\mathbb{F}}(1, 2) = Cl_0^{\mathbb{F}}(1, 2) \oplus Cl_1^{\mathbb{F}}(1, 2) + Cl_2^{\mathbb{F}}(1, 2) \oplus Cl_3^{\mathbb{F}}(1, 2)$$

olur.

3. Clifford Cebirlerinin Temsilleri

3.1. Bir Cebirin Temsili

W , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere

$$End_{\mathbb{K}}(W) = \{ \alpha : W \rightarrow W \mid \alpha, \mathbb{K} - \text{linear} \}$$

W üzerindeki $\mathbb{K}$ -lineer dönüşümlerin kümesinin bir $\mathbb{K}$ -cebiri olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım 3.1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$, A bir $\mathbb{K}$ -cebiri ve W , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\rho : A \rightarrow End_{\mathbb{K}}(W)$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{K}$ -cebiri homomorfizmine A cebirinin bir $\mathbb{K}$ -temsili denir.

W_1 ve W_2 , W vektör uzayının $\{0\}$ ve W uzaylarından farklı alt uzayları olmak üzere

$$W = W_1 \oplus W_2 \text{ ve } \forall x \in A \text{ için } \rho(x)(W_j) \subset W_j \text{ (} j = 1, 2 \text{)} \quad (3.1)$$

ise ρ temsiline indirgenebilir temsil denir. ρ temsili indirgenebilir değilse ρ ya indirgenemez temsil denir.

Bir A cebirinin iki temsili $\theta_1 : A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(W_1)$ ve $\theta_2 : A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(W_2)$ olsun. Her $a \in A$ için $\theta_1(a) = \psi^{-1} \circ \theta_2(a) \circ \psi$ koşulunu sağlayan $\psi : W_1 \rightarrow W_2$ vektör uzayı izomorfizmi varsa θ_1 ve θ_2 temsillerine denktirler, denir. [5]

3.2. Kompleks Clifford Cebirlerinin Tekrarlı Temsilleri

Clifford cebir elemanlarının aşağıdaki matris temsillerini düşünelim. $\mathbb{C}l(p, q)$ 'nin birim elemanını birim matrise götürsün: $\mathbf{1} \rightarrow I$ dir.

$\mathbb{C}l(1, 0)$ için e^1 elemanını

$$e^1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklindeki matrise, $\mathbb{C}l(2, 0)$ için

$$e^1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindeki matrislere götürsün. $n = 2k$ olmak üzere $\mathbb{C}l(2k, 0)$ için

$$e^1, \dots, e^n \rightarrow \gamma^1, \dots, \gamma^n$$

şeklindeki matris temsiline sahip olduğunu varsayalım.

$\mathbb{C}l(2k + 1, 0)$ için

$$e^a \mapsto \begin{pmatrix} \gamma^a & 0 \\ 0 & -\gamma^a \end{pmatrix}, \quad a = 1, \dots, n$$

$$e^{n+1} \mapsto \begin{pmatrix} i^k \gamma^1 \dots \gamma^n & 0 \\ 0 & -i^k \gamma^1 \dots \gamma^n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}l(2k + 2, 0)$ için $a = 1, \dots, n + 1$ olmak üzere e^a için $n = 2k + 1$ ile aynı matrise sahibiz ve e^{n+2}

$$e^{n+2} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindeki matrise gitsin. Bu nedenle, tüm $\mathbb{C}l(n, 0)$ Clifford cebirlerinin matris temsili vardır. Diğer $\mathbb{C}l(p, q)$ Clifford cebirleri için e^a , $a > p, (n, 0)$ ile aynı matrislere eşlenir, fakat i ile çarpılır. [14] Örneğin, $\mathbb{C}l(3, 0), \mathbb{C}l(2, 1), \mathbb{C}l(4, 0), \mathbb{C}l(1, 3)$ için matris temsillerini bulalım.

$\mathbb{C}l(3, 0)$:

$$\begin{aligned} e^1 \longrightarrow \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ e^2 \longrightarrow \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ e^3 \longrightarrow \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathbb{C}l(2, 1)$: $e^1 \longrightarrow \gamma^1, e^2 \longrightarrow \gamma^2, e^3 \longrightarrow i\gamma^3$ şeklindeki matris temsili alabiliriz.

$\mathbb{C}l(4, 0)$: $e^1 \longrightarrow \gamma^1, e^2 \longrightarrow \gamma^2, e^3 \longrightarrow \gamma^3,$

$$e^4 \longrightarrow \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}l(1, 3)$: $\mathbb{C}l(4, 0)$ cebirinin matris temsiliinden faydalanarak

$$e^1 \longrightarrow \gamma^1, \quad e^2 \longrightarrow i\gamma^2, \quad e^3 \longrightarrow i\gamma^3, \quad e^4 \longrightarrow i\gamma^4$$

şeklindeki matris temsili alabiliriz.

4. Komütatör ve Anti-Komütatör

Tanım 4.1. $e^{i_1}, \dots, e^{i_k} \in Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ olmak üzere Clifford cebirinin üreteçlerinin dış çarpımı

$$e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = \frac{1}{k!} \sum_{i_1 i_2 \dots i_k \in S_k} \text{sgn}(i_1 i_2 \dots i_k) e^{i_1} \dots e^{i_k}$$

şeklinde tanımlanır. Burada S_k , $i_1, i_2, \dots, i_k$ nin permütasyonlarının grubudur ve $i_1 i_2 \dots i_k$ nin tek ya da çift permütasyon olması durumuna göre $\text{sgn}(i_1 i_2 \dots i_k) = \pm 1$ dir.

Dış çarpımın özellikleri aşağıdaki gibidir.

- i. Anti-simetriklik özelliği: $e^{i_1} \wedge e^{i_2} = -e^{i_2} \wedge e^{i_1}$
- ii. Dağılma özelliği: $e^{i_1} \wedge (e^{i_2} + e^{i_3}) = e^{i_1} \wedge e^{i_2} + e^{i_1} \wedge e^{i_3}$

Örnek 4.2. $e^{i_1}, e^{i_2}, e^{i_3} \in Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ olmak üzere $e^{i_1} \wedge e^{i_2}$ ve $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge e^{i_3}$ dış çarpımlarını bulalım.

$$\begin{aligned} e^{i_1} \wedge e^{i_2} &= \frac{1}{2}(e^{i_1} e^{i_2} - e^{i_2} e^{i_1}) \\ &= e^{i_1} e^{i_2} - \eta^{i_1 i_2} \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge e^{i_3} &= \frac{1}{6}(e^{i_1} e^{i_2} e^{i_3} + e^{i_3} e^{i_1} e^{i_2} + e^{i_2} e^{i_3} e^{i_1} \\ &\quad - e^{i_2} e^{i_1} e^{i_3} - e^{i_1} e^{i_3} e^{i_2} - e^{i_3} e^{i_2} e^{i_1}) \\ &= e^{i_1} e^{i_2} e^{i_3} - \eta^{i_2 i_3} e^{i_1} + \eta^{i_1 i_3} e^{i_2} - \eta^{i_1 i_2} e^{i_3} \end{aligned}$$

Bu nedenle $\overset{k}{U} \in Cl_k^{\mathbb{F}}(p, q)$ ve $\overset{l}{V} \in Cl_l^{\mathbb{F}}(p, q)$ olmak üzere dış çarpımları

$$\overset{k}{U} \wedge \overset{l}{V} = \overset{k+l}{W} \in Cl_{k+l}^{\mathbb{F}}(p, q)$$

şeklindedir.

Tanım 4.3. $e^{i_1}, e^{i_2} \in Cl(p, q)$ olmak üzere Clifford çarpımını

$$e^{i_1} e^{i_2} = \eta^{i_1 i_2} + e^{i_1} \wedge e^{i_2}$$

şeklinde de dış çarpım yardımıyla ifade edebiliriz.

$\overset{k}{U} \in Cl_k^{\mathbb{F}}(p, q)$ ve $\overset{l}{V} \in Cl_l^{\mathbb{F}}(p, q)$ elemanlarının Clifford çarpımları

$$\overset{k}{U} \overset{l}{V} = \overset{|k-l|}{W} + \overset{|k-l|+2}{W} + \dots + \overset{k+l}{W}$$

şeklindedir. [12]

Örnek 4.4. $\overset{1}{U} \in Cl_1^{\mathbb{F}}(p, q)$ ve $\overset{3}{V} \in Cl_3^{\mathbb{F}}(p, q)$ olmak üzere bu elemanların dış çarpımı

$$\overset{1}{U} \wedge \overset{3}{V} = \overset{4}{W} \in Cl_4^{\mathbb{F}}(p, q)$$

ve Clifford çarpımı ise

$$\overset{1}{U} \overset{3}{V} = \overset{2}{W} + \overset{4}{W} \in Cl_2^{\mathbb{F}}(p, q) \oplus Cl_4^{\mathbb{F}}(p, q)$$

şeklinde olur.

Tanım 4.5. Clifford cebir elemanlarının komütator ve anti-komütatorü sırasıyla

$$[\overset{k}{U}, \overset{l}{V}] = \overset{k}{U} \overset{l}{V} - \overset{l}{V} \overset{k}{U}, \quad \{\overset{k}{U}, \overset{l}{V}\} = \overset{k}{U} \overset{l}{V} + \overset{l}{V} \overset{k}{U}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımdan hareketle $\overset{k}{U}, \overset{l}{V} \in Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ elemanlarının Clifford çarpımı

$$\overset{k}{U} \overset{l}{V} = \frac{1}{2} [\overset{k}{U}, \overset{l}{V}] + \frac{1}{2} \{\overset{k}{U}, \overset{l}{V}\}$$

şeklinde de yazılır.

Teorem 4.6. $\overset{k}{U} \in Cl_k^{\mathbb{F}}(p, q)$ ve $\overset{2}{V} \in Cl_2^{\mathbb{F}}(p, q)$ olmak üzere $1 \leq k \leq n-1$ ($n = p+q$) için $[\overset{k}{U}, \overset{2}{V}] = \overset{k}{W}$ 'dır. [12]

Kanıt. $\overset{k}{U} = \sum_{a_1 < \dots < a_k} u_{a_1 \dots a_k} e^{a_1 \dots a_k}$ ve $\overset{2}{V} = \sum_{b_1 < b_2} v_{b_1 b_2} e^{b_1 b_2}$ olmak üzere

$$[\overset{k}{U}, \overset{2}{V}] = \sum_{a_1 < \dots < a_k, b_1 < b_2} u_{a_1 \dots a_k} v_{b_1 b_2} (e^{a_1 \dots a_k} e^{b_1 b_2} - e^{b_1 b_2} e^{a_1 \dots a_k})$$

olur.

$$[e^{a_1 \dots a_k}, e^{b_1 b_2}] = e^{a_1 \dots a_k} e^{b_1 b_2} - e^{b_1 b_2} e^{a_1 \dots a_k}$$

ifadesindeki $e^{b_1 b_2} e^{a_1 \dots a_k}$ terimini $e^{a_1 \dots a_k} e^{b_1 b_2}$ biçiminde yazalım. Yani $e^{b_1 b_2}$ elemanlarını $e^{a_1 \dots a_k}$ üzerinden atlatalım. Burada indisler için üç ihtimal vardır.

b_1b_2 indisleri ile $a_1 \dots a_k$ indislerinin ortak terimlerinin olmaması durumunda

$$\begin{aligned} [e^{a_1 \dots a_2}, e^{b_1 b_2}] &= e^{a_1 \dots a_k} e^{b_1 b_2} - e^{b_1 b_2} e^{a_1 \dots a_k} \\ &= (1 - (-1)^{2k}) e^{a_1 \dots a_k b_1 b_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. b_1b_2 indisleri ile $a_1 \dots a_k$ indislerinin bir ortak terimlerinin olması durumunda

$$\begin{aligned} [e^{a_1 \dots a_2}, e^{b_1 b_2}] &= e^{a_1 \dots a_k} e^{b_1 b_2} - e^{b_1 b_2} e^{a_1 \dots a_k} \\ &= (1 - (-1)^{2k-1}) e^{a_1 \dots a_k b_1 b_2} \\ &= 2e^{a_1 \dots a_k b_1 b_2} \\ &\in \overset{k}{W} \end{aligned}$$

elde edilir. b_1b_2 indisleri ile $a_1 \dots a_k$ indislerinin iki ortak terimlerinin olması durumunda

$$\begin{aligned} [e^{a_1 \dots a_2}, e^{b_1 b_2}] &= e^{a_1 \dots a_k} e^{b_1 b_2} - e^{b_1 b_2} e^{a_1 \dots a_k} \\ &= (1 - (-1)^{2k-2}) e^{a_1 \dots a_k b_1 b_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $[U, V] = \overset{k}{W}$ olduğu elde edilir.

□

Örnek 4.7. $\overset{1}{U} = u_1 e^1 + u_2 e^2 + u_3 e^3 \in Cl_1(1, 2)$, $\overset{2}{V} = u_{12} e^{12} + u_{13} e^{13} + u_{23} e^{23} \in Cl_2(1, 2)$ olmak üzere $[\overset{1}{U}, \overset{2}{V}] = \overset{1}{W}$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} [\overset{1}{U}, \overset{2}{V}] &= \overset{1}{U}\overset{2}{V} - \overset{2}{V}\overset{1}{U} \\ &= u_1 u_{12} (e^1 e^{12}) + u_1 u_{13} (e^1 e^{13}) + u_1 u_{23} (e^1 e^{23}) + u_2 u_{12} (e^2 e^{12}) + u_2 u_{13} (e^2 e^{13}) \\ &\quad + u_2 u_{23} (e^2 e^{23}) + u_3 u_{12} (e^3 e^{12}) + u_3 u_{13} (e^3 e^{13}) + u_3 u_{23} (e^3 e^{23}) \\ &\quad - [u_{12} u_1 (e^{12} e^1) + u_{12} u_2 (e^{12} e^2) + u_{12} u_3 (e^{12} e^3) + u_{13} u_1 (e^{13} e^1) \\ &\quad + u_{13} u_2 (e^{13} e^2) + u_{13} u_3 (e^{13} e^3) + u_{23} u_1 (e^{23} e^1) + u_{23} u_2 (e^{23} e^2) + u_{23} u_3 (e^{23} e^3)] \\ &= 2(u_2 u_{12} + u_3 u_{13}) e^1 + 2(u_1 u_{12} + u_3 u_{23}) e^2 + 2(u_1 u_{13} - u_2 u_{23}) e^3 \\ &\in \overset{1}{W} \end{aligned}$$

Teorem 4.8. $\overset{k}{U}, \overset{l}{V}, \overset{r}{W} \in Cl^{\mathbb{F}}(p, q), p + q = n$ ve rankları sırasıyla k, l, r olsun. $k \geq l$ negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$[U, V] = \begin{cases} \binom{k-l+2}{W} + \binom{k-l+6}{W} + \dots + \binom{k+l-2}{W}, & l \text{ çift ise,} \\ \binom{k-l}{W} + \binom{k-l+4}{W} + \dots + \binom{k+l-2}{W}, & k \text{ çift ve } l \text{ tek ise,} \\ \binom{k-l+2}{W} + \binom{k-l+6}{W} + \dots + \binom{k+l}{W}, & k \text{ ve } l \text{ tek ise,} \end{cases}$$

$$\{U, V\} = \begin{cases} \binom{k-l}{W} + \binom{k-l+4}{W} + \dots + \binom{k+l}{W}, & l \text{ çift ise} \\ \binom{k-l+2}{W} + \binom{k-l+6}{W} + \dots + \binom{k+l}{W}, & k \text{ çift ve } l \text{ tek ise} \\ \binom{k-l}{W} + \binom{k-l+4}{W} + \dots + \binom{k+l-2}{W}, & k, l \text{ tek ise} \end{cases}$$

eşitlikleri vardır.

Eğer $k = l$ ise

$$[U, V] = \begin{cases} \binom{2}{W} + \binom{6}{W} + \dots + \binom{2k-2}{W}, & k \text{ çift ise} \\ \binom{2}{W} + \binom{6}{W} + \dots + \binom{2k}{W}, & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

$$\{U, V\} = \begin{cases} \binom{0}{W} + \binom{4}{W} + \dots + \binom{2k}{W}, & k \text{ çift ise} \\ \binom{0}{W} + \binom{4}{W} + \dots + \binom{2k-2}{W}, & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

elde edilir.

Kanıt. $s, a_1 \dots a_k$ ve $b_1 \dots b_l$ indekslerinin kesişen indeks sayısı ve $0 \leq s \leq \min(k, l)$ olmak üzere

$$[e^{a_1 \dots a_k}, e^{b_1 \dots b_l}] = (1 - (-1)^{kl-s}) e^{a_1 \dots a_k} e^{b_1 \dots b_l}$$

$$\{e^{a_1 \dots a_k}, e^{b_1 \dots b_l}\} = (1 + (-1)^{kl-s}) e^{a_1 \dots a_k} e^{b_1 \dots b_l}$$

$$e^{a_1 \dots a_k} e^{b_1 \dots b_l} \in Cl_{k+l-2s}^{\mathbb{F}}$$

eşitlikleri elde edilir. Buna göre

$$[e^{a_1 \dots a_k}, e^{b_1 \dots b_l}] = \begin{cases} Cl_{k+l-2s}, & kl - s \text{ tek ise} \\ 0, & kl - s \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$\{e^{a_1 \dots a_k}, e^{b_1 \dots b_l}\} = \begin{cases} Cl_{k+l-2s}, & kl - s \text{ çift ise} \\ 0, & kl - s \text{ tek ise} \end{cases}$$

Böylece teoremdaki komütatör ve anti-komütatör eşitlikleri sağlanmış olur. $\square$

Teorem 4.9. $1 \leq k \leq n-1$, k bir tamsayı ve her $U \in Cl_k^{\mathbb{F}}(p, q)$ için $[U, \overset{k}{V}] = 0$ ise $\overset{2}{V} = 0$ 'dır.

Kanıt. Kabul edelim ki $\overset{2}{V} \neq 0$ olsun. Her $1 \leq k \leq n-1$ için $[\overset{k}{U}, \overset{2}{V}] \neq 0$ olacak şekilde $\overset{k}{U} \in Cl_k^{\mathbb{F}}(p, q)$ nın var olduğunu ispatlamalıyız. $l < m$ indislerini alalım öyle ki $v_{lm} \neq 0$ ve $\overset{2}{V} = v_{lm}e^{lm} + t$ ($t = 0$ veya $t = \sum_{r < s, (r,s) \neq (l,m)} v_{rs}e^{rs}$) olsun. $e^l e^{a_1 \dots a_{k-1}} \in Cl_k^{\mathbb{F}}(p, q)$, $k > 0$ ve $\{m, l\} \cap \{a_1 \dots a_{k-1}\} = \emptyset$ şeklindeki bir elemanı düşünelim.

$$\begin{aligned} [e^l e^{a_1 \dots a_{k-1}}, e^{lm}] &= e^l e^{a_1 \dots a_{k-1}} e^{lm} - e^{lm} e^l e^{a_1 \dots a_{k-1}} \\ &= (-1)^{k-1} \eta^{ll} e^{a_1 \dots a_{k-1}} e^m + \eta^{ll} e^m e^{a_1 \dots a_{k-1}} \\ &= (-1)^{k-1} (-1)^{k-1} \eta^{ll} e^m e^{a_1 \dots a_{k-1}} + \eta^{ll} e^m e^{a_1 \dots a_{k-1}} \\ &= 2\eta^{ll} e^m e^{a_1 \dots a_{k-1}} \neq 0 \end{aligned}$$

Bu $k = 1, \dots, n-1$ için doğrudur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} [\overset{k}{U}, \overset{2}{V}] &= [e^l e^{a_1 \dots a_{k-1}}, v_{lm}e^{lm} + t] \\ &= [e^l e^{a_1 \dots a_{k-1}}, v_{lm}e^{lm}] + [e^l e^{a_1 \dots a_{k-1}}, t] \\ &= v_{lm}[e^l e^{a_1 \dots a_{k-1}}, e^{lm}] + [e^l e^{a_1 \dots a_{k-1}}, t] \end{aligned} \quad (4.1)$$

olur. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki birinci ve ikinci toplananların lineer bağımsız olduğunu ispatlarsak $[\overset{k}{U}, \overset{2}{V}] \neq 0$ olduğunu göstermiş oluruz. İkinci toplanan $v_{ij}[e^l e^{a_1 \dots a_{k-1}}, e^{ij}]$ formundadır. $l \neq i$ ve $l \neq j$ olduğunu varsayalım. O zaman $l, m, a_1, \dots, a_{k-1}$ indeksleri karşılıklı olarak farklı olduğu için $[e^l e^{a_1 \dots a_{k-1}}, e^{ij}]$ terimlerinin $[e^l e^{a_1 \dots a_{k-1}}, e^{lm}] = 2\eta^{ll} e^m e^{a_1 \dots a_{k-1}}$ ile lineer bağımsız olduğunu görürüz.

Genelliğini kaybetmeden $0 \leq c \leq n$, $c \neq l$ olmak üzere $i = l$ and $j = c$ olduğunu varsayalım. $e^l e^{a_1 \dots a_{k-1}} e^l e^c$ ve $e^m e^{a_1 \dots a_{k-1}}$ lineer bağımsız ise $[e^l e^{a_1 \dots a_{k-1}}, e^{lm}]$ ve $v_{ij}[e^l e^{a_1 \dots a_{k-1}}, e^{ij}]$ terimleri de lineer bağımsızdır. Bu $c \neq m$ anlamına gelir ve e^{lm} taban elemanı zaten (4.1) deki ayrışımında dikkate alınmıştı. Bu nedenle (4.1) deki komütatörün sıfıra eşit olmadığını ispatlamış oluruz. $\square$

Tanım 4.10. $p+q = n$ olmak üzere $Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ için rankı n olan taban elemanı hacim

elemanı olarak tanımlanır ve

$$\ell = e^{1\dots n} = e^1 \dots e^n = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$$

şeklinde gösterilir.

Buna bağlı olarak ℓ^2 , l^* ve ℓU^k 'yi bulabiliriz.

$$\begin{aligned} \ell^2 &= e^1 e^2 \dots e^n . e^1 e^2 \dots e^n \\ &= (-1)^{n-1} (-1)^{n-2} \dots (-1)^1 (e^1)^2 . (e^2)^2 \dots (e^n)^2 \\ &= (-1)^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \det \eta \cdot \mathbf{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l^* &= e^n e^{n-1} \dots e^2 . e^1 \\ &= (-1)^{n-1} e^1 e^n e^{n-1} \dots e^2 \\ &= (-1)^{n-1} (-1)^{n-2} e^1 e^2 e^n e^{n-1} \dots e^3 \\ &= (-1)^{n-1} (-1)^{n-2} \dots (-1)^1 e^1 e^2 \dots e^n \\ &= (-1)^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \ell \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell U^k &= e^1 e^2 \dots e^n . e^{a_1} e^{a_2} \dots e^{a_k} \\ &= (-1)^{n-1} . e^{a_1} (e^1 e^2 \dots e^n) e^{a_2} \dots e^{a_k} \\ &= (-1)^{(n-1)k} e^{a_1} e^{a_2} \dots e^{a_k} . e^1 e^2 \dots e^n \\ &= (-1)^{(n-1)k} U^k \ell \end{aligned}$$

e^a , $Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ 'nun üretici olmak üzere $e_a = \sum_b \eta_{ab} e^b$ ile gösterilir.

$$e_a = \begin{cases} e^a, & 1 \leq a \leq p \\ -e^a, & p+1 \leq a \leq p+q = n \end{cases}$$

Teorem 4.11. Her $U \in Cl_k(p, q)$ için

$$e_a U^k e^a = e^a U^k e_a = (-1)^k (n - 2k) U^k$$

eşitliği vardır.

Kanıt. $b_1 < \dots < b_k$ için $e_a e^{b_1} \dots e^{b_k} e^a = (-1)^k (n - 2k) e^{b_1} \dots e^{b_k}$ olduğunu tümevarım yöntemi ile görelim.

$k = 0$ için

$$\begin{aligned} e_a e^a &= e^b \eta_{ab} e^a = \frac{1}{2} \eta_{ab} e^b e^a + \frac{1}{2} \eta_{ab} e^b e^a \\ &= \frac{1}{2} \eta_{ab} (e^b e^a + e^a e^b) = n \end{aligned}$$

geçerli olduğu görülür.

k için

$$e_a \overset{k}{U} e^a = e^a \overset{k}{U} e_a = (-1)^k (n - 2k) \overset{k}{U}$$

eşitliği doğru olsun.

$k + 1$ için geçerli olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} e_a e^{b_1} \dots e^{b_k} e^{b_{k+1}} e^a &= e_a e^{b_1} \dots e^{b_k} (-e^a e^{b_{k+1}} + 2\eta^{ab_{k+1}}) \\ &= -e_a e^{b_1} \dots e^{b_k} e^a e^{b_{k+1}} + 2\eta^{ab_{k+1}} e_a e^{b_1} \dots e^{b_k} \\ &= -(-1)^k (n - 2k) e^{b_1} \dots e^{b_k} e^{b_{k+1}} + 2e^{b_{k+1}} e^{b_1} \dots e^{b_k} \\ &= (-1)^k (-n + 2k + 2) e^{b_1} \dots e^{b_{k+1}} \\ &= (-1)^{k+1} (n - 2(k + 1)) e^{b_1} \dots e^{b_{k+1}} \end{aligned}$$

□

Yukarıdaki teoremin bazı özel sonuçları aşağıda verilmiştir:

- Eğer n çift ve $k = \frac{n}{2}$ ise $e_a \overset{k}{U} e^a = e^a \overset{k}{U} e_a = 0$
- $e^a e_a = n$
- $e^a \ell e_a = (-1)^{n+1} n \ell$
- $n = 4$ için

$$e^a (\overset{0}{U} + \overset{1}{U} + \overset{2}{U} + \overset{3}{U} + \overset{4}{U}) e_a = 4\overset{0}{U} - 2\overset{1}{U} + 2\overset{3}{U} - 4\overset{4}{U}$$

olduğunu görelim.

$$e_a \overset{k}{U} e^a = e^a \overset{k}{U} e_a = (-1)^k (n - 2k) \overset{k}{U}$$

ifadesinde

$$k = 0, n = 4 \text{ için } 4\overset{0}{U}$$

$$k = 1, n = 4 \text{ için } -1.2\overset{1}{U}$$

$$k = 2, n = 4 \text{ için } (-1)^2 \cdot (4 - 4) \overset{2}{U}$$

$k = 3, n = 4$ için $(-1)^3 \cdot (4 - 6)U^3$
 $k = 4, n = 4$ için $(-1)^4 \cdot (4 - 8)U^4$ elde edilir.

5. Clifford Cebirleri Üzerinde Konjugasyon Dönüşümü

Tanım 5.1. $Cl_k^{\mathbb{F}}(p, q)$ alt uzayına izdüşüm operatörü $U \in Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \rangle_k : Cl_k^{\mathbb{F}}(p, q) &\rightarrow Cl_k^{\mathbb{F}}(p, q) \\ U &\mapsto \langle U \rangle_k = U^k = \sum_{a_1 < \dots < a_k} u_{a_1 \dots a_k} e^{a_1 \dots a_k} \end{aligned} \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımdan

$$\langle UV \rangle_{k+l} = U^k \wedge V^l$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Tanım 5.2.

$$\begin{aligned} Tr &: Cl^{\mathbb{F}}(p, q) \rightarrow \mathbb{F} \\ Tr(U) &= \langle U \rangle_0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan operatöre $U \in Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ elemanının izi denir. U elemanının izi $Tr(U)$ şeklinde gösterilir.

Örneğin,

$$Tr(u \cdot \mathbf{1} + u_a e^a + \dots) = u$$

olur.

Örnek 5.3. $U = 2 + 3e^{12} + 5e^{23} - 7e^{235} \in Cl(2, 3)$ olsun.

$$\langle U \rangle_3 = -7e^{235}$$

$$\langle U \rangle_2 = 3e^{12} + 5e^{23}$$

$$\langle U \rangle_0 = 2$$

$Tr(U) = 2$ olur.

$U, V \in Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ olmak üzere

$$U = u \cdot \mathbf{1} + u_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + u_{1\dots n} e^{1\dots n} \text{ ise } Tr(U) = u$$

$$V = v \cdot \mathbf{1} + v_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} v_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + v_{1\dots n} e^{1\dots n} \text{ ise } Tr(V) = v \text{ 'dir.}$$

Buna göre

$$\begin{aligned} Tr(U + V) &= Tr((u + v) \cdot \mathbf{1} + (u_a + v_a) e^a + \dots + (u_{1\dots n} + v_{1\dots n}) e^{1\dots n}) \\ &= u + v \\ &= Tr(U) + Tr(V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr(\alpha U) &= Tr(\alpha(u \cdot \mathbf{1} + u_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + u_{1\dots n} e^{1\dots n})) \\ &= Tr(\alpha(u \cdot \mathbf{1}) + \alpha(u_a e^a) + \alpha(\sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2}) + \dots + \alpha(u_{1\dots n} e^{1\dots n})) \\ &= \alpha u \\ &= \alpha Tr(U) \end{aligned}$$

olduğu için lineerlik özelliği vardır. Ancak

$$Tr(UV) \neq Tr(U).Tr(V)$$

olur. Örneğin; $U, V \in Cl^{\mathbb{F}}(1, 1)$ olmak üzere $U = 2e^1 - e^2, V = e^1 + e^2$ olsun. Buna göre $UV = 3 + 3e^1 e^2$ olup $Tr(U) = 0, Tr(V) = 0$ ve $Tr(UV) = 3$ olup $Tr(UV) \neq Tr(U).Tr(V)$ olduğu görülür. Ancak

$$Tr(UV) = Tr(VU) \tag{5.2}$$

eşitliği sağlandığı kolaylıkla görülür.

(5.2) eşitliğinden dolayı $Tr(UVW) = Tr(VWU) = Tr(WUV)$ döngüsel yinleme özelliği vardır.

$$\begin{aligned}
Tr([U, V]) &= Tr(UV - VU) \\
&= Tr(UV + (-1)VU) \\
&= Tr(UV) + Tr((-1)VU) \\
&= Tr(UV) + (-1)Tr(VU) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Tanım 5.4. $U \in Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ olmak üzere

$$\hat{U} := U|_{e^a \rightarrow -e^a}$$

şeklinde tanımlanan operatöre grade involusyon denir.

$$\hat{U} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \langle U \rangle_k = \langle U \rangle_0 - \langle U \rangle_1 + \langle U \rangle_2 - \langle U \rangle_3 \dots$$

Örnek 5.5.

$$U = 2 \cdot \mathbf{1} + 3e^1e^2 - 5e^3e^5e^7 \in Cl(3, 4) \text{ olsun.}$$

$$\hat{U} = 2 \cdot \mathbf{1} + 3(-e^1)(-e^2) - 5(-e^3)(-e^5)(-e^7)$$

$$\hat{U} = 2 \cdot \mathbf{1} + 3e^1e^2 + 5e^3e^5e^7$$

$U, V \in Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ olmak üzere

$$U = u \cdot \mathbf{1} + u_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + u_{1\dots n} e^{1\dots n}$$

$$V = v \cdot \mathbf{1} + v_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} v_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + v_{1\dots n} e^{1\dots n} \text{ olsun. Bu durumda}$$

$$\hat{U} = u \cdot \mathbf{1} + u_a (-e^a) + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2} (-e^{a_1})(-e^{a_2}) + \dots + u_{1\dots n} (-e^1) \dots (-e^n)$$

$$\hat{V} = v \cdot \mathbf{1} + v_a (-e^a) + \sum_{a_1 < a_2} v_{a_1 a_2} (-e^{a_1})(-e^{a_2}) + \dots + v_{1\dots n} (-e^1) \dots (-e^n)$$

olur ve

$$\begin{aligned}
\hat{U} &= u \cdot \mathbf{1} + u_a(-(-e^a)) + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2}(-(-e_1^a))(-(-e_2^a)) + \dots + u_{1\dots n}(-(-e^1))\dots(-(-e^n)) \\
&= u \cdot \mathbf{1} + u_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + u_{1\dots n} e^{1\dots n} \\
&= U
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\widehat{(UV)} &= (uv \cdot \mathbf{1} + \widehat{(uv_a + u_a v)} e^a + \dots) \\
&= (uv \cdot \mathbf{1} + (uv_a + u_a v)(-e^a) + \dots) \\
&= (uv \cdot \mathbf{1}) + (uv_a)(-e^a) + (u_a v)(-e^a) + \dots \\
&= (u \cdot \mathbf{1} + u_a(-e^a) + \dots)(v \cdot \mathbf{1} + v_a(-e^a) + \dots) \\
&= \hat{U}\hat{V} \\
\widehat{(\lambda U + \mu V)} &= (\lambda u + \mu v) \cdot \mathbf{1} + \widehat{(\lambda u_a + \mu v_a)} e^a + \dots \\
&= (\lambda u + \mu v) \cdot \mathbf{1} + (\lambda u_a + \mu v_a)(-e^a) + \dots \\
&= \lambda u \cdot \mathbf{1} + \lambda u_a(-e^a) + \dots + \mu v \cdot \mathbf{1} + \mu v_a(-e^a) + \dots \\
&= \lambda \hat{U} + \mu \hat{V}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Tr(\hat{U}) &= Tr(u \cdot \mathbf{1} + u_a(-e^a) + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2}(-e^{a_1})(-e^{a_2}) + \dots + u_{1\dots n}(-e^1)\dots(-e^n)) \\
&= u \\
&= Tr(U)
\end{aligned}$$

Tanım 5.6. $U \in Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\tilde{U} &: = U|_{e^{a_1 \dots a_r} \rightarrow e^{a_r \dots a_1}} \\
\tilde{U} &= \sum_{k=0}^n (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \langle U \rangle_k \\
&= \langle U \rangle_0 + \langle U \rangle_1 - \langle U \rangle_2 - \langle U \rangle_3 \dots
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan operatöre *anti-involusyon* denir.

Örnek 5.7. $U = 2 \cdot \mathbf{1} + 3e^1 e^2 - 5e^3 e^5 e^7 \in Cl(3, 4)$ olsun. Bu durumda

$\tilde{U} = 2 \cdot \mathbf{1} + 3e^2 e^1 - 5e^7 e^5 e^3 = 2e - 3e^1 e^2 + 5e^3 e^5 e^7$ olur.

$U, V \in Cl(p, q)$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$U = u \cdot \mathbf{1} + u_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + u_{1\dots n} e^{1\dots n}$$

$V = v \cdot \mathbf{1} + v_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} v_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + v_{1\dots n} e^{1\dots n}$ alırsak

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{U}} &= u \cdot \mathbf{1} + u_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} \widetilde{\widetilde{u_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2}}} + \dots + u_{1\dots n} e^{1\dots n} \\ &= u \cdot \mathbf{1} + u_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} \widetilde{u_{a_1 a_2} e^{a_2 a_1}} + \dots + u_{1\dots n} e^{n\dots 1} \\ &= u \cdot \mathbf{1} + u_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + u_{1\dots n} e^{1\dots n} \\ &= U\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\widetilde{\widetilde{UV}} = \tilde{\tilde{V}} \tilde{\tilde{U}}$$

ve

$$\widetilde{\lambda \tilde{\tilde{U}} + \mu V} = \lambda \tilde{\tilde{U}} + \mu \tilde{\tilde{V}}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca

$$\begin{aligned}Tr(\tilde{\tilde{U}}) &= Tr(u \cdot \mathbf{1} + u_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2} e^{a_2 a_1} + \dots + u_{1\dots n} e^{n\dots 1}) \\ &= u \\ &= Tr(U)\end{aligned}$$

olur.

Tanım 5.8. $U \in \mathbb{Cl}(p, q)$ ve $u_{a_1 \dots a_k}$ kompleks sayılar olmak üzere

$$\bar{U} := U|_{u_{a_1 \dots a_k} \rightarrow \bar{u}_{a_1 \dots a_k}}$$

şeklinde tanımlanan operatöre Clifford cebirinin kompleks konjuge operatörü denir.

$U, V \in \mathbb{Cl}(p, q)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}U &= u \cdot \mathbf{1} + u_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + u_{1\dots n} e^{1\dots n} \\ V &= v \cdot \mathbf{1} + v_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} v_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + v_{1\dots n} e^{1\dots n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{U} &= \bar{u} \cdot \mathbf{1} + \bar{u}_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} \bar{u}_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + \bar{u}_{1\dots n} e^{1\dots n} \\
&= u \cdot \mathbf{1} + u_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} u_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + u_{1\dots n} e^{1\dots n} \\
&= U
\end{aligned}$$

Ayrıca

$$\overline{UV} = \overline{UV}$$

olduğu kolaylıkla doğrulanır.

$$\begin{aligned}
Tr(\bar{U}) &= Tr(\bar{u} \cdot \mathbf{1} + \bar{u}_a e^a + \sum_{a_1 < a_2} \bar{u}_{a_1 a_2} e^{a_1 a_2} + \dots + \bar{u}_{1\dots n} e^{1\dots n}) \\
&= \bar{u} \\
&= \overline{Tr(U)}
\end{aligned}$$

eşitliği vardır. Ayrıca $(U \wedge V)^\wedge = \hat{U} \wedge \hat{V}$, $\overline{(U \wedge V)} = \bar{U} \wedge \bar{V}$, $(U \wedge V)^\sim = \tilde{V} \wedge \tilde{U}$ özellikleri de kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım 5.9. *Kompleks konjuge operatörü ve anti-involusyon operatörlerinin bileşkesi $U^* = \tilde{\bar{U}}$ şeklinde tanımlanır.*

Şimdi

$$Tr(U^*) = \overline{Tr(U)}$$

olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
Tr(U^*) &= Tr(\tilde{\bar{U}}) \\
&= \overline{Tr(\tilde{U})} \\
&= \overline{Tr(U)}
\end{aligned}$$

Ayrıca $(UV)^* = V^* U^*$, $(U \wedge V)^* = V^* \wedge U^*$ özellikleri de kolaylıkla görülebilir. [15]

6. Clifford Cebirleri Üzerinde Üniter(Öklidyen) Uzaylar

Bu bölümde Clifford cebirleri üzerinde Hermityen ve Öklidyen skaler çarpmayı tanımlayacağız. Bu skaler çarpmanın bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Bu bölümde $Cl^{\mathbb{F}}(n) = Cl^{\mathbb{F}}(n, 0)$ olsun.

$(.,.) : Cl^{\mathbb{F}}(n) \times Cl^{\mathbb{F}}(n) \rightarrow \mathbb{F}$ dönüşümünü

$$(U, V) = Tr(U^*V) \quad (6.1)$$

şeklinde tanımlayalım.

Önerme 6.1. $(.,.)$ dönüşümü $Cl^{\mathbb{F}}(n)$ uzayı üzerinde bir Hermityen (Öklidyen) skaller çarpımdır.

Kanıt. Her $U, V, W \in Cl^{\mathbb{F}}(n)$ için

$$(i) (U, V) = \overline{(V, U)}$$

$$(ii) (U, \lambda V) = \lambda(U, V)$$

$$(iii) (U + V, W) = (U, W) + (V, W)$$

$$(iv) U \neq 0 \text{ için } (U, U) > 0$$

koşullarının sağlandığını göstermeliyiz. (i) eşitliğini görelim.

$$\begin{aligned} (U, V) &= Tr(U^*V) \\ &= Tr((V^*U)^*) \\ &= \overline{Tr(V^*U)} \\ &= \overline{(V, U)} \end{aligned}$$

(ii) eşitliğini görelim.

$$\begin{aligned} (U, \lambda V) &= Tr(U^*(\lambda V)) \\ &= Tr(\lambda(U^*V)) \\ &= \lambda Tr(U^*V) \\ &= \lambda(U, V) \end{aligned}$$

(iii) eşitliğini görelim.

$$\begin{aligned}
(U + V, W) &= Tr((U + V)^*W) \\
&= Tr((U^* + V^*)W) \\
&= Tr(U^*W + V^*W) \\
&= Tr(U^*W) + Tr(V^*W) \\
&= (U, W) + (V, W)
\end{aligned}$$

(iv) koşulunu ispatlamak için (2.4) de verilen tabanın $(.,.)$ dönüşümüne karşılık ortonormal olduğunu göstermek yeterlidir. Yani,

$$(e^{i_1 \dots i_k}, e^{j_1 \dots j_l}) = \begin{cases} 0, & (i_1 \dots i_k) \neq (j_1 \dots j_l) \text{ ise} \\ 1, & (i_1 \dots i_k) = (j_1 \dots j_l) \text{ ise} \end{cases}$$

olduğunu göstermeliyiz. $i_1 \dots i_k$ ve $j_1 \dots j_l$ indislerinin ortak indeks sayısı r olmak üzere

$$e^{i_1 \dots i_k} e^{j_1 \dots j_l} \in Cl_{k+l-2r}^{\mathbb{F}}(n)$$

dir. Yani, $k + l - 2r > 0$ ise $(e^{i_1 \dots i_k}, e^{j_1 \dots j_l}) = 0$ dır. Eğer $k + l - 2r = 0$ ise $i_1 \dots i_k$ ve $j_1 \dots j_l$ multi-indeksleri özdeşdir ve bu durumda

$$e^{i_1 \dots i_k} e^{j_1 \dots j_l} = Tr(e^{i_k \dots i_1} e^{i_1 \dots i_k}) = Tr(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$$

dir. Böylece (2.4) tabanı ortonormaldir ve $U \in Cl^{\mathbb{F}}(n)$ için

$$(U, U) = \sum_{k=0}^n \sum_{a_1 < \dots < a_k} |u_{a_1 \dots a_k}|^2 > 0$$

eşitliği sağlanır. □

$Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ Clifford cebirinde $q > 0$ için (iv) özelliği geçerli değildir. Bu durumda $\dagger$ operatörünü tanımlayalım.

Tanım 6.2.

$$\begin{aligned}
\dagger : Cl^{\mathbb{F}}(p, q) &\rightarrow Cl^{\mathbb{F}}(p, q) \\
(e^{i_1 \dots i_k})^{\dagger} &= e_{i_k} \dots e_{i_1}, \quad \lambda^{\dagger} = \bar{\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\dagger$ operatörüne Clifford cebirinin Hermityen konjugasyonu denir.

Clifford cebirinin e^a üreteçleri üzerinde $\dagger$ operatörü

$$\begin{aligned} a = 1, \dots, p & \quad \text{için} \quad (e^a)^\dagger = e_a = e^a \\ a = p + 1, \dots, n & \quad \text{için} \quad (e^a)^\dagger = e_a = -e^a \end{aligned}$$

şeklinde olur.

Örnek 6.3. $Cl(2, 3)$ için taban elemanları e^1, e^2, e^3, e^4, e^5 olup

$$\begin{aligned} (e^1)^2 &= (e^2)^2 = 1 \\ (e^3)^2 &= (e^4)^2 = (e^5)^2 = -1 \\ e_1 &= \sum_{b=1}^5 \eta_{1b} e^b \\ &= \eta_{11} e^1 + \eta_{12} e^2 + \eta_{13} e^3 + \eta_{14} e^4 + \eta_{15} e^5 \\ &= e^1 \\ e_3 &= \sum_{b=1}^5 \eta_{3b} e^b \\ &= \eta_{31} e^1 + \eta_{32} e^2 + \eta_{33} e^3 + \eta_{34} e^4 + \eta_{35} e^5 \\ &= -e^3 \end{aligned}$$

olduğundan $(e^1)^\dagger = e_1 = +e^1$ ve $(e^3)^\dagger = e_3 = -e^3$ elde edilir.

Şimdi bu operatörün özelliklerini inceleyelim:

$U = e^{i_1 \dots i_k}$, $V = e^{l_1 \dots l_j} \in Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ olsun.

$$\begin{aligned} U^{\dagger\dagger} &= (e^{i_1 \dots i_k})^{\dagger\dagger} \\ &= (e_{i_k \dots i_1})^\dagger \\ &= e^{i_1 \dots i_k} \\ &= U \end{aligned}$$

$(UV)^\dagger = V^\dagger U^\dagger$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
(UV)^\dagger &= (e^{i_1 \dots i_k} e^{l_1 \dots l_j})^\dagger \\
&= (e^{i_1 \dots i_k l_1 \dots l_j})^\dagger \\
&= (e_{l_j \dots l_1 i_k \dots i_1}) \\
&= (e_{l_j \dots l_1})(e_{i_k \dots i_1}) \\
&= V^\dagger U^\dagger
\end{aligned}$$

$(\lambda U + \mu V)^\dagger = \bar{\lambda} U^\dagger + \bar{\mu} V^\dagger$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
(\lambda U + \mu V)^\dagger &= (\lambda(e^{i_1 \dots i_k}) + \mu(e^{l_1 \dots l_j}))^\dagger \\
&= \bar{\lambda} e_{i_k \dots i_1} + \bar{\mu} e_{l_j \dots l_1} \\
&= \bar{\lambda} U^\dagger + \bar{\mu} V^\dagger
\end{aligned}$$

Yukarıda gösterilen özelliklerin keyfi Clifford cebir elemanları için de geçerli olduğu kolaylıkla doğrulanabilir. Yani,

$U, V \in Cl^\mathbb{F}(p, q), \lambda \in \mathbb{F}$ olmak üzere,
 $U^{\dagger\dagger} = U, (UV)^\dagger = V^\dagger U^\dagger, (U + V)^\dagger = U^\dagger + V^\dagger, (\lambda U)^\dagger = \bar{\lambda} U^\dagger, \mathbf{1}^\dagger = \mathbf{1}$ eşitlikleri vardır
Hermityen skaler çarpma, Clifford cebir elemanları üzerinde

$$(U, V) = Tr(U^\dagger V)$$

şeklinde tanımlanır. Bundan dolayı

$$(e^{i_1 \dots i_k}, e^{i_1 \dots i_k}) = Tr(e_{i_k} \dots e_{i_1} e^{i_1} \dots e^{i_k}) = Tr(\mathbf{1}) = 1$$

Teorem 6.4. $p \geq 0, q \geq 0, n = p+q \geq 1$ tam sayılar olmak üzere Hermityen konjuge operatörü p ve q nun durumlarına göre $\dagger : Cl_k^\mathbb{F}(p, q) \longrightarrow Cl_k^\mathbb{F}(p, q), k = 0, \dots, n$

$$U^\dagger = \begin{cases} (e_{1 \dots p})^{-1} \tilde{\bar{U}} e_{1 \dots p}, & p \text{ tek ise} \\ (e_{1 \dots p})^{-1} \tilde{\bar{\bar{U}}} e_{1 \dots p}, & p \text{ çift ise} \end{cases}$$

$$U^\dagger = \begin{cases} (e_{p+1 \dots n})^{-1} \tilde{\bar{U}} e_{p+1 \dots n}, & q \text{ çift ise} \\ (e_{p+1 \dots n})^{-1} \tilde{\bar{\bar{U}}} e_{p+1 \dots n}, & q \text{ tek ise} \end{cases}$$

eşitlikleri geçerlidir.

$$\begin{aligned} (.,.) : Cl^{\mathbb{F}}(p, q) \times Cl^{\mathbb{F}}(p, q) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (U, V) &= Tr(U^{\dagger}V) \end{aligned} \quad (6.2)$$

ile tanımlanan dönüşüm $Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ Clifford cebirinde bir Hermityen skaler çarpım verir. ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ iken Öklidyen skaler çarpım verir.)

Kanıt. $(e^{i_1 \dots i_k})^{\dagger} = (-1)^{(p+1)k} e^{p \dots 1} \widetilde{e^{i_1 \dots i_k}} e^{1 \dots p}$ $(e^{i_1, \dots, i_k})^{\dagger} = (-1)^{qk} e^{n \dots p+1} \widetilde{e^{i_1 \dots i_k}} e^{p+1 \dots n}$ eşitliklerinin sağlandığını göstermemiz yeterlidir. s , $\{i_1, \dots, i_k\}$ ve $\{1, \dots, p\}$ indislerinin ortak sayısı olmak üzere

$$\begin{aligned} (-1)^{(p+1)k} e^{p \dots 1} \widetilde{e^{i_1 \dots i_k}} e^{1 \dots p} &= (-1)^{(p+1)k} e^{p \dots 1} e^{i_k \dots i_1} e^{1 \dots p} \\ &= (-1)^{(p+1)k} (-1)^{kp-s} e^{i_k \dots i_1} \\ &= (-1)^{k-s} e^{i_k \dots i_1} \\ (-1)^{qk} e^{n \dots p+1} \widetilde{e^{i_1 \dots i_k}} e^{p+1 \dots n} &= (-1)^{qk} (-1)^q e^{n \dots p+1} e^{i_k \dots i_1} e^{p+1 \dots n} \\ &= (-1)^{qk+q} (-1)^{qk-(k-s)} (-1)^q e^{i_k \dots i_1} \\ &= (-1)^{k-s} e^{i_k \dots i_1} \\ e^{i_k \dots i_1} &= \eta_{i_1 i_1} \dots \eta_{i_k i_k} e^{i_k \dots i_1} \\ &= (-1)^{k-s} 1^s e^{i_k \dots i_1} \\ &= (-1)^{k-s} e^{i_k \dots i_1} \end{aligned}$$

□

(6.2) da verilen Hermityen skaler çarpma her $A, U, V \in Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ için

$$(AU, V) = (U, A^{\dagger}V)$$

eşitliği sağlanır. Eğer $U = U^{\dagger}$ ise U elemanına Hermityen eleman denir. Eğer $U = -U^{\dagger}$ ise U 'ya anti-Hermityen eleman denir. $U \in Cl^{\mathbb{F}}(p, q)$ elemanı, Hermityen ve anti-Hermityen elemanların toplamı şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U = \frac{1}{2}(U + U^{\dagger}) + \frac{1}{2}(U - U^{\dagger})$$

7. Hermityen İdempotentler ve İlgili Yapılar

Bu bölümde sadece $\mathbb{C}l(p, q)$ kompleks Clifford cebirleriyle ilgileneceğiz.

Tanım 7.1. $t \in \mathbb{C}l(p, q)$ olmak üzere

$$t^2 = t, \quad t^\dagger = t$$

ise t 'ye *Hermityen idempotent* denir.

Eğer $U \in \mathbb{C}l(p, q)$, $U^\dagger = U^{-1}$ şeklinde üniter elemanı var öyle ki

$$\hat{t} = U^{-1}tU$$

eşitliği sağlanıyorsa t ve $\hat{t}$ iki hermityen idempotent elemana aynı tiptendir, denir. Örneğin, $\mathbb{C}l(1, 3)$ için aynı tipten olmayan dört Hermityen idempotentin var olduğu gösterilebilir.

Tanım 7.2. *Kompleks Clifford cebirinin*

$$I(t) = \{U \in \mathbb{C}l(p, q) : U = Ut\}$$

şeklindeki alt kümesine t Hermityen idempotenti ile üretilen Clifford cebirinin sol ideali denir.

$t \in \mathbb{C}l(p, q)$ Hermityen idempotent olmak üzere

$$K(t) = \{U \in \mathbb{C}l(p, q) : U = tUt\}$$

kümesini tanımlayalım. Şimdi $K(t) \subseteq I(t)$ olduğunu görelim. $U \in K(t)$ olsun. Bu durumda $U = tUt$ 'dir. Buradan $Ut = (tUt)t = tUt^2 = tUt = U$ olduğundan $K(t) \subseteq I(t)$ olur.

Şimdi de $U \in K(t)$ iken $[U, t] = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
[U, t] &= Ut - tU \\
&= (tUt)t - t(tUt) \\
&= tUt^2 - t^2Ut \\
&= tUt - tUt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Aşkar idealleri yani 0 ve kendisi dışında başka sol ideal içermeyen sol ideale minimal sol ideal denir. Minimal sol idealin ürettiği Hermityen idempotente primitive denir.

$I(t)$ sol idealinin temel özelliği $U \in I(t)$ ve $V \in \mathbb{C}l(p, q)$ iken

$$VU = V(Ut) = (VU)t$$

olduğundan $VU \in I(t)$ olmasıdır.

$I(t)$ sol idealinin $\mathbb{C}l(p, q)$ nun bir alt uzayı olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

(6.2) de verilen Hermityen skaler çarpma $I(t)$ üzerinde bir üniter uzay yapısını verir. $I(t)$ nin $d = \dim I(t)$, $\tau^l = \tau_l$ olmak üzere $\tau_1, \dots, \tau_d \in I(t)$

$$(\tau_k, \tau_l) = \delta_k^l, \quad k, l = 1, \dots, d$$

şeklinde ortonormal tabanı olsun. Clifford cebir elemanlarının matris temsillerini düşünelim. d -boyutlu ve girdileri kompleks olan matris $Mat(d, \mathbb{C})$ ile gösterilir. $Q \in Mat(d, \mathbb{C})$ matrisinin elemanları $q_{kl}, (k, l = 1, \dots, d)$ şeklindeki ikililerle numaralandırılır.

$Q = [q_{kl}], R = [r_{kl}] \in Mat(d, \mathbb{C})$ matrislerinin çarpımı

$$\begin{aligned}
P &= QR \\
p_{km} &= \sum_{l=1}^d q_{kl} \cdot r_{lm}
\end{aligned}$$

şeklinde dir. $\tau_1, \dots, \tau_d \in I(t)$ ortonormal tabanı yardımıyla üç lineer dönüşüm tanım-

layalım.

$$\gamma : \mathbb{C}l(p, q) \longrightarrow Mat(d, \mathbb{C})$$

$$\theta : K(t) \longrightarrow Mat(d, \mathbb{C})$$

$$\rho : I(t) \longrightarrow \mathbb{C}^d$$

Burada $\mathbb{C}^d$ d -boyutlu kompleks vektör uzayı, bir sütun ve d satırı olan kompleks matrisler kümesidir. γ dönüşümünü $U \in \mathbb{C}l(p, q)$ ve $\gamma(U) = [\gamma(U)_{lk}]_{d \times d} \in Mat(d, \mathbb{C})$ olmak üzere

$$U\tau_k = \sum_{l=1}^d \gamma(U)_{lk} \tau_l \quad (7.1)$$

formülüyle tanımlayalım. Böylece

$$\gamma(U)_{kl} = (\tau_k, U\tau_l) \quad (7.2)$$

olur. Çünkü,

$$\begin{aligned} (\tau_k, U\tau_l) &= Tr((\tau_k)^\dagger U\tau_l) \\ &= Tr((\tau_k)^\dagger \sum_{a=1}^d \gamma(U)_{al} \tau_a) \\ &= \sum_{a=1}^d \gamma(U)_{al} Tr((\tau_k)^\dagger \tau_a) \\ &= \gamma(U)_{kl} \end{aligned}$$

olur. Şimdi de $\gamma(UV) = \gamma(U)\gamma(V)$ olduğunu görelim. Bunun için

$$\gamma(UV)_{kl} = \sum_{a=1}^d \gamma(U)_{ka} \gamma(V)_{al}$$

eşitliğinin sağlandığını göstermeliyiz. $\gamma(UV)_{kl} = (\tau_k, (UV)\tau_l)$ olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned}
(UV)\tau_l &= U(V\tau_l) \\
&= U\left(\sum_{a=1}^d \gamma(V)_{al}\tau_a\right) \\
&= \sum_{a=1}^d \gamma(V)_{al}(U\tau_a) \\
&= \sum_{a=1}^d \gamma(V)_{al}\left(\sum_{b=1}^d \gamma(U)_{ba}\tau_b\right) \\
&= \sum_{a,b=1}^d \gamma(V)_{al}\gamma(U)_{ba}\tau_b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(UV)_{kl} &= (\tau_k, \sum_{a,b=1}^d \gamma(V)_{al}\gamma(U)_{ba}\tau_b) \\
&= \sum_{a,b=1}^d \gamma(V)_{al}\gamma(U)_{ba}(\tau_k, \tau_b) \\
&= \sum_{a=1}^d \gamma(V)_{al}\gamma(U)_{ka}
\end{aligned}$$

O halde Clifford cebirlerinin matris temsillerini elde ederiz. Bu temsilin boyutu, $I(t)$ sol idealinin boyutuna eşittir. Minimal sol ideal, minimal boyuttaki Clifford cebirinin matris temsillerini verir. I birim matris olmak üzere

$$\gamma^a = \gamma(e^a), \quad I = \gamma(1)$$

dersek Clifford cebirinin üreteçleri arasındaki (2.6) eşitliğinden dolayı

$$\begin{aligned}
\gamma(e^a e^b + e^b e^a) &= \gamma(2\eta^{ab} \cdot 1) \\
\gamma(e^a e^b) + \gamma(e^b e^a) &= 2\eta^{ab}\gamma(1) \\
\gamma(e^a)\gamma(e^b) + \gamma(e^b)\gamma(e^a) &= 2\eta^{ab}I \\
\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a &= 2\eta^{ab}I
\end{aligned}$$

elde edilir. Kabul edelim ki bir $\gamma : \mathbb{Cl}(p, q) \longrightarrow Mat(d, \mathbb{C})$ temsili (7.1) eşitliği yardımıyla bir sol idealin bir $\tau_1, \dots, \tau_d$ ortonormal tabanı tarafından üretilsin. O zaman her $U \in \mathbb{Cl}(p, q)$ için

$$\gamma(U^\dagger) = \gamma(U)^\dagger$$

eşitliğinin sağlandığını görelim. Hermityen skaler çarpma operatörünün özelliklerin-

den ve (7.2) den dolayı

$$\begin{aligned}\gamma(U)_{kl} &= (\tau_k, U\tau_l) \\ \gamma(U)_{kl} &= (U^\dagger\tau_k, \tau_l) \\ \overline{\gamma(U)_{kl}} &= (\tau_l, U^\dagger\tau_k) = \gamma(U^\dagger)_{lk}\end{aligned}\tag{7.3}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$(\gamma(U)^\dagger)_{lk} = \gamma(\bar{U})_{kl} = \overline{\gamma(U)_{kl}}\tag{7.4}$$

olur. (7.3) deki eşitliğin sol tarafı, (7.4) eşitliğinin sağ tarafına eşit olduğundan dolayı her $U \in \mathbb{C}l(p, q)$ için $\gamma(U^\dagger) = \gamma(U)^\dagger$ eşitliği sağlanmış olur.

Şimdi $\rho : I(t) \longrightarrow \mathbb{C}^d$ dönüşümünü tanımlayacağız. $\Omega \in I(t)$ olsun. O zaman

$$\Omega = \omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \dots + \omega_d\tau_d = \sum_{i=1}^d \omega_i\tau_i$$

şeklinde yazabiliriz. O halde

$$\rho(\Omega) = (\omega_1 \dots \omega_d)^T$$

şeklinde tanımlayalım. Burada A^T , matrisin transpozunu belirtir.

$$\tau_k = 0\tau_1 + 0\tau_2 + \dots + 0\tau_{k-1} + 1\tau_k + 0\tau_{k+1} + \dots + 0\tau_d$$

olduğundan

$$\rho(\tau_k) = (0 \dots 1 \dots 0)^T$$

olup sütun matrisinin sadece k . girdisi 1 dir. $U \in \mathbb{C}l(p, q), \Omega \in I(t)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}U\Omega &= U(\sum_{i=1}^d \omega_i\tau_i) \\ &= \sum_{i=1}^d \omega_i(U\tau_i) \\ &= \sum_{i,l=1}^d \omega_i\gamma(U)_{li}\tau_l \in I(t)\end{aligned}$$

olur.

$\rho(U\Omega) = \gamma(U)\rho(\Omega)$ olduğunu görelim. Önce eşitliğin sol tarafından

$$\rho(U\Omega)_k = \sum_{i=1}^d \omega_i \gamma(U)_{ki}$$

elde edilir. Daha sonra sağ tarafından

$$\begin{aligned} (\gamma(U)\rho(\Omega))_k &= \sum_{i=1}^d \gamma(U)_{ki} \rho(\Omega)_i \\ &= \sum_{i=1}^d \gamma(U)_{ki} \omega_i \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $\rho(U\Omega) = \gamma(U)\rho(\Omega)$ dir. Şimdi de

$$\begin{aligned} \theta : K(t) &\longrightarrow Mat(d, \mathbb{C}) \\ V &\mapsto \theta(V) \end{aligned}$$

dönüşümünü $\tau_n V = \sum_{k=1}^d \theta(V)_{kn} \tau_k$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} (\tau_l, \tau_n V) &= (\tau_l, \sum_{k=1}^d \theta(V)_{kn} \tau_k) \\ &= \sum_{k=1}^d \theta(V)_{kn} (\tau_l, \tau_k) \\ &= \theta(V)_{ln} \end{aligned}$$

olur. $V \in K(t), \Omega \in I(t)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Omega V &= \sum_{n=1}^d \omega_n \tau_n V \\ &= \sum_{n,k=1}^d \omega_n \theta(V)_{kn} \tau_k \in I(t) \end{aligned}$$

elde edilir. $\rho(\Omega V) = \theta(V)\rho(\Omega)$ eşitliğini gösterelim. Önce eşitliğin sağ tarafına baksak,

$$\rho(\Omega V)_l = \sum_{n=1}^d \omega_n \theta(V)_{ln}$$

elde edilir. Daha sonra eşitliğin sol tarafından

$$\begin{aligned} (\theta(V)\rho(\Omega))_l &= \sum_{n=1}^d \theta(V)_{ln} \rho(\Omega)_n \\ &= \sum_{n=1}^d \theta(V)_{ln} \omega_n \end{aligned}$$

olup istenilen eşitlik gösterilmiş olur.

$U, V \in K(t)$, $\Omega \in I(t)$ iken

$$\rho(\Omega UV) = \theta(V)\theta(U)\rho(\Omega) = \theta(UV)\rho(\Omega)$$

olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} \rho(\Omega UV)_l &= \rho(\Omega(UV))_l \\ &= \sum_{k=1}^d \rho(\Omega)_k \theta(UV)_{kl} \\ &= \sum_{k=1}^d \omega_k \theta(UV)_{kl} \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \theta(UV)_{kl} &= (\tau_k, \tau_l(UV)) \\ &= (\tau_k, (\tau_l U)V) \\ &= (\tau_k, (\sum_{a=1}^d \theta(U)_{al} \tau_a)V) \\ &= (\tau_k, (\sum_{a=1}^d \theta(U)_{al} (\tau_a V))) \\ &= (\tau_k, (\sum_{a=1}^d \theta(U)_{al} \sum_{b=1}^d \theta(V)_{ba} \tau_b)) \\ &= \sum_{a,b=1}^d \theta(U)_{al} \theta(V)_{ba} (\tau_k, \tau_b) \\ &= \sum_{a=1}^d \theta(U)_{al} \theta(V)_{ka} \\ &= \sum_{a=1}^d \theta(V)_{ka} \theta(U)_{al} \end{aligned}$$

elde edilip yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\rho(\Omega UV)_l &= \sum_{k=1}^d \omega_k \theta(UV)_{kl} \\
&= \sum_{k,a=1}^d \omega_k \theta(V)_{ka} \theta(U)_{al} \\
&= \sum_{k=1}^d \omega_k (\theta(V) \theta(U))_{kl} \\
&= (\theta(V) \theta(U) \rho(\Omega))_l
\end{aligned}$$

olduğundan $\rho(\Omega UV) = \theta(V) \theta(U) \rho(W) = \theta(UV) \rho(W)$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Benzer şekilde $U \in \mathbb{Cl}(p, q)$, $V \in K(t)$, $\Omega \in I(t)$ ise $U\Omega \in I(t)$, $\Omega V \in I(t)$ olup

$$\rho(U\Omega V) = \gamma(U) \rho(\Omega V) = \gamma(U) \theta(V) \rho(\Omega)$$

$$\rho(U\Omega V) = \theta(V) \rho(U\Omega) = \theta(V) \gamma(U) \rho(\Omega)$$

olur. Bu nedenle

$$[\gamma(U), \theta(V)] = 0$$

elde edilir.

8. Clifford Cebirlerinin Normal Temsilleri

Tanım 8.1. $n = p + q$ olmak üzere $\mathbb{Cl}(p, q)$ Clifford cebirinin

$$\gamma : \mathbb{Cl}(p, q) \longrightarrow \text{Mat}(d, \mathbb{C})$$

temsili

- $d = 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$
- $\forall U \in \mathbb{Cl}(p, q)$ için $\gamma(U)^\dagger = \gamma(U^\dagger)$

koşullarını sağlıyorsa γ temsiline $\mathbb{Cl}(p, q)$ Clifford cebirinin normal temsili denir.

Şimdi her $\mathbb{Cl}(p, q)$ kompleks Clifford cebiri için t Hermityen idempotent elemanı vereceğiz. Bu t hermityen idempotent karşılık $I(t)$ sol idealinin ortonormal taba-

nını elde edeceğiz. Bu taban yardımıyla $\mathbb{Cl}(p, q)$ kompleks Clifford cebirinin normal temsilini inşa edeceğiz.

$\mathbb{Cl}(p, q)$ kompleks Clifford cebirinin üreteçleri $e^1, \dots, e^p, e^{p+1}, \dots, e^n$ olsun. O zaman $a \neq b$ için $e^a e^b = -e^b e^a$ dir, $a = 1, \dots, p$ için $(e^a)^2 = \mathbf{1}$ ve $a = p+1, \dots, n$ için $(e^a)^2 = -\mathbf{1}$ dir.

$n = 1$ için Hermityen idempotent eleman olarak $t = \mathbf{1}$ alalım. $n > 1$ için t olarak

$$t = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + i^a e^1) \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \frac{1}{2}(\mathbf{1} + i^{b_k} e^{2k} e^{2k+1}) \in \mathbb{Cl}(p, q) \quad (8.1)$$

alalım. Burada

$$a = \begin{cases} 0, & p \neq 0 \\ 1, & p = 0 \end{cases} \quad \text{ise} \quad b_k = \begin{cases} 0, & 2k = p \\ 1, & 2k \neq p \end{cases} \quad \text{ise}$$

şeklindedir.

$$\left(\frac{1}{2}(\mathbf{1} + i^a e^1)\right)^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + i^a e^1) = \left(\frac{1}{2}(\mathbf{1} + i^a e^1)\right)^\dagger$$

ve

$$\left(\frac{1}{2}(\mathbf{1} + i^{b_k} e^{2k} e^{2k+1})\right)^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + i^{b_k} e^{2k} e^{2k+1}) = \left(\frac{1}{2}(\mathbf{1} + i^{b_k} e^{2k} e^{2k+1})\right)^\dagger$$

olduğundan t Hermityen idempotenttir. n çift iken t Hermityen idempotentin primitive olduğu kolaylıkla doğrulanır.

$n = 2$ ve $n = 3$ için Hermityen idempotent elemanlar aşağıdaki gibidir:

(p,q)	(2,0)	(1,1)	(0,2)
t	$t = 1/2(\mathbf{1} + e^1)$	$t = 1/2(\mathbf{1} + e^1)$	$t = 1/2(\mathbf{1} + ie^1)$

(p,q)	(3,0)	(2,1)	(1,2)	(0,3)
t	$t = 1/2(\mathbf{1} + e^1)$	$t = 1/2(\mathbf{1} + e^1)$	$t = 1/2(\mathbf{1} + e^1)$	$t = 1/2(\mathbf{1} + ie^1)$

$p + q = n$ olmak üzere $\mathbb{Cl}(p, q)$ Clifford cebiri $\mathbb{Cl}(e^1, \dots, e^n)$ gösterimini kullanabiliriz. Burada

$$\mathbf{1}, e^a, e^{a_1}e^{a_2}, \dots, e^1 \dots e^n, \quad a_1 < a_2 < \dots$$

elemanları $\mathbb{Cl}(e^1, \dots, e^n)$ 'nin taban elemanlarıdır. Bu taban elemanlarını c_k ($k = 1, \dots, 2^n$) ile gösterelim. Ayrıca

$$\mathbb{Cl}(e^1, \dots, e^n) = \mathbb{Cl}_{\text{even}}(e^1, \dots, e^n) \oplus \mathbb{Cl}_{\text{odd}}(e^1, \dots, e^n)$$

eşitliği vardır.

$$n \text{ çift iken} \quad Q = \mathbb{Cl}(e^2, e^4, \dots, e^n)$$

$$n \text{ tek iken} \quad Q = \mathbb{Cl}(e^2, e^4, \dots, e^{n-1}, e^n)$$

olsun. Q 'nun kompleks boyutu $2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ 'dir. c_k ($k = 1, \dots, 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$) Q 'nun taban elemanları olsun. Yani, n çift iken Q , e^a üreteçlerinin kümesi olarak tanımlanır. Burada a , $2 \leq a \leq n$ arasındaki çift sayılardır. n tek iken Q , e^a üreteçlerinin kümesi (a , $2 \leq a \leq n-1$ arasındaki çift sayılar) ve e^n dir. Q Clifford cebiri $\mathbb{Cl}(p, q)$ 'nun bir alt cebiridir. Q altcebirinin boyutu $2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ dir. Q 'nun taban elemanlarını c_k , ($k = 1, \dots, 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$) ile gösterelim. Varsayalım ki c_k dizisinde ilk $2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}$ elemanın

$$\mathbf{1}, e^2, e^4, \dots$$

şeklinde çiftli elemanlar olduğunu ya da ikinci bir seçim olarak $2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}$ elemanın

$$e^2, e^4, \dots$$

şeklinde tekli elemanlar alabiliriz.

Teorem 8.2. $I(t)$ sol idealinin

$$\tau_k = (\sqrt{2})^{\lfloor n/2 \rfloor} c_k t, \quad k = 1, \dots, 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$$

şeklindeki elemanları $I(t)$ 'nin ortonormal bir tabanını oluşturur. [12]

$$Kanıt. (\tau_k, \tau_l) = Tr(\tau_k^\dagger \tau_l) = (\sqrt{2})^{2[n/2]} Tr(t^\dagger c_k^\dagger c_l t) = (\sqrt{2})^{2[n/2]} Tr(c_k^\dagger c_l t)$$

$$\begin{cases} c_k^\dagger c_l = \mathbf{1} & k = l \\ Tr(c_k^\dagger c_l t) = 0, & k \neq l \end{cases}$$

olduğunu görelim. $k = l$ olsun. $c_k = e^{a_1} \dots e^{a_r}$ ise $c_k^\dagger = e_{a_r} \dots e_{a_1}$ olur. Bu nedenle $c_k^\dagger c_k = \mathbf{1}, k = 1, \dots, 2^{[(n+1)/2]}$ olup

$$(\tau_k, \tau_k) = (\sqrt{2})^{2[n/2]} Tr t = \mathbf{1}, \quad k = 1, \dots, 2^{[(n+1)/2]}$$

elde edilir. $k \neq l$ ise $a_1, \dots, a_s$ çift indisler ve $a_1 < \dots < a_s$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & n \text{ çift iken } c_k^\dagger c_l = \pm e^{a_1} \dots e^{a_s} \\ & n \text{ tek iken } c_k^\dagger c_l = \pm e^{a_1} \dots e^{a_s}, \text{ veya } c_k^\dagger c_l = \pm e^{a_1} \dots e^{a_s} e^n \end{aligned} \quad (8.2)$$

olacaktır. (8.2) eşitliklerinin sağ tarafında en az bir üreteç olacağından $Tr(c_k^\dagger c_l) = 0$ olur. (8.1) eşitliğinden t idempotent elemanı

$$t = 2^{-[n/2]} \cdot \mathbf{1} + \sum_{r=1}^n \sum_{b_1 < \dots < b_r} \lambda_{b_1 \dots b_r} e^{b_1 \dots b_r} \quad (8.3)$$

şeklinde yazılabilir öyle ki $\lambda_{b_1 \dots b_r} \in \mathbb{C}$ ve her $\lambda_{b_1 \dots b_r} e^{b_1 \dots b_r}$ terimi en az biri tek indisli e^b üretecini içerir (n tek iken t idempotenti e^n üretecini içermez.). (8.3) eşitliğini soldan $c_k^\dagger c_l t$ ile çarparsak

$$c_k^\dagger c_l t = 2^{-[n/2]} c_k^\dagger c_l + \left(\sum_{r=1}^n \sum_{b_1 < \dots < b_r} \lambda_{b_1 \dots b_r} c_k^\dagger c_l e^{b_1 \dots b_r} \right)$$

eşitliğini elde ederiz. Parantez içindeki ifadeyi $\mathbb{C}l(e^1, \dots, e^n)$ nin taban elemanlarının bir toplamı olarak yazarsak bu toplamın her bir terimi en az bir tek indisli e^b üretecini içerir. Dolayısıyla her bir terimin izi sıfıra eşit olacağından

$$k \neq l \text{ için } Tr(c_k^\dagger c_l t) = 0$$

bulunur. O halde τ_k lar $I(t)$ sol idealinin ortonormal tabanını oluşturur. $\square$

O halde t Hermityen idempotent ve $I(t)$ sol idealinin τ_k ortonormal tabanı yardımıyla

$$\begin{aligned}\mathbb{C}l(p, q) &\rightarrow \text{Mat}(2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, \mathbb{C}) \\ U &\mapsto \underline{U}\end{aligned}$$

şeklinde kompleks Clifford cebirinin normal temsilini elde edeceğiz. Bu normal temsil bize matris cebirinin tüm ana kavramlarını Clifford cebirine aktarma imkanı verir.

8.1. Düşük Boyutlarda Kompleks Clifford Cebirlerinin Normal Temsillerinin Bulunması

Bu bölümde düşük boyutlarda kompleks Clifford cebirlerinin normal temsillerini elde edeceğiz. Bunun için (8.1) eşitliğini ve Teorem (8.2) 'yi kullanacağız.

$n = 1$ olsun. Bu durumda $(p, q) = (1, 0)$ ve $(p, q) = (0, 1)$ olma durumları söz konusudur.

$(p, q) = (1, 0)$ ve $(p, q) = (0, 1)$ için $t = \mathbf{1}$ dir. $I(t)$ sol idealinin tabanı da Teorem (8.2) den dolayı $\tau_1 = 1$ ve $\tau_2 = e^1$ olur.

Buna göre $(p, q) = (1, 0)$ için $t = \mathbf{1}$ olmak üzere

$$\tau_1 = 1$$

$$\tau_1^\dagger = 1$$

$$\tau_2 = e^1$$

$$\tau_2^\dagger = e^1$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}\gamma(e^1)_{11} &= (\tau_1, e^1 \tau_1) \\ &= \text{Tr}(\tau_1^\dagger e^1 \tau_1) \\ &= \text{Tr}(e^1) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{12} &= (\tau_1, e^1 \tau_2) \\
&= Tr(\tau_1^\dagger e^1 \tau_2) \\
&= Tr((e^1)^2) \\
&= Tr(1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{21} &= (\tau_2, e^1 \tau_1) \\
&= Tr(\tau_2^\dagger e^1 \tau_1) \\
&= Tr((e^1)^2) \\
&= Tr(1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{22} &= (\tau_2, e^1 \tau_2) \\
&= Tr(\tau_2^\dagger e^1 \tau_2) \\
&= Tr((e^1)^3) \\
&= Tr(e^1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Buna göre $(p, q) = (1, 0)$ için

$$\begin{aligned}
\gamma_{(1,0)} : \quad \mathbb{Cl}(1, 0) &\rightarrow Mat(2, \mathbb{C}) \\
e^1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$(p, q) = (0, 1)$ için $t = \mathbf{1}$ olmak üzere

$$\tau_1 = 1$$

$$\tau_1^\dagger = 1$$

$$\tau_2 = e^1$$

$$\tau_2^\dagger = -e^1$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{11} &= (\tau_1, e^1 \tau_1) \\
&= Tr(\tau_1^\dagger e^1 \tau_1) \\
&= Tr(e^1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{12} &= (\tau_1, e^1 \tau_2) \\
&= Tr(\tau_1^\dagger e^1 \tau_2) \\
&= Tr((e^1)^2) \\
&= Tr(-1) \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{21} &= (\tau_2, e^1 \tau_1) \\
&= Tr(\tau_2^\dagger e^1 \tau_1) \\
&= Tr(-e^1 e^1) \\
&= Tr(1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{22} &= (\tau_2, e^1 \tau_2) \\
&= Tr(\tau_2^\dagger e^1 \tau_2) \\
&= Tr(-e^1 e^1 e^1) \\
&= Tr(e^1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Buna göre $(p, q) = (0, 1)$ için

$$\begin{aligned}
\gamma_{(0,1)} : \quad \mathbb{Cl}(0, 1) &\rightarrow Mat(2, \mathbb{C}) \\
e^1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

Ayrıca teoremden farklı olarak n 'nin tek olduğu durumlar için ortonormal tabanlar alınarak buna karşılık gelen normal temsili bulduğumuz zaman bu normal temsilin farklı bir temsili bulmuş oluruz.

$n = 1$ olsun. Bu durumda $(p, q) = (1, 0)$ ve $(p, q) = (0, 1)$ olma durumları söz konusudur.

$(p, q) = (1, 0)$ ve $(p, q) = (0, 1)$ için $t = \mathbf{1}$ dir. $I(t)$ sol idealinin ortonormal tabanı $\tau_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}})(\mathbf{1} + e^1)t$ ve $\tau_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})(\mathbf{1} - e^1)t$ olsun. Buna göre $(p, q) = (1, 0)$ için $t = \mathbf{1}$ olmak üzere

$$\tau_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}})(\mathbf{1} + e^1)$$

$$\tau_1^\dagger = ((\frac{1}{\sqrt{2}})(\mathbf{1} + e^1))^\dagger = (\frac{1}{\sqrt{2}})(\mathbf{1} + e^1)$$

$$\tau_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})(\mathbf{1} - e^1)$$

$$\tau_2^\dagger = ((\frac{1}{\sqrt{2}})(\mathbf{1} - e^1))^\dagger = (\frac{1}{\sqrt{2}})(\mathbf{1} - e^1)$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} \gamma(e^1)_{11} &= (\tau_1, e^1 \tau_1) \\ &= Tr(\tau_1^\dagger e^1 \tau_1) \\ &= Tr((\frac{1}{\sqrt{2}})(\mathbf{1} + e^1) e^1 (\frac{1}{\sqrt{2}})(\mathbf{1} + e^1)) \\ &= Tr(\frac{1}{2}(2e^1 + 2)) \\ &= Tr((1 + e^1)) \\ &= Tr(\mathbf{1} + e^1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma(e^1)_{12} &= (\tau_1, e^1 \tau_2) \\ &= Tr(\tau_1^\dagger e^1 \tau_2) \\ &= Tr((\frac{1}{\sqrt{2}})(\mathbf{1} + e^1) e^1 (\frac{1}{\sqrt{2}})(\mathbf{1} - e^1)) \\ &= Tr(\frac{1}{2}(e^1 - 1 + 1 - e^1)) \\ &= Tr(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{21} &= (\tau_2, e^1 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\tau_2^\dagger e^1 \tau_1) \\
&= \text{Tr}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} - e^1)e^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} + e^1)\right) \\
&= \text{Tr}\left(\frac{1}{2}(e^1 + 1 - 1 - e^1)\right) \\
&= \text{Tr}(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{22} &= (\tau_2, e^1 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\tau_2^\dagger e^1 \tau_2) \\
&= \text{Tr}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} - e^1)e^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} - e^1)\right) \\
&= \text{Tr}\left(\frac{1}{2}(e^1 - 1 - 1 + e^1)\right) \\
&= \text{Tr}\left(\frac{1}{2}(2e^1 - 2)\right) \\
&= \text{Tr}(\mathbf{1}(e^1 - 1)) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Buna göre $(p, q) = (1, 0)$ için

$$\begin{aligned}
\gamma_{(1,0)} : \quad \mathbb{C}l(1, 0) &\rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \\
e^1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$(p, q) = (0, 1)$ için $t = \mathbf{1}$ olmak üzere

$$\tau_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} - ie^1)$$

$$\tau_1^\dagger = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} - ie^1)\right)^\dagger = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} - ie^1)$$

$$\tau_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} + ie^1)$$

$$\tau_2^\dagger = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} + ie^1)\right)^\dagger = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} + ie^1)$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{11} &= (\tau_1, e^1 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\tau_1^\dagger e^1 \tau_1) \\
&= \text{Tr}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} - ie^1)e^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} - ie^1)\right) \\
&= \text{Tr}\left(\frac{1}{2}(2e^1 + 2i)\right) \\
&= \text{Tr}(\mathbf{1}(e^1 + i)) \\
&= \text{Tr}(e^1 + i) \\
&= i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{12} &= (\tau_1, e^1 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\tau_1^\dagger e^1 \tau_2) \\
&= \text{Tr}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} - ie^1)e^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} + ie^1)\right) \\
&= \text{Tr}\left(\frac{1}{2}(e^1 - i + i - e^1)\right) \\
&= \text{Tr}(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{21} &= (\tau_2, e^1 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\tau_2^\dagger e^1 \tau_1) \\
&= \text{Tr}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} + ie^1)e^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} - ie^1)\right) \\
&= \text{Tr}\left(\frac{1}{2}(e^1 + i - i - e^1)\right) \\
&= \text{Tr}(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{22} &= (\tau_2, e^1 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\tau_2^\dagger e^1 \tau_2) \\
&= \text{Tr}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} + ie^1)e^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\mathbf{1} + ie^1)\right) \\
&= \text{Tr}\left(\frac{1}{2}(e^1 - i - i - e^1)\right) \\
&= \text{Tr}(\mathbf{1}(-i)) \\
&= \text{Tr}(-i) \\
&= -i
\end{aligned}$$

Buna göre $(p, q) = (0, 1)$ için

$$\begin{aligned}\gamma_{(0,1)} : \quad \mathbb{C}l(0,1) &\rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \\ e^1 &\mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$n = 2$ olsun. Bu durumda $(p, q) = (2, 0)$, $(p, q) = (1, 1)$ ve $(p, q) = (0, 2)$ olma durumları sözkonusudur. $(p, q) = (2, 0)$ ve $(p, q) = (1, 1)$ için Hermityen idempotent elemanı $t = 1/2(\mathbf{1} + e^1)$ iken $(p, q) = (0, 2)$ için Hermityen idempotent elemanı $t = 1/2(\mathbf{1} + ie^1)$ dir. $I(t)$ sol idealinin tabanı da Teorem (8.2) den dolayı $\tau_1 = \sqrt{2}t$, $\tau_2 = \sqrt{2}e^2t$ olur.

Buna göre $(p, q) = (2, 0)$ için $t = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + e^1)$ olmak üzere

$$\tau_1 = \sqrt{2}t$$

$$\tau_1^\dagger = (\sqrt{2}t)^\dagger = \sqrt{2}t$$

$$\tau_2 = \sqrt{2}e^2t$$

$$\tau_2^\dagger = (\sqrt{2}e^2t)^\dagger = \sqrt{2}te^2$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}\gamma(e^1)_{11} &= (\tau_1, e^1\tau_1) \\ &= \text{Tr}(\tau_1^\dagger e^1\tau_1) \\ &= \text{Tr}(\sqrt{2}te^1\sqrt{2}t) \\ &= \text{Tr}(2t^2e^1) \\ &= \text{Tr}(2te^1) \\ &= \text{Tr}(2 \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{1} + e^1)e^1) \\ &= \text{Tr}((e^1 + \mathbf{1})) \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{12} &= (\tau_1, e^1 \tau_2) \\
&= Tr(\tau_1^\dagger e^1 \tau_2) \\
&= Tr(\sqrt{2} t e^1 \sqrt{2} e^2 t) \\
&= Tr(2 t^2 e^1 e^2) \\
&= Tr(2 t e^1 e^2) \\
&= Tr(2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + e^1) e^1 e^2) \\
&= Tr(e^1 e^2 + e^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{21} &= (\tau_2, e^1 \tau_1) \\
&= Tr(\tau_2^\dagger e^1 \tau_1) \\
&= Tr(\sqrt{2} t e^2 e^1 \sqrt{2} t) \\
&= Tr(2 t^2 e^2 e^1) \\
&= Tr(2 t e^2 e^1) \\
&= Tr(2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + e^1) e^2 e^1) \\
&= Tr(e^2 e^1 - e^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{22} &= (\tau_2, e^1 \tau_2) \\
&= Tr(\tau_2^\dagger e^1 \tau_2) \\
&= Tr(\sqrt{2} t e^2 e^1 \sqrt{2} e^2 t) \\
&= Tr(2 t^2 e^2 e^1 e^2) \\
&= Tr(-2 t e^1) \\
&= Tr(-2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + e^1) e^1) \\
&= Tr(-e^1 - \mathbf{1}) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Buna göre

$$\begin{aligned}
\gamma_{(2,0)} : \quad \mathbb{C}l(2,0) &\rightarrow Mat(2, \mathbb{C}) \\
e^1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$$\begin{aligned}
\gamma(e^2)_{11} &= (\tau_1, e^2 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\tau_1^\dagger e^2 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\sqrt{2} t e^2 \sqrt{2} t) \\
&= \text{Tr}(2 t^2 e^2) \\
&= \text{Tr}(2 t e^2) \\
&= \text{Tr}(2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + e^1) e^2) \\
&= \text{Tr}(e^2 + e^1 e^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^2)_{12} &= (\tau_1, e^2 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\tau_1^\dagger e^2 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\sqrt{2} t e^2 \sqrt{2} e^2 t) \\
&= \text{Tr}(2 t^2 \mathbf{1}) \\
&= \text{Tr}(2 t \mathbf{1}) \\
&= \text{Tr}(2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + e^1) \mathbf{1}) \\
&= \text{Tr}(\mathbf{1} + e^1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^2)_{21} &= (\tau_2, e^2 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\tau_2^\dagger e^2 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\sqrt{2} t e^2 e^2 \sqrt{2} t) \\
&= \text{Tr}(2 t^2 \mathbf{1}) \\
&= \text{Tr}(2 t \mathbf{1}) \\
&= \text{Tr}(2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + e^1) \mathbf{1}) \\
&= \text{Tr}(\mathbf{1} + e^1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^2)_{22} &= (\tau_2, e^2 \tau_2) \\
&= Tr(\tau_2^\dagger e^2 \tau_2) \\
&= Tr(\sqrt{2} t e^2 e^2 \sqrt{2} e^2 t) \\
&= Tr(2 t^2 e^2) \\
&= Tr(2 t e^2) \\
&= Tr(2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + e^1) e^2) \\
&= Tr(e^2 + e^1 e^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Buna göre

$$\begin{aligned}
\gamma_{(2,0)} : \quad \mathbb{Cl}(2,0) &\rightarrow Mat(2, \mathbb{C}) \\
e^2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$(p, q) = (1, 1)$ için $t = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + e^1)$ olmak üzere

$$\tau_1 = \sqrt{2} \cdot \mathbf{1} t$$

$$\tau_1^\dagger = (\sqrt{2} \cdot \mathbf{1} t)^\dagger = \sqrt{2} t$$

$$\tau_2 = (\sqrt{2} e^2 t)$$

$$\tau_2^\dagger = (\sqrt{2} e^2 t)^\dagger = -\sqrt{2} t e^2$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{11} &= (\tau_1, e^1 \tau_1) \\
&= Tr(\tau_1^\dagger e^1 \tau_1) \\
&= Tr(\sqrt{2} t e^1 \sqrt{2} t) \\
&= Tr(2 t^2 e^1) \\
&= Tr(2 t e^1) \\
&= Tr(2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + e^1) e^1) \\
&= Tr((e^1 + \mathbf{1})) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{12} &= (\tau_1, e^1 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\tau_1^\dagger e^1 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\sqrt{2} t e^1 \sqrt{2} e^2 t) \\
&= \text{Tr}(2 t^2 e^1 e^2) \\
&= \text{Tr}(2 t e^1 e^2) \\
&= \text{Tr}(2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + e^1) e^1 e^2) \\
&= \text{Tr}(e^1 e^2 + e^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{21} &= (\tau_2, e^1 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\tau_2^\dagger e^1 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(-\sqrt{2} t e^2 e^1 \sqrt{2} t) \\
&= \text{Tr}(-2 t^2 e^2 e^1) \\
&= \text{Tr}(-2 t e^2 e^1) \\
&= \text{Tr}(-2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + e^1) e^2 e^1) \\
&= \text{Tr}(-e^2 e^1 + e^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{22} &= (\tau_2, e^1 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\tau_2^\dagger e^1 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(-\sqrt{2} t e^2 e^1 \sqrt{2} e^2 t) \\
&= \text{Tr}(-2 t^2 e^2 e^1 e^2) \\
&= \text{Tr}(-2 t e^1) \\
&= \text{Tr}(-2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + e^1) e^1) \\
&= \text{Tr}(-e^1 - \mathbf{1}) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Buna göre

$$\begin{aligned}
\gamma_{(1,1)} : \quad \mathbb{C}l(1,1) &\rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \\
e^1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$$\begin{aligned}
\gamma(e^2)_{11} &= (\tau_1, e^2 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\tau_1^\dagger e^2 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\sqrt{2} t e^2 \sqrt{2} t) \\
&= \text{Tr}(2 t^2 e^2) \\
&= \text{Tr}(2 t e^2) \\
&= \text{Tr}(2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + e^1) e^2) \\
&= \text{Tr}(e^2 + e^1 e^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^2)_{12} &= (\tau_1, e^2 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\tau_1^\dagger e^2 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\sqrt{2} t e^2 \sqrt{2} e^2 t) \\
&= \text{Tr}(-2 t^2 \mathbf{1}) \\
&= \text{Tr}(-2 t \mathbf{1}) \\
&= \text{Tr}(-2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + e^1) \mathbf{1}) \\
&= \text{Tr}(-\mathbf{1} - e^1) \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^2)_{21} &= (\tau_2, e^2 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\tau_2^\dagger e^2 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(-\sqrt{2} t e^2 e^2 \sqrt{2} t) \\
&= \text{Tr}(2 t^2 \mathbf{1}) \\
&= \text{Tr}(2 t \mathbf{1}) \\
&= \text{Tr}(2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + e^1) \mathbf{1}) \\
&= \text{Tr}(\mathbf{1} + e^1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^2)_{22} &= (\tau_2, e^2 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\tau_2^\dagger e^2 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(-\sqrt{2} t e^2 e^2 \sqrt{2} e^2 t) \\
&= \text{Tr}(2 t^2 e^2) \\
&= \text{Tr}(2 t e^2) \\
&= \text{Tr}\left(2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + e^1) e^2\right) \\
&= \text{Tr}(e^2 + e^1 e^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{(1,1)} : \quad \mathbb{C}l(1,1) &\rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \\
e^2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$(p, q) = (0, 2)$ için $t = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + ie^1)$ olmak üzere

$$\tau_1 = \sqrt{2} \cdot \mathbf{1} t$$

$$\tau_1^\dagger = (\sqrt{2} \cdot \mathbf{1} t)^\dagger = \sqrt{2} t$$

$$\tau_2 = (\sqrt{2} e^2 t)$$

$$\tau_2^\dagger = (\sqrt{2} e^2 t)^\dagger = -\sqrt{2} t e^2$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{11} &= (\tau_1, e^1 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\tau_1^\dagger e^1 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\sqrt{2} t e^1 \sqrt{2} t) \\
&= \text{Tr}(2 t^2 e^1) \\
&= \text{Tr}(2 t e^1) \\
&= \text{Tr}\left(2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + ie^1) e^1\right) \\
&= \text{Tr}((e^1 - i)) \\
&= -i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{12} &= (\tau_1, e^1 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\tau_1^\dagger e^1 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\sqrt{2} t e^1 \sqrt{2} e^2 t) \\
&= \text{Tr}(2 t^2 e^1 e^2) \\
&= \text{Tr}(2 t e^1 e^2) \\
&= \text{Tr}\left(2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + i e^1) e^1 e^2\right) \\
&= \text{Tr}(e^1 e^2 - i e^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{21} &= (\tau_2, e^1 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\tau_2^\dagger e^1 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(-\sqrt{2} t e^2 e^1 \sqrt{2} t) \\
&= \text{Tr}(-2 t^2 e^2 e^1) \\
&= \text{Tr}(-2 t e^2 e^1) \\
&= \text{Tr}\left(-2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + i e^1) e^2 e^1\right) \\
&= \text{Tr}(-e^2 e^1 - i e^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^1)_{22} &= (\tau_2, e^1 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\tau_2^\dagger e^1 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(-\sqrt{2} t e^2 e^1 \sqrt{2} e^2 t) \\
&= \text{Tr}(-2 t^2 e^2 e^1 e^2) \\
&= \text{Tr}(-2 t e^1) \\
&= \text{Tr}\left(-2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + i e^1) e^1\right) \\
&= \text{Tr}(-e^1 + i) \\
&= i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{(0,2)} : \quad \mathbb{C}l(0,2) &\rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \\
e^1 &\mapsto \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$$\begin{aligned}
\gamma(e^2)_{11} &= (\tau_1, e^2 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\tau_1^\dagger e^2 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\sqrt{2} t e^2 \sqrt{2} t) \\
&= \text{Tr}(2 t^2 e^2) \\
&= \text{Tr}(2 t e^2) \\
&= \text{Tr}(2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + i e^1) e^2) \\
&= \text{Tr}(e^2 + i e^1 e^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^2)_{12} &= (\tau_1, e^2 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\tau_1^\dagger e^2 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\sqrt{2} t e^2 \sqrt{2} e^2 t) \\
&= \text{Tr}(-2 t^2 \mathbf{1}) \\
&= \text{Tr}(-2 t) \\
&= \text{Tr}(-2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + i e^1) \mathbf{1}) \\
&= \text{Tr}(-\mathbf{1} - e^1) \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^2)_{21} &= (\tau_2, e^2 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(\tau_2^\dagger e^2 \tau_1) \\
&= \text{Tr}(-\sqrt{2} t e^2 e^2 \sqrt{2} t) \\
&= \text{Tr}(2 t^2 \mathbf{1}) \\
&= \text{Tr}(2 t \mathbf{1}) \\
&= \text{Tr}(2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + e^1)) \\
&= \text{Tr}(\mathbf{1} + e^1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e^2)_{22} &= (\tau_2, e^2 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(\tau_2^\dagger e^2 \tau_2) \\
&= \text{Tr}(-\sqrt{2} t e^2 e^2 \sqrt{2} e^2 t) \\
&= \text{Tr}(2 t^2 e^2) \\
&= \text{Tr}(2 t e^2) \\
&= \text{Tr}(2 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{1} + i e^1) e^2) \\
&= \text{Tr}(e^2 + i e^1 e^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{(0,2)} : \quad \mathbb{Cl}(0,2) &\rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \\
e^2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$n = 3$ olsun. Bu durumda $(p, q) = (3, 0), (p, q) = (2, 1), (p, q) = (1, 2), (p, q) = (0, 3)$ olma durumları söz konusudur. $(p, q) = (3, 0), (p, q) = (2, 1), (p, q) = (1, 2)$ için $t = 1/2(\mathbf{1} + e^1)$ ve $(p, q) = (0, 3)$ için $t = 1/2(\mathbf{1} + i e^1)$ dir.

$(p, q) = (3, 0)$ için $\tau_1 = (\mathbf{1} - i e^{23})t, \tau_2 = (e^2 - i e^3)t, \tau_3 = (e^2 + i e^3)t, \tau_4 = (\mathbf{1} + i e^{23})t$

$$\begin{aligned}
\gamma_{(3,0)} : \quad \mathbb{Cl}(3,0) &\rightarrow \text{Mat}(4, \mathbb{C}) \\
e^1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
e^2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
e^3 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$(p, q) = (2, 1)$ için $\tau_1 = (\mathbf{1} + e^{23})t, \tau_2 = (e^2 + e^3)t, \tau_3 = (e^2 - e^3)t, \tau_4 = (\mathbf{1} - e^{23})t$

$$\begin{aligned}
\gamma_{(2,1)} : \quad \mathbb{Cl}(2,1) &\rightarrow \text{Mat}(4, \mathbb{C}) \\
e^1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
e^2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
e^3 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$(p, q) = (1, 2) \text{ için } \tau_1 = (\mathbf{1} - ie^{23})t, \tau_2 = (e^2 + ie^3)t, \tau_3 = (e^2 - ie^3)t, \tau_4 = (\mathbf{1} + ie^{23})t$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{(1,2)} : \quad \mathbb{Cl}(1,2) &\rightarrow \text{Mat}(4, \mathbb{C}) \\
e^1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
e^2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
e^3 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$(p, q) = (0, 3) \text{ için } \tau_1 = (\mathbf{1} - ie^{23})t, \tau_2 = (e^2 + ie^3)t, \tau_3 = (e^2 - ie^3)t, \tau_4 = (\mathbf{1} + ie^{23})t,$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{(0,3)} : \quad \mathbb{Cl}(0,3) &\rightarrow \text{Mat}(4, \mathbb{C}) \\
e^1 &\mapsto \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \\
e^2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
e^3 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$n = 4$ olsun. (p, q) nun $(4, 0), (1, 3), (3, 1)$ olması durumunda Hermityen idempotent $t = 1/2(\mathbf{1} + e^1)1/2(\mathbf{1} + ie^{23})$ olur. $(p, q) = (2, 2)$ iken Hermityen idempotent $t = 1/2(\mathbf{1} + e^1)1/2(\mathbf{1} + e^{23})$ olur. $(p, q) = (0, 4)$ iken Hermityen idempotent $t = 1/2(\mathbf{1} + ie^1)1/2(\mathbf{1} + ie^{23})$ olur. $I(t)$ sol idealinin tabanı Teorem(8.2) den dolayı

$\tau_1 = 2t$, $\tau_2 = 2e^{24}t$ $\tau_3 = 2e^2t$ $\tau_4 = 2e^4t$ şeklinde olur.

$(p, q) = (4, 0)$ için

$$\begin{aligned}
\gamma_{(4,0)} : \quad \mathbb{Cl}(4,0) &\rightarrow \text{Mat}(4, \mathbb{C}) \\
e^1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
e^2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
e^3 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
e^4 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$(p, q) = (3, 1)$ için

$$\begin{aligned}
\gamma_{(3,1)} : \quad \mathbb{Cl}(3,1) &\rightarrow \text{Mat}(4, \mathbb{C}) \\
e^1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
e^2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
e^3 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
e^4 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$(p, q) = (2, 2)$ için

$$\begin{aligned}
\gamma_{(2,2)} : \quad \mathbb{Cl}(2,2) &\rightarrow \text{Mat}(4, \mathbb{C}) \\
e^1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
e^2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
e^3 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
e^4 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$(p, q) = (1, 3)$ için

$$\begin{aligned}
\gamma_{(1,3)} : \quad \mathbb{Cl}(1,3) &\rightarrow \text{Mat}(4, \mathbb{C}) \\
e^1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
e^2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
e^3 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
e^4 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$(p, q) = (0, 4)$ için

$$\begin{aligned}
\gamma_{(1,3)} : \quad \mathbb{Cl}(1,3) &\rightarrow \text{Mat}(4, \mathbb{C}) \\
e^1 &\mapsto \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \\
e^2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
e^3 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
e^4 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$n = 5$ için $(p, q) = (5, 0), (p, q) = (4, 1), (p, q) = (3, 2), (p, q) = (2, 3), (p, q) = (1, 4), (p, q) = (0, 5)$ olur. $(p, q) = (5, 0), (p, q) = (4, 1), (p, q) = (3, 2), (p, q) = (1, 4)$ için $t = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + e^1)\frac{1}{2}(\mathbf{1} + ie^{23})$ dir. $(p, q) = (2, 3)$ için $t = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + e^1)\frac{1}{2}(\mathbf{1} + e^{23})$ dir. $(p, q) = (0, 5)$ için $t = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + ie^1)\frac{1}{2}(\mathbf{1} + ie^{23})$ olur. (8.2) teoremine göre $\tau_1 = 2 \cdot \mathbf{1}t$, $\tau_2 = 2e^2t$, $\tau_3 = 2e^4t$, $\tau_4 = 2e^5t$, $\tau_5 = 2e^2e^4t$, $\tau_6 = 2e^2e^5t$, $\tau_7 = 2e^4e^5t$, $\tau_8 = 2e^{245}t$ elde edilir.

$n = 6$ için $(p, q) = (0, 6), (p, q) = (1, 5), (p, q) = (2, 4), (p, q) = (3, 3), (p, q) = (4, 2), (p, q) = (5, 1), (p, q) = (6, 0)$ olur. $(p, q) = (0, 6)$ için $t = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + ie^1)\frac{1}{2}(\mathbf{1} + ie^{23})\frac{1}{2}(\mathbf{1} + ie^{45})$ olur. $(p, q) = (1, 5), (p, q) = (3, 3), (p, q) = (5, 1), (p, q) = (6, 0)$ için $t = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + e^1)\frac{1}{2}(\mathbf{1} + ie^{23})\frac{1}{2}(\mathbf{1} + ie^{45})$ olur. $(p, q) = (2, 4)$ için $t = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + e^1)\frac{1}{2}(\mathbf{1} + e^{23})\frac{1}{2}(\mathbf{1} + ie^{45})$ olur. $(p, q) = (4, 2)$ için $t = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + e^1)\frac{1}{2}(\mathbf{1} + ie^{23})\frac{1}{2}(\mathbf{1} + e^{45})$ olur. (8.2) teoremine göre $\tau_1 = 2\sqrt{2} \cdot \mathbf{1}t$, $\tau_2 = 2\sqrt{2}e^2t$, $\tau_3 = 2\sqrt{2}e^4t$, $\tau_4 = 2\sqrt{2}e^6t$, $\tau_5 = 2\sqrt{2}e^{24}t$, $\tau_6 = 2\sqrt{2}e^{26}t$, $\tau_7 = 2\sqrt{2}e^{46}t$, $\tau_8 = 2\sqrt{2}e^{246}t$ olur.

$n = 5$ ve $n = 6$ için matrisler düşük boyutlardaki gibi benzer şekilde hesaplanır.

9. Clifford Cebirlerinin Üniter Grupları

Bu bölümde kompleks Clifford cebirleri üzerinde üniter grubu tanımlayıp bazı özelliklerini irdedeceğiz.

Tanım 9.1. *Kompleks Clifford cebirleri üzerinde tanımlanan*

$$U\mathbb{Cl}(p, q) = \{U \in \mathbb{Cl}(p, q) : U^\dagger U = \mathbf{1}\}$$

kümesine kompleks Clifford cebirlerinin Üniter grubu denir. Bu küme Clifford çarpımına göre kapalıdır ve bir gruptur.

Şimdi bu kümenin bir grup olduğunu görelim. $U_1, U_2 \in U\mathbb{Cl}(p, q)$ olsun. O zaman $U_1^\dagger U_1 = \mathbf{1}$ ve $U_2^\dagger U_2 = \mathbf{1}$ 'dir. Kapalılık özelliğini gösterebilmek için $U_1 U_2 \in U\mathbb{Cl}(p, q)$ olduğunu göstermeliyiz, yani $(U_1 U_2)^\dagger U_1 U_2 = \mathbf{1}$ eşitliğinin gerçekleştiğini göstermeliyiz. $(U_1 U_2)^\dagger = U_2^\dagger U_1^\dagger$ olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned} (U_1 U_2)^\dagger U_1 U_2 &= (U_2^\dagger U_1^\dagger) U_1 U_2 \\ &= U_2^\dagger (U_1^\dagger U_1) U_2 \\ &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

olup kapalılık özelliği vardır. Kompleks Clifford cebiri birleşmeli cebir olduğundan bu grupta birleşme özelliği sağlanır. Kompleks Clifford cebirinin birim elemanı aynı zamanda bu grubun da birim elemanıdır. Çünkü, $\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^\dagger = \mathbf{1}$ dir. $U \in U\mathbb{Cl}(p, q)$ olsun. Şimdi de $U^{-1} \in U\mathbb{Cl}(p, q)$ olduğunu gösterelim yani, $(U^{-1})^\dagger U^{-1} = \mathbf{1}$ eşitliğini gösterelim. $U \in U\mathbb{Cl}(p, q)$ olduğundan $U^\dagger = U^{-1}$ olur. O halde

$$\begin{aligned} (U^{-1})^\dagger U^{-1} &= (U^\dagger)^\dagger U^\dagger \\ &= U U^\dagger \\ &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

olup her elemanın tersi vardır.

Örnek 9.2. $U\mathbb{Cl}(1, 0) = \{U \in \mathbb{Cl}(1, 0) : U^\dagger U = \mathbf{1}\}$ olmak üzere

$$U = u_1 \cdot \mathbf{1} + u_2 e^1, \quad U^\dagger = u_1 \cdot \mathbf{1} + u_2 e_1 = u_1 \cdot \mathbf{1} + u_2 e^1$$

şeklindedir. $U^\dagger U = \mathbf{1}$ olacak şekilde $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$ 'yi belirleyelim.

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= (u_1 \cdot \mathbf{1} + u_2 e^1)(u_1 \cdot \mathbf{1} + u_2 e^1) \\ &= u_1^2 \cdot \mathbf{1} + u_1 u_2 e^1 + u_2 u_1 e^1 + u_2^2 \cdot \mathbf{1} \\ &= (u_1^2 + u_2^2) \cdot \mathbf{1} + e^1(2u_1 u_2) = \mathbf{1} \end{aligned}$$

olur. Buna göre $u_1^2 + u_2^2 = \mathbf{1}$ ve $2u_1 u_2 = 0$ elde edilir. Eğer $u_1 = 0$ ise $u_2^2 = \mathbf{1}$ yani $u_2 = \pm \mathbf{1}$ dir ve $u_2 = 0$ ise $u_1^2 = \mathbf{1}$, yani $u_1 = \pm \mathbf{1}$ dir. O halde

$$U\mathbb{C}l(1, 0) = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, e^1, -e^1\}$$

olur.

$t \in \mathbb{C}l(p, q)$ bir Hermityen idempotent, $I(t)$ sol ideal ve τ_k lar $I(t)$ 'nin ortonormal tabanı olsun. Bu taban bize Clifford cebir elemanlarının

$$\gamma : \mathbb{C}l(p, q) \longrightarrow Mat(2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, \mathbb{C})$$

$$\forall U \in \mathbb{C}l(p, q) \text{ için } (\gamma(U))^\dagger = \gamma(U^\dagger)$$

olacak şekilde normal temsilini verir.(Teorem 8.2)

$U \in U\mathbb{C}l(p, q)$ olsun. O zaman $\gamma(U) \in Mat(2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, \mathbb{C})$ olur. Buradan

$$U\tau_k = \gamma(U)_{lk}\tau_l \quad (9.1)$$

elde ederiz.

$U^\dagger U = \mathbf{1}$ ve $\gamma(U)^\dagger = \gamma(U^\dagger)$ özelliklerinden $\gamma(U)^\dagger \gamma(U) = I$, I birim matrisinin boyutu $2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ 'dir. Bunun anlamı $\gamma(U)$ bir üniter matristir.

$n = p + q$ çift iken (9.1) eşitliğinden

$$U\mathbb{C}l(p, q) \sim U(2^{\frac{n}{2}})$$

olup burada $U(2^{\frac{n}{2}})$, $2^{\frac{n}{2}}$ boyutlu üniter matristir.

$n = p + q$ tek iken (9.1) eşitliğinden

$$U\mathbb{C}l(p, q) \sim U(2^{\frac{n-1}{2}}) \oplus U(2^{\frac{n-1}{2}})$$

olup burada $U(2^{\frac{n-1}{2}}) \oplus U(2^{\frac{n-1}{2}})$ kümesi $W, V \in U(2^{\frac{n-1}{2}})$ için $diag(W, V)$ şeklindeki blok-diagonal matristir. $U \in U\mathbb{Cl}(p, q)$ elemanının yardımı ile $I(t)$ 'nin yeni ortonormal tabanını aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned}
\tau'_k &= U\tau_k \\
&= \sum_{l=1}^d \gamma(U)_{lk} \tau_l \\
(\tau'_k, \tau'_l) &= Tr((\tau'_k)^\dagger \tau'_l) \\
&= Tr((U\tau_k)^\dagger (U\tau_l)) \\
&= Tr((\tau_k^\dagger U^\dagger) U \tau_l) \\
&= Tr(\tau_k^\dagger \tau_l) \\
&= (\tau_k, \tau_l) = \delta_{kl}
\end{aligned}$$

Bu τ'_k tabanı $\dot{\gamma} : \mathbb{Cl}(p, q) \longrightarrow Mat(2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, \mathbb{C})$ şeklinde yeni bir matris temsili verir öyle ki

$$V\tau'_k = \dot{\gamma}(V)_{lk} \tau'_l$$

olur. $\gamma(V)$ ve $\dot{\gamma}(V)$ temsilleri arasında

$$\dot{\gamma}(V) = \gamma(U)^{-1} \gamma(V) \gamma(U)$$

şeklinde bir eşitlik vardır. Şimdi bu eşitliği gösterelim.

$$\begin{aligned}
V\check{\tau}_k &= \sum_{l=1}^d \check{\gamma}(V)_{lk} \check{\tau}_l \\
V \left(\sum_{l=1}^d \gamma(U)_{lk} \tau_l \right) &= \sum_{l=1}^d \check{\gamma}(V)_{lk} \left(\sum_{a=1}^d \gamma(U)_{al} \tau_a \right) \\
\sum_{l=1}^d \gamma(U)_{lk} (V \tau_l) &= \sum_{l,a=1}^d (\check{\gamma}(V)_{lk} \gamma(U)_{al}) \tau_a \\
\sum_{l,a=1}^d \gamma(U)_{lk} (\gamma(V)_{al} \tau_a) &= \sum_{l,a=1}^d (\check{\gamma}(V)_{lk} \gamma(U)_{al}) \tau_a \\
\gamma(U)_{lk} \gamma(V)_{al} &= \check{\gamma}(V)_{lk} \gamma(U)_{al} \\
\gamma(V)_{al} \gamma(U)_{lk} &= \gamma(U)_{al} \check{\gamma}(V)_{lk} \\
(\gamma(V) \gamma(U))_{ak} &= (\gamma(U) \check{\gamma}(V))_{ak} \\
\gamma(V) \gamma(U) &= \gamma(U) \check{\gamma}(V) \\
\gamma(U)^{-1} (\gamma(V) \gamma(U)) &= \gamma(U)^{-1} (\gamma(U) \check{\gamma}(V)) \\
\gamma(U)^{-1} \gamma(V) \gamma(U) &= \check{\gamma}(V)
\end{aligned}$$

Şimdi de $\check{\gamma}(V^\dagger) = \check{\gamma}(V)^\dagger$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
\check{\gamma}(V) &= \gamma(U)^{-1} \gamma(V) \gamma(U) \\
\check{\gamma}(V^\dagger) &= \gamma(U)^{-1} \gamma(V^\dagger) \gamma(U) \\
&= \gamma(U)^{-1} \gamma(V)^\dagger \gamma(U) \\
&= [\gamma(U)^\dagger \gamma(V) (\gamma(U)^{-1})^\dagger]^\dagger \\
&= [\gamma(U)^\dagger \gamma(V) (\gamma(U^\dagger))^{-1}]^\dagger \\
&= [\gamma(U)^{-1} \gamma(V) (\gamma(U^\dagger))^\dagger]^\dagger \\
&= [\gamma(U)^{-1} \gamma(V) \gamma(U)]^\dagger \\
&= \check{\gamma}(V)^\dagger
\end{aligned}$$

$I(t)$ sol idealinin τ_k ortonormal tabanını $I(UtU^{-1})$ sol idealinin $\check{\tau}_k = \tau_k U^{-1}$ ortonormal tabanı ile değiştirirsek $V \longrightarrow \check{\gamma}(V)$ matris temsilini elde ederiz. Bu durumda

$$V \check{\tau}_k = V \tau_k U^{-1} = \gamma(V)_{lk} \tau_l U^{-1}$$

aynı zamanda

$$V\check{\tau}_k = \check{\gamma}(V)_{lk}\check{\tau}_l = \check{\gamma}(V)_{lk}\tau_l U^{-1}$$

olur. Bu eşitliklerin sol tarafları eşit olduğundan sağ taraftakiler de eşit olmalıdır.

Buradan

$$\check{\gamma}(V) = \gamma(V)$$

elde edilir.

Son olarak eğer $I(t)$ sol idealinin τ_k ortonormal tabanını $I(UtU^{-1})$ sol idealinin $\hat{\tau}_k = U\tau_k U^{-1}$ ortonormal tabanı ile yer değiştirirsek $\hat{\gamma} : V \longrightarrow \hat{\gamma}(V)$ matris temsilini elde ederiz öyle ki $\hat{\gamma}$ ile γ temsilleri arasında

$$\hat{\gamma}(V) = \gamma(U^{-1})\gamma(V)\gamma(U)$$

ilişkisi vardır. Eğer ilk matris temsili $\gamma : \mathbb{Cl}(p, q) \longrightarrow Mat(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \mathbb{C})$ normal temsil ise o zaman $\acute{\gamma}, \check{\gamma}, \hat{\gamma}$ matris temsilleri de normaldir.

10. Kompleks Clifford Cebirlerinin Determinantı

$\mathbb{F}$ cismi reel veya kompleks sayılar üzerinde olmak üzere d boyutlu $Mat(d, \mathbb{F})$ matris cebirini alalım. $U \in Mat(d, \mathbb{F})$ matrisinin terslenebilir olduğunu söyleyebilmek için $U^{-1} \in Mat(d, \mathbb{F})$ vardır ve öyle ki $UU^{-1} = U^{-1}U = I$, I $d \times d$ 'lik birim matristir. Eğer $P - \lambda I$ matrisi terslenemez ise $\lambda \in \mathbb{F}$ 'ye $P \in Mat(d, \mathbb{F})$ matrisinin öz-değeri denir. Bir U matrisinin bütün özdeğerlerinin kümesine bu matrisin spektrumu denir.

Tanım 10.1. $U \in \mathbb{Cl}(p, q)$ ve $det, Mat(d, \mathbb{C})$ matris cebirindeki elemanların determinantı olmak üzere

$$Det : \mathbb{Cl}(p, q) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad Det(U) := det(\gamma(U))$$

şeklinde tanımlanan $Det(U)$ sayısına U 'nun determinantı denir.

Det fonksiyonunun iyi tanımlı olduğunu yani $\mathbb{Cl}(p, q)$ Clifford cebirinin matris temsillerine bağlı olmadığını göstereceğiz. Bunun için öncelikle aşağıdaki Teoremi ispatlayacağız.

Teorem 10.2. $\gamma, \text{Cl}(p, q)$ Clifford cebirinin bir temsili olmak üzere

$$\det(\gamma(\hat{U})) = \det(\gamma(U))$$

dur.

Kanıt. n çift boyutlu Clifford cebirleri için

$$\hat{U} = (e^{1\dots n})^{-1} U e^{1\dots n}$$

dir. Bu durumda

$$\det(\gamma(\hat{U})) = \det(\gamma((e^{1\dots n})^{-1} U e^{1\dots n})) = \det(\gamma(e^{1\dots n})^{-1}) \det(\gamma(U)) \det(\gamma(e^{1\dots n})) = \det(\gamma(U))$$

elde edilir.

n tek iken tekrarlı temsil metodundan

$$e^a \longrightarrow \begin{pmatrix} \gamma^a & 0 \\ 0 & -\gamma^a \end{pmatrix}, \quad a=1, \dots, n$$

olur. Rankı 2 olan elemanlar için de

$$e^{ab} \longrightarrow \begin{pmatrix} \gamma^a \gamma^b & 0 \\ 0 & \gamma^a \gamma^b \end{pmatrix}, \quad a=1, \dots, n$$

şeklindedir. $U = U_{\text{çift}} + U_{\text{tek}}$ elemanını çift ve tek kısımlarına ayırırsak $U_{\text{çift}}$ kısmı özdeş blok matrisler şekline ve U_{tek} , zıt işaretli blok matrisler şekline dönüşür.

$$U_{\text{çift}} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad U_{\text{tek}} \longrightarrow \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}$$

Bu nedenle

$$U \longrightarrow \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{pmatrix}, \quad \hat{U} = U_{\text{çift}} - U_{\text{tek}} \longrightarrow \begin{pmatrix} A-B & 0 \\ 0 & A+B \end{pmatrix}$$

ve

$$\det(U) = (A-B)(A+B) = \det(\hat{U})$$

□

Teorem 10.3. $\det$ fonksiyonu iyi tanımlıdır. Yani $\det$ fonksiyonu Clifford cebirinin temsiline bağlı değildir. [14]

Kanıt. γ , (3.2) de verilen $\mathbb{C}l(p, q)$ Clifford cebirinin tekrarlı temsili ve γ' , $\mathbb{C}l(p, q)$ Clifford cebirinin herhangi bir temsili olsun.

$$\gamma(U) = U|_{e^a \rightarrow \gamma^a}$$

$$\gamma'(U) = U|_{e^a \rightarrow \beta^a}$$

olmak üzere n çift boyutlu iken Pauli teoreminden bir T matrisi vardır öyle ki

$$\gamma'(U) = T^{-1}\gamma(U)T$$

olur. Bu durumda

$$\det(\gamma'(U)) = \det(T^{-1}\gamma(U)T) = \det(T^{-1})\det(\gamma(U))\det(T) = \det(\gamma(U))$$

elde edilir. n tek iken yine Pauli teoreminden

$$\gamma'(U) = T^{-1}\gamma(\hat{U})T$$

$\det(\gamma(U^\wedge)) = \det(\gamma(U))$ 'dan

$$\det(\gamma'(U)) = \det(T^{-1}\gamma(\hat{U})T) = \det(\gamma(\hat{U})) = \det(\gamma(U))$$

elde edilir. □

Teorem 10.4. Her $U, V \in \mathbb{C}l(p, q)$ Clifford cebir elemanlarının determinant özellikleri aşağıdaki gibidir:

- $\text{Det}(UV) = \text{Det}(U)\text{Det}(V)$
- $\text{Det}(\alpha U) = \alpha^{2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \text{Det}(U) \quad \alpha \in \mathbb{C}$
- $U \in \mathbb{C}l^{\mathbb{F}}(p, q)$ olmak üzere terslenebilirdir ancak ve ancak $\text{Det}U \neq 0$
- $U \in \mathbb{C}l^{\mathbb{F}}(p, q)$ terslenebilir bir eleman ise $\text{Det}(U^{-1}) = (\text{Det}(U))^{-1}$ [11]

Kaynaklar

- [1] Chisolm, E. (2012). Geometric algebra. arXiv preprint arXiv:1205.5935.
- [2] Clifford, W. K. 1878 Amer. J. Math, 1, 350.
- [3] Friedrich, T. (2000). Dirac operators in Riemannian geometry (Vol. 25). American Mathematical Soc..
- [4] Hestenes, D., & Sobczyk, G. (2012). Clifford algebra to geometric calculus: a unified language for mathematics and physics (Vol. 5). Springer Science & Business Media.
- [5] Karapazar, Ş. (2004). Reel Clifford cebirlerinin temsilleri, Yüksek Lisans Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [6] Lounesto, P. (2001). Clifford algebras and spinors (Vol. 286). Cambridge university press.
- [7] Marchuk, N. G. (1998). Dirac γ -equation, classical gauge fields and Clifford algebra. Advances in applied Clifford algebras, 8(1), 181-225.
- [8] Marchuk, N. G. (2001). Dirac-type tensor equations. Nuovo Cimento. B, 116(11), 1225-1248.
- [9] Marchuk, N. (2002). A concept of Dirac-type tensor equations. arXiv preprint math-ph/0212006.
- [10] Marchuk, N. (2011). Generalized exterior algebras. arXiv preprint arXiv:1103.5313.
- [11] Marchuk, N. G., Martynova, S. E. (2003). Notions of determinant, spectrum, and Hermitian conjugation of Clifford algebra elements. arXiv preprint math-ph/0307043.
- [12] Marchuk, N.G., Shirokov, D. S. (2008). Unitary spaces on Clifford algebras. Advances in Applied Clifford Algebras, 18(2), 237-254.

- [13] Miller, R. A. (2013). Geometric Algebra: An Introduction with Applications in Euclidean and Conformal Geometry.
- [14] Shirokov, D. (2011). Concepts of trace, determinant and inverse of Clifford algebra elements. arXiv preprint arXiv:1108.5447.
- [15] Shirokov, D. (2018). Clifford algebras and their applications to Lie groups and spinors. In Proceedings of the Nineteenth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization (pp. 11-53). Institute of Biophysics and Biomedical Engineering, Bulgarian Academy of Sciences.
- [16] Snugg, J. (1997). Clifford algebra: a computational tool for physicists. Oxford University Press on Demand.
- [17] Shirokov, D. Introduction to the theory of Clifford algebras.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Esra PARLAK
Yabancı Dil : İngilizce
Doğum Yeri ve Yılı : MALATYA-1991
E-Posta : esra4491@hotmail.com

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- Lisans : İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği, 2009-2013.
- 2014- , Öğretmen, Milli Eğitim Bakanlığı