

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
EKONOMETRİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

ÇOK AMAÇLI OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNE
ÇEKİCİLİK FONKSİYONU YAKLAŞIMI

Gökçe BAYSAL

Danışman
Prof.Dr. İpek DEVECİ KOCAKOÇ

İZMİR - 2015

YEMİN METNİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Çok Amaçlı Optimizasyon Problemlerine Çekicilik Fonksiyonu Yaklaşımı” adlı çalışmanın, tarafımdan, akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

..../..../.....

Gökçe BAYSAL

ÖZET

Doktora Tezi

Çok Amaçlı Optimizasyon Problemlerine Çekicilik Fonksiyonu Yaklaşımı

Gökçe BAYSAL

Dokuz Eylül Üniversitesi

Sosyal Bilimler Enstitüsü

Ekonometri Anabilim Dalı

Ekonometri Programı

Gerçek hayatta karşılaşılan karar verme problemleri, genellikle çok sayıda amacın aynı anda çözülmesini gerektirmektedir. Bu durum çok amaçlı optimizasyonun kapsamında incelenmektedir. Çok amaçlı optimizasyonun çözüm yöntemlerinin ulaştığı Pareto-optimal küme olarak isimlendirilen optimum çözüm kümesi, bir tek çözüm noktası yerine problemin verilen aralıktaki tüm en iyi çözümlerini içermektedir. Günümüzde evrimsel algoritmaların çözüm yöntemlerine dahil edilmesiyle ulaşılan Pareto-optimal çözüm kümesi, karar vericiye problemin uygun çözüm noktalarının çok büyük bir kümesini sunmaktadır. Bu durum karar verici için kararın doğru ve hassas bir şekilde alınmasını sağlarken, aynı zamanda bu yüksek hacimli kümeden seçilecek doğru noktanın belirlenmesi problemini de beraberinde getirmektedir.

Bu çalışmanın amacı, bu seçim probleminde karar vericiye yardımcı olacak bir yöntem önermektir. Bu çalışmada, istatistikte çoklu cevap yüzeyi analizinde kullanılan çekicilik fonksiyonunun, çok amaçlı optimizasyon problemlerine uyarlanmasıyla elde edilen yeni bir çözüm yaklaşımı önerilmektedir. Bu yeni yöntem, öncelikle çok amaçlı optimizasyon literatüründen seçilen test fonksiyonlarının ve gerçek uygulama problemlerinin evrimsel algoritmalarla çözümünden elde edilen Pareto-optimal kümeler içinden uygun noktanın seçilmesi amacıyla kullanılmıştır. Gerek test problemleri, gerekse gerçek problemlerden elde edilen sonuçlar göstermiştir ki, önerilen uyarlanmış-çekicilik fonksiyonu, problemlerin çok amaçlı evrimsel optimizasyon çözümüyle hesaplanan Pareto-optimal kümesi içinden uygun bir

noktanın bulunmasını sağlamıştır. Özellikle bu yöntemle, kısıt denklemlerini içeren gerçek uygulama problemlerinde, Pareto-optimal küme sınırları içinde, ancak evrimsel algoritmali çözümün ulaşamadığı daha iyi çözüm noktasına ulaşılabilmiştir. Uyarlanmış-çekicilik fonksiyonu olarak adlandırılabilir bu yeni yöntem, evrimsel algoritmali çok amaçlı optimizasyon yöntemlerine alternatif değil, bu yöntemlerle birlikte kullanılarak karar vericiye, karar sürecinde destek sağlaması amacıyla önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Çok Amaçlı Optimizasyon, Çekicilik Fonksiyonu, Evrimsel Algoritmalar

ABSTRACT
Doctoral Thesis
Doctor of Philosophy(PhD)
Desirability Function Approach to Multiobjective Optimization Problems
Gökçe BAYSAL

Dokuz Eylül University
Graduate School of Social Sciences
Department of Econometrics
Econometrics Program

Decision problems in real world applications, generally require simultaneous solutions of a number of objectives. Multi-objective optimization is related to this kind of problems. Optimum solution set, so-called Pareto-optimal set, which is found by multi-objective optimization methods, consists of a set of the best solutions in a given domain instead of only one solution point. Recently, multiobjective evolutionary optimization methods, developed by using evolution strategies in biology and multiobjective optimization algorithms together, make a significant contribution on Pareto-optimal solution set of the problem. Whereas these solution methods provide a hypervolume-set allowing decision makers to have a correct and proper choice, at the same time they cause a selection problem of determining the best point as a solution in this set.

The aim of the thesis is to recommend a method supporting decision maker on this selection problem. A new solution approach, found by desirability functions used in multi-response surface analysis in statistics, is adapted to multiobjective optimization problems. This new method, adapted-desirability function method, is applied on hypervolume Pareto-optimal sets of test functions and real world problems in literature. Results show that adapted-desirability function provides help in selecting an optimum point in Pareto-optimal set. Especially, this method reaches a better solution point than that of Pareto-optimal set in constrained case. The adapted-desirability function is suggested as a method to be used together with multiobjective optimization by

evolutionary algorithms as a support for decision makers instead of an alternative method to it.

Keywords: Multiobjective Optimization, Desirability Function, Evolutionary Algorithms

ÇOK AMAÇLI OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNE ÇEKİCİLİK FONKSİYONU YAKLAŞIMI

İÇİNDEKİLER

YEMİN METNİ	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TABLolar LİSTESİ	xii
ŞEKİLLER LİSTESİ	xiii
EKLER LİSTESİ	xv
GİRİŞ	1

BİRİNCİ BÖLÜM

ÇOK AMAÇLI OPTİMİZASYON

1.1. ÇOK AMAÇLI OPTİMİZASYONUN TARİHSEL GELİŞİMİ	4
1.2. PARETO OPTİMALLIĞI KAVRAMI VE SIRALAMA İLİŞKİLERİ	7
1.2.1. Uygun (Proper) Koni ve Genelleştirilmiş Eşitsizlikler	8
1.2.1.1. Uygun Koniler	8
1.2.1.2. Genelleştirilmiş Eşitsizlikler	9
1.2.1.3. Minimum ve Minimal Elemanlar	11
1.2.2. Pareto Optimallığı	12
1.2.3. Zayıf Pareto Optimallığı	16
1.2.4. Uygun (Proper) Pareto-Optimallığı	17
1.2.5. Pareto-optimal Kümenin Sınırları	17
1.2.5.1. İdeal Amaç Vektörü	17
1.2.5.2. Aşağı (Nadir) Amaç Vektörü	18
1.2.5.3. Amaç Fonksiyonlarının Normalizasyonu	20
1.3. KARAR SÜRECİ	21
1.3.1. Değer Fonksiyonu	22
1.3.2. Çözümler Arasındaki İlişkiler	23

1.3.2.1. Takaslar	23
1.3.2.2. İkamenin Marjinal Oranı	25
1.3.3. Pareto Optimal Geometri	27

İKİNCİ BÖLÜM

ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

2.1. ÇOK AMAÇLI OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNİN SINIFLANDIRILMASI	30
2.1.1 Tercihsiz Yöntemler	31
2.1.2. A Posteriori Yöntemler	31
2.1.3. A Priori Yöntemler	33
2.1.4. A Posteriori ve A Priori Yöntemlerin Ortak Özellikleri	34
2.1.5. İnteraktif Yöntemler	35
2.2. ÇOK AMAÇLI OPTİMİZASYON VE EVRİMSEL ALGORİTMALAR	37
2.2.1. Evrimsel Algoritmalar	38
2.2.1.1. Evrimsel Algoritmaların Temel Prensipleri	39
2.2.1.2. Evrimsel Algoritmaların Unsurları ve Kavramlar	39
2.2.2. Çok Amaçlı Evrimsel Optimizasyon	42
2.2.2.1. Çok Amaçlı Evrimsel Optimizasyon Yöntemleri	43
2.2.2.2. Önceki Çalışmalar	43
2.2.3. NSGA II	44
2.2.3.1. Kalabalık Turnuva Seçim Operatörü	47
2.2.3.2. Kalabalık Uzaklığı	47
2.2.3.3. NSGA II'nin Avantaj ve Dezavantajları	49
2.3. ÇEKİCİLİK FONKSİYONU	50
2.3.1. Çekicilik Fonksiyonunun Teorik Yapısı	51
2.3.2. Önceki Çalışmalar	53
2.4. ÖNERİLEN YÖNTEM	55

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

UYGULAMA

3.1. TEST PROBLEMLERİ	59
3.1.1. Çok Amaçlı Kısıtsız Optimizasyon Test Problemleri	60
3.1.2. Çok Amaçlı Kısıtlı Optimizasyon Test Problemleri	66
3.2. ÇÖZÜM YÖNTEMİ	69
3.3. GERÇEK UYGULAMA PROBLEMLERİ	81
3.3.1. Şanzıman Tasarım Problemi	82
3.3.1.1. Eşit Ağırlıklı Çözüm Senaryosu	83
3.3.1.2. Ağırlıklandırılmış Çözüm Senaryosu	86
3.3.2. Su Kaynak Planlaması Problemi	87
3.3.2.1. Eşit Ağırlıklı Çözüm Senaryosu	89
3.3.2.2. Ağırlıklandırılmış Çözüm Senaryosu	101
SONUÇ VE ÖNERİLER	102
KAYNAKÇA	110
EK	

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1.1: $\Re^P$ üzerinde bazı sıralamalar	11
Tablo 1.2: Sonuç tablosu ve ideal nokta	20
Tablo 3.1: Çok Amaçlı Kısıtsız Optimizasyon Test Problemleri	64
Tablo 3.2: Çok Amaçlı Kısıtlı Test Problemleri	68
Tablo 3.3: Kısıtsız Test Problemlerinin Çekicilik fonksiyonu çözümleri	72
Tablo 3.4: Kısıtlı Test Problemlerinin Çekicilik fonksiyonu çözümleri ve Pareto-optimal kümelerindeki yakın noktalar	73
Tablo 3.5: Şanzıman tasarım probleminin Çekicilik fonksiyonu çözümü minimum noktası ve karşılık gelen Pareto-optimal noktalar	85
Tablo 3.6: Birinci amaç fonksiyonunun ağırlıklandırıldığı Çekicilik fonksiyonu sonucu ve yakın Pareto-optimal noktalarla karşılaştırılması	87
Tablo 3.7: Su kaynak planlaması probleminin Çekicilik fonksiyonu çözümü minimum noktası ve karşılık gelen Pareto-optimal noktalar	90
Tablo 3.8: Birinci amaç fonksiyonunun ağırlıklandırıldığı Çekicilik fonksiyonu sonucu ve Pareto-optimal noktalarla karşılaştırılması	101

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1: Minimum ve minimal eleman	12
Şekil 1.2: İki amaç fonksiyonunun dört farklı kombinasyonu için, Pareto-optimal çözüm alanları	14
Şekil 1.3: S ve Z kümeleri ve Pareto-optimal amaç vektörleri	15
Şekil 1.4: Yerel ve global Pareto-optimal çözümler	16
Şekil 1.5: Zayıf Pareto optimal vektörler	16
Şekil 1.6: İdeal (z^*) ve nadir (aşağı) (z^{nad}) amaç vektörleri	19
Şekil 1.7: Nadir amaç vektörü uygunluk durumu	19
Şekil 1.8: Final çözüm	26
Şekil 1.9: Dejenere bir problemten alınan üç farklı en üstün (nondominated) yüz	28
Şekil 1.10: Örnek Pareto-optimal geometriler	29
Şekil 2.1: Konveks olmayan amaç uzayında Ağırlıklı toplam yaklaşımı.	33
Şekil 2.2: Birey uzayı, karar uzayı ve amaç uzayı arasındaki ilişki	40
Şekil 2.3: NSGA II prosedürünün şeması	45
Şekil 2.4: Kalabalık uzaklığının hesaplanması	49
Şekil 2.5: Cevap yüzeyi modellerindeki eşanlı optimizasyon için bireysel çekicilik fonksiyonları	52
Şekil 3.1: Çok Amaçlı Kısıtsız Optimizasyon test problemleri için Pareto-optimal Sınır, Karar Değişkenleri Grafikleri ve Çekicilik Fonksiyonu çözümü karşılaştırması	76
Şekil 3.2: Çok Amaçlı Kısıtlı Optimizasyon problemleri için Pareto-optimal sınır grafikleri ve Karar Değişkenleri Grafikleri, Çekicilik Fonksiyonu çözümünden elde edilen minimum noktalar	79
Şekil 3.3: Hız azaltıcı	82
Şekil 3.4: Şanzıman tasarım probleminin Pareto-optimal yüz grafiği ve Çekicilik fonksiyonu çözümünün karşılaştırılması	86
Şekil 3.5: Karar değişkenleri grafiği	91
Şekil 3.6: Birinci ve ikinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	91
Şekil 3.7: Birinci ve üçüncü amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	91

Şekil 3.8: Birinci ve dördüncü amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	92
Şekil 3.9: Birinci ve beşinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	93
Şekil 3.10: İkinci ve üçüncü amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	93
Şekil 3.11: İkinci ve dördüncü amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	94
Şekil 3.12: İkinci ve beşinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	94
Şekil 3.13: Üçüncü ve dördüncü amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	95
Şekil 3.14: Üçüncü ve beşinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	95
Şekil 3.15: Dördüncü ve beşinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	96
Şekil 3.16: Birinci, ikinci ve üçüncü amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	96
Şekil 3.17: Birinci, üçüncü ve dördüncü amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	97
Şekil 3.18: Birinci, ikinci ve dördüncü amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	97
Şekil 3.19: Birinci, ikinci ve beşinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	98
Şekil 3.20: Birinci, üçüncü ve beşinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	98
Şekil 3.21: Birinci, dördüncü ve beşinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	99
Şekil 3.22: Üçüncü, dördüncü ve beşinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	99
Şekil 3.23: Toplam maliyet ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası	100

EKLER LİSTESİ

EK 1: GENEL NOTASYON

GİRİŞ

Karar verme süreci, yönetim problemlerinin önemli bir aşamasıdır. Gerçek hayat problemlerinin doğası gereği, çoğu zaman birden fazla amacın aynı anda optimize edilmesi beklenmektedir. Amaçlar, bir ürünün üretimindeki hammadde, üretim, ulaştırma maliyetlerinin minimizasyonu olabileceği gibi, özellikle tarasım problemlerinde bir ürünün istenen ölçülerde üretilmesi için malzemenin ve parçaların ölçü ve ağırlıklarının optimizasyonu ile ilgili olabilir. Birden fazla amaç fonksiyonunun aynı anda ve birlikte incelenmesi Çok Amaçlı Optimizasyonun konusudur.

Çok amaçlı optimizasyon problemleri için, ortaya çıkışından günümüze kadar, çok çeşitli çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Başlangıçta tüm amaç fonksiyonlarını tek amaç fonksiyonu haline getiren dönüşümler yapılmış, ancak bu durumun problemin çözümünde bilgi kaybına yol açmasıyla Pareto optimum kavramına dayanan çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Pareto-optimum, problemin tüm amaç fonksiyonlarının birlikte çözümüyle elde edilen en iyi çözüm noktalarının oluşturduğu küme olarak özetlenebilir. Bu noktaların hiçbirisi diğerinden daha iyi değildir. Bu durumda, uygulanan çözüm yönteminin, problemin mümkün olan en geniş ve verilen aralıktaki en yoğun Pareto-optimal çözüm kümesine ulaşması, çözüm için verilecek kararın hassasiyeti için önemlidir. Böylece, karar verici karar olasılıklarının büyük bir kümesine sahip olacaktır. Literatürde yapılan çalışmaların geldiği noktada, istenen bu özelliklere sahip Pareto-optimal kümeyi sağlayan çözüm yönteminin evrimsel algoritmaları içeren çok amaçlı optimizasyon yöntemleri olduğu bulunmuştur.

Evrimsel algoritmalar, biyolojideki evrim stratejileri temel alınarak oluşturulan algoritmalar ve çok amaçlı optimizasyon yöntemleri ile birlikte kullanımından çok amaçlı evrimsel algoritmalar oluşturulmuştur. Evrimsel algoritmaların yapısında bulunan çaprazlama, mutasyon ve yeniden üretme operatörleri, hem yüksek-hacimli Pareto-optimal çözüm kümelerine, hem de bu kümeler içinde diğer yöntemlerle bulunamayan, yeni ve çeşitli çözüm noktalarına ulaşılmasını sağlamaktadır. Bu durum karar verici için bir avantaj iken, örneğin 500

ya da daha fazla çözüm noktası içeren Pareto-optimal küme içinden karar verilecek doğru noktanın bulunması, yeni bir problemi ortaya çıkarmıştır.

Bu çalışmanın kapsamında, Pareto-optimal küme içinden seçilecek uygun noktanın belirlenmesi için kullanılabilecek bir yöntem önerilmesi amaçlanmıştır. Bu bağlamda, istatistik bilimindeki çoklu cevap yüzeyi analiz yöntemlerinden çekicilik fonksiyonunun, çok amaçlı optimizasyon problemlerine uyarlanması, dikkate değer sonuçlar sunmuştur. Önerilen bu yeni yöntem öncelikle, çok amaçlı optimizasyon literatüründeki test problemlerinin çözümlerinde ve ardından yine aynı literatürdeki gerçek uygulama problemlerinin çözümünde kullanılarak, uygunluğu incelenecektir. Elde edilen sonuçlar yorumlanacak ve önerilen yöntemin avantaj ve dezavantajları araştırılacaktır.

Çalışmanın devamında, birinci bölümde çok amaçlı optimizasyon ve Pareto-optimalliği kavramları üzerinde durulacaktır. İkinci bölümde, çok amaçlı optimizasyonda ve bu çalışmada kullanılan çözüm yöntemleri tanıtılacaktır. Bunun için öncelikle çok amaçlı optimizasyon ve çok amaçlı evrimsel optimizasyon yöntemlerinin özellikleri ve problemlerin çözümünde Pareto-optimal kümeyi elde etmek için seçilen yöntem anlatılacaktır. Ardından, çekicilik fonksiyonu ve çok amaçlı optimizasyon problemleri için uyarlanan çekicilik fonksiyonu, önerilen yöntem olarak incelenecektir. Üçüncü bölümde, test problemleri için ilk önce Pareto-optimal kümeler oluşturulacak, sonrasında önerilen yöntem bu optimum kümelerden seçilecek uygun noktanın belirlenmesi amacıyla uygulanacaktır. Test problemlerinin çözümünde etkin sonuçlar elde edilmesi durumunda, gerçek uygulama problemlerinin çözümünde aynı süreç işleyecek ve sonuçlar bulunacaktır. Sonuç ve öneriler bölümünde, tüm sonuçlar yorumlanacak ve önerilen yöntemin çok amaçlı optimizasyon problemlerinin çözümüne sağladığı katkı araştırılacaktır.

BİRİNCİ BÖLÜM

ÇOK AMAÇLI OPTİMİZASYON

Optimizasyon, işletme, yönetim ve mühendislik uygulamalarının çoğunda önemli ve gerekli bir süreçtir. Mühendislikte, özellikle tasarım problemlerinde, sosyal bilimlerde oyun teorisi, refah teorisi, ekonomik denge teorisi, üretim teorisi, takım teorisi ve matematiksel ekonominin diğer alt dallarında kullanılmaktadır. Teorik yapının büyük bölümü bu uygulamaların dışında gelişmiştir (Stadler, 1979:15). Gerçek hayat problemlerinin çok büyük bölümünde çoklu ve genellikle çatışan amaç fonksiyonları vardır ve bu fonksiyonların aynı anda sağlanması gerekir. Optimizasyonun bu türü çok amaçlı optimizasyon olarak adlandırılmaktadır.

Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde, birden fazla amaç fonksiyonu, varsa kısıtlar ve değişken sınırları da dikkate alınarak, birlikte çözülür. Bu çözümü gerçekleştirebilmek için kullanılan çok amaçlı optimizasyon yöntemleri iki kategori içinde incelenmektedir: Sayısallaştırma yaklaşımı ve Pareto yaklaşımı (De Weck, 2004:5). İki farklı yaklaşım olsa da nihai amaç, tasarımcılar ya da karar vericiler için alternatifler içinden optimal bir kümenin oluşturulmasıdır.

Sayısallaştırma yaklaşımında, amaç fonksiyonları çeşitli dönüşümler kullanılarak tek amaç fonksiyonu içinde birleştirilir. Amaç fonksiyonlarının bir araya getirilmesi sırasında, tercihlerin ya da ağırlıkların önceden belirlenmesi gerekir. Çok sayıdaki amaç fonksiyonunu tek amaç fonksiyonlu yapıya dönüştürmek bazı dezavantajları da beraberinde getirir. Ağırlıkların belirlenmesi için problemin bir ön bilgisine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu ön bilgiye göre, amaç fonksiyonları nispi önem seviyelerinde sıralanırlar. Bazı dönüşümlerde bir tek amaç fonksiyonu en önemli olarak belirlenip, diğerleri kısıt fonksiyonu haline getirilebilir. Bu durum, amaç fonksiyonları üzerinde bir sınırlama oluşturmaktadır (Ngatchou ve diğerleri, 2005:84). Amaç fonksiyonlarının tek amaç fonksiyonunda birleştirilmesi, çözümde bir tek sonuç bulunmasına yol açar. Çok amaçlı yapıyı böyle tek sonuca indirgemek, bilgi kaybına neden olmaktadır. Arama uzayı konveks değilse, çözüme ulaşamayabilir. Bu konu sonraki bölümde açıklanacaktır. Sayısallaştırma yöntemleri içinde, Ağırlıklı Toplam Yöntemi, Uzlaşık Programlama, Çok-nitelikli

Fayda Analizi, Hedef Programlama, Sözlüksel (Lexicographic) Yaklaşımlar, Kabul edilebilirlik Fonksiyonları, Bulanık Mantık en çok bilinenleridir.

Pareto yaklaşımında ise tek çözüm noktası bulmak yerine optimal çözümlerin bir kümesi elde edilir. Optimal çözümler, tüm çözüm kümesi içindeki üstün çözümlerdir ve Pareto sınır adı verilen bölgede oluşurlar. Üstün ve üstün olmayan çözümler arasındaki farkı açıklamak için baskınlık kavramı kullanılır. Tasarımcı veya karar verici açısından en çok tercih edilen çözüm, Pareto sınırdaki yer alan Pareto-optimal küme içinden seçilir. Pareto yöntemleri içinde, Pareto Filtreleme, Normal Sınır Kesişimi, Çok Amaçlı Genetik Algoritmalar ve Çok Amaçlı Benzetimli Tavlama yöntemleri sayılabilir. Çok Amaçlı Optimizasyon problemlerinin çözümünde evrimsel algoritmalar ve diğer meta-sezgisel yöntemlerin kullanımı gün geçtikçe artmaktadır.

Konunun devamında, öncelikle çok amaçlı optimizasyonun tarihsel gelişimi incelenecektir. Ardından, bu çalışmada kullanılan yaklaşım olan Pareto kavramı ve Pareto optimalliği üzerinde durulacaktır.

1.1. ÇOK AMAÇLI OPTİMİZASYONUN TARİHSEL GELİŞİMİ

Çok amaçlı optimizasyonun farklı disiplinlerde uygulanması, her bir ayrı daldaki literatürde ayrı gelişmeler göstermesine neden olmuştur. Çalışmaların yoğunlaştığı alanlar olarak, ekonomi, oyun teorisi, vektör optimizasyonu, mühendislik-tasarım ve tedarik zinciri yönetimi gibi başlıca alanlardaki tarihsel gelişimi incelenmiştir.

Çok amaçlı optimizasyon, Pareto kavramıyla başlar. Fayda teorisini bulan kişiler olarak tanınan Jevons, Merger ve Walras'ın bu teorisi üzerine yaptıkları çalışmaların 1870'lerin ekonomi teorisinde yer bulması sonrasında Pareto kavramı ortaya çıkmıştır (Stigler, 1950:315). Faydanın ölçülebilirliği kavramı Menger tarafından tanımlanmışken, Walras faydanın yoğunluk ölçüsünün bir biriminin varlığını varsaymış ve daha sonra faydayı mutlak bir büyüklük olarak ele almıştır. Jevons, faydanın ölçülemez olduğunu savunmuştur (Stigler, 1950: 317) . Ayrıca faydanın öznel olduğu için kıyaslanamayacağını savunmuştur. Bu üç ismin bir fayda fonksiyonu varsayımı yapmasının ardından, Edgeworth genel fayda fonksiyonunu

tanımlamış ve optimizasyonda da kullanılan kontür çizgilerinin veya farksızlık eğrilerinin mevcut olduğunu varsaymıştır. Farksızlık eğrileri terimi Pareto tarafından bulunmuştur (Stadler, 1979:16-17).

Bu gelişmelerin ardından Edgeworth çok kriterli ekonomik karar verme için optimum kavramını ilk kez tanımlamıştır. P ve π olarak belirlenen iki varsayımsal tüketici kriteri bağlamında çoklu-fayda problemi için; *"Öyle bir (x,y) noktası bulunmalıdır ki, herhangi bir yönde sonsuz küçük bir adım attığımızda, P ve π birlikte artmayacak, fakat biri artarken diğeri azalacaktır"* tanımını yapmıştır (Stadler, 1988:1). Diğer taraftan Pareto, Pareto optimum tanımını; *"Bir toplumun kaynaklarının optimum bölüşümüne, diğerlerinin tahminleri önceki durumda kalırken en az bir bireyin kendi tahmininden daha iyisini yapması mümkün olduğu sürece ulaşamaz"* cümlesiyle yapmıştır. Pareto optimalliğinin yanı sıra Edgeworth-Pareto optimalliği terimi de aynı zamanda kullanılır. Bunun yerine, literatürde; etkinlik, baskın olmama ve aşağı olmama gibi farklı kullanımlar da mevcuttur (Stadler, 1988:2).

Bu çalışmaların ışığında, sosyal bilimlerde optimizasyonun önemli bir çalışması olarak Neumann 1943 yılında, Oyun Teorisi üzerinde optimizasyonu uygulayan temel teoremini sunmuştur. İki-oyunculu, sıfır-toplamlı, karma-stratejili ve beklentinin ödeme fonksiyonu olduğu oyunun bir minimaks çözümü olduğu sonucuna varmıştır (Leonard, 1995:734). Literatürde 1952 yılına kadar minimaks teoremleri Kuhn tarafından oluşturulmuş (Dantzig, 1956: 25) ve vektör ödemeli matris oyunları için minimaks teoremi genelleştirilmiştir (Blackwell, 1956:2). İki oyunculu oyunlar üzerindeki çoklu stratejiler, çok amaçlı optimizasyonun kullanımını ve bu alanda da gelişmesini sağlamıştır.

İlk kez "etkin nokta" kavramı 1951 yılında Koopmans'ın üretim teorisinde tanımlanmıştır. Bu çalışmayla çok amaçlı optimizasyon olarak tanımlanan etkinlik ve vektör maksimum problemleri de ilk kez incelenmeye başlanmıştır. Koopmans etkinliği; *"Koordinatlarının birindeki (bir ürünün net çıktısındaki) bir artış, yalnızca bazı diğer koordinattaki (ürünün net çıktısındaki) bir azalışın maliyetinde gerçekleştirildiğinde, mal uzayındaki bu mümkün nokta etkindir denir"* ifadesiyle tanımlamıştır (Stadler, 1979:34-35).

Pareto'nun çalışmalarının 1971'de İngilizce'ye tercüme edilmesiyle çok amaçlı yöntemlerin gelişimi Uygulamalı Matematik ve Mühendislik alanlarına uzanmıştır (De Weck, 2004:4-5). Bu alanlardaki gelişimin kendini göstermesi, özellikle Stadler, Steuer ve çok sayıda kişinin katkısıyla, Birleşik Devletlerde mümkün olmuştur (Dyer ve diğerleri, 1992:651). Stadler, çok amaçlı optimizasyon veya Vektör Maksimum Problemlerinin tanımı, teorik yapısı ve uygulama alanları hakkında 1776-1960 yılları arasındaki gelişmeleri detaylı şekilde incelediği makalesiyle ve Steuer, çok amaçlı optimizasyonun teorik yapısını, çözüm yöntemlerini ve uygulamaları içeren kitabıyla literatüre Uygulamalı Matematik ve Mühendislik alanlarındaki ilk çalışmalar olarak önemli katkılarda bulunmuşlardır. 1985 yılında, Sawaragi ve diğerleri, çok amaçlı optimizasyonun teorik yapısıyla ilgili diğer bir önemli çalışmayı literatüre kazandırmıştır. Bu gelişmeler ışığında, son otuz yılda Mühendislik ve Tasarım alanında çok amaçlı optimizasyon uygulamaları istikrarlı bir gelişme göstermektedir.

Yönetim problemlerinde çok amaçlı optimizasyonun kullanımı, özellikle Tedarik Zinciri yönetiminde dikkat çekecek düzeydedir. Tesislerden, tedarikçilerden, müşterilerden, ürünlerden ve envanter kontrol yöntemlerinden, satın alım ve dağıtımdan oluşan bir bütün olarak tanımlanabilen Tedarik Zincirinde (Sabri ve Beamon, 2000:581), özellikle son yıllarda Tedarik Zinciri Ağ tasarım problemleri üzerine uygulanmasının önemi artmıştır (Thomas ve Griffin, 1996:2). Tedarik zinciri ağının bütünleştirildiği odak noktasının, genellikle minimum maliyet ya da maksimum kar olan bir tek amaç üzerinde toplandığı geleneksel Tedarik Zinciri yönetiminin aksine, son yıllarda problemin yapısındaki çok sayıda amacı birlikte değerlendirmeye olanak sağlayan çok amaçlı optimizasyonun kullanımı ile daha doğru ve etkin sonuçlara ulaşılmıştır. Jayaraman ve Pirkul (2001:397), Jayaraman ve Ross (2003:632), Yan, Yu ve Cheng (2003:2139), Syam (2002:1179), Syarif, Yun ve Gen (2002:302), Amiri (2006:569), Gen ve Syarif (2005:801) ve Truong ve Azadivar (2005:2225) çalışmalarında tedarik zincirinin toplam maliyetini, amaç fonksiyonu olarak düşünmüşlerdir. Tedarik Zinciri Yönetimindeki ağ tasarım probleminin yanında çizelgeleme problemleri de çok amaçlı optimizasyon problemi olarak ele alınmıştır. Tedarik zinciri sistemi için çok-amaçlı üretim ve dağıtım-çizelgeleme şeması Chen ve diğerleri (2003:1884) tarafından formüle edilmiştir. Bu yöntemde,

tüm sistem için kar maksimizasyonuna ek olarak, tüm üyeler arasında adil kar dağıtımı, müşteri servisi seviyeleri ve güven stoğu seviyeleri eş zamanlı olarak hesaba katılmıştır.

Çok sayıda çalışma, belirsizlik durumlarında tedarik zinciri yönetimine adanmıştır. Gupta ve Maranas (2000:1222), Gupta ve diğerleri (2000:2618) belirsiz talebi normal olasılık fonksiyonu yardımıyla birleştirip iki-aşamalı çözüm yapısı önermiştir. Sabri ve Beamon (2000) ürün, teslimat ve talep belirsizlikleri altında stratejik ve operasyonel tedarik zinciri planlaması için bütünlük çok-amaçlı tedarik zinciri modeli geliştirmişlerdir. Maliyet, dolum oranları ve esneklik amaçlar olarak ele alınırken, ϵ -kısıt yöntemi çözüm metodolojisi olarak kullanılmıştır. Tsiakis ve diğerleri (2001:3594) talep belirsizliklerini tanımlamak için senaryo planlama yaklaşımını kullanmışlardır. Burada, sıfır-olmayan olasılıkların atandığı bir çok talep senaryosu kesikli stokastik talep miktarları olarak kullanılmaktadır. Tüm senaryolar eş zamanlı bir şekilde tedarik zinciri ağ tasarımı içinde ele alınmaktadır.

Çok Amaçlı Optimizasyonun çok farklı alanlara uyarlanabilen yapısı sayesinde kullanımı her geçen gün artmaktadır. Yıllar içerisinde uygulamalarda karşılaşılan problemlerin karmaşıklığının artmasıyla, klasik yöntemlerden uzaklaşmıştır. Bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle, Evrimsel Algoritmaların Çok Amaçlı Optimizasyona uyarlanması, problemlerin çözümünde elde edilen Pareto-optimal kümelerin daha hassas ve doğru hesaplanmasına olanak sağlamıştır. İkinci bölümde Evrimsel Algoritmali Çok Amaçlı Optimizasyon Yöntemleri açıklanacaktır.

1.2. PARETO OPTİMALİĞİ KAVRAMI VE SIRALAMA İLİŞKİLERİ

Çok amaçlı optimizasyon probleminin içerdiği amaç fonksiyonlarının birlikte çözümünden Pareto-optimal küme elde edilebilmesi için, öncelikle amaç fonksiyonları arasında bir ilişki olduğu varsayılmaktadır. Bu ilişki, amaç fonksiyonlarının ikili karşılaştırmasını içerir. Pareto-optimal küme, amaç fonksiyonlarının birlikte çözümünden elde edilen çözüm noktalarının üstünlük ilişkisi içinde karşılaştırılmasıyla oluşturulur. Üstün ya da baskın olma (domine etme) olarak tanımlanabilen bu karşılaştırma sonucu elde edilen en iyi ve birbirine üstün gelemeyen noktalar, Pareto-optimal kümeyi oluşturur.

Pareto optimalliği kavramını açıklamak için, literatürde uygun çözüm alanını gösterdiği varsayılan özel bir koni tanımlanmakta ve sıralama (karşılaştırma) ilişkileri bu koni yardımıyla açıklanmaktadır. İkili karşılaştırmalar, genelleştirilmiş eşitsizlikler ve minimum-minimal eleman kavramları gibi bazı önemli sonuçları ortaya çıkarmaktadır.

1.2.1. Uygun (Proper) Koni ve Genelleştirilmiş Eşitsizlikler

Küme elemanları arasındaki sıralamaları gösteren genelleştirilmiş eşitsizlikleri oluşturabilmek için koni kavramından yararlanılır. Bu sıralamaların amaçlarından biri, kümenin minimal ve minimum elemanlarının bulunmasıdır. Aşağıda bu konular ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

1.2.1.1. Uygun Koniler

Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir koniye $K \subseteq \mathbb{R}^p$ uygun koni denir (Boyd and Vandenberghe, 2004:43):

- K konvektir.
- K kapalıdır.
- K kesintisizdir, anlamı boş olmayan iç bölgeye sahip olmasıdır.
- K noktalıdır, doğru içermez (veya eşit olarak, $x \in K$, $-x \in K \Rightarrow x = 0$).

Uygun K konisi, $\mathbb{R}^p$ üzerindeki standart sıralama özelliklerinin çoğuna sahip, $\mathbb{R}^p$ üzerindeki bir kısmi sıralama olan genelleştirilmiş eşitsizlikleri tanımlamak için kullanılabilir. Bu, $\mathbb{R}^p$ üzerinde, aşağıdaki ifadeyle tanımlanan kısmi sıralama (veya tercih) olan K konisiyle ilgilidir

$$x \preceq_K y \Leftrightarrow y - x \in K.$$

$y \preceq_K x$ için $x \succeq_K y$ de aynı zamanda geçerlidir. Benzer şekilde, ilgili tam kısmi sıralama aşağıdaki ifadeyle tanımlanır

$$x \prec_K y \Leftrightarrow y - x \in \text{int}K$$

ve $y \prec_K x$ için $x \succ_K y$ de geçerlidir.

$K = \mathfrak{R}_+$ olduğunda, $\mathfrak{R}$ üzerinde kısmi sıralama $\preceq_K$ genel sıralama $\leq$ olur, ve tam kısmi sıralama $\prec_K$, $\mathfrak{R}$ üzerinde genel tam sıralama ile aynıdır $<$, örneğin, negatif olmayan bölge $K = \mathfrak{R}_+^p$ bir uygun konidir (Boyd and Vandenberghe, 2004:43). Koniler çok amaçlı optimizasyonun temel konularından biridir, çünkü koniler $\mathfrak{R}^n$ 'in negatif olmayan elemanlarının kümelerini tanımlar (Boyd and Vandenberghe, 2004:44). $\preceq$ notasyonu "tercih edilir" şeklinde okunabilir.

1.2.1.2. Genelleştirilmiş Eşitsizlikler

Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde, karar vericinin tercih davranışı, optimallik ya da istenirliğin anlamını belirlemede önemli rol oynamaktadır. Bunun için amaç uzayında bir ikili ilişki tanımlanmıştır ve bu ilişki tercih sıralaması olarak isimlendirilmektedir (Sawaragi ve diğerleri, 1985 :25). Tercih sıralaması çeşitleri genelleştirilmiş eşitsizlikler adı altında açıklanmaktadır.

S herhangi bir küme olsun. S üzerinde bir ikili ilişki, $S \times S$ 'nin bir R alt kümesidir. R 'nin bir ön sıra olduğu bu durumda, (S, R) bir ön sıralanmış kümedir. İkili ilişkinin notasyonu $(s^1, s^2) \in R$ veya $s^1 R s^2$ dir. Bunun yerine, $s^1 \preceq s^2$ kısaltma için kullanılabilir, ve aynı zamanda $(s^1, s^2) \notin R$ için $s^1 \not\preceq s^2$ yazılabilir. Bu notasyon R ilişkisini veya $\preceq$ ilişkisini gösterir (Ehrgott, 2005:9).

S üzerindeki bir R ilişkisi şöyle tanımlanır (Ehrgott, 2005:9):

- Tüm $s \in S$ için, $s \preceq s$ ise dönüşlüdür.
- Tüm $s \in S$ için, $s \not\preceq s$ ise dönüşlü değildir.
- Tüm $s^1, s^2 \in S$ için, $s^1 \preceq s^2 \Rightarrow s^2 \preceq s^1$ ise simetriktir.
- Tüm $s^1, s^2 \in S$ için, $s^1 \preceq s^2 \Rightarrow s^2 \not\preceq s^1$ ise asimetriktir.
- Tüm $s^1, s^2 \in S$ için, $s^1 \preceq s^2 \Rightarrow s^2 \preceq s^1 \Rightarrow s^1 = s^2$ ise antisimetriktir.
- Tüm $s^1, s^2, s^3 \in S$ için, $s^1 \preceq s^2$ ve $s^2 \preceq s^3 \Rightarrow s^1 \preceq s^3$ ise geçişlidir.
- Tüm $s^1, s^2, s^3 \in S$ için $s^1 \not\preceq s^2$ ve $s^2 \not\preceq s^3 \Rightarrow s^1 \not\preceq s^3$ ise negatif geçişlidir.
- Tüm $s^1, s^2 \in S$ ($s^1 \neq s^2$ olmak üzere) için, $s^1 \preceq s^2$ veya $s^2 \preceq s^1$ ise bağlıdır.
- Tüm $s^1, s^2 \in S$ için, $s^1 \preceq s^2$ or $s^2 \preceq s^1$ ise tam bağlıdır (veya toplamdır)

Herhangi bir $\preceq$ önsırası verildiğinde, iki sıralama ilişkisi $\preceq$ ile yakından ilgilidir:

$$s^1 \prec s^2 : \Leftrightarrow s^1 \preceq s^2 \text{ ve } s^2 \not\preceq s^1$$

$$s^1 \sim s^2 : \Leftrightarrow s^1 \preceq s^2 \text{ ve } s^2 \preceq s^1$$

Sırasıyla, tam tercih ve eşitlik (veya farksızlık) ilişkisi olarak görülebilen $\prec$ ve $\sim$, önsıra $\preceq$ ile tanımlanan tercihle ilgilidir (Sawaragi ve diğerleri, 1985: 26).

Bir $\preceq$ ikili ilişkisi;

- Dönüşlü, geçişli ve antisimetrik ise, kısmi sıralama,
- Asimetrik ve geçişli (veya, eşit olarak dönüşsüz ve geçişli ise) tam kısmi sıralamadır (Pang, 1978:270).

Sıralama ilişkisi bu şekilde tanımlanırken, çözümler arasındaki baskınlık ilişkisi daha farklı özelliklere sahiptir. Baskınlık ilişkisi için üç olasılık mevcuttur.

1. Çözüm 1, çözüm 2'ye göre baskındır.
2. Çözüm 1, çözüm 2 tarafından baskınlanır.
3. Çözüm 1 ve 2 birbirine göre baskın değildir.

Bu ilişkileri sağlayan baskınlık operatörü:

- Dönüşlü değildir. Hiç bir çözüm kendine baskın olmaz.
- Simetrik değildir. $p \preceq q$, $q \preceq p$ ilişkisini sağlamaz. Fakat, tersi doğrudur. p , q 'yu baskınlarsa; q , p 'yi baskınlamaz. Baskınlık ilişkisi asimetriktir.
- Simetrik olmadığı için, antisimetrik olamaz.
- Geçişlidir. $p \preceq q$, $q \preceq r$ ise, $p \preceq r$ olur. Bir ikili ilişkinin sıralama ilişkisi olabilmesi için, en azından geçişli olması gerekmektedir.

Baskınlık ilişkisinde, p çözümü q çözümüne göre baskın değilse, bu q 'nun p 'ye göre baskın olduğu anlamına gelmez. Baskınlık ilişkisi, yalnızca tam kısmi sıralama ilişkisidir.

$\Re^p$ üzerinde en sık kullanılan kısmi sıralama kavramları aşağıda tanımlanmıştır (Ehrgott, 2005:12):

Tablo 1.1: $\mathfrak{R}^p$ üzerinde bazı sıralamalar

$\mathfrak{R}^p$ üzerinde bazı sıralamalar			
Notasyon	Tanım		İsim
$y^1 \leq y^2$	$y_k^1 \leq y_k^2$	$k = 1, \dots, p$	Zayıf eleman yönlü sıra
$y^1 \leq y^2$	$y_k^1 \leq y_k^2$	$k = 1, \dots, p$;	Eleman yönlü sıra
	$y^1 \neq y^2$		
$y^1 < y^2$	$y_k^1 < y_k^2$	$k = 1, \dots, p$	Tam eleman yönlü sıra
$y^1 \leq_{\text{lex}} y^2$	$y_{k^*}^1 < y_{k^*}^2$ veya $y^1 = y^2$		Lexicografik sıra
$y^1 \leq_{\text{MO}} y^2$	$\max_{k=1, \dots, p} y_k^1 \leq \max_{k=1, \dots, n} y_k^2$		Max-sıra

Kaynak: Ehrgott, 2005:12.

1.2.1.3. Minimum ve Minimal Elemanlar

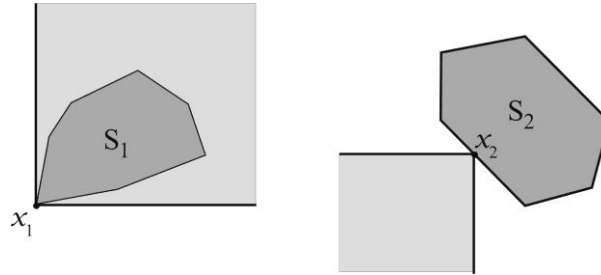
Genelleştirilmiş eşitsizlikler kavramı, $\mathfrak{R}$ üzerindeki sıradan eşitsizliğe benzemesine rağmen, bazı özellikleri bakımından farklıdır. En belirgin fark, $\leq$ doğrusal bir sıralamadır. Bunun anlamı herhangi iki noktanın karşılaştırılabilir olduğudur, $x \leq y$ veya $y \leq x$ olabilir. Bu özellik, genelleştirilmiş eşitsizliklerde mevcut değildir. Minimum ve maksimum gibi kavramlar, genelleştirilmiş eşitsizlikler konusu içinde daha karmaşıktır. Her $y \in S$ için $x \preceq_K y$ ilişkisi mevcutsa, $x \in S$, ($\preceq_K$ genelleştirilmiş eşitsizliğine göre) S'nin minimum elemanıdır. S kümesinin maksimum elemanı, genelleştirilmiş eşitsizliklere göre, benzer şekilde tanımlanır. Bir kümenin minimum (maksimum) elemanı varsa, bu eleman tektir, eşsizdir (Pang, 1978:271). Yalnız ve yalnızca $S \subseteq x + K$ ise $x \in S$ noktası S'nin minimum elemanıdır. Burada $x+K$ ($\preceq_K$ 'ya göre) x ile karşılaştırılabilir ve x'e eşit ya da x'ten büyük tüm noktaları göstermektedir (Boyd and Vandenberghe, 2004:45).

$y \in S, y \preceq_K x$ ise ve yalnızca $y=x$ ise, ($\preceq_K$ genelleştirilmiş eşitsizliğine göre) $x \in S$ S'nin bir minimal elemanıdır. Yalnız ve yalnızca $(x - K) \cap S = \{x\}$ ise, maksimal eleman, $x \in S$ noktasının minimal eleman olmasına benzer şekilde tanımlanır. Burada $x-K$, ($\preceq_K$ 'ya göre) x ile karşılaştırılabilir ve x'e eşit veya x'ten

küçük tüm noktaları gösterir; ortak S içindeki tek nokta x' 'tir. $\Re$ üzerinde genel sıralamanın olduğu $K = \Re_+$ için, minimal ve minimum kavramı aynıdır ve bir kümenin minimum elemanının genel tanımına uyar (Şekil 1.1) (Boyd and Vandenberghe, 2004:45). Minimal noktaların kümesi konvektir (Bot ve diğerleri, 2009:61).

Çok amaçlı optimizasyon problemlerinin çözüm yöntemlerinin çoğu minimum ve minimal elemanların belirlenmesini gerektirir. İkili karşılaştırmalar, çözüm kümesinin sınırlarının belirlenmesini ve uygun çözüm yönteminin seçilmesini sağlar. Bu karşılaştırma ve sıralamaların en önemli sonucu ise Pareto-optimal kümenin belirlenmesidir. Çok amaçlı optimizasyon problemlerinde çözüm, Pareto-optimal küme içinde bulunur. Bu nedenle, problemin çözümü, uygun çözüm alanındaki karşılaştırmaların doğru yapılmasına bağlıdır.

Şekil 1.1: Minimum ve minimal eleman.



Kaynak: Boyd and Vandenberghe, 2004:46.

(Sol. S_1 kümesi, $\Re^2$ deki eleman yönlü eşitsizliğe göre, x_1 minimum elemanına sahiptir. $x_1 + K$ kümesi açık renk gölgelendirilmiştir. Sağ. x_2 noktası S_2 nin bir minimal noktasıdır. $x_2 - K$ kümesi açık renk gölgelendirilmiştir.)

1.2.2. Pareto Optimallığı

Çok amaçlı optimizasyon problemi aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\min \{f_1(x), \dots, f_p(x)\}$$

$$x \in S \text{ olmak üzere,}$$

formüldeki $p(\geq 2)$, $f_i : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ amaç fonksiyonlarını gösterir. Amaç fonksiyonlarının vektörü $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))^T$ ile gösterilir. Karar (değişken) vektörleri $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\mathfrak{R}^n$ karar değişkeni uzayının bir alt kümesi olan, S uygun bölgesine (kümesine) aittir. Çok amaçlı optimizasyon probleminin amacı, tüm amaç fonksiyonlarını eş zamanlı olarak minimize etmektir. Amaç fonksiyonları arasında çatışma (ilişki) yoksa, çözüm her amaç fonksiyonunun kendi optimum noktasında bulunacaktır (Miettinen, 1999:5).

Tek amaçlı optimizasyon problemlerinde, asıl odak noktası karar değişkenleri uzayıdır. Çok amaçlı durumda amaç uzayı önemlidir. Çünkü, genellikle karar değişkeni uzayından daha düşük bir boyuttur ve amaç değişkenleri optimallliği tanımlamada kullanılır. Amaç fonksiyonlarının çelişkili ve muhtemelen kıyaslanamaz yapısı yüzünden, tüm amaçlar için aynı anda optimal olabilecek bir tek çözüm bulmak mümkün değildir. Amaç uzayında yalnızca kısmi sıralama olduğundan, doğal sıralama yoktur (Pang, 1978:270). Sıralama ilişkisi, aynı zamanda elemanlar arasındaki baskınlık ilişkisini gösterir.

Verilen sonlu bir çözüm seti için, tüm mümkün ikili karşılaştırmalar yapılabilir ve hangi çözümün hangi çözümü baskınladığı ve hangi çözümlere göre baskın olmadığı bulunabilir. Sonunda, her ikili elemanın birbirini baskınlamadığı bir çözüm kümesine ulaşılır. Bu kümenin dışındaki her çözüm için, küme içinde bu dış çözümden daha iyi (baskın) bir çözüm daima bulunabilir. Böylece, bu özel küme, bu kümeye ait olmayan diğer tüm çözümlere baskın olma özelliğine sahiptir. Daha basit bir açıklamayla, bu kümedeki çözümler, çözümlerin geri kalanıyla karşılaştırıldığında daha iyidir. Bu kümeye, verilen çözüm kümesi için *baskınlanmayan* küme denir. Çözüm kümesi, tüm uygun arama uzayına eşitse, çözüm kümesi içindeki bu baskınlanmayan kümeye Pareto-optimal küme denir.

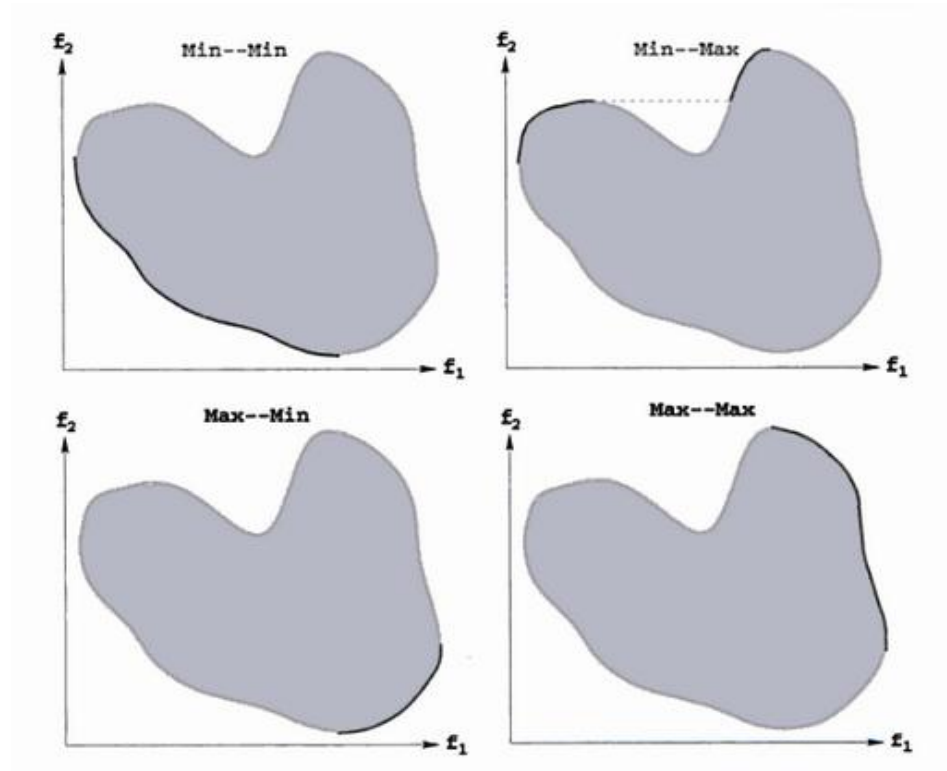
Tüm $i=1, \dots, p$ için $f_i(x) \leq f_i(x^*)$ ve en az bir j indeksi için $f_j(x) < f_j(x^*)$ olan başka bir $x \in S$ karar vektörü mevcut değilse $x^* \in S$ karar vektörü Pareto-optimaldir (Marler ve Arora, 2004:371).

Tüm $i=1, \dots, p$ için $z_i \leq z_i^*$ ve en az bir j indeksi için $z_j < z_j^*$ olan başka bir $z \in Z$ amaç vektörü mevcut değilse, $z^* \in Z$ amaç vektörü Pareto-optimaldir veya

eşit olarak, ilgili bir karar vektörü Pareto-optimal ise z^* da Pareto-optimaldir (Miettinen, 1999:11).

Problemin maksimizasyon ya da minimizasyon yapısına göre Pareto-optimal kümenin yeri farklılık gösterir (Şekil 1.2). Her problem yapısı için, Pareto-optimal küme daima uygun arama bölgesinin özel bir kenarındaki çözümlerden oluşur (Deb, 2001:30-31). Bununla birlikte, karışıklığı önlemek için, birçok uygulama maksimizasyon problemini minimizasyona dönüştürmek için dualite prensibini kullanır ve her problemi, minimize edilen amaçların bir kombinasyonu olarak çözer.

Şekil 1.2: İki amaç fonksiyonunun dört farklı kombinasyonu için, Pareto-optimal çözüm alanları



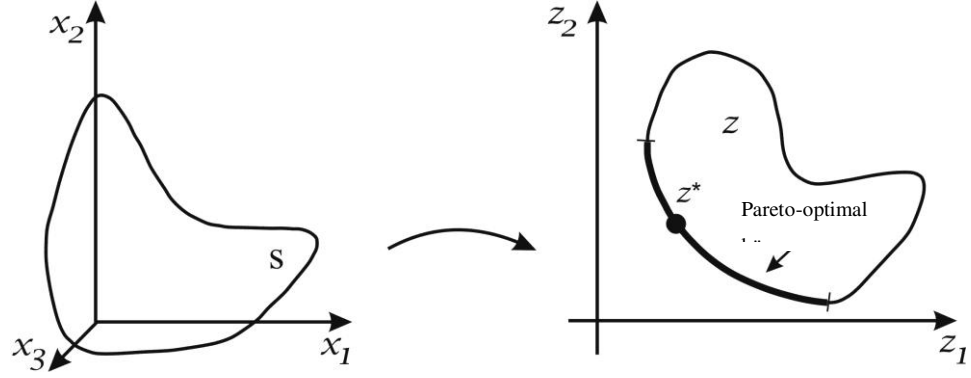
Kaynak: Deb, 2001:32.

(Pareto-optimal çözüm alanları, koyu renk sürekli eğriler ile gösterilmiştir)

Bir uygun bölge $S \subset \mathcal{R}^3$ ve görüntüsü, bir uygun amaç bölgesi $Z \subset \mathcal{R}^2$, Şekil 1.3'de gösterilmiştir. Kalın çizgi tüm Pareto-optimal amaç vektörlerini içermektedir. z^* vektörü bunların bir örneğidir. Çok sayıda Pareto-optimal çözüm

vardır. Bu nedenle Pareto-optimal çözümlerden veya Pareto-optimal kümeden bahsedilir. Bu küme konveks olmayabilir ve bağlı olmayabilir.

Şekil 1.3: S ve Z kümeleri ve Pareto-optimal amaç vektörleri



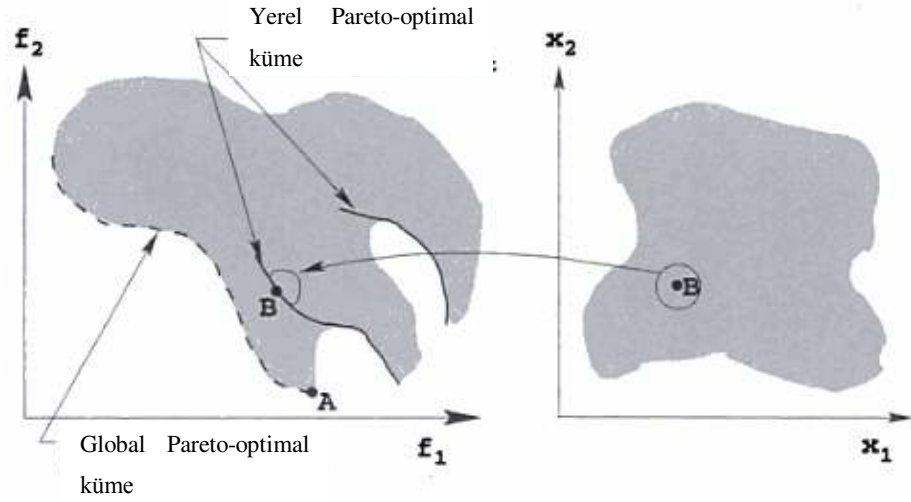
Kaynak: Miettinen, 1999:11.

$S \cap B(x^*, \varepsilon)$ içinde x^* Pareto-optimal olmak üzere, bir $\varepsilon > 0$ mevcut ise, $x^* \in S$ karar vektörü yerel Pareto-optimaldir. İlgili vektörü yerel Pareto-optimal ise, $z^* \in Z$ amaç vektörü yerel Pareto-optimaldir. Her global Pareto-optimal çözüm, yerel Pareto-optimaldir. Konveks çok amaçlı optimizasyon problemleri için tersi de geçerlidir (Miettinen, 1999:12).

Bir çok durumda, global Pareto-optimal küme yerine sadece, Pareto-optimal küme tanımlaması kullanılmaktadır. Bu kümenin çözümleri, arama uzayının herhangi bir başka üyesi tarafından baskınlanmadığından, Çok Amaçlı Optimizasyon probleminin optimal çözümleridir. Tüm Pareto-optimal noktalar olurlu kriter uzayının sınırı üzerinde yayılırlar (Marler ve Arora, 2004:371).

Şekil 1.4 yerel ve global Pareto-optimal kümeleri göstermektedir. Karar değişkenleri uzayındaki B noktası, uygun arama uzayında yerel Pareto-optimal küme içindedir. Bu küme içinde, bu çözümü baskınlayan herhangi bir eleman bulunamaz. Burada önemli bir sonuç, sürekli arama uzayı problemleri için, yerel Pareto-optimal çözümlerin karar değişkenleri uzayında da sürekli olmasının gerekmemesidir.

Şekil 1.4: Yerel ve global Pareto-optimal çözümler



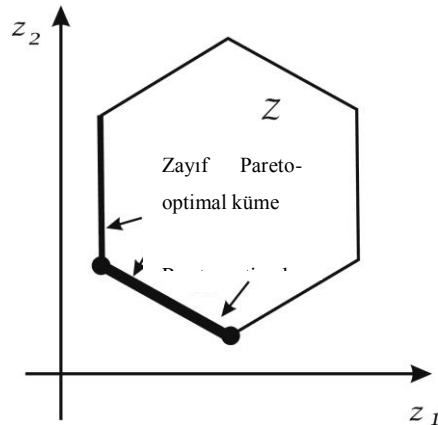
Kaynak: Deb, 2001:33.

1.2.3. Zayıf Pareto Optimallığı

Tüm $i = 1, \dots, p$ için $f_i(x) < f_i(x^*)$ olan başka bir $x \in S$ karar vektörü yoksa, $x^* \in S$ karar vektörü zayıf Pareto-optimaldir (Sawaragi ve diğerleri, 1985: 36).

Tüm $i = 1, \dots, p$ için $z_i < z_i^*$ olan başka bir $z \in Z$ amaç vektörü yoksa veya eşit olarak, ilgili karar vektörü zayıf Pareto-optimal ise, $z^* \in Z$ amaç vektörü zayıf Pareto-optimaldir (Ghosh ve Chakraborty, 2014: 515). Pareto-optimal küme, zayıf Pareto-optimal kümenin bir alt kümesidir. Pareto-optimal amaç vektörleri noktaların arasındaki doğru boyunca yerleşmiştir (Şekil 1.5).

Şekil 1.5: Zayıf Pareto optimal vektörler



Kaynak: Miettinen, 1999:20.

1.2.4. Uygun (Proper) Pareto-Optimalliği

Eğer Pareto optimal ise ve her f_i ve $f_i(x) < f_i(x^*)$ sağlayan her $x \in S$ için bazı $M > 0$ gerçel sayıları varsa ve $f_j(x^*) < f_j(x)$ ve $\frac{f_i(x^*) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(x^*)} \leq M$ olan en az bir f_j mevcutsa, karar vektörü $x^* \in S$ uygun Pareto-optimaldir ($M > 0$) (Marler ve Arora, 2004:371). Eğer ilgili karar vektörü uygun Pareto-optimal ise, amaç vektörü $z^* \in Z$ uygun Pareto-optimaldir (Geoffrion, 1968:619).

$$\frac{f_i(x^*) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(x^*)} \leq M \text{ oranı takas olarak tanımlanır ve } j \text{ amaç fonksiyonunda}$$

meydana gelen artışın, i amaç fonksiyonunda neden olduğu azalış miktarını gösterir (Marler ve Arora, 2004:372). Takas konusu ileride ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

1.2.5. Pareto-optimal Kümenin Sınırları

Çok amaçlı optimizasyon algoritmalarının çoğu baskınlık ve ilgili terimleri kullanmaktadır ve çözümlerin sınırlı bir popülasyonunda baskın sonuçları belirlemek için kullanılan teknikleri sunmaktadır (Deb, 2001:25-26). Çok amaçlı optimizasyon çözüm yöntemlerinin çoğunda, Pareto yüzün üst ve alt sınırlarının bilinmesi gerekir. İdeal ve aşağı noktalar Pareto-optimal (baskınlanmayan) çözümlerin alt ve üst sınırlarıdır (Ehrgott ve Tenfelde-Podehl, 2003:120). Bu noktalar, baskınlanmayan noktaların ulaşabileceği değer aralığının bir gösterimini sağlar.

1.2.5.1. İdeal Amaç Vektörü

Çatışan amaçların her biri için, farklı bir optimal sonuç vardır. Amaç fonksiyonlarının her birini minimize eden amaç vektörü ideal (veya mükemmel) amaç vektörü olarak adlandırılır (Şekil 1.7). $z^* \in \mathbb{R}^p$ ideal amaç vektörünün z_i^* elemanları, bireysel olarak kısıtlara maruz kalan her amaç fonksiyonunun minimize edilmesiyle elde edilir, şöyle ki, $i=1, \dots, p$ için

$$\begin{aligned} &\text{minimize } f_i(x) \\ &x \in S \text{ olmak üzere,} \end{aligned}$$

çok amaçlı optimizasyon problemi çözülür.

İdeal amaç vektörü ulaşılabilir değildir. Buna rağmen, bir referans noktası gibi düşünülür. İdeal amaç vektörünün uygun çözüm olmasının tek yolu, tüm amaç fonksiyonları için minimal çözümlerin aynı olmasıdır (Deb, 2001:26). Eğer ideal amaç vektörü uygun, ulaşılabilir olsaydı ($z^* \in Z$ olsaydı), çok amaçlı optimizasyon probleminin bir çözümü olacaktı ve Pareto-optimal küme bu vektöre dönüştürülecekti. Amaçlar arasında bazı çatışmalar olduğundan, genelde bu mümkün değildir. İdeal amaç vektöründen, Pareto-optimal kümenin her amaç fonksiyonu için alt sınırları elde edilir (Miettinen, 1999:16).

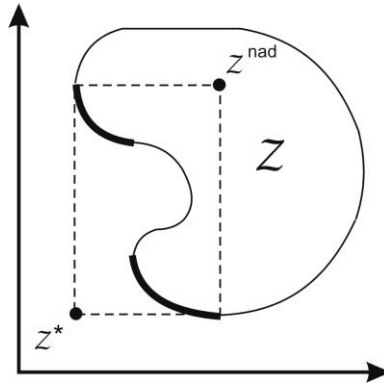
İdeal amaç vektörü, tüm amaç fonksiyonlarının alt sınırının bir dizisini verir. Bu demektir ki, her amaç fonksiyonu için, uygun çözüm alanında ideal çözümdeki benzer elemanla aynı değeri paylaşan en az bir çözüm mevcuttur. Bazen tamamen daha iyi bir vektöre, diğer bir deyişle, her Pareto-optimal çözümü tamamen baskınlıyan bir vektöre ihtiyaç duyulur (Deb, 2001:27). Ütopya amaç vektörü $z^{**} \in \mathbb{R}^p$, elemanları tüm $i=1,...,p$ için $z_i^{**} = z_i^* - \varepsilon_i$ ile oluşturulan uygun olmayan amaç vektörüdür. Burada z_i^* ideal amaç vektörünün bir elemanıdır ve $\varepsilon_i > 0$ nispi olarak küçük ama hesaplama açısından önemli bir sayısal değerdir (Miettinen, 1999:16). Ütopya amaç vektörü, ideal amaç vektöründen daha iyi ve Pareto-optimal küme elemanları için asla ulaşılamayan, mevcut-olmayan çözümü gösterir. Ütopya amaç vektörü, ideal ve nadir amaç değerleri eşit ya da çok yakın olduğu durumda, ideal amaç vektöründen daha iyi bir noktayı gösterdiği için kullanılır (Lopez-Jaimes ve Coello, 2014: 4).

1.2.5.2. Aşağı (Nadir) Amaç Vektörü

Pareto-optimal kümenin üst sınırları aşağı (nadir), kötü amaç vektörünün ya da kusurlu (mükemmel olmayan) amaç vektörünün elemanlarıdır (Şekil 1.6). Nadir amaç vektörü z^{nad} ile gösterilir ve elde edilmesi çok daha zordur. Nadir amaç vektörü uygun bölgede olabilir veya olmayabilir (Şekil 1.7). Bununla birlikte, sonuç

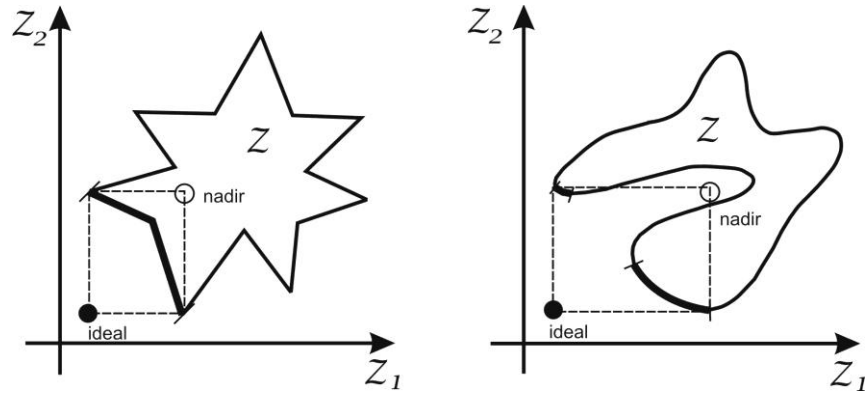
tablosundan (Tablo 1.2) tahminlenebilirler. Sonuç tablosu, ideal vektör hesaplanırken elde edilen karar vektörleri kullanılarak oluşturulur. Sonuç tablosunun i . satırı, f_i 'nin minimal değerine ulaştığı noktada hesaplanan tüm amaç fonksiyonlarının değerlerini gösterir. Böylece, z^* tablonun ana köşegenindedir. Sonuç tablosunda i . sütunun maksimal değeri, Pareto-optimal küme üzerinde $i=1,...,p$ için f_i amacının üst sınırının bir tahmini olarak seçilebilir. Sonuç tablosunun satırlarındaki amaç vektörleri, tek (eşsiz) ise Pareto-optimaldir. Eğer bireysel amaç fonksiyonları alternatif optimum noktalara sahipse, elde edilen amaç vektörü Pareto-optimal olmayabilir. Bu sonuç, yaklaşımı zayıflatır ve bu durum doğrusal olmayan problemlerde olduğu gibi doğrusal problemlerde de görülebilir (Miettinen, 1999:17).

Şekil 1.6: İdeal (z^*) ve nadir (aşağı) (z^{nad}) amaç vektörleri



Kaynak: Ehrgott, 2005:35'ten değiştirilerek.

Şekil 1.7: Nadir amaç vektörü uygunluk durumu



Kaynak: Miettinen, 1999:17.

Tablo 1.2: Sonuç tablosu ve ideal nokta

	x^1	x^2	$\dots$	x^{p-1}	x^p
f_1	z_1^*	$f_1(x^2)$	$\dots$	$f_1(x^{p-1})$	$f_1(x^p)$
f_2	$f_2(x^1)$	$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$f_2(x^p)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f_{p-1}	$f_{p-1}(x^1)$	$\dots$	$\dots$	$\vdots$	$f_{p-1}(x^p)$
f_p	$f_p(x^1)$	$f_p(x^2)$	$\dots$	$f_p(x^{p-1})$	z_p^*

Kaynak: Ehrgott, 2005:35'ten değiştirilerek.

Nadir amaç vektörü, tüm arama uzayındaki en kötü fonksiyon değerleri kullanılarak bulunan amaçların bir vektörüyle karıştırılmamalıdır. Nadir amaç vektörü, Pareto-optimal kümenin konveksliğine ve sürekliliğine bağlı olarak mevcut ya da mevcut-olmayan çözümü gösterebilir (Deb, 2001:28).

İdeal amaç vektörü gibi, aşağı (nadir) amaç vektörü de referans nokta olarak kullanılmaktadır. Bu durumda, çözüm noktalarının aşağı noktadan olan uzaklığının maksimize edilmesi amaçlanır. Aynı zamanda bu kullanım, çözüm noktalarının nadir noktadan aşağıda olmasını sağlar (Ehrgott ve Tenfelde-Podehl, 2003:122).

1.2.5.3. Amaç Fonksiyonlarının Normalizasyonu

Çok amaçlı optimizasyon problemi içindeki amaç fonksiyonları farklı ölçekte yada birimde ise ortak bir birime dönüştürülmeleri gerekir. Bu dönüşüm, amaç fonksiyonlarının normalizasyonu olarak isimlendirilir. Normalizasyon için kullanılan farklı fonksiyonlar vardır ve en çok kullanılanları aşağıda açıklanmıştır.

Pareto-optimal bölgedeki tüm aralık içindeki her amacı normalize etmek için, nadir ve ideal amaç vektörleri bilgisi kullanılabilir. Amaç fonksiyonunun normalizasyonu, amaç değerleri yaklaşık olarak aynı büyüklükte olması için önerilmektedir. Eğer ideal amaç vektörü ve nadir amaç vektörüne yeterince iyi bir yaklaşım biliniyorsa, her amaç fonksiyonu $f_i(x)$ ($i=1, \dots, p$) aşağıdaki fonksiyonla değiştirilebilir

$$\frac{f_i(x) - z_i^*}{z_i^{nad} - z_i^*}.$$

Bu durumda, her yeni amaç fonksiyonu $[0,1]$ aralığında olacaktır (Miettinen, 1999:18).

Diğer bir seçenek, Sun ve diğerleri (2000:609) tarafından önerilen bir aralık eşitleme faktörü kullanmaktır. Her amaç fonksiyonunun R_i aralığı öncelikle (muhtemel yaklaşık) nadir amaç fonksiyonu ve ideal amaç fonksiyonu arasındaki fark ile tahminlenir. Sonra, sabitler her $i=1,...,p$ için belirlenir ve son olarak her amaç fonksiyonu K_i ile çarpılır;

$$K_i = \frac{1}{R_i} \frac{1}{\sum_{j=1}^p \frac{1}{R_j}}$$

Amaç fonksiyon değerlerini normalize etmek için basit bir alternatif, her amaç fonksiyonunu kendi (sıfır olmayan) ideal amaç değerine bölmektir. Bu çözüm, Osyczka tarafından önerilir (Gero, 1985:204), önceki yöntem kadar kesin değildir fakat nadir amaç fonksiyonu bilgisine ihtiyaç duymaz.

İlgili bir konu olarak, (bazı) amaç vektörlerinin, aşağıdan sınırsız olması mümkündür. Bu durumda da Pareto optimal çözümler mevcut olabilir. Bununla birlikte, eğer ideal amaç vektörünün bazı elemanları sınırsız ise ve küçük ama sonlu sayılarla değiştirilmişse, ideal amaç vektörünü kullanan yöntem bu değişikliğin üstesinden gelemeyebilir (Miettinen, 1999:19).

1.3. KARAR SÜRECİ

Karar vericinin kararlarını kriter uzayında verdiği varsayılır. Karar vericinin tercihlerini gösteren fonksiyona tercih fonksiyonu denir. Eğer karar vericisi, belirsizlik altında karar veriyorsa bu fonksiyon fayda fonksiyonu olarak adlandırılmakta, belirsizliğin olmadığı, kesinlik durumunda karar veriyorsa tercih fonksiyonu değer fonksiyonu adını almaktadır (Sawaragi ve diğerleri, 1985:211).

Belirsizlik altında karar verme, bu çalışmanın kapsamı dışında olduğu için, konunun devamında değer fonksiyonu incelenmiştir.

1.3.1. Değer Fonksiyonu

Karar vericinin kararlarını bir değer fonksiyonunu temel alarak verdiği durumda, amaç vektörleri arasındaki tercihini gösteren $U : \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}$ fonksiyonuna, değer fonksiyonu denir.

z^1 ve $z^2 \in Z$ iki farklı amaç vektörü olsun. Eğer $U(z^1) > U(z^2)$ ise, karar verici z^1 'i z^2 'ye tercih eder (Sawaragi ve diğerleri, 1985:214). Eğer $U(z^1) = U(z^2)$ ise, karar verici amaç vektörlerini eşit derecede çekici bulur, yani farksızdırlar. Değer fonksiyonu karar vericiye-bağlı bir kavramdır. Aynı problem için, farklı karar vericiler farklı değer fonksiyonlarına sahip olabilir. Değer fonksiyonları çok amaçlı optimizasyon problemlerinin çözümünde seyrek olarak kullanılmalarına rağmen, çözüm yöntemi geliştirmede ve teorik yapı olarak çok önemlidirler. Çok amaçlı optimizasyon yöntemlerinin çoğunda, değer fonksiyonunun tam olarak bilindiği ve karar vericinin bu temelde seçim yaptığı varsayılır. Genellikle, değer fonksiyonunun hızlıca azalan bir fonksiyon olduğu varsayılır. Bunun anlamı, diğer amaç fonksiyonlarının değerleri değişmeden kalırken, bir amaç fonksiyonunun değeri azalıyorsa, karar vericinin tercihinin artacağıdır (Miettinen, 1999:21).

Teorem 1.4: Değer fonksiyonu $U : \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}$ hızlıca azalan bir fonksiyon olsun. U maksimumuna $z^* \in Z$ 'de ulaşsın. z^* Pareto-optimaldir.

İspat: $z^* \in Z$, hızlıca azalan U değer fonksiyonunun bir maksimal çözümü olsun. z^* 'ın Pareto-optimal olmadığı varsayalım. Tüm $i = 1, \dots, p$ için $z_i \leq z_i^*$ ve en az bir j indeksi için $z_j < z_j^*$ olan bir $z \in Z$ amaç vektörü mevcuttur. U hızlıca azaldığından, $U(z) > U(z^*)$ mevcuttur. Böylece U , maksimumuna z^* 'da ulaşamaz. Bu çelişki z^* 'ın Pareto-optimal olduğunu gösterir.

Değer fonksiyonunun varlığını dikkate almaksızın, genel varsayım karar verici tarafından azın çoğa tercih edilmesidir; bunun anlamı, düşük amaç fonksiyon değerleri yüksek olana tercih edilir. Bu varsayım değer fonksiyonu içermeyen

yöntemlerde de genellikle uygulanmaktadır. Böylece, azın çoğa tercih edilmesi varsayımı, hızlı azalan değer fonksiyonu varsayımından çok daha genel bir varsayımdır (Miettinen, 1999:22).

1.3.2. Çözümler Arasındaki İlişkiler

Pareto-optimal küme üzerindeki çözüm noktaları arasındaki ilişkiler takas ve ikamenin marjinal oranı kavramları ile açıklanır. Takaslar ve ikamenin marjinal oranı, bir çözümden diğerine doğru giderken, amaç değerlerindeki değişme ile ilgilidir. Takaslar matematiksel olarak tanımlanırken, ikamenin marjinal oranı karar vericiye bağlıdır.

1.3.2.1. Takaslar

Pareto optimalliğinin önemli bir özelliği, amaç fonksiyonları arasında takas ilişkisini mümkün kılmasıdır. Eğer kriterler arasında bir öncelik, baskınlık ilişkisi söz konusuysa, takasın varlığından söz edilemez (Ehrgott, 2005:129). Bu nedenle, takas yalnızca Pareto optimal küme içinde geçerlidir. Takas, bazı amaç fonksiyon değerleri azalırken, bir amaç fonksiyonunda meydana gelen artışla ilgili, amaç fonksiyonlarının değerlerindeki değişim oranıdır. Aşağıdaki tanımlarda $i, j = 1, \dots, p, i \neq j$ ifadeleri geçerlidir (Miettinen, 1999:26).

x^1 ve $x^2 \in S$ iki karar vektörü ve $f(x^1)$ ve $f(x^2)$ sırasıyla ilgili amaç vektörleri olsun. f_i ve f_j fonksiyonları arasındaki değişim oranı aşağıdaki gibi gösterilir

$$\Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}(x^1, x^2) = \frac{f_i(x^1) - f_i(x^2)}{f_j(x^1) - f_j(x^2)},$$

formülde $f_j(x^1) - f_j(x^2) \neq 0$. Tüm $l = 1, \dots, p, l \neq i, j$ için $f_l(x^1) = f_l(x^2)$ ise, Λ_{ij} 'ye; x^1 ve x^2 arasındaki, f_i ve f_j yi içeren kısmi takas denir. En az bir $l = 1, \dots, p$ and $l \neq i, j$ için $f_l(x^1) \neq f_l(x^2)$ mevcutsa, Λ_{ij} 'ye; x^1 ve x^2 arasındaki, f_i ve f_j yi içeren toplam takas denir (Chankong ve Haimes, 1983:332).

İki amaç fonksiyonunun olduğu durumda, kısmi ve toplam takaslar arasında fark yoktur. Kısmi takaslar belli bir zamandaki iki amaç fonksiyonundaki değişimi karşılaştırmayı sağlar. Bu, birkaç amacı karşılaştırmaktan daha iyi bir prosedürdür. Eğer x^1 ve x^2 Pareto-optimal ise, takasları negatif olan birkaç f_i ve f_j amaç fonksiyonu vardır (Miettinen ve diğerleri, 2010:31).

$x^* \in S$ bir karar vektörü ve d^* , x^* 'ten çıkan uygun yön olsun. d^* yönü boyunca f_i ve f_j 'yi içeren, x^* 'daki toplam takas oranı aşağıdaki ifadeyle hesaplanır:

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(x^*, d^*) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Lambda_{ij}(x^* + \alpha d^*, x^*).$$

Tüm $l = 1, \dots, p$, $l \neq i, j$ ve tüm $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$ için $f_l(x^* + \alpha d^*) = f_l(x^*)$ ifadesini sağlayan $\bar{\alpha} > 0$ in mevcut olduğu uygun yön d^* ise, ilgili λ_{ij} 'ye kısmi takas oranı denir (Chankong and Haimes, 1983:332).

Açıklama 1.2: Eğer amaç fonksiyonları sürekli olarak diferansiyellenebiliyorsa, aşağıdaki ifade geçerlidir;

$$\lambda_{ij} = \frac{\nabla f_i(x^*)^T d^*}{\nabla f_j(x^*)^T d^*},$$

payda sıfırdan farklıdır. Sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar için, alternatif bir tanım mevcuttur.

Amaç fonksiyonları, bir $x^* \in S$ karar vektöründe sürekli diferansiyellenebilsin. f_i ve f_j yi içeren x^* 'te kısmi takas oranı aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(x^*) = \frac{\partial f_i(x^*)}{\partial f_j}.$$

Global takas, iki amaç fonksiyonu ve Pareto-optimal olmak zorunda olmayan bir karar vektörü içerir. Bu, bir karar vektörü için iki amaç fonksiyonunun en büyük eleman yönlü takasıdır. $x^* \in S$ ele alındığında ve minimizasyon problemleri için

tanımlar değiştirildiğinde, uygun karar vektörlerinin bir alt kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır (Miettinen, 1999:27)

$$S_j^>(x^*) = \{x \in S \mid f_j(x) > f_j(x^*), f_i(x) \leq f_i(x^*), \text{ for } i = 1, \dots, p, i \neq j\}.$$

$x^* \in S$ bir karar vektörü olsun. f_i ve f_j fonksiyonları arasındaki global takas aşağıdaki ifadeyle gösterilmektedir

$$\Lambda_{ij}^G = \Lambda_{ij}^G(x^*) = \sup_{x \in S_j^>(x^*)} \frac{f_i(x^*) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(x^*)}.$$

Eğer $S_j^>(x^*) = \emptyset$ ise, her $i = 1, \dots, p, i \neq j$ için $\Lambda_{ij}^G(x^*) = -\infty$ (Kaliszewski and Michalowski, 1997:383).

Takaslar matematiksel olarak tanımlanır ve karar verici bunları etkileyemez. Eğer karar vericinin fikirleri hesaba katılırsa, farksızlık eğrileri ve ikamenin marjinal oranları tanımlanabilir (Miettinen, 1999:27).

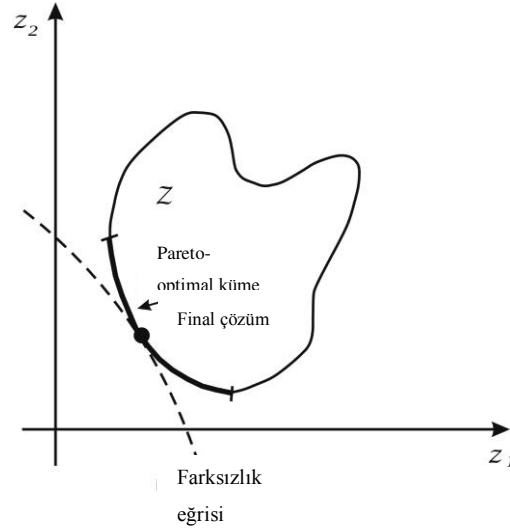
1.3.2.2. İkamenin Marjinal Oranı

Eğer karar verici uygun çözümlerin her ikisini de eşit olarak cazip bulursa, bunlardan biri diğerine tercih edilmezse, iki uygun çözüm aynı kayıtsızlık eğrisinin (ya da eştercih eğrisinin) üzerinde yer alır. Bunun anlamı, kayıtsızlık eğrileri esas değer fonksiyonunun çizgileridir. Aynı kayıtsızlık eğrisi üzerindeki herhangi iki çözüm için, iki çözümün tercihleri aynı kalırken, diğer birkaç amaç fonksiyonu (f_i)'deki azalış miktarı için takasta karar vericinin tolere etmek istediği bir (f_j) amaç fonksiyonu değerindeki artışı içeren bir takas vardır. Buna ikamenin marjinal oranı (ya da kayıtsızlık takası) denir ve belirli bir noktadaki kayıtsızlık eğrisine olan tanjantın eğiminin negatifidir (Miettinen, 1999:28).

İkamenin marjinal oranı, $m_{ij} = m_{ij}(x^*)$, karar vericinin bir $x^* \in S$ karar vektöründeki tercihini gösterir. Diğer amaçların değerleri değişmeden kalırken, f_j amaç fonksiyon değerindeki bir birimlik artış için karar vericinin zararını telafi eden, f_i amaç fonksiyonundaki azalış miktarıdır (Sawaragi ve diğerleri, 1985:259). Tanımda, başlangıç ve sonuçta oluşan amaç vektörleri aynı farksızlık eğrisi üzerinde

yayılır ve $i, j = 1, \dots, p, i \neq j$ dir. Çok amaçlı optimizasyon probleminin sonuç amaç çözümü, farksızlık eğrisinin Pareto-optimal kümenin tanjantı olduğu, bir Pareto-optimal çözüm olarak ifade edilebilir. Bu teğetlik (tanjantlık) durumu, güney-batıya en uzak olan uygun amaç bölgesinin kesişimindeki farksızlık eğrisini bulma anlamına gelir (Şekil 1.8) (Miettinen, 1999:28).

Şekil 1.8: Final çözüm.



Kaynak: Miettinen, 1999:28.

Marjinal ikame oranı m_{ij} , ikame oranının limiti olarak tanımlanır (Sawaragi ve diğerleri, 1985: 258).

$$m_{ij}(x^*) = \lim \frac{\Delta f_j}{\Delta f_i}.$$

Marjinal ikame oranı ile marjinal değer arasında bir ilişki mevcuttur. Eğer kısmi türevler hesaplanabiliyor ise marjinal ikame oranı aşağıdaki ifade ile elde edilir,

$$m_{ij}(x^*) = \frac{\partial U(f(x^*))}{\partial f_j} \bigg/ \frac{\partial U(f(x^*))}{\partial f_i}.$$

Eğer Pareto-optimal küme düzgünse (bunun anlamı, her Pareto-optimal noktada bir tek tanjantın olduğudur) aşağıdaki sonuçlar mevcuttur. Bazı noktalardaki takas oranının tanımı incelendiğinde, bu noktada Pareto-optimal kümenin tanjantının eğimi olduğu açıktır. Eğer Pareto-optimal çözüm bir sonuç çözüm ise, farksızlık

eğrisinin tanjantı ve Pareto-optimal küme o noktada çakışır, aşağıdaki gibi ifade edilir

$$-m_{ij} = \lambda_{ij} \text{ for all } i, j = 1, \dots, p, i \neq j.$$

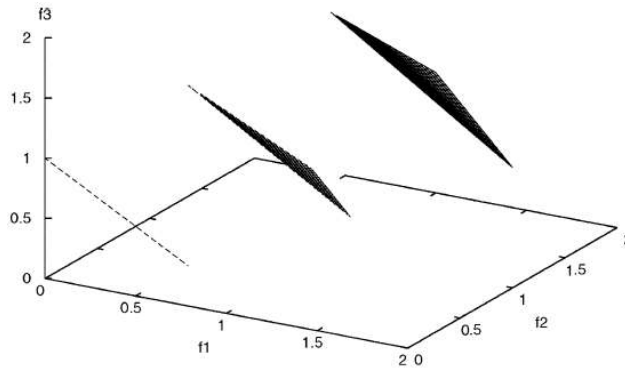
Böylece ikamenin marjinal oranının negatifi ve takas oranının yardımıyla, sırasıyla, farksızlık eğrisinin yerel doğrusal bir yaklaşımı ve Pareto-optimal küme elde edilebilir (Miettinen, 1999:29). Genellikle, takaslar ve ikamenin marjinal oranı ele alındığında, amaç fonksiyonlarının biri referans fonksiyon olarak seçilir. Takaslar ve ikamenin marjinal oranı buna göre oluşturulur. Notasyonda, f_i referans fonksiyondur ve referans fonksiyonun anlamlı bir şekilde seçilmesi önemlidir. Seçimdeki önemli bir kriter, referans fonksiyonunun bilinen birimlerde ya da baskın olmasıdır (Geoffrion ve diğerleri, 1972:359).

1.3.3. Pareto Optimal Geometri

Çok amaçlı optimizasyon, bilginin çokluğuyla ilgilenir. Tek amaçlı optimizasyonda, çoklu karar değişkenleri olsa bile, yalnızca bir amaç fonksiyonu vardır. Mevcut bir iterasyondaki en iyi çözümün amaç fonksiyon grafiğini çizerek, kullanılan çözüm algoritmasının performansı gösterilebilir (Deb, 2001: 316). Pareto-optimal yüzün bir tek nokta olduğu tek amaçlı problemlerin aksine, çok amaçlı problemler çok geniş çeşitlilikte Pareto-optimal yüzlere sahiptir (Huband ve diğerleri, 2006: 480). Birden fazla amaç fonksiyonunun olduğu bu problem yapısının en ilginç özelliği bu amaç fonksiyonlarının birbiriyle çatışmasıdır (Deb, 2001: 316). Problemin amaç fonksiyonlarının çeşitli algoritmalar kullanılarak birlikte çözümünden elde edilen, çözüm kümesindeki diğer noktalardan üstün olan ama birbirine göre üstünlük gösteremeyen, optimum çözüm noktalarından oluşan Pareto-optimal yüz grafikleri, fonksiyonların yapısına bağlı olarak farklı şekillerde oluşabilir. Pareto-yüz grafikleri, ancak iki ve üç amaç fonksiyonlu çok amaçlı optimizasyon problemleri için çizilebilir. Problemin Pareto-optimal geometrisinde görülen çeşitliliği etkileyen unsurlar, hem amaç fonksiyonlarının ayrı ayrı matematiksel yapısından hem de birlikte çözümlerinden kaynaklanabilir. Pareto-optimal geometri içinde karşılaşılan en temel yüz özellikleri konvekslik, dejenere yapılar ve süreklilik olarak sıralanabilir.

Farklı problem yapıları ayrı ayrı ele alındığında, konvekslik çok amaçlı evrimsel algoritmalar için en az probleme neden olan yapıdır (Zitzler, 1999: 65). Konveks kabuğunu örten kümeye *konveks*, konveks kabuğu tarafından örtülen kümeye de *konkav* denir. Doğrusal küme hem konveks hem de konkavdır. *Karma* yüz, hepsi aynı türde olmayan, tam konveks, tam konkav veya doğrusal olan, birbiriyle bağlantılı alt kümelerden oluşur (Huband ve diğerleri, 2006: 480). *Dejenere* yüz, amaç uzayının daha alt boyutlarında gömülü yüzdür. Örneğin, üç amaçlı problemin içindeki doğru parçası dejenereydir. Bununla birlikte, üç amaçlı problem içindeki iki-boyutlu yüz dejenere değildir. Dejenere Pareto-optimal yüzler bazı algoritmalarda problemlere neden olabilirler. Örneğin, Pareto-optimal yüz boyunca çözümlerin düzgün bir yayılımını sağlamak için kullanılan yöntemler, yüzün beklenenden daha az boyutlarda etkili olarak çalışmasına neden olacak şekilde farklı işleyebilir (Huband ve diğerleri, 2006: 480-481). Şekil 1.9 dejenere problemi gösterir.

Şekil 1.9: Dejenere bir problemten alınan üç farklı en üstün (nondominated) yüz.

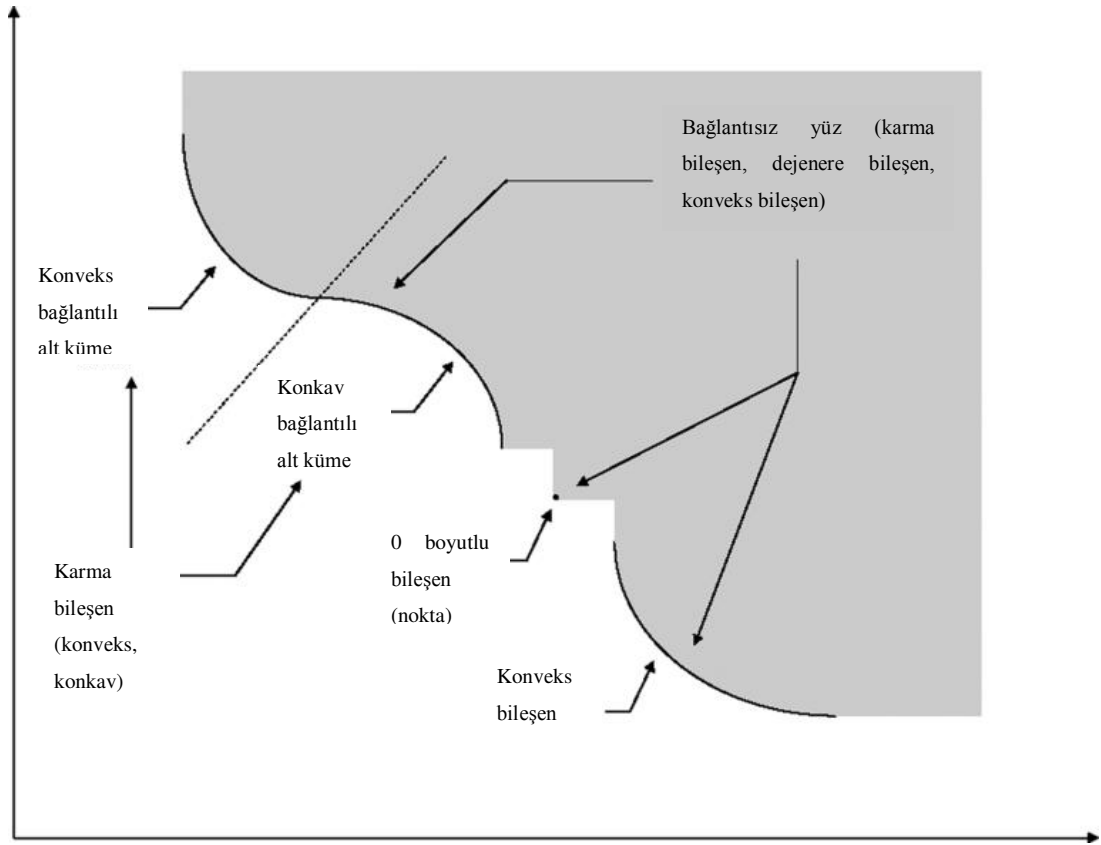


Kaynak: Huband ve diğerleri, 2006: 480.

(Orijine yakın olan yüz Pareto optimal yüzdür ve dejenere doğrudur).

Yüzün *bağlantılı* bir küme olup olmadığı önemlidir. Literatürde, *bağlantısız* küme, süreksiz olarak tanımlanır ki, bu bir yüzü belirleyen fonksiyonu tanımlamak için daha uygun bir kullanımdır (Huband ve diğerleri, 2006: 480-481). Amaç fonksiyonlarında yer alan trigonometrik fonksiyonlar Pareto-optimal yüzde süreksizliğe neden olmaktadır (Zitzler, 1999: 58). Şekil 1.10, Pareto-optimal geometride karşılaşılan yüz yapılarını göstermektedir.

Şekil 1.10: Örnek Pareto-optimal geometriler



Kaynak: Huband ve diğerleri, 2006: 480.

Sonuç olarak, Pareto-optimal küme daima baskınlanmayan kümedir. Fakat, bazı Pareto-optimal ve Pareto-optimal olmayan çözümleri içeren baskınlanmayan kümeler mevcuttur. Burada önemli olan, bir optimizasyon algoritmasıyla bulunmuş baskınlanmayan çözümlerin gerçek Pareto-optimal kümeye yakınsayan küme olmasıdır. Bununla birlikte, arama sürecini yönlendiren bir popülasyonun baskınlanmayan kümesini yeterince vurgulayan popülasyon tabanlı arama algoritmalarının, Pareto-optimal bölgeye iyi bir yaklaşım sağlaması beklenir (Deb, 2001:33). İkinci bölümde, çok amaçlı optimizasyonun çözüm yöntemleri ve bu çalışmada kullanılan arama algoritması, teorik yapısıyla birlikte açıklanmıştır.

Uygulamada kullanılan test problemleri, önerilen yöntemin farklı Pareto-optimal yüzlerde ulaştığı sonuçları görebilmek için, yukarıda tanımlanan Pareto-optimal geometrileri içeren test problemlerinden seçilmiştir. Üçüncü bölümde, test problemleri ve gerçek uygulama problemleri ayrıntılı olarak anlatılacaktır.

İKİNCİ BÖLÜM

ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu çalışmada çok amaçlı optimizasyon problemlerinin çözümünden elde edilen yüksek hacimli Pareto-optimal kümelerin içinden uygun çözüm noktasının seçiminde, karar vericiye destek sağlayacak bir yöntem önerilmektedir. Bunun için öncelikle problemin uygun ve etkin bir Pareto-optimal çözüm kümesinin elde edilmesi gerekmektedir. Problemin verilen aralığında mevcut olan en geniş Pareto-optimal çözüm kümesini bulma özelliğine sahip olduğu için, çalışmada Evrimsel Algoritmali (EA) çözüm yöntemlerinden NSGA II algoritması kullanılmıştır.

Uygun çözüm noktasının seçimi için önerilen yöntemde Çoklu Cevap Yüzeyi Modelleri içinde yer alan Çekicilik Fonksiyonundan yararlanılmıştır. Bu fonksiyon, yapılan bazı değişikliklerle çok amaçlı optimizasyon problemlerinin yapısına uygun hale getirilerek problemin yeni bir çözüm noktası hesaplanmıştır.

Konunun devamında, öncelikle çok amaçlı optimizasyon yöntemlerinin özelliklerine göre sınıflandırılması ve yöntemler içinden en çok kullanılanları genel olarak anlatılacaktır. Çözüm yöntemi olarak kullanılmasının nedenlerini anlatmak amacıyla, Evrimsel Algoritmalar ve Çok Amaçlı Evrimsel Optimizasyon hakkında temel bilgiler verilecektir. Problemlerin çözümü ve Pareto-optimal kümelerini oluşturmak için seçilen NSGA II yöntemi tanıtılacaktır. Sonrasında, önerilen yöntemde kullanıldığı için, Çekicilik Fonksiyonu ve özellikle Çok Amaçlı Optimizasyondaki uygulamaları hakkında bilgi verilecek ve önerilen yöntem ayrıntılı olarak incelenecektir. Üçüncü bölümde, önerilen yöntemin test fonksiyonları üzerine uygulamasına yer verilmiştir.

2.1. ÇOK AMAÇLI OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

Çok amaçlı optimizasyon problemlerinin çözülmesi için Pareto-optimal kümelerinin elde edilmesi gerekmektedir. Karar verici, problemin en iyi çözümlerini içeren bu küme içinden uygun çözümü seçmektedir. Çok amaçlı problemlerinin, gerçek hayatta çok farklı alanlarda ortaya çıkması, çok çeşitli çözüm yöntemlerinin

geliştirilmesine olanak sağlamıştır. Bu çözüm yöntemlerinin belirli özelliklerine göre sınıflandırılması, problemlerin yapısına uygun çözüm yöntemi seçilmesini kolaylaştırmaktadır. Literatürde çeşitli sınıflandırma örnekleri vardır. Bu çalışmada, karar vericinin karar sürecine katılımını esas alan sınıflandırma yöntemi tercih edilmiş ve ayrıntıları aşağıda verilmiştir (Miettinen, 1999:63-64):

1. Herhangi bir tercih bilgisinin kullanılmadığı yöntemler (Tercihsiz yöntemler)
2. Tercih bilgisinin sonradan açıklandığı yöntemler (A-posteriori yöntemler)
3. Tercih bilgisinin önceden belirlendiği yöntemler (A-priori yöntemler)
4. Tercih bilgisinin ilerleyen bir ifadesinin yer aldığı yöntemler (interaktif yöntemler)

2.1.1 Tercihsiz Yöntemler

Optimizasyon problemlerinin çözümünde sıklıkla tercih edilen tercihsiz yöntemler, çözüm öncesi karar vericinin fikirlerinin dikkate alınmadığı, karar vericinin çözüm kümesinden tercih yapmasını sağlayan yöntemlerdir. Global Kriter Yöntemi, Çok Amaçlı Yakınsal Yığın (Multiobjective Proximal Bundle) yöntemi bu sınıftaki yöntemlerdir. İnteraktif yöntemlerle birlikte de kullanılmaktadır. Bu yöntemler içinden Global Kriter Yöntemi örnek olarak tanıtılmıştır.

Global kriter yöntemi, tercihsiz yöntemler içinde en temel yöntemdir. Ağırlık değerlerinin kullanılmadığı, tüm kriterlere eşit ağırlık değerleri veren bir yöntemdir. İdeal çözümle optimum çözüm arasındaki farkı gösteren bir ölçü fonksiyonunu temel alır (Proos ve diğerleri, 2001:2007). Çözüm, tüm bireysel ölçü fonksiyonlarının toplam fonksiyonu içinde çözülmesiyle elde edilir. Global kriter yöntemi, uzlaşık programlama olarak da isimlendirilmektedir (Miettinen, 1999:68).

2.1.2. A Posteriori Yöntemler

Pareto-optimal çözüm türeten yöntemlerdir. Karar verici oluşturulan Pareto-optimal küme içinden en uygun alternatifi seçer. Amaç fonksiyonlarının sayısı ve

matematiksel yapısı çözümü etkilemektedir. Amaç fonksiyon sayısı arttıkça, çözüm karmaşıklaşır. Çözümde elde edilen kümenin Pareto-optimal olması, amaç fonksiyonlarının konveksliğiyle doğrudan ilgilidir. Posteriori yöntemler içinde, Ağırlıklı Toplam Yöntemi, ε -Kısıt Yöntemi ve Ağırlıklı Ölçü Yöntemi en bilinenleridir. Bu yöntemler içinde en temel yöntem olarak Ağırlıklı Toplam Yöntemi aşağıda verilmiştir.

Klasik yöntemler olarak da tanımlanan sayısallaştırma yöntemleri içinde de incelenen Ağırlıklı Toplam yöntemi, amaç vektörüne bir fonksiyon işlemi uygulayarak çok amaçlı problemi tek amaçlı yapıya dönüştüren fayda fonksiyonu yönteminin özel bir durumudur (Ngatchou ve diğerleri, 2005:86). Sayısallaştırma yöntemleri içinde ilk akla gelen ve uygulaması kolay yöntemlerden biridir.

Bu yöntemde, karar verici tarafından belirlenen ağırlıklarla çarpılan amaç fonksiyonları toplanarak bir tek amaç fonksiyonu oluşturulur ve bu yeni fonksiyonun minimumu bulunur. Problem yapısı, amaç fonksiyonlarının doğrusal bir kombinasyonudur. Genel yapısı aşağıda gösterilmiştir:

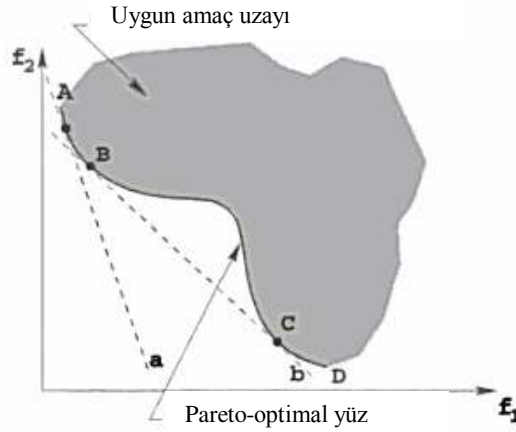
$$\begin{aligned} \text{Minimize } F(x) &= \sum_{m=1}^M w_m f_m(x), \\ \text{kısıtlar } g_j(x) &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J; \\ h_k(x) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, K; \\ x_i^{(L)} &\leq x_i \leq x_i^{(U)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ w_m &\in [0, 1] \text{ ve } \sum_{m=1}^M w_m = 1. \end{aligned}$$

Burada önemli bir sorun, ağırlıkların nasıl belirleneceğidir. Genel uygulama, karar vericinin her bir amaç fonksiyonunun problem içindeki önemine göre ağırlıkları belirlemesidir. Farklı ağırlıklar belirlenmesi problemin sonucunu etkiler. Amaç fonksiyonlarıyla ilgili ön bilgi olmadığı durumda, ağırlıkların belirlenmesi başlıbaşına bir problemdir. Çok amaçlı optimizasyon problemlerinin çoğunda, ağırlık vektörleri kümesi, Pareto-optimal çözümlerin bir kümesini bulamayabilir. Amaç uzayının istenen bölgesinde Pareto-optimal çözüm elde edecek ağırlık vektörlerini oluşturmak oldukça zordur.

Diğer bir dezavantaj, amaç fonksiyonlarının uygun çözüm uzayında ortaya çıkar. Konveks Pareto-optimal yüze sahip problemler için bu yöntem Pareto-optimal kümede çözüm bulabilir. Ancak, konveks olmayan amaç uzaylarında, bu yöntem

geçerli bir Pareto-optimal çözüm bulamaz. Şekil 2.1 bu durumu açıklamaktadır (Deb, 2001).

Şekil 2.1: Konveks olmayan amaç uzayında Ağırlıklı toplam yaklaşımı.



Kaynak: Deb, 2001:53.

Şekildeki 'a' veya 'b' noktaları gibi kenar çizgisi üzerinde bir ağırlık vektörü seçildiğinde, f fonksiyonunun minimum çözümü Pareto-optimal çözüme uyar. Ancak, hiçbir kenar çizgisi BC bölgesindeki uygun amaç uzayında bir tanjant noktası türetmeyecektir. Çünkü bir doğru, BC'deki herhangi bir noktaya tanjant olmadan önce, amaç uzayındaki (AB veya CD'de) daha iyi bir noktaya (daha küçük bir f ile) tanjant olacaktır (Deb, 2001:53). Genellikle, amaç uzayının konveks olup olmadığını bilmek zor olduğundan, ağırlıklı toplam yaklaşımını uygularken dikkatli olunmalıdır.

2.1.3. A Priori Yöntemler

Karar vericinin, çözüm sürecinden önce tercihlerini ve beklentilerini belirlediği yöntemlerdir. Problemin çözümünde ulaşılabilecek sonuç önceden bilinemeyeceğinden, beklentilerin gerçekçi bir şekilde oluşturulması bu yöntemde karşılaşılan başlıca güçlüktür. Bu grup yöntemler içinde Değer Fonksiyonu Yöntemi, Sözlüksel (Lexicographic) Sıralama ve Hedef Programlama Yöntemi sayılabilir (Miettinen, 1999:116). Uygulamada, karar verici bireysel amaç fonksiyonlarını skaler bir maliyet fonksiyonu içinde birleştirir ve böylece çok amaçlı optimizasyon problemi, tek amaçlı hale getirilerek klasik optimizasyon yöntemlerinden biriyle

çözülür (Lampinen, 2000:15). Bu sınıftaki yöntemler içinden Değer Fonksiyonu Yöntemi kısaca anlatılmıştır.

Karar verici, bu yöntemde değer fonksiyonunun matematiksel yapısını tam ve açık bir şekilde oluşturmak zorundadır. Değer fonksiyonu, karar vericinin tercihlerini ve amaç uzayında tam bir sıralamasını gösterir. Maksimizasyon problemi olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} & \text{maksimize } U(f(x)) \\ & x \in S \text{ olmak üzere} \end{aligned}$$

Değer fonksiyonu tek amaçlı optimizasyon yöntemleriyle çözülebilir. Basit bir yöntem olmasına rağmen, değer fonksiyonunun matematiksel yapısını belirlemek zordur ve belirlenen değer fonksiyonunun kesinliğini analiz edebilen bir yöntem yoktur (Miettinen, 1999:115-116). Bulunan çözüm, karar vericinin tercihlerine bağlıdır. Bu öznel yapı, farklı karar vericiler tarafından elde edilen sonuçların karşılaştırılamamasına neden olur.

2.1.4. A Posteriori ve A Priori Yöntemlerin Ortak Özellikleri

Posteriori ve Priori sınıflardaki yöntemler genel olarak klasik yöntemler içinde incelenir. Bu yöntemler her iterasyonda güncellenen tek çözümü ve deterministik geçiş kurallarını kullanan arama ve optimizasyon algoritmalarını kapsamaktadır. Bu iki grup yöntemde aşağıda tanımlanan ortak problemler mevcuttur:

- Optimal çözüme yakınsama, seçilen bireysel ilk çözüme bağlıdır.
- Çoğu algoritma bir alt optimal sonuca takılmaya eğilimlidir.
- Bir optimizasyon probleminde etkin olan bir algoritma, farklı bir optimizasyon problemini çözmede etkin olmayabilir.
- Kesikli arama uzayına sahip problemleri ele alırken bu algoritmalar etkin olmayabilir.
- Algoritmalar paralel makinelerde etkin bir şekilde kullanılamazlar (Deb, 2001:79).

Gerçek-hayat optimizasyon problemlerinde doğrusal olmama durumu ve problem değişkenleri arasındaki kompleks ilişkiler çoğunlukla mevcut olduğundan, arama uzayı genellikle, amaç fonksiyonlarının daha aşağı (inferior) değerlerine sahip, çoğu istenmeyen, yerel optimal çözümlerden oluşan birden fazla optimal çözümü içerir. Bu problemleri çözerken, klasik yöntemler bu yerel optimal sonuçların herhangi birinden etkilenecek, bir yerel optimal noktada takılıp kalma problemiyle karşılaşacaktır. Problemin gerçek optimal noktasına ulaşamayacaktır. Bu durumun başlıca sebeplerinden biri klasik optimizasyon tekniklerinin, sayısallaştırma dönüşümleri kullanarak, problemin amaç fonksiyonlarını tek bir amaç fonksiyonu içinde bir araya getirmesidir. Sayısallaştırma fonksiyonları genel olarak üç özelliğe sahiptir (Miettinen, 1999: 62):

1. Herhangi bir Pareto-optimal çözümü içerebilir.
2. Tüm çözümler Pareto-optimaldir.
3. Problemin çözümü için verilen aralık olurlu ise uygun çözüm elde edilebilir.

Problemin çözümünde sadece bir tek çözüm noktası elde edileceği için, Pareto-optimal küme için yöntemin ağırlık değerlerini değiştirerek çözümü yinelemek gerekir.

Ayrıca, her klasik optimizasyon algoritması, spesifik bir problemi çözmek için tasarlanmıştır. Bazı algoritmalar konveks problemler için uygun olabilirken, bazıları konkav problemler için tasarlanmışlardır.

Klasik yöntemler, ağırlık değerlerine duyarlıdır. Bu değerler değiştirildiğinde optimal olmayan sonuçlar da ortaya çıkabilir. Ağırlıklardaki çok küçük bir değişiklik, çözümde büyük etkiler yaratabilir. Ağırlıkların öznel olarak belirlenmesi, bu yöntemlerin kullanımında sakıncalara yol açmaktadır. Tüm bu dezavantajlar sonucu, çok amaçlı optimizasyon problemlerinde klasik yöntemlerin kullanımından uzaklaşmıştır.

2.1.5. İnteraktif Yöntemler

Bu dört sınıfın içinde en gelişmiş yöntemleri içerir ve en tatmin edici sonuçları sağlar. İnteraktif yöntemlerde karar verici bilgisayar programı desteğinden

yararlanır. Çözüm iteratif olarak tekrarlanarak oluşturulur. Her iterasyon sonucunda, karar verici bazı bilgiler edinir ve yeni bilgilere ulaşmak için cevaplar arar. Sonlu sayıda iterasyonun ardından, her interaktif yöntem tatmin edici bir çözüme ulaşır. Bu yöntemlerin temel adımları aşağıda verilmiştir (Miettinen, 1999:131):

1. Bireysel bir olurlu çözüm bulunur
2. Karar verici ile birlikte çalışır
3. Yeni bir çözüm (ya da çözüm kümesi) bulunur. Eğer yeni çözüm (veya çözüm kümesinden biri) veya bir önceki çözümler karar verici için kabul edilebilir ise çözüm süreci durdurulur, değilse 2. Adıma gidilir.

İnteraktif yöntemlerde üç temel durdurma kriteri vardır. En iyi durumda, karar verici arzu edilen bir çözüm bulur ve durur. Alternatif olarak, karar verici daha fazla iterasyon tekrarı yapmak istemeyebilir ve durur. Diğer bir seçenek, bazı algoritmik durdurma kriterlerinin kullanılmasıdır. Bu durumda da durdurma kriteri gerçekleştiğinde karar vericinin çözümü tamamlamak isteyip istemediği kontrol edilmelidir (Gandibleux, 2002: 232).

İnteraktif yöntemler, yapıları, kullandıkları bilgi ve tek amaçlı optimizasyona dönüşüm için kullanılan transformasyonlar bakımından birbirlerinden çok farklıdır. Geoffrion-Dyer-Feinberg yöntemi, ardışık vekil (proxy) yöntemi, Tchebycheff yöntemi, adım yöntemi referans noktası yöntemi ve NIMBUS yöntemi interaktif yöntemler içinde incelenmektedir (Miettinen, 1999: 136). NIMBUS yöntemi, örnek olarak tanıtılmıştır.

NIMBUS (Nondifferentiable Interactive Multiobjective BUndle-based optimization System) diferansiyellenemeyen fonksiyonlarda bile kullanılabilen çok amaçlı optimizasyon sistemidir. Birkaç fonksiyonu aynı anda optimize (minimize) ederek, farklı sonuçların bir kümesini oluşturur. Sistem, istenen çözümlerin "iyiliğini" etkileyen kriteri bilemeyeceğinden, bu çözümlerin en iyisi belirlenemez. En iyi çözümü yalnızca karar verici tarafından seçilebilir (Yalçınöz ve Köksoy, 2007:45).

NIMBUS'da ideal amaç vektörünün bilindiği varsayılır. Karar vericinin amaç fonksiyonlarını olmak üzere beş sınıfa ayırması istenir; $I^<$: iyileştirilmesi gereken amaç fonksiyonları sınıfı, $I^{\leq}$: karar vericini amaç fonksiyonu değerindeki istenen

iyileştirme miktarı bilgisini sağladığı fonksiyonlar sınıfı ve fonksiyonlar için ilgili istek (aspiration) seviyeleri, $I^=$: değerleri bilinen fonksiyonların kabul edilebilir olduğu durumda dahil oldukları sınıf ve $I^{\geq}$: karar vericinin üst sınırını belirlemek istediği fonksiyonlar sınıfı. Bu sınıflandırma dışında kalan amaç fonksiyonları $I^{\diamond}$ sınıfına eklenir. Karar verici $I^{<}$ ve $I^{\leq}$ sınıfları içindeki amaç fonksiyonlarını önemlerine göre sıralayabilir ve toplamaları 1 olan pozitif w_i katsayılarıyla ağırlıklandırabilir. Sınıflandırmadan sonra, NIMBUS için farklı formülasyonlar vardır. Burada örnek olarak bir tanesi gösterilmiştir (Miettinen ve Mäkelä, 2002:201):

$$\text{minimize } \max_{\substack{i \in I^{<} \\ j \in I^{\leq}}} [w_i(f_i(x) - z_i^*), w_j \max[f_j(x) - \bar{z}_j, 0]]$$

$$f_i(x) \leq f_i(x^c), \text{ tüm } i \in I^{<} \cup I^{\leq} \cup I^= \text{ için,}$$

$$f_i(x) \leq \varepsilon_i, \text{ tüm } i \in I^{\geq} \text{ için,}$$

$$x \in S \text{ olmak üzere}$$

problem çözülür.

NIMBUS, alt-rutin olarak Çok Amaçlı Yakınsal Yığın (Multiobjective Proximal Bundle-MPB) yöntemini kullanarak Pareto-optimal çözümleri türetir. MPB, algoritmanın durdurma kriteri sağlanıncaya kadar iterasyonların tekrarlanması sonucu Pareto-optimal çözümleri elde ederek karar vericiye sunar.

2.2. ÇOK AMAÇLI OPTİMİZASYON VE EVRİMSEL ALGORİTMALAR

Çok amaçlı optimizasyon problemlerinin, interaktif yöntemlerle çözümünde bilgisayar kullanımının etkin sonuçlar ortaya çıkarması, bilgisayar destekli yeni çözüm tekniklerinin geliştirilmesine olanak sağlamıştır. Gerçek hayat problemlerinin genellikle fazla sayıda amaç fonksiyonu içeren ve matematiksel olarak daha karmaşık olabilen yapısına uygun çözüm yöntemleri geliştirmek amacıyla farklı disiplinlerden yararlanılmıştır. Bu bağlamda, evrimsel algoritmaların çok amaçlı optimizasyon yöntemlerine uyarlanması, yukarıda tanımlanan dört sınıfın dışında, daha etkin ve doğru Pareto-optimal çözüm kümelerine ulaşılmasını sağlamıştır.

Evrimsel algoritmaların, çok amaçlı optimizasyon yöntemlerine sağladığı katkı, çok amaçlı evrimsel algoritmalar ve bu çalışmada kullanılan yöntem olan NSGA II, bu alt başlık kapsamında incelenmiştir.

2.2.1. Evrimsel Algoritmalar

Evrimsel algoritmalar, biyolojik evrimin özelliklerinden yararlanılarak oluşturulmuş algoritmalarlardır. Mutasyon, çaprazlama, üreme gibi biyolojik çeşitlilik için önemli yapıların algoritma içine dahil edilmesiyle, çözüm noktalarında çeşitliliği ve problemin çözüm aralığı içinde yeni noktaların elde edilmesini sağlar.

Klasik yöntemlerden farklı olarak, bir tek simülasyon çalıştırmasında çoklu sonuçları bulması, Evrimsel Algoritmaların eşsiz bir özelliğidir (Deb, 2001:77). Sadece bu özellik bile Evrimsel Algoritmalar, Çok Amaçlı Optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılması için çok büyük bir avantaj sağlar.

Son yirmi yıldan fazladır bilim, ticaret ve mühendislik alanlarındaki çeşitli problemlerde genetik algoritmalar, arama ve optimizasyon aracı olarak yoğun bir şekilde kullanılmaktadırlar. Başarısının ana nedenleri, çok çeşitli alanlara uygulanabilirliği, kullanım kolaylığı ve global perspektifidir. (Goldberg, 1989:22). Genetik Algoritmalar ve Evrim Stratejileri (ES) en çok bilinen Çok Amaçlı Evrimsel Algoritmalar da temel algoritmalar olarak kullanılır (Deb, 2001:159).

Genetik algoritma kavramı ilk olarak Michigan üniversitesi, Ann Arbor'dan John Holand tarafından ortaya atılmıştır. Sonrasında, o ve öğrencileri bu alanın gelişmesine önemli katkılar sağlamışlardır (Deb, 2001:80). Bu çalışmaların hemen ardından Goldberg'in (1989) Genetik Algoritma kitabı, bu alandaki ilk ve en önemli çalışmalardan biridir.

Genetik algoritmalar (GA), doğal seçim ve doğal genetiklerin işleyişini temel alan arama algoritmalarıdır. Çalışmaların amacı iki noktaya odaklanmaktadır: (1) doğal sistemlerin uyarlanabilen süreçlerini öğretmek ve kesin bir şekilde açıklamak (2) doğal sistemlerin önemli mekanizmalarını muhafaza eden yapay sistem yazılımları tasarlamak. Bu yaklaşım, doğal ve yapay sistem bilimlerinde önemli buluşlara yol göstermiştir (Goldberg, 1989:1).

2.2.1.1. Evrimsel Algoritmaların Temel Prensipleri

Çok sayıda farklı evrimsel algoritma olmasına rağmen, bunların tamamı doğal evrim prensiplerinden geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin çoğu, aşağıdaki ortak özellikleri paylaşır. Bu ortak özellikler aynı zamanda Genetik Algoritmaların, klasik optimizasyon ve arama süreçlerinden farkları olarak da tanımlanabilir (Goldberg, 1989:7):

1. Her iterasyonda bir çözüm yerine, çözümlerin bir popülasyonu çalışır. Çözümlerin rastgele bir setiyle başlayarak, EA her iterasyonda mevcut popülasyonu farklı bir popülasyona dönüştürür. Çözümlerin bir miktarıyla çalışmak, EA'ya bir tek simülasyon çalıştırmasında çoklu optimal çözümlerin elde edilmesi yeteneğini sağlar.
2. Seçme ve arama olarak adlandırılan iki ayrı işlemi vardır. Seçme işleminde, mevcut popülasyondaki daha iyi sonuçlar, çiftleşme havuzunda iki kopyaları oluşturularak vurgulanır. Arama işleminde, yeni sonuçlar, çiftleşme havuzunun çözümleri arasındaki (karar değişkenleri uzayındaki) kısmi bilgiler, karşılıklı değiştirilerek ve kendi komşuluğu içinde karıştırılarak yaratılır.
3. Yukarıdaki iki işlem boyunca, herhangi bir eğim bilgisi kullanılmaz. İlaven, gösterimleri esnektir. Bu özellikler, EA'yı geniş çeşitlilikteki problem yapılarında kullanılabilecek şekilde yeterince esnek yapar.
4. Operatörler, stokastik prensipleri kullanır. Deterministik kurallar kullanılmadığından, EA, çözülecek problemin herhangi özel bir yapısını kullanmaz (Deb, 2001:159-160).

2.2.1.2. Evrimsel Algoritmaların Unsurları ve Kavramlar

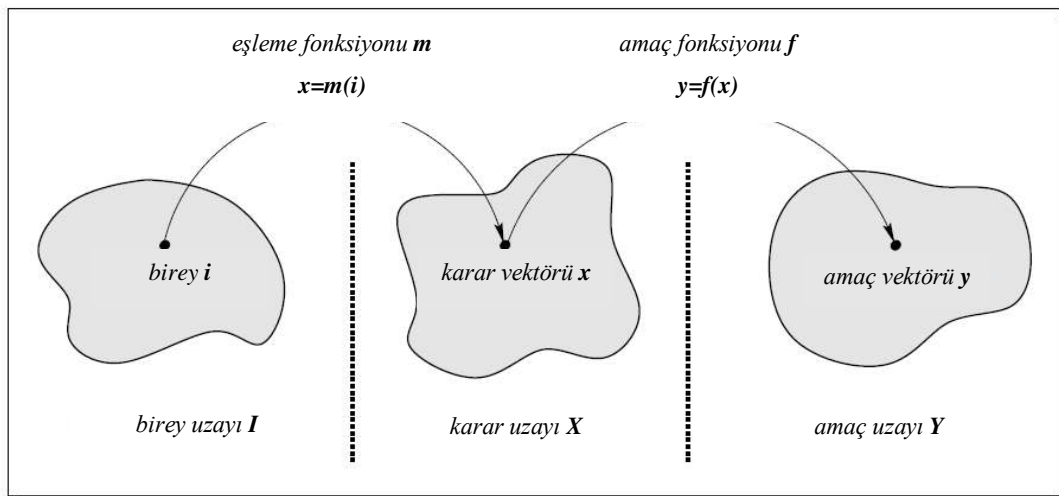
Genellikle, Evrimsel Algoritmalar (EA) üç unsur ile oluşturulur:

1. Çözüm adaylarının bir kümesi oluşturulur,
2. Bu küme bir seçim süreci sonucunda elde edilir ve
3. Genellikle rekombinasyon ve mutasyon genetik operatörleri ile işlenir.

Doğal evrime benzediğinden, bir *yapı* veya *birey* problemin kodlanmış bir çözümüdür. Genellikle, birey, bir biyolojik *genotipe* uyan bir dizi (dizi veya diziler) olarak gösterilir. Bu genotip, bir fenotip içinde açıklandığında (kodu çözüldüğünde), bireysel bir organizmayı tanımlar. Bir genotip, her kromozomun genetik alfabeden belirli değerler (*allel*, *gen çifti*) alan ayrı *genlerden* oluştuğu bir veya daha fazla kromozomdan meydana gelmektedir. Böylece, her birey, incelenen fonksiyonun girdisi olarak kullanılan parametre kümesi içinde kodu çözer ve ele alınan problem için mümkün bir çözümü gösterir, örneğin, karar vektörü (Zitzler, 1999:20). Bununla birlikte, bir birey karar vektörü değildir, uygun ortam temelinde kodlanmaktadır. Kromozomların verilen bir kümesine populasyon denir (Coello ve diğerleri, 2007:24), aynı zamanda çözüm adaylarının kümesi olarak da tanımlanır. Genelleştirme kaybı olmaksızın, bu yapı burada vektör olarak varsayılmıştır.

Stokastik veya tamamen deterministik olabilen seçim sürecinde, yüksek-kaliteli bireyler yeniden üretilirken, düşük-kaliteli bireyler popülasyondan silinir. Amaç, arama uzayının özellikli parçaları üzerinde aramaya odaklanmak ve popülasyonun içindeki ortalama kaliteyi arttırmaktır. Optimizasyon görevine göre, bir bireyin kalitesi skaler bir değerle gösterilir ve buna *uyum* (*fitness*) denir. Kalite, amaç fonksiyonu ve kısıtlarla ilgili olduğundan, bireyin uyumu hesaplanmadan önce kod yapısı çözülmelidir (Zitzler, 1999:20). Bu durum Şekil 2.2'de gösterilmiştir.

Şekil 2.2: Birey uzayı, karar uzayı ve amaç uzayı arasındaki ilişki



Kaynak: Zitzler, 1999:20.

Bir birey $i \in I$ verildiğinde, eşleme fonksiyonu m , i 'den, $x=m(i)$ karar vektörü türeten kodlama algoritmasını açıklar. f fonksiyonunun x 'e uygulanması, i 'ye atanan uyum değeri temelinde ilgili amaç vektörünü oluşturur.

Doğada olduğu gibi, Evrimsel Operatörler (EVOP) daha ve çok daha iyi uyumlu çözümler üretmeye çalışan EA popülasyonu üzerinde çalışmaktadır. EA ile ilgili üç ana EVOP, mutasyon, rekombinasyon ve seçimdir (Coello ve diğerleri, 2007:24). Rekombinasyon ve mutasyon, mevcut çözümlerin varyasyonlarıyla arama uzayında yeni çözümler oluşturmayı amaçlar. Çaprazlama operatörü, ebeveynlerin belirli bir miktarını alır ve ebeveynleri yeniden birleştirerek (rekombinasyon) belirli miktarda çocuk yaratır. Evrimin stokastik yapısını taklit etmek için, çaprazlama olasılığı bu operatörle ilişkilidir. Buna karşılık, mutasyon operatörü, verilen mutasyon oranına göre ilgili vektör içindeki küçük parçaları değiştirerek bireylerde değişiklik yaratır. Çaprazlama ve mutasyon operatörü bireyler üzerinde, birey uzayı içinde çalışır, karar vektörü üzerinde değil (Zitzler, 1999:20).

Yukarıdaki kavramlar bağlamında, doğal evrim iteratif hesaplama süreci ile simüle edilir. Öncelikle, evrim sürecinin başlangıç noktası olan ilk popülasyon rastgele (ya da önceden belirlenen bir şemaya göre) yaratılır. Sonrasında değerlendirme (uyum ataması (fitness assignment), seçim, rekombinasyon ve/veya mutasyon adımlarından oluşan bir döngü belirli sayıda uygulanır. Her döngü iterasyonuna *üretme (generation)* denir ve üretmenin önceden belirlenen bir maksimum sayısı döngüyü bitirme kriteri olarak kullanılır. Fakat diğer şartlar da, örneğin, popülasyondaki durağanlık (durgunluk (stagnation)) veya yeterli kaliteye sahip bir bireyin varlığı, simülasyonu durdurmak için kullanılabilir. Sonunda, sonuç popülasyonundaki en iyi birey(ler) veya tüm evrim süreci boyunca bulunanlar, EA'nın sonuçlarıdır (Zitzler, 1999:21). Bir tek simülasyon çalıştırmasında çoklu sonuçlar bulunmasının nedeni bu süreçtir.

Genetik algoritmalar doğal sistemlere benzetilerek oluşturulduğundan, doğal sistemlerin farklı ortamlara uyum sağlayarak hayatta kalması, yapay sistemlerde ulaşılmak istenen önemli bir durumdur. Bu nedenle, Genetik algoritmalar üzerine yapılan araştırmaların ana konusu sağlam olmasıdır. Sağlamlık, çok sayıda farklı ortamda hayatta kalmak için gerekli olan etkinlik ve etkililik arasındaki dengedir. Yapay sistemler için sağlamlığın sonuçları çeşitlidir. Eğer yapay sistemler daha

sağlam yapılabilirse, maliyetli olan yeniden tasarım azaltılabilir ya da tamamen ortadan kaldırılabilir. Eğer daha yüksek seviyede uyum sağlanırsa, mevcut sistem fonksiyonlarını daha uzun süre ve daha iyi sürdürebilir. Yapay sistem tasarımcıları, mühendislik, bilgisayar ya da işletme sistemlerindeki yazılımcı ve donanımcılar, yalnızca biyolojik sistemlerin sağlamlığına, etkinliğine ve esnekliğine hayret etmektedirler. Kendi kendini onarım, kendi kendine yol gösterme ve yeniden üretim özellikleri biyolojik sistemlerin kuralı iken, ancak en sofistike yapay sistemlerde nadiren mevcut olmaktadır (Goldberg, 1989:2).

2.2.2. Çok Amaçlı Evrimsel Optimizasyon

Çok amaçlı optimizasyon, iki optimizasyon stratejisinin karışımı olarak ele alınmaktadır:

1. Elde edilen çözümlerin, gerçek optimal çözümlerden uzaklığını minimize etmek
2. Çözümlerin elde edilen kümesinde, çözümlerin yayılımını maksimize etmek. (Deb, 2001:160).

Evrimsel Algoritmaların Çok Amaçlı Optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanımı üzerinde yapılan çalışmalar, bu koşulları sağlayan çok sayıda yöntemin bulunmasını sağlamıştır.

Bu yöntemlerin çeşitli problem yapılarına uygulanması sürecinde, en iyi bireylerin sonraki nesillerde de tutulması ihtiyacı elitizm kavramını ortaya çıkarmıştır. Bir nesilde bulunan en iyi çözümleri ardışık nesillerde korumak ve kullanmak için elit koruma operatörü oluşturulmuştur (King ve Rughooputh, 2003:1110). Elitizm, evrimsel algoritmaların performansını arttıran önemli bir mekanizmadır ve birçok şekilde tanımlanabilir. En basit olanı, mevcut popülasyondan alınan, popülasyonun en iyi $\% \epsilon$ 'u doğrudan gelecek nesillere kopyalamaktır. Geri kalan $\%(100 - \epsilon)$ yeni popülasyon, tüm popülasyona (seçilen $\% \epsilon$ elit üyeler dahil) genetik operatörlerin uygulanmasıyla yaratılır. Bu şekilde, popülasyonun en iyi çözümleri yalnızca bir nesilden diğerine geçmekle kalmayıp, aynı zamanda diğer popülasyon üyelerinin yaratımında popülasyonun diğer üyelerine katılır (Deb, 2001:104).

2.2.2.1. Çok Amaçlı Evrimsel Optimizasyon Yöntemleri

Çok amaçlı optimizasyon yöntemlerinin farklı disiplinlere uygulanması ve gerçek hayat problemlerinin çeşitliliği, çok sayıda yöntemin ortaya çıkmasını sağlamıştır. Bu yöntemler içinde en bilinen ve en çok kullanılanları; RAND (A random search algorithm), FFGA (Fonseca's and Fleming's multiobjective EA), NPGA (The Niche Pareto Genetic Algorithm), HLGA (Haleja's and Lin's weighted-sum based approach, VEGA (Vector Evaluated Genetic Algorithm), NSGA (The Nondominated Sorting Genetic Algorithm), NSGA II, SOEA (A single-objective evolutionary algorithm using weighted-sum aggregation), SPEA (The Strength Pareto Evolutionary Algorithm) olarak sayılabilir (Zitzler ve diğerleri, 1999:8).

Uygun çözüm yöntemine karar verebilmek için literatürdeki çalışmalar incelendiğinde, özellikle Deb ve öğrencileri tarafından (2000) önerilen Baskınlanmayan Sıralamalı Genetik Algoritmalar II (Nondominated Sorting Genetic Algorithms II-NSGA II) yönteminin dikkat çekici sonuçlar sağladığı ve özellikle birçok çalışmada tercih edilen yöntem olduğu görülmüştür. NSGA II'nin diğer yöntemlerle karşılaştığı çalışmalar konunun devamında incelenmiştir. Literatürde Srinivas ve Deb (1994) tarafından sunulan NSGA adında diğer bir yöntemden NSGA II'nin farkı, elit koruma operatörü yanında, çeşitlilik koruma mekanizmasının da kullanılmasıdır.

2.2.2.2. Önceki Çalışmalar

Çok amaçlı evrimsel optimizasyon yöntemleri literatürde karşılaştırmalı çalışmalarla incelenmiştir. Bu çalışmalar, yöntemlerin uygun olduğu problem yapılarının ve güçlü-zayıf yönlerinin belirlemesi açısından önemli sonuçlar ortaya çıkarmıştır. Aşağıda NSGA ve NSGA II'nin diğer yöntemlerle karşılaştırıldığı çalışmalara yer verilmiştir.

Srinivas ve Deb (1994:26-27), NSGA'yı önerdikleri çalışmalarında, bu yöntemi Vektör Değerlendirmeli Genetik Algoritma (VEGA) ile karşılaştırmışlardır. Simülasyon sonuçları, bu algoritmanın baskınlanmayan bireyler arasında istikrarlı ve uniform yeniden üretim potansiyelini koruduğunu göstermiştir, bu durum VEGA için

bir darboğazdır. Yöntemlerin karşılaştırıldığı çalışmalardan, Zitzler ve Thiele'nin (1998:299) çalışmasında NSGA'nın diğer algoritmalar tarafından oluşturulan Pareto-optimal kümelerin en büyük bölümünü kapsayan kümeyi oluşturduğu bulunmuştur.

Coello (1999:296), NSGA'nın güçlü olduğu temel alanın çok sayıda amaç fonksiyonuyla çalışabilmesi ve amaç uzayı yerine parametre uzayında paylaşıma izin vermesi olarak tanımlamıştır. Bu durum, bireylerin daha iyi bir dağılımını sağlar ve çoklu eşdeğer çözümlerin bir arada olmasına izin verir.

Zitzler ve diğerlerinin (2000:193) çalışmasında NSGA, NPGA, VEGA, SPEA, SOEA, FFGA ve HLGA algoritmaları karşılaştırılmış ve NSGA'nın Pareto-optimal sınırın uzaklığına ve baskınlanmayan çözümlere göre diğer elitist-olmayan Evrimsel Algoritmali yöntemlerden daha iyi sonuçlar elde ettiği açıklanmıştır. Bununla birlikte her algoritma elitist varyasyonlarıyla karşılaştırılmış, elitizmin Evrimsel Çok Amaçlı Optimizasyonu geliştiren önemli bir faktör olduğu görülmüştür. Elitizm, aynı zamanda çok erken (premature) yakınsamaları önlemek için uygun bir tekniktir.

Deb ve diğerlerinin (2002:195-195) araştırmasında, literatürden alınmış dokuz farklı zor test problemi üzerinde NSGA II, PAES ve SPEA algoritmaları denenmiş ve NSGA II'nin çözümlerin daha iyi bir yayılımını sağladığı ve elde edilen baskınlanmayan sınırdaki daha iyi yakınsadığı görülmüştür. NSGA II'de kullanılan çeşitlilik koruma mekanizması sayesinde diğer algoritmalar arasında en iyisi olduğu belirtilmiştir. Güçlü parametre etkileşimleri olan bir problemde NSGA II, gerçek Pareto-optimal sınıra diğer iki yöntemden daha iyi yakınsama göstermiştir.

NSGA II, literatürde yapılan çalışmalarda belirtilen bu özelliklerinden dolayı, önerilen yöntemde kullanılacak Pareto-optimal kümenin bulunması için seçilmiştir. Özellikle Pareto-optimal sınırdaki çok iyi bir yayılım gösteren bir yöntemin seçilmesi, önerilen yöntemin bulunduğu çözümlerin baskınlanmayan çözümlerle karşılaştırılması açısından önemlidir.

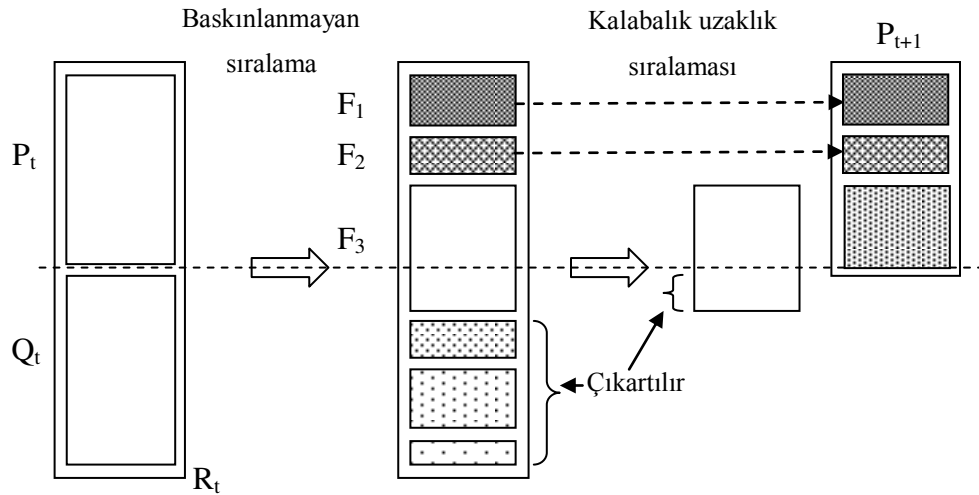
2.2.3. NSGA II

NSGA II, çocuk popülasyon Q_t , ebeveyn popülasyon P_t kullanılarak ilk yaratılan popülasyondur. Bununla birlikte, yalnızca Q_t 'nin baskınlanmayan sınırını

bulmak yerine, öncelikle iki populasyon $2N$ hacimli R_t şeklinde biraraya getirilir. Sonra, tüm R_t populasyonunu sınıflandırmak için baskınlanmayan sıralama kullanılır. Bu, tek başına Q_t üzerinde baskınlanmayan sıralamanın uygulamasıyla kıyaslandığında daha fazla çaba gerektirmesine rağmen, çocuklar ve ebeveyn populasyon çözümleri arasında global baskın olmama (non-domination) kontrolüne izin verir. Baskınlanmama sıralaması bittikten sonra, yeni populasyon, farklı bir baskınlanmayan sınır ile birer birer doldurulur. Doldurma en iyi baskınlanmayan sınırla başlar ve ikinci baskınlanmayan sınırla devam eder, bunu üçüncü baskınlanmayan sınır takip eder ve böyle devam eder.

R_t 'nin tüm populasyon hacmi $2N$ olduğunda, tüm sınırlar, yeni popülasyondaki mevcut N sıra içine yerleştirilemeyebilir. Yerleştirilemeyen sınırlar silinir. Son izin verilen sınır incelendiğinde, son sınırdaki, yeni popülasyondaki kalan sıralardan daha fazla çözüm olabilir. Bu senaryo Şekil 2.3'de gösterilmiştir. Son sınırdan bazı üyeleri rastgele atmak yerine, bu sınırdaki en az kalabalık bölgede bulunan üyeleri seçmek için bir yerleştirme stratejisi kullanmak akıllıca olabilir (Deb, 2001:233).

Şekil 2.3: NSGA II prosedürünün şeması



Kaynak: Deb ve diğerleri, 2002:186.

Yukarıdaki gibi bir strateji, evrimin ilk aşamalarında algoritmanın ilerlemesini çok etkilemeyebilir. Bunun nedeni, erken evrede, birleştirilen popülasyonda çok fazla sınırın olmasıdır. Birçok iyi, baskınlanmayan sınırın N 'ye eklenmeden önce yeni popülasyona çoktandır dahil olması mümkündür. Popülasyonu

doldurmak için hangi çözümün ekleneceği, zor bir sorundur. Bununla birlikte, simülasyonun sonraki aşamaları boyunca, popülasyondaki çözümlerin çoğunun en iyi, baskınlanmayan sınırdaki yayılması mümkündür. Aynı zamanda, $2N$ hacimli birleştirilmiş R_t popülasyonunda, ilk baskınlanmayan sınırdaki çözüm sayısının N 'yi aşması ihtimali vardır. Yukarıdaki algoritma, yerleştirme stratejisinin bu kümeden farklı bir çözüm setini seçmesini garanti eder. Tüm popülasyon Pareto-optimal sınıra yaklaştığında, bu algoritmanın devamı çözümler arasında daha iyi bir yayılımı sağlayacaktır (Deb, 2001:234).

Aşağıda algoritma adımları verilmiştir. Başlangıçta, rastgele bir popülasyon P_0 yaratılır. Popülasyon farklı baskınlanmama seviyelerine göre sıralanır. Her çözüm kendi baskınlanmama seviyesine uygun olarak atanır (1 en iyi seviyedir) (Bekele ve diğerleri, 2007:167). İkili turnuva seçimi, rekombinasyon ve mutasyon operatörleri N hacimli çocuk popülasyonu Q_0 'ı yaratmak için kullanılır. NSGA II prosedürü aşağıda verilmiştir (Deb, 2001:234):

Adım 1 Ebeveyn ve çocuk popülasyon birleştirilir ve $R_t = P_t \cup Q_t$ yaratılır. R_t için bir baskınlanmayan sıralama oluşturulur ve farklı bir sınır tanımlanır: örneğin, $F_i, i = 1, 2, \dots$,

Adım 2 Yeni popülasyon oluşturulur, $P_{t+1} = \emptyset$. $i = 1$ olarak ayarlanır.

$|P_{t+1}| + |F_i| < N$ oluncaya kadar, $P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i$ ve $i = i + 1$ uygulanır.

Adım 3 Kalabalık-sırası ($F_i, <_c$) prosedürü uygulanır ve sıralanmış F_i 'den P_{t+1} 'e kalabalık uzaklığı verileri kullanılarak elde edilen en geniş yayımlı ($N - |P_{t+1}|$) çözüm dahil edilir.

Adım 4 Kalabalık turnuva seçimi, çaprazlama ve mutasyon operatörünü kullanarak P_{t+1} 'den Q_{t+1} çocuk popülasyonu yaratılır.

Adım 3'teki, sınır i 'nin çözümlerinin kalabalık-sıralaması kalabalık uzaklık ölçüsü kullanılarak yapılır. Popülasyon, kalabalık uzaklık değerinin büyüklüğünün azalan sırasına göre düzenlenir. Adım 4'te, aynı zamanda kalabalık uzaklığını kullanan kalabalık turnuva seçim operatörü kullanılır (King ve Rughooputh, 2003:1110).

Burada bahsedilmesi gereken önemli nokta, Adım 1'deki baskınlanmayan sıralama ve popülasyon P_{t+1} 'i doldurma, birlikte yapılabilir. Bu şekilde, baskınlanmayan bir sınır her bulunduğu zaman, bu sınırın hacmi, yeni popülasyon

içine dahil edilip edilemeyeceğini kontrol etmek için kullanılabilir. Eğer bu mümkün değilse, daha fazla sıralama yapmaya gerek yoktur. Bu durum, algoritmanın çalışma zamanını azaltmaya yardım edecektir (Deb, 2001:235).

2.2.3.1. Kalabalık Turnuva Seçim Operatörü

Kalabalık turnuva seçim operatörü, kalabalık uzaklığı operatörüyle oluşturulan uniform dağılımlı Pareto optimal yüzeyden seçim sürecini belirlemek için kullanılır (Chen ve diğerleri, 2006:148). Bu operatörde, uygun çözümün seçimi için kalabalık karşılaştırma operatöründen ve kalabalık uzaklığından yararlanılır.

Kalabalık karşılaştırma operatörü ($<_c$) iki çözümü karşılaştırır ve turnuvanın galibini belirler. Her çözüm i 'nin iki niteliği olduğunu varsayar (Deb, 2001:235):

1. Populasyonda baskınlanmayan r_i rankı.
2. Populasyonda yerel dışlama uzaklığı (d_i)

Çözüm i 'nin d_i kalabalık uzaklığı, i 'nin çevresindeki, populasyondaki diğer herhangi bir çözüm tarafından işgal edilmemiş, çözüm uzayının bir ölçüsüdür. Bu iki nitelik temelinde, kalabalık turnuva seçim operatörü için aşağıdaki şartların herhangi biri gerçekleşirse, i çözümü diğer bir j çözümüyle olan turnuvayı kazanır:

1. Eğer çözüm i daha iyi bir ranka sahipse, $r_i < r_j$ ise.
2. Aynı ranka sahip olmaları durumunda, çözüm i , çözüm j 'den daha iyi bir kalabalık uzaklığına sahipse, $r_i = r_j$ ve $d_i > d_j$ ise.

İlk şart, seçilen çözümün daha iyi bir baskınlanmayan sınırdaki yayılmasını sağlar. İkinci şart, kalabalık uzaklıklarına karar vererek aynı baskınlanmayan sınır üzerinde bulunan her iki çözümün ilişkisini ayırıştırır. Daha az kalabalık alanda bulunan (daha büyük kalabalık uzaklığı d_i ile) kazanır (Deb, 2001:235).

2.2.3.2. Kalabalık Uzaklığı

Populasyondaki çeşitliliği korumak çok amaçlı genetik algoritmalar için en önemli faktörlerden biridir. Çeşitlilik, Pareto yüzey üzerinde uniform olarak dağılan çözümlerin elde edilmesiyle sağlanır. Aksi takdirde, populasyon çok amaçlı genetik algoritma içinde göreceli olarak birkaç küme içinde toplanma eğilimindedir (Konak ve diğerleri, 2006:997). Kalabalık uzaklığı, bu kümelenmeyi önlemek amacıyla,

herhangi bir uyum parametresi kullanmaksızın, en iyi bilinen Pareto yüzey boyunca çözümlerin uniform dağılımını elde eden operatörlerden birisidir. NSGA II algoritması içinde, çeşitliliği korumak için kullanılır. Bunun dışında, uyum paylaşması ve hücre-bazlı yoğunluk gibi çeşitliliği koruma operatörleri mevcuttur.

Populasyondaki belirli bir çözüm i 'nin çevresindeki çözümlerin sıklığının tahminini elde etmek için, amaçların her biri boyunca çözüm i 'nin her iki tarafındaki iki çözümün ortalama uzaklığı alınır. Bu d_i uzaklığı, köşe noktaları olan en yakın komşuları kullanarak şekillendirilen küboidin çevresinin bir tahmini olarak görev yapar ve buna kalabalık uzaklığı denir. Aşağıdaki kalabalık uzaklığı atama prosedürü algoritması, F kümesindeki her noktanın kalabalık uzaklığını hesaplamak için kullanılır (Deb, 2001:236):

Adım 1 Tüm populasyonun ranklarına ayrılır ve baskınlanmayan yüzeyler (F_R) belirlenir ($j=1,2, \dots, R$) F 'deki çözüm sayısı $l = |F_j|$ ile tanımlanır. Kümedeki her i için, ilk atama $d_i=0$ 'dır.

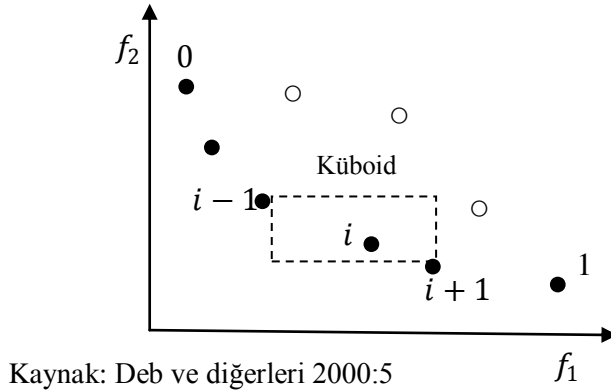
Adım 2 Her amaç fonksiyonu $m = 1,2,\dots,M$ için, f_m 'in azalan bir sırası oluşturulur ya da sıralanmış indis vektörü bulunur: $I^m = \text{sırala}(f_m, >)$.

Adım 3 $m = 1,2,\dots,M$ için kenar çözümlerine büyük bir uzaklık veya $d_{I_1^m} = d_{I_l^m} = \infty$ atanır ve $j = 2$ 'den $(l - 1)$ 'e diğer tüm çözümler için, aşağıdaki atama yapılır:

$$d_{I_j^m} = d_{I_j^m} + \frac{f_m^{(I_{j+1}^m)} - f_m^{(I_{j-1}^m)}}{f_m^{maks} - f_m^{min}}$$

Bir I çözümünün toplam kalabalık uzaklığını bulmak için, her amaca göre çözümlerin kalabalık uzaklıklarının toplanması gerekir. I_j indeksi sıralı listedeki j . üyenin çözüm indeksini gösterir. Böylece, her amaç için, I_1 ve I_l , sırasıyla en düşük ve en yüksek amaç fonksiyonu değerlerini gösterir. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim, I_j teriminin her iki tarafında bulunan iki komşu çözüm arasındaki amaç fonksiyonu değerlerinin farkıdır. Böylece, bu ölçü, küboidin köşelerine yerleşmiş en yakın komşu çözümle çevrelenen küboidin çevresinin yarısını gösterir (Şekil 2.4). Parametreler f_m^{maks} ve f_m^{min} , m . amaç fonksiyonunun populasyon -maksimum ve populasyon-minimum değerleri olarak belirlenebilir (Deb ve diğerleri, 2002:185).

Şekil 2.4: Kalabalık uzaklığının hesaplanması.



2.2.3.3. NSGA II'nin Avantaj ve Dezavantajları

NSGA II'nin Çok Amaçlı Optimizasyon problemlerinin çözümünde diğer yöntemlere göre sağladığı bazı avantajlar vardır. Baskınlanmayan çözümler arasındaki çeşitlilik, popülasyon azaltma aşaması boyunca ve turnuva seçimi ile kullanılan kalabalık karşılaştırma prosedürü uygulanarak belirlenmektedir. Böylece çözümler, kendi kalabalık uzaklıkları (komşuluktaki çözümlerin sıklık ölçüsü) ile yarıştıklarından, fazladan bir yerleştirme parametresine (NSGA, MOGA veya NPGA'daki σ_{share} gibi) ihtiyaç yoktur. Kalabalık uzaklığı amaç fonksiyonu uzayında hesaplanmasına rağmen, istenirse, parametre uzayında da yapılabilir (Deb, 1999:19).

Kalabalık karşılaştırma operatörünün yokluğunda, bu algoritma aynı zamanda Pareto-optimal çözüm kümesine bir yaklaşım kanıtı gösterir. Elitizm mekanizması, önceden bulunmuş Pareto-optimal çözümlerin silinmesine izin vermez (Deb, 2001:240).

Diğer iki Çok Amaçlı Evrimsel Optimizasyon problemi, PAES ve SPEA ile NSGA II'nin karşılaştırıldığı bir çalışmada (Deb ve diğerleri, 2002:195) güçlü parametre etkileşimleri olan bir problemde, NSGA II, diğer iki yönteme göre gerçek sınıra daha yakın çözüm kümesi bulabilmiştir. Burada önemli olan husus, her üç yaklaşımın da bu yüksek oranda epistatik problemi çözerken güçlüklerle karşılaşmalarıdır. Bu çalışma, epistatik problemlerin Çok Amaçlı Evrimsel Algoritmalarda güçlüğüne neden olduğunu da göstermektedir (Deb ve diğerleri, 2002:196). Epistatik durum, bir karakterin ortaya çıkmasından sorumlu olan farklı genler arasında baskılayıcı etkilerin olması durumudur (Deb, 2001:240).

Yukarıda sayılan tüm avantajların yanında birkaç dezavantaj da mevcuttur. Kalabalık karşılaştırması, popülasyon hacmini kısıtlamak için kullanılırsa, algoritma yaklaşım özelliğini kaybeder. İlk baskınlanmayan kümenin hacmi, popülasyon hacminden büyük olmadığında, bu algoritma bunların tamamını korur. Bununla birlikte, sonraki nesillerde, N üyeden fazlası, birleştirilen ebeveyn-çocuk popülasyonunda ilk baskınlanmayan kümeye ait olduğunda, bazı birbirine çok yakın Pareto-optimal çözümler yerlerini diğer baskınlanmayan ama Pareto-optimal olmayan çözümlere verebilirler. Sonraki çözümler, sonraki neslin Pareto-optimal çözümleri tarafından baskınlanabilmesine rağmen, algoritma, sonuçta Pareto-optimal çözümlerin iyi-dağılımlı bir kümesine yakınsamadan önce, Pareto-optimal ve Pareto-optimal olmayan çözümleri üretme döngüsüne girebilir. Daha önce de bahsedildiği gibi, baskınlanmayan sıralama, birçok lagoritmada N hacimli popülasyonda olması yerine, $2N$ hacimli popülasyonda yapılması gerekmektedir (Deb, 2001:241). Bu dezavantajların oluşmaması için, NSGA II'deki operatörlerin kullanımında dikkatli olunması gerekmektedir.

2.3. ÇEKİCİLİK FONKSİYONU

Çekicilik fonksiyonu, çoklu kalite karakteristiklerine sahip bir ürünün kalitesi, bu karakteristiklerden biri istenen limitlerin dışında ise tamamıyla kabul edilemez olması durumunu temel alan bir yaklaşımdır (Pasandideh ve Niaki, 2006:370). Ürün geliştiriciler, özelliklerin istenen bir kombinasyona sahip olan bir üründe ortaya çıkacak durumların oluşturduğu bir kümenin seçilmesi problemiyle karşılaşmaktadırlar. Bu, mevcut durumların bir kümesnini ya da birkaç bağımsız değişkene bağlı olarak bir miktar cevap değişkenin (özelliklerin istenen bir kombinasyonunun) eşanlı optimizasyonunu içeren bir problemdir. Harrington, bu problem için Çekicilik Fonksiyonu yaklaşımını oluşturmuştur (Derringer ve Suich, 1980:214). Derringer ve Suich, çalışmalarında Harrington'ın yaklaşımını değiştirmiş ve tek değişkenli tekniklerle optimize edilebilen Çekicilik Fonksiyonu içinde birkaç cevap değişkeninin nasıl dönüştürüldüğünü göstermiştir. Bu yöntem, cevapların bir kümesine skor atanması ve bu skoru maksimize eden faktör düzeninin seçilmesi şeklinde uygulanır (Pasandideh ve Niaki, 2006:370).

2.3.1. Çekicilik Fonksiyonunun Teorik Yapısı

Çekicilik Fonksiyonunun genel yaklaşımı, öncelikle her cevap modelini (y_i), değişim aralığı $[0,1]$ olan bireysel çekicilik fonksiyonuna (d_i) dönüştürmektir. Eğer cevap (y_i) hedef değerinde ise $d_i = 1$, eğer cevap kabul edilebilir alanın dışındaysa $d_i = 0$ olmaktadır (Myers ve diğerleri, 2009:261). Genel çekicilik fonksiyonu çarpımsal bir modeldir ve maksimize edilir;

$$D = (d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_m)^{\frac{1}{m}} \quad (2)$$

Denklemden m cevap sayısını gösterir.

Eğer cevap y için hedef T bir maksimum değer ise, bireysel çekicilik fonksiyonu

$$d = \begin{cases} 0 & y < L \\ \left(\frac{y-L}{T-L}\right)^r & L \leq y \leq T, \\ 1 & y > T \end{cases} \quad (3)$$

eğer cevap için hedef bir minimum değer ise, bireysel çekicilik fonksiyonu

$$d = \begin{cases} 0 & y < T \\ \left(\frac{U-y}{U-T}\right)^r & T \leq y \leq U \\ 1 & y > U \end{cases} \quad (4)$$

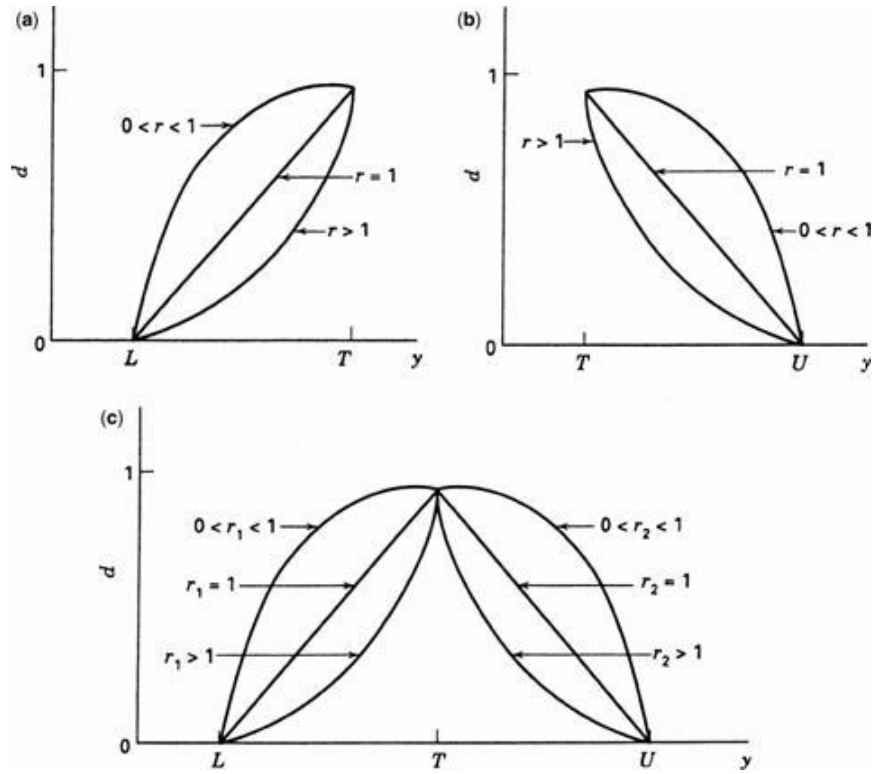
dönüşümleriyle hesaplanır.

İki-terafli çekicilik fonksiyonunda hedefin alt (L) ve üst (U) limitler arasında olduğu varsayılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır

$$d = \begin{cases} 0 & y < L \\ \left(\frac{y-L}{T-L}\right)^{r_1} & L \leq y \leq T \\ \left(\frac{U-y}{U-T}\right)^{r_2} & T \leq y \leq U \\ 0 & y > T \end{cases} \quad (5)$$

Dönüşümlerdeki r , ağırlık değerini göstermektedir. Ağırlık $r = 1$ ise, çekicilik fonksiyonu doğrusaldır. Ağırlığın $r > 1$ seçilmesi, hedefe yakınlığın önemli olduğunu vurgularken $0 < r < 1$ seçilmesi hedefe yakınlığın daha az önemli olduğunu gösterir (Myers ve Montgomery, 2002:452). Bireysel çekicilik fonksiyonlarının yapısı Şekil 2.5'te gösterilmektedir.

Şekil 2.5: Cevap yüzeyi modellerindeki eşanlı optimizasyon için bireysel çekicilik fonksiyonları (a) Amaç y 'yi maksimize etmek, (b) Amaç y 'yi minimize etmek, (c) Amaç y 'yi hedefe yakın tutmak



Kaynak: Myers ve diğerleri, 2009:262.

Bireysel çekicilik fonksiyonları problemin amacına uygun olan dönüşümler yapıldıktan sonra genel çekicilik fonksiyonu (2), bireysel çekicilik fonksiyonlarının geometrik ortalaması alınarak hesaplanır. Genel çekicilik fonksiyonu maksimizasyon yönlüdür ve doğru arama yöntemleri kullanılarak sonuç bulunur.

Genel çekicilik fonksiyonunun ağırlıklar dikkate alınarak oluşturulmuş alternatif bir dönüşümü (6), karar vericiye amaç fonksiyonlarını önem seviyelerine göre değerlendirmesine izin verir.

$$D = (d_1^{w_1} d_2^{w_2} d_3^{w_3} \dots d_m^{w_m})^{1/\sum w_i} \quad (6)$$

Dönüşümde w_i cevap ağırlığı olarak tanımlanır ve karar verici tarafından ilgili cevap modelinin genel yapı içindeki önemine göre belirlenir (Kros ve Mastrangelo, 2001:325). Bireysel ve genel çekicilik fonksiyonları için literatürde farklı düzenlemeler mevcuttur, ancak çoğu düzenleme cevap yüzeyi modelleriyle ilgili olduğu için burada gösterilmemiştir.

2.3.2. Önceki Çalışmalar

Önerilen yöntemde Çekicilik Fonksiyonundan yararlanıldığı için, literatürde Çok Amaçlı Evrimsel Optimizasyon alanında yapılan çalışmalara odaklanılmıştır. Çoklu Cevap Yüzeyi analizinde kullanılan Çekicilik Fonksiyonunun, Çok Amaçlı Optimizasyonda ve Genetik Algoritmalarla birlikte kullanıldığı az sayıda çalışma mevcuttur.

Abajo ve diğerleri (2005:65), sirke örneklerindeki L-prolin ve yedi organik asidin miktar ölçümü ve ayrılmasında uygulanan kromatografik bir yöntemin optimize edilmesinde deney tasarımı ile çekicilik fonksiyonunun birlikte kullanılması temelinde bir optimizasyon stratejisi kullanmışlardır. Dört deney faktörü içeren bir deney tasarımı belirlenmiş ve 25 deney rastgele seçilmiştir. Deneylerle ilgili veriler toplanmış ve oluşturulan cevap modellerinin Çekicilik Fonksiyonları hesaplanmıştır. Birden fazla Çekicilik Fonksiyonunun varlığı, problemin Çok Kriterli Karar Verme problemi olarak ele alınmasını sağlamış ve Toplam Çekicilik Fonksiyonu denklemi türevlenebilen bir fonksiyon olmadığından simplex yöntemi, genetik algoritma veya tavlama benzetimi ile çözülmesi önerilmiştir.

Park ve Kim (2005:525-526) araştırmalarında Çoklu Cevap Yüzeyi Optimizasyonunu Çok Amaçlı Optimizasyon olarak ele alıp, Çok Amaçlı Optimizasyonda geliştirilen tekniklerin Çoklu Cevap Yüzeyi Optimizasyon problemlerinde kullanımını önermişlerdir. Bu bağlamda, Çekicilik Fonksiyonu yaklaşımında Çok Amaçlı Optimizasyon uygulanması için cevapların çekiciliği için memnun olmama veya pişmanlık formülasyonu oluşturmuşlardır. Amaç fonksiyonu

olarak bu bireysel pişmanlıklar için toplamsal bir model önermişler ve bunu minimize etmişlerdir.

Jeong ve Kim (2005:3180) makalelerinde adım yöntemi (STEM) ile Çekicilik Fonksiyonunu birleştirerek D-STEM adında yeni bir yöntem önermişlerdir. Amaç fonksiyonu ile ilgili memnuniyet derecesinde farklılaştırmaya izin vermediği ve tercih bilgisi çıkarım sürecinde esnek seçenekler sağlamadığı için eleştirilen STEM yönteminin metodolojik sınırlarını ortadan kaldırmak için bu iki yöntemi birleştirmişlerdir. Bireysel Çekicilik Fonksiyonunda amaç fonksiyonu değerlerini kullanarak, Toplam Çekicilik Fonksiyonunu maksimize etmişler ve amaç fonksiyonunun her iterasyondaki Bireysel Çekicilik Fonksiyonunu kısıt olarak modele eklemişlerdir. Çekicilik Fonksiyonuna STEM yöntemini adapte etmişlerdir.

Pasandideh ve Niaki (2006:371) çalışmalarında, çoklu-cevap yüzeyi istatistiksel optimizasyonunu çözmek için Çekicilik Fonksiyonu ve simülasyonu genetik algoritma ile birleştirmiştir. Çekicilik Fonksiyonu, çoklu-cevap istatistiksel problemin modellenmesinde kullanılmıştır, simülasyon yaklaşımı simüle edilen sistem için gerekli verileri üretmiş ve son olarak genetik algoritma modeli optimize etmeye çalışmıştır. Dört yöntem içeren bir metodoloji önermişler ve bu dört yöntemin performanslarını karşılaştırmışlardır.

Mehnen ve diğerlerinin (2007:2688) ve Trautmann ve Mehnen (2009:28-29) araştırmalarında gürültülü süreçler için Çok Amaçlı Optimizasyon sürecinde Çekicilik Fonksiyonu uygulaması yapmışlardır. Burada amaç fonksiyonları bir dönüşüme tabi tutularak regresyon denklemlerine benzer tahmin denklemleri elde edilmiş ve bu denklemlere Normal dağılımlı bir gürültü terimi eklenmiştir. Çok Amaçlı Evrimsel Optimizasyon Algoritmasında, bu tahmin denklemleri amaç fonksiyonları olarak kullanılmıştır ve çözüm kümesine ulaşılmıştır.

Cruz-Monteagudo ve diğerleri (2008a, 2008b) iki ayrı çalışmalarında Çok Amaçlı Optimizasyonun Çekicilik-temelli Yöntemleri üzerinde durmuşlardır. Her iki çalışmada da kantitatif yapı-aktivite ilişkisi (QSAR) araştırmalarına Çok Amaçlı Optimizasyon tekniklerinin uygulanmasını araştırmışlardır. Bu çalışmaların birinde (Cruz-Monteagudo ve diğerleri, 2008a:2448), ilaçların istenen farmasötik profilleri ile ilgili amaçların optimize edilmesini incelemişlerdir. Bunun için molekül adaylarının bir kümesini, farmakolojik, farmakokinetik ve toksikolojik profillerde

eşanlı olarak araştırarakları global QSAR çalışmasında Çekicilik Fonksiyonu temelli Çok Amaçlı Optimizasyon modeli önermişlerdir. Diğer çalışmada ilaç adaylarının etkinliği, biouygunluğu ve güvenliği üzerinde aynı model uygulanmıştır (Cruz-Monteagudo ve diğerleri, 2008b:900). Cevap modelleri en küçük kareler regresyonu ile tahminlenmiş ve Çekicilik Fonksiyonları elde edilmiştir. Çekicilik-temelli bir sıralama algoritması önerilmiştir. Belirli bir ilaç adayının optimal duruma benzerliği bulunmuş, bu benzerlik ölçüsünün normalizasyonu ile Çekicilik fonksiyonu arasındaki farkın minimizasyonu, uygun aday ilacı seçmek için önerilmiştir. Bu minimizasyon için en küçük kareler doğrusal olmayan eğri uyurma algoritması kullanılmıştır.

Wagner ve Trautman (2010:691) araştırmalarında amaç fonksiyonlarını uyguladıkları bir dönüşümle regresyon denklemlerine benzeterek bir tahmin denklemi oluşturmuş ve bu denklemlere Bireysel Çekicilik Fonksiyonu uygulamışlardır. Elde ettikleri fonksiyonları amaç fonksiyonu olarak kullanarak Çok Amaçlı Evrimsel Optimizasyon yöntemi içinde kullanarak çözüm kümesini oluşturmuşlardır.

2.4. ÖNERİLEN YÖNTEM

Çok Amaçlı Evrimsel Optimizasyon problemlerinin çözümünden elde edilen Yüksek-hacimli Pareto-optimal küme içinde hangi noktanın karar verici tarafından tercih edileceği ayrı bir seçim problemini oluşturmaktadır. Bu seçim probleminin çözülmesi amacıyla, bu çalışma kapsamında, birçok farklı yöntem denenmiş, Çoklu Cevap Yüzeyi modellerindeki Çekicilik Fonksiyonu yaklaşımının uygun çözüm sağladığı görülmüştür. Yapılan çalışmalar sonucunda, Bireysel Çekicilik Fonksiyonu dönüşümü bazı düzenlemelerle, Çok Amaçlı Optimizasyon problemlerinin yapısına uyarlanmıştır.

Cevap yüzeyi modellerinde y , ilgili cevap için tahminlenen regresyon denklemidir. Çok Amaçlı Optimizasyon için uyarlandığında, öncelikle Pareto-optimal kümelerin regresyon denklemleri üzerinden analiz yapılmış, ancak bazı problemlerde regresyon denklemlerinde katsayıların anlamsız çıkması problemiyle karşılaşmıştır. Aynı zamanda amaç fonksiyonunun yapısındaki trigonometrik, üstel

vs özelliklerin sonuçtaki etkilerini görebilmek için, Çok Amaçlı Optimizasyon problemlerinin orijinal amaç fonksiyonlarının kullanılması tercih edilmiştir. Bu tercih sonucu yapılan çözümde, karar vericiye önerilebilecek uygun noktaya ulaşılması, orijinal amaç fonksiyonunu kullanmanın doğru bir karar olduğunu göstermiştir.

Çok Amaçlı Evrimsel Optimizasyona Çekicilik fonksiyonunu uyarlarken temel bir sorunla karşılaşmıştır. Bireysel Çekicilik fonksiyonunun maksimizasyon yönlü olması, Çok Amaçlı Optimizasyon problemlerinin genellikle minimizasyon yönlü yapısına uymamaktadır. Dönüşüm (4) minimizasyonun hedeflendiği durumlar içindir. Görülmektedir ki cevap değeri üst sınıra yaklaştıkça d_i ; 0'a yaklaşmakta, üst sınırdan uzaklaştıkça, alt sınıra yaklaşmaktadır ve d_i bireysel çekicilik fonksiyonu 1'e yaklaşmaktadır. Üst sınırdan uzaklaşması istenen durum olduğundan, D genel çekicilik fonksiyonunu maksimizasyon yönlü hesaplanmaktadır. Oysa çok amaçlı optimizasyon problemlerinde minimum değere yakınlık önemlidir. Bu nedenle formülde bazı değişiklikler yapılmıştır.

Genel çekicilik fonksiyonunda cevap değerlerinin regresyon denklemleri kullanılmaktadır. Üst ve alt limitler, ilgili cevap için mevcut olan kalite karakteristiklerinin sınırlarıdır. Formüldeki regresyon denklemleri yerine $f_i(x)$ fonksiyonu, alt ve üst limitler yerine de çok amaçlı optimizasyon probleminin çözümünden elde edilen Pareto-optimal kümenin ilgili amaç fonksiyonu için minimum ve maksimum değerleri f_i^{min} ve f_i^{max} kullanılmıştır. Genel çekicilik fonksiyonunu minimizasyona dönüştürmek için de fonksiyon değerinden f_i^{min} değeri çıkarılmış, paydada $f_i^{max} - f_i^{min}$ nispi uzaklığı kullanılarak formül normalize edilmiştir. Yapılan değişiklikler sonucu oluşturulan Çok Amaçlı Optimizasyon için uyarlanmış-bireysel çekicilik fonksiyonu, uyarlanmış-genel çekicilik fonksiyonu, aşağıda verilmiştir:

$$d_i = \left[\frac{f_i(x) - f_i^{min}}{f_i^{max} - f_i^{min}} \right]^r, \quad (7)$$

$$minD = (d_1^{r_1} d_2^{r_2} d_3^{r_3} \dots d_n^{r_n})^{1/n} \quad (8)$$

Elde edilen sonuç önemli ölçüde, ağırlık değerinin (r) seçimine de bağlıdır. Çekicilik fonksiyonunun alternatif kullanımlarında farklı ağırlık değerleri kullanımları mevcuttur. Dönüşüm (3), (4) ve (5)'te kullanılan r ağırlığı Çekicilik fonksiyonunun şeklini etkilemektedir (Şekil 3). Buna göre hedefe yakınlığın önemli olduğu durumda $r > 1$ olarak seçilmektedir. Bu sayının 1'den ne kadar büyük olacağını belirlemek için farklı ağırlıkların Pareto-optimal küme üzerindeki etkileri incelenmiştir. Optimizasyon problemleri genellikle doğrusal olmayan yapıda olduğu için 2'den daha büyük ağırlık değerlerinin problemin çözümünü daha da zorlaştırdığı ve problemin matematiksel yapısını değiştirdiği görülmüştür. Bu nedenle, hedef değere yakınlık dikkate alındığında ve problem yapısını etkilemeksizin seçilebilecek ağırlık değerinin 2 olarak belirlenmesi tercih edilmiştir.

Çekicilik Fonksiyonunun önemli bir özelliği, kısıt denklemlerini de genel çekicilik fonksiyonu içine dahil edilmesine izin vermesidir. Bu durum, Çok Amaçlı Kısıtlı Optimizasyon problemlerinin çözümü için kullanılmış ve etkin sonuçlara ulaşılmıştır. Kısıt denklemlerinin de çözümde etkili olması, elde edilen sonucun hassasiyeti açısından avantajlıdır. Bu amaçla, kısıt denklemleri için $\leq$ durumunda sağ taraf sabiti; f_i^{max} , $\geq$ durumunda sağ taraf sabiti; f_i^{min} değeri olarak alınmış bireysel çekicilik fonksiyonundaki diğer ilgili değerler kısıt fonksiyonunun, sırasıyla, minimizasyonu ve maksimizasyonu hesaplanarak elde edilmiştir. Bu değişiklikler yapıldıktan sonra, tüm kısıt denklemleri, amaç fonksiyonları gibi, uyarlanmış-genel çekicilik fonksiyonu formülasyonuna dahil edilmiştir.

Genel çekicilik fonksiyonu, tüm amaç ve kısıt fonksiyonları düzenlenerek, oluşturulduktan sonra, elde edilen optimizasyon amaç fonksiyonu, matematiksel yapısına göre uyum olan bir yöntemle çözülmüştür. Genellikle doğru arama yöntemleri ile sonuca ulaşılabilen, bazı karmaşık problemlerde genetik algoritmalarla uygun çözüm bulunmaktadır.

Yukarıda teorik yapısı verilmiş olan, önerilen çözüm prosedürü iki aşamadan oluşmaktadır. İlk aşamada, Çok Amaçlı Optimizasyon problemleri öncelikle kısıtsız problemler için Matlab R2012a programı ve kısıtlı problemler için JMetal programı yardımıyla genetik algoritmali çok amaçlı optimizasyon yöntemlerinden NSGA II algoritmasıyla çözülmüş ve problemlerin Pareto-optimal kümeleri elde edilmiştir. İkinci aşamada, önerilen yöntem uygulanmış ve gerekli dönüşümler yapılarak amaç

ve varsa kısıt fonksiyonlarının uyarlanmış-bireysel çekicilik fonksiyonları, ardından uyarlanmış-genel çekicilik fonksiyonu hesaplanmıştır. Her iki çözümde elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak, Pareto-optimal çözüm kümesi üzerinde tercih edilebilecek uygun noktalar belirlenmiştir. Önerilen bu yöntem, Çok Amaçlı Optimizasyon probleminin farklı yöntemler kullanılarak iki defa çözülmesini gerektirse de, elde edilen sonuç karar vericiye çözüm kümesindeki hangi bölgeye odaklanacağı konusunda önemli bilgi sağlamaktadır.

Uygulama, öncelikle literatürde sıklıkla kullanılan test problemleri üzerinde yapılmış ve amaç fonksiyonlarının birbiriyle eşit önemde olduğu varsayılmıştır. Ardından iki gerçek hayat problemi üzerinde önerilen yöntem test edilmiştir. Gerçek problemlerle yapılan uygulamada öncelikle tüm amaçların eşit değerde olduğu varsayımı ile problemler çözülmüş, ardından amaç fonksiyonlarından birine bir ağırlık değeri verilerek sonuca ulaşılmış ve her iki durumda elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Sonraki bölümde uygulamanın ayrıntıları anlatılmaktadır.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

UYGULAMA

Çok amaçlı optimizasyon problemleri için yeniden düzenlenmiş, önceki bölümde formülasyonu verilen uyarlanmış-çekicilik fonksiyonunun evrimsel algoritmali çok amaçlı optimizasyon çözümüne destek sağlayacak bir yöntem olarak önerilebilmesi için problem çözümündeki davranışının incelenmesi gerekmektedir. Bu kaygıyla, uyarlanmış-çekicilik fonksiyonunun, uygulamada çok amaçlı optimizasyon problemlerindeki kullanımının uygunluğu, öncelikle çok amaçlı optimizasyon literatüründe kullanılan test problemleri üzerinde denenmiştir. Çözümde elde edilen minimizasyon sonuçlarının, Pareto-optimal küme içinde olduğu, bazı problemlerde algoritmaların bulamadığı yeni optimum noktalara ulaşıldığı görülmüştür. Test problemleri üzerindeki denemelerin ardından, çok amaçlı optimizasyon literatüründen iki gerçek uygulama problemi seçilerek, bu problemler üzerinde iki farklı senaryo uygulanmış ve uyarlanmış-çekicilik fonksiyonu yöntemiyle Pareto-optimal küme içinde minimum noktaları bulunmuştur. İlk senaryo, amaç fonksiyonlarının ağırlıkları eşit alınarak (ağırlıksız) optimum çözüm, ikinci senaryo, amaç fonksiyonlarından biri ağırlıklandırılarak hesaplanan yeni optimum noktayı içermektedir. Gerçek uygulama problemlerinden ilki, küçük uçaklarda kullanılan bir şanzıman tasarımı, diğeri bir kentteki yağmur suyu tahliye sistemi optimizasyonudur. Her iki problem için, minimum noktalar Pareto-optimal kümedeki diğer sonuçlarla karşılaştırılarak, amaç fonksiyonları arasındaki ilişkiler, bulunan minimumların problemler içindeki anlamı ve karar vericiye amacına uygun karar vermesine yardımcı olacak bir destek sağlayıp sağlamadığı araştırılıp yorumlanmıştır.

3.1. TEST PROBLEMLERİ

Çok amaçlı optimizasyon literatüründe tanımlanan test problemleri çeşitlilik ve türleri açısından çok fazla sayıdadır. Uygulamada, araştırmak ve test etmek istenilen özelliklere göre problemlerin belirli bir sınıfına odaklanılmıştır. Bu sınıf, gerçek değerli parametreleri olan, amaç fonksiyonları iyi tanımlanmış matematiksel

fonksiyonlara sahip çok amaçlı optimizasyon problemleri olarak özetlenebilir. Test problemleri kullanılarak yapılan araştırma makalelerinde en çok tercih edilen fonksiyonlar, özellikle Pareto-optimal geometrileri karşılaştırabilmek amacıyla seçilmiştir.

Uygulamada çok amaçlı optimizasyon literatüründe kullanılan test problemleri seçilirken öncelikli hedef, önerilen yöntemin problemlerin matematiksel yapılarındaki farklılıklardan nasıl etkilendiğini görmektir. Amaç fonksiyonlarının birlikte çözümünden elde edilen çözüm uzayında bu farklılıkları daha iyi tespit edebilmek amacıyla Pareto-optimal sınır grafikleri kullanılacağı için, test problemleri içinden iki veya üç-amaç fonksiyonu içeren problemler belirlenmiştir. Bu problemler içinden de Pareto-optimal geometrileri konveks, konkav, kesikli, sürekli ve karma olan problemler seçilmiştir. Seçilen problemler aynı zamanda, amaç ve kısıt fonksiyonlarının matematiksel yapısı ikinci ve üçüncü dereceden fonksiyonları, trigonometrik, üstel veya toplamsal fonksiyonları içermektedir. Hem Pareto-optimal geometrileri, hem de matematiksel yapıları birbirinden farklı 17 test problemi denenerek, önerilen yöntemin davranışı ölçülmüştür. Test problemleri kısıtsız ve kısıtlı optimizasyon problemleri olarak iki alt sınıfta incelenmiştir. Test problemlerinin tamamı minimizasyon yapısındadır, maksimizasyon istenen problemlerin minimizasyona dönüştürülmesi gerekmektedir. Bunun nedeni, kullanılan çok amaçlı optimizasyon programlarının minimizasyon için çözüm bulmasıdır.

3.1.1. Çok Amaçlı Kısıtsız Optimizasyon Test Problemleri

Test problemlerinin 12 tanesi çok amaçlı optimizasyon literatüründe kullanılan kısıtsız problemlerden seçilmiştir. Bu problemlerde kısıt denklemleri yoktur, fakat değişkenler için sınırlar ya da aralık değerleri vardır. Test problemleri Tablo 3.1'de, çekicilik fonksiyonu çözümleri Tablo 3.3'de ve Pareto-optimal kümelerin grafikleri üzerindeki yerleri ve x karar değişkenlerinin grafikleri Şekil 3.1'de gösterilmektedir. Problemlerin çok amaçlı optimizasyon çözümü Matlab Optimizasyon araç kutusundaki, genetik algoritma kullanarak çözüme ulaşan, gamultiobj çözücüsüyle yapılmış, Pareto-optimal kümeler elde edilmiştir. Test

problemlerinin matematiksel yapıları ve Pareto-optimal sınırlarıyla ilgili açıklamalar aşağıda alfabetik sırayla verilmiştir.

FA1, Farhang-Mehr ve Azarm'ın (2002: 727) çalışmasında, Deb'in çok amaçlı optimizasyon test problemi oluşturma metodolojisi kullanılarak oluşturulmuştur. Huband ve diğerleri (2006: 502), çok amaçlı optimizasyon test problemi olarak önermiştir. FA1, üç değişkenlidir ve üç amaç fonksiyonundan oluşmaktadır. Birinci amaç fonksiyonu f_1 , monoton olarak azalan bir fonksiyondur ve diğer amaç fonksiyonlarında (f_2 ve f_3) Pareto-optimal yüzün sürekliliğini sağlamaktadır. İkinci ve üçüncü amaç fonksiyonlarında f_1 'in dışındaki fonksiyonlar, tek-modlu, tek değişkenli ve doğrusal fonksiyonlar olarak seçilmiştir. Bu fonksiyonlar Pareto-optimal yüz yönündeki arama uzayında sapma oluşturmazlar, yan yüzlerde sapmalar vardır. Bu nedenle, çözümler arasında Pareto-optimal sınırın alt-bölgelerinde yoğunlaşma eğilimi vardır. Birinci amaç fonksiyonundaki doğrusal olmayan yapı, Pareto-optimal yüz üzerindeki çözüm noktalarının dağılımında uniform olmama durumuyla sonuçlanır (Farhang-Mehr ve Azarm, 2002: 726-727). Bu durum, çözüm setindeki çeşitliliği korur. Pareto-optimal çözüm kümesi konvektir.

Far1(Farina, 2002: 961), iki değişkenli ve iki amaç fonksiyonludur. Huband ve diğerlerinin (2006: 502) çalışmasında çok amaçlı optimizasyon test problemi olarak önerilmiştir. Bağlantılı (sürekli), konkav elemanlardan ve birkaç düzgün olmayan bağlantılı konveks elemandan oluşan karma Pareto optimal yüze ve bağlantısız Pareto-optimal kümeye sahiptir (Huband ve diğerleri, 2006: 504).

FF1 (Fonseca ve Fleming, 1995b: 13-14), iki amaç fonksiyonu da üstel yapıdadır. Pareto-optimal küme, sırt şeklinde oluşmuştur ve konkavdır (Fonseca ve Fleming, 1995b: 16). Fonseca ve Fleming (1998; 30) yılındaki, Huband ve diğerleri (2006; 502) ve Coello ve diğerleri (2007: 622) bu problemi çok amaçlı optimizasyon test problemi olarak kullanmışlardır.

IM1(Ishibuchi ve Murata, 1998: 398), konveks olmayan uygun çözüm alanına sahiptir, iki değişkenli ve iki amaç fonksiyonlu bir test problemidir. Coello ve diğerleri (2007: 623), Huband ve diğerleri (2006: 502) test problemi olarak kullanmışlardır.

JOS2 (Jin ve diğerleri, 2001: 1047), üç değişkenli, iki amaç fonksiyonlu test problemidir. Huband ve diğerlerinin (2006: 502) çalışmasında test problemi olarak

kullanılmıştır. Pareto-optimal sınırın ne tam konveks ne de tam konkav olduğu bir karma test problemidir. Konveks kısmı daha küçüktür. Sürekli Pareto-optimal yüze sahiptir.

Kur1 (Deb, 2001: 341), Deb tarafından Kursawe'in (1991:196) çalışmasından alınan ve ikinci amaç fonksiyonundaki $\sin^3(x_i)$ yerine $\sin(x_i^3)$ kullanılarak oluşturulan, iki amaç fonksiyonlu test problemidir. Huband ve diğerleri (2006: 502), Coello ve diğerleri (2007: 622) bu test problemini çok kullanılan test problemleri arasında tanıtmışlar ve çok amaçlı optimizasyon algoritmalarında kullanmışlardır. Deb ve diğerleri (2002: 187) hızlı ve elitist çok amaçlı genetik algoritma çalışmasında NSGA-II'nin uygulamasında kullanmıştır. Kur1 test probleminin Pareto-optimal kümesi konveks değildir, bağlantısızdır. Üç ayrı bağlantısız Pareto-optimal bölgeden oluşur. Doğru Pareto-optimal çözümler için ilgili karar değişkenlerini bilmek zordur. Karar değişkenleri uzayında da çözümler bağlantısız bir kümeyi oluşturmaktadır. Özellikle Pareto-optimal grafiğin (Şekil 3.1) orta bölümündeki ikinci parçası, amaç uzayında sürekli olmasına rağmen, karar değişkenleri uzayında bağlantısızdır. Pareto-optimal bölgenin bu kesikli yapısı nedeniyle, optimizasyon algoritmasının tüm bölgelerde Pareto-optimal çözümleri bulması zor olabilir (Deb, 2001: 341).

LE1 (Lis ve Eiben, 1997: 63), Pareto-optimal sınırı sürekli ve konkav olan, iki değişkenli, iki amaç fonksiyonlu test problemidir. Coello ve diğerleri (2007: 623) çok amaçlı optimizasyon algoritmaları ile bu test problemini incelemişlerdir. Huband ve diğerlerinin (2006) çalışmasında, test problemi olarak önerilmiştir.

MOP2 (Fonseca ve Fleming, 1995a: 50), MOP5 (Deb, 2001: 343) ve MOP7 (Huband ve diğerleri, 2006: 491), Veldhuizen'in (1999) yedi çok amaçlı test seti içinden alınmıştır, MOP5 ve MOP7 problemlerinin orijinali Viennet ve diğerlerinin (1996:257) çalışmasında sunulmuştur. Deb (2001: 340,343), MOP2 ve MOP5'in evrimsel algoritmalarla çözümlerini ve Pareto-optimal yüz grafiklerini incelemiştir. Huband ve diğerleri 2006 yılındaki çalışmasında, bu üç test problemini evrimsel algoritmalar arasındaki güçlü ve zayıf yönleri belirlemek amacıyla kullanmıştır. Coello ve diğerleri (2007: 622-624) de bu test problemlerini çok amaçlı optimizasyon algoritmaları ile incelemiştir.

MOP2 konveks olmayan Pareto-optimal sınıra sahiptir. $n=3$ olarak alındığı için üç değişkenli, iki amaç fonksiyonlu bir problemidir. Problemi ilginç kılan, amaç uzayındaki arama uzayı ve Pareto-optimal fonksiyon değerleri, problemin boyutuna (n parametreye) bağlı değildir (Deb, 2001: 340)

MOP5, ayırsamayan, çok modlu, gerçek-dünya problemlerinin iyi bir temsilcisidir. Dejenere konveks doğru ve dejenere karma konveks-konkav doğru MOP5'in Pareto yüzünü oluşturur. Üç amaç fonksiyonu vardır. İki değişkene sahiptir. Birinci ve üçüncü amaç fonksiyonlarındaki parametrik ilişki yardımıyla Pareto-optimal kümenin gerçek yeri bulunabilir.

$$f_1 = 0.5r + \sin r,$$

$$f_2 = \frac{1}{1+r} - 1.1 \exp(-r).$$

$$r = x_1^2 + x_2^2, \quad 0 \leq r \leq 18.$$

r 'nin her değeri için ikinci amaç fonksiyonunun minimumu, doğru Pareto-optimal küme için bir aday çözüm oluşturabilmektedir (Deb, 2001: 344). Şekil 3.1'deki Pareto-optimal sınır grafiği, MOP5 test probleminin gerçek yerini göstermektedir. Geçmiş yıllardaki tüm çalışmalar bu Pareto-optimal bölgeyi yanlış bulmuştur.

MOP7, bağlantılı (sürekli), bazı bölgelerde dejenere doğruların olduğu, konveks Pareto-optimal yüze sahiptir (Huband ve diğerleri, 2006: 490) .

ZDT1 ve ZDT2 (Deb, 2001: 356, 357), Zitzler ve diğerlerinin (2000) oluşturduğu 6 problemten oluşan test setinden alınmıştır. Evrimsel algoritma literatüründe en çok kullanılan çok amaçlı optimizasyon problem setlerinden biridir. İki temel avantaj sunar: Problemlerin Pareto-optimal sınırları iyi tanımlanmıştır ve yeni algoritmalarla karşılaştırmaya olanak sağlayan çeşitli araştırma makalelerinden elde edilen test sonuçları mevcuttur (Huband ve diğerleri, 2006: 487). Deb (2001: 356-357), evrimsel algoritmalarla çözdüğü bu iki test problemini kitabında sunmuştur. Aynı zamanda Deb ve diğerlerinin (2002: 187) elitist çok amaçlı genetik algoritma: NSGA-II çalışmasında bu iki test problemi kullanılmıştır. Coello ve diğerleri (2007: 195-196), çok amaçlı optimizasyon tanım kümesi özelliklerini incelerken ve Nebro ve diğerleri, (2005:452) çok amaçlı optimizasyonda saçılım araması uygulaması için bu iki test problemini kullanmıştır. ZDT1 test problemi, Trautmann ve diğerlerinin (2008: 834) çalışmasında, sistematik istatistiksel test

temelinde çok amaçlı evrimsel algoritmalar için bir yaklaşım kriteri uygulamasında ve Wong ve diğerlerinin (2010: 747) çalışmasında, immün tabanlı evrimsel algoritmaların uygulamasında test problemi olarak kullanılmıştır.

ZDT1 ve ZDT 2 test problemleri, minimize edilecek iki amaç fonksiyonuna sahiptirler. Problemlerin hiçbiri dejenere Pareto-optimal yüze sahip değildir. Bu problemler f_1 amaç fonksiyonunu, tek değişkenli bir fonksiyon gibi kullanmasına rağmen, problemin zorluğu çok değişkenli bir f_1 fonksiyonu kullanılarak artırılabilir. ZDT1, 30 değişkenli, konveks ve sürekli Pareto optimal kümeye sahip bir problemdir. ZDT1 ve ZDT2'de yüz boyunca çözümler uniform dağılışı gösterirler. Çok amaçlı genetik algoritmanın karşılaşılabilecek zorluk, karar değişkenlerinin çok fazla sayıda olmasıdır (Deb, 2001: 356, 357). ZDT2'nin tek farkı konveks olmayan Pareto-optimal kümeye sahip olmasıdır. ZDT1 ve ZDT2, 30 değişkenli fonksiyonlar oldukları için x değişkenlerinin grafikleri çizilememiştir.

Tablo 3.1: Çok Amaçlı Kısıtsız Optimizasyon Test Problemleri (Alfabetik sırayla)

Adı	Problem	Parametre Tanım Kümesi	Pareto Optimal Geometri
FA1	$f_1(x_1) = (1 - \exp(-4x_1))/(1 - \exp(-4))$ $f_2(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + 1)(1 - (f_1(x_1)/(x_2 + 1))^{0.5})$ $f_3(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + 1)(1 - (f_1(x_1)/(x_3 + 1))^{0.1})$	[0, 1]	Konveks
Far1	$f_1(x_1, x_2) = -2 \exp(15(-(x_1 - 0.1)^2 - x_2^2))$ $- \exp(20(-(x_1 - 0.6)^2 - (x_2 - 0.6)^2))$ $+ \exp(20(-(x_1 + 0.6)^2 - (x_2 - 0.6)^2))$ $+ \exp(20(-(x_1 - 0.6)^2 - (x_2 + 0.6)^2))$ $+ \exp(20(-(x_1 + 0.6)^2 - (x_2 + 0.6)^2))$ $f_2(x_1, x_2) = 2 \exp(20(-x_1^2 - x_2^2))$ $+ \exp(20(-(x_1 - 0.4)^2 - (x_2 - 0.6)^2))$ $- \exp(20(-(x_1 + 0.5)^2 - (x_2 - 0.7)^2))$ $- \exp(20(-(x_1 - 0.5)^2 - (x_2 + 0.7)^2))$ $+ \exp(20(-(x_1 + 0.4)^2 - (x_2 + 0.8)^2))$	[-1, 1]	Karma
FF1	$f_1(x_1, x_2) = 1 - \exp(-(x_1 - 1)^2 - (x_2 + 1)^2)$ $f_2(x_1, x_2) = 1 - \exp(-(x_1 + 1)^2 - (x_2 - 1)^2)$	[-4, 4]	Konkav
IM1	$f_1(x_1) = 2\sqrt{x_1}$ $f_2(x_1, x_2) = x_1(1 - x_2) + 5$	$x_1 \in [1, 4]$ $x_2 \in [1, 2]$	Konkav
JOS2	$f_1(x_1) = x_1$ $f_2(x_1, \dots, x_n) = g(1 - (f_1(x_1)/g)^{0.25} - (f_1(x_1)/g)^4)$ $g = 1 + \sum_{i=2}^n x_i/(n - 1),$ $n=3$ için	[0, 1]	Karma

Kur1	$f_1(x_i) = \sum_{i=1}^2 \left[-10 \exp(-0.2 \sqrt{x_i^2 + x_{i+1}^2}) \right]$ $f_2(x_i) = \sum_{i=1}^3 [x_i ^{0.8} + 5 \sin(x^3)]$	[-5, 5]	Kesikli, bağlantısız
LE1	$f_1(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{0.125}$ $f_2(x_1, x_2) = ((x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2)^{0.25}$	[-5, 10]	Konkav
MOP2	$f_1(x_1, \dots, x_n) = 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^n (x_i - 1/\sqrt{n})^2\right)$ $f_2(x_1, \dots, x_n) = 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^n (x_i + 1/\sqrt{n})^2\right)$ $n = 3 \text{ için}$	[-4, 4]	Konkav
MOP5	$f_1(x_1, x_2) = 0.5(x_1^2 + x_2^2) + \sin(x_1^2 + x_2^2)$ $f_2(x_1, x_2) = \frac{(3x_1 - 2x_2 + 4)^2}{8} + \frac{(x_1 - x_2 + 1)^2}{27} + 15$ $f_3(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} - 1.1 \exp(-(x_1^2 + x_2^2))$	[-3, 3]	Konveks, bazı bölgelerde dejenere doğrular var
MOP7	$f_1(x_1, x_2) = \frac{(x_1 - 2)^2}{2} + \frac{(x_2 + 1)^2}{13} + 3$ $f_2(x_1, x_2) = \frac{(x_1 + x_2 - 3)^2}{36} + \frac{(-x_1 + x_2 + 2)^2}{8} - 17$ $f_3(x_1, x_2) = \frac{(x_1 + 2x_2 - 1)^2}{175} + \frac{(-x_1 + 2x_2)^2}{17} - 13$	[-4, 4]	Konveks, bazı bölgelerde dejenere doğrular var
ZDT1	$f_1(x_1) = x_1$ $f_2(x_i) = g(x)h(f_1(x), g(x))$ $g(x) = 1 + \frac{9}{29} \sum_{i=2}^{30} x_i$ $h(f_1(x), g(x)) = 1 - \sqrt{\frac{f_1(x)}{g(x)}}, \quad 1 \leq i \leq 30$	[0, 1]	Konveks
ZDT2	$f_1(x_1) = x_1$ $f_2(x_i) = g(x)h(f_1(x), g(x))$ $g(x) = 1 + \frac{9}{29} \sum_{i=2}^{30} x_i$ $h(f_1(x), g(x)) = 1 - \left(\frac{f_1(x)}{g(x)}\right)^2, \quad 1 \leq i \leq 30$	[0, 1]	Konkav

Kaynak: Farhang-Mehr ve Azarm (2002), Farina (2002), Fonseca ve Fleming (1995b), Ishibuchi ve Murata (1998), Jin ve diğerleri (2001), Deb (2001), Lis ve Eiben (1997), Fonseca ve Fleming (1995a), Huband ve diğerleri (2006)'dan alınarak çalışmanın yazarı tarafından tablolştırılmıştır.

3.1.2. Çok Amaçlı Kısıtlı Optimizasyon Test Problemleri

Kısıtların matematiksel yapılarına göre, bu gruptaki problemler doğrusal ve doğrusal olmayan kısıtlı çok amaçlı optimizasyon test problemleri olarak iki alt grupta incelenmiştir. Toplamda 5 test problemi vardır. Doğrusal kısıtlı test problemleri, Matlab Optimizasyon araç kutusundaki, gamultiobj (Genetik Algoritmali Çok Amaçlı Optimizasyon) çözücüsüyle çözülmüş ve Pareto-optimal kümeleri elde edilmiştir. Matlab, çok amaçlı optimizasyon çözücüsü yalnızca doğrusal yapıdaki kısıt denklemlerini içerdiğinden, doğrusal olmayan kısıtlı çok amaçlı optimizasyon problemleri için farklı bir programa ihtiyaç duyulmuştur. Bu amaçla araştırılan programlarda, doğrusal olmayan kısıtlara sahip problemleri çözebilmesi ve çözüm yöntemi içinde evrimsel algoritmaları kullanması gibi özellikleri aranmıştır. Evrimsel algoritmaların Pareto-optimal çözüm kümesini oluştururken verilen aralıkta çok fazla sayıda çözüm noktası bulması, karar vericiye uygun seçimi yapabilmesi için önemli bir avantaj sağladığı için ve tüm problemlerin çözümünde standart bir çözüm süreci olması açısından bu özelliğin sağlanması önemlidir. JMetal (Metaheuristic Algorithms in Java) programı bu özellikleri sağladığı için doğrusal olmayan kısıtlı çok amaçlı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılmış ve Pareto-optimal kümeleri elde edilmiştir.

Literatürde genellikle doğrusal olmayan fonksiyon yapıları ağırlıklı olarak incelendiğinden, kısıtların tamamen doğrusal denklemlerden oluştuğu test problemi sayısı oldukça azdır. Bu amaçla yapılan çalışmalarda 2 tane doğrusal kısıt denklemlerine sahip çok amaçlı optimizasyon test problemi bulunmuştur. Bunlar, Binh4 (Binh, 1999; 4) ve Constr_ex (Deb, 2001; 290) Tablo 3.2'de gösterilmiştir. Sarker ve diğerlerinin 2001'deki çalışmasında Binh4, çok amaçlı kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılacak evrimsel algoritmanın sınanmasında kullanılmıştır. Constr_ex test problemi, Deb ve diğerlerinin (2002; 193) elitist çok amaçlı genetik algoritma: NSGA-II uygulamasında, Nebro ve diğerlerinin (2005; 453) çalışmasında çok amaçlı optimizasyon problemleri için saçılım (scatter) araması uygulamasında ve Wong ve diğerlerinin (2010; 747) çalışmasında, immün tabanlı evrimsel algoritmaların uygulamasında test problemi olarak kullanılmıştır.

Doğrusal olmayan kısıtlar içeren çok amaçlı optimizasyon problemleri üç tanedir. Osyczka2 ve Tanaka (Durillo ve Nebro, 2011;767), Srinivas (Srinivas ve Deb, 1994) çok sayıda ve karmaşık doğrusal olmayan kısıt denklemlerine sahip çok amaçlı optimizasyon problemleri olarak literatürden seçilmiştir. Fonksiyonlar ve özellikleri Tablo 3.2'de gösterilmiştir. Tanaka test problemi, Coello ve diğerleri (2007;189-193, 639) tarafından, çok amaçlı optimizasyon tanım kümesi özelliklerinin sınıflandırılmasında test problemi olarak kullanılmıştır. Fang ve diğerleri (2011; 249) Osyczka2 ve Srinivas test problemlerini, kümeleme analizi ile çok amaçlı optimizasyon algoritmalarının performanslarını karşılaştırmak için test problemi olarak kullanmışlardır. Osyczka2, aynı zamanda Coello ve diğerleri (2007;639) tarafından çok amaçlı optimizasyon algoritmaları ile çözülmüştür. Bu üç test problemi, Nebro ve diğerlerinin (2005; 453) çalışmasında çok amaçlı optimizasyonda saçılım aramasının uygulamasında kullanılmıştır. Tanaka, Srinivas ve Constr_ex test problemleri, Deb ve diğerlerinin (2002;193) çalışmasında hızlı ve elitist çok amaçlı genetik algoritma uygulamasında test problemi olarak kullanılmışlardır. Kısıtlı test problemlerinin matematiksel yapısı ve Pareto-optimal yüz geometrileriyle ilgili açıklamalar aşağıda verilmektedir.

Burada sunulan test problemleri, bu çalışmaların dışında, çok amaçlı optimizasyon algoritmalarının kısıtlı problemler üzerinde denendiği ve karşılaştırıldığı çalışmalarda kullanılan başlıca test problemleridir.

Binh4 (Binh, 1999;4) test probleminin orijinali maksimizasyon yönlüdür. Çok amaçlı optimizasyon çözümü için problem (-1) ile çarpılıp minimizasyona dönüştürülmüştür. İki amaç ve üç kısıt fonksiyonu vardır. Kesikli ve konveks Pareto-optimal yüze sahiptir.

Constr_ex (Deb, 2001; 290), iki amaç ve iki kısıt fonksiyonundan oluşmaktadır. Kısıtlı Pareto-optimal bölgenin sonucu, ilk kısıt sınırına ve kısıtsız Pareto-optimal bölgenin de bazı kısımlarına bağlıdır (Deb ve diğerleri, 2002). Kısıtlar, arama uzayını iki bölgeye ayırmaktadır. Problem konveks Pareto-optimal yüze sahiptir.

Osyczka2, altı değişkenli, iki amaç fonksiyonlu ve dört tanesi doğrusal, altı kısıtlı bir problemidir. Pareto-optimal yüz, beş optimal bölgenin birleşmesinden

oluşmaktadır. Her bölge birkaç kısıtın üzerinde yayılmaktadır. Pareto-optimal yüzün, kısıt fonksiyonlarına göre değişen yapısı sonraki bölümde anlatılmıştır.

Srinivas (Srinivas ve Deb, 1994;20), iki amaç fonksiyonlu ve biri doğrusal olan, iki kısıt fonksiyonlu bir test problemidir. Bu problemde tanımlanan kısıtların tek zorluğu kısıtsız Pareto-optimal kümenin bir kısmını saf dışı bırakmasıdır (Deb, 2001;365).

Tanaka, iki amaç ve iki kısıt fonksiyonuna sahiptir. $f_1 = x_1$ ve $f_2 = x_2$ olduğundan, uygun amaç uzayı aynı zamanda uygun karar değişkenleri uzayıyla aynıdır. Kısıtlı Pareto-optimal çözümler birinci kısıtın sınırında yayılırlar. Birinci kısıt fonksiyonu periyodik olduğundan ve ikinci kısıt fonksiyonunun da sağlanması gerektiğinden, birinci kısıtın sınırındaki tüm çözümler Pareto-optimal değildir. Pareto-optimal küme bağlantısızdır. Pareto-optimal çözümler doğrusal olmayan kısıt yüzeyi üzerinde yayıldığından, optimizasyon algoritması, sürekli Pareto-optimal kümelerin tamamında çözümlerin iyi bir dağılımını bulmakta zorlanabilir (Deb, 2001;366).

Bireysel uyarlanmış-çekicilik fonksiyonu dönüşümü ve ortak çekicilik fonksiyonu minimizasyonu ile test problemlerinin Pareto-optimal kümeleri içinden minimum noktalar bulunmuş ve Pareto-optimal kümelerindeki çözümlerle karşılaştırılmıştır. Ortak çekicilik fonksiyonuna, tüm amaç ve kısıt fonksiyonları dahil edilmiştir.

Tablo 3.2: Çok Amaçlı Kısıtlı Test Problemleri (Alfabetik sırayla)

Adı	Problem	Parametre Tanım Kümesi	Pareto Optimal Geometri
Binh4	$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$ $f_2(x_1, x_2) = -0.5x_1 - x_2 - 1$ Kısıtlar $g_1(x) = 6.5 - \frac{x_1}{6} - x_2 \geq 0$ $g_2(x) = 7.5 - 0.5x_1 - x_2 \geq 0$ $g_3(x) = 30 - 5x_1 - x_2 \geq 0$	[-7, 4]	Kesikli
Constr_ex	$f_1(x_1, x_2) = x_1$ $f_2(x_1, x_2) = \frac{1 + x_2}{x_1}$ Kısıtlar $g_1(x) = x_2 + 9x_1 \geq 6$ $g_2(x) = -x_2 + 9x_1 \geq 1$	$x_1 \in [0.1, 1]$ $x_2 \in [0, 5]$	Konveks

Oszycza2	$f_1(x) = -(25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 4)^2 + (x_5 - 1)^2)$ $f_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$ Kısıtlar $g_1(x) = 0 \leq x_1 + x_2 - 2$ $g_2(x) = 0 \leq 6 - x_1 - x_2$ $g_3(x) = 0 \leq 2 - x_2 + x_1$ $g_4(x) = 0 \leq 2 - x_1 + 3x_2$ $g_5(x) = 0 \leq 4 - (x_3 - 3)^2 - x_4$ $g_6(x) = 0 \leq (x_5 - 3)^3 + x_6 - 4$	$x_1, x_2 \in [0,10]$ $x_3, x_5 \in [1,5]$ $x_4 \in [0,6]$ $x_6 \in [0,10]$	Kesikli
Srinivas	$f_1(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + 2$ $f_2(x) = 9x_1 - (x_2 - 1)^2$ Kısıtlar $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq 225$ $g_2(x) = x_1 - 3x_2 \leq -10$	$x_i \in [-20,20]$	Konveks
Tanaka	$f_1(x) = x_1$ $f_2(x) = x_2$ Kısıtlar $g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 1 + 0.1 \cos(16 \arctan(x_1/x_2)) \leq 0$ $g_2(x) = (x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 \leq 0.5$	$x_i \in [-\pi, \pi]$	Kesikli

Kaynak: Binh (1999), Deb (2001), Srinivas ve Deb (1994), Durillo ve Nebro (2011)'den alınarak çalışmanın yazarı tarafından tablolştırılmıştır.

3.2. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Test problemlerinin çözümü iki aşamada gerçekleştirilmiştir. İki ayrı optimizasyon çözümünü karşılaştırarak, optimum çözüme ulaşmayı ve karar vericinin çok büyük hacimli Pareto-optimal küme içindeki daha küçük bir alana odaklanmasını sağlamak amaçlanmıştır. Öncelikle Pareto-optimal kümeleri hesaplamada kullanılan algoritmaları içeren programlar ve açıklamaları aşağıda verilmiştir.

Tüm kısıtsız ve doğrusal kısıtlı çok amaçlı test problemleri Matlab R2012a programında bulunan optimizasyon araç kutusundaki (Optimization Toolbox) gamultiobj çözücüsü yardımıyla çözülmüş ve Pareto-optimal kümeleri elde edilmiştir.

Matlab gamultiobj çözücüsü, çok amaçlı minimizasyon için Pareto-optimal küme oluşturmaktadır ve yerel Pareto-optimal kümeyi bulmak için, önceki bölümde anlatılan, kontrol edilmiş elitist genetik algoritmayı (NSGA II'nin farklı bir türü (Deb, 2001;245)) kullanır. Elitist Genetik Algoritma, daima daha iyi uyumlu değerleri (rank) olan bireyleri tercih ederken, kontrol edilmiş elitist Genetik Algoritma, düşük uyum değerlerine sahip olsalar bile popülasyon çeşitliliğini arttırmaya yardım edebilen bireyleri de tercih eder. Optimal Pareto yüze yakınsama

için popülasyonun çeşitliliğini sürdürmesi önemlidir. Algoritmanın ilerlemesiyle, popülasyonun kontrol edilen elit üyeleri tarafından çeşitlilik devam ettirilir. Çözücü içindeki iki seçenek, ParetoFraction ve DistanceFcn, elitizmi kontrol eder. ParetoFraction, Pareto-optimal yüzdeki bireylerin (elit üyeler) sayısını sınırlar. DistanceFcn ile seçilen uzaklık fonksiyonu, Pareto-optimal yüze nispi olarak uzak bireyleri tercih ederek, bu yüz üzerindeki çeşitliliği sürdürür.

Matlab gamultiobj çözücüsü arayüzünde varsayılan ayarlar seçilerek optimizasyon yapılabilirken, karar verici tarafından belirlenebilen seçenekler de mevcuttur. Örneğin, başlangıç popülasyonu, popülasyon hacmi, yaratma, mutasyon ve çaprazlama fonksiyonları karar verici tarafından oluşturulabildiği gibi, varsayılan olarak belirlenmiş seçenekler de kullanılabilir. Değişkenler üzerindeki sınırlar ve doğrusal kısıtlar karar verici tarafından belirlenir. gamultiobj çözücüsü doğrusal olmayan kısıtları içermez (Global Optimization Toolbox, Matlab User's Guide, 2014; 417) . Çok amaçlı kısıtsız optimizasyon ve çok amaçlı doğrusal kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde gamultiobj çözücüsü kullanılmıştır.

Çok amaçlı doğrusal olmayan kısıtlı problemler için JMetal (Metaheuristics Algorithm in Java) programından yararlanılmıştır. JMetal, Málaga Üniversitesi, Bilgisayar Bilimleri Bölümü tarafından, metasezgisel algoritmali çok amaçlı optimizasyon tekniklerindeki araştırmalarda kullanılmak üzere Java-tabanlı olarak yazılmış, öncelikle C++ paket olarak oluşturulmuştur. 2006 yılında başlayan bir proje ve bir açık kaynak yazılımıdır. Klasik ve modern çok amaçlı optimizasyon algoritmalarının çoğunu kullanır. Bunlar arasında NSGA II, SPEA2, PAES sayılabilir. Kısıtsız ve kısıtlı test problemlerinin çok geniş bir setini içerir.

Metasezgisel teknikler, farklı operatörlerin uygulanması aracılığıyla mevcut çözümlerden değişiklik ya da türetme işlemleriyle yeni sonuçlar elde etmeyi temel alır. Örneğin evrimsel algoritmalar, çözümlerde değişiklik yapmak için çaprazlama, mutasyon ve seçim operatörlerini kullanır. JMetal, çaprazlama, mutasyon, seçim ve yerel arama olarak adlandırılan 4 farklı sınıfta toplanan çok sayıda operatöre sahiptir. Tüm problem, operatör ve çözüm yapısı JMetal içindeki 6 pakette toplanmıştır (JMetal 4.5 User Manual, 2014). Problemin Java-tabanlı kodlarının yazılması, uygun algoritmanın seçimi ve çözüm sürecinin sonunda Pareto-optimal küme hesaplanır.

JMetal, test problem kütüphanesindeki problemlerin çözümünü yapmaktadır. Çok amaçlı doğrusal olmayan kısıtlı test problemlerinin tamamı, bu kütüphanenin içinde yer almaktadır. Matlab programı doğrusal olmayan kısıtlı problemleri çözemediği için, bu problemlerin çözümü JMetal programı ile yapılmıştır. Ancak, kısıtsız ve doğrusal kısıtlı test problemlerinin çoğu bu kütüphanede olmadığı için, bu gruptaki test problemlerinin tamamı Matlab programı ile çözülmüştür.

Tüm test problemleri için Pareto-optimal kümeler oluşturulduktan sonra, bu kümeler içinden seçilebilecek bir minimum nokta bulmak için önerilen Çekicilik fonksiyonu çözümleri yapılmıştır. Tablo 3.3 ve Tablo 3.4'teki ilk sütunda problem isimlerinin altında Pareto-optimal kümelerin hacimleri gösterilmektedir. Problemler içinden Pareto-optimal kümesi en küçük hacimli iki amaç fonksiyonlu Constr_Ex probleminde bile Pareto-optimal kümede, 70 çözüm noktası bulunmaktadır. Bu test probleminde en iyi çözüm bileşenini sadece Pareto-optimal kümeye bakarak seçmek zordur. En yüksek hacimli Pareto-optimal kümeye sahip test problemi Srinivas'ta, 1091 amaç fonksiyonu çözüm bileşeninden hangisinin seçileceğine karar vermek ise imkansızdır. Bu nedenle, Çekicilik fonksiyonu ile Pareto-küme içinden tercih edilebilecek bir minimum nokta bulmak amaçlanmaktadır.

Öncelikle test problemlerindeki her amaç ve kısıt fonksiyonunun minimum ve maksimum noktaları bulunmuş ve Çok Amaçlı Optimizasyon problemlerinin minimizasyon yapısına uygun olarak önceki bölümde oluşturulan (7) ve (8) dönüşümleri yapılarak, uyarlanmış-bireysel çekicilik fonksiyonları hesaplanmıştır. Çözümlerin Pareto-optimal küme içinde kalmasını sağlamak için, amaç fonksiyonlarının Çok Amaçlı optimizasyon çözümlerinden elde edilen Pareto-optimal kümelerin minimum ve maksimum noktaları bireysel çekicilik fonksiyonlarını hesaplamak için kullanılmıştır. Doğrusal kısıt denklemleri için öncelikle kısıtlar $\leq$ yapısına dönüştürülmüş ve sağ taraf sabiti kısıtın alabileceği maksimum değer olarak alınmıştır. Minimum değeri bulabilmek için değişkenlerin tanımlı olduğu aralıktan faydalanılmıştır. Doğrusal olmayan kısıt denklemleri için maksimum değer doğrusal kısıt denklemleriyle aynı yöntemle, minimum değer ise doğrusal olmayan kısıtın minimizasyon algoritmaları kullanarak minimumunun bulunması yöntemiyle hesaplanmıştır. Ardından, önceki bölümde anlatılan,

geometrik ortalamanın minimumu olan ortak çekicilik fonksiyonu (2.8) oluşturulmuş ve doğru arama yöntemleriyle çözülmüştür.

Test problemlerinin uyarlanmış-genel çekicilik fonksiyonlarının optimizasyonundan elde edilen minimum noktalar ve karar değişkenleri, kısıtsız problemler için Tablo 3.3 ve kısıtlı problemler için Tablo 3.4'te verilmiştir. Örnek olarak bir kısıtsız ve bir de kısıtlı test probleminin bireysel çekicilik fonksiyonu aşağıda verilmiştir. Kısıtsız test problemi olarak, nispeten daha küçük bir problem olması nedeniyle Le1'in ortak çekicilik fonksiyonu, kısıtlı test problemi olarak da az kısıt sayısına sahip Constr_ex probleminin genel çekicilik fonksiyonu seçilmiştir.

$$\min D_{Le1} = \left(\left(\left(\frac{1}{0.835167} \right) ((x_1^2 + x_2^2)^{0.125} - 0.916964) \right)^2 \right) \left(\left(\left(\frac{1}{0.829627} \right) ((x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2)^{0.25} - 0.840872 \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$\min D_{Constr_ex} = \left(\left(\left(\frac{1}{0.604634} \right) (x_1 - 0.389588) \right)^2 \right) \left(\left(\left(\frac{1}{7.978824} \right) \left(\frac{1+x_2}{x_1} - 1.005939 \right) \right)^2 \right) \left(\left(\left(\frac{1}{8} \right) (-9x_1 - x_2 + 20) \right)^2 \right) \left(\left(\left(\frac{1}{3} \right) (-9x_1 + x_2 + 5) \right)^2 \right)^{1/4}$$

Tablo 3.3: Kısıtsız Test Problemlerinin Çekicilik fonksiyonu çözümleri

Adı ve Pareto-optimal Küme Hacimleri	Amaç Fonksiyonları ve Karar Değişkenleri	Çekicilik Fonksiyonu Sonucu	Adı ve Pareto-optimal Küme Hacimleri	Amaç Fonksiyonları ve Karar Değişkenleri	Çekicilik Fonksiyonu Sonucu
FA1 N=350	f_1	1,0154	LE1 N=350	f_1	0,9170
	f_2	0,000178		f_2	0
	f_3	0,1112		x_1	0,5
	x_1	1,433		x_2	0,5
	x_2	0,015	MOP2 N=350	f_1	1
	x_3	0,873		f_2	-28,3578
Far1 N=700	f_1	0,6702		x_1	-3,74
	f_2	-0,8489		x_2	-0,414
	x_1	0,5		x_3	-0,598
	x_2	-0,7	MOP5 N=700	f_1	0,000159
FF1 N=700	f_1	0,9996		f_2	16,992
	f_2	0,0023		f_3	-0,1
	x_1	-0,966		x_1	-0,009
	x_2	0,966		x_2	0,005
IM1 N=350	f_1	4,017	MOP7 N=350	f_1	3,2957
	f_2	1,0104		f_2	-16,9999
	x_1	4,034		f_3	-12,8372
	x_2	1,989		x_1	2,49
				x_2	0,511

JOS2 N=350	f_1	0			
	f_2	0,8290	ZDT1	f_1	0,00578
	x_1	0	N=158	f_2	3,002103
	x_2	-0,171	ZDT2	f_1	0,00000412
	x_3	-0,171	N=350	f_2	2,65
Kur1 N=350	f_1	-15,3076			
	f_2	-11,6244			
	x_1	-1,16			
	x_2	-1,157			
	x_3	-1,151			

Kısıtlı test problemlerinde, kısıtların da ortak çekicilik fonksiyonuna eklenmesi çözüm yönteminin önemli bir özelliğidir. Böylece kısıt denklemleri de önem derecelerine göre ağırlıklandırılabilir ve çözümü etkilemesi sağlanabilir. Burada elde edilen sonuçları ve yöntemin davranışlarını daha iyi inceleyebilmek amacıyla, kısıtlı test problemlerinin çözümlerinden elde edilen Pareto-optimal küme içinde yer alan ve önerilen çekicilik fonksiyonu çözümünün bulunduğu minimum noktaya yakın çözüm noktaları araştırılmıştır. Bu çözümler hem amaç fonksiyon değerlerini hem de karar değişkenlerini göstermektedir. Her bir çok amaçlı kısıtlı test problemi için kısıtlar incelenmiş ve bulunan noktaların kısıtları sağladığı görülmüştür. Tablo 3.4'te çok amaçlı kısıtlı test problemlerinin çözümleri ve bu çözümlere karşılık Pareto-optimal kümelerindeki yakın noktalar gösterilmektedir. Önerilen çekicilik fonksiyonunun bulunduğu minimum noktaya yakın olan amaç fonksiyon değerleri altı çizili olarak ve ilgili tüm satır kalın yazı tipi olarak gösterilmiştir.

Tablo 3.4: Kısıtlı Test Problemlerinin Çekicilik fonksiyonu çözümleri ve Pareto-optimal kümelerindeki yakın noktalar

Binh4 N=175	f_1	f_2	x_1	x_2
Çekicilik Fonksiyonu çözümü	8,7084	-6,9995	2,951	4,524
Pareto-optimal çözümdeki yakın noktalar	<u>8,681791</u>	<u>-6,77866</u>	<u>3,560899</u>	<u>3,998209</u>
	<u>8,740731</u>	<u>-6,78258</u>	<u>3,569137</u>	<u>3,998011</u>
	8,778778	-6,78407	3,574311	3,996919
	8,838671	-6,79049	3,58297	3,999001
	8,924358	-6,79562	3,594799	3,998218
	11,7408	-6,9819	3,967251	3,998275
	11,80759	-6,98592	3,975637	3,998101
	11,92728	-6,994	3,990729	3,998636
	<u>11,98408</u>	<u>-6,999</u>	<u>3,99801</u>	<u>4</u>

Constr-ex N=70		f_1		f_2		x_1		x_2	
Çekicilik Fonksiyonu çözümü		0,777		1,0064		0,777		-0,218	
Pareto-optimal çözümdeki yakın noktalar		0,700891		1,428296		0,700891		0,001079	
		0,72954		1,420797		0,723954		0,028592	
		0,763803		1,31841		0,763803		0,007006	
		0,779428		1,29198		0,779428		0,007006	
		0,810927		1,257571		0,810927		0,019799	
		0,911749		1,101761		0,911749		0,004529	
		0,994222		1,005939		0,994222		0,000127	
		0,887736		1,126974		0,887736		0,000455	
Srinivas N=1091		f_1		f_2		x_1		x_2	
Çekicilik Fonksiyonu çözümü		155,1595		-155,2704		-2,873		12,376	
Pareto-optimal çözümdeki yakın noktalar		155,8527		-154,956		-1,56346		12,86947	
		155,6211		-154,988		-3,43994		12,13679	
		155,6767		-155,734		-2,06152		12,71242	
		156,191		-156,211		-2,98007		12,37497	
		156,4588		-156,693		-2,37553		12,63244	
Tanaka N=152		f_1		f_2		x_1		x_2	
Çekicilik Fonksiyonu çözümü		0,044		0,788		0,044		0,78	
Pareto-optimal çözümdeki yakın noktalar		0,044081		1,039937		0,044081		1,039937	
		0,047223		1,036795		0,047223		1,036795	
		0,053506		1,033654		0,053506		1,033654	
		0,056647		1,030512		0,056647		1,030512	
		0,524731		0,791758		0,524731		0,791758	
		0,527872		0,788617		0,527872		0,788617	
		0,534155		0,785475		0,534155		0,785475	
		0,540438		0,782334		0,540438		0,782334	
Osyczka2 N=378	f_1	f_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Çekicilik Fonksiyonu çözümü	-106,123	4,00173	0,124	0,124	1,083	0,215	1,535	0,629	
Pareto- optimal çözümdeki yakın noktalar	-111,902	5,98098	0,041297	1,962473	1,002175	0,001554	1,004274	0,339201	
	-109,646	5,781677	0,064507	1,938213	1,007102	0,001349	1,001232	0,064225	
	-102,053	5,517315	0,144666	1,866263	1,002535	0,002702	1,001157	0,077797	
	-91,1055	5,284349	0,267574	1,73526	1,054362	0,00004	1,017449	0,233971	
	-49,35614	4,08319	0,857625	1,14496	1,013484	0,00008	1,003912	0,04176	
	-41,9756	4,059433	1,000392	1,001	1,018394	0,00039	1,003066	0,115638	
	-41,8106	4,024802	1,00286	0,99987,	1,001925	0,005865	1,000138	0,123147	

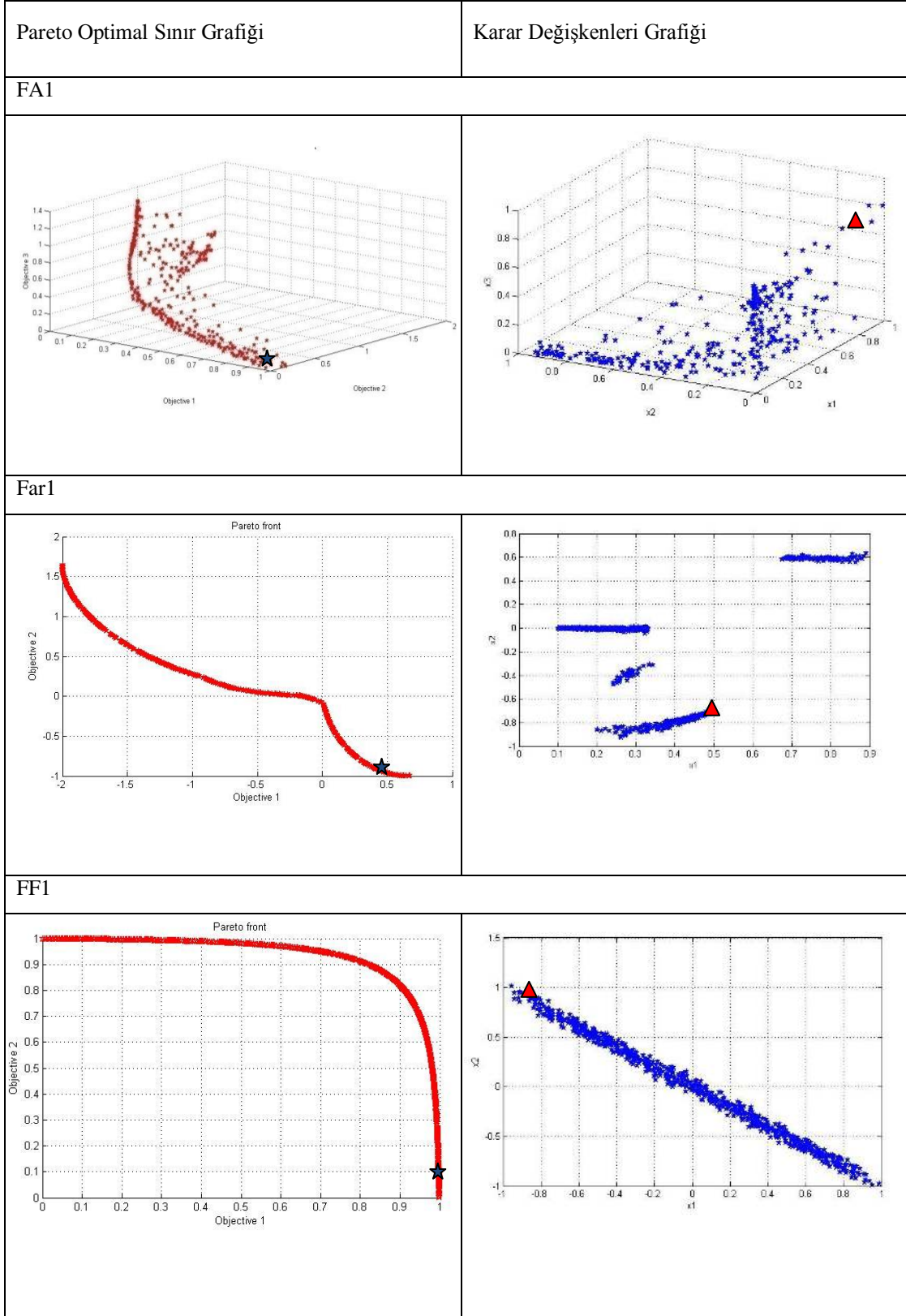
Tablo 3.4'te, Srinivas'ta çekicilik fonksiyonunun, Pareto-optimal kümede her iki amaç fonksiyonu için aynı noktada çözüm bulunduğu görülmektedir. Diğer tüm kısıtlı test problemlerinde, amaç fonksiyonları için Pareto-optimal kümenin ayrı

noktalarda ulaştığı minimum noktalara, önerilen ortak çekicilik fonksiyonu tek çözüm noktasında ulaşmıştır. Örneğin Binh4 test probleminde Pareto-optimal kümede ikinci amaç fonksiyonu değeri -6,999'a karşılık birinci amaç fonksiyonunda 11,98408 değeri hesaplanmışken, çekicilik fonksiyonu çözümünde ikinci amaç fonksiyonu -6,9995, birinci amaç fonksiyonu 8,7084 olarak bulunmuştur. Aynı şekilde, çekicilik fonksiyonunun birinci amaç fonksiyonuna yakın değeri Pareto-optimal çözüm kümesinde 8,681791 iken, bu noktada ikinci amaç fonksiyonu değeri -6,77866 hesaplanmıştır. Bu değer çekicilik fonksiyonunun bulduğu değerden yüksektir.

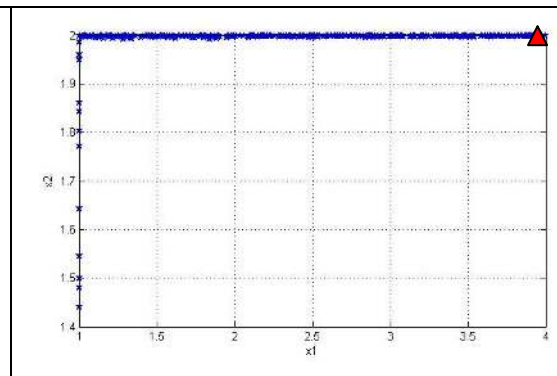
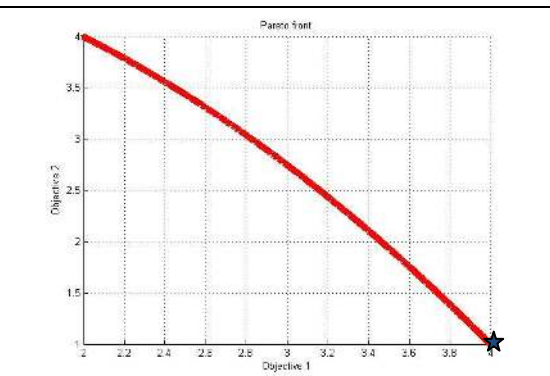
Çekicilik fonksiyonu çözümlerinden elde edilen minimum noktaların Pareto-optimal kümelerin içinde, fakat birçok problemde, çok amaçlı optimizasyon çözüm algoritmalarıyla bulunamayan yeni noktalara ulaştığı görölmüştür. Bu durum, karar vericiye yeni bir alternatif sunarken, bu nokta etrafındaki noktalara da dikkat çekmektedir. Pareto-optimal küme içindeki bütün noktalar minimum sonuçları içerir, ancak farklı bir minimizasyon yöntemiyle elde edilen yeni bir nokta, karar vericiye bu minimumlar içinden bir seçim yapabilmesi için önemli bir bilgi sağlar.

Çekicilik fonksiyonu minimum noktaları, Şekil 3.1'te çok amaçlı kısıtsız optimizasyon, Şekil 3.2'te çok amaçlı kısıtlı optimizasyon test problemlerinin Pareto-optimal yüz grafikleri üzerinde işaretlenmiştir ve x değişkenlerinin grafikleri çizilmiştir. Çekicilik fonksiyonu çözümünden elde edilen minimum nokta (★) ile bu minimum noktadaki x değişkenlerinin değerleri (▲) ile gösterilmiştir.

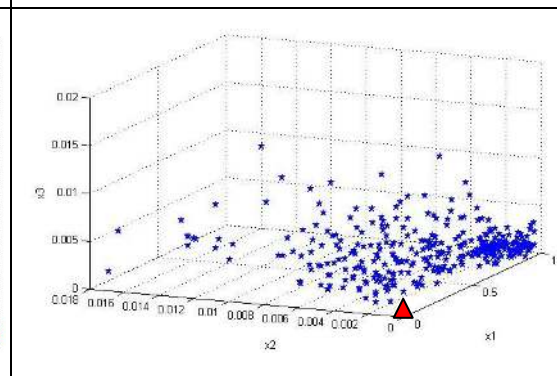
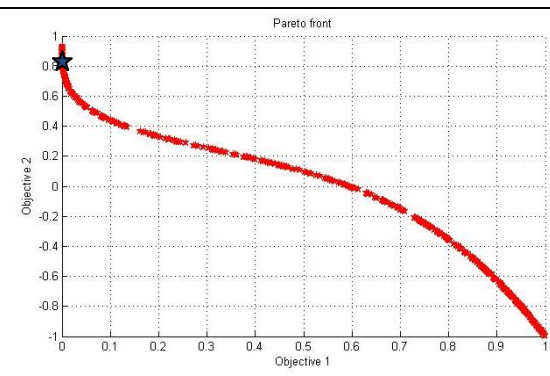
Şekil 3.1: Çok Amaçlı Kısıtsız Optimizasyon test problemleri için Pareto-optimal Sınır, Karar Değişkenleri Grafikleri ve Çekicilik Fonksiyonu çözümü karşılaştırması



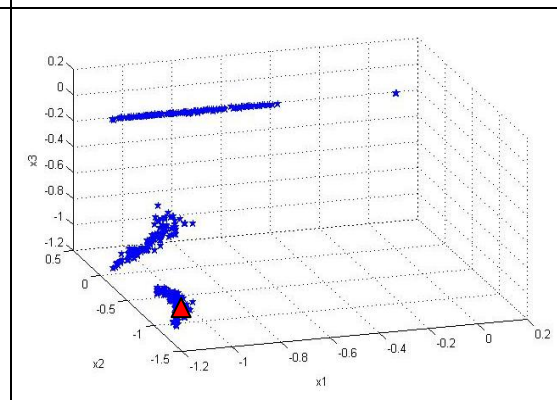
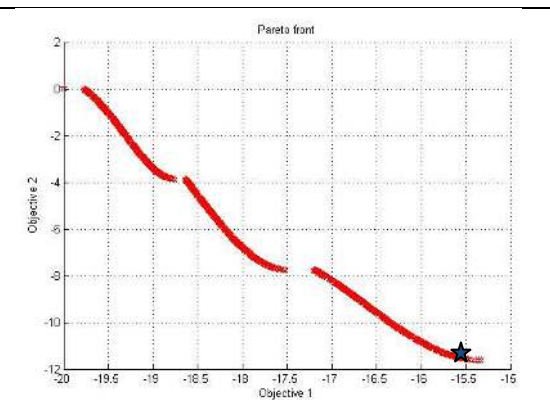
IM1



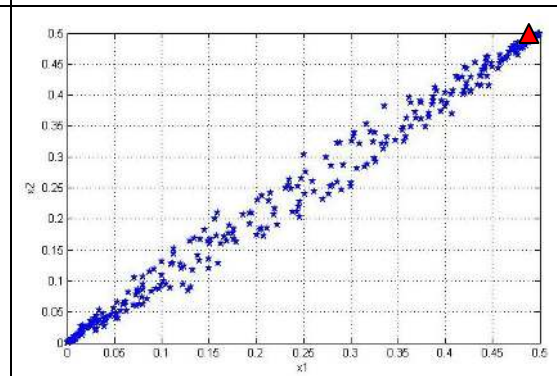
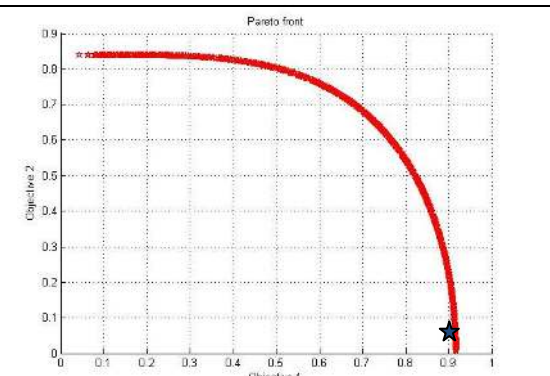
JOS2



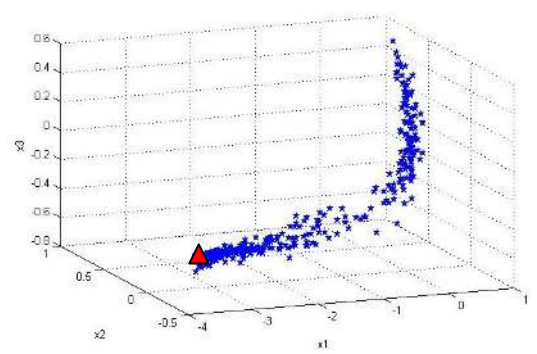
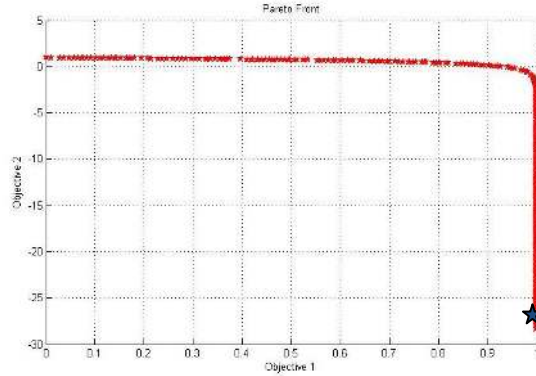
Kur1



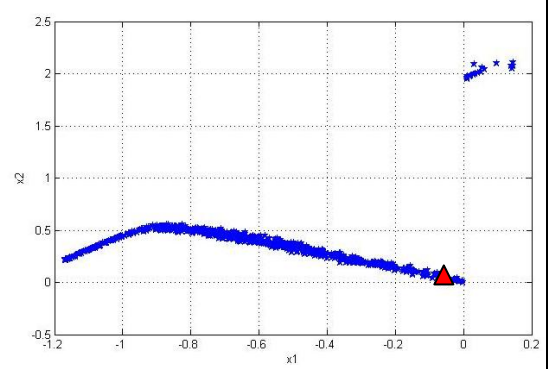
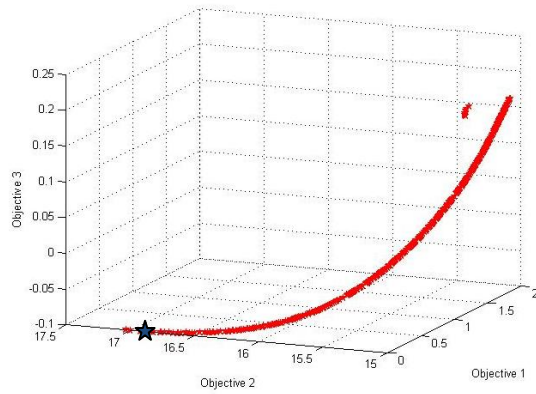
LE1



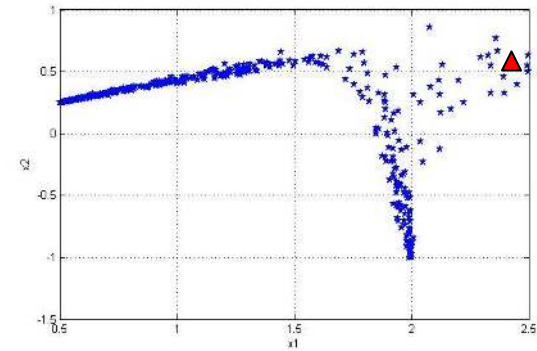
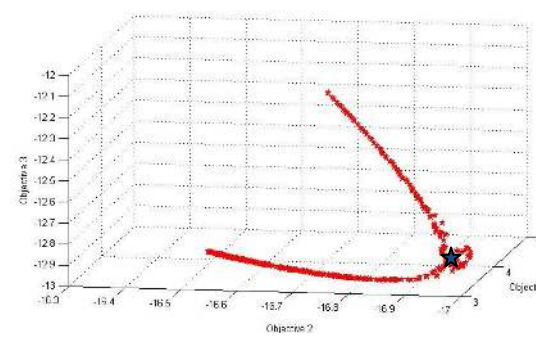
MOP2



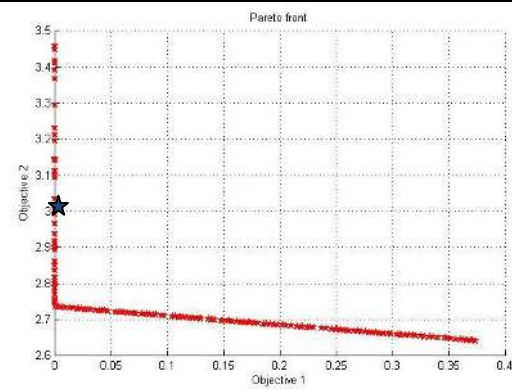
MOP5



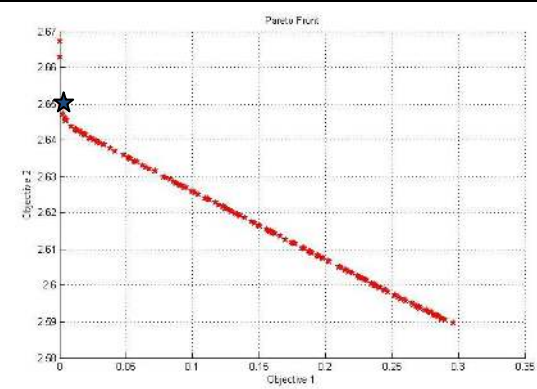
MOP7



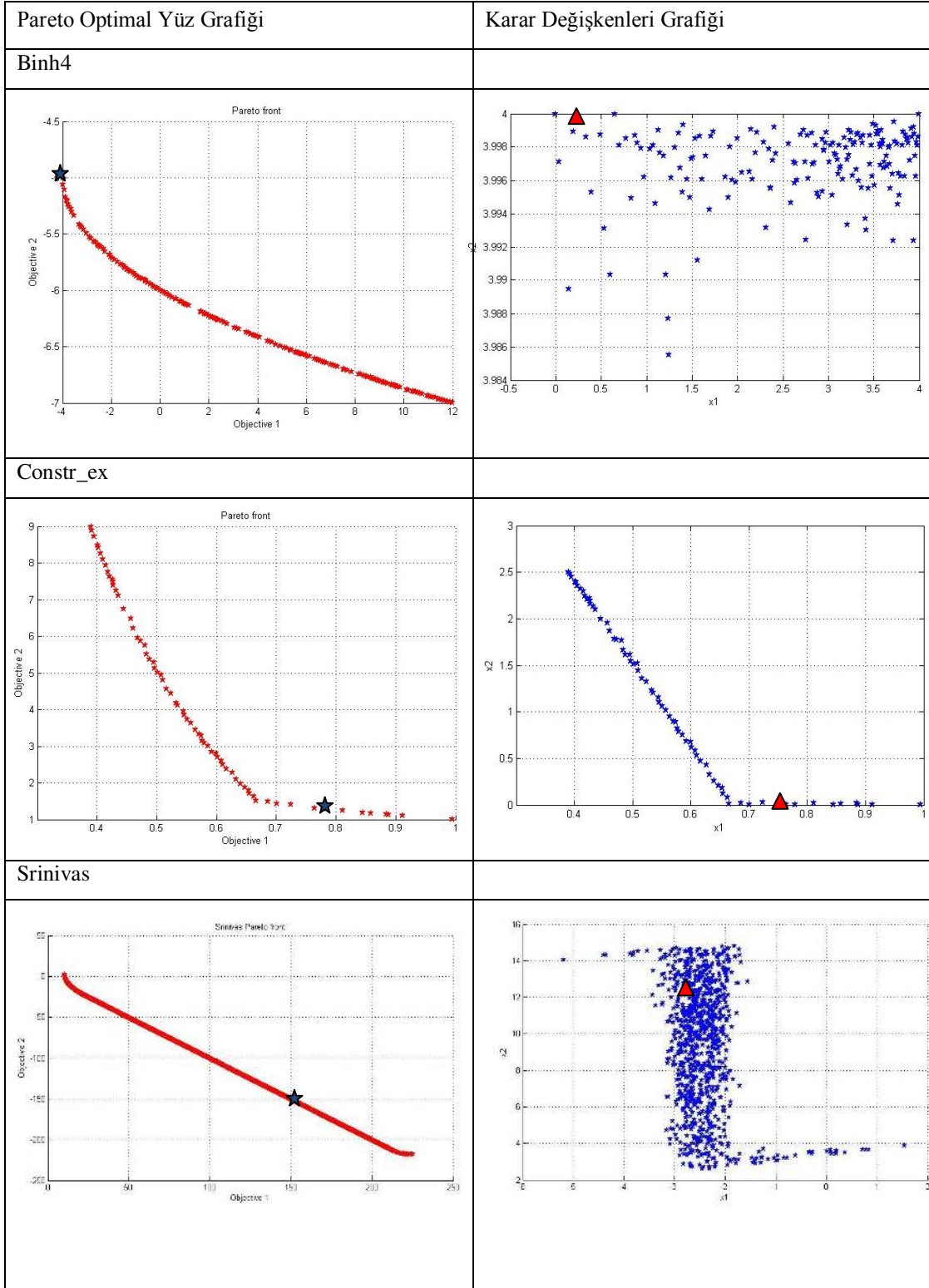
ZDT1

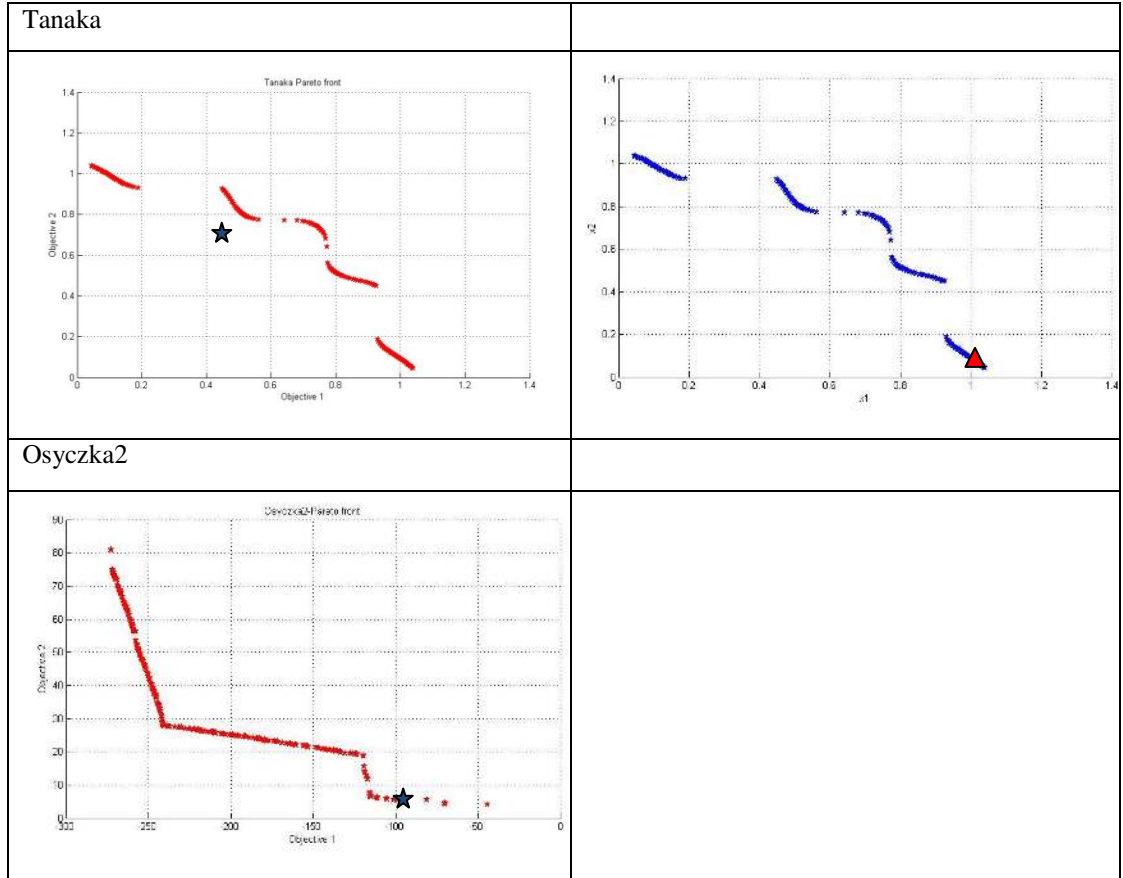


ZDT2



Şekil 3.2: Çok Amaçlı Kısıtlı Optimizasyon problemleri için Pareto-optimal sınır grafikleri ve Karar Değişkenleri Grafikleri, Çekicilik Fonksiyonu çözümünden elde edilen minimum noktalar





Şekil 3.2'te grafiği çizilen uygulamalardan Osyczka2'nin 6 değişkeni olduğu için değişkenlerinin grafiği çizilememiştir.

Şekil 3.1 ve 3.2'teki grafikler incelendiğinde, Çekicilik Fonksiyonunun kısıtsız ve kısıtlı problemlerde, konveks, konkav ve karma amaç fonksiyonu uzaylarındaki Pareto-optimal kümelerde minimum noktalar bulunduğu görülmüştür. Kısıtsız optimizasyon problemlerinde arama uzayı kısıt denklemleriyle kesilmediğinden, daha geniş bir alanda arama yapılmaktadır. Kısıtlı test problemlerinde bu alan kısıt fonksiyonları nedeniyle daha küçüktür. Her iki durumda da Çekicilik fonksiyonu Pareto-optimal kümelerin içinde kalabilmiştir. Çoğu test probleminde bulunan bu minimum noktalar Genetik Algoritmali Çok Amaçlı optimizasyon çözümünde elde edilemeyen, yeni noktalardır.

Çekicilik fonksiyonu, özellikle kısıtlı çok amaçlı optimizasyon problemlerinde, kısıt denklemlerinin de amaç fonksiyonu gibi dönüştürülüp genel Çekicilik fonksiyonu içinde yer almasını sağlayan esnek bir yapıdadır. Bu sayede, karar verici kısıt denklemlerini de problemin içindeki önemine göre

ağırlıklandırarak, problemin çözümünde etkili olmalarını sağlayabilir. Bu uygulamada amaç ve kısıt fonksiyonlarının eşit önemde olduğu varsayımı altında, ağırlıklandırma yapılmamış, $r = 2$ alınmıştır. Daha önce de belirtildiği gibi, $r > 1$ olduğu durum hedefe yakınlığın önemli olduğunu göstermektedir. Karar verici, amaç ve kısıt fonksiyonlarından hedefe yakınlığı diğerlerine göre daha önemli olanlarını, matematiksel yapılarını da göz önünde bulundurarak, $r \geq 2$ olarak ağırlıklandırıldığında sonuca olan etkilerini arttırabilir.

3.3. GERÇEK UYGULAMA PROBLEMLERİ

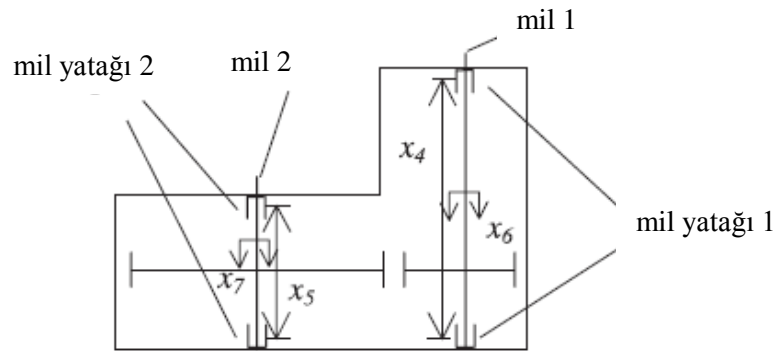
Test problemlerinin Pareto-optimal kümeleri ile çekicilik fonksiyonu çözümleri karşılaştırıldığında, Pareto-optimal küme içinde uygun çözüm noktalarına ulaşıldıkları görülmüştür. Test problemleriyle yapılan değerlendirmenin ardından, gerçek hayat problemlerinde çekicilik fonksiyonu çözümünün Pareto optimal küme çözümüyle karşılaştırılmasını ve problemin yapısına göre bulunan çözümün nasıl yorumlanacağını görmek amacıyla, gerçek uygulama problemleri olarak literatürde yer alan iki problem seçilmiştir. Gerçek uygulama problemine karar verirken, çok fazla sayıda amaç ve kısıt fonksiyonları olan problemlere odaklanmak, karmaşık problemlerdeki sonuçların görülmesini sağlamıştır. Bu problemlerden ilki hafif uçaklarda kullanılan şanzıman tasarımı, ikincisi su kaynak planlaması problemidir. Çekicilik fonksiyonunun farklı alanlardaki çözümlerini bulabilmek amacıyla bu iki gerçek uygulama probleminin çözümü yapılmıştır.

Uygulama problemleri için iki farklı senaryoya göre çözüm yapılmıştır. Her iki problem için oluşturulan ilk senaryolarda, bireysel çekicilik fonksiyonları ağırlıklandırılmadan, üs değerleri 2 olarak belirlenerek, ortak çekicilik fonksiyonlarının optimizasyonları yapılmış, minimum değerleri bulunmuştur. İkinci senaryolar, amaç fonksiyonlarından birinin bireysel çekicilik fonksiyonu ağırlıklandırılarak, ortak çekicilik fonksiyonu oluşturulup problemler çözülmüştür. Ağırlıklandırma ile ilgili amaç fonksiyonunda minimuma ulaşıp ulaşılmadığı incelenmiş, bulunan minimumun diğer amaç fonksiyonları üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

3.3.1. Şanzıman Tasarım Problemi

Bu örnek Golinski tarafından tek amaçlı optimizasyon problemi olarak formüle edilmiştir, bu nedenle literatürde Golinski problemi olarak da bilinmektedir. Kurpati ve diğerleri (2002;209), problemi iki-amaçlı optimizasyon problemi olarak dönüştürmüşlerdir. Bu örnek, hafif uçaklarda motor ile pervane arasında kullanılabilecek, basit bir şanzıman tasarımını göstermektedir. Tasarım, Şekil 3.3'te verilmiştir.

Şekil 3.3 Hız azaltıcı



Kaynak: Kurpati ve diğerleri, 2002;209.

Problemdede yedi tasarım değişkeni vardır; x_1 =mil yüz genişliği, x_2 =diş modülü, x_3 =dişlinin diş sayısı, x_4 =mil yatağı 1 arasındaki uzaklık, x_5 =mil yatağı 2 arasındaki uzaklık, x_6 =şaft 1'in çapı, x_7 =şaft 2'nin çapı. Birinci tasarım amacı f_1 , ağırlığı minimize etmektir. İkinci amaç f_2 , iki şanzıman şaftından birindeki stresi minimize etmektir. Tasarım şanzıman ve şaft tasarım uygulamalarına maruz bırakılmış kısıtlara sahiptir. Ayrıca, yedi karar değişkeni için alt ve üst sınırlar vardır. Problemin, bir tanesi birinci amaç fonksiyonundan oluşmak üzere, onbir eşitsizlik kısıtı vardır: g_1 = şanzıman dişinin bükülme stresinin üst sınırı, g_2 = şanzıman dişinin temas stresinin üst sınırı, g_3 ve g_4 = şanzımanların enine dönmesinin üst sınırları, g_5 - g_7 = boşluk ve/veya deney temelli boyutsal sınırlamalar, g_8 ve g_9 =deneyim temelli şaftın tasarım ihtiyaçları, g_{10} ve g_{11} = şanzıman şaftlarında stres üzerindeki kısıtlar (Kurpati ve diğerleri, 2002;209,210). Problemin formülasyonu aşağıda verilmiştir.

$$\min f_{ağırlılık} = f_1(x)$$

$$= 0.7854x_1x_2^2 \left(\frac{10x_3^2}{3} + 14.933x_3 - 43.0934 \right) - 1.508x_1(x_6^2 + x_7^2) \\ + 7.477(x_6^3 + x_7^3) + 0.7854(x_4x_6^2 + x_5x_7^2)$$

$$\min f_{stres} = f_2(x) = \frac{\sqrt{\left(\frac{745.0x_4}{x_2x_3} \right)^2 + 1.69 * 10^7}}{0.1x_6^3}$$

Kısıtlar

$$g_1(x) = \frac{1.0}{x_1x_2^2x_3} - \frac{1.0}{27.0} \leq 0$$

$$g_2(x) = \frac{1.0}{x_1x_2^2x_3^2} - \frac{1.0}{27.0} \leq 0$$

$$g_3(x) = \frac{x_4^3}{x_2x_3^2x_6^4} - \frac{1.0}{1.93} \leq 0$$

$$g_4(x) = \frac{x_4^3}{x_2x_3x_7^4} - \frac{1.0}{1.93} \leq 0$$

$$g_5(x) = x_2x_3 - 40 \leq 0$$

$$g_6(x) = x_1/x_2 - 12 \leq 0$$

$$g_7(x) = 5 - x_1/x_2 \leq 0$$

$$g_8(x) = 1.9 - x_4 + 1.5x_6 \leq 0$$

$$g_9(x) = 1.9 - x_5 + 1.1x_7 \leq 0$$

$$g_{10}(x) = f_2(x) \leq 1300$$

$$a = 745.0x_5/x_2x_3$$

$$b = 1.575 * 10^8$$

$$g_{11}(x) = \frac{\sqrt{(a)^2 + b}}{0.1x_7^3} \leq 1100$$

$$x_1 \in [2.6, 3.6]$$

$$x_2 \in [0.7, 0.8]$$

$$x_3 \in [17, 28]$$

$$x_4 \in [7.3, 8.3]$$

$$x_5 \in [7.3, 8.3]$$

$$x_6 \in [2.9, 3.9]$$

$$x_7 \in [5.0, 5.5]$$

3.3.1.1. Eşit Ağırlıklı Çözüm Senaryosu

Şanzıman tasarım probleminin, JMetal programı yardımıyla, çok amaçlı optimizasyon çözümü yapılmıştır ve Pareto-optimal kümesi 500 hacimli olarak hesaplanmıştır. Pareto-optimal yüz grafiği Şekil 3.5'te gösterilmektedir. Pareto-optimal kümenin alt ve üst sınırları amaç fonksiyonlarının Çekicilik fonksiyonu dönüşümünde kullanılmıştır. Kısıt fonksiyonları da doğrusal olmayan yapıda olduğu için ayrı ayrı minimumları bulunarak, alt sınırları elde edilmiştir. Her bir kısıtın sağ taraf sabiti, gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra, kısıtların üst sınırları olarak alınmıştır. Bireysel Çekicilik fonksiyonlarının geometrik ortalaması alınarak ortak Çekicilik fonksiyonu oluşturulmuş ve minimumu bulunmuştur. Çekicilik fonksiyonunun formülasyonu aşağıda verilmiştir. Kısıt sayısının çok olması

nedeniyle, tüm kısıtlar değil, sadece ilk iki kısıt ve son kısıt formülde gösterilmiştir. Problemden 2 amaç fonksiyonu ve 11 kısıt denklemi olduğundan, Çekicilik fonksiyonu 13 fonksiyonu içermektedir. Daha öncede belirtildiği gibi, bireysel ağırlıklar $r=2$ olarak ve tüm fonksiyonlar için eşit alınmıştır. Geometrik ortalaması alınırken, bireysel çekicilik fonksiyonu çarpımlarının, toplam fonksiyon sayısı olan 13. dereceden kökü alınmıştır.

$Dmin_{golinski}$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left(\left(\frac{1}{2993.563} \right) \left(0.7854x_1x_2^2 \left(\frac{10x_3^2}{3} + 14.933x_3 - 43.0934 \right) - 1.508x_1(x_6^2 + x_7^2) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 7.477(x_6^3 + x_7^3) + 0.7854(x_4x_6^2 + x_5x_7^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2772.395 \right) \right)^2 \left(\left(\frac{1}{603.7622} \right) \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{745.0x_4}{x_2x_4} \right)^2 + 1.69 * 10^7}}{0.1x_6^3} - 694.7104 \right) \right)^2 \left(\left(\frac{1}{0.0305} \right) \left(\frac{1.0}{x_1x_2^2x_3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 0.0155 \right) \right)^2 \left(\left(\frac{1}{0.00125} \right) \left(\frac{1.0}{x_1x_2^2x_3^2} \right) \right)^2 \dots \left(\left(\frac{1}{249.6567} \right) \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{745.0x_5}{x_2x_3} \right)^2 + 1.575 * 10^8}}{0.1x_7^3} \right) \right)^2 \right)^{1/13}
\end{aligned}$$

Çekicilik fonksiyonu oluşturulduktan sonra, problemin zorluğu nedeniyle, Matlab genetik algoritma çözücü kullanılarak minimum nokta hesaplanmıştır. Burada önemli olan nokta, kısıt fonksiyonlarının ortak çekicilik fonksiyonu denklemi içine dahil edilmesidir. Böylece bu yöntem, karar vericinin kısıt denklemleri üzerinde ağırlıklandırma yapmasına olanak sağlar. Problemin çekicilik fonksiyonunun çözümünden elde edilen çözüm noktalarının Pareto-optimal küme içindeki yeri Tablo 3.5'da gösterilmektedir. Tabloda T.S. ile isimlendirilen sütun, JMetal programının 30 kez çalıştırılması sonucu elde edilen Pareto optimal çözüm kümelerinin içinde, problemin çözüm noktalarına yakın olan tablodaki veri setlerinin türetilme sıklığını göstermektedir. Tablo 3.7, 3.8 ve 3.9 için de T.S. aynı anlamdadır. Problemin her iki optimizasyon çözümü karşılaştırılarak bulunan sonuç Şekil 3.3'te verilmektedir.

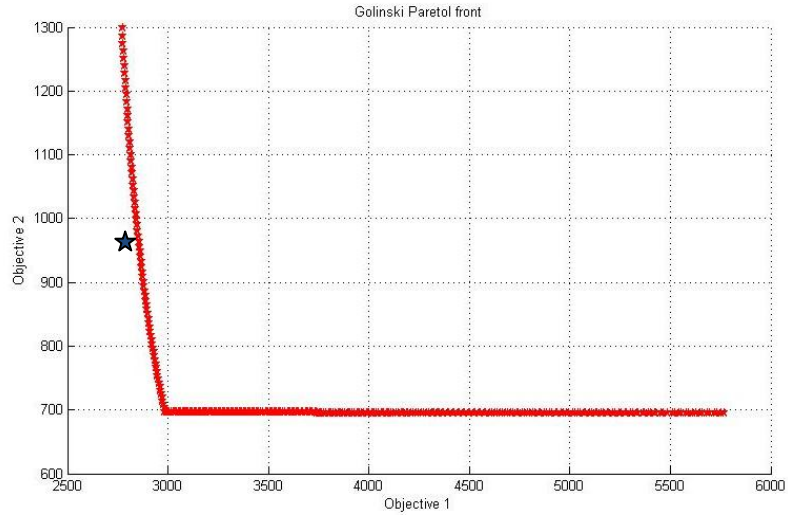
Tablo 3.5: Şanzıman tasarım probleminin Çekicilik fonksiyonu çözümü minimum noktası ve karşılık gelen Pareto-optimal noktalar

Şanzıman tasarım	f_1	f_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	T.S.
Çekicilik Fonksiyonu	2851	964	3,5	0,7	17	7,4	7,4	3,5	5	
Pareto-optimal çözüm noktalarından çekicilik fonksiyonu çözümüne yakın olanlar										
f_1 min	2777,349	1296,119	3,501552	0,7	17	7,3310	7,5812	3,1719	5	15
f_2 min	5650,46	694,756	3,574145	0,7	27	7,7676	7,7342	3,9	5	20
Pareto-optimal çözümdeki yakın örnek noktalar	2847,503	1005,281	3,502681	0,7	17	7,3264	7,5662	3,4523	5	11
	2848,58	996,9824	3,502697	0,7	17	7,3514	7,4278	3,46194	5	14
	2850,399	989,4387	3,5015	0,7	17	7,3513	7,44089	3,4707	5	19
	2851,829	983,3839	3,5015	0,7	17	7,3518	7,46247	3,4778	5	20
	2853,16	983,3555	3,5026	0,7	17	7,3350	7,5062	3,4778	5	13
	2853,674	975,9432	3,5018	0,7	17	7,38128	7,4069	3,4867	5	19
	2854,106	975,9411	3,5018	0,7	17	7,38128	7,4009	3,4867	5	19
	2859,574	973,6746	3,50188	0,7	17	7,3235	7,6875	3,4893	5	10
	2860,551	971,1006	3,5021	0,7	17,001	7,3287	7,6875	3,4924	5	15
	2860,608	964,6559	3,50186	0,7	17,001	7,3485	7,5775	3,5002	5	14
	2862,6	964,6151	3,5018	0,7	17,001	7,3235	7,6875	3,5001	5	10
	2862,805	951,1944	3,5014	0,7	17	7,3873	7,4531	3,5167	5	13
	2862,934	947,7502	3,5017	0,7	17,001	7,3006	7,4336	3,52	5	22
	2862,95	947,7502	3,5017	0,7	17	7,3	7,4344	3,52	5	22

Tablo 3.5'te 500 çözüm noktasından oluşan Pareto-optimal küme içinde, Çekicilik fonksiyonu çözümüne en yakın sonuçlar örnek olarak verilmiştir. Koyu olarak işaretlenmiş sonuçlar, amaç fonksiyonlarına en yakın değerlerdir. Altı çizili olarak gösterilen çözümler, çekicilik fonksiyonuna yakın olan amaç fonksiyonu değeridir. Çekicilik fonksiyonu çözümünden elde edilen minimum nokta, Pareto-küme sınırları içinde, fakat çok amaçlı optimizasyon probleminin evrimsel algoritmalarla çözümünden elde edilemeyen, yeni ve her iki amaç fonksiyonu için minimum noktadır. Tabloda, Çekicilik fonksiyonu ile elde edilen $f_1=2851$, $f_2=964$ noktalarına, birinci amaç fonksiyonu açısından Pareto-optimal kümedeki en yakın çözüm noktası, $f_1=2851,829$ olarak bulunmuştur, fakat bu noktaya karşılık gelen $f_2=983,3839$ değeri oldukça yüksektir. İkinci amaç fonksiyonu açısından incelediğimizde, Pareto-optimal kümedeki en yakın çözüm noktası $f_2=964,6151$, fakat bu çözümde de birinci amaç fonksiyonunun değeri $f_1=2862,6$ olarak hesaplanmış yüksek bir değerdir. Her iki amaç fonksiyonu değeri, Çekicilik fonksiyonu çözümünden büyüktür. Bu noktada, Çekicilik fonksiyonu çözümü,

baskınlanmayan (non-dominated), ($f_1=2862,6$, $f_2=964,6151$) ve ($f_1=2862,6$, $f_2=964,6151$) noktalarını baskınlayan (dominated) bir noktadır. Şekil 3.4'te çekicilik fonksiyonu ile bulunan minimum noktanın Pareto-optimal kümedeki noktalardan daha minimum bir nokta olduğu görülmektedir. Bu çözüm, karar verici için yeni bir alternatif nokta sunmaktadır. Pareto-optimal çözümün her iki amaç fonksiyonunda birlikte ulaşamadığı bu noktada, şanzıman için daha düşük ağırlık ve daha az stres değerlerine ulaşılmıştır. Bu minimum noktada kısıtların tamamı sağlanmaktadır.

Şekil 3.4: Şanzıman tasarım probleminin Pareto-optimal yüz grafiği ve Çekicilik fonksiyonu çözümünün karşılaştırılması. (Çekicilik fonksiyonu çözümü: ★ ile gösterilmiştir.)



3.3.1.2. Ağırlıklandırılmış Çözüm Senaryosu

Şanzıman tasarım probleminde, karar vericinin birinci amaç fonksiyonu olan şanzıman kutusunun ağırlığında daha minimum noktaya ulaşmak istediği varsayılarak yeni bir senaryo oluşturulmuştur. Yapılması gereken işlem, daha önemli olarak belirlenen amaç fonksiyonunun ağırlık değerini arttırmaktır. Bu amaçla, birinci amaç fonksiyonunun bireysel çekicilik fonksiyonundaki ağırlığı 2'den 4'e çıkarılarak, ortak çekicilik fonksiyonunun minimum noktası hesaplanmıştır. Optimizasyon sonucu ve Pareto-optimal küme ile karşılaştırılması Tablo 3.6'da gösterilmiştir.

Tablo 3.6: Birinci amaç fonksiyonunun ağırlıklandırıldığı Çekicilik fonksiyonu sonucu ve yakın Pareto-optimal noktalarla karşılaştırılması

Şanzıman tasarım problemi (ağırlıklı)	f_1	f_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	T. S
Çekicilik Fonksiyonu çözümü	2352,3	1696	2,6	0,71	17	7,3	7,3	2,9	5	
Pareto-optimal çözümdeki yakın noktalar	2777,349	1296,119	3,50155	0,7	17,001	7,33106	7,58123	3,172	5	23
	2779,728	1271,234	3,50367	0,7	17	7,32137	7,41096	3,1925	5	12
	2780,84	1266,89	3,50345	0,7	17,0015	7,35026	7,42211	3,1962	5	14
	2781,623	1266,886	3,50345	0,7	17,006	7,35026	7,42211	3,1962	5	14
	2782,105	1260,223	3,50273	0,7	17	7,33545	7,45711	3,2018	5	22
	2784,048	1257,603	3,50329	0,7	17,0006	7,33503	7,50825	3,2040	5	18

Tablo 3.6'de, birinci amaç fonksiyonunun ağırlığı artırıldığında, çekicilik fonksiyonu çözümünün, ağırlıklandırılmamış çözüm senaryosundan daha minimum bir noktaya ulaştığı görülmektedir. Ancak bu durumda, ikinci amaç fonksiyonu değeri çok yüksek değerlere çıkmaktadır. Tablo 3.7'deki Pareto-optimal çözüm noktaları, birinci amaç fonksiyonunun çözümüne en yakın noktalar olmasının yanı sıra, Pareto-optimal çözüm kümesinin birinci amaç fonksiyonu için alt sınırındaki, aynı zamanda ikinci amaç fonksiyonu için de üst sınırındaki çözüm çiftlerini içermektedir. Ağırlıklandırılmış çözümde, şanzımanın ağırlığı için Pareto-optimal kümenin alt sınırı dışında minimum bir nokta bulunurken, şanzımanlardan birinin stres değerini veren ikinci amaç fonksiyonu, Pareto-optimal kümenin üst sınırını aşmaktadır. Şekil 3.4'te amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal çözüm kümesindeki sınırları görülmektedir. Karar verici için, şanzımanın ağırlığının minimum olması çok önemliyse, şanzımanlardan birindeki stresin yüksekliğine katlanmak zorunda kalacaktır. Amaç fonksiyonları arasında çatışma olduğu için, bir amaç fonksiyonundaki azalış diğerinde artışa neden olmaktadır. Önemli olan, karar vericinin bu artış miktarından nasıl etkileneceği ve ne kadarına izin verebileceğidir. Ağırlıklandırma sonucu birinci amaç fonksiyon değerinin çok fazla miktarda düşmesi, birinci, yedinci ve dokuzuncu kısıtların sağlanmamasına neden olmaktadır.

3.3.2. Su Kaynak Planlaması Problemi

Bu uygulama problemi Ray ve diğerleri (2001:418) tarafından yazılan bir makaleden alınmıştır. Musselman ve Tavalage tarafından orijinal olarak tanımlanan

ve aynı zamanda Cheng ve Li (1999:658-659) tarafından da çalışılan problem, bir kentsel alanda yağmur suyu tahliye sistemi için optimal planlamayı kapsamaktadır. Üç değişkenli, beş amaç fonksiyonlu ve yedi kısıt fonksiyonlu çok amaçlı optimizasyon problemidir, değişkenlerin tanımlı olduğu aralıklar mevcuttur. Değişkenler x_1 = yerel su depolama kapasitesi, x_2 =maksimum tasfiye (işlem) oranı ve x_3 =maksimum kabul edilebilir taşma oranıdır. Amaç fonksiyonları yağmur suyu tahliye sistemi ile ilgili maliyet fonksiyonlarıdır ve minimize edilmektedir. f_1 =su tahliye ağı maliyeti, f_2 =depolama tesisi maliyeti, f_3 =işlem tesisi maliyeti, f_4 =beklenen sel hasar maliyeti, f_5 =sel durumunda beklenen ekonomik kayıp olarak tanımlanmıştır. Problemin matematiksel formülasyonu aşağıda verilmiştir (Ray ve diğerleri, 2001; 418, 420).

$$\text{Minimize } f_1(x) = 106780.37(x_2 + x_3) + 61704.67$$

$$f_2(x) = 3000x_1$$

$$f_3(x) = \frac{(305700)^{2289}x_2}{[(0.06)^{2289}]^{0.65}}$$

$$f_4(x) = (250)2289 \exp(-39.75x_2 + 9.9x_3 + 2.74)$$

$$f_5(x) = 25 \left(\frac{1.39}{x_1x_2} + 4940x_3 - 80 \right)$$

Kısıtlar

$$g_1(x) = \frac{0.00139}{x_1x_2} + 4.94x_3 - 0.08 \leq 1.00$$

$$g_2(x) = \frac{0.000306}{x_1x_2} + 1.082x_3 - 0.0986 \leq 1.00$$

$$g_3(x) = \frac{12.307}{x_1x_2} + 49408.24x_3 + 4051.02 \leq 50000.00$$

$$g_4(x) = \frac{2.098}{x_1x_2} + 8046.33x_3 - 696.71 \leq 16000.00$$

$$g_5(x) = \frac{2.138}{x_1x_2} + 7883.39x_3 - 705.04 \leq 10000.00$$

$$g_6(x) = \frac{0.417}{x_1x_2} + 1721.26x_3 - 136.54 \leq 2000.00$$

$$g_7(x) = \frac{0.164}{x_1x_2} + 631.13x_3 - 54.58 \leq 550.00$$

$$0.01 \leq x_1 \leq 0.45, 0.01 \leq x_2 \leq 0.10 \text{ ve } 0.01 \leq x_3 \leq 0.10.$$

3.3.2.1. Eşit Ağırlıklı Çözüm Senaryosu

Su kaynak planlaması probleminin JMetal programı yardımıyla, çok amaçlı optimizasyon çözümü yapılmış ve Pareto-optimal küme elde edilmiştir. Problem beş amaç fonksiyonundan oluştuğu için tüm amaç fonksiyonlarını içeren Pareto-optimal yüz grafiği çizilememiştir. Bunun yerine, birbirleriyle ilişkili amaç fonksiyonlarının ikili ve üçlü grafikleri çizilmiştir. Şekil 3.5-3.15 bu grafikleri göstermektedir. Problemin Pareto-optimal küme sınırları ve kısıt fonksiyonlarının optimizasyonu ile elde edilen minimum noktalar ve sağ taraf sabitleri kullanılarak bireysel çekicilik fonksiyonu çözümleri yapılmış ve geometrik ortalaması alınarak genel çekicilik fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılmış ve minimumu hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned} \min D_{water} = & \left(\left(\left(\left(\frac{1}{9610.233} \right) (106780.37(x_2 + x_3) - 2135.61) \right)^2 \right) \left(\left(\frac{1}{1293.6} \right) (3000x_1 \right. \right. \\ & \left. \left. - 56.4) \right)^2 \right) \left(\left(\left(\frac{1}{2568122} \right) \left(\frac{(305700)2289x_2}{[(0.06)2289]^{0.65}} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - 285346.9) \right)^2 \right) \left(\left(\left(\frac{1}{6391533} \right) ((250)2289 \exp(-39.75x_2 + 9.9x_3 + 2.74) \right. \right. \\ & \left. \left. - 183750) \right)^2 \right) \left(\left(\left(\frac{1}{24771.74} \right) \left(25 \left(\frac{1.39}{x_1x_2} + 4940x_3 - 80 \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - 7.22) \right)^2 \right) \left(\left(\left(\frac{1}{1.9997} \right) \left(\frac{0.00139}{x_1x_2} + 4.94x_3 - 0.0803 \right) \right)^2 \right) \dots \left(\left(\left(\frac{1}{1144.514} \right) \left(\frac{0.164}{x_1x_2} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 631.13x_3 - 9.966) \right)^2 \right) \right)^{1/12} \end{aligned}$$

Genel çekicilik fonksiyonunun optimizasyonu ile elde edilen minimum nokta ve Pareto-optimal kümede, bu noktadaki amaç fonksiyon değerlerine karşılık gelen noktalar ve toplam maliyet değerleri Tablo 3.7'de gösterilmiştir. Çekicilik fonksiyonu çözümünden elde edilen x değişkenleri $x_1 = 0.419$, $x_2 = 0.1$ ve $x_3 = 0.01$ olarak hesaplanmıştır.

Çok Amaçlı Optimizasyon probleminin Evrimsel Algoritmalarla çözümünden elde edilen Pareto-optimal küme 2430 satırdan oluşmaktadır ve her satır 5 amaç fonksiyonunun değerlerini içermektedir. Elde edilen sonuçlar Pareto-optimal küme içinde araştırıldığında, Çekicilik fonksiyonunun amaç fonksiyonları için, Pareto-

optimal kümedeki çözümlerle çakışan sonuçlara ulaştığı görülmektedir. Burada elde edilen çözüm, karar vericiye yeni bir optimum nokta sunmaktadır.

Tablo 3.7: Su kaynak planlaması probleminin Çekicilik fonksiyonu çözümü minimum noktası ve karşılık gelen Pareto-optimal noktalar

Su kaynak planlaması problemi	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	x_1	x_2	x_3	Toplam Maliyet	T.S.
Çekicilik fonksiyonu çözümü	73451	1257	2853500	183750	64,35561	0,419	0,1	0,01	3112022,4	
Pareto-optimal çözüm noktalarından çekicilik fonksiyonu çözümüne yakın olanlar										
f_1 min	63842,12	917,39	285679,9	6572616,903	10586,2	0,3057	0,01	0,01	6933643	18
f_2 min	73221,41	42,87662	2728559	223559,3	24937,65	0,0142	0,095	0,01	3050320	14
f_3 min	64682,5	459,062	285351,9	7109253,112	22918,03	0,1530	0,01	0,017	7482665	15
f_4 min	73454,61	44,6658	2852899	184002,2	22586,83	0,0148	0,099	0,01	3132988	22
f_5 min	73441,89	1342,94	2850453	184569,1	15,18134	0,4476	0,0998	0,01	3109822	19
Pareto-optimal noktalar	73447,82	43,0862	2852642	183968,9	23438,19	0,0144	0,099	0,01	3133540	24
	73458,15	103,298	2803356	200633,4	9733,28	0,0344	0,098	0,011	3087284	15
	73460,78	104,56	2832349	190809,8	9382,978	0,0348	0,099	0,01	3106107	14
	73473,29	1040,29	2844383	187072,7	305,9966	0,3467	0,099	0,01	3106276	19
	73490,57	1041,02	2783221	208412,7	612,0609	0,347	0,097	0,01	3066778	15
	65899,5	1254,654	815622,8	3163140	2228,523	0,4182	0,028	0,0107	4048146	19
	69361,04	1255,165	1744670	865859,3	662,5828	0,4184	0,061	0,0106	2681809	24
	72699,19	1256,05	2594261	269060,8	400,8231	0,4187	0,090	0,012	2937678	22
	64227,92	1257,701	386436,8	5716547	5366,405	0,4192	0,0135	0,010	6173836	19
	64271,92	1259,495	323548,3	6403659	6868,733	0,4198	0,0113	0,0127	6799608	18
	64224,72	1260,268	310936,1	6517161	7160,171	0,4200	0,0108	0,0127	6900743	15
	73182,11	1337,325	2778685	204141,7	48,76199	0,4457	0,0973	0,0101	3057396	29
	73340,11	1301,492	2818926	193145,8	67,63936	0,4338	0,0987	0,0102	3086781	16
	73215,52	1289,694	2787898	201518,6	74,35407	0,4298	0,0977	0,0100	3063997	17

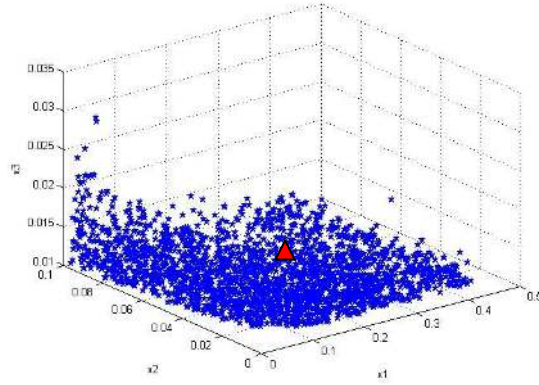
Tablo 3.7 incelendiğinde, çekicilik fonksiyonu çözümünde bulunan minimum noktanın, Pareto-optimal kümedeki yakın noktalar arasında ekonomik kaybı gösteren f_5 amaç fonksiyonunda oldukça düşük bir sonuca ulaştığı görülmektedir. Diğer noktalar sabitken, f_2 =depolama tesis maliyetini düşürmek, ekonomik kaybı arttırmaktadır.

Pareto-optimal kümedeki diğer çözümler içinde çekicilik fonksiyonu çözümünü karşılaştırmak ve amaç fonksiyonları arasındaki ilişkileri görmek için,

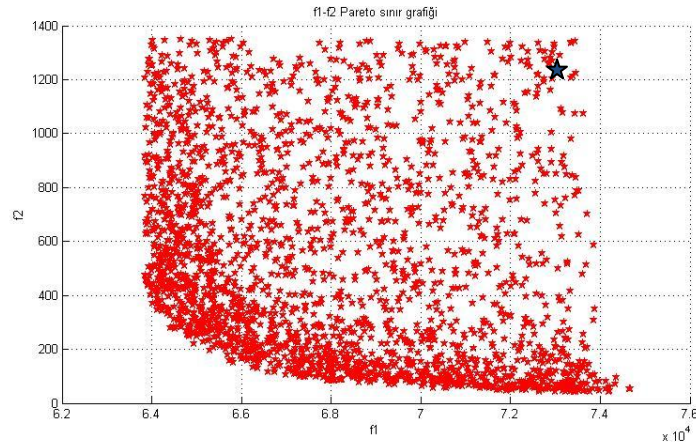
karar değişkenlerinin ve amaç fonksiyonlarının ikili ve üçlü olarak grafikleri çizilmiştir (Şekil 3.5-3.15). Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası (★ ile gösterilmiştir).

Önerilen çekicilik fonksiyonu ile hesaplanan minimum noktada, kısıtların tamamı sağlanmaktadır.

Şekil 3.5: Karar değişkenleri grafiği (▲)

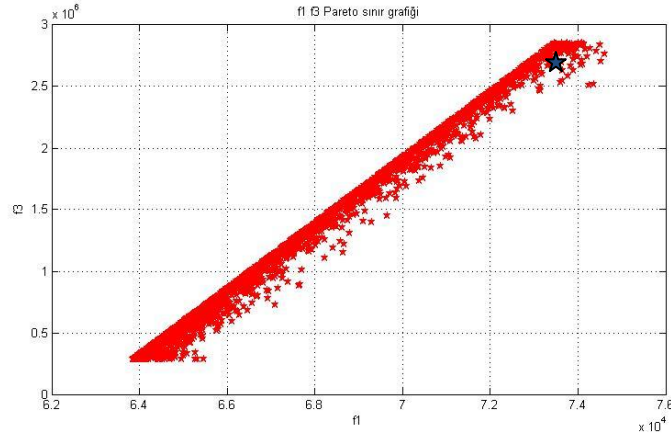


Şekil 3.6: Birinci ve ikinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



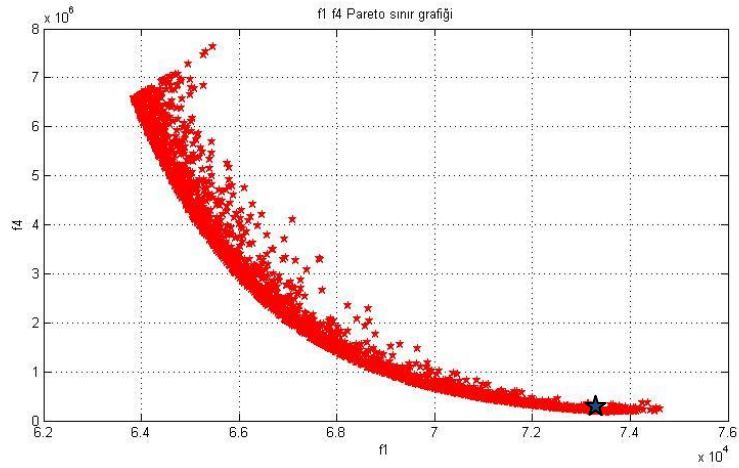
Birinci ve ikinci amaç fonksiyonları arasında ters yönlü ilişki vardır (Şekil 3.6). f_1 =su tahliye ağı maliyeti arttıkça, f_2 =depolama tesisi maliyeti azalmaktadır.

Şekil 3.7: Birinci ve üçüncü amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



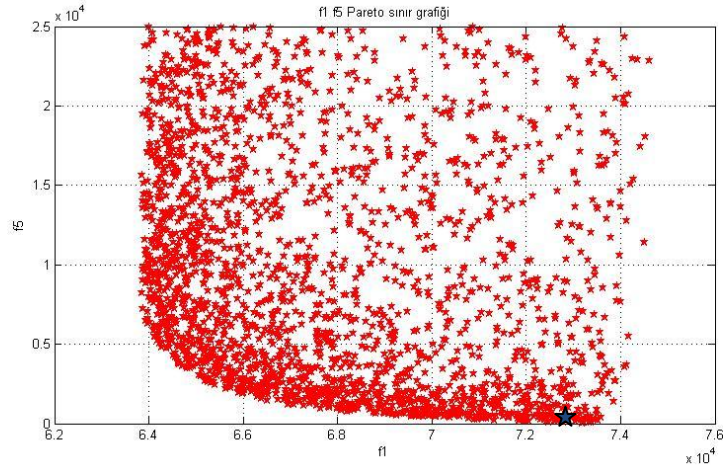
Birinci ve üçüncü amaç fonksiyonları arasında aynı yönlü bir ilişki vardır (Şekil 3.7). f_1 =su tahliye ağı maliyeti arttıkça, f_3 =işlem tesisi maliyeti de artmaktadır. Her iki amaç fonksiyonu da x_2 =maksimum tasfiye (işlem) oranı değişkenini çarpan olarak içermektedir. Maksimum tasfiye oranındaki bir artış, amaç fonksiyonlarını arttıracaktır.

Şekil 3.8: Birinci ve dördüncü amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



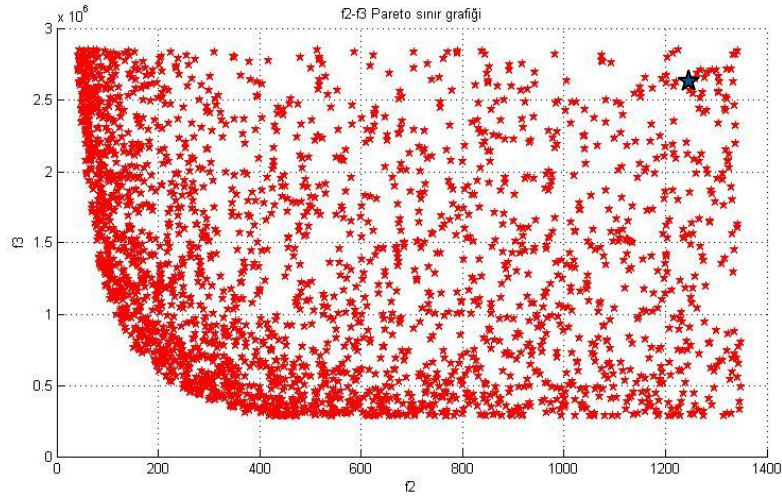
Birinci ve dördüncü amaç fonksiyonları arasındaki ilişki Şekil 3.8'de görülmektedir. f_1 =su tahliye ağı maliyeti arttıkça, f_4 =beklenen sel hasar maliyeti azalmaktadır.

Şekil 3.9: Birinci ve beşinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



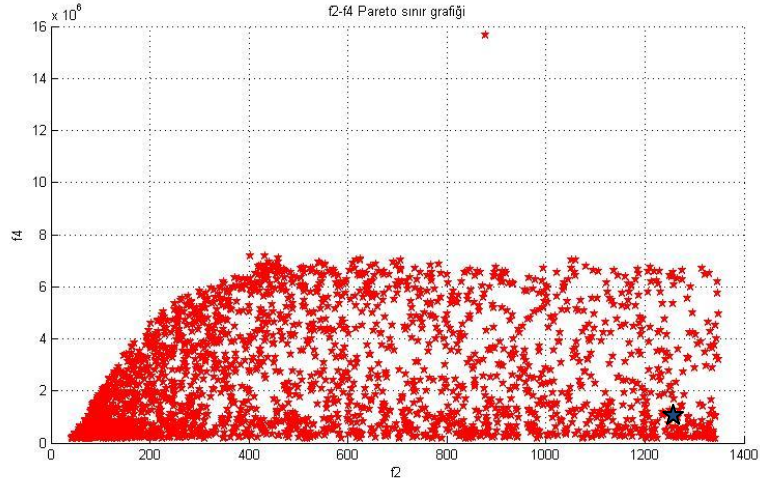
Şekil 3.9'da birinci ve beşinci amaç fonksiyonları arasında ters yönlü bir ilişki vardır. f_1 =su tahliye ağı maliyeti arttıkça, f_5 =sel durumunda beklenen ekonomik kayıp azalmaktadır.

Şekil 3.10: İkinci ve üçüncü amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



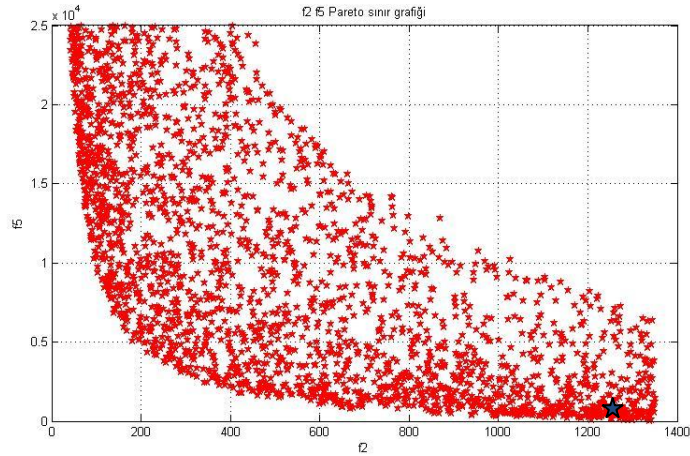
Şekil 3.10'da ikinci ve üçüncü amaç fonksiyonları arasında ters yönlü bir ilişki vardır. f_2 =depolama tesisi maliyeti arttıkça, f_3 =işlem tesisi maliyeti azalmaktadır.

Şekil 3.11: İkinci ve dördüncü amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



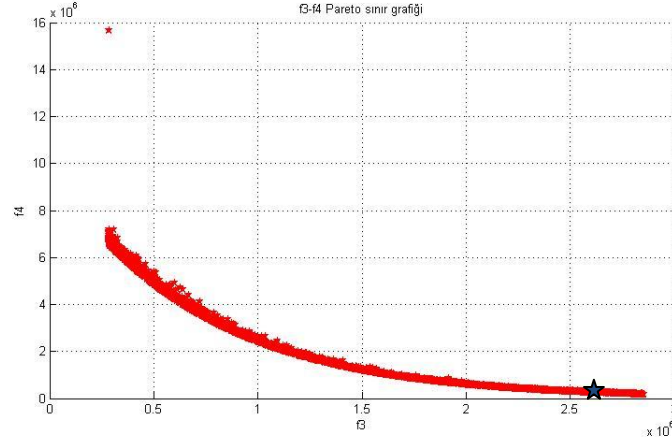
Şekil 3.11'de ikinci ve dördüncü amaç fonksiyonları arasında aynı yönlü ilişki olduğu görülmektedir. f_2 =depolama tesisi maliyeti arttıkça, f_4 =beklenen sel hasar maliyeti önce artmakta sonra sabit hale gelmektedir. $f_2 = 400$ noktasından sonra depolama tesisi maliyetinin artışı, beklenen sel hasar maliyetini arttırmamaktadır.

Şekil 3.12: İkinci ve beşinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



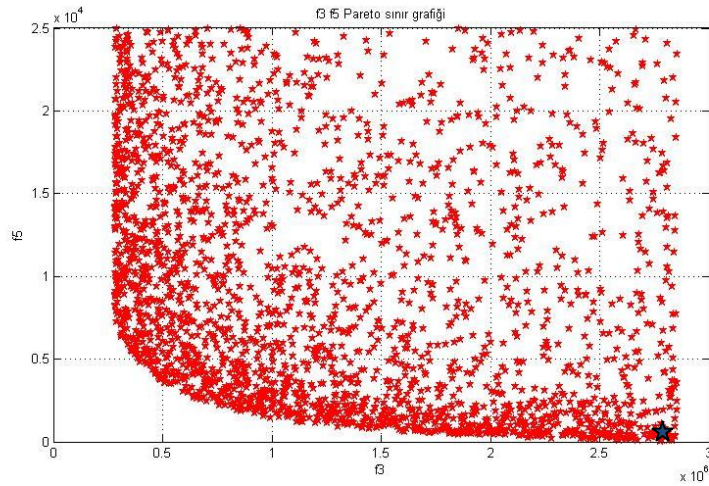
Şekil 3.12'de ikinci ve beşinci amaç fonksiyonları arasında ters yönlü bir ilişki olduğu görülmektedir. f_2 =depolama tesisi maliyeti arttıkça, f_5 =sel durumunda beklenen ekonomik kayıp azalmaktadır.

Şekil 3.13: Üçüncü ve dördüncü amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



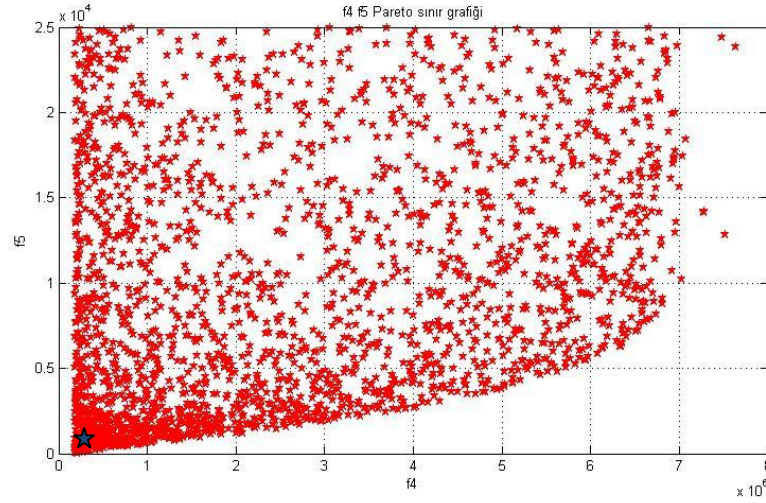
Üçüncü ve dördüncü amaç fonksiyonları arasında ters yönlü bir ilişki vardır (Şekil 3.13). İşlem tesisi maliyeti arttıkça, beklenen sel hasar maliyeti azalmaktadır.

Şekil 3.14: Üçüncü ve beşinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



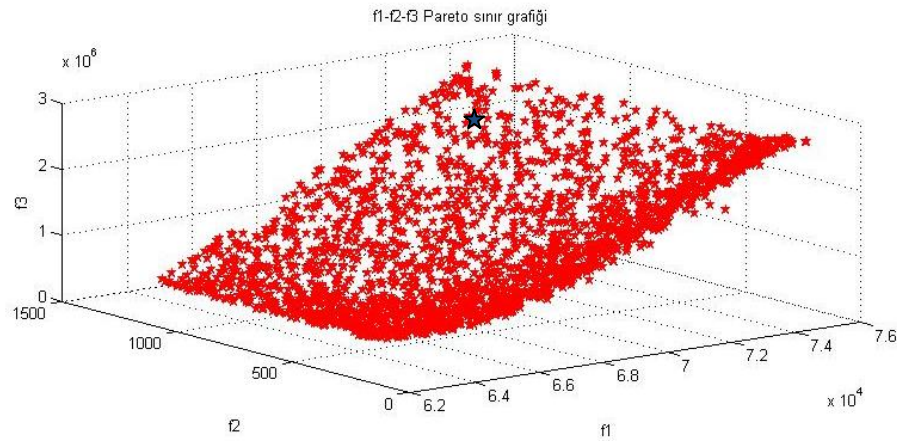
Üçüncü ve beşinci amaç fonksiyonları arasında ters yönlü bir ilişki vardır (Şekil 3.14). İşlem tesisi maliyeti arttıkça, sel durumunda beklenen ekonomik kayıp azalmaktadır.

Şekil 3.15: Dördüncü ve beşinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



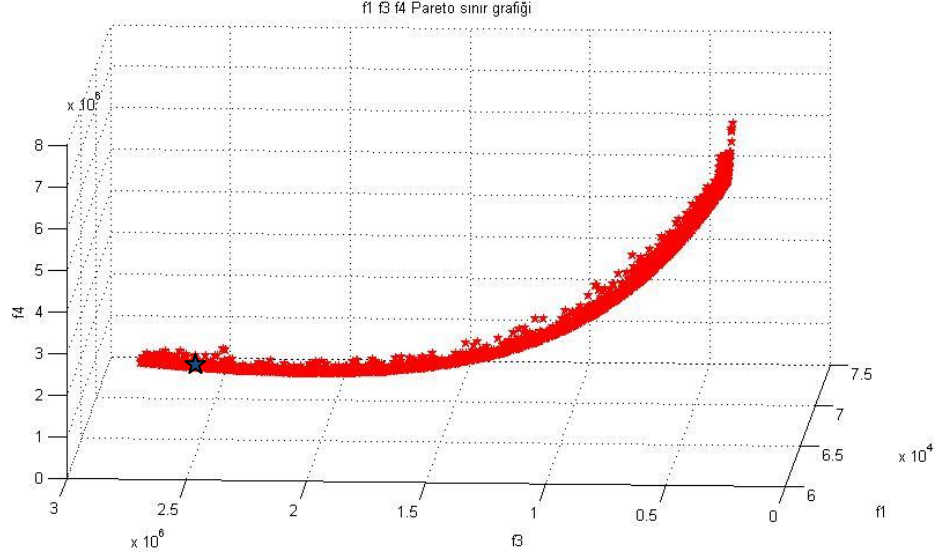
Şekil 3.15'de, f_4 =beklenen sel hasar maliyeti arttıkça, f_5 =sel durumunda beklenen ekonomik kayıp da artmaktadır.

Şekil 3.16: Birinci, ikinci ve üçüncü amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



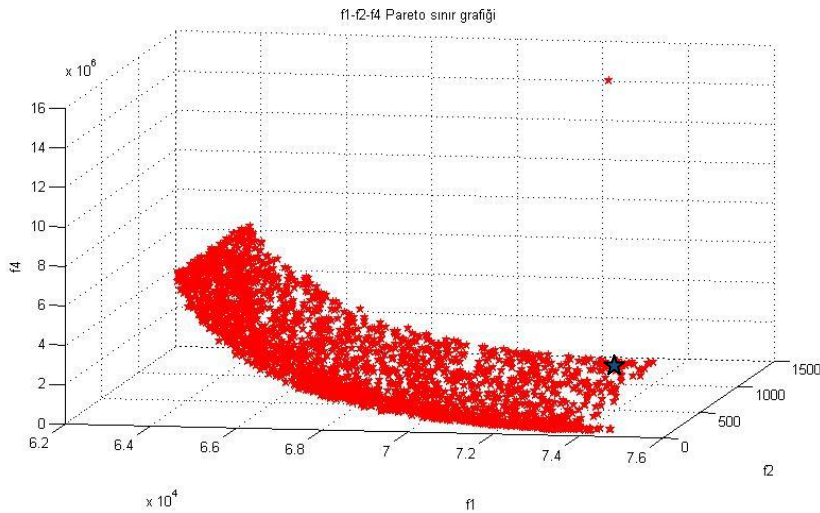
Şekil 3.16'da birinci, ikinci ve üçüncü amaç fonksiyonları arasındaki ilişki görülmektedir. Birinci ve üçüncü amaç fonksiyonları arasında aynı yönlü, bu fonksiyonların ikinci amaç fonksiyonuyla aralarında ters yönlü ilişki vardır. f_1 =su tahliye ağı maliyeti ve f_3 =işlem tesisi maliyeti arttıkça, f_2 =depolama tesisi maliyeti azalmaktadır.

Şekil 3.17: Birinci, üçüncü ve dördüncü amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



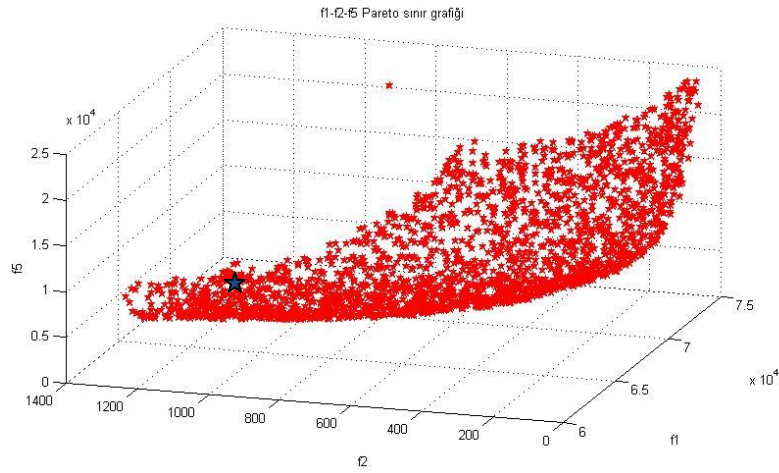
Şekil 3.17'de f_1 =su tahliye ağı maliyeti, f_3 =işlem tesisi maliyeti ve f_4 =beklenen sel hasar maliyeti arasındaki ilişki görülmektedir. Birinci ve üçüncü amaç fonksiyonları arasında aynı yönlü, bu fonksiyonların dördüncü amaç fonksiyonu ile aralarında ters yönlü ilişki vardır. Su tahliye ağı maliyeti ve işlem tesisi maliyeti arttıkça, beklenen sel hasar maliyeti azalmaktadır.

Şekil 3.18: Birinci, ikinci ve dördüncü amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



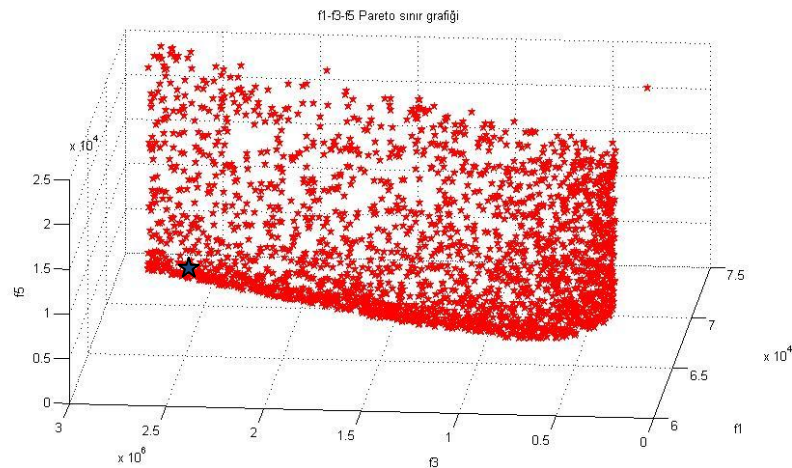
Birinci ve ikinci, birinci ve dördüncü amaç fonksiyonları arasında ters yönlü ilişki vardır (Şekil 3.18). İkinci ve dördüncü amaç fonksiyonları arasında aynı yönlü ilişki mevcuttur. f_1 =su tahliye ağı maliyeti arttıkça, f_2 =depolama tesisi maliyeti ve f_4 =beklenen sel hasar maliyeti azalmaktadır.

Şekil 3.19: Birinci, ikinci ve beşinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



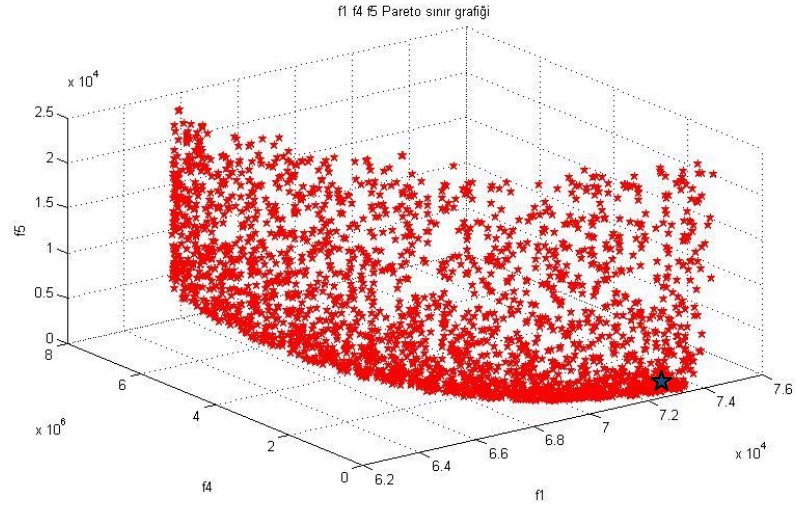
Şekil 3.19'da birinci, ikinci ve beşinci amaç fonksiyonları arasındaki ilişki görülmektedir. Üç amaç fonksiyonu birbiriyle ters yönlü ilişkilidir. f_1 =su tahliye ağı maliyeti arttıkça, f_2 =depolama tesisi maliyeti azalmakta ve f_5 =sel durumunda beklenen ekonomik kayıp da azalmaktadır.

Şekil 3.20: Birinci, üçüncü ve beşinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



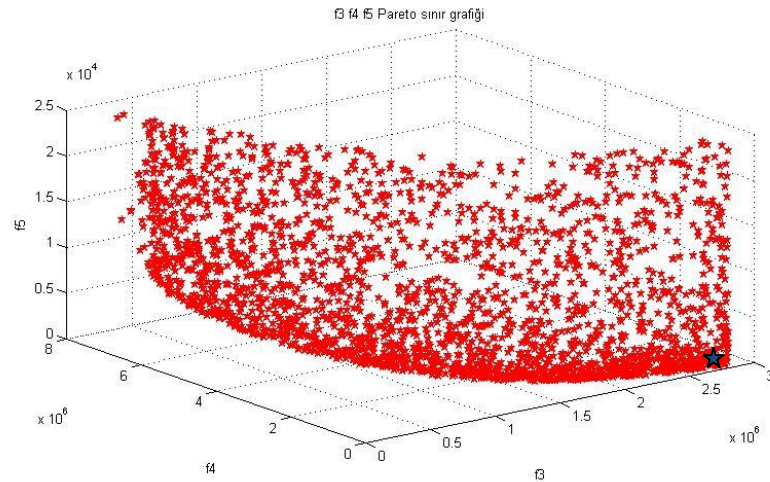
Şekil 3.20'de f_1 =su tahliye ağı maliyeti, f_3 =işlem tesisi maliyeti ve f_5 =sel durumunda beklenen ekonomik kayıp arasındaki ilişki görülmektedir. Su tahliye ağı maliyeti ve işlem tesisi maliyeti arttıkça, sel durumunda beklenen ekonomik kayıp azalmaktadır.

Şekil 3.21: Birinci, dördüncü ve beşinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



Şekil 3.21'de birinci, dördüncü ve beşinci amaç fonksiyonları arasındaki ilişki görülmektedir. f_1 =su tahliye ağı maliyeti arttıkça, f_4 =beklenen sel hasar maliyeti ve f_5 =sel durumunda beklenen ekonomik kayıp azalmaktadır.

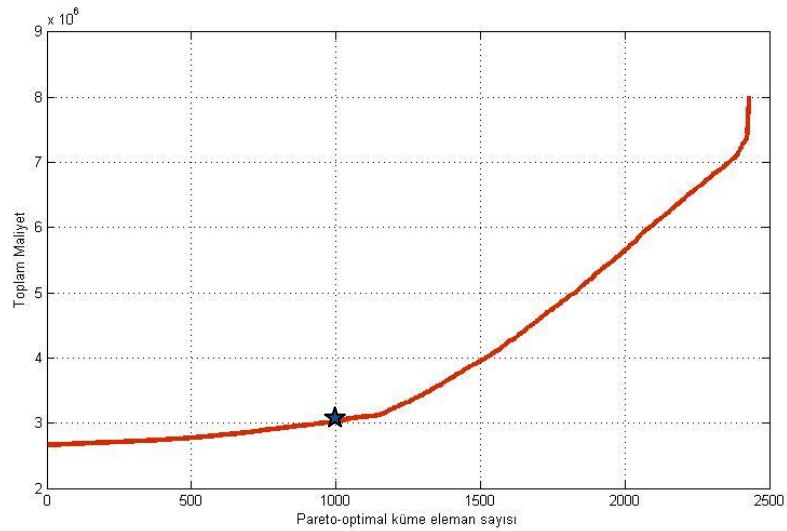
Şekil 3.22: Üçüncü, dördüncü ve beşinci amaç fonksiyonlarının Pareto-optimal kümeleri ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



Şekil 3.22'de f_3 =işlem tesisi maliyeti arttıkça, f_4 =beklenen sel hasar maliyeti ve f_5 =sel durumunda beklenen ekonomik kayıp azalmaktadır.

Pareto-optimal kümeyi oluşturan amaç fonksiyonlarının tamamı maliyet fonksiyonları olduğu için, bunların toplamını alarak toplam maliyet değerlerinin grafiği çizilmiştir (Şekil 3.23). Çekicilik fonksiyonu ile hesaplanan minimum noktanın da toplamı alınarak, tüm Pareto-küme içinde toplam maliyet değerleriyle karşılaştırılmıştır.

Şekil 3.23: Toplam maliyet ve Çekicilik fonksiyonu çözüm noktası



Çekicilik fonksiyonu çözüm noktasının, toplam maliyet içinde, oldukça düşük bir değerde olduğu görülmektedir. Şekil 3.5-3.23 arasındaki grafiklerde, çekicilik fonksiyonu çözümü, su tahliye sistemi için gerekli tesislerin maliyetlerinde yüksek olmasına rağmen, buna karşılık beklenen sel hasar maliyeti ve ekonomik kayıp değerlerinin çok düşük olması, toplam maliyeti de düşük seviyede tutmuştur.

Su tahliye ağı (f_1), depolama tesisi (f_2) ve işlem tesisinin (f_3) (suyun tasfiyesini sağlayan tesis) yapımında kullanılan sermaye miktarı arttırıldığında, beklenen sel hasar maliyeti (f_4) ve sel durumunda beklenen ekonomik kayıpta (f_5) minimum değerlere ulaşıldığı görülmektedir. Bu, beklenen bir sonuçtur. Çekicilik fonksiyonu, beklenen sel hasar maliyeti ve ekonomik kayıpta çok düşük değerlere ulaşan, aynı zamanda tesis yatırımlarının önemini vurgulayan, toplam maliyet değeri olarak da düşük bir noktayı minimum nokta olarak bulmuştur. Bu nokta, karar verici

için yeni bir alternatif noktadır. Özellikle, ekonomik kayıp değerinin, Pareto-optimal kümedeki yakın noktalardan düşük olması, tercih edilebilir bir çözüm olduğunu göstermektedir.

3.3.2.2. Ağırlıklandırılmış Çözüm Senaryosu

Su kaynak planlaması probleminde, karar vericinin üçüncü amaç fonksiyonu olan, işlem tesisi maliyetini daha minimum noktada tutmak istediği varsayılarak yeni bir senaryo oluşturulmuştur. Karar verici üçüncü amaç fonksiyonunun problem içinde daha önemli olduğunu düşünerek, bireysel çekicilik fonksiyonunun ağırlık değerini 2'den 6'ya çıkarmıştır. Önceki problemde ağırlık değeri 2'den 4'e çıkarılmıştı. Farklı ağırlıkların sonuç verip vermeyeceğini görmek amacıyla ağırlık 6 olarak seçilmiştir. Ağırlık üs değeri olduğu için, ağırlığın artırılması, problemin çözümünü zorlaştırmaktadır. Bu nedenle, farklı ağırlıklar denenmiştir. Ağırlıklandırmadan sonra hesaplanan ortak çekicilik fonksiyonu optimizasyonunda elde edilen minimum nokta ve Pareto-optimal kümede bu noktaya yakın noktalar Tablo 3.8'de verilmiştir. Ağırlıklandırılmış çekicilik fonksiyonu çözümünde bulunan minimum noktanın kısıtları sağladığı görülmüştür.

Tablo 3.8: Birinci amaç fonksiyonunun ağırlıklandırıldığı Çekicilik fonksiyonu sonucu ve Pareto-optimal noktalarla karşılaştırılması

Su kaynak planlaması problemi	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	x_1	x_2	x_3	Toplam Maliyet	T.S.
Çekicilik fonksiyonu çözümü	63840	1332	285350	6575300	7061.6	0,444	0,01	0,01	6932884	
Pareto-optimal noktalar	64414,43	609,3469	285379,6	6934408	17005,43	0,203	0,01	0,015	7301817	15
	64433,89	596,2907	285379,6	6946929	17402,5	0,198	0,01	0,015	7314742	20
	64218,08	1102,95	285399,1	6809081	9121,928	0,368	0,01	0,013	7168923	16
	64212,56	1139,532	285403,4	6805544	8812,004	0,379	0,01	0,013	7165112	12
	63940,47	764,5049	285515,7	6634716	12978,36	0,255	0,01	0,01	6997915	16
	63853,03	1155,679	285544	6580822	8263,338	0,385	0,01	0,01	6939639	16
	64090,3	875,8998	285602,1	6726514	11414,47	0,232	0,01	0,012	7088497	25
	65465,71	457,5778	285636,4	7640913	23873,61	0,153	0,01	0,025	8016347	20

Tablo 3.9'da, üçüncü amaç fonksiyonu olan işlem tesis maliyetinde daha minimum noktaya ulaşmak, aynı zamanda su tahliye ağı maliyetinde de minimum çözümü sağladığı görülmektedir. Birinci ve üçüncü amaç fonksiyonları arasında aynı yönlü ilişki olduğu Şekil 3.5'de verilmişti. Pareto-optimal kümenin alt sınırından da daha düşük bir notaya denk gelen, birinci ve üçüncü amaç fonksiyonlarındaki bu azalış, diğer amaç fonksiyonlarında önemli artışlara neden olmaktadır. Özellikle f_4 , beklenen sel hasar maliyeti sonucu, Pareto-optimal kümenin üst sınırındadır. Aynı şekilde, ikinci amaç fonksiyonu olan depolama tesis maliyetinde ve beşinci amaç fonksiyonu ile gösterilen sel durumunda beklenen ekonomik kayıpta çok yüksek değerlere çıkmıştır. Örneğin, amaç fonksiyonlarının eşit ağırlıklandırıldığı (ya da ağırlıklandırılmamış) durumda sel durumunda beklenen ekonomik kayıp 64.35561 iken, işlem tesis maliyetinde minimum hedeflendiğinde 7061.6'ya çıkmaktadır. Karar verici su, kaynak planlaması için kuracağı su tahliye ağı ve işlem tesisi için, sermaye yatırımını minimum seviyede tutarsa, depolama tesis maliyetinde, beklenen sel hasar maliyetinde ve beklenen ekonomik kayıpta çok yüksek değerlere katlanmak zorunda kalacaktır. Bu durum aynı zamanda toplam maliyeti de arttırmaktadır. Ağırlıklandırılmamış modelde toplam maliyet, 3.112.022,36 para birimi iken, işlem tesis maliyetini düşürmek istediğinde karar verici, 6.932.884 para birimi maliyetle karşılaşmaktadır.

Karar verici, amaç fonksiyonlarını önem seviyelerine göre ağırlıklandırıldığında, ilgili amaç fonksiyonlarında Pareto-optimal kümenin bile dışında kalabilen, minimum değerlere ulaşabilir. Ancak bu durumda diğer amaç fonksiyonlarındaki artışın sonuçlarını ve kısıtların sağlanıp sağlanmadığını göz önünde bulundurmalıdır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Çok amaçlı optimizasyon, birden fazla amaç fonksiyonunun sağladığı çoklu bilgiyi kullanarak, problemin minimumlarını içeren çözüm kümesini bulmaya odaklanmaktadır. Bu çözüm kümesi içinde, diğer tüm çözümlerden üstün olan ama birbirlerine üstün gelemeyen (non-dominated) çözüm kümesi, Pareto-optimal küme olarak adlandırılır. Karar verici, Pareto-optimal küme içinden seçim yapar. Bu

kümenin, doğru hesaplanması ve ilgili aralıkta mümkün olan en fazla sayıda Pareto-optimal çözümü içermesi, kararın hassaslığı ve doğruluğu açısından önemlidir. Genetik Algoritmalar, bu özelliklere sahip Pareto-optimal kümeler oluşturma yeteneğine sahiptir. Bu yeteneği, çözüm algoritması içindeki, çaprazlama, mutasyon ve turnuva seçimi gibi yöntemlerden kaynaklanmaktadır. Çaprazlama ve mutasyon, diğer evrimsel olmayan yöntemlerle asla ulaşılamayacak, yeni çözüm noktaları türeten, önemli araçlardır. Problemin matematiksel yapısından bağımsız olarak, konveks, konkav ve karma problemlerde, kesikli veya sürekli fonksiyonlarda uygun Pareto-optimal kümeleri oluşturabilir. Bu özellikleriyle Genetik Algoritmalar, literatürdeki diğer yöntemleri geride bırakmıştır.

Klasik çok amaçlı optimizasyon yöntemlerinin, amaç fonksiyonlarını çeşitli yollarla toplamsal model haline getirerek, tek amaçlı optimizasyon problemlerine dönüştürme çabası, problemde bilgi kaybına yol açmaktadır. Karar vermede en önemli unsur olan bilginin, bu yöntemlerin yapısının bir sonucu olarak azaltılması, yanlış kararlar verilmesine neden olabilmektedir. Bu yöntemlerin, problem yapısına bağlı olarak sonuç vermesi de, matematiksel yapısı tam olarak bilinmeyen problemlerde bulunan sonucun güvenilirliğini olumsuz yönde etkilemektedir. Diğer bir dezavantaj, klasik yöntemlerin çok az sayıda Pareto-optimal sonuç bulabilmesidir. Bu durum, aynı zamanda, yöntemlerin neden olduğu bilgi kaybının bir sonucudur. Tüm bu olumsuzluklar nedeniyle, bu çalışmadaki çok amaçlı optimizasyon problemlerinin çözümünde klasik yöntemler tercih edilmemiştir.

Genetik Algoritmalar, Evrimsel Algoritmalar içinde incelenen Sezgisel bir teknik olduğundan, kesin bir minimum nokta bulmayı değil, parametre aralığı içinde mümkün olan tüm değişken değerlerini kullanarak, mutasyon, çaprazlama ve diğer genetik operatörler yardımıyla minimum ya da minimuma yakın çok sayıda çözüm noktası bulmayı amaçlar. Klasik yöntemlerdeki bilgi kaybının aksine, bilgiyi kullanan ve çoğaltan bir yöntemdir. Hesaplanan yüksek hacimli Pareto-optimal küme, test problemlerinde de görüldüğü üzere 1000'in üzerinde eleman sayılarına ulaşabilmektedir. Bu durumda, karar verici yeni bir problemle, çok yüksek hacimli Pareto-optimal küme içinden uygun çözümü seçim problemiyle, karşı karşıya kalmaktadır.

Karar verici, problemlerle ilgili sınırlı bilgiye sahip olabilir. Analizi yapanlar ve sonuçta karar verenler farklı kişiler olabilir. Karar verici, problemle ilgili bilgilere sahipken bile, yüksek hacimli Pareto-optimal kümeden uygun olanını seçmekte zorlanırken, sınırlı bilgiye sahip bir yöneticinin bu kadar çok çözüm noktası içinden optimum noktayı belirlemesi imkansızdır. Problemin Pareto-optimal kümesi içinden seçim yapmaya yardım edecek bir yönteme ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu çalışmanın odak noktasını oluşturan bu seçim problemini çözme kaygısıyla, Yöneylem Araştırması ve İstatistik literatüründeki birçok yöntem araştırılmıştır. Çok amaçlı optimizasyon problemlerinin, farklı bir optimizasyon yöntemiyle daha çözülerek elde edilen, Pareto-optimal küme içindeki yeni bir minimum noktanın, genetik algoritmalarla hesaplanan Pareto-optimal küme ile karşılaştırılması, seçilecek optimum nokta hakkında bilgi ve karar vericiye bu seçim için destek sağlamaktadır. Problemi iki kere çözmek anlamına gelse de, bu işlem hem genetik algoritmaların sezgisel olmasından kaynaklanan belirsizliğin giderilmesine, hem de problem için bulunan çözümlerin karşılaştırılmasına fırsat vermektedir.

Yapılan denemeler sonucunda, İstatistik konularından Çoklu Cevap Yüzeyi modellerindeki Çekicilik fonksiyonu yaklaşımının dikkat çekici sonuçlar bulduğu görülmüştür. Çekicilik fonksiyonu çarpımsal bir fonksiyondur. Bireysel Çekicilik fonksiyonu dönüşümleri ile normalizasyonu yapılan cevap yüzeyi modellerinin, geometrik ortalamasını maksimum yaparak hedef değere yakınlığı ölçmektedir. Bireysel dönüşüm formülünün payındaki minimum değerden ne kadar uzaklaşırsa istenen üst hedef değere o kadar yaklaşmaktadır. Bu nedenle maksimize edilmektedir. Burada kullanılan cevap yüzeyi modelleri, regresyon denklemleridir. Çok amaçlı optimizasyon problemlerindeki amaç fonksiyonları regresyon denklemleri olmadığı için ve amaç minimizasyon olduğu için bireysel çekicilik fonksiyonu dönüşümünde bazı değişiklikler yapılması gerekmiştir.

Yapılan değişikliklerle, bireysel çekicilik fonksiyonu dönüşümlerinde, çok amaçlı optimizasyon problemlerindeki orijinal amaç fonksiyonları kullanılmıştır. Böylece amaç fonksiyonlarının sağladığı bilginin kaybolması önlenmiştir. Pareto-optimal kümenin alt ve üst sınırları normalizasyon için kullanılmıştır ve genel çekicilik fonksiyonu minimizasyona dönüştürülmüştür. Oluşturulan bu yeni formül,

öncelikle çok amaçlı optimizasyon literatüründe kullanılan test problemlerinde, ardından da gerçek uygulama problemlerinde denenmiştir.

Test problemleri 12 kısıtsız, 5 kısıtlı test problemi olmak üzere iki alt grupta incelenmiştir. Bunlar farklı matematiksel yapıdaki problemlerden seçilerek, uyarlanmış-çekicilik fonksiyonu formülünün minimum çözüme ulaşma davranışı incelenmiştir. Problemlerin amaç ve kısıt fonksiyonlarının eşit ağırlıkta olduğu varsayılarak, tüm bireysel çekicilik fonksiyonlarının ağırlığı $r=2$ olarak belirlenmiştir. Genel çekicilik fonksiyonunun optimizasyonunda genellikle doğru arama algoritmaları kullanılmış, ancak bazı çok karmaşık problemlerde optimizasyon genetik algoritmalar ile yapılarak minimuma ulaşılmıştır.

Test problemlerinin çözümünden elde edilen minimum noktalar, Pareto-optimal küme içinde yer almaktadır. Bazı problemlerde, çekicilik fonksiyonu, birebir Pareto-optimal kümedeki çözüm noktalarına ulaşabilirken, bazı problemlerde çok amaçlı optimizasyon algoritmasının dahi hesaplayamadığı daha minimum noktalar bulmuştur. Bu noktalar karar verici için, yeni alternatifler içermektedir. Yapılan denemelerde, çekicilik fonksiyonunun minimum noktaya ulaşmasında, diğer problem çözümlerindeki etkinliği tam olarak gösteremediği bir problem yapısıyla karşılaşmıştır. Trigonometrik fonksiyonlar içeren çok amaçlı optimizasyon problemlerinde, trigonometrik ifadelerin yapısından kaynaklanan nedenler yüzünden, bazı ara değerlere ulaşılması mümkün olmamıştır. Bu durumda, bulunan minimum noktanın yakın çevresindeki Pareto-optimal çözüm noktalarını incelemek, tercih edilecek bir minimum çözüme ulaşmayı kolaylaştırmaktadır. Test problemleriyle yapılan bu çalışma, trigonometrik fonksiyonlar içeren yapılarda daha dikkatli olunması ve diğer Pareto-optimal çözümlerin de göz önünde bulundurulması gerektiğini göstermiştir. Bunun dışındaki diğer problem yapılarında, Çekicilik fonksiyonu minimum değerlere ulaşarak karar verme sürecine destek sağlamıştır. Özellikle, kısıtlı optimizasyon problemlerinde, kısıt fonksiyonlarını da amaç fonksiyonları gibi Çekicilik fonksiyonu içine dahil etmesi, kısıt bilgisini de kullanmaya olanak sağlamıştır. Karar verici, kesinlikle sağlanması gereken kısıtları önem derecelerine göre ağırlıklandırabilmekte ve sonucu bu yönde farklılaştırabilmektedir. Çekicilik fonksiyonunun bu esnek yapısı, karar vericinin

problem üzerindeki hakimiyetini arttırmakta, kararda önemli olan unsurları, çözüm yöntemi içinde de öncelikli hale getirmesini sağlamaktadır.

Test problemlerindeki denemelerden uygun sonuçlar elde edildikten sonra, gerçek uygulamalar üzerinde de önerilen bu yöntem test edilerek sonuçlar yorumlanmıştır. Gerçek uygulama problemleri farklı alanlardan seçilerek, yöntemin bulunduğu noktaların minimum olup olmadığı ve problem içinde bu noktanın anlamı incelenmiştir. Uygulama problemlerinin ilki, küçük uçaklarda motor ile pervane arasındaki bir şanzıman tasarım problemi, ikincisi bir kentteki yağmur suyu tahliye sisteminde maliyet minimizasyonu problemidir. Her iki problem de önce ağırlıksız, sonra da ağırlıklandırılarak çözülmüştür.

Şanzıman tasarım problemi, iki amaç fonksiyonu ve onbir kısıt fonksiyonundan oluşmaktadır. Problemin amaçları, şanzımanın ağırlığını ve iki şanzıman şaftından birindeki stresi minimize etmektir. Öncelikle genetik algoritmalar yardımıyla çok amaçlı optimizasyon çözümü yapılarak Pareto-optimal küme elde edilmiştir. Daha sonra Pareto-optimal kümenin alt ve üst sınırlarını kullanılarak Çekicilik fonksiyonunun optimizasyonu ile minimum noktası bulunmuştur. İki çözümü karşılaştırıldığında, önerilen yöntemle ulaşılan minimum noktanın, çok amaçlı optimizasyon çözüm algoritmalarıyla hesaplanamayan ve Pareto-optimal kümedeki çözümler tarafından baskılanmayan (non-dominated) yeni bir nokta olduğu görülmüştür. Bu yeni çözüm, Pareto-optimal kümedeki noktalardan, her iki amaç fonksiyonu açısından daha üstün olmaktadır (dominated). Problemin kısıtlarının tamamı bu çözüm noktasında sağlanmaktadır. Karar verici bu çözüm noktasını seçtiğinde, daha hafif bir şanzıman ve iki şanzımandan birinde daha az stres değerleri elde etmektedir. Çekicilik fonksiyonu çözümü yapılmıyorsa, karar verici 500 hacimli Pareto-optimal küme içinden seçim yapmak zorunda kalacak ve bu yeni en minimum çözüme asla ulaşamayacaktı.

Şanzıman tasarım problemi, birinci amaç fonksiyonu ağırlıklandırılarak çözüldüğünde, şanzıman ağırlığında Pareto-optimal kümenin alt sınırından daha düşük bir çözüm elde edilmiş, buna karşılık ikinci amaç fonksiyonu olan bir şanzımandaki stres değerinde Pareto-optimal kümenin üst sınırından çok daha yüksek değerlere ulaşılmıştır. Karar verici böylece, ağırlıklandırılmadan yapılan çekicilik fonksiyonu çözümünden daha hafif şanzıman üretebilir, ancak stres

değerindeki aşırı yüksekliğin sonuçlarına katlanmak zorundadır. Ağırlıklandırma sonucu bulunan minimum noktada, bazı kısıtların sağlanmadığı görülmüştür.

Su kaynak planlamasının yapıldığı ikinci gerçek uygulama probleminde, bir kentteki yağmur suyu tahliye sisteminin maliyeti optimize edilmektedir. Problemden beş amaç fonksiyonu ve yedi kısıt vardır. Problemin iki yöntemle çözümü yapıp sonuçları karşılaştırıldığında, bulunan çözüm noktası problem için yeni bir nokta değildir fakat, tesis maliyetlerini belirli bir düzeyde tutarak, sel hasar maliyeti ve ekonomik kayıpta optimum değerlere ulaşılmıştır. Yağmur suyu tahliye sistemini kurarken, su tahliye ağı sistemi, depolama tesisi ve işlem tesisinin (suyun tasfiyesini sağlayan tesis) için yapılan sermaye yatırımındaki artış, sel durumunda beklenen hasar maliyetini ve ekonomik kaybı önemli ölçüde düşürmektedir. Toplam maliyet hesaplanarak sonuçlar karşılaştırıldığında, bulunan minimum değer Pareto-optimal küme içinde oldukça düşük bir maliyet seviyesinde olduğu görülmüştür. Tesis maliyetleri yüksek olmasına rağmen, sel durumunda beklenen hasar maliyeti ve ekonomik kaybın minimum düzeyde olması, toplam maliyeti önemli ölçüde düşürmüştür. Çekicilik fonksiyonu ile bulunan minimum nokta, karar verici için tercih edilebilir özelliktedir. Tesis maliyetinin seviyesi sabitken, hem hasar maliyeti hem de ekonomik kayıpta aynı anda minimuma ulaşan, Pareto-optimal küme içinde başka bir noktaya rastlanmamıştır. Tesis maliyeti düşürüldüğünde ise, hasar maliyeti ve ekonomik kayıp çok yüksek değerlere çıkmaktadır, bu da toplam maliyeti yükseltmektedir.

İşlem tesis maliyeti olarak tanımlanan üçüncü amaç fonksiyonunda daha minimum değerlere ulaşmak isteyen karar verici, ağırlık değerini arttırdığında, oldukça minimum bir değer elde etmektedir. Bu çözüm aynı zamanda Pareto-optimal kümenin alt sınırındadır ve birinci amaç fonksiyonu olan su tahliye ağına da minimum değerlere denk gelmektedir. Ancak bu iki tesisin maliyetinin düşürülmesi, sel hasar maliyeti ve sel durumunda beklenen ekonomik kayıpta çok yüksek değerlere neden olmuştur. Aynı şekilde depolama tesis maliyetini de yükseltmiştir. Karar verici, amaç fonksiyonlarını ağırlıklandırırken, tesis için yapacağı sermaye yatırımını düşük tutmayı tercih etmiştir. Bu tercihi, sel hasar maliyetini ve ekonomik kaybı, dolayısıyla toplam maliyeti de çok yüksek seviyelere çıkarmıştır. Eşit ağırlıklı

ve ağırlıklandırılmış çözüm senaryolarında bulunan minimum noktalarda kısıtların tamamı sağlanmıştır.

Karar verici için önemli olan fonksiyonların ağırlıklandırılması, çekicilik fonksiyonunun bu fonksiyonlarda daha minimum değerlere ulaşılmasını sağlamıştır. Ancak, fonksiyonlar arasında çatışma ve ilişki olduğu için, önemli fonksiyonlarındaki bu daha minimum sonuçlar, diğer fonksiyonlarda daha yüksek sonuçlar elde edilmesine neden olmaktadır. Bazı minimum noktalarda problemin kısıtlarının sağlanmadığı görülmüştür. Karar verici ağırlıklandırma yaparken, bu işlemin diğer fonksiyonlar üzerindeki etkilerini de göz önünde bulundurmalıdır.

Yapılan tüm denemeler sonucunda, uyarlanmış-çekicilik fonksiyonu, genetik algoritmali çok amaçlı optimizasyon çözümüne bir alternatif çözüm yöntemi olarak değil, bu çözümle birlikte kullanılacak ve karar vericiye destek sağlayacak bir yöntem olarak önerilmektedir. Her iki yöntem birlikte kullanıldığında, hem daha doğru sonuçlara ulaşılmasını sağlamakta, hem de tek başına kullanıldıklarında karşılaşılan sorunlar ortadan kalkmaktadır. Problemlerle ilgili ayrıntıları bilmeseyse bile, karar vericiye doğru kararlara varmasına yardımcı olacak bilgiyi sağlaması ve yeni alternatif çözüm noktaları sunabilmesi önemlidir.

Bundan sonraki çalışmalarda, uygulamada kullanılan test problemlerinden daha farklı problem setlerinde denemelere devam edilerek, uyarlanmış-çekicilik fonksiyonunun davranışları incelenebilir. Bu çalışmadaki uygulamalarda karşılaşılmayan farklı matematiksel yapılar mevcut olabilir. Bu durumlarda da önerilen yöntemin test edilmesi gerekmektedir.

Trigonometrik fonksiyonlardaki sorunu çözmek için, bireysel çekicilik fonksiyonu dönüşümlerinde bazı değişiklikler yapılabilir. Bu araştırma, ayrı bir çalışma konusu olduğu için, uygulama kapsamına alınmamıştır. Bu çalışmada, bu sorunu, bulunan minimum nokta çevresindeki Pareto-optimal küme elemanlarını inceleyerek çözmekteyiz.

Farklı alanlardaki gerçek hayat problemlerinin çözümlerinde kullanılarak, hesaplanan minimum noktanın, problem açısından anlamı ve uygunluğu yorumlanarak, yöntemin etkinliği sınanabilir. Farklı alanlardaki problemlerde, daha farklı ya da karmaşık matematiksel yapılarla karşılaşılabileceğinden, yöntemin kısıtları ya da sınırları belirlenebilir.

Bu çalışmadaki uygulamalarda, optimum ve tercih edilebilir özellikte çözüm noktalarına ulaşılmıştır. Uygulamalarda, değişik problem yapılarını kullanmak amaçlanmıştır. Yapılan tüm çalışmalar göz önüne alındığında, uyarlanmış-çekicilik fonksiyonunun, çok amaçlı optimizasyon çözümüne yardımcı yöntem olarak önerilmesini sağlayacak sonuçlara ulaşılmasına rağmen, yöntemin güvenli ve etkin olup olmadığına karar verebilmek için daha fazla çalışmada test edilmesi gerekmektedir.

Sonraki alışmalar kapsamında, önerilen çekicilik fonksiyonu içinde bulanıklaştırma yapılabilir. Böylece karar vericiye, sonuçta bir tek nokta yerine küçük bir çözüm kümesinin önerilmesi daha kullanışlı olabilir. Uyarlanmış-ekicilik fonksiyonu ile ilgili bir güven aralığı oluşturulabilir ya da duyarlılık analizi uygulanabilir. Bunlar ekicilik fonksiyonunun daha etkin kullanımına ve yeni çözüm yöntemlerinin geliştirilmesine olanak sağlayabilir.

KAYNAKÇA

- Amiri, A. (2006). Designing a distribution network in a supply chain system: Formulation and efficient solution procedure. *European Journal of Operational Research*, 171(2), 567-576.
- Bekele, E. G., & Nicklow, J. W. (2007). Multi-objective automatic calibration of SWAT using NSGA-II. *Journal of Hydrology*, 341(3), 165-176.
- Binh, T. T. (1999, January). A multiobjective evolutionary algorithm: The study cases. In *Proceedings of the 1999 Genetic and Evolutionary Computation Conference. Workshop Program* (ss. 127-128).
- Blackwell, D. (1956). An analog of the minimax theorem for vector payoffs. *Pacific Journal of Mathematics*, 6(1), 1-8.
- Bot, R.L. Grad, S.M. Wanka, G. (2009). *Duality in Vector Optimization*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Boyd, S. Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge University Press.
- Chankong, V., & Haimes, Y. Y. Multiobjective decision making: theory and methodology. 1983. *New York: Noth-Holland*.
- Chen, C. L., Wang, B. W., & Lee, W. C. (2003). Multiobjective optimization for a multienterprise supply chain network. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 42(9), 1879-1889.
- Chen, H., Wong, K. P., Nguyen, D. H. M., & Chung, C. Y. (2006). Analyzing oligopolistic electricity market using coevolutionary computation. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 21(1), 143-152.

Cheng, F. Y., & Li, X. S. (1999). Generalized center method for multiobjective engineering optimization. *Engineering Optimization*, 31(5), 641-661.

Coello Coello, C. A. (1996). An empirical study of evolutionary techniques for multiobjective optimization in engineering design.

Coello, C. A. C. (1999). A comprehensive survey of evolutionary-based multiobjective optimization techniques. *Knowledge and Information systems*, 1(3), 269-308.

Coello, C. C., Lamont, G. B., & Van Veldhuizen, D. A. (2007). *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. Springer Science & Business Media.

Cruz-Monteagudo, M., Borges, F., & Cordeiro, M. N. D. S. (2008,a). Desirability-based multiobjective optimization for global QSAR studies: Application to the design of novel NSAIDs with improved analgesic, antiinflammatory, and ulcerogenic profiles. *Journal of computational chemistry*, 29(14), 2445-2459.

Cruz-Monteagudo, M., Borges, F., Cordeiro, M. N. D., Cagide Fajin, J. L., Morell, C., Ruiz, R. M., Canizares-Carmenate, Y. ve Dominguez, E. R. (2008,b). Desirability-based methods of multiobjective optimization and ranking for global QSAR studies. Filtering safe and potent drug candidates from combinatorial libraries. *Journal of combinatorial chemistry*, 10(6), 897-913.

Dantzig, G. B. (1956). Constructive proof of the min-max theorem. *Pacific Journal of Mathematics*, 6(1), 25-33.

Das, P. Mukherjee, S. Ganguly, S. Bhattacharyay, B.K. Datta, S. (2009). Genetic algorithm based optimization for multi-physical properties of HSLA steel through hybridization of neural network and desirability function. *Computational Materials Science* 45, 104–110.

De Weck, O. (2004). Multiobjective optimization: History and promise. *Invited Keynote Paper, GL2-2, The Third China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems, Kanazawa, Japan.*

Deb, K. (1999). Multi-objective genetic algorithms: Problem difficulties and construction of test problems. *Evolutionary computation*, 7(3), 205-230.

Deb, K. (2001). *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms* (Vol. 16). John Wiley & Sons.

Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A., ve Meyarivan, T. (2000). A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II. *Lecture notes in computer science*, 1917, 849-858.

Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., & Meyarivan, T. A. M. T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 6(2), 182-197.

Derringer, G. ve Suich, R. (1980). Simultaneous optimization of several responses variables. *Journal of Quality Technology*, 12(4), 214– 219.

Durillo, J. J., & Nebro, A. J. (2011). jMetal: A Java framework for multi-objective optimization. *Advances in Engineering Software*, 42(10), 760-771.

Dyer, J. S., Fishburn, P. C., Steuer, R. E., Wallenius, J., & Zionts, S. (1992). Multiple criteria decision making, multiattribute utility theory: the next ten years. *Management science*, 38(5), 645-654.

Ehrgott, M. (2006). *Multicriteria optimization*. Springer Science and Business Media.

Ehrgott, M., & Tenfelde-Podehl, D. (2003). Computation of ideal and nadir values and implications for their use in MCDM methods. *European Journal of Operational Research*, 151(1), 119-139.

Fang, S., Yunfang, C., & Weimin, W. (2011). Multi-objective optimization immune algorithm using clustering. In *Computing and Intelligent Systems* (ss. 242-251). Springer Berlin Heidelberg.

Farhang-Mehr, A. Azarm, S. (2002) *Diversity assessment of pareto optimal solution sets: An entropy approach*, in Proc. Congr. Evol. Comput., vol. 1, D. B. Fogel, M. A. El-Sharkawi, X. Yao, G. Greenwood, H. Iba, P. Marrow, and M. Shackleton, Eds. (ss. 723–728).

Farina, M. (2002, May). A neural network based generalized response surface multiobjective evolutionary algorithm. In *Evolutionary Computation, 2002. CEC'02. Proceedings of the 2002 Congress on* (Cilt: 1, ss. 956-961). IEEE.

Fonseca, C. M., & Fleming, P. J. (1995). An overview of evolutionary algorithms in multiobjective optimization. *Evolutionary computation*, 3(1), 1-16.

Fonseca, C. M., & Fleming, P. J. (1995a). Multiobjective genetic algorithms made easy: selection sharing and mating restriction. 1st International Conference on Genetic Algorithms in Engineering Systems: Innovations and Applications (GALESIA), (ss. 45 – 52)

Fonseca, C. M., & Fleming, P. J. (1998). Multiobjective optimization and multiple constraint handling with evolutionary algorithms. I. A unified formulation. *Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, IEEE Transactions on*, 28(1), 26-37.

Gandibleux, X. (Ed.). (2002). *Multiple criteria optimization: state of the art annotated bibliographic surveys* (Cilt: 52). Springer Science & Business Media.

Gen, M. ve Syarif, A. (2005). Hybrid genetic algorithm for multi-time period production/distribution planning. *Computers & Industrial Engineering*, 48(4), 799-809.

Geoffrion, A. M. (1968). Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22(3), 618-630.

Geoffrion, A. M., Dyer, J. S., ve Feinberg, A. (1972). An interactive approach for multi-criterion optimization, with an application to the operation of an academic department. *Management science*, 19(4-kısım:1), 357-368.

Gero, J. (Ed.). (1985). *Design optimization*. Academic Press Inc.,USA.

Ghosh, D., & Chakraborty, D. (2014). A new Pareto set generating method for multi-criteria optimization problems. *Operations Research Letters*, 42(8), 514-521.

Global Optimization Toolbox, Matlab User's Guide, 2014

Goldberg, D. E. (1989). *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*. Addison-Wesley.

Gupta, A., & Maranas, C. D. (2003). Managing demand uncertainty in supply chain planning. *Computers & Chemical Engineering*, 27(8), 1219-1227.

Gupta, A., Maranas, C. D., & McDonald, C. M. (2000). Mid-term supply chain planning under demand uncertainty: customer demand satisfaction and inventory management. *Computers & Chemical Engineering*, 24(12), 2613-2621.

Huband, S., Hingston, P., Barone, L., ve While, L. (2006). A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 10(5), 477-506.

Ishibuchi, ve T. Murata, T. (1998); A multi-objective genetic local search algorithm and its application to flowshop scheduling, *IEEE Trans. Syst., Man, and Cyberne.—Part C: Applications and Reviews*. 28(3): 392–403.

Jayaraman, V., ve Pirkul, H. (2001). Planning and coordination of production and distribution facilities for multiple commodities. *European journal of operational research*, 133(2), 394-408.

Jayaraman, V., ve Ross, A. (2003). A simulated annealing methodology to distribution network design and management. *European Journal of Operational Research*, 144(3), 629-645.

Jeong, I. J., & Kim, K. J. (2005). D-STEM: a modified step method with desirability function concept. *Computers & operations research*, 32(12), 3175-3190.

Jin, Y., Olhofer, M., & Sendhoff, B. (2001). Dynamic weighted aggregation for evolutionary multi-objective optimization: Why does it work and how?. Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference, ss. 1042-1049.

JMetal 4.5 User Manual, 2014

Kaliszewski, I., Michalowski, W. (1997). Efficient solutions and bounds on tradeoffs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 94(2), 381-394.

King, R. T. A., & Rughooputh, H. C. (2003, December). Elitist multiobjective evolutionary algorithm for environmental/economic dispatch. In *Evolutionary Computation, 2003. CEC'03. The 2003 Congress on* (Vol. 2, pp. 1108-1114). IEEE.

Konak, A., Coit, D. W., & Smith, A. E. (2006). Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial. *Reliability Engineering & System Safety*, 91(9), 992-1007.

Kros, J. F., & Mastrangelo, C. M. (2001). Comparing methods for the multi-response design problem. *Quality and Reliability Engineering International*, 17(5), 323-331.

Kurpati, A., Azarm, S., & Wu, J. (2002). Constraint handling improvements for multiobjective genetic algorithms. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 23(3), 204-213.

Kursawe, F. (1991). A variant of evolution strategies for vector optimization. In *Parallel Problem Solving from Nature* Springer Berlin Heidelberg. (ss.193-197)

Lampinen J., 2000; *Multiobjective Nonlinear Pareto-Optimization, A Pre-Investigation Report*, Lappeeranta Universit of Tecnology, Laboratory of Infomation Processing

Leonard, R. J. (1995). From parlor games to social science: von Neumann, Morgenstern, and the creation of game theory 1928-1944. *Journal of Economic Literature*. 33(2): 730-761.

Lis, J., & Eiben, A. E. (1997, April). A multi-sexual genetic algorithm for multiobjective optimization. In *Evolutionary Computation, 1997., IEEE International Conference on* (ss. 59-64). IEEE.

López-Jaimes, A., & Coello, C. A. C. (2014). Including preferences into a multiobjective evolutionary algorithm to deal with many-objective engineering optimization problems. *Information Sciences*, Cilt:277, 1-20.

Marler, R. T., & Arora, J. S. (2004). Survey of multi-objective optimization methods for engineering. *Structural and multidisciplinary optimization*, 26(6), 369-395.

Mehnen, J., Trautmann, H., & Tiwari, A. (2007, September). Introducing user preference using desirability functions in multi-objective evolutionary optimisation

of noisy processes. In *Evolutionary Computation, 2007. CEC 2007. IEEE Congress on IEEE*. (ss. 2687-2694).

Meyers, R. H., & Montgomery, D. C. (2002). Response surface methodology. *Process and Product Optimisation Using Design Experiments, second ed*, Willey, New York, NY.

Miettinen, K. (1999). *Nonlinear multiobjective optimization* (Vol. 12). Springer Science & Business Media.

Miettinen, K., Eskelinen, P., Ruiz, F., ve Luque, M. (2010). NAUTILUS method: An interactive technique in multiobjective optimization based on the nadir point. *European Journal of Operational Research*, 206(2), 426-434.

Miettinen, K., ve Mäkelä, M. M. (2002). On scalarizing functions in multiobjective optimization. *OR spectrum*, 24(2), 193-213.

Myers, R. H., Montgomery, D. C., & Anderson-Cook, C. M. (2009). *Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments* (Cilt: 705). John Wiley & Sons.

Myers, R.H., Montgomery, D.C. (2002); *Response Surface Methodology; Process and Product Optimization Using Designed Experiments*, John Wiley and Sons, Inc., New York.

Nebro, A. J., Luna, F., & Alba, E. (2005, January). New ideas in applying scatter search to multiobjective optimization. In *Evolutionary Multi-Criterion Optimization* (ss. 443-458). Springer Berlin Heidelberg.

Ngatchou, P. Zarei A. El-Sharkawi M. A. (2005). Pareto Multi Objective Optimization. *Intelligent Systems Application to Power Systems, 2005. Proceedings of the 13th International Conference on*. (ss.84-91)

Pang, J. S. (1978). On cone orderings and the linear complementarity problem. *Linear Algebra and its Applications*, Cilt: 22, 267-281.

Park, K. S., & Kim, K. J. (2005). Optimizing multi-response surface problems: how to use multi-objective optimization techniques. *IIE Transactions*, 37(6), 523-532.

Pasandideh, S. H. R., & Niaki, S. T. A. (2006). Multi-response simulation optimization using genetic algorithm within desirability function framework. *Applied Mathematics and Computation*, 175(1), 366-382.

Proos, K. A., Steven, G. P., Querin, O. M., & Xie, Y. M. (2001). Multicriterion evolutionary structural optimization using the weighting and the global criterion methods. *AIAA journal*, 39(10), 2006-2012.

Ray, T., TAI, K., & SEOW, K. C. (2001). Multiobjective design optimization by an evolutionary algorithm. *Engineering Optimization*, 33(4), 399-424.

Sabri, E. H., & Beamon, B. M. (2000). A multi-objective approach to simultaneous strategic and operational planning in supply chain design. *Omega*, 28(5), 581-598.

Sáiz-Abajo, M. J., González-Sáiz, J. M., & Pizarro, C. (2005). Multi-objective optimisation strategy based on desirability functions used for chromatographic separation and quantification of l-proline and organic acids in vinegar. *Analytica Chimica Acta*, 528(1), 63-76.

Sawaragi, Y., Nakayam, H., & Tanino, T. (1985). *Theory of multiobjective optimization*. Elsevier.

Srinivas, N., & Deb, K. (1994). Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. *Evolutionary computation*, 2(3), 221-248.

Stadler, W. (1979). A Survey of Multicriteria Optimization or the Vector Maximum Problem, Part I:1776-1960. *Journal of Optimization Theory and Applications*.29(1):1-52.

Stadler, W. (Ed.). (1988). *Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences*. Springer Science & Business Media.Cilt:37:1-24

Stigler, G. J. (1950). The development of utility theory. I. *The Journal of Political Economy*. 58(4): 307-327.

Sun, M., Stam, A., & Steuer, R. E. (2000). Interactive multiple objective programming using Tchebycheff programs and artificial neural networks.*Computers & Operations Research*, 27(7), 601-620.

Syam, S. S. (2002). A model and methodologies for the location problem with logistical components. *Computers & Operations Research*, 29(9), 1173-1193.

Syarif, A., Yun, Y., & Gen, M. (2002). Study on multi-stage logistic chain network: a spanning tree-based genetic algorithm approach. *Computers & Industrial Engineering*, 43(1), 299-314.

Thomas, D. J., & Griffin, P. M. (1996). Coordinated supply chain management.*European journal of operational research*, 94(1), 1-15.

Trautmann, H., & Mehnen, J. (2009). Preference-based Pareto optimization in certain and noisy environments. *Engineering Optimization*, 41(1), 23-38.

Trautmann, H., Ligges, U., Mehnen, J., & Preuss, M. (2008). A convergence criterion for multiobjective evolutionary algorithms based on systematic statistical testing. In *Parallel Problem Solving from Nature–PPSN X* .(ss. 825-836). Springer Berlin Heidelberg.

Truong, T. H., ve Azadivar, F. (2005). Optimal design methodologies for configuration of supply chains. *International Journal of Production Research*, 43(11), 2217-2236.

Tsiakis, P., Shah, N., & Pantelides, C. C. (2001). Design of multi-echelon supply chain networks under demand uncertainty. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 40(16), 3585-3604.

Van Veldhuizen, D. A. (1999). *Multiobjective evolutionary algorithms: classifications, analyses, and new innovations* (No. AFIT/DS/ENG/99-01). Air Force Inst of Tech Wright-Pattersonafb oh School of Engineering.

Vlennet, R., Fonteix, C., & Marc, I. (1996). Multicriteria optimization using a genetic algorithm for determining a Pareto set. *International Journal of Systems Science*, 27(2), 255-260.

Wagner, T., & Trautmann, H. (2010). Integration of preferences in hypervolume-based multiobjective evolutionary algorithms by means of desirability functions. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 14(5), 688-701.

Wong, E. Y., Lau, H. Y., & Mak, K. L. (2010). Immunity-based evolutionary algorithm for optimal global container repositioning in liner shipping. *Or Spectrum*, 32(3), 739-763.

Yalcinoz, T., ve K ksoy, O. (2007). A multiobjective optimization method to environmental economic dispatch. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 29(1), 42-50.

Yan, H., Yu, Z., & Cheng, T. E. (2003). A strategic model for supply chain design with logical constraints: formulation and solution. *Computers & Operations Research*, 30(14), 2135-2155.

Zitzler, E. (1999). *Evolutionary algorithms for multiobjective optimization: Methods and applications*, Ithaca: Shaker (Cilt: 63).

Zitzler, E. Deb, K. and Thiele, L. (2000). Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical result. *Evolutionary Computations*. 8(2): 173–195.

Zitzler, E., & Thiele, L. (1998, January). Multiobjective optimization using evolutionary algorithms—a comparative case study. In *Parallel problem solving from nature—PPSN V* (ss. 292-301). Springer Berlin Heidelberg

Zitzler, E., Deb, K., & Thiele, L. (2000). Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evolutionary computation*, 8(2), 173-195.

EK

EK 1: GENEL NOTASYON (Ehrgott, 2005 and Miettinen, 2004'den değiştirilerek).

Notasyon	Açıklama
S	Optimizasyon probleminin uygun kümesi
Z	Amaç uzayındaki uygun küme
C	Koni
$x = (x_1, \dots, x_n)$	Değişken vektörü, değişkenler
$z = (z_1, \dots, z_p)$	Amaç fonksiyon değerlerinin vektörü
$f = (f_1, \dots, f_p)$	Amaç fonksiyonlarının vektörü
$g = (g_1, \dots, g_m)$	Kısıt fonksiyonlarının vektörü
$b \in \mathcal{R}^m$	Sağ taraf sabitleri
z^*	İdeal nokta
z^{nad}	Nadir nokta
z^{**}	Ütopya noktası
$\lambda \in \mathcal{R}^p$	Ağırlık vektörü
$y^1 < y^2$	$y_k^1 < y_k^2, k = 1, \dots, p$
$y^1 \leq y^2$	$y_k^1 \leq y_k^2, k = 1, \dots, p$
$y^1 \leq y^2$	$y_k^1 \leq y_k^2$ ama $y^1 \neq y^2$
$\mathcal{R}_{>}^p$	$\{y \in \mathcal{R}^p : y > 0\}$
$\mathcal{R}_{\geq}^p$	$\{y \in \mathcal{R}^p : y \geq 0\}$
$\mathcal{R}_{\geq}^p$	$\{y \in \mathcal{R}^p : y \geq 0\}$