



**ÇOK ÇÖZÜMLÜ GEOMETRİ PROBLEMLERİNİ
ÇÖZME SÜRECİNDE YARDIMCI ELEMANLARIN ROLÜ**

Yüksek Lisans Tezi

Ergün DUMAN

Eskişehir 2023

**ÇOK ÇÖZÜMLÜ GEOMETRİ PROBLEMLERİNİ ÇÖZME SÜRECİNDE
YARDIMCI ELEMANLARIN ROLÜ**

Ergün DUMAN



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Programı

Danışman: Prof. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE

**Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Mayıs 2023**

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI



ÖZET

ÇOK ÇÖZÜMLÜ GEOMETRİ PROBLEMLERİNİ ÇÖZME SÜRECİNDE YARDIMCI ELEMANLARIN ROLÜ

Ergün DUMAN

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Mayıs 2023

Danışman: Prof. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE

Bu araştırmanın amacı ilköğretim matematik öğretmenliği programındaki birinci sınıf öğrencilerinin çok çözümlü geometri problemlerini çözme süreçlerinde kullandıkları stratejilerin incelenmesi ve bu stratejilerde yardımcı elemanların rolünün belirlenmesidir. Nitel araştırma yaklaşımlarından temel nitel araştırma deseni benimsenerek tasarlanan bu araştırma; 2021-2022 eğitim öğretim yılı güz ve bahar dönemlerinde 8 öğrenci ile yürütülmüştür. Araştırmanın verilerini; tüm öğrenciler ile 4 kez ortalama 45'er dakika süren oturumlar halinde yürütülen klinik görüşmeler oluşturmaktadır. Araştırmanın verileri çok çözümlü dört geometri probleminin sunulduğu çalışma yaprakları, öğrencinin düşünce yollarını açıkladıkları video kayıtları ve bu problemlerin altında sorulan sorulardan elde edilmiştir. Araştırma sorularına cevap vermesi amacıyla elde edilen verilerin analizinde tematik analiz kullanılmıştır. İncelenen dört problemde öğrencilerin dik açı ile karşılaştıklarında ilk olarak Pisagor ve Öklid teoremlerini uygulama eğiliminde oldukları görülmüştür. Ayrıca problemlerde ek çizim yapma konusunda öğrencilerin rahat olmadığı ve hata yapmamak için ek çizim yapmadıkları görülmüştür. Öğrenciler ek çizimler yaparken bazı durumlarda geometrik inşaları göz ardı ederek rastgele çizimler yapmışlardır. Bu yüzden öğrencilerin doğru olarak çizdiklerini düşündükleri bazı çizimlerin geometrik olarak imkânsız olduğu görülmüştür. Ancak çözüm sayısını arttırabilmek için problemin farklı noktalarına odaklanarak ek çizim yapmaya çalışmaları çok çözümlü problemlerin ve yardımcı elemanların, öğrencilerin matematiksel düşünme ve problem çözme becerilerini geliştirmesinde önemli katkılar sunduğu saptanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Çok çözümlü problemler, yardımcı eleman, açıortay, kenarortay, yükseklik

ABSTRACT

THE ROLE OF AUXILIARY ELEMENTS IN THE PROCESS OF SOLVING MULTIPLE SOLUTION GEOMETRY PROBLEMS

Ergün DUMAN

Department of Mathematics Education

Anadolu University, Institute of Educational Sciences, May 2023

Supervisor: Prof. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE

The purpose of this research is to examine the strategies used by first-grade students in the elementary mathematics education program during the process of solving multiple solution geometry problems and determine the role of auxiliary elements in these strategies. This research, designed based on the fundamental qualitative research design, was conducted with 8 students during the fall and spring semesters of the 2021-2022 academic year. The data of the study consisted of clinical interviews conducted with all students in four sessions lasting an average of 45 minutes each. The data of the study were obtained from worksheets presenting four multiple solution geometry problems, video recordings where students explained their thought processes, and questions asked beneath these problems. Thematic analysis was used to analyze the data obtained for the purpose of answering the research questions. In the four problems examined, it was observed that students tended to apply the Pythagorean and Euclidean theorems when encountering right angles. Additionally, it was observed that students were not comfortable with making additional drawings in the problems and refrained from doing so to avoid making mistakes. When making additional drawings, students sometimes made random drawings, disregarding geometric constructions. As a result, it was observed that some drawings that students believed to be correct were geometrically impossible. However, it was found that attempting to make additional drawings focusing on different points of the problem in order to increase the number of solutions provided significant contributions to students' development of mathematical thinking and problem-solving skills in multiple solution problems, highlighting the importance of auxiliary elements.

Keywords: Multiple solution problems, auxiliary element, bisector, median, altitude

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Ergün DUMAN

ÖNSÖZ

Akademik hayata atılmamanın ilk adımlarımdan biri olan bu araştırmada çok çözümlü geometri problemlerini çözme süreçlerinde lisans birinci sınıf öğrencilerinin kullandıkları stratejiler ve bu stratejilerde yardımcı elemanların rolü incelenmiştir. Araştırma serüveninin başından sonuna kadar bana destek olan ve tecrübeleriyle bana yol gösteren olan birçok kişi olmuştur.

Öncelikle daha lisans öğrencisi iken beni araştırmaya teşvik eden ve akademik hayata atılmamdaki en büyük destekçim olan sevgili danışmanım Prof. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE'ye tez sürecimin her aşamasında bana yol gösterdiği, en umutsuz olduğum anlarda beni tekrar ayağa kaldırarak cesaretlendirdiği ve her koşulda bilgi ve tecrübelerini aktararak rehber olduğu için sonsuz saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez savunma jürimde olmayı kabul ederek tezimin gelişmesinde ve daha iyi bir araştırmacı olabilmem adına değerli dönütler vererek katkıda bulunan; değerli hocam Prof. Dr. Çiğdem KILIÇ'a ve değerli hocam Prof. Dr. Dilek TANIŞLI'ya lisans ve yüksek lisans hayatımda almış olduğum derslerle matematik eğitimine ilgi duymamı ve akademik hayatıma sağladığı destekleri için ve için sonsuz saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Araştırmanın gerçekleştirilebilmesi için büyük katkıları olan ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerine bana farklı günlerde vakitlerini ayırdıkları ve sabırla araştırmanın amaçlarına ulaşmak adına verdikleri katkılar için teşekkürlerimi sunarım.

Her koşulda beni destekleyen, maddi ve manevi anlamda her imkanı sunan ve emeklerini bir ömür ödeyemeyeceğim sevgili annem Zeynep DUMAN'a ve sevgili babam Ersin DUMAN'a; akademik hayata atılma konusunda beni destekleyen ve bana sunduğu güven ve sevgiyle her zaman yanımda hissettiğim sevgili eşim Gözde ŞAHİN DUMAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca bana sağladığı maddi destek için yurt içi bursiyeri olduğum TÜBİTAK BİDEP'e teşekkürlerimi sunarım.

Ergün DUMAN

Eskişehir, 2023

İTHAF



*Sevgili Anne - Babama
ve
Sevgili Eşim Gözde'ye*

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	v
ÖNSÖZ	vi
İTHAF.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
TABLolar DİZİNİ.....	xiii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiv
GÖRSELLER DİZİNİ	xvi
KISALTMALAR DİZİNİ	xix
1. GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu	1
1.2. Problem ve Problem Çözme	4
1.2.1. Problem çözme süreci	5
1.2.1.1. Problemin anlaşılması.....	5
1.2.1.2. Plan hazırlama	6
1.2.1.3. Planı uygulama	7
1.2.1.4. Geriye dönüp bakma.....	8
1.3. Çok Çözümlü Problemler	9
1.4. Temel ve Yardımcı Elemanlar.....	14
1.5. Araştırmanın Amacı	16
1.6. Araştırmanın Önemi.....	17
1.7. Sınırlılıklar	18

1.8. Tanımlar.....	19
1.9. İlgili Araştırmalar.....	19
2. YÖNTEM.....	22
2.1. Araştırma Deseni	22
2.2. Araştırmanın Katılımcıları.....	22
2.3. Veri Toplama Araçları.....	23
2.3.1. Klinik görüşme	23
2.4. Araştırma Ortamı.....	30
2.5. Pilot Çalışma	31
2.6. Veri Toplama Süreci.....	32
2.7. Araştırma Verilerinin Analizi	33
2.7.1. Araştırmacının veriye aşina olması	34
2.7.2. İlk kodların oluşturulması	35
2.7.3. Temaların aranması.....	40
2.7.4. Temaların gözden geçirilmesi	41
2.7.5. Temaların tanımlanması ve adlandırılması	41
2.7.6. Raporun hazırlanması	43
2.8. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği.....	43
3. BULGULAR	45
3.1. Öğrencilerin Kenarortay İçeren Problemde Kullandıkları Çözüm Stratejilerine Yönelik Bulgular	45
3.1.1. 1. Çözüm grubu stratejileri.....	52
3.1.1.1. Benzer üçgenlerden yararlanma	52
3.1.1.2. Kenarortay çizme	53
3.1.2. 2. Çözüm grubu stratejileri.....	55
3.1.2.1. FE doğru parçasını çizme.....	55
3.1.2.2. DF doğru parçasını çizme	58

3.1.3. 3. Çözüm grubu stratejileri.....	59
3.1.3.1. <i>Dikdörtgen oluşturma</i>	59
3.1.4. 4. Çözüm grubu stratejileri.....	62
3.1.4.1. <i>Paralelkenar oluşturma</i>	62
3.1.5. Öğrencilerin kenarortay içeren problemdeki toplam çözüm sayılarına yönelik bulgular.....	63
3.1.6. Doğru çözüme ulaşmayan stratejiler.....	64
3.2. Öğrencilerin Açıortay İçeren Problemde Kullandıkları Çözüm Stratejilerine Yönelik Bulgular	65
3.2.1. 1. Çözüm grubu stratejileri.....	70
3.2.1.1. <i>Açıortay ayağından üçgenin kenarlarına dik inme</i>	70
3.2.2. 2. Çözüm grubu stratejileri.....	71
3.2.2.1. <i>Açıortaya paralel çizme</i>	71
3.2.3. 3. Çözüm grubu stratejileri.....	74
3.2.3.1. <i>Açıortay ayağından üçgenin kenarlarına paralel çizme</i>	74
3.2.3.2. <i>Açıortay uzantısından üçgenin kenarlarına paralel çizme</i>	76
3.2.4. 4. Çözüm grubu stratejileri.....	78
3.2.4.1. <i>Açıortaya ve/veya açıortay uzantısına dik inme</i>	78
3.2.5. 5. Çözüm Grubu Stratejileri	79
3.2.5.1. <i>Yardımcı elemansız çözüm (trigonometri)</i>	79
3.2.6. Öğrencilerin açıortay içeren problemdeki toplam çözüm sayılarına yönelik bulgular.....	80
3.2.7. Doğru çözüme ulaşamayan stratejiler	81
3.3. Öğrencilerin Yükseklik İçeren Problemde Kullandıkları Çözüm Stratejilerine Yönelik Bulgular	82
3.3.1. 1. Çözüm grubu stratejileri.....	88
3.3.1.1. <i>ABC üçgenini iki üçgene ayırma</i>	88
3.3.2. 2. Çözüm grubu stratejileri.....	90

3.3.2.1. Yardımcı elemansız çözüm (benzerlik)	90
3.3.3. 3. Çözüm grubu stratejileri.....	92
3.3.3.1. Yüksekliğe dik inme.....	92
3.3.3.2. Üçgenin kenarına paralel çizme.....	94
3.3.4. 4. Çözüm grubu stratejileri.....	95
3.3.4.1. FE doğru parçasının uzantısına dik inme	96
3.3.4.2. GE doğru parçasının uzantısına dik inme	97
3.3.5. 5. Çözüm grubu stratejileri.....	99
3.3.5.1. AGE üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma	99
3.3.5.2. ADB ve EFB üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma.....	100
3.3.6. Öğrencilerin yükseklik içeren problemdeki toplam çözüm sayılarına yönelik bulgular.....	101
3.3.7. Doğru çözüme ulaşmayan stratejiler.....	102
3.4. Öğrencilerin Çember Probleminde Kullandıkları Çözüm Stratejilerine Yönelik Bulgular	103
3.4.1. 1. Çözüm grubu stratejileri.....	108
3.4.1.1. EO doğru parçasını (yarıçapını) çizme.....	108
3.4.2. 2. Çözüm grubu stratejileri.....	110
3.4.2.1. AE ve EB doğru parçalarını çizme	110
3.4.3. 3. Çözüm grubu stratejileri.....	113
3.4.3.1. ABCD yamuğunun orta tabanını çizme.....	113
3.4.4. 4. Çözüm grubu stratejileri.....	115
3.4.4.1. Çember ve yamukta açı özelliklerini kullanma.....	115
3.4.4.2. Dikdörtgen oluşturma.....	116
3.4.5. 5. Çözüm grubu stratejileri.....	118
3.4.5.1. DO ve CB doğru parçalarını uzatma	118
3.4.6. Öğrencilerin çember problemindeki toplam çözüm sayılarına yönelik bulgular	120

3.4.7. Doğru çözüme ulaşmayan stratejiler	121
3.5. Çok Çözümlü Problemleri Çözme Stratejilerde Yardımcı Elemanların Rolüne Yönelik Bulgular	122
3.5.1. Kenarortay içeren problemi çözme sürecinde kullanılan yardımcı elemanların rolü	122
3.5.2. Açıortay içeren problemi çözme sürecinde kullanılan yardımcı elemanların rolü	123
3.5.3. Yükseklik içeren problemi çözme sürecinde kullanılan yardımcı elemanların rolü	124
3.5.4. Çember problemini çözme sürecinde kullanılan yardımcı elemanların rolü	125
4. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER	127
4.1. Sonuç	127
4.2. Tartışma	130
4.3. Öneriler	134
4.3.1. Araştırma sonuçlarına yönelik öneriler	134
4.3.2. İleride yapılacak araştırmalara yönelik öneriler	134
KAYNAKÇA	136
EKLER	
ÖZGEÇMİŞ	

TABLÖLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 2.1. Katılımcıların demografik bilgileri	23
Tablo 2.2. Klinik görüşme oturumlarının süreleri.....	33
Tablo 2.3. Yükseklik içeren probleme ait kod listesi	39
Tablo 2.4. Yükseklik içeren probleme ait temaların dayanakları.....	40
Tablo 2.5. Yükseklik içeren problemin temalaştırılması	41
Tablo 3.1. Öğrencilerin kenarortay içeren problemdeki başlangıç stratejileri.....	46
Tablo 3.2. Öğrencilerin kenarortay içeren problemdeki toplam çözüm sayıları.....	64
Tablo 3.3. Kenarortay içeren problemde doğru çözüme ulaşmayan stratejiler.....	65
Tablo 3.4. Öğrencilerin açığortay içeren problemdeki başlangıç stratejileri.....	66
Tablo 3.5. Öğrencilerin açığortay içeren problemdeki toplam çözüm sayıları.....	81
Tablo 3.6. Açığortay içeren problemde doğru çözüme ulaşmayan stratejiler	82
Tablo 3.7. Öğrencilerin yükseklik içeren problemdeki başlangıç stratejileri	83
Tablo 3.8. Öğrencilerin yükseklik içeren problemdeki toplam çözüm sayıları	102
Tablo 3.9. Yükseklik içeren problemde doğru çözüme ulaşmayan stratejiler	103
Tablo 3.10. Öğrencilerin çember problemindeki başlangıç stratejileri	104
Tablo 3.11. Öğrencilerin çember problemindeki toplam çözüm sayıları	120
Tablo 3.12. Çember probleminde doğru çözüme ulaşmayan stratejiler	121
Tablo 4.5. Problemlere göre öğrencilerin çözüm sayıları.....	130

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1. Marmelat problemine ait çözümler (Yılmaz, 2014, s. 47).....	10
Şekil 1.2. Çözüm uzayların dinamik yapısı (Leikin, 2010, s. 78)	12
Şekil 1.3. Yardımcı elemanların kullanımının 3 nedeni. (Palatnik ve Sigler, 2019, s. 204).	15
Şekil 2.2. Pilot çalışmada problemleri inceleme sırası	32
Şekil 2.3. Araştırmada problemleri inceleme sırası.....	32
Şekil 3.1. Kenarortay içeren problem	45
Şekil 3.2. Kenarortay içeren probleme ait çözüm grupları.....	51
Şekil 3.3. Benzer üçgenlerden yararlanma stratejisinin çözümleri.....	52
Şekil 3.4. Kenarortay çizme stratejisinin çözümü	53
Şekil 3.5. FE doğru parçasını çizme stratejisinin çözümleri	56
Şekil 3.6. DF doğru parçasını çizme stratejisinin çözümleri.....	58
Şekil 3.7. Dikdörtgen oluşturma stratejisinin çözümleri.....	59
Şekil 3.8. Paralelkenar oluşturma stratejisinin çözümleri	62
Şekil 3.9. Açıortay içeren problem	66
Şekil 3.10. Açıortay içeren probleme ait çözüm grupları	69
Şekil 3.11. Açıortay ayağından üçgenin kenarlarına dik çizme stratejisinin çözümü	70
Şekil 3.12. Açıortaya paralel çizme stratejisinin çözümleri	72
Şekil 3.13. Açıortay ayağından üçgenin kenarlarına paralel çizme stratejisinin çözümleri	74
Şekil 3.14. Açıortay uzantısından üçgenin kenarlarına paralel çizme stratejisinin çözümleri	76
Şekil 3.15. Açıortaya ve/veya açıortay uzantısına dik çizme stratejisinin çözümleri.....	79
Şekil 3.16. Yardımcı elemansız çözüm (trigonometri)stratejisinin çözümleri.....	80

Şekil 3.17. Yükseklik içeren problem	82
Şekil 3.18. Yükseklik içeren probleme ait çözüm grupları	87
Şekil 3.19. ABC üçgenini iki üçgene ayırma stratejisinin çözümü	88
Şekil 3.20. Yardımcı elemansız çözüm (benzerlik) stratejisinin çözümü	90
Şekil 3.21. Yüksekliğe dik inme stratejisinin çözümü	92
Şekil 3.22. Üçgenin kenarına paralel çizme stratejisinin çözümü	94
Şekil 3.23. FE doğru parçasının uzantısına dik inme stratejisinin çözümü.....	96
Şekil 3.24. GE doğru parçasının uzantısına dik inme stratejisinin çözümü	97
Şekil 3.25. AGE üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma stratejisinin çözümü	99
Şekil 3.26. ADB ve EFB üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma stratejisinin çözümü	100
Şekil 3.27. Çember problemi.....	104
Şekil 3.28. Çember problemine ait çözüm grupları	107
Şekil 3.29. EO doğru parçasını (yarıçapını) çizme stratejisinin çözümleri.....	108
Şekil 3.30. AE ve EB doğru parçalarını çizme stratejisinin çözümü	110
Şekil 3.31. ABCD yamuğunun orta tabanını çizme stratejisinin çözümü.....	113
Şekil 3.32. Çember ve yamukta açı özelliklerini kullanma stratejisinin çözümü.....	116
Şekil 3.33. Dikdörtgen oluşturma stratejisinin çözümü	116
Şekil 3.34. DO ve CB doğru parçalarını uzatma stratejisinin çözümü	119

GÖRSELLER DİZİNİ

Sayfa

Görsel 2.1. Çok çözümlü problemler.....	28
Görsel 2.2. Görüşme yapılacak ortam düzeni	31
Görsel 2.3. Klinik görüşmeleri inceleme şablonu	35
Görsel 2.4. Kenarortay içeren problemin uzman çözüm alanı	36
Görsel 2.5. Açıortay içeren problemin uzman çözüm alanı.....	37
Görsel 2.6. Yükseklik içeren problemin uzman çözüm alanı	38
Görsel 2.7. Çember problemi uzman çözüm alanı	39
Görsel 2.8. Yükseklik içeren probleme ait çözüm grupları	42
Görsel 3.1. Ö1'in başlangıç stratejisi.....	47
Görsel 3.2. Ö8'in başlangıç stratejisi.....	47
Görsel 3.3. Ö3'ün başlangıç stratejisi.....	48
Görsel 3.4. Ö7'nin başlangıç stratejisi.....	49
Görsel 3.5. Ö5'nin başlangıç stratejisi kapsamında çözümü	50
Görsel 3.6. Ö7'nin kenarortay özelliğini kullanma (çözüm 1.a) stratejisinin çözümü...53	
Görsel 3.7. Ö4'ün kenarortay çizme stratejisine ait çözümü	54
Görsel 3.8. Ö5'in çözüm için denediği strateji.....	55
Görsel 3.9. Ö5'in FE doğru parçasını çizme stratejisine (çözüm 2.a) ait çözümü.....	56
Görsel 3.10. Ö6'nın FE doğru parçasını çizme stratejisine (çözüm 2.b) ait çözümü.....	57
Görsel 3.11. Ö2'nin FE doğru parçasını çizme stratejisine (çözüm 2.c) ait çözümü.....	58
Görsel 3.12. Öğrencilerin DF doğru parçasını çizme stratejisine ait çözümleri	59
Görsel 3.13. Ö7'nin dikdörtgen oluşturma stratejisine (çözüm 3.a) ait çözümü	60
Görsel 3.14. Ö6'nın dikdörtgen oluşturma stratejisine (çözüm 3.b) ait çözümü	61
Görsel 3.15. Ö8'in çözüm için denediği strateji.....	62

Görsel 3.16. Ö5'in paralelkenar oluşturma stratejisine ait çözümü	63
Görsel 3.17. Öğrencilerin başlangıç stratejileri.....	67
Görsel 3.18. Ö7'nin başlangıç stratejisi.....	67
Görsel 3.19. Ö1'in başlangıç stratejisi.....	68
Görsel 3.20. Ö2'nin açkırtay ayağından üçgenin kenarlarına dik çizme stratejisine ait çözümü	71
Görsel 3.21. Ö7'nin çözüm için denediğı strateji.....	71
Görsel 3.22. Ö4'ün açkırtaya paralel çizme stratejisine (çözüm 2.a) ait çözümü	72
Görsel 3.23. Ö6'nın açkırtaya paralel çizme stratejisine (çözüm 2.b) ait çözümü	73
Görsel 3.24. Ö8'in çözüm için denediğı strateji.....	74
Görsel 3.25. Ö2'nin açkırtay ayağından üçgenin kenarlarına paralel çizme stratejisine ait çözümü (Çözüm 2b).....	75
Görsel 3.26. Öğrencilerin çözüm için denediğı stratejiler	75
Görsel 3.27. Öğrencilerin açkırtay uzantısından üçgenin kenarlarına paralel çizme stratejisine ait çözümleri	77
Görsel 3.28. Öğrencilerin çözüm için denediğı stratejiler	78
Görsel 3.29. Ö5'in çözüm için denediğı strateji.....	79
Görsel 3.30. Ö4'ün başlangıç stratejisi.....	83
Görsel 3.31. Ö1'in başlangıç stratejisi.....	84
Görsel 3.32. Ö5'ün başlangıç stratejisi.....	85
Görsel 3.33. Ö6'nın başlangıç stratejisi.....	85
Görsel 3.34. Ö8'in başlangıç stratejisi	86
Görsel 3.35. Ö5'in ABC üçgenini ikiye bölme stratejisine ait çözümü	89
Görsel 3.36. Ö8'in çözüm için denediğı strateji.....	90
Görsel 3.37. Ö2'nin yardımcı elemansız çözüm (benzerlik) stratejisine ait çözümü.....	91
Görsel 3.38. Ö5'in çözüm için denediğı strateji.....	92

Görsel 3.39.	Ö7'nin yüksekliğe dik inme stratejisine ait çözümü.....	93
Görsel 3.40.	Ö6'nın üçgenin kenarına paralel çizme stratejisine ait çözümü.....	95
Görsel 3.41.	Öğrencilerin çözüm için denediği stratejiler	95
Görsel 3.42.	Ö7'nin FE doğru parçasının uzantısına dik inme stratejisine ait çözümü..	97
Görsel 3.43.	Ö7'nin GE doğru parçasının uzantısına dik inme stratejisine ait çözümü.	98
Görsel 3.44.	Ö8'in çözüm için denediği strateji.....	98
Görsel 3.45.	Ö8'in AGE üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma stratejisine ait çözümü	100
Görsel 3.46.	ADB ve EFB üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma stratejisine ait çözümü	101
Görsel 3.47.	Ö5'in başlangıç stratejisi.....	105
Görsel 3.48.	Ö1'in başlangıç stratejisi.....	106
Görsel 3.49.	Ö2'nin başlangıç stratejisi.....	106
Görsel 3.50.	Ö7'nin EO doğru parçasını (yarıçapını) çizme stratejisine ait çözümü...	109
Görsel 3.51.	Ö4'ün EO doğru parçasını (yarıçapını) çizme stratejisine ait çözümü....	110
Görsel 3.52.	Ö8'in AE ve EB doğru parçalarını çizme stratejisine ait çözümü.....	112
Görsel 3.53.	Ö7'nin çözüm için denediği strateji.....	113
Görsel 3.54.	Ö5'in ABCD yamuğunun orta tabanını çizme stratejisine ait çözümü ...	115
Görsel 3.55.	Ö1'in çözüm için denediği strateji.....	115
Görsel 3.56.	Ö5'in dikdörtgen oluşturma stratejisine ait çözümü.....	117
Görsel 3.57.	Ö8'in çözüm için denediği strateji.....	118
Görsel 3.58.	Ö5'in DO ve CB doğru parçalarını uzatma stratejisine ait çözümü	120

KISALTMALAR DİZİNİ

NCTM : Uluslararası Matematik Öğretmenleri Konseyi
MEB : Milli Eğitim Bakanlığı



1. GİRİŞ

Bu bölümde problem durumu, kuramsal çerçeve, araştırmanın amacına ve önemine yer verilecektir.

1.1. Problem Durumu

Günümüz dünyasında bilim ve teknoloji hızla gelişmekte ve bireylerden beklenen nitelikler de değişmektedir. 21. yüzyılla beraber araştıran, eleştiren, bilgiyi analiz eden, öğrendiklerini günlük yaşama entegre edebilen ve problem çözen bireyler yetiştirmek önemli hale gelmiştir (Topçu ve Çiftçi, 2020, s. 97). Özel olarak ise öğrencilerin bilgileri pasif bir şekilde öğrenmesinin yerine kendi öğrenmelerinden sorumlu oldukları öğrendikleri bilgileri anlamlandırarak problem çözen, üretken, zamanı etkili ve verimli kullanan bireyler olmaları beklenmektedir.

Her dönemde olduğu gibi günümüzde de matematik, toplumların değişimine ve gelişimine yön veren bir bilimdir. Matematik, tarih boyunca insanların günlük ihtiyaçlarını ve problemlerini çözmelerine yardımcı olmuştur. Ayrıca her alanda matematik bilen, matematiksel düşünen ve problem çözen bireylere ihtiyaç duyulmaktadır (Uluslararası Matematik Öğretmenleri Konseyi [NCTM], 2000, s. 4). Bu sebeple matematik eğitimi her geçen gün daha önemli hale gelmektedir. Matematik eğitiminin amacı, kişiye günlük yaşamındaki ihtiyaçları doğrultusunda matematiksel bilgi ve becerilerini kazandırmanın yanı sıra olayları anlamada problem çözme yaklaşımını temel alan bir düşünce sistemi oluşturmaktır (Altun, 2016, s. 15).

Problem çözme matematik dersi öğretim programlarının merkezinde yer alır. Cumhuriyet döneminden başlayarak günümüze kadar olan ilkökul ve ortaokul matematik dersi öğretim programlarının tümünde öğrencilere problem çözme becerisi kazandırmak amaçlanmıştır (Kömleksiz ve Gökmenoğlu, 2020, s. 177; Artut ve Tarım, 2016, s. 303). Ayrıca NCTM (2000, s. 52) okul matematiği için ilkeler ve standartlar başlığı altında beş süreç standartlarından biri olan problem çözmeyi, çocukların matematiksel fikirlerini geliştirmesinin aracı olarak kabul ederek okul öncesinden 12. sınıfa kadar sürdürülmesi gereken en önemli standartlarından biri olduğunu belirtmiştir.

Problem çözmenin bu kadar önemli olmasının en temel sebebi gerçek yaşam ile bağ kurarak bireyleri geleceğe hazırlamasıdır. Hatta problem çözme yeteneği insan neslinin varlığını devam ettirebilmesi için gerekli en temel yetenek olarak kabul edilebilir (Altun,

2016, s. 72). Problem çözme, bireylerin yaratıcı ve eleştirel düşünme yeteneğini geliştirmek, verilen durumu çözümlemek gibi üst düzey bilişsel becerilerin kazanılmasına yardımcı olmaktadır. Problem çözme süreci bireylere sistematik bir biçimde çalışma, araştırma, sorgulama ve deneme yanılma imkânı sunar. Literatürde problem çözme konusunda en çok yararlanılan kaynaklardan biri olan “Nasıl Çözmeli” kitabında Polya (2017, s. 5) problem çözme sürecini sırasıyla problemi anlama, bir plan oluşturma, planı uygulama ve geriye dönüp bakma olmak üzere 4 basamakta incelemiştir. Her basamağın sistematik olarak incelenmesi önerilmektedir. Ayrıca Polya (2017, s. 13-14) geriye dönüp bakma basamağında çözümün yeniden gözden geçirilmesi, çözümü alternatif olarak başka yoldan bulmak için uğraşmanın ve sonucun başka hangi problemlerde uygulanabilir olduğunu sorgulamanın problem çözme becerilerini daha da ileriye taşıyacağını belirtmektedir. Polya’ya ek olarak Leikin (2007, s.2330) matematik eğitiminde problemleri farklı yollarla çözenin matematiksel düşünmeyi geliştirdiğini belirtmektedir. Çok çözümlü problemler bir öğrencinin farklı stratejiler kullanarak aynı sonuca ulaşabildiği problemlerdir (Levav-Waynberg ve Leikin, 2012, s. 311). Problemlerde farklı çözümler yapabilmek bireylerin matematik bilgilerine, deneyimlerine, yaratıcılıklarına ve hatta en önemlisi problem çözme sürecinin iyi yönetilmesine bağlıdır. Farklı problem çözümleri sunan zengin öğrenme alanlarından biri ise geometridir.

Matematiğin önemli alanlarından biri olan geometri, NCTM’e göre (2000, s. 41) öğrencilerin akıl yürütme ve gerekçelendirme becerilerinin gelişimini sağlayan bir alandır. Baykul’a (2021, s. 370) göre geometri, “Matematiğin nokta, doğru, düzlem, düzlemsel şekiller, uzay, uzaysal şekiller ve bunlar arasındaki ilişkilerle geometrik şekillerin uzunluk, açı, alan, hacim gibi ölçülerini konu edinen dalıdır”. Geometri öğrencilerin akıl yürütme, problem çözme, iletişim, ilişkilendirme, yaratıcı ve yenilikçi düşünme gibi temel becerileri geliştirme potansiyeline sahiptir. Ayrıca matematiksel düşüncelerin anlamlandırılmasında geometri kritik bir rol oynar (Köse ve Özen Ünal, 2020, s. 247). Geometrinin aksiyomatik bir yapı üzerine kurulu olması ve yapıları arasındaki güçlü bağlar, geometrinin hem diğer bilimler hem de matematiğin diğer konu alanları için vazgeçilmez bir dünya yaratmaktadır. Gerçek yaşamda kullanımının ve temel becerileri geliştirme potansiyeline sahip olsa da öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin ve ders başarılarının düşük oldukları görülmektedir (Saraçoğlu ve Aşıloğlu, 2022, s.108). Altun’un 2018 (s. 166) yılında lise öğrencilerinin Van Hiele geometrik

düşünme düzeylerinin incelendiği araştırmasında öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin yaşlarına ve öğrenim düzeylerine göre düşük olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ek olarak Berkant ve Çadırılı'nın 2019 yılında ortaokul öğrencilerinin geometrik düşünme düzeylerinin incelendiği çalışmada öğrencilerin büyük çoğunluğunun olması gereken düzeyden daha düşük düzeyde oldukları belirlenmiştir. Geometri öğretiminin, geometriye karşı olumlu tutum geliştirmede, geometrik düşünme düzeylerini artırmada ve öğrencilerin geometrik yapılar arasındaki ilişkileri analiz edebilme yeteneklerini geliştirmede büyük bir etkisi bulunmaktadır. Özellikle öğrenciler somut nesneler, çizimler ve dinamik geometri ortamları ile desteklenmiş etkinliklerde öğretmen desteğiyle varsayımlar oluşturabilir ve keşfederek geometrik fikirlerini geliştirebilirler (NCTM, 2000, s.41). Öğrencilerin geometrik düşüncelerini geliştirmelerinde ve karşılaştıkları problemlere farklı çözüm yolları bulabilmelerinde; geometrik şekillerin temel ve yardımcı elemanlarının bilinmesine ek olarak bu elemanların etkili kullanılabilmesi önemlidir.

Yardımcı eleman, geometrik problemlerin çözümünde ve ispatların yapılmasında önemli etkisi olan unsurdur. Bir probleme eklenecek yardımcı eleman kenarortay, açıortay ya da yükseklik gibi doğru ya da doğru parçası olabilir. Çözümüne ulaşma beklentisiyle eklenen yardımcı eleman öğrencinin şekille etkileşime girmesini sağlar. Yardımcı elemanların probleme eklenmesi öğrencilerin problemin bütününe veya bir bölümüne odaklanmasını sağladığı için (Palatnik ve Sigler, 2019, s. 205-206), problemin birden çok yolla çözülebilmesine de imkân sağlayabilir. Ancak yardımcı elemanların eklenmesi öğrenciler için zor bir süreçtir ve problemin daha da karmaşıklaşacağı gerekçesiyle öğrencilerin şekle yardımcı eleman eklemekten vazgeçtikleri görülmüştür (Herbst ve Brach, 2006, s. 103). Senk (1985, s. 455) öğrencilerin bir problemde veya ispatta şekli nasıl, neden ve ne zaman dönüştürebileceklerinin öğretilmesine ihtiyaç duyulduğunu belirtmiştir. Gridos, Avgerinos, Mamona-Downs ve Vlachou, 2022 (s. 633) yılında yapmış oldukları çalışmada yardımcı doğruların inşasının gerektiği problemlerin kullanımının çözümlerin özgünlüğünü arttırabileceği sonucuna ulaşılmıştır. Bu bağlamda çok çözümlü problemlerde yardımcı elemanlarının rolünün belirlenmesi önemlidir. Bu önem doğrultusunda bu çalışmada yardımcı eleman eklenerek farklı çözüm stratejilerinin kullanılmasına imkân sağlayan çok çözümlü problemler incelenerek, öğrencilerin çok çözümlü problemleri çözme süreçlerinde yardımcı elemanın rolünün ortaya çıkarılmasına odaklanılacaktır.

1.2. Problem ve Problem Çözme

Problem kelimesinin karşılığı Türk Dil Kurumu [TDK] Güncel Türkçe Sözlüğünde “1.Teoremler veya kurallar yardımıyla çözülmesi istenen soru, mesele. 2. Sorun” olarak verilmektedir. Matematik eğitimcileri arasında ise farklı tanımlar bulunmaktadır. Krulik ve Rudnick (1989, s.3) problemi, bir bireyin veya grubun karşılaştığı, çözüm gerektiren ve bireyin çözüm için doğrudan bir yol göremediği bir durum olarak tanımlar. Dewey (1910; s.9) ise problemi insan zihnini karıştıran, ona meydan okuyan ve inancı tamamen belirsizleştiren şey olarak tanımlar.

Matematik eğitiminde soru, alıştırma ve problem kavramları yaygın olarak birbirlerinin yerlerine kullanılır. Krulik ve Rudnick (1989, s.3) bu 3 kavramı birbirlerinden şu şekilde ayırmıştır.

- **Soru:** Sadece hatırlama yoluyla çözülebilen durum.
- **Alıştırma:** Önceden öğrenilmiş bir beceri veya algoritmayı geliştirmek için kullanılan durum.
- **Problem:** Çözülmesi için önceden öğrenilen bilginin analizini ve sentezini gerektiren durum.

Bu tanımlar incelendiğinde problem, bireyler tarafından daha önce karşılaşılmayan, bireylerde merak ve ilgi uyandırarak çözülmesi istenen durumu ifade etmektedir. Ancak bir durumun problem olması bireyden bireye farklılık gösterebilir (Baykul, 2020, s.62). Örneğin günlük yaşamda okula gitmek isteyen bir öğrenci ilk gün sonunda otobüs kullandığında problemini çözmüş olacaktır. Bu öğrenci için okula gitme durumu artık problem değildir. Ancak otobüs seferlerinin durması halinde yeni bir problem durumu ortaya çıkacak ve farklı alternatiflerin bulunabilmesine ihtiyaç duyulacaktır.

Problem çözme ise düşünülenin aksine yalnızca matematiksel bir durumda sadece doğru cevaba ulaşmak değildir. Problem çözme, daha önce karşılaşılmamış olan bir durumda ne yapılacağını bilmektir (Altun, 2016, s. 72; NCTM, 2000, s.52). Problem çözme öğrenciyi sadece matematik alanında değil aynı zamanda fizik, kimya gibi diğer disiplinlerde ve günlük yaşam problemleriyle başa çıkma yeteneğini de geliştirir. NTCM’e (2000, s. 52) göre problem çözme matematik öğretiminin ayrılmaz bir parçasıdır. Problemlerin çözümünde uygulanabilecek belli bir çözüm yolu veya yöntemi

olmamasına karşın problem çözümlerinin belirli bir sistematığı bulunmaktadır (Altun, 2016, s.75; Baykul, 2020, s.74).

1.2.1. Problem çözme süreci

Polya'nın ilk defa 1945 yılında kaleme aldığı "Nasıl çözmeli" kitabı problem çözme süreçlerinin açıklanmasında sıklıkla yararlanılan kaynak olmuştur. Polya (2017, s. 5) problem çözme sürecinin dört aşamasını şu şekilde tanımlar.

1. Problemin anlaşılması (Understanding the problem)
2. Plan hazırlama (Devising a plan)
3. Planı uygulama (Carrying out the plan)
4. Geriye dönüp bakma (Looking back)

Problem çözme sürecinin aşamaları aşağıdaki bölümde ayrıntılı olarak verilmektedir.

1.2.1.1. Problemin anlaşılması

Problem çözme sürecinin ilk ve en önemli aşaması olan problemin anlaşılması aşamasında problemde verilenlerin, istenilenlerin, koşulların ve bilinmeyenlerin ne olduğunun açıklamasını içerir. Bu aşamanın önemli olmasının sebebi öğrencinin ilerleyen aşamalarda plan hazırlayıp uygulayabilmeleridir. Bunun için problemde verilenlerin ve çözülmesi istenilen durumun bilmesi gereklidir. Bu aşamadaki bir eksiklik problemin çözümünü imkânsız hale getirerek öğrencinin probleme olan istekliliğinin ve ilgisinin yok olmasına sebep olabilir. Polya (2017, s. IX) bu aşamada cevap aranması beklenen soruları ve yapılması gerekenleri şu şekilde belirtmiştir.

- Bilinmeyen(ler) nedir?
- Veriler nelerdir?
- Koşul(lar) nedir?
- Koşulu sağlamak mümkün müdür?
- Verilen koşul bilinmeyi belirlemeye yeterli/yetersiz/gereksiz/çelişkili midir?
- Eğer problemin şekille bağlantısı varsa şekil çizmeli ve şekil üzerinde bilinmeyenleri ve verileri göstermelidir. Eğer gerekliyse uygun bir simgelem seçilerek nesneler isimlendirilmelidir.

Altun (2016, s. 75) ise bu aşamada cevap aranması beklenen soruları ve yapılması gerekenleri şu şekilde belirtmiştir.

1. Veriler ve koşullar nelerdir?
2. Bilinmeyen nedir?

Eğer bu iki soruya hatasız cevap veriliyorsa problem anlaşılmıştır. Problemin derinleştirilmesi için aşağıdaki soruya ve yapılması gerekenlere yer verilebilir.

3. Problemde eksik ya da fazla bilgi var mıdır? Varsa bunlar nelerdir?
4. Problemdeki olaylarla ve ilişkilere uygun şekil çizilmesi ve gerekli işaretlemeler yapılması
5. Problemin alt problemlere ayrılması ve her alt problemin ifade edilmesi

1.2.1.2. Plan hazırlama

Problem çözme sürecinin bu aşamasında problemin anlaşılmasından sonra çözüme ulaşabilmek için önemli bir adımdır. Bu adımda öğrencilerden verilenler ile bilinmeyenler arasındaki ilişkilerin araştırılması beklenmektedir. Öğrenciler problemi anlama aşamasının gerekliliklerini yerine getiremediklerinde çözüme ulaşmaları güçleşir. Ayrıca öğrencilerden problemin çözümü için plan geliştirmeleri beklenir. Planın geliştirilmesi için öğrencilerin geçmiş bilgilerinin ve tecrübelerinin yanı sıra problem çözme stratejilerine de hâkim olması beklenir. Polya (2017, s. IX-X) bu aşamada cevap aranması beklenen soruları ve yapılması gerekenleri şu şekilde belirtmiştir.

- Problemi daha önce gördünüz mü? Ya da aynı problemin farklı bir biçimini gördünüz mü?
- Benzer bir problem biliyor musunuz? Yararlı olabilecek bir teorem biliyor musunuz?
- Mevcut problemle ilişkili ve daha önce çözülmüş bir problem var mı? Daha önce çözülmüş problemin sonuçlarını/yöntemini kullanabilir misiniz? Bunların sağlanabilmesi için yardımcı eleman dahil etmeli misiniz?
- Problemi daha farklı bir biçimde ifade edebilir misiniz?
- Problemi çözemiyorsanız, bu probleme benzer/daha genel/daha özel problemi çözebilir misiniz? Problemin bir kısmını çözebilir misiniz?
- Verileri kullanarak işe yarayan başka veriler elde edebilir misiniz?

- Koşulların ve verilerin tamamını kullandınız mı?
- Problemin çözümünde gerekli tüm kavramları göz önünde tutunuz mu?

Altun (2016, s. 75) ise bu aşamada cevap aranması beklenen soruları şu şekilde belirtmiştir.

- Probleme benzer, daha önce başka bir problem çözdünüz mü? Orada ne yaptınız?
- Çözümde yararlı olacak bir bağlantı biliyor musunuz?
- Daha basit bir problemi ifade edip çözebilir misiniz?
- Tasarladığınız çözümde bütün bilgileri kullanıyor musunuz?
- Problemin cevabını tahmin edebiliyor musunuz?
- Problemi parça parça çözebilir misiniz? Her defasında çözüme ne kadar yaklaşıyorsunuz?

Hem Polya hem de Altun'un plan hazırlama veya başka bir deyişle çözümle ilgili stratejinin seçilmesi aşamasında mevcut problemi daha önce karşılaşılan bir problem, yöntem veya model ile ilişkilendirerek çözümün sağlanmasının beklendiğini vurgulamaktadır. Öğrencinin daha önceki deneyim ve tecrübelerini kullanmaları beklendiği için öğretmenlerin bu düşünceleri ortaya çıkarılabilecek ortamları sağlaması gerekir. Ayrıca öğrenciler benzer problemleri düşünürken asıl problemin beklentilerinden uzaklaşılabilir (Polya, 2017, s.9). Böyle bir durumda Polya ve Altun'un cevaplanması beklenen sorularda belirttiği gibi tüm verilerin veya koşulların kullanıp kullanılmadığı sorgulanabilir.

1.2.1.3. Planı uygulama

Problem çözme sürecinin bu aşamasında seçilen problem çözme stratejisinin oluşturulan plana göre uygulanarak çözüme ulaştırılması beklenmektedir. Öğrenciler daha önceki problem çözme deneyimlerini doğrultusunda pek çok çizim, grafik veya hesaplama yapabilir. Eğer öğrenci yapılan işlemleri kontrol ettikten sonra çözüme ulaşamamışsa, uygulanan stratejinin yeniden incelenmesi hatta problemin anlaşılması aşamasına geri dönülmesi gerekebilir (Altun, 2016, s.77; Baykul, 2020, s. 80).

Polya (2017, s. X) bu aşamada cevap aranması beklenen soruları ve yapılması gerekenleri şu şekilde belirtmiştir.

- Çözümüne ulaşmak için planı uygularken her adımı kontrol edin.
- Uygulanan adımın doğruluğunu açıkça görebiliyor musunuz?
- Doğru olduğunu ispat edebilir misiniz?

1.2.1.4. *Geriye dönüp bakma*

Öğrencilerden temelde ulaştıkları sonucun kontrol edilmesini amaçlayan çözümün değerlendirilmesi olarak da bilinen bu aşamada sonucun mantıksal doğruluğunu, işlemlerin doğru yapılıp yapılmadığı ve sonucun tahmine uygun olup olmadığı kontrol edilir (Baykul, 2020, s.75). Ancak bu aşama sadece sonucun kontrolü olarak düşünülmemelidir. Polya'nın (2017, s. 13) da belirttiği gibi öğrenciler çözüme ulaştıktan sonra problemle ilişkilerini sonlandırmak yerine geriye dönüp sonuca nasıl ulaştıklarını inceleyerek bilgilerini pekiştirirler ve bunun sayesinde problem çözme yeteneklerini geliştirirler.

Polya (2017, s. X) bu aşamada cevap aranması beklenen soruları şu şekilde belirtmiştir.

- Sonucu/Savı kontrol edebilir misiniz?
- Sonuca farklı bir biçimde ulaşabilir misiniz?
- Sonucu veya yöntemi başka bir problem için kullanabilir misiniz?

Polya'nın tanımladığı problem çözme sürecinin aşamalarının bilinmesi doğrudan çözümün bulunmasını sağlamasa da öğrencilere karşılaştıkları problemlerin çözümleri için kritik adımlara dikkat etmelerini sağlayarak çözümü kolaylaştırır. Ayrıca Polya'nın problem çözme aşamaları hemen hemen her tür problem türünde uygulanabilir olmasından dolayı günümüzde dahi önemini yitirmemiştir. Öğrencisinin problem çözme yeteneğini geliştirmek isteyen öğretmen okul öncesi dönemden başlayarak öğrencileri keşfetmeye, risk almaya, birbirlerini sorgulamaya ve görüşlerini paylaşmaya teşvik etmeli ve pratik yapmaları için fırsatlar sunmalıdır (Polya, 2017, s.8 ; NCTM, 2000, s.53). Schroeder ve Lester'in (1989, s. 33) de belirttiği gibi matematik öğrenmenin amacı rutin olmayan problemlerin rutin problemlere dönüştürülmesidir. Matematik öğretiminde kullanılan problemlerin bazı özelliklere sahip olması gereklidir (Van de Walle, 2004, s. 33; Yıldızlar, 2020, s. 7).

- Öğrencinin kendi yaşantı alanından alınmalıdır.

- Öğrencinin merakını uyandıran ve istekle yapacağı nitelikte olmalıdır.
- Öğrencilerin ön bilgileriyle ve gelişim durumları göz önüne alınarak zorlayıcı ve ilginç olmalıdır.
- Problemin çözümü için gerekçelendirme ve açıklama talep edilmelidir.
- Öğrencilerin çeşitli çözüm stratejilerini uygulamalarına imkân sağlamalıdır.

Bu araştırmada öğrencilerin problem çözme süreçlerinin değerlendirilmesi için çeşitli çözüm stratejileri kullanarak birden çok çözüme ulaşılabilen problemler kullanılmıştır.

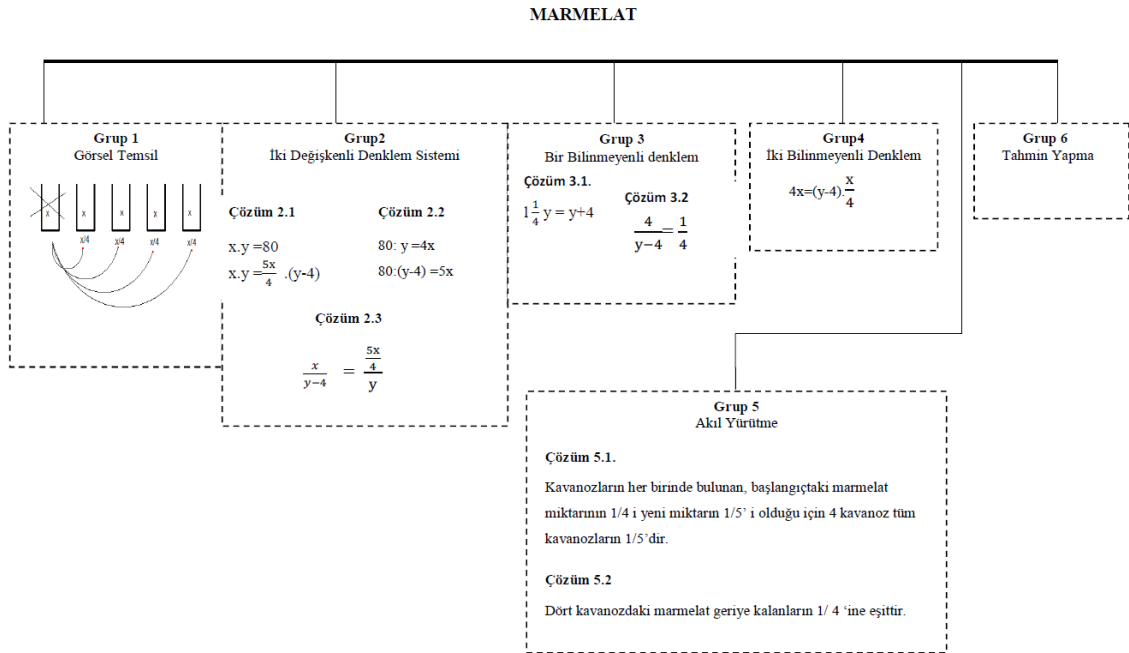
1.3. Çok Çözümlü Problemler

Çok çözümü problemler, bir problemi birden fazla yolla çözmeyi veya bir matematiksel durumu birden fazla yolla kanıtlamayı gerektiren görevler olarak tanımlanır (Leikin, 2014, s. 68; Leikin ve Levav-Waynberg, 2008, s.234). Başka bir deyişle çok çözümü problemler, farklı yöntem veya bilgileri kullanarak aynı sonuca ulaşılabilen problemlerdir. Çözümler arası farklar: a) matematiksel bir kavramın farklı temsillerini kullanma; b) bir konudaki matematiksel kavramların farklı özelliklerini kullanma; c) matematiğin farklı dallarına ait farklı matematiksel araçlar ve teoremleri kullanma; d) sadece matematik olmayan farklı konularda farklı araçlar ve teoremler kullanmak olmak üzere 4 yolla ortaya çıkabilir (Leikin, 2009, s. 31).

NCTM'in (2014, s. 10, 13) sekiz matematik öğretim uygulamasından biri olan akıl yürütme ve problem çözmeyi teşvik eden görevleri uygulama başlığı altında, etkili matematik öğretimi için öğrencilerin çeşitli çözüm stratejilerinin kullanılabileceği problemleri çözmeye ve tartışmaya yönlendirilmelerini önermiştir. Bu uygulama sayesinde öğrencilerin farklı temsillerin ve araçların kullanımıyla bir problemin birden fazla yolla çözmelerine olanak sağlanabilir. Problemler genellikle birden fazla yolla çözülebileceği için kullanılabilecek tek bir strateji yoktur. Çok çözümü problemlerin gerektirdiği araştırma ve sorgulama ihtiyacı matematiksel düşünmeyi geliştirme potansiyeline sahiptir. Çok çözümü problemlere örnek olarak Yılmaz (2014, s.39) tarafından gerçekleştirilen araştırmada kullanılan marmelat problemi şu şekilde verilmiştir.

Şeyma her yıl kayısı marmeladı hazırlayıp marketlere kavanozlarla satmaktadır. Bu yıl da hazırladığı 80 litre marmeladı önce elindeki tüm kavanozlara eşit bir şekilde paylaştırmıştır. Daha sonra dört kavanozu başka bir iş için kullanmaya karar vermiş ve bu dört kavanozdaki marmeladı diğer kavanozlara eşit bir şekilde paylaştırmıştır. Dolu kavanozların her birindeki marmelat miktarı başlangıçtaki miktarlarının $1/4$ 'i kadar arttığına göre başlangıçta kaç tane kavanoz olduğunu birden fazla yolla bulunuz.

Şekil 1.1'de verilen marmelat problemine ait çözümler çözüm stratejilerine göre farklı gruplar halinde gösterilmektedir. Çözümler arasındaki farklılıklar Leikin'in (2009, s. 31) belirttiği gibi matematiksel bir kavramın farklı temsillerini kullanma ve matematiksel kavramların farklı özelliklerini kullanma durumlarından hareketle ortaya çıkmıştır.



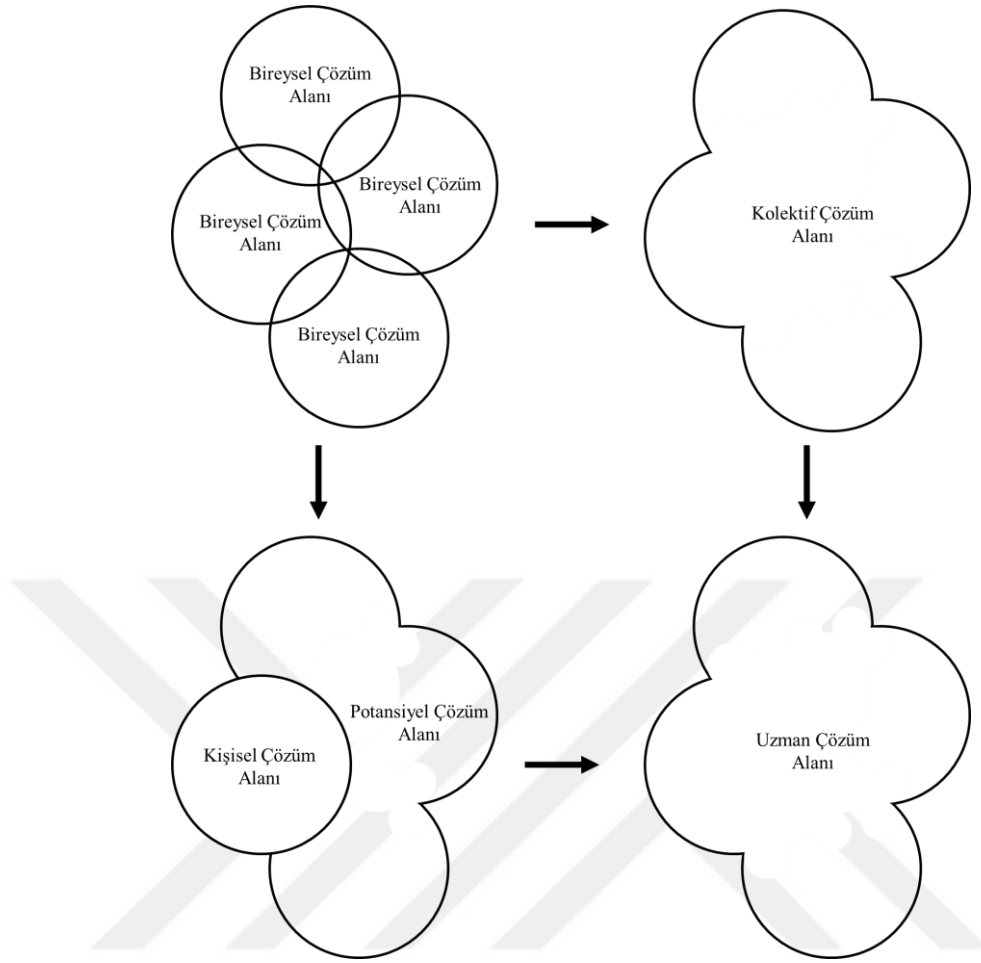
Şekil 1.1. Marmelat problemine ait çözümler (Yılmaz, 2014, s. 47)

Çok çözümlü problemler hakkında literatüre önemli katkıları olan Leikin (2007, s.2335-2336; 2010, s.77-79) bireylerin matematiksel düşüncelerini ve yaratıcılıklarını değerlendirmek için bireysel çözüm alanlarını uzman çözüm alanları ile karşılaştırmış ve çözüm alanları arasındaki ilişkiyi Şekil 1.2'deki gibi göstermiştir.

1. Bireysel Çözüm Alanı (*Individual solution spaces*): Bir bireyin bir probleme sağladığı çözümlerdir. Bireyin çözüm üretebilme yeteneğine bağlı olarak kendi içinde kişisel çözüm alanı (*personal solution spaces*) ve potansiyel çözüm alanı

(*potential solution spaces*) olmak üzere iki başlık altında incelenir. Kişisel çözüm alanı, bireylerin mevcut koşullarda başkalarının yardımı olmadan üretebildiği çözümlerden oluşur. Potansiyel çözüm alanı, çözücünün başkalarının yardımıyla ürettiği çözümleri içerir.

2. Uzman Çözüm Alanı (*Expert solution spaces*): Uzman bir matematikçi tarafından, belirli bir süre içerisinde, bir probleme dair üretilebilecek en eksiksiz çözüm kümesi olarak tanımlanabilir. Uzman çözüm alanları okul matematiği ile ilgili olarak geleneksel çözüm alanı (*conventional solution space*) ve geleneksel olmayan çözüm alanı (*Unconventional solution*) olmak üzere iki başlık altında incelenir. Geleneksel çözüm alanı, genellikle ders kitaplarında bulunan ve öğretim programının önerdiği çözümlerin yanı sıra öğrenciler tarafından yapılması beklenen çözümleri içerir. Geleneksel olmayan çözüm alanı ise genellikle ders kitaplarında bulunmayan ve öğretim programının önermediği alışılmadık çözümleri içerir.
3. Kolektif Çözüm Alanı (*Collective solution spaces*): Bir grup tarafından grup tartışmalarında veya grup üyelerinin bireysel yazılı çalışmalarında üretilen çözümlerdir. Kolektif çözüm alanları, bireyler arası iletişim yoluyla bireysel çözüm alanlarının geliştirilmesine olanak sağlar.



Şekil 1.2. Çözüm uzayların dinamik yapısı (Leikin, 2010, s. 78)

Bireylerin deneyimlerinden ve çözülecek problemin gereksinimlerinden etkilenen bireysel ve kolektif çözüm elemanları aynı zamanda uzman çözüm alanlarının alt kümesidir (Leikin ve Levav-Waynberg, 2008, s. 236). Leikin'e (2007, s. 2337) göre öğretmenin bir problemi farklı şekillerde çözerken çözümlerinden en az biri, herhangi bir öğrencinin kişisel çözüm alanına ait olması gereklidir. Bunun yanı sıra diğer yapılacak çözümler bazı öğrencilerin kişisel çözüm alanına ait olabilirken, diğer öğrencilerinde potansiyel çözüm alanına dahil edilebilir. Bunun sayesinde öğrenciler kişisel çözüm alanlarını genişletecek ve matematik seviyelerini ilerleteceklerdir.

Çok çözümlü problemler öğrencilerin matematiksel bilgilerini ve problem çözme becerilerini geliştirebileceği gibi öğretmenlerin de mevcut bilgilerini başka fikirlerle ilişkilendirmelerine imkân sağlayabilir. Çok çözümlü problemlerin öğretmen veya öğretmen adayları üzerindeki etkisini araştıran çalışmalar, öğretmenlerin öğretme ve

öğrenme süreçlerinde çok çözümlü problemleri kullanmalarının kendi bireysel çözüm alanlarını (aynı zamanda uzman çözüm alanları), bilgilerini ve pedagojik bilgilerinin geliştirilmesinde güçlü bir araç olduğunu göstermiştir (Leikin, 2009, s.35; Leikin, 2010; s.79; Leikin ve Levav-Waynberg, 2008, s. 247; Stupel ve Ben-Chaim, 2017, s. 103). Kısaca öğretmenler çok çözümlü problemleri sınıf içi etkinliklerine entegre ettiklerinde öğretme yoluyla öğrenmektedir. Çünkü öğretmenler çok çözümlü problemleri uygularken öğrencilerine karşı daha duyarlı davranıp, çözümlerine daha çok özen göstererek öğrencileriyle birlikte öğrenirler (Leikin, 2011, s.1004).

Çok çözümlü problemlerin öğretmen veya öğretmen adayları üzerindeki etkisini araştıran çalışmalarda görüşler incelendiğinde öğretmenlerin çoğunluğunun bir problemi birden çok yolla çözenin önemli olduğunu belirttikleri görülmektedir (Leikin, 2009, s.35, Leikin ve Levav-Waynberg, 2008, s. 247; Stupel ve Ben-Chaim, 2017, s. 103). Öğretmenler; matematiksel düşünmeyi geliştirmesi, farklı konularla bağlantı kurma olanağı sağlaması, öğrencilerin bilgilerini geliştirip güçlendirebilmesi ve matematiğin güzelliklerini görerek bir problemi farklı şekillerde çözmeyi eğlenceli hale getirmesi gibi sebeplerle çok çözümlü problemleri uygulamak ile ilgili olumlu görüş bildirmişlerdir. Bu olumlu görüşlerin aksine az sayıda öğretmen bir problemin çeşitli yollarla çözülmesinin kafa karışıklığı yarattığını, her konuda ayrı ayrı çalışılması gerektiği ve öğrencilerin olası çözümleri hemen göremeyeceğini belirtmişlerdir (Stupel ve Ben-Chaim, 2017, s.98).

Literatürdeki çok çözümlü problemleri içeren çalışmaların sıklıkla geometri problemlerinden yararlandıkları görülmektedir (Gridos, Avgerinos, Mamona-Downs ve Vlachou, 2021, s.8; Leikin, 2009, s. 32; Leikin, 2010, s.72; Leikin, 2011; s.994; Leikin ve Levav-Waynberg, 2008, s.235; Yılmaz, 2014, s.39; Küçükkahveci, 2020, s.123-129). Geometrik problemlerde öğretim programında yer alan kavramlar, özellikler ve teoremler kullanarak çok sayıda çözüme ulaşılabilir. Geometri görsel muhakemenin yanı sıra ispatlar için de uygun bir çalışma alanıdır. Çok çözümlü problemlerde geometrinin kullanılmasının diğer önemli nedeni ise öğretmenler tarafından daha istekli olarak tercih edilmesidir (Levav-Waynberg ve Leikin, 2012, s. 316). Bunun temel sebeplerinden biri geometrik problemlerin, mevcut şekli oluşturan elemanlara ait farklı özelliklerin veya teoremlerinin kullanılabilmesi ve öğrencilerin inisiyatif alarak verilen probleme yeni elemanlar eklemelerine imkan sağlamasıdır.

1.4. Temel ve Yardımcı Elemanlar

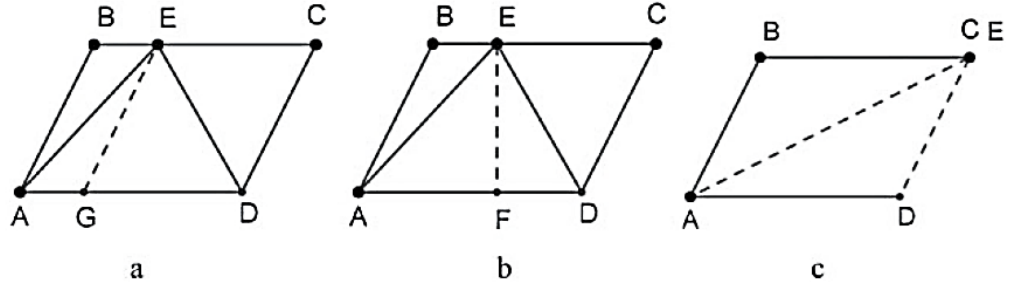
Geometrinin gelişimi farklı bilim insanlarından ve dönemlerden oluşmaktadır. Okul geometrisi denildiğinde hiç şüphesiz aklımıza Öklid (M.Ö 330- M.Ö. 275) gelmektedir. Öklid'in aksiyomatik bir yapı benimseyerek yazmış olduğu “Elemanlar” adlı 13 ciltlik kitabı günümüzde “Öklid Geometrisi” olarak adlandırılan sistemi oluşturmaktadır. Öklid geometrisi tanımlar, aksiyomlar ve postulatlar üzerine kurulmuştur. Öklid kitabına temel geometrik kavramlar olan nokta, doğru ve düzlemi tanımlayarak başlamıştır.

Temel eleman kabaca, geometrik bir şeklin (veya cismin) oluşturulabilmesi için gerekli olan elemanlar olarak tanımlanabilir. Örneğin üçgenin temel elemanları kenar ve açı olarak kabul edilebilir. İlköğretim ve ortaöğretim matematik dersi öğretim programı incelendiğinde kazanımlarda “temel eleman” vurgusu yalnızca beşinci, sekizinci, onuncu ve on birinci sınıf düzeylerinde karşımıza çıkmaktadır. Ancak geometrik şekillerin veya cisimlerin temel elemanlarının tanıtımı neredeyse her sınıf düzeyinde bulunmaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018).

Polya (2017, s. 47) ise yardımcı elemanı “çözümü daha ileriye götürmesi umuduyla sunduğumuz yeni eleman” olarak tanımlanmıştır. Polya'nın tanımında yola çıkarsak yardımcı elemanlara paralel doğru, dik doğru, yarıçap, doğru parçası, açıortay ve kenarortay örnek olarak verilebilir.

Yardımcı eleman ile temel eleman arasında ilişkiye bakıldığında; yardımcı eleman, geometrik şeklin veya cismin temel elemanların üzerine çözülmek istenen duruma yönelik ek çizim yaparak elde edilen elemanlar olarak kabul edilebilir. Polya (2017, s.43) geometrik probleme yardımcı eleman eklemeyi, bir cebir problemi çözerken yardımcı bir bilinmeyen ekleme durumuna benzetmiştir. Literatürde yardımcı elemanları konu alan çalışmalar incelendiğinde, Polya'nın kitabındaki yardımcı elemanlar bölümünü teorik çerçeve olarak kabul ettikleri görülmektedir (Palatnik ve Sigler, 2019, s. 203; Palatnik ve Dreyfus, 2019, s.2). Bir probleme yardımcı eleman eklenmesi rastgele gerçekleşen bir süreç değildir. Polya'ya (2017, s. 44) göre problem çözme sürecinde yardımcı eleman gereksiz yere dahil edilmemelidir. Yardımcı elemanları sürece dahil edilebilmesi için geçerli nedenlerin olması gerekmektedir.

Polya'ya göre yardımcı elemanların 3 farklı kullanım nedeni vardır. Şekil 1.3'de gösterilen “AED üçgeninin alanının ABCD paralelkenarın alanının yarısı olduğunu gösteriniz” problemi üzerinden göre yardımcı elemanların kullanım nedenleri açıklanmıştır.



Şekil 1.3. Yardımcı elemanların kullanımının 3 nedeni. (Palatnik ve Sigler, 2019, s. 204).

1. *Bilinen sonuçları kullanmaya çalışmak*, yardımcı eleman daha önce çözülmüş olan problemi anımsatır ve mevcut problemi değiştirerek bilinen bir sonucu hatırlatır. Şekil 1.3.a’ da AB kenarına paralel olacak şekilde çizilen EG yardımcı elemanı, ABCD paralelkenarını köşegenleri EA ve ED olan iki paralelkenara dönüştürür. Bu durum öğrenciye daha önce bilinen “bir paralelkenarın köşegeni onu eşit alanlı iki üçgene böler.” sonucunu hatırlatır.

2. *Tanımlara geri dönmek*, yardımcı eleman sözden ibaret olan matematiksel bir kavramın tanımını somutlaştırır. Şekil 1.3.b’de E noktasından AD kenarına ait EF yüksekliğinin çizilmesi üçgenin alanları için daha önceden bilinen formülleri hatırlatır. EF yardımcı elemanı ABCD paralelkenarının ve EAD üçgeninin ortak yüksekliği olduğu için ispat tamamlanır.

3. *Problemi daha kapsamlı, daha düşündürücü ve daha tanıdık hale getirmek*, mevcut probleme yardımcı eleman eklemenin “parlak bir fikir” olduğunu hissettirmeyi içerir. Şekil 1.3.c’de E noktasının BC kenarı üzerindeki hareketini düşünerek, E noktasını C noktası ile çakıştırılabilir. Bu durum da ABCD paralelkenarının alanının yarısına sahip yardımcı bir AED üçgeni oluşturulur.

Polya’nın yardımcı elemanların kullanım nedenleri incelendiğinde birinci ve ikinci nedende daha çok somut bir durumu ortaya çıkarmak amaçlanırken, üçüncü nedende de sezgisel durumların etkili olduğu söylenebilir.

Çözülmesi istenen problemde verilenleri ve istenenleri belirledikten sonra, probleme yeni elemanlar katmak gerekebilir (Palatnik ve Sigler, 2019, s. 205) ve yardımcı elemanlar eklenmesi kontrolün tamamının öğrencide olduğu bir durumdur. Probleme eklenen yardımcı eleman ile öğrencinin odağı parçadan bütüne veya bütünden parçaya olarak değişebilir. Böylece yardımcı eleman eklenmesi, öğrenciyi değişen durumu yeniden incelemeye yönelebilir (Palatnik ve Sigler, 2019, s. 205). Öğrencilerin ispat veya problem çözme süreçlerinde probleme yardımcı eleman eklemesi kolay bir süreç değildir. Yardımcı elemanın eklenmesi için öğrencilerin problemi anlamalarına ek olarak önceki bilgilerini ve bilinen problemleri kullanmaları gerekir. Öğrenme ve öğretme süreçlerinde öğretmenler probleme bir anda ustalık gerektiren yardımcı eleman ekleyip şaşırtıcı bir şekilde problemi çözerse, öğrenciler kendilerini kandırılmış hissederler (Polya, 2017, s. 47). Bu yüzden öğrenme ve öğretme süreçlerinde dikkat edilmesi gereken bazı hususlar vardır. Öncelikle öğrencilerin inisiyatif alarak problemi aktif olarak değiştirebilmesi için bilgi düzeylerinin yeterli olması ve problem çözme süreçlerine hâkim olması gerekir (Palatnik ve Sigler, 2019, s. 2013). Ayrıca öğretmenlerin, öğrencileri yardımcı elemanların kullanılmasına yönelik proaktif ve yansıtıcı düşünceyi teşvik etmesi ve farklı muhakeme arasında bağlantıların geliştirilmesini sağlayan işbirlikçi öğrenme stratejilerinin kullanılması önerilmektedir (Palatnik ve Dreyfus, 2019, s.13).

1.5. Araştırmanın Amacı

Yardımcı elemanlar geometrik problemlerin çözümünde ve ispatların yapılmasında kritik bir önem sahiptir. Ayrıca problem çözme matematikte anlamlı öğrenmeyi ve akıl yürütme becerisini geliştirdiği için ilköğretimde öğrencilere kazandırılması gereken becerilerden biridir. Çok çözümlü problemler ise öğrencilere özgür bir çalışma ortamı sağlayarak birden fazla çözüm stratejisi kullanarak çözüme ulaşmalarına imkân sağlar. Geometri problemlerinde yardımcı elemanların kullanımı farklı çözüm stratejileri üretmeyi sağlamaktadır. Üçgenin yardımcı elemanları olan açıortay, kenarortay ve yüksekliğin ilgili probleme eklenmesi öğrencilerin farklı noktalara odaklanmalarını sağlayabilir. Bunun sayesinde farklı teorem ve özelliklerin kullanılmasına imkân sağlar.

Buradan çıkarımla bu araştırmanın amacı ilköğretim matematik öğretmenliği programındaki birinci sınıf öğrencilerinin çok çözümlü problemleri çözme süreçlerinde

kullandıkları stratejilerin incelenmesi ve bu stratejilerde yardımcı elemanların rolünün belirlenmesidir.

Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki sorulara yanıt aranacaktır.

- İlköğretim matematik öğretmenliği programındaki birinci sınıf öğrencilerinin:
 - Kenarortay içeren problemde kullandıkları çözüm stratejileri nelerdir?
 - Açıortay içeren problemde kullandıkları çözüm stratejileri nelerdir?
 - Yükseklik içeren problemde kullandıkları çözüm stratejileri nelerdir?
 - Çember probleminde kullandıkları çözüm stratejileri nelerdir?
- Çok çözümlü problemleri çözme stratejilerde yardımcı elemanların rolü nasıldır?

1.6. Araştırmanın Önemi

Günümüz şartlarında bireylerin karşılaştıkları veya karşılaştacakları problemleri çözebilmek için her yaştan bireyin problem çözme yeteneğini geliştirmesi gereklidir. NCTM'e (2000, s.52) göre problem çözme, matematik eğitiminin ayrılmaz bir parçasıdır. Matematik eğitiminde öğrencilerden günlük hayatında gereksinim duyduğu matematiksel bilgi ve becerilerin kazandırılmasının yanı sıra problem çözen bireyler yetiştirmek amaçlanır (Altun, 2016, s.72). Çünkü matematik ve onun bir alanı olan geometri hayatın tam olarak kendisidir. Öğretmenler öğrencilerine üst düzey düşünme fırsatları tanımak için akıl yürütmeyi ve problem çözmeyi teşvik eden uygulamalar planlamalıdır (NCTM, 2014, s.17). Matematik eğitiminde kullanılan problemlerin öğrenciler tarafından daha önce karşılaşmamış, öğrencilerde merak ve ilgi uyandıracak nitelikte olması beklenmektedir (Krulik ve Rudnick, 1989, s.3, Altun, 2016, s.72, Baykul, 2020, s.62).

Matematik eğitiminde problemlerin birden çok çözüme sahip olması, öğrencilerin tek bir problemde çok sayıda matematiksel kavram, teorem veya özelliğin ve problem çözme stratejisini kullanarak problem çözme yeteneğini geliştirir (NCTM, 2014, s.14, Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2021, s.31). Geometri problemleri yapısı gereği birden çok yolla çözülmeye olanak sağlar. Ancak geometri problemleri öğrenciler tarafından zor olarak ifade edilen problem türlerinden biridir. Bunun sebebi bazı problemlerde öğrencilerin mevcut olan problemin verilerini göz önüne alarak şekle yeni elemanlar eklemesi gerekmesidir (Polya, 2017, s.44, Palatnik ve Dreyfus, 2019, s.1).

Yardımcı elemanlar öğrencilerin şekil üzerindeki odaklarını değiştirebilir ancak yeni eleman eklenme süreci her zaman kolay değildir. Bu sürecin rutin hale gelebilmesi için öğrenciler yardımcı elemanları oluşturma temellerini, oluşumun sonuçlarını ve şekle etkilerinin yanı sıra hangi nedenle yardımcı eleman eklemeleri gerektiğini bilmelidir.

Ulusal ve uluslararası literatür incelendiğinde yardımcı elemanların farklı öğretim yöntemleri ile öğretilmesinin etkisinin araştırıldığı, yardımcı elemanların kullanım nedenlerinin araştırıldığı (Palatnik ve Sigler, 2019; Palatnik ve Dreyfus, 2019; Gridos ve diğerleri, 2021) ve çok çözümlü problemlerin yaratıcılığa ve öğretim süreçlerine etkilerinin araştırıldığı çalışmalar bulunmaktadır (Leikin ve Levav-Waynberg, 2007; Leikin, 2007; Leikin, 2009; Leikin, 2014; Yılmaz ve Köse, 2015; Stupel ve Ben-Chaim, 2017). Yardımcı elemanların öğretilmesinin değerlendirilmesinde sıklıkla başarı testlerinden yararlanılmış başka bir beceri veya yetkinliğe etkisi üzerinde ulusal literatürde bir çalışmayla karşılaşılmamıştır. Bu bağlamda ilköğretim matematik öğretmenliği programındaki birinci sınıf öğrencilerinin lisans düzeyinde geometri dersi almadan ilköğretim, ortaokul ve lise öğrenimlerindeki deneyimlerine dayanarak çok çözümlü geometri problemlerindeki stratejileri ve bu stratejileri uygularken yardımcı elemanları nasıl kullandıklarını ortaya çıkarmayı amaçlayan bu araştırmanın literatüre çok çözümlü problemlerde yardımcı elemanların rolünü ortaya koyan yeni bir bakış açısı kazandırma konusunda katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.7. Sınırlılıklar

Araştırma, 2021-2022 eğitim öğretim yılında İstanbul'da bir vakıf üniversitesinde öğrenim görmekte olan ilköğretim matematik öğretmenliği programındaki sekiz birinci sınıf öğrencisi ile sınırlıdır.

Araştırma dört aylık sürede gerçekleştirilen klinik görüşme verileri ile sınırlıdır.

Araştırma kenarortay, açıortay, yükseklik ve çember kavramlarını içeren dört çok çözümlü problem ile sınırlıdır.

Araştırma verilen problemlerin belirli bir süre içinde çözümü ile sınırlıdır.

1.8. Tanımlar

Çok Çözümlü Problem: Öğrencilerin bir matematik problemini birden çok yolla çözmeleri için açıkça istenen problemlerdir (Leikin, 2010, s.70).

Yardımcı Eleman: Çözümü ileriye götürmesi umuduyla probleme eklenen elemanlardır (Polya, 2017, s.43).

1.9. İlgili Araştırmalar

Bu bölümde literatürde yardımcı elemanlar ve çok çözümlü problemleri içeren araştırmalar yer almaktadır.

Palatnik ve Sigler, 2019 yılında yapmış oldukları araştırmada geometri öğretiminde yardımcı elemanları çeşitli problemlere ve ispatlara nasıl eklenebileceğini örneklerle göstererek, yardımcı elemanları karakterize etmeyi amaçlamışlardır. Polya'yı teorik çerçeve olarak kullanan araştırmada yardımcı elemanların bir şekle eklendiğinde öğrencinin dikkatinin şeklin başka ayrıntılarına kayacağı ve yeni durumu yeniden incelemeye yönlendireceğini belirtilmektedir. Yardımcı doğrunun verilen şekilde ya ilgisiz elemanlarını birleştireceği ya da karmaşık olan şekli böleceğini belirtmişlerdir. Araştırmanın amacına yönelik Polya'nın yardımcı elemanları kullanım nedenlerinden yararlanarak yardımcı elemanları karakterize etmişlerdir. Bu bağlamda bilinen bir sonucun kullanımına izin veren yardımcı doğruları; ilgisiz elemanları birleştiren yardımcı elemanlar ve şekli bölen yardımcı doğrular olarak iki başlık altında incelemişlerdir. Bir tanımı somutlaştıran yardımcı doğruları ise benzer şekilde ilgisiz elemanları birleştiren yardımcı elemanlar ve şekli bölen yardımcı doğrular olarak iki başlık altında incelemişlerdir.

Palatnik ve Dreyfus, 2019 yılında yapmış oldukları çalışmada öğrencilerin geometrik ispatlarda yardımcı elemanların kullanım nedenlerini ve ispat sürecindeki rolünü ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Bu amaç doğrultusunda çalışma grubunu İsrail'de bir lisede onuncu sınıf düzeyinde öğrenimini sürdüren 10 öğrenci oluşturmaktadır. Öğrencilerden çiftler halinde yardımcı elemanların eklenmesinin gerektiği problemleri çözmeleri beklenmiştir. Araştırmanın verilerini öğrencilerle yapılan toplantılar ve görüşmeler oluşturmuştur. Elde edilen verilerin analizi için toplantılarda çekilen videolar yazıya dökülmüş ve öğrencilerin davranışları ve söyledikleri Polya'nın

yardımcı elemanların kullanım nedenleri listesine göre kodlanmıştır. Elde edilen bulgulara göre öğrencilerin çiftler halinde iş birliği içinde çalışması yardımcı elemanları eklemek için hatırlatıcı ve öngörücü imkân sağlamıştır. Öğrenci gruplarının ortak olarak bazı yardımcı elemanların kullanım nedenleri gözlenmiştir. Öğrenciler belirsiz fikirleri görselleştirmek, şeklin belirli özelliklerini daha belirgin hale getirmek ve ek durumlar elde etmek için yardımcı elemanlardan yararlandıkları görülmüştür. Toplantılarda problem çözme sürecinde takılıp kaldıkları anlarda sunulan ipuçları öğrencilerin bazı bilgileri hatırlamalarına ve problemdeki belirli bilgilere odaklanmalarını sağlamıştır. Yardımcı elemanların kullanımı öğrencilerin geometrik düşüncelerini geliştirmesini sağlayacağı düşüncesiyle öğretmenlere yardımcı elemanların kullanılmasına yönelik proaktif ve yansıtıcı düşünceleri teşvik etmeleri ve öğrencilerin deneyimlerini arttıracak ortamlar sağlamaları önerilmiştir.

Levav-Waynberg ve Leikin, 2012 yılında çok çözümlü problemlerden yararlanarak öğrencilerin problem çözme performanslarının değerlendirilmesini amaçlamıştır. Bu amaç doğrultusunda araştırmanın çalışma grubunu İsrail’de bir lisede onuncu sınıf düzeyinde öğrenimini sürdüren yüksek başarı düzeyinde 185, orta başarı düzeyinde 82 öğrenci oluşturmaktadır. Öğrencilere iki çember problemi sorulmuş verilen yanıtla yazar tarafından akıcılık, doğruluk, bağlantılılık, esneklik, özgünlük ve yaratıcılık bağlamında değerlendirilmesi sağlanmıştır. Araştırma sonucunda çok çözümlü problemlerin matematiksel bilgi ve yaratıcılığın değerlendirilebilmesi için etkili bir araştırma aracı olduğu görülmüştür.

Yılmaz, 2014 yılında yapmış olduğu çalışmada öğrencilerin çok çözümlü problemlerde kullandıkları çözüm stratejilerinin belirlenmesinin yanı sıra matematiksel yaratıcılığı çok çözümlü problemler yoluyla değerlendirmeyi amaçlamıştır. Bu amaç doğrultusunda nitel araştırma yönteminin benimsendiği araştırmanın çalışma grubunu bir devlet üniversitesinde birinci sınıfta öğrenimini sürdüren 76 öğretmen adayı oluşturmaktadır. 2 aşamada gerçekleştirilen çalışmada ilk aşamada öğrencilerden her soruya 30’ar dakika süre verilerek 4 çok çözümlü problemi çözmeleri beklenmiştir. İkinci aşamada ise ilk aşamada çözüm bulamayan öğretmen adaylarıyla çözüm bulamama nedenlerinin ortaya çıkarılması için klinik görüşmeler yapılmıştır. Araştırmanın analizi için Leikin’in (2009) esneklik, akıcılık ve orijinallik ölçütlerini içeren yöntem kullanılmıştır. Elde edilen bulgulara göre çözüm sayısı arttıkça matematiksel

yaratıcılıklarının arttığı ancak öğretmen adaylarının büyük bir bölümü çok çözüm yolu üretmedikleri görülmüştür. Öğretmen adayları bu durumun nedenleri olarak kanıt gereken sorulara ve çok çözüm yolu üretmeye alışkın olmadıklarını söylemiştir. Ayrıca bir diğer önemli sonuç öğretmen adaylarının sayısal problemlere göre geometri problemlerinde daha fazla çözüm yolu sunmalarıdır.

Küçükkahveci, 2020 yılında yapmış olduğu çalışmada öğretmen adaylarının çok çözümlü geometri problemlerinin kâğıt üzerindeki oluşturdukları çözüm yolları ile GeoGebra ortamında oluşturdukları çözüm yollarını arasında bir ilişki olup olmadığını araştırmayı amaçlamıştır. Bu amaç doğrultusunda bir devlet üniversitesinde ikinci sınıfta öğrenimini sürdüren 22 öğretmen adayına uygulanan hazır bulunuşluk testi sonuçlarına göre seçilen 6 öğretmen adayı çalışma grubunu oluşturmuştur. 5 çok çözümlü problem öğretmen adayları tarafından ilk olarak kâğıt üzerinde incelenmiş ve ardından GeoGebra ortamında bulunan çözüm yolları ile karşılaştırılmıştır. Araştırmada elde edilen bulgulara göre öğretmen adaylarının oluşturdukları çözüm yolları sayısı GeoGebra ortamında artış göstermiştir. Ayrıca öğrenciler görsellik sağlaması ve kâğıt ile yapamadıklarını GeoGebra yazılımı ile başarabildikleri için yazılım ile ilgili olumlu görüş bildirmişlerdir. Görüşmelerde öğretmen adayları, GeoGebra kullanımı arttıkça çözüm yolu sayısının arttığını söylemişlerdir.

Gridos, Avgerinos, Mamona-Downs ve Vlachou, 2022 yılında yapmış oldukları çalışmada geometrik şekil anlayışının çok çözümlü problemler üzerindeki etkisini ve yardımcı doğruların çoklu çözüm üretmeyi ve yaratıcılığı nasıl teşvik ettiğini araştırmayı amaçlamışlardır. Bu amaç doğrultusunda çalışma grubunu Yunanistan’da onuncu sınıfta öğrenimini sürdüren 243 onuncu sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Tüm öğrencilere geometrik şekil anlayış testi ve çok çözümlü problemleri içeren 2 aşamalı test uygulanmıştır. Çok çözümlü problemleri içeren testte yalnızca yardımcı doğruları kullanarak çözülen ve yardımcı doğrular ile ek çözüme ulaşılabilen problemler bulunmaktadır. Araştırmada elde edilen verilerin betimsel analizin yanı sıra SPSS ve istatistiksel benzerlik analizi için C.H.I.C. (Correspondence & Hierarchical Cluster) yazılımlarından yararlanılarak analizi yapılmıştır. Elde edilen bulgular sonucunda geometrik şekil anlayışının matematiksel yaratıcılığı tahmin etmede önemli bir faktör olduğu görülmüştür. Ayrıca yardımcı doğruların inşasının gerektiği problemlerin kullanımının çözümlerin özgünlüğünü arttırabileceği sonucuna ulaşılmıştır.

2. YÖNTEM

Bu bölümde; araştırmanın deseni, araştırmanın katılımcıları, veri toplama araçları ve araştırma verilerinin analizi başlıklarına yer verilecektir.

2.1. Araştırma Deseni

Creswell'e (2009, s.4) göre nitel araştırma bireylerin veya grupların insani bir problemin anlamını keşfetmek ve anlamak için katılımcıların doğal ortamında veri toplamayı, toplanan verileri temalarına göre tümevarımsal olarak analizinin ardından araştırmacının bu verileri yorumladığı bir araştırma türüdür. Yıldırım ve Şimşek (2018, s.41) ise nitel araştırmayı “gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma” olarak tanımlamıştır.

Nitel araştırma türlerinden biri olan temel nitel araştırma deseni eğitim alanında sıklıkla tercih edilir. Temel nitel araştırmanın en önemli amaçlarından biri insanların deneyimlerini anlamlandırmak ve yorumlamaktır. Merriam ve Tisdell'e (2015, s.24) göre nitel araştırma deseninde araştırmacılar insanların yaşam deneyimlerini nasıl yorumladıklarıyla, dünyayı nasıl kurdukları ve deneyimlerine ne anlam yükledikleriyle ilgilenirler. Bu bağlamda çalışmada ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin çok çözümlü problemleri çözme süreçlerinde kullandıkları stratejilerin incelenmesi ve bu stratejilerde yardımcı elemanların rolünün belirlenmesinin amaçlandığı nitel araştırma yöntemlerinden temel nitel araştırma deseni benimsenmiştir.

2.2. Araştırmanın Katılımcıları

Bu araştırmanın katılımcıları temel nitel araştırma deseninin amacına uygun olarak, bir vakıf üniversitesinde öğrenimini sürdüren öğrenciler arasından amaçlı örnekleme yöntemlerinden olan ölçüt örnekleme yöntemi kullanılarak seçilmiştir. Büyüköztürk vd.'e (2019, s.94) göre ölçüt örnekleme yönteminde gözlem birimleri daha önceden belirlenmiş niteliklere sahip kişiler, olaylar, nesneler veya durumlardan oluşturulur. Ölçüt örnekleme yönteminde araştırmanın amacına yönelik veri toplanırken katılımcılar, araştırmacının belirlediği ölçütlere göre belirlenir. Bu çalışmada katılımcılar 2 ölçüt ile belirlenmiştir. Bu ölçütler ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenimine

devam birinci sınıf öğrencilerinden olmaları ve lisans düzeyinde geometri dersi almamış olmalarıdır. Bu ölçütlerin oluşturulmasındaki temel amaç öğrencilerin lisans düzeyinden önceki lise düzeyinde edinmiş oldukları geometri bilgilerine göre problem çözme süreçlerini değerlendirmektir.

İlgili ölçütler doğrultusunda İstanbul ilinde bir vakıf üniversitesinde ilköğretim matematik öğretmenliği programında birinci sınıf düzeyinde öğrenimini sürdüren 8 öğrenci araştırmanın katılımcılarını oluşturmaktadır. Araştırma bulguları sunulurken katılımcıların kod isimleri Ö1, Ö2 vb. olarak kullanılmıştır. Katılımcıların yaş ve cinsiyetlerini içeren demografik bilgiler Tablo 2.1’de sunulmuştur.

Tablo 2.1. *Katılımcıların demografik bilgileri*

Kod İsmi	Cinsiyet	Yaş
Ö1	Erkek	20
Ö2	Kız	20
Ö3	Kız	21
Ö4	Kız	20
Ö5	Kız	20
Ö6	Kız	21
Ö7	Erkek	20
Ö8	Kız	20

2.3. Veri Toplama Araçları

Bu araştırmada araştırma sorularına yanıt aramak üzere veri toplama aracı olarak klinik görüşme kullanılmıştır.

2.3.1. Klinik görüşme

Piaget tarafından psikolojik araştırmalarda kullanılacak araç olarak geliştirilen klinik görüşme, bilişsel süreçleri ortaya çıkaran bir veri toplama tekniğidir (Ginsburg, 1981, s.4). Matematik eğitimi son yıllarda algoritmik öğrenmenin yerine, kavramsal anlayış, üst düzey problem çözme süreçleri ve matematiksel anlamaların içsel yapılarını araştırma eğilimindeki artıştan dolayı klinik görüşmeler sıklıkla kullanılmaktadır (Goldin, 1997, s.40). Klinik görüşmeler, genelleme yapmanın aksine araştırılması istenilen

durumun derinlemesine incelenmesini sağlar. Karataş ve Güven'e (2003, s.6) göre matematik eğitiminde klinik görüşmelerin amaçları şunlardır;

- Katılımcıların stratejilerini, bilgi yapılarını veya becerilerini karakterize etmek.
- Öğretim yöntemlerinin etkililiğini araştırmak.
- Problem çözme davranışlarını araştırmak.

Klinik görüşmelerde, katılımcılar ile araştırmacı arasında güçlü etkileşim bulunmaktadır. Bu etkileşim ve klinik görüşmenin esnekliği sayesinde araştırmacı, problem çözme sırasında öğrencinin motivasyonunu sağlayabilir (Karataş ve Güven, (2003, s.7).

Goldin (2000, s.540-544) araştırma verilerinin sistematik ve en uygun biçimde oluşturulabilmesi için klinik görüşmelerin planlanması aşamasında on ilke önermiştir. Bu ilkeler aşağıda sunulmuştur.

- *Araştırma sorularını ele almak için klinik görüşmenin planlanması:* Araştırmanın planlanması araştırma sorularını yanıtlayacak şekilde yapılmalıdır. Bunun için araştırmacının, araştırmanın amaçlarını ve sorularını önceden net bir biçimde belirlemesi gereklidir.
- *Katılımcılara uygun görevler seçme:* Görüşmede kullanılacak görevler, katılımcılara uygun matematiksel fikirler ve yapılar içermelidir.
- *Zengin temsil yapılarını içeren görevler seçme:* Katılımcıların farklı konulardaki yeteneklerini ortaya çıkarmaya imkân sağlayacak ve yanıt esnekliğine sahip matematiksel görevler seçilmelidir. Ayrıca görevlerin farklı temsil biçimleri arasında ilişki kuracakları fırsatlar sağlamalıdır.
- *Görüşmelerin ayrıntıları açıkça tanımlanmalı ve beklenmeyen durumlar için ölçütler belirlenmesi:* Görüşmeleri planlama ve uygulama aşamalarının, çalışmanın tekrar edilebilirliği ve genişletilmesine imkân sağlamak için ayrıntılı olarak açıklanması gerekir. Bu sayede araştırılan matematiksel fikir ve yapılar başka katılımcılarla farklı bağlamlarda tekrar incelenebilir. Nitel araştırmalar katılımcıların düşünce ve davranışlarını incelediği için beklenmedik durumlarda katılımcıların kendi kendini düzeltebilmeleri için yapılandırılmış sorular tasarlanmalıdır.

- *Özgür problem çözmeyi cesaretlendirme:* Katılımcılara hatırlatmalar ve ipuçları sunmadan önce, katılımcıların düşünce ve davranışlarının incelenmesi için problem çözme sürecinde özgür bırakılması sağlanmalıdır. Bu sayede katılımcıların özgürce seçtikleri stratejilerin, temsillerin vb. keşfedilmesine izin vererek elde edilen bulguları en üst düzeye çıkarır. Ancak bazı cevapların yanlış olduğu göz önüne alındığında görüşmenin yapısı, geriye dönük sorular veya öneriler yoluyla katılımcıların kendilerini düzeltmeleri için fırsat sağlamalıdır.
- *Dış öğrenme ortamı ile maksimum etkileşimi sağlama:* Katılımcıların görüşme sırasında gözlemlenebilir bir öğrenme veya problem çözme ortamıyla etkileşimlerine izin verecek ortamlar oluşturulmalıdır.
- *Neyin kaydedileceğine karar verme ve mümkün olduğunca fazlasını kaydetme:* Hangi tür gözlemlerin nasıl kaydedileceğinin planlanmasında yardımcı olabilmesi için, araştırma sorularına ve gözlemlerden çıkarım yapmak için kullanılacak ölçütlere önceden karar verilmelidir. Matematiksel fikirleri çizimleri veya modellemeleri için katılımcılara materyal sağlanabilir. Video kameralar ile katılımcıların yüzlerine, ellerine veya vücutlarına odaklanarak veriler elde edilebilir. Görüşme sırasında araştırmacı katılımcıların davranışlarını not alabilir. Bu sayede neyin nasıl kaydedileceğini ve çıkarımların nasıl yapılacağını önceden planlayıp yapılandıran araştırmacılar, gözlem ve analiz süreçlerini beklenmedik durumlara karşı korurlar.
- *Görüşmenin pilot çalışmasının yapılması:* Esas görüşme yapılmadan önce planlamaları iyileştirmek ve uyarlamak için pilot çalışma yapılmalıdır. Bu sayede dil kullanımının istenmeyen sonuçlarını önleyebilir, olası matematiksel yanlış anlama veya belirsizlik noktalarını keşfedebilir ve beklenmedik durumları ortaya çıkarabilir.
- *Yeni veya beklenmeyen durumları için uyanık olma:* Katılımcılar görüşme sırasında beklenmedik düşünceleri araştırmacıyı şaşırtabilir. Bu yüzden tahmin edilen düşüncelerle birlikte yeni veya beklenmeyen durumlar da dikkate alınmalıdır.
- *Uygun olduğunda taviz verme:* Görüşmeleri planlarken ve yürütürken, klinik görüşme uygulama ilkeler arasında çelişkiler ortaya çıkabilir. Örneğin, özgür problem çözmenin süresi arttırıldığında, görüşmenin zamanı kısıtlanarak

araştırma sorularıyla ilgili bilgileri kaybedebiliriz. Bu durumun önlenmesi için araştırma amaçlarını gözetererek bazı ilkelerden tavizler verilebilir.

Goldin'in klinik görüşmenin planlanması aşamasında öneri olarak sunduğu ilkelere dayanarak araştırma planlanmıştır. Klinik görüşmenin genel planlamasının yapılmasından sonra görüşmelerde kullanılacak problemlerin seçiminde bazı ilkeler göz önüne alınmıştır.

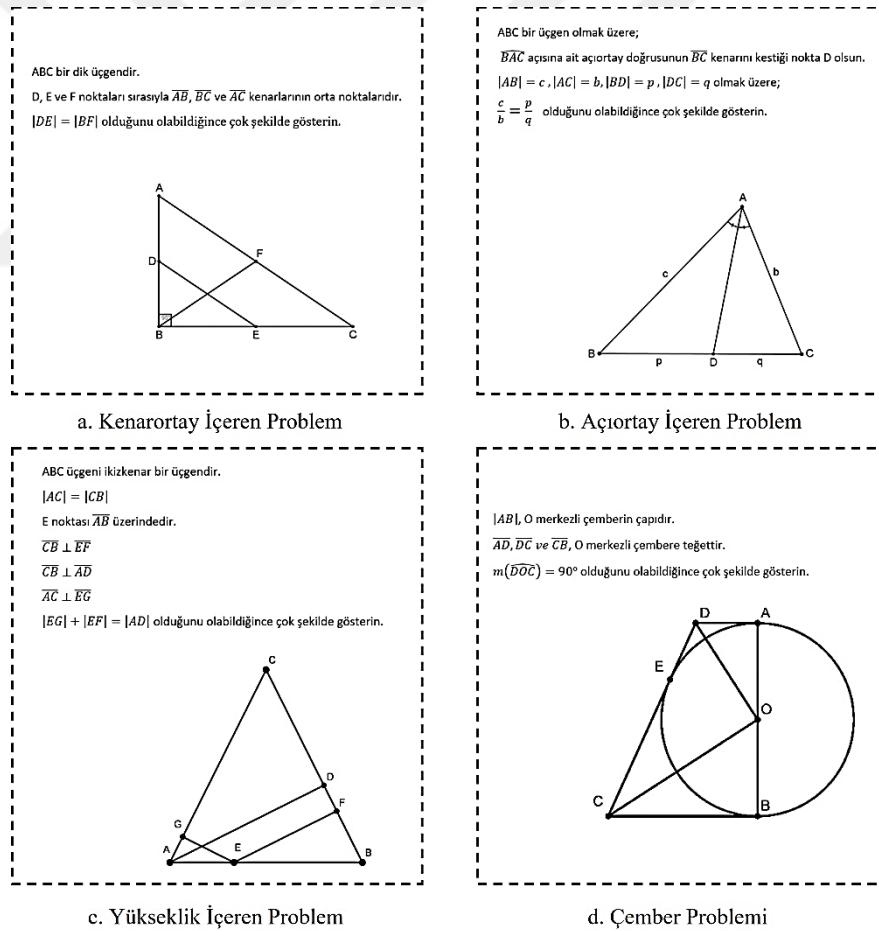
Goldin'in (2000, s.540) klinik görüşmeyi planlama ilkelerinden “Katılımcılara uygun görevler seçme” ve “Zengin temsil yapılarını içeren görevler seçme” ilkelerine ve Hunting'in (1997) klinik görüşme görevlerini seçme ölçütlerine göre araştırmanın amacına yönelik açık uçlu çok çözümlü problemleri içeren klinik görüşme formları hazırlanmıştır.

Hunting (1997, s.151-152) matematiksel bilgi veya becerilerin incelendiği klinik görüşmelerde kullanılacak görevlerin (soru, problem vb.) seçilmesinde ve geliştirilmesinde bazı ölçütler belirlemiştir. Bu ölçütler aşağıda sunulmuştur.

- *Zaman uygunluğu:* Görüşme süreleri katılımcıların yaşlarına bağlı olarak planlanır. Örneğin katılımcıların yaşları beş ile sekiz arasında ise görüşmeler 10-20 dakika, yaşları on ile on iki arasında ise görüşmeler 35-50 dakika arasında değişebilir. Araştırmacının öncelikli amacı bilgiyi mevcut zamanda en üst düzeye çıkarmaktadır. Bu bağlamda araştırmada katılımcıların yaşları 19-21 arasında olduğu düşünüldüğünde klinik görüşmeler 40-50 dakika arasında gerçekleşmiştir.
- *Ön bilgi:* Klinik görüşmelerde kullanılacak matematiksel görevlerin seçilmesi veya geliştirilmesi sürecinde katılımcıların ön bilgilerin bilinmesi gerekir. Bu bağlamda katılımcıların lisans öğrencisi olduğu düşünüldüğünde ortaöğretim kazanımları arasında bulunan konu başlıklarına göre çok çözümlü problemler seçilmiştir.
- *Yenilik:* Klinik görüşmelerde kullanılacak matematiksel görevin sunumu veya bağlamı yeni olması durumunda katılımcıların ilgilerini çekecek ve görev ile ilgilenme olasılıkları yükselecektir. Bu bağlamda seçilen problemlerin çok çözümlü olması katılımcılara farklı stratejileri denemelerini sağlayarak ilgilerini arttırmıştır.

- *Bağlam:* Klinik görüşmelerde kullanılacak matematiksel görev katılımcıların matematiksel düşüncelerini ortaya çıkarmalı ve uygunsa gerçeğe uygun bir ortamda sunulmalıdır. Bu bağlamda problemler, öğrencilerin çözüm stratejilerini ve çözüm sırasında kullandıkları yardımcı elemanların rolünü incelemeyi sağlayacak şekilde seçilmiştir.
- *Materyaller:* Klinik görüşmelerde kullanılacak matematiksel görevlerin fiziksel materyalinin düşünülmesi gerekebilir. Manipülatif içeren görevler katılımcıların davranışlarını gözlemlemeye fırsat sağlar. Katılımcıların çözüm girişimlerini kaydetmek için kalem ve kâğıt kullanmaları sağlanmalıdır. Bu bağlamda problemler, katılımcıların çözüm stratejilerini ve her çözüm girişimlerini kayıt altına alabilmek için her oturum için klinik görüşme formları (EK-1) kullanılmıştır. Ayrıca araştırma bulgularını kaybetmemek amacıyla klinik görüşme formu üzerindeki çizimin silinmesi engellenmiş, yeni bir görüşme formu verilmiştir.
- *Esneklik:* Klinik görüşmelerde kullanılacak matematiksel görevler, daha kolay veya daha basit alt görevler ile birleştirilerek farklı yeteneklere sahip öğrenciler için kullanılabilir. Katılımcı kolay görevde başarılı olursa, orijinal görev tekrar sunulabilir. Bu bağlamda klinik görüşmelerin esnek ve güçlü etkileşime açık olduğuna dayanarak, problem çözme süreçlerinde öğrencilerin zorlandıkları ve yanlış yolda ilerlediklerin fark edildiğinde mevcut problemten daha basit bir problem sorulması araştırmacı tarafından sağlanmıştır.
- *Araştırma Temeli:* Matematik eğitimi öğretim programlarının içeriği ve sıralaması, matematik eğitimcileri ve matematikçiler tarafından matematiğin mantıksal temelleri üzerine gerekçelendirilir. Matematik eğitime yönelik araştırmaların incelenmesi katılımcıların matematiksel gelişimine yeni bakış açıları sunma ve öğretim programların yeniliklere yol açma potansiyeline sahiptir. Bu bağlamda araştırma amacı ve seçilen problemler, matematik eğitime çok çözümlü problemleri kullanma ve yardımcı elemanların rolünün belirlenmesi konularında katkı sağlayacağı düşünülmektedir.
- *Öğretim programı bağlantısı:* Klinik görüşmelerde kullanılacak matematiksel görevlerin, öğretim programlarının hedefleri ve kazanımları çerçevesinde belirlenmesi sağlanmalıdır. Bu bağlamda seçilen problemler matematik eğitiminin hedefleri ve katılımcıların ön bilgileri dikkate alınarak belirlenmiştir.

Görüşmelerde kullanılacak olan problemler seçilirken çok çözümlü problemleri içeren çalışmalar incelenmiştir (Gridos, Avgerinos, Mamona-Downs ve Vlachou, 2021, s.8; Leikin, 2009, s. 32; Leikin, 2010, s.72; Leikin, 2011; s.994; Leikin ve Levav-Waynberg, 2008, s.235; Yılmaz, 2014, s.39; Küçükkahveci, 2020, s.123-129). Problemlerin seçilmesindeki en önemli ölçüt araştırmanın amacı olan yardımcı elemanların rolünü araştırabilmek için çözümü için yardımcı eleman eklenmesi gereken problemlerin olmasıdır. İlk aşamada 11 çok çözümlü problem seçilmiştir. Seçilen bu problemlerden uygulanabilirliği ve uzman çözüm sayıları göz önüne alındığında 6 tanesi araştırma için uygun bulunmuştur. Son aşamada ise matematik eğitimi uzmanının görüşleri alınarak araştırmanın amaçlarına uygun olan ve üçgenin yardımcı elemanlarını da incelemeye imkân sağlayan 4 çok çözümlü problem araştırma için uygun bulunmuştur. Seçilen çok çözümlü problemler Görsel 2.1’de sunulmuştur (EK-1).



Görsel 2.1. Çok çözümlü problemler

Klinik görüşme formu öğrencilere verilerek belirlenen sürede incelemeleri istenilmiştir. Bu inceleme süresinde öğrenciler özgür bırakılmıştır. Ancak araştırmacı öğrencinin düşüncelerini ortaya çıkarabilmek ve öğrenciye yönlendirmeler yapabilmek için klinik görüşme soruları kullanılmıştır. Klinik görüşme soruları giriş bölümünde incelenen Polya'nın (2017, s. 5) problem çözme sürecine ait cevap beklenen sorular araştırmacı tarafından öğrenciye yöneltilmiştir. Aşağıda problemin aşamalarına göre verilen sorular öğrencinin soruda ulaşmış olduğu aşama göz önüne alınarak klinik görüşme sırasında gerekli görülen sorular sorulmuştur.

Problemin anlaşılması

- Bilinmeyen(ler) nedir?
- Veriler nelerdir?
- Koşul(lar) nedir?
- Koşulu sağlamak mümkün müdür?
- Verilen koşul bilinmeyi belirlemeye yeterli/yetersiz/gereksiz/çelişkili midir?
- Eğer problemin şekille bağlantısı varsa şekil çizmeli ve şekil üzerinde bilinmeyenleri ve verileri göstermelidir. Eğer gerekliyse uygun bir simgelem seçilerek nesneler isimlendirilmelidir.

Plan hazırlama

- Problemi daha önce gördünüz mü? Ya da aynı problemin farklı bir biçimini gördünüz mü?
- Benzer bir problem biliyor musunuz? Yararlı olabilecek bir teorem biliyor musunuz?
- Mevcut problemle ilişkili ve daha önce çözülmüş bir problem var mı? Daha önce çözülmüş problemin sonuçlarını/yöntemini kullanabilir misiniz? Bunların sağlanabilmesi için yardımcı eleman dahil etmeli misiniz?
- Problemi daha farklı bir biçimde ifade edebilir misiniz?
- Problemi çözmiyorsanız, bu probleme benzer/daha genel/daha özel problemi çözebilir misiniz? Problemin bir kısmını çözebilir misiniz?
- Verileri kullanarak işe yarayan başka veriler elde edebilir misiniz?
- Koşulların ve verilerin tamamını kullandınız mı?
- Problemin çözümünde gerekli tüm kavramları göz önünde tutunuz mu?

Planı uygulama

- Çözümüne ulaşmak için planı uygularken her adımı kontrol edin.
- Uygulanan adımın doğruluğunu açıkça görebiliyor musunuz?
- Doğru olduğunu ispat edebilir misiniz?

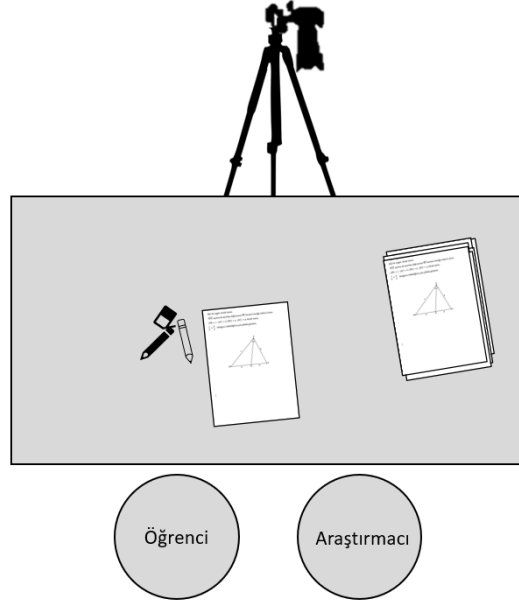
Geriye dönüp bakma

- Sonucu/Savı kontrol edebilir misiniz?
- Sonuca farklı bir biçimde ulaşabilir misiniz?
- Sonucu veya yöntemi başka bir problem için kullanabilir misiniz?

Bu bağlamda ilköğretim matematik öğretmenliği programındaki birinci sınıf öğrencilerinin çok çözümlü problemleri çözme süreçlerinde kullandıkları stratejilerin incelenmesi ve bu stratejilerde yardımcı elemanların rolünün belirlenmesi amacına yönelik çok çözümlü problemler hazırlanmış, esas görüşme öncesi pilot çalışma yapılmış ve problem çözme aşamasında öğrenciler özgür bırakılmıştır. Öğrencilerle yapılacak olan klinik görüşmeler daha sonra analiz edilmesi için video kaydı altına alınmıştır. Video kayıtları araştırmacının süreç içerisinde gözden kaçırdığı önemli noktaların olması durumunda analiz sürecinde tekrardan inceleyebilmek için önemli veriler sağlar. Video kaydı yapılırken kamera yalnızca görüşmenin yapıldığı masayı üstten görecektir şekilde konumlandırılmıştır. Böylece öğrencilerin klinik görüşme formları üzerinde yaptığı çizim ve işlemler kayıt altına alınarak araştırmada elde edilecek veri kaybının önlenmesi sağlanmıştır.

2.4. Araştırma Ortamı

Görüşmenin yapılacağı ortamın düzeni Görsel 2.2’de gösterilmiştir. Öğrencinin dikkatinin dağılmaması için görüşme ortamı en sade biçimde düzenlenmiştir. Görüşme masasında yalnızca probleme ait görüşme formları, öğrencinin kırtasiye ürünleri bulunmaktadır. Araştırmada çok çözümlü problemleri çözüm stratejileri incelendiği için öğrencilerin her çözüm ve çözüm denemeleri ayrı ayrı kaydetmeyi sağlamak ve çizim ve işlemlerindeki verileri kaybetmemek amacıyla çizimin silinmesinin yerine yeni bir görüşme formu verilmiştir. Ayrıca görüşme kamera ile kayıt altına alınırken kameranın açısı yalnızca masanın üstünü görecektir şekilde ayarlanarak öğrencilerin kendilerini daha rahat hissetmesi sağlanmıştır.



Görsel 2.2. Görüşme yapılacak ortam düzeni

2.5. Pilot Çalışma

Pilot çalışma araştırma yapılmadan önce soruların açıklığı, araştırma yönteminin uygunluğu, planlanan araştırma sürecinin değerlendirilmesi ve araştırmacının araştırma sürecini en uygun şekilde nasıl gerçekleştireceği konularını açıklığa kavuşturmaktadır (Glesne, 2020, s.75). Araştırmanın amaçlarına uygun olarak gerçekleştirilebilmesi için katılımcı belirleme ölçütleri göz özüne alınarak seçilen bir öğrenci ile pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmada araştırma sürecinde uygulanması planlanan dört çok çözümlü problem ayrı günlerde seçilen bir öğrenci ile incelenmiştir. Pilot çalışmada çok çözümlü problemler Şekil 2.1’deki sıralamaya göre çözülmüştür. Ancak öğrenci açığortay içeren problemde zorlandığı için çözüm sayısını artıramayacağını düşünmüştür. Öğrencinin motivasyonu düşmüş ve yardımcı eleman çizme konusunda çekingen bir tavır sergilemiştir. Pilot çalışmanın ikinci gün problemi olan kenarortay içeren problemde ise öğrenci yardımcı eleman çizimleri yaparak çözüm sayılarını arttırdığı ve yapamayacağım algısından kurtulduğu görülmüştür. Bu yüzden araştırmada katılımcıların ilk sorudan motivasyonlarının düşmemesi ve araştırmaya daha istekli katılacakları düşüncesiyle esas uygulamada kenarortay içeren problem ile açığortay içeren probleminin sırası değiştirilmiştir. Ek olarak görüşme formlarında bulunan problem görsellerinin boyutu büyütülerek katılımcıların şekil üzerinde daha rahat işlem yapmaları sağlanmıştır.



Şekil 2.1. Pilot çalışmada problemleri inceleme sırası

2.6. Veri Toplama Süreci

Araştırma verileri 2021-2022 öğretim yılının güz ve bahar dönemlerinde toplanmıştır. Aralık 2021-Mart 2022 tarihleri arasında her öğrenci ile ayrı günlerde olmak üzere Şekil 2.2’deki problem çözme sırasıyla toplamda 4 oturum şeklinde klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Yapılacak ilk görüşme oturumundan önce öğrencilere araştırmanın amacı, toplanan verilerin bilimsel amaçlarla kullanılacağı, araştırmada kimliklerinin gizli tutulacağı, araştırma sürecinde rahatsızlık hissettiklerinde çalışmadan çekilebilecekleri ve araştırmanın bitiminde toplanan verilen imha edileceği konularında bilgi verilmiştir. Gönüllü olarak katılım sağlayan öğrenciler “Araştırma Gönüllü Katılım Formu” imzalayarak görüşme oturumlarına başlamıştır (EK-2). Araştırmanın gerçekleştirilebilmesi için gerekli olan 27.04.2021 tarihli ve 60779 protokol numaralı “Anadolu Üniversitesi Sosyal ve Beşerî Bilimler Bilimsel Araştırma Ve Yayın Etiği Kurulu Karar Belgesi” EK-3’te sunulmuştur.



Şekil 2.2. Araştırmada problemleri inceleme sırası

Her bir öğrenci ile gerçekleştirilen klinik görüşme oturumlarının süreleri ve toplam görüşme süreleri

Tablo 2.2’de verilmiştir.

Tablo 2.2. *Klinik görüşme oturumlarının süreleri*

Öğrenci	Kenarortay İçeren Problem	Açıortay İçeren Problem	Yükseklik İçeren Problem	Çember Problemi	Toplam Görüşme Süresi
Ö1	49:01	47:40	48:59	49:06	194:46
Ö2	45:46	51:11	49:04	51:18	197:19
Ö3	49:03	46:09	51:21	44:29	191:02
Ö4	49:34	47:29	47:22	46:24	190:49
Ö5	39:48	51:22	46:19	44:40	182:09
Ö6	47:18	46:09	51:19	47:43	192:29
Ö7	51:18	52:28	47:35	51:19	202:40
Ö8	51:16	46:31	48:53	51:15	197:55

2.7. Araştırma Verilerinin Analizi

Araştırma sorularına cevap vermesi amacıyla video kayıtları ve klinik görüşmelerden elde edilen verilerin analizinde tematik analiz kullanılmıştır. Çalık ve Sözbilir’e (2014, s.34) göre tematik analiz, “aynı konu üzerine yapılan araştırmaların tema veya ana şablonlar oluşturularak eleştirel bir bakış açısıyla sentezlenmesi ve yorumlanmasını içermektedir.” Braun ve Clarke’e (2019, s.875) göre tematik analiz ise verileri küçük boyutlarda düzenlemeyi ve derinlemesine betimlemeyi sağlar. Ayrıca analiz sürecinin doğrusal bir süreç olmadığını ve aşamalar arasında etkileşimli bir sürecin olması gerektiğini belirtmektedir. Tematik analiz aşamaları aşağıda sunulmuştur.

1. *Araştırmacının veriye aşına olması:* Araştırmacı her ne kadar veriyi bizzat kendisi toplasa da veriye baştan sonra aşına olması ve yoğunlaşması gerekir. Araştırmacı veriyi baştan sona okurken daha sonraki aşamalarda yararlanacağı notlar almalıdır.
2. *İlk kodların oluşturulması:* Araştırmacının verileri baştan okuma sürecinde verilerde önemli bulduğu fikirleri sistematik biçimde kodlaması ve verileri ilgili kodların altında toplanmasıdır.
3. *Temaların aranması:* Araştırmacı bu aşamada farklı kodların birleştirilerek oluşturabilecekleri kapsayıcı temaları belirler. Bu aşamada veriye göre tema, alt

tema ve kodlar biçiminde tablo veya zihin haritalarından yararlanarak veriler görselleştirilebilir.

4. *Temaların gözden geçirilmesi:* Araştırmacı bu aşamada temaların kodlanmış veriler ve tüm veriler ile aralarındaki uyumu dikkate alarak temaların gözden geçirilme ve sadeleştirme sürecini gerçekleştirir.
5. *Temaların tanımlanması ve adlandırılması:* Araştırmacı bu aşamada analiz aşamasında kullanacağı temaları tanımlayarak en sade hale getirir. Temalar tanımlanırken, temanın altından bulunan her bir veriyi kapsamasına dikkat edilmelidir. Ayrıca araştırmacının varsa temaların altındaki alt temaları belirlemesi gerekir.
6. *Raporun hazırlanması:* Araştırmacının bu aşamada kodlanan veri içeriklerini temalarına göre doğrudan alıntı örnekleri seçerek analiz etmesi, analiz sonuçlarının akademik bir dil kullanarak araştırma sorusuna cevap verecek biçimde literatürle ilişkilendirerek raporlaştırması gerekmektedir.

Braun ve Clarke'in (2019, s.882-890) sıralamış olduğu tematik analiz aşamalarına göre veri analizinde gerçekleştirilen çalışmalar aşağıda sunulmuştur.

2.7.1. Araştırmacının veriye aşina olması

Öğrencilerin klinik görüşme formları ve video kayıtları araştırmanın verilerini oluşturmaktadır. Analiz sürecini sistematik hale getirmek için oluşan araştırma verilerin birleştirilmesi uygun görülmüştür. Bu aşamada öncelikle öğrencilerin görüşme formları taranarak dijital ortama aktarılmıştır. Araştırmacı video kayıtlarını klinik görüşme formları ile ilişkilendirerek Görsel 2.3'de örneği verilen şablona göre incelemiştir.

Öğrenciye ait görüşme formu Form Numarası Video Dakika Bilgisi Görüşme Dökümü

1500

ABC üçgeni dikkenar bir üçgendir.
 $|AC| = |CB|$
 E noktası AB üzerindedir.
 $CE \perp EF$
 $CE \perp AD$
 $FE \perp ED$
 $|EC| + |EF| = |AD|$ olduğunu kanıtlayınız çok şekle gösterin.

$T = |AC| = |BC|$

$\frac{T}{2} \cdot |CE| + \frac{T}{2} \cdot |EF| = \frac{T}{2} \cdot |AD|$
 $\frac{T}{2} \cdot (|CE| + |EF|) = \frac{T}{2} \cdot |AD|$

EG doğru parçasını çizdir.
 A: Bu doğru parçası neden çizdin?
 İ: CAE ve CEB üçgenleriyle ilgili bir şey yapılabilir, eş olamazlar..
 A: Burada EG çizdiğimizde ne değişti?
 İ: ACE üçgeninden çıkıp büyük üçgene (ACE) odaklandım (Bir süre sessiz kalarak düşündü)

A: Neler düşünüyorsunuz?
 İ: Net bir sonuç bulamıyorum, bir yere dayandıramıyorum. (Şeklinde kaşık olduğunu düşünüyor)

A: Alanlardan gitmeyi düşündü. (ACE ve CEB) Alanlarını bulunabileceğini fakat eşit olmadıkları için bir şey çıkamayacağını düşündü
 A: Birden ne istenilmişti
 İ: $|EC| + |EF| = |AD|$ olması gerekiyor.
 İ (Düşündü)

ACE ve CEB üçgenlerinin alanlarını bulup yazdı.
 ABC üçgeninin alanını buldu

Alanların toplamı olarak yazdı, istenilen durumu ulaştı.

A: Burada CE doğru parçasını çizdin, bizim ne işimize yaradı?
 İ: ABC üçgeninin alanlarını ayırdı ve diklikleri kullandık.
 Farklı bir yol için yeni kâğıda geçiş yapıldı.

★ Diklikleri kullanmayı sağladı.
 ★ Seldi benden yardımcı eleman

Araştırmacı Notları

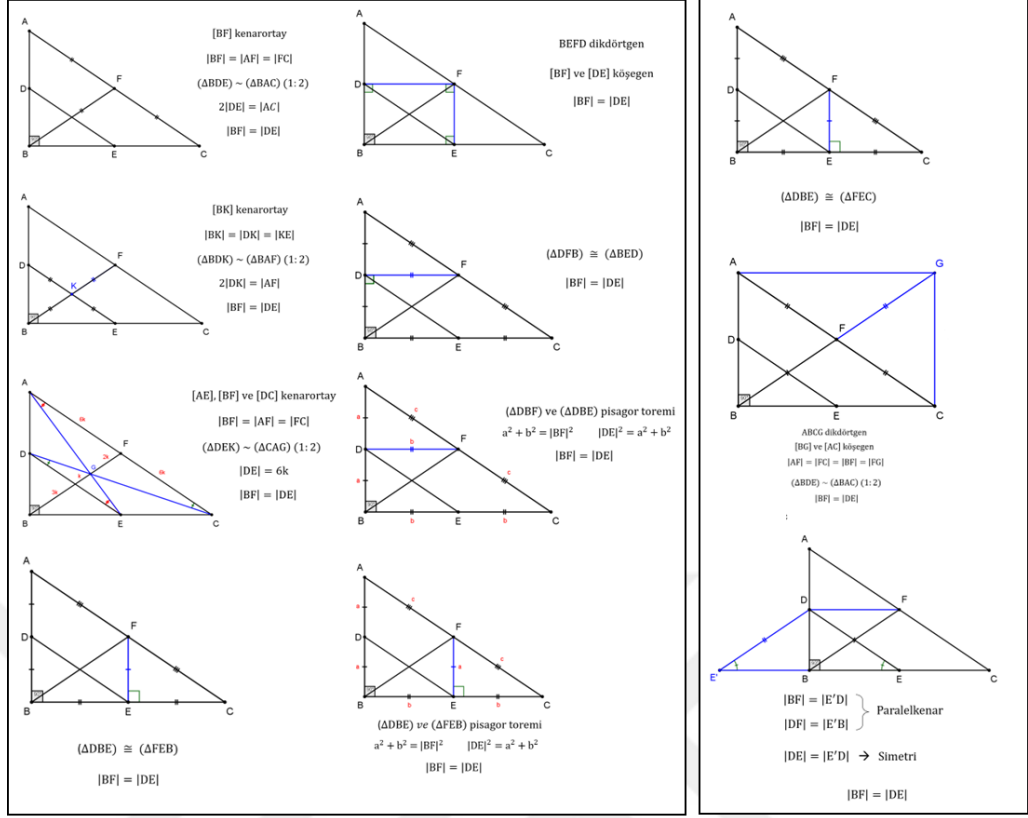
Görsel 2.3. Klinik görüşmeleri inceleme şablonu

Şablon öğrencilerin çizimleri ve görüşme dökümlerini tek sayfada yer almasını sağlayarak araştırmacının analiz sürecinin diğer aşamalarında tek sayfada bütün verileri görmesini sağlamıştır. Ayrıca çizimlerin yapıldığı dakika ve form numarası bilgileriyle gerekli durumlarda daha hızlı bir şekilde videoda istenilen bölümün tekrar izlenmesini sağlamıştır. Araştırmacı notları, araştırmacının yorumlarını ve çıkarımlarını içerdiği için bir sonraki aşama olan kodlama sürecini kolaylaştırmıştır.

2.7.2. İlk kodların oluşturulması

Bu aşamanın ilk bölümünde öğrencilerin klinik görüşme verilerinden bireysel çözüm alanları ve araştırmacı tarafından çok çözümlü problemlerin uzman çözüm alanları belirlenmiştir. Aşağıda problemlere ait uzman çözüm alanları ve varsa öğrencilerin bireysel çözüm alanlarında olan ancak uzman çözüm alanında olmayan çözümler sunulmuştur.

Görsel 2.4 incelendiğinde, kenarortay içeren probleme ait uzman çözüm alanında 8 çözüm (Bkz. Görsel 2.4.a) bulunmaktadır. Uzman çözüm alanında bulunmayan ancak öğrencilerin bireysel çözüm alanlarında bulunan ek 3 çözüm (Bkz. Görsel 2.4.b) bulunmaktadır.

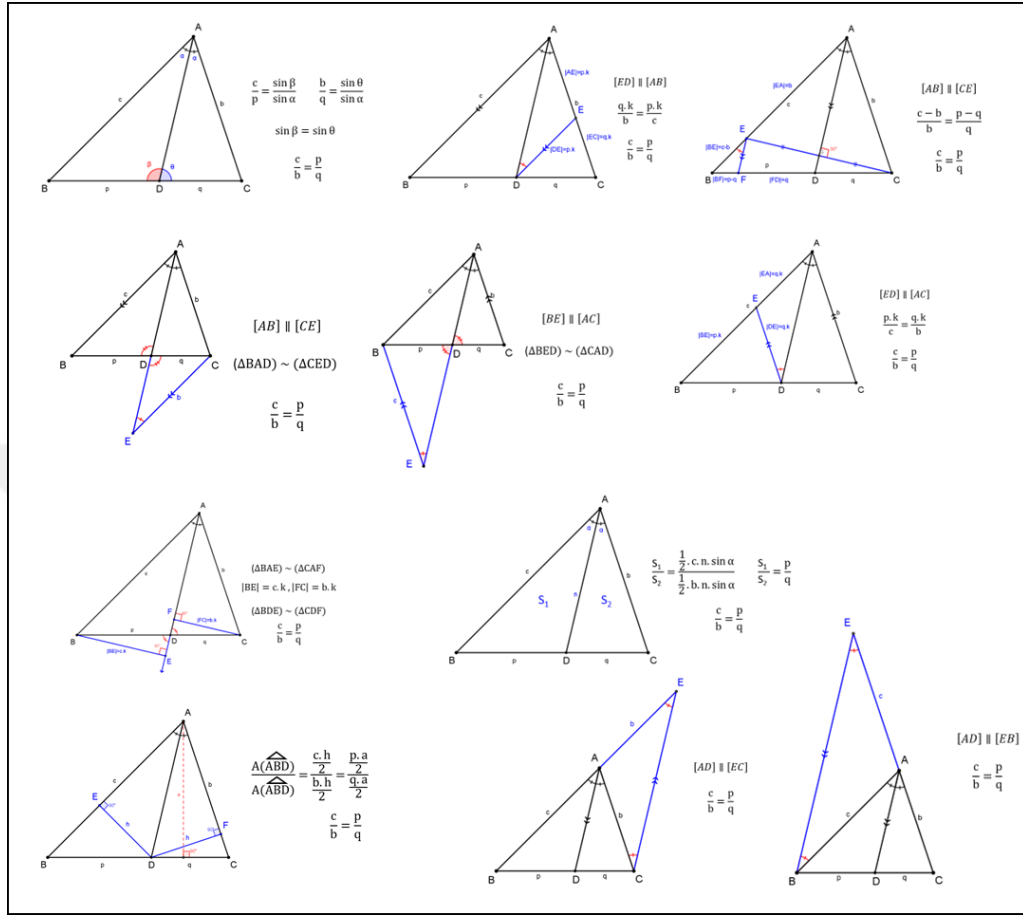


a. Uzman çözüm alanı

b. Uzman çözüm alanına ek çözümler

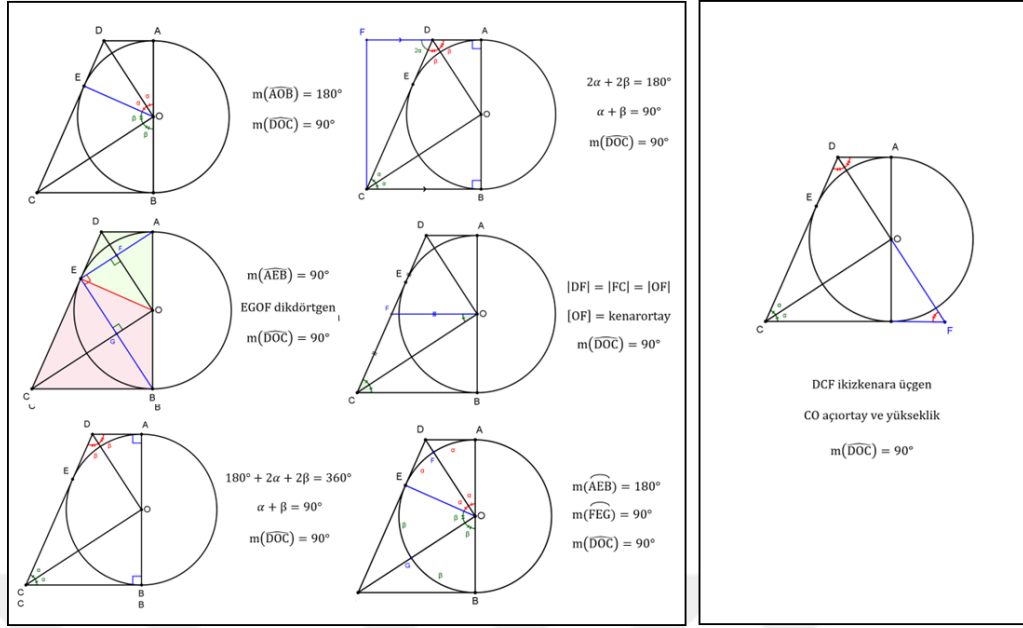
Görsel 2.4. Kenarortay içeren problemin uzman çözüm alanı

Görsel 2.5 incelendiğinde, açıortay içeren probleme ait uzman çözüm alanında 11 çözüm bulunmaktadır.



Görsel 2.5. Açıortay içeren problemin uzman çözüm alanı

Görsel 2.6 incelendiğinde, yükseklik içeren probleme ait uzman çözüm alanında 6 çözüm (Bkz. Görsel 2.6.a) bulunmaktadır. Uzman çözüm alanında bulunmayan ancak öğrencilerin bireysel çözüm alanlarında bulunan ek 2 çözüm (Bkz. Görsel 2.6.b) bulunmaktadır.



a. Uzman çözüm alanı

b. Uzman çözüm alanına ek çözümler

Görsel 2.7. Çember problemi uzman çözüm alanı

Problemlere ait çözüm alanları belirlendikten sonra her bir çözümde kullanılan yardımcı elemanı ve çözüm stratejisini göz önüne alarak kodlamalar yapılmıştır. Öğrencilerin çözümleri yapılan kodlamaların altında gruplanarak bir sonraki analiz aşaması için hazır hale getirilmiştir. Analiz aşamalarında yapılanları örnekler yardımıyla ifade edebilmek için yükseklik içeren problem kullanılmıştır. Tablo 2.3’de yükseklik içeren probleme ait yapılan kodlamalar bulunmaktadır.

Tablo 2.3. Yükseklik içeren probleme ait kod listesi

Kodlar
Üçgeni ikiye ayırma
Dik inme
Yardımcı elemansız çözüm
Simetri alma
Paralel çizme

2.7.3. Temaların aranması

İlk kodların oluşturulması aşamasından sonra aynı kod grubuna ait olan çözümler incelenerek hangi geometrik temellere göre çözüm yapıldığı araştırılmıştır. Benzer temel dayanaklara göre yapılan çözümler aynı tema altında birleştirilmiştir. Temaların hangi dayanaklara göre çözüm gruplarına ayrıldıkları Tablo 2.4’de gösterilmiştir.

Tablo 2.4. *Yükseklik içeren probleme ait temaların dayanakları*

Temalar	Tanımlama
1. Çözüm Grubu	Bu çözüm grubu var olan dikliklerin üçgenlerin yüksekliği olarak kullanılmasına ve bir bütünü oluşturan iki üçgenin alanlarının toplanarak büyük üçgenin alanına eşitlenmesine dayanmaktadır.
2. Çözüm Grubu	Bu çözüm grubu ikizkenar üçgen özelliklerinin ve benzer üçgenler arasındaki ilişkilerin kullanılmasına dayanmaktadır.
3. Çözüm Grubu	Bu çözüm grubu çizilen paralel doğru/inilen diklik yardımıyla dikdörtgen özelliklerinin ve üçgenlerde eşliğin uygulanmasına dayanmaktadır.
4. Çözüm Grubu	Bu çözüm grubu dik doğru inilerek oluşan üçgenlerde eşliğin uygulanmasına ve ortaya çıkan dikdörtgenin özelliklerine dayanmaktadır.
5. Çözüm Grubu	Bu çözüm grubu simetri yoluyla oluşan eş üçgenlerin birleşiminden oluşan dikdörtgen özelliklerine dayanmaktadır.

Bu aşamada belirlenen kodlamalar ve bu kodlamaların altında yer alan çözümler incelenerek temalar aranmıştır. Çözümlerin temalara göre analizini en uygun biçimde yapabilmek için daha önceki aşamada verilen genel kodlamalar özelleştirilmiştir. Örneğin dik inme kodu yerine yüksekliğe dik inme ve belirli bir doğru parçasına dik inme gibi daha özelleştirilmiş kodlar oluşturulmuştur. Oluşturulan yeni kodlara göre yükseklik içeren problemin temaları belirlenmiştir. Temalar, Tablo 2.5’de çözüm grupları olarak belirtilmiştir.

Tablo 2.5. *Yükseklik içeren problemin temalaştırılması*

Temalar	Kodlar
1. Çözüm Grubu	ABC üçgenini iki üçgene ayırma
2. Çözüm Grubu	Yardımcı elemansız çözüm
3. Çözüm Grubu	Yüksekliğe dik inme Üçgenin kenarına paralel çizme
4. Çözüm Grubu	FE doğru parçasının uzantısına dik inme GE doğru parçasının uzantısına dik inme
5. Çözüm Grubu	AGE üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma ADB ve EFB üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma

2.7.4. Temaların gözden geçirilmesi

Bu aşamada oluşturulan tema ve kodların altında bulunan öğrenci çözümlerinin kontrolü sağlanmıştır. Aynı temaya altında bulunan verilerin birbirleri ile uyumu ve farklı temalar ile aralarında belirli farklılıkların olup olmadığı incelenmiştir. Tema ve verilerin tutarlılığının sağlanması için ilgili tema-kod tablosu ve veriler matematik eğitim uzmanının görüşleri sunulmuştur. İncelemeler sonucunda fikir birliği elde edilerek bir sonraki aşamaya geçiş yapılmıştır.

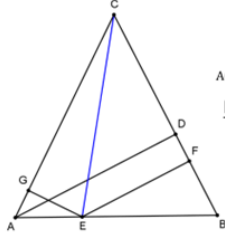
2.7.5. Temaların tanımlanması ve adlandırılması

Bu aşamada tema-kod-veri uyumu sağlanan problemlerin temalarının benzer çözüm stratejisini içeren çözüm gruplarına ayrılarak tanımlanması uygun görülmüştür. Yükseklik içeren probleme ait çözüm grupları Görsel 2.8’de gösterilmiştir.

Yükseklik İçeren Problem

1. Çözüm Grubu

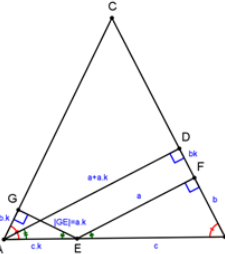
ABC üçgenini iki üçgene ayırma



$$\begin{aligned} A(\triangle ACE) + A(\triangle CEB) &= A(\triangle ABC) \\ \frac{|AC||GE|}{2} + \frac{|BC||EF|}{2} &= \frac{|BC||AD|}{2} \\ |BC| &= |AC| \\ |GE| + |EF| &= |AD| \end{aligned}$$

2. Çözüm Grubu

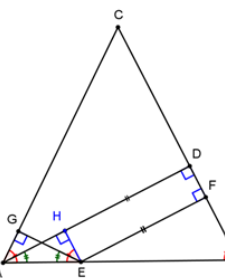
Yardımcı elemanlı çözüm (benzerlik)



$$\begin{aligned} (\triangle BFE) &\sim (\triangle AGE) \\ \frac{a}{a+k} &= \frac{b}{b+k} = \frac{c}{c+k} = \frac{1}{1+k} \\ (\triangle BFE) &\sim (\triangle BDA) \\ \frac{a}{a+k} &= \frac{b}{b+k} = \frac{c}{c+k} = \frac{1}{1+k} \\ |AD| &= a + ak, |GE| = a, |EF| = a \\ |GE| + |EF| &= |AD| \end{aligned}$$

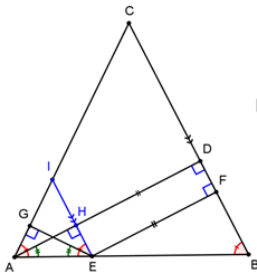
3. Çözüm Grubu

Yükseklığe dik inme



$$\begin{aligned} (\triangle EHA) &\cong (\triangle AGE) \\ |GE| &= |AH|, |HD| = |EF| \\ |AH| + |HD| &= |AD| \\ |GE| + |EF| &= |AD| \end{aligned}$$

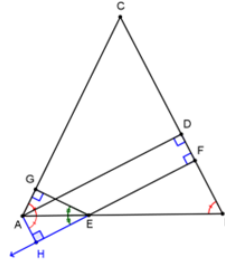
Üçgenin kenarına paralel çizme



$$\begin{aligned} (\triangle EHA) &\cong (\triangle AGE) \\ |GE| &= |AH|, |HD| = |EF| \\ |AH| + |HD| &= |AD| \\ |GE| + |EF| &= |AD| \end{aligned}$$

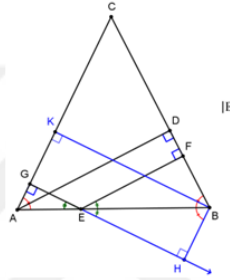
4. Çözüm Grubu

FE doğru parçasının uzantısına dik inme



$$\begin{aligned} (\triangle AHE) &\cong (\triangle AGE) \\ |GE| &= |HE| \\ |HE| + |EF| &= |AD| \\ |GE| + |EF| &= |AD| \end{aligned}$$

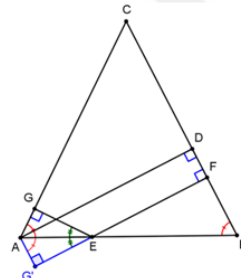
GE doğru parçasının uzantısına dik inme



$$\begin{aligned} (\triangle BFE) &\cong (\triangle BHE) \\ |EF| &= |EH|, |KB| = |AD| \\ |GE| + |EH| &= |KB| \\ |GE| + |EF| &= |AD| \end{aligned}$$

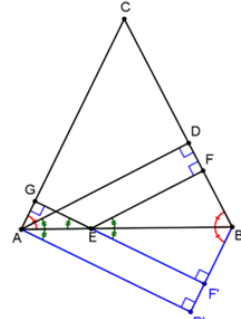
5. Çözüm Grubu

AGE üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma



$$\begin{aligned} |AG| &= |AG'| \\ |GE| &= |G'E| \\ |G'E| + |EF| &= |AD| \\ |GE| + |EF| &= |AD| \end{aligned}$$

ADB ve EFB üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma



$$\begin{aligned} |EF| &= |EF'| \\ |AD| &= |AD'| \\ |GE| + |EF'| &= |AD'| \\ |GE| + |EF| &= |AD| \end{aligned}$$

Görsel 2.8. Yükseklik içeren probleme ait çözüm grupları

2.7.6. Raporun hazırlanması

Bu aşamada temaları belirlenen problemlerin verileri, tema ve kodlara göre ayrı başlıklar altında doğrudan alıntılara ve klinik görüşme formlarının görsellerine dayanarak bulgular bölümünde incelenmiştir. Ayrıca öğrencilerin problemle ilk karşılaştığında uyguladıkları stratejiler ve düşünceleri başlangıç stratejileri bağlamında doğrudan alıntılara ve klinik görüşme formlarının görsellerine dayanarak bulgular bölümünde incelenmiştir. Analiz sonuçları, araştırma soruları ve literatürle ilişkilendirilerek sonuç-tartışma bölümünde verilmiştir.

2.8. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Bütün araştırmaların, etik ilkelere dayanan geçerli ve güvenilir bilgi üretme amacı bulunur (Merriam, 2018, s.199). Araştırma sonuçlarının inandırıcılığı için geçerlik ve güvenilirlik kavramları yaygın olarak kullanılan ölçütlerdir. Geçerlik ve güvenilirlik, herhangi bir araştırmanın başından sonuna kadar tüm aşamalarını ilgilendiren önemli bir kaygıdır (Merriam, 2018, s.199). Nitel araştırmalarda özellikle güvenilirlik konusunda nicel araştırmalarda olduğu gibi yöntem ve testlerin olmamasına karşın birtakım önlemler bulunmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2021, s. 281). Nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenilirlikte kullanılan farklı perspektif ve kavramlar bulunmaktadır. Guba ve Lincoln (1982, s. 246) nitel araştırmalarda kullanılan geçerlik ve güvenilirlik kavramlarını aşağıda sunulduğu biçimde inandırıcılık, aktarılabilirlik, güvenilirlik, onaylanabilirlik olmak üzere dört başlık altında ele almıştır.

1. İnandırıcılık (iç geçerlik): Araştırma verilerinin dış dünyadaki gerçekliğe benzerliği ile ilgilidir. İnandırıcılığın sağlanması için uzun süreli katılım, sürekli gözlem, akran bilgilendirmesi, üçgenleme (çeşitleme), referans yeterlilik materyalleri ve katılımcı kontrolleri gereklidir (Guba ve Lincoln, 1982, s. 247). Bu bağlamda öğrencilerle dört farklı günde klinik görüşme oturumları düzenlenerek uzun süreli etkileşim ve sürekli gözlem sağlanmıştır. Öğrencilerin bakış açılarını yorumlayabilmek için klinik görüşme formlarına ek olarak video kayıtlar gibi birden çok veri kaynağı kullanılarak veri kaybının önüne geçilmiştir. Merriam'a (2018, s.210) göre inandırıcılığı sağlamanın bir diğer stratejisi uzman incelemesidir. Problemlerin seçim aşamasından, kodların ve temaların uygunluğunu kontrol etme, bulguların sunumu ve raporlanması aşamasına kadar

araştırmanın her aşamasında matematik eğitimi uzmanının görüş ve önerilere alınarak araştırma tamamlanmıştır.

2. Aktarılabilirlik (dış geçerlilik): Aktarılabilirlik, araştırma sonuçlarının farklı durumlara ne derece uygulanabileceği ile ilgilidir. Nitel araştırmalarda istatistiksel anlamda genellemenin yapılması mümkün olmasa da bu durum nitel çalışmaların bilgi sağlamadığı anlamına gelmez (Merriam, 2018, s.216). Guba ve Lincoln (1982, s. 247) aktarılabilirliğin sağlanabilmesi için amaçlı örnekleme kullanmayı ve kapsamlı betimleme yapmayı önermiştir. Bu bağlamda aktarılabilirliğin sağlanması için katılımcılar ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenimine devam birinci sınıf öğrencilerinden olmaları ve lisans düzeyinde geometri dersi almamış olmaları ölçütlerine göre seçilmiştir. Ek olarak veri toplama araçları olan klinik görüşme formları, video kayıtları, araştırma ortamı, pilot çalışma ve verilen analizi gibi başlıkları ayrıntılı bir şekilde betimlenmiştir.

3. Güvenirlik (tutarlılık): Büyüköztürk vd.'e (2019, s.264) göre nitel araştırmalarda araştırmacılar katılımcıların davranış tutarlılığına bakmak yerine araştırma sürecinde yapılan gözlemlerin doğruluğuna odaklanırlar. Nitel bir araştırmada güvenirliliğinin sağlanması için yapılması gerekenler ses-görüntü kaydının tutulması, katılımcı alıntılarının olduğu gibi verilmesi, uzman denetlemesinin yapılması olarak söylenebilir (Büyüköztürk vd., 2019, s.264; Merriam, 2018, s.212). Başka bir deyişle araştırma deseni, katılımcılar, veri toplama araçları araştırma ortamı ve veri analizi gibi araştırma yöntemi başlığı altında yer alan alt başlıklar birbirleri ile tutarlı olacak şekilde açıklanmalıdır. Bu bağlamda araştırmanın her aşamasında uzman görüşü alınmış, araştırma yöntem aşamaları ayrıntılı şekilde açıklanarak araştırma açıkça ortaya konulmuştur.

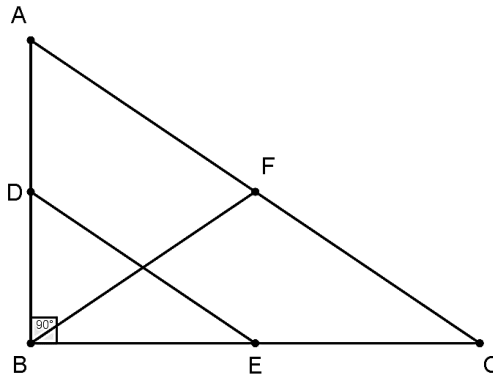
4. Onaylanabilirlik (teyit edilebilirlik): Araştırma sonuçlarının gerçeği yansıtması ve araştırmacının öznel yargılarından uzak olması için, araştırmacının nesnel bir yaklaşım benimseyerek olay ve olguları ortaya koyması gerekir (Yıldırım ve Şimşek, 2021, s. 295). Bu bağlamda araştırmaya ilişkin klinik görüşme alıntıları ve klinik görüşme formlarının görüntüleri doğrudan ve üzerinde bir değişiklik yapmadan sunulmuştur. Tüm veri toplama araçlarından elde edilen bulgular, ham verilerle karşılaştırılarak verilen doğru aktarılıp aktarılmadığı teyit edilmiştir. Ayrıca veri toplama araçları, ham veriler, kodlama yapılırken kullanılan belgeler, görüşme dökümlerini içeren raporlar gerektiğinde incelenmek üzere saklanmıştır.

3. BULGULAR

Bu bölümde, araştırma sürecinde klinik görüşmeler ile elde edilen verilerin analizden elde edilen bulgular beş başlık altında sunulmuştur. Bu başlıklar ele alınan çok çözümlü problemler olup bulgular sunulurken öğrencilerin çözüm için çizim ve işlemleri içeren kâğıtlarının görselleri ve gerçekleştirilen görüşmeler doğrudan alıntı olarak verilmiştir.

3.1. Öğrencilerin Kenarortay İçeren Problemde Kullandıkları Çözüm Stratejilerine Yönelik Bulgular

Kenarortay içeren problemde öğrencilerden Şekil 3.1'deki ABC dik üçgeninde, [AB] kenarının orta noktası D, [BC] kenarının orta noktası E ve [AC] kenarının orta noktası F olmak üzere; $|DE|=|BF|$ olduğunu olabildiğince çok şekilde göstermeleri istenilmiştir.



Şekil 3.1. Kenarortay içeren problem

Tablo 3.1'de öğrencilerin kenarortay içeren problemde kullandıkları başlangıç stratejileri sunulmuştur.

Tablo 3.1. Öğrencilerin kenarortay içeren problemdeki başlangıç stratejileri

Başlangıç Stratejisi	Öğrenci
- Verilen özelliklere göre açılar ve kenarlar arasında ilişki arama	Ö1
- [DE] ve [BF] kesişimini ağırlık merkezi kabul etme	Ö2, Ö8
- [BF]'nı açıortay kabul etme	Ö3
- Kenarortay özelliği	Ö4
- [DF] ve [FE] çizme	Ö5*
- Benzerlik ilişkisi arama	Ö6, Ö7

* Doğru çözüme ulaşan öğrenciyi gösterir.

Tablo 3.1 incelendiğinde bazı öğrencileri açı ve kenar uzunluklarından yararlanarak benzerlik ilişkisi aradıkları, bazı öğrencilerin problemde verilen [DE] ve [BF]'nin kesişimlerinin ağırlık merkezi olduğunu düşündükleri, bazı öğrencilerin ise kenarortay ve açıortay özellikleriyle ilgili stratejiler denedikleri görülmektedir. Başlangıç stratejileri kapsamında doğru çözüme ulaşan öğrencinin ise [DF] ve [FE] çizmeye odaklandığı görülmektedir.

Ö1 başlangıç stratejisi olarak problemde verilen özelliklere göre açı ölçüleri ve kenar uzunlukları arasında ilişki arayarak problemde istenilen durumu göstermeyi denemiştir. Sonuçsuz kalan bu problem çözme sürecinde Ö1 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.1'de sunulmuştur.

Ö1: İlk olarak x (ACB açısı) derim. (BAC açısını $90-x$ olarak yazdı). AC ve DE paralel midir bilmiyorum

A: Paralel olabilir mi?

Ö1: Paralel olsa DEB açısına x derdim. Ama buraya y diyeceğim.

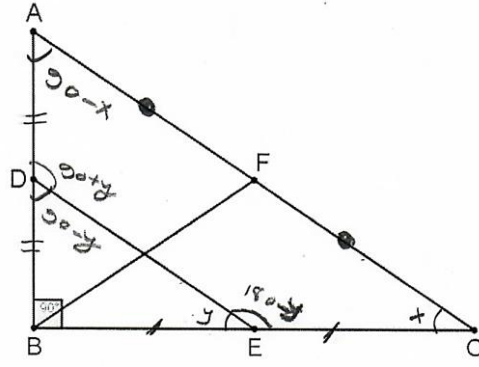
Ö1: (FE doğru parçasını düşünerek) Bunu indirsem 90 gelir mi?... Gelmez

A: 90 ise nedenini söylememiz gerekir.

Ö1: DEC açısı $180-y$ olur. Burada yalnızca üçgenin iç açıları 180 oldu. Dışarıdan bir şey mi çizmeliyiz?

A: Ne çizilebilir?

Ö1: (Düşündü) Dışarıdan bir şey çizemeyiz



Görsel 3.1. Ö1'in başlangıç stratejisi

Başlangıç stratejileri kapsamında Ö2 ve Ö8, DE ve BF doğru parçalarının kesişiminin ağırlık merkezi olduğunu düşünmüşler, problemde istenilen durumu göstermeyi denemiştir. Ö8'in problem çözme sürecindeki görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.2'de sunulmuştur.

Ö8: Acaba bu kesişim ağırlık noktası mıydı? (DE ve BF kesişimi)

A: Ağırlık noktası neydi?

Ö8: a-2a oranı vardı.

A: Hangi durumlarda ağırlık merkezi oluşuyordu.

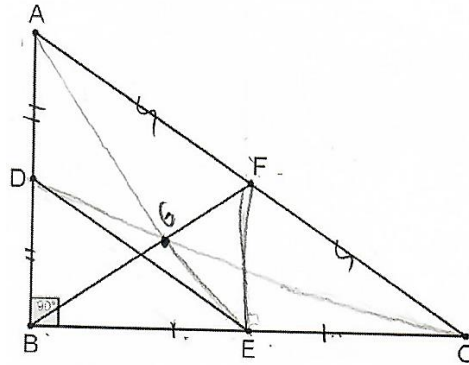
Ö8: Kenarlardan orta noktalarının birleşiminden oluşuyordu.

A: Mesela burada DE ve BF dediğin şeylerden biri mi?

Ö8: Evet kenarortay olacak

A: DE ve BF arasında fark var mı?

Ö8: BF kenarortay olur, mesela A ile E birleşince de kenarortay olur



Görsel 3.2. Ö8'in başlangıç stratejisi

Ö3 başlangıç stratejisi olarak BF doğru parçasının açıortay olduğunu belirtmiş ve problemde istenilen durumu göstermeyi denemiştir. Ö3'ün problem çözme sürecindeki görüşmenin bir kesiti aşağıda ve yaptığı çizim ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.3'de sunulmuştur.

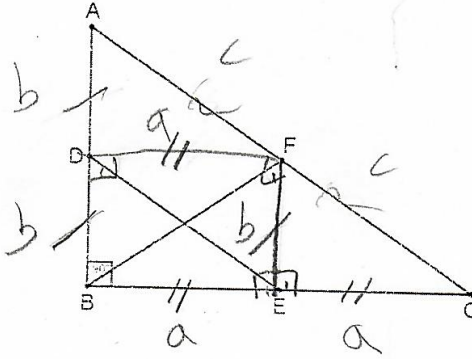
Ö3: BF, 90 derecelik açıyı 45-45 olarak ayırır.

A: Neden 45-45 olarak ayrılacağını düşündün.

Ö3: Kenarlar eşit olduğu için ($|AF|=|FC|$)

A: Bir açının 45-45 gibi iki eş açığa ayrılması için neler gerekiyor?

Ö3: 2a'nın 2b ye eşit olması gerekiyordu.



Görsel 3.3. Ö3'ün başlangıç stratejisi

Ö4 başlangıç stratejisi olarak “muhteşem üçlü” olarak isimlendirdiği kenarortay özelliğini problemde istenilen durumu göstermeyi denemiştir. Ö4'ün problem çözme sürecindeki görüşmenin bir kesiti aşağıda sunulmuştur.

Ö4: E orta noktalar olduğu için aklıma ilk olarak “muhteşem üçlü” geldi.

A: Muhteşem üçlü nedir?

Ö4: Dikten inilen ve eşit parçaya ayrılan şey.

A: Peki buradan ne elde edebiliriz?

Ö4: Ne elde ederiz bilmiyorum ama aklıma ilk bu geldi.

Ö6 ve Ö7 ise başlangıç stratejisi olarak üçgenler arasında benzerlik ilişkisi arayarak problemde istenilen durumu göstermeyi denemiştir. Ö7'nin problem çözme sürecindeki görüşmenin bir kesiti aşağıda ve yaptığı çizim ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.4'de sunulmuştur.

Ö7: Görünüş olarak direkt aklıma benzerlik kurmak geldi, dik üçgen olduğu için açılardan bir ilişki kurabilirim. DEB ile ACB açısı eşit olur?

A: Neden böyle bir şey olur?

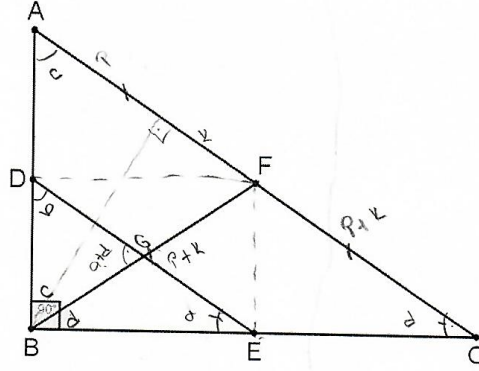
Ö7: DE, AC ye paralel olduğu için

A: Paralel olduğuna nasıl karar verdin?

Ö7: Dik açıdan yola çıktım, aslında biraz ezberci düşünmüş olabilirim

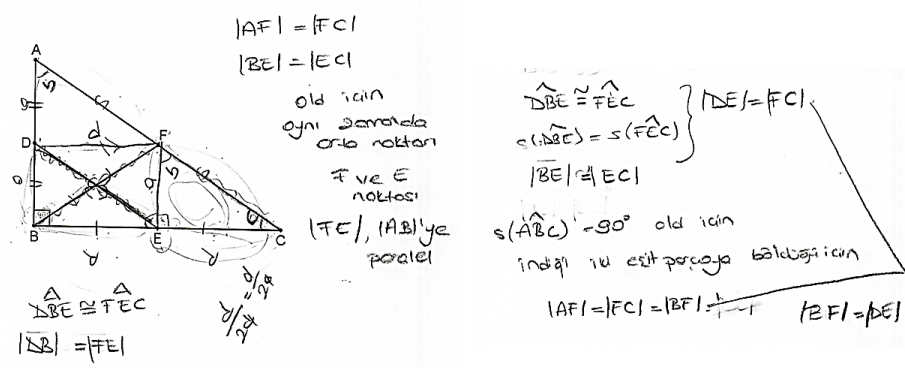
A: Doğrudan bu iki doğru parçasına paralel dememiz doğru olur mu?

Ö7: (Bir süre düşündü) Burada aslında muhteşem üçlü diye kodladığımız, dik üçgenden inen orta nokta olduğunu söylüyordu soru. Muhteşem üçlü dediğimiz şeyden dolayı BF, AF ve FC uzunlukları birbirine eşit olur.



Görsel 3.4. Ö7'nin başlangıç stratejisi

Başlangıç stratejileri kapsamında sadece Ö5'nin doğru çözüme ulaştığı saptanmıştır. Öğrenci DF ve EF doğru parçalarını çizmiş kenarortay özelliklerini ve DBE-FEC üçgenlerinin eşliğinden yararlanarak problemde istenilen durumu göstermiştir. Ö5'in problem çözme sürecindeki yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.5'de sunulmuştur.



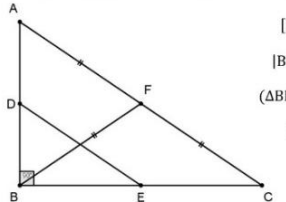
Görsel 3.5. Ö5'nin başlangıç stratejisi kapsamında çözümü

Öğrencilerin kullandıkları başlangıç stratejilerinin ardından Şekil 3.2'de kenarortay içeren probleme ait çözüm gruplarındaki stratejileri ile çözüm gruplarında olmayan ve doğru çözüme ulaşmayan stratejiler incelenmiştir.

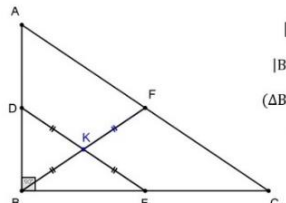
Kenarortay İçeren Problem

1. Çözüm Grubu

Benzer üçgenlerden yararlanma

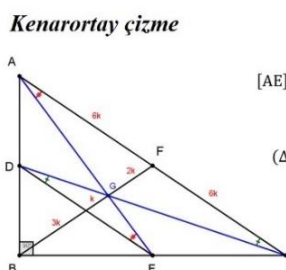


[BF] kenarortay
 $|BF| = |AF| = |FC|$
 $(\triangle BDE) \sim (\triangle BAC) (1:2)$
 $2|DE| = |AC|$
 $|BF| = |DE|$



[BK] kenarortay
 $|BK| = |DK| = |KE|$
 $(\triangle BDK) \sim (\triangle BAF) (1:2)$
 $2|DK| = |AF|$
 $|BF| = |DE|$

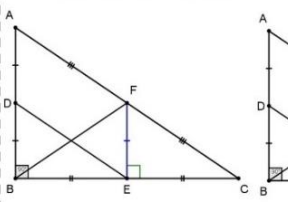
Kenarortay çizme



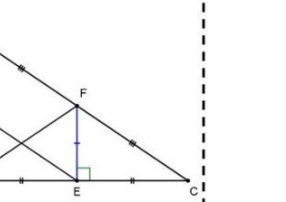
[AE], [BF] ve [DC] kenarortay
 $|BF| = |AF| = |FC|$
 $(\triangle DEK) \sim (\triangle CAG) (1:2)$
 $|DE| = 6k$
 $|BF| = |DE|$

2. Çözüm Grubu

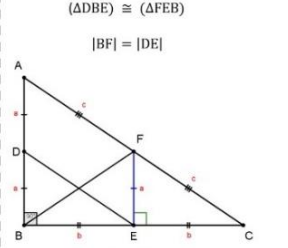
FE doğru parçasını çizme



$(\triangle DBE) \cong (\triangle FEB)$
 $|BF| = |DE|$

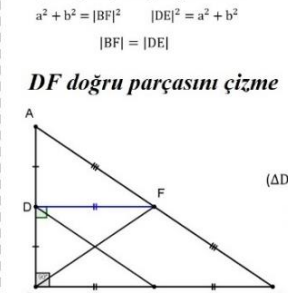


$(\triangle DBE) \cong (\triangle FEC)$
 $|BF| = |DE|$

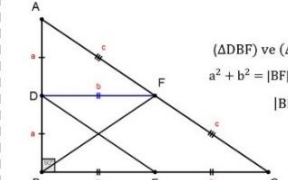


$(\triangle DBE)$ ve $(\triangle FEB)$ Pisagor teoremi
 $a^2 + b^2 = |BF|^2$ $|DE|^2 = a^2 + b^2$
 $|BF| = |DE|$

DF doğru parçasını çizme



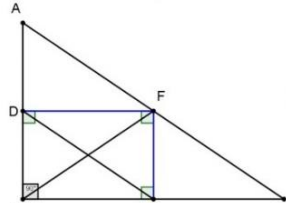
$(\triangle DFB) \cong (\triangle BED)$
 $|BF| = |DE|$



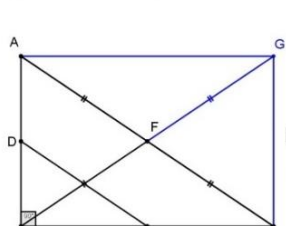
$(\triangle DFB)$ ve $(\triangle DBE)$ Pisagor teoremi
 $a^2 + b^2 = |BF|^2$ $|DE|^2 = a^2 + b^2$
 $|BF| = |DE|$

3. Çözüm Grubu

Dikdörtgen oluşturma



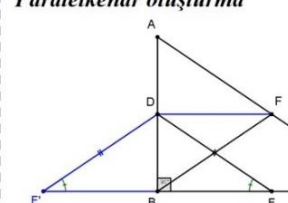
BEFD dikdörtgen
 $[BF]$ ve $[DE]$ köşegen
 $|BF| = |DE|$



ABCG dikdörtgen
 $[BG]$ ve $[AC]$ köşegen
 $|AF| = |FC| = |BF| = |FG|$
 $(\triangle BDE) \sim (\triangle BAC) (1:2)$
 $|BF| = |DE|$

4. Çözüm Grubu

Paralelkenar oluşturma



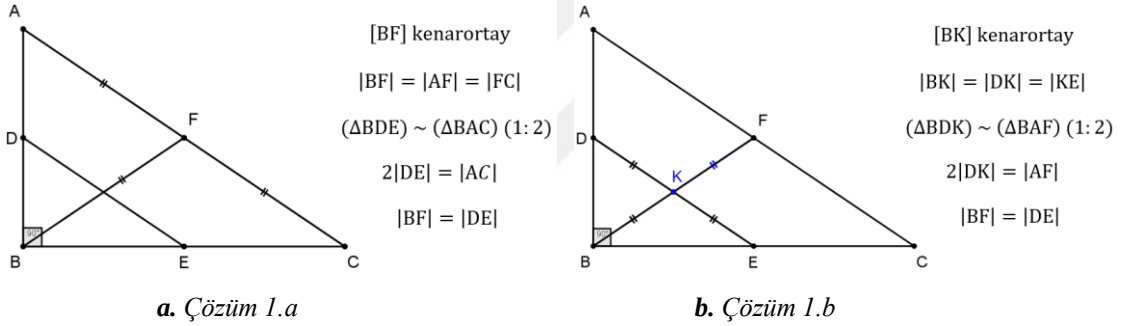
$|BF| = |E'D|$
 $|DF| = |E'B|$ } Paralelkenar
 $|DE| = |E'D| \rightarrow$ Simetri
 $|BF| = |DE|$

Şekil 3.2. Kenarortay içeren probleme ait çözüm grupları

3.1.1. 1. Çözüm grubu stratejileri

3.1.1.1. Benzer üçgenlerden yararlanma

Kenarortay içeren problemin ilk çözüm grubu stratejilerinden biri kenarortay özelliğini kullanma stratejisidir. Bu stratejiye ait 2 farklı çözüm bulunmaktadır. İlk çözümde dik açıdan inilen BF kenarortay uzunluğunun AF ve FC doğru parçalarının uzunluklarına eşit olduğu gösterilip, DBE-ABC üçgenlerinin benzerliğinden yararlanılmaktadır (Bkz. Şekil 3.3.a). İkinci çözümde ise dik açıdan inilen kenarortay üzerinden alınan BK uzunluğunun DK ve KE doğru parçalarının uzunluklarına eşit olduğu gösterilip BDK-BAF üçgenlerinin benzerliğinden yararlanılmaktadır (Bkz. Şekil 3.3.b). Çözüm grubunun bu stratejisi kenarortay özelliği ve üçgenlerde benzerliğin uygulanmasına dayanmaktadır (Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu hipotenüsün uzunluğunun yarısı kadardır).



Şekil 3.3. Benzer üçgenlerden yararlanma stratejisinin çözümleri

Öğrencilerden Ö1, Ö2, Ö6 ve Ö7 çözüm 1.a'yı uygulayarak doğru çözüme ulaşmışlardır. Çözüm 1.b'yi uygulayarak doğru çözüme ulaşan öğrenci olmamıştır. Problem çözme sürecinde çözüm 1.a'yı uygulayan Ö7 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.6'da sunulmuştur.

Ö7: Benzerlik kullansak

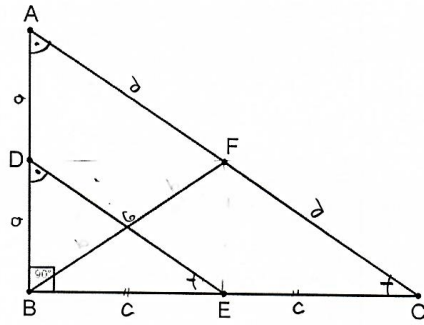
A: Nasıl kullanabiliriz?

Ö7: $DE \parallel AC$ demiştik, buradan bir benzerlik oluşturabiliriz. Ayrıca kenarortaydan AF, FC ve BF'nin birbirine eşit olduğunu biliyoruz.

A: Buradan nasıl bir benzerlik oluşturabiliriz?

Ö7: $BD/BA = BE/BC$ olur, bu oran DE/AC ye eşit olur.

A: Bu söylediklerini yazarak gösterebilir misin?

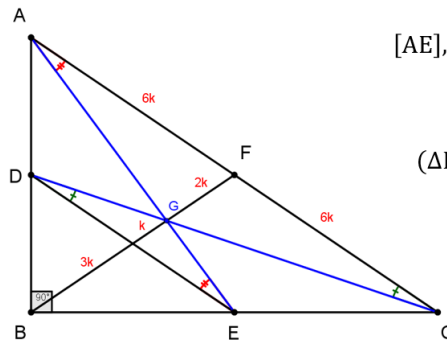


- $\triangle ABC$ ve $\triangle DBE$ benzerdir. (A.A.A.)
- $\frac{|BD|}{|BA|} = \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|AC|} = \frac{1}{2}$ $|AC| = 2d$ ise $|DE| = d$ dir.
- $|BF| = |AF| = |FC| = d$
- $|BF| = |DE| = d$

Görsel 3.6. Ö7'nin kenarortay özelliğini kullanma (çözüm 1.a) stratejisinin çözümü

3.1.1.2. Kenarortay çizme

Kenarortay içeren problemin ilk çözüm grubu stratejilerinden diğeri kenarortay çizme stratejisidir. Bu stratejide A ve C köşelerinden çizilen kenarortaylar ile ağırlık merkezi bulunup DEG-CAG üçgenlerinin benzerliğinden yararlanarak (Bkz. Şekil 3.4) problemde istenilen durumun gösterilmesi sağlanmıştır. Çözüm grubunun bu stratejisi ağırlık merkezi özelliklerine ve üçgenlerde A.A.A. benzerliğinin uygulanmasına dayanmaktadır.



[AE], [BF] ve [DC] kenarortay

$$|BF| = |AF| = |FC|$$

$$(\triangle DEK) \sim (\triangle CAG) (1:2)$$

$$|DE| = 6k$$

$$|BF| = |DE|$$

Şekil 3.4. Kenarortay çizme stratejisinin çözümü

Öğrencilerden sadece Ö4'ün bu stratejiyi uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö4 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.7'de sunulmuştur.

Ö4: (AE kenarortayını çizdi)

A: Burada AE nedir?

Ö4: Kenarortay

A: Kenarortay bize ne sağlar?

...

Ö4: (DC doğru parçasını çiziyor.) BF kenarortayı üzerinde “312” kuralı var.

A: Bu kural nedir?

Ö4: Kuralın nedenini hatırlamıyorum fakat ağırlık merkezi vardı, DE gibi bir doğru parçası vardı ve 312 olarak ayrılmıştı. (BF’yi 3b, b ve 2b olarak ayırdı)

A: Bu kuraldan sonra ne yapılabilir?

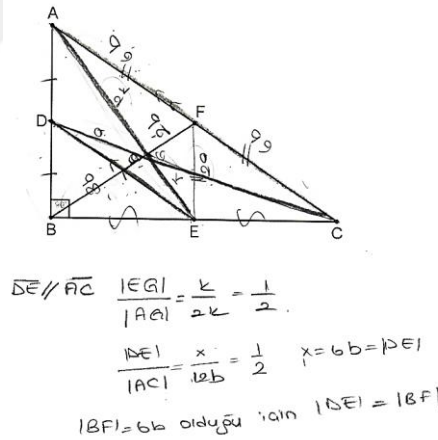
Ö4: BF 6b oldu, AF ve FC de 6b olur.

A: Bizim neyi göstermemiz isteniyordu.

Ö4: DE ve BF’nin eşit olduğu, bir yerden Pisagor yapabilirim belki öyle düşündüm.

A: Nasıl yapılabilir? DE uzunluğunu bulmamız gerekiyordu.

Ö4: (Pisagor teoremini kullanmadan, benzerlikten yararlanarak |DE|’nin 6b olduğunu gösterdi.)



Görsel 3.7. Ö4’ün kenarortay çizme stratejisine ait çözümü

Öğrencilerden Ö5’in ise kenarortay çizme stratejisini uyguladığı ancak çözüme ulaşamadığı görülmüştür. Öğrenci AE ve DC kenarortaylarını çizmiş ancak düşüncesini iletilemediği için problemde istenilen duruma ulaşamamıştır. Problem çözme sürecinde Ö5 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.8’de sunulmuştur.

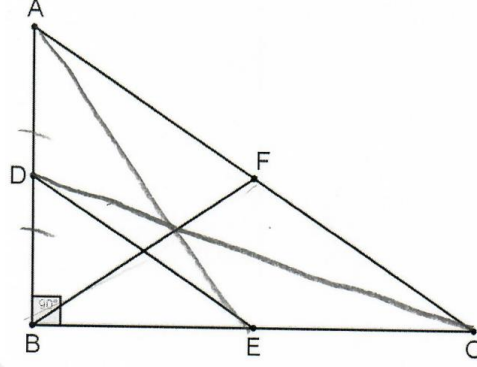
Ö5: D, AB’nin orta noktası olduğu için C ile birleştirmek istedim.

A: Neden böyle bir çizim yaptın?

Ö5: Bende bilmiyorum, bir anda orta nokta diye çizmek istedim.

A: Buradan ne elde edebiliriz? Bu çizdiğin CD bu üçgenin neyi olur?

Ö5: Açıortayı...yok kenarortayı (Biraz düşündükten sonra) buradan bir çözüme ulaşamayacağım.

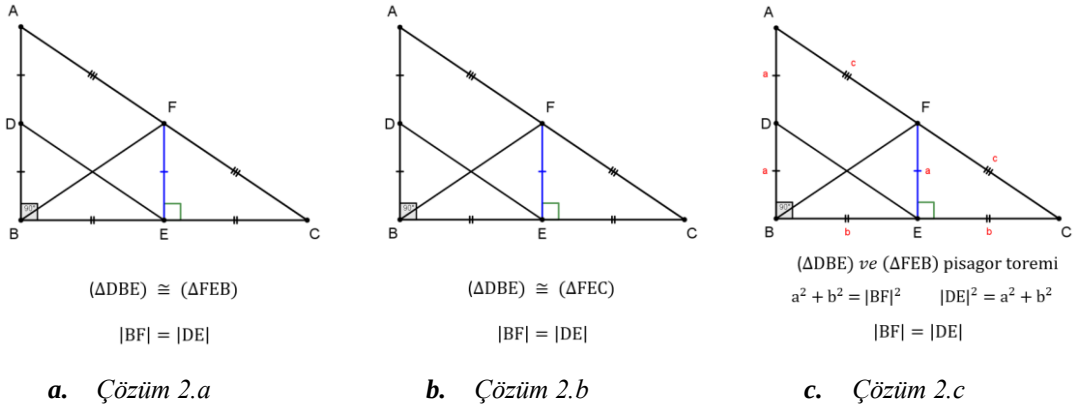


Görsel 3.8. Ö5'in çözüm için denediği strateji

3.1.2. 2. Çözüm grubu stratejileri

3.1.2.1. FE doğru parçasını çizme

Kenarortay içeren problemin ikinci çözüm grubu stratejilerinden biri FE doğru parçasını çizme stratejisidir. Bu stratejiye ait 3 farklı çözüm bulunmaktadır. İlk çözümde FE doğru parçası çizilip DBE-FEB üçgenlerinin eşliğinden yararlanarak (Bkz. Şekil 3.5.a), ikinci çözümde FE doğru parçası çizilip DBE-FEC üçgenlerinin eşliğinden yararlanarak (Bkz. Şekil 3.5.b) ve üçüncü çözümde FE doğru parçası çizilip DBE-FEB üçgenlerinde Pisagor teoreminden yararlanarak (Bkz. Şekil 3.5.c) problemde istenilen durumun 3 farklı şekilde gösterilmesi sağlanmıştır. Çözüm grubunun bu stratejisi üçgenlerde K.A.K. eşliğinin veya Pisagor teoreminin uygulanmasına dayanmaktadır.



Şekil 3.5. FE doğru parçasını çizme stratejisinin çözümleri

Öğrencilerden Ö2, Ö3, Ö4, Ö5 ve Ö8'in çözüm 2.a'yı uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö5 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.9'da sunulmuştur.

Ö5: DF veya FE çizdiğimde farklı üçgenlerin benzerliğini kullanabiliyorum.

A: FE'yi çizdin, burada nasıl bir benzerlik kullanabilirsin?

Ö5: FE, AD ve DB birbirine eş oluyor.

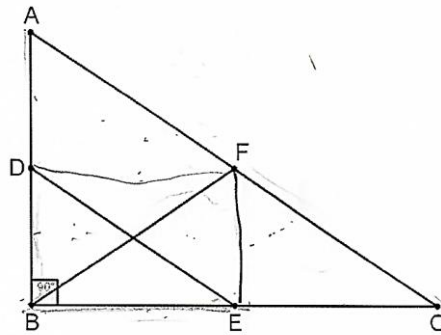
A: Problemde bizden istenilen durumu neydi?

Ö5: BF ve DE'nin uzunluklarının eş olduğunu göstermek.

A: Bu durumu nasıl gösterebiliriz?

Ö5: DBE ve FEB üçgeninde 2 kenarları eşit aralarındaki açı 90 derece bu yüzden 3. kenarları eş olur.

A: Bu söylediklerini yazarak nasıl ifade edebilirsin?



$$\begin{aligned} \triangle DBE &\cong \triangle FEB \\ \angle DBE &= \angle FEB \\ |DB| &= |FE| \\ BE &\text{ kenarı ortak} \\ |DE| &= |BF| \end{aligned}$$

Görsel 3.9. Ö5'in FE doğru parçasını çizme stratejisine (çözüm 2.a) ait çözümünü

Öğrencilerden Ö5 ve Ö6'nın çözüm 2.b'yı uygulayarak doğru çözüme ulaşmışlardır. Problem çözme sürecinde Ö6 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.10'da sunulmuştur.

Ö6: DBE ile FEB de birbirine eş olur.

A: Bunu nasıl söyledik?

Ö6: İki kenarları aynı, açıları aynı

A: Hangi kenarlar arasındaki açı aynı olur? FEC açısına 90 diyebilir miyiz?

Ö6: E den F ye dikme çizdik bu yüzden 90'dır

A: Çizdiğin bu dik her zaman F noktasından mı geçer?

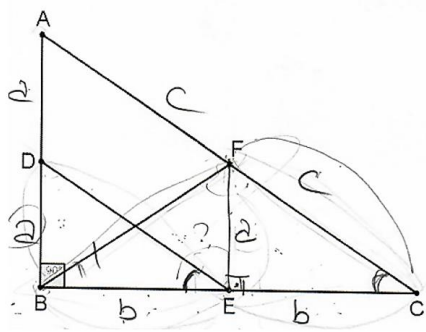
Ö6: Şimdi ona bakacağım. Kenarları birbirinin aynısı oldu bu yüzden 90 derece olacak mecburen.

A: Benzerlik kullanmış oldun.

Ö6: DBE ve FEC birbirine eş oldu.

A: Buradan ne elde etmiş olduk.

Ö6: $BF=c=DE$ olur



$\triangle DBE \sim \triangle FEC \sim \triangle FEB$ estir.
 $|BF|=c \quad |DE|=c$
 $|BF|=c=|DE|$

Görsel 3.10. Ö6'nın FE doğru parçasını çizme stratejisine (çözüm 2.b) ait çözümü

Öğrencilerden Ö1, Ö2, Ö3, Ö4 ve Ö7'nin ise çözüm 2.c'yi uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö2 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.11'de sunulmuştur.

Ö2: Benzerlik yerine Pisagor teoremi uygulamak istiyorum.

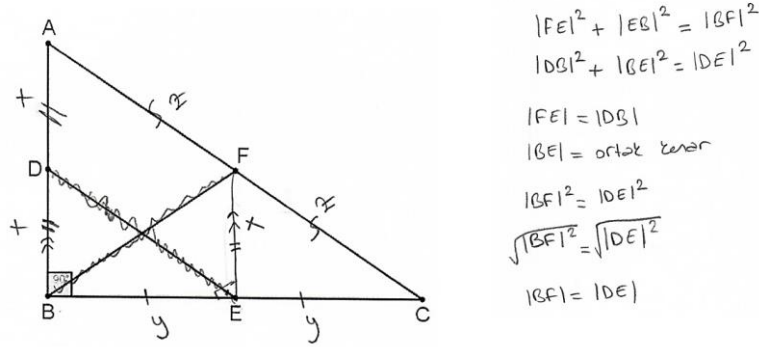
A: Nasıl yapılabilir?

Ö2: FE'yi çizerim. $FE=x$ olur. (Kenar uzunluklarını harflendirdi.)

A: Pisagor uygulamak istemiştin. Hangi üçgeni veya üçgenleri kullanacaksın?

Ö2: DBE ve FEB üçgenlerini kullanacağım.

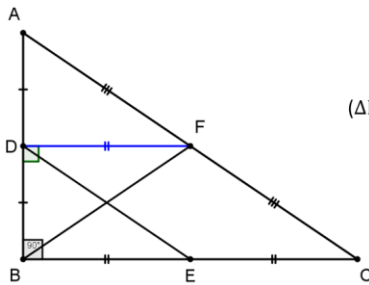
A: İşlemlerini yazarak gösterebilir misin?



Görsel 3.11. Ö2'nin FE doğru parçasını çizme stratejisine (çözüm 2.c) ait çözümü

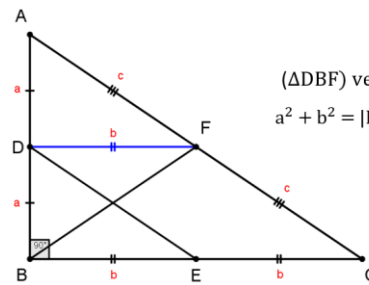
3.1.2.2. DF doğru parçasını çizme

Kenarortay içeren problemin ikinci çözüm grubu stratejilerinden diğeri DF doğru parçasını çizme stratejisidir. Bu stratejiye ait 2 farklı çözüm bulunmaktadır. İlk çözümde DF doğru parçası çizilip DFB-BED üçgenlerinin eşliğinden yararlanarak (Bkz. Şekil 3.6.a), ikinci çözümde ise DF doğru parçası çizilip DFB-BED üçgenlerinde Pisagor teoreminden yararlanarak (Bkz. Şekil 3.6.b) problemde istenilen durumun 2 farklı şekilde gösterilmesi sağlanmıştır. Çözüm grubunun bu stratejisi üçgenlerde K.A.K. eşliğinin veya Pisagor teoreminin uygulanmasına dayanmaktadır.



a. Çözüm 2.d

$$(\triangle DFB) \cong (\triangle BED)$$
$$|BF| = |DE|$$

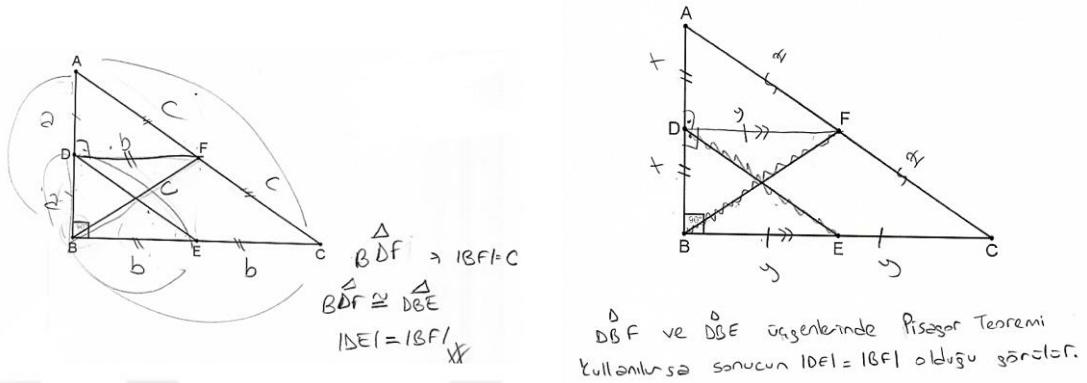


b. Çözüm 2.e

$$(\triangle DFB) \text{ ve } (\triangle BED) \text{ pisagor toremi}$$
$$a^2 + b^2 = |BF|^2 \quad |DE|^2 = a^2 + b^2$$
$$|BF| = |DE|$$

Şekil 3.6. DF doğru parçasını çizme stratejisinin çözümleri

Öğrencilerden sadece Ö6'nın çözüm 2.d'yi ve Ö2'nin çözüm 2.e'yi uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde öğrencilerin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.12'de sunulmuştur.



a. Ö6'ya (çözüm 2.d) ait çözüm

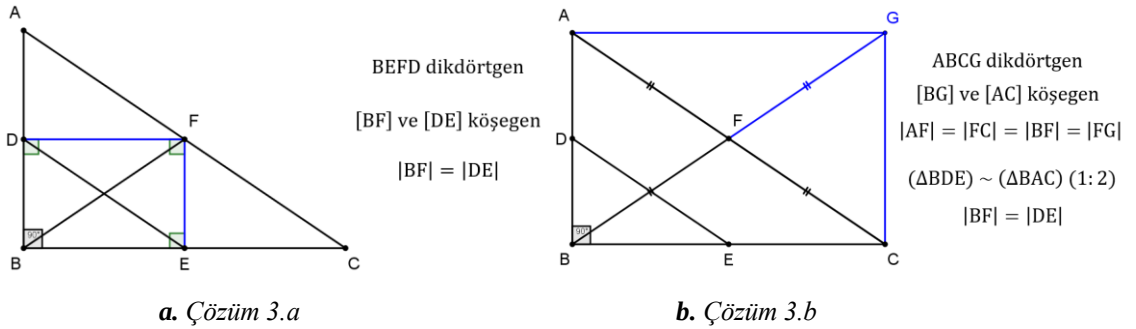
b. Ö2'ye (çözüm 2.e) ait çözüm

Görsel 3.12. Öğrencilerin DF doğru parçasını çizme stratejisine ait çözümleri

3.1.3. 3. Çözüm grubu stratejileri

3.1.3.1. Dikdörtgen oluşturma

Kenarortay içeren problemin üçüncü çözüm grubu dikdörtgen oluşturma stratejisidir. Bu stratejiye ait 2 farklı çözüm bulunmaktadır. İlk çözümde DF ve FE doğru parçalarının çizilerek (Bkz. Şekil 3.7.a), ikinci çözümde ise A köşesinden BC kenarına ve C köşesinden AB kenarına paralel doğrular çizilerek (Bkz. Şekil 3.7.b) dikdörtgen oluşturulması esastır. Böylece dikdörtgeninin köşegen uzunluklarının eşit olduğundan ve köşegenlerin birbirlerini ortalaması özelliklerinden yararlanarak problemde istenilen durumun 2 farklı şekilde gösterilmesi sağlanmıştır. Bu çözüm grubu dikdörtgen inşasına ve dikdörtgen özelliklerinin kullanılmasına dayanmaktadır.

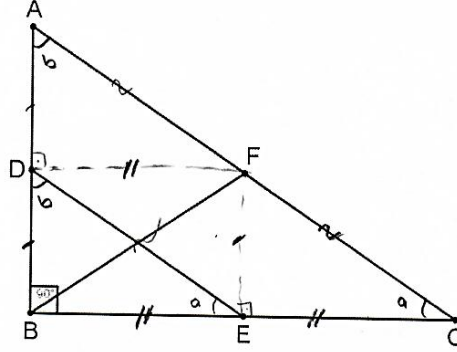


a. Çözüm 3.a

b. Çözüm 3.b

Şekil 3.7. Dikdörtgen oluşturma stratejisinin çözümleri

Öğrencilerden Ö3, Ö5 ve Ö7 çözüm 3.a'yı uygulayarak doğru çözüme ulaşmışlardır. Problem çözme sürecinde Ö7'nin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.13'de sunulmuştur.



- $|BF| = |AF| = |FC|$ (Kenarortay Özelliği)
- $\hat{AFB}$ 'nin ikizkenar üçgen olduğuna karar verdik
- ikizkenar üçgenin özelliğini kullanarak $|AD| = |DB|$ olduğundan $\overline{FD} \perp \overline{AB}$ olduğunu ifade ettik. $\overline{FD} \perp \overline{AB}$ olduğu için $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$, Benzer şekilde $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$
- DFEB bir dikdörtgendir. Dikdörtgende köşegen uzunluklarının eşit olduğundan $|DE| = |BF|$ dir.

Görsel 3.13. Ö7'nin dikdörtgen oluşturma stratejisine (çözüm 3.a) ait çözümü

Öğrencilerden Ö5 ve Ö6 ise çözüm 3.b'yi uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö6 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.14'de sunulmuştur.

Ö6: Dörtgene tamamlamaya çalışsam. (Dikdörtgene tamamlayıp, BK'yı çizdi)

A: BK, her zaman F den mi geçer? Neden?

Ö6: Evet, AF ve FC eşit ayrılmış. Dikdörtgende köşegenler birbirini eşit ayırır.

A: Neler birbirine eşit oldu?

Ö6: (kenarları, açıları gösterdi)

A: Buradan ne elde edebiliriz?

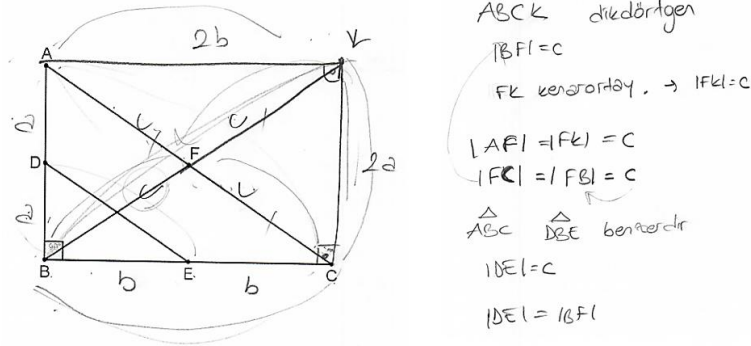
Ö6: Dikdörtgende köşegenler birbirini eşit ayırır, FK c olur.

A: Her zaman böyle midir?

Ö6: Evet, ayrıca FK kenarortay olduğu içinde söylenebilir.

A: Buradan DE ye nasıl geçiş yapacağız?

Ö6: ABC ve DBE üçgenleri arasında benzerlik uygulayım.



Görsel 3.14.Ö6'nin dikdörtgen oluşturma stratejisine (çözüm 3.b) ait çözümü

Öğrencilerden Ö8'in ise dikdörtgen oluşturma stratejisini uyguladığı ancak çözüme ulaşamadığı görülmüştür. Öğrenci DF ve FE doğru parçalarını çizerek DBEF dikdörtgeninde BF ve DE köşegenlerinin birbirini ortaladığını belirtmiş ancak köşegen uzunluklarının eşit olduğunu belirtmediği için problemde istenilen duruma ulaşamamıştır. Problem çözme sürecinde Ö8 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.15'da sunulmuştur.

Ö8: DF ve FE çizdiğimizde bir dörtgen oluşur. Hatta DBEF dikdörtgen olabilir.

A: Dikdörtgen olduğuna nasıl karar verdin?

Ö8: Burada oluşan 4 üçgen birbirine eşit gibi geliyor.

A: Dikdörtgen olduğunu nasıl gösterebiliriz?

Ö8: FE ve AB paralel olsa FEC açısı da 90 olur.

A: O halde paralel olup olmadığını nasıl gösterebiliriz?

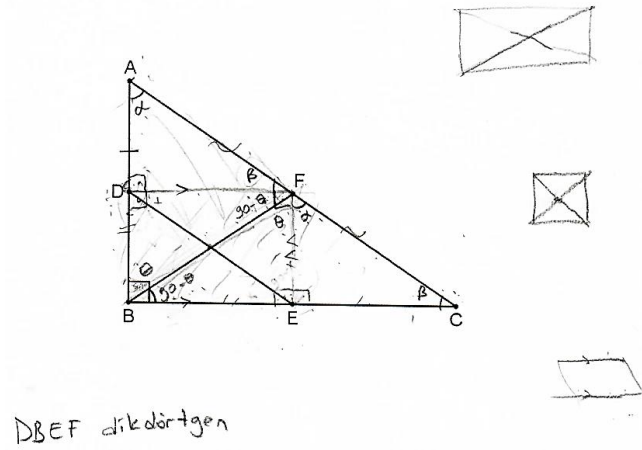
Ö8: F ve E orta noktalar olduğu için FE ve AB paralel oluyordu galiba.

A: Paralellik bize ne sağlar?

Ö8: Açılar 90 olur. DBEF dikdörtgen olur.

A: DBEF dikdörtgen oldu buradan istenilen durumu nasıl gösterebiliriz?

Ö8: Köşegenler birbirini ortalay.

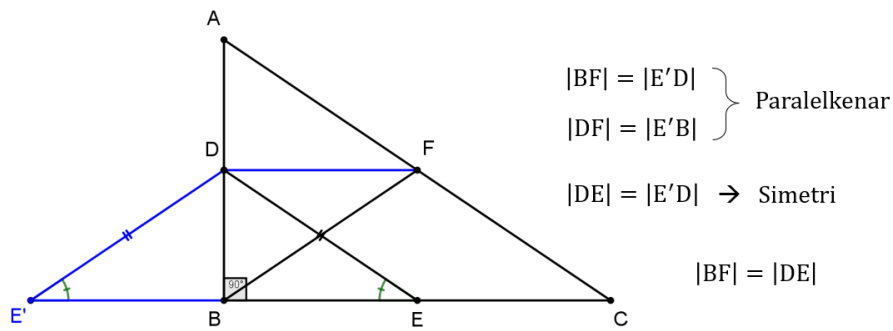


Görsel 3.15. Ö8'in çözüm için denediği strateji

3.1.4. 4. Çözüm grubu stratejileri

3.1.4.1. Paralelkenar oluşturma

Kenarortay içeren problemin dördüncü çözüm grubu paralelkenar oluşturma stratejisidir. Bu stratejide DBE üçgeninin AB kenarına göre simetrisi alınıp DE'B-DEB üçgenlerinde eşliğinin ve DF doğru parçasının çizilmesiyle oluşan paralelkenarın özelliklerinden yararlanarak (Bkz. Şekil 3.8) problemde istenilen durumun gösterilmesi sağlanmıştır. Çözüm grubunun bu stratejisi simetri, eşlik ve paralelkenar özelliklerine dayanmaktadır.



Şekil 3.8. Paralelkenar oluşturma stratejisinin çözümleri

Öğrencilerden sadece Ö5'in bu stratejiyi uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö5 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.16'de sunulmuştur.

Tablo 3.2. Öğrencilerin kenarortay içeren problemdeki toplam çözüm sayıları

Tema	Kod (Strateji)	Çözüm	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4	Ö5	Ö6	Ö7	Ö8
1. Çözüm Grubu	Benzer üçgenlerden yararlanma	1.a	✓	✓				✓	✓	
		1.b								
	Kenarortay çizme	1.c				✓				
2. Çözüm Grubu	FE doğru parçasını çizme	2.a		✓	✓	✓	✓			✓
		2.b					✓	✓		
		2.c	✓	✓	✓	✓			✓	
	DF doğru parçasını çizme	2.d						✓		
		2.e		✓						
3. Çözüm Grubu	Dikdörtgen oluşturma	3.a			✓		✓		✓	
		3.b					✓	✓		
4. Çözüm Grubu	Paralelkenar oluşturma	4					✓			
Toplam Çözüm Sayısı			2	4	3	3	5	4	3	1

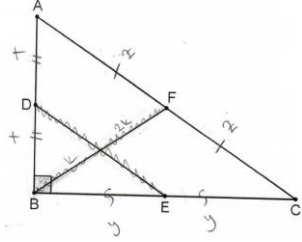
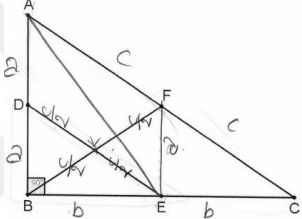
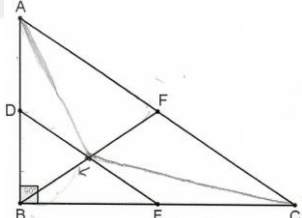
Tablo 3.2 incelendiğinde, öğrencileri en çok doğru çözüme ulaştıran çözüm stratejisinin 2. çözüm grubuna ait olan FE doğru parçasını çizme stratejisi olduğu görülmektedir. Problemde çözüm bulabilmek veya çözüm sayısını artırabilmek için öğrenciler genellikle geçmiş problem çözme deneyimlerini hatırlayamaya çalışarak ek çizimler yapmışlardır. Problemde üçgenin kenarlarının orta noktaları birleştirdikleri ve dik üçgenden dolayı sıklıkla Pisagor teoremini kullanmaya yönelik çizim yaptıkları görülmüştür.

Tablo 3.2 incelendiğinde, öğrencilerin 3. çözüm grubuna ait olan dikdörtgen oluşturma stratejisini kullanarak 5 çözüme ulaştıkları görülmüştür. Öğrenciler problemde dik üçgen verildiğinden dolayı sıklıkla dikdörtgen oluşturmaya çalışmışlardır.

3.1.6. Doğru çözüme ulaşmayan stratejiler

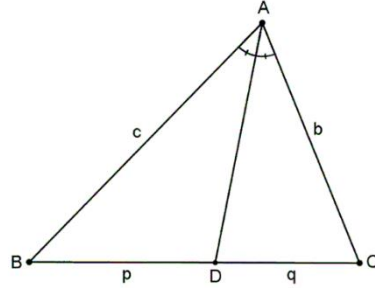
Tablo 3.3’de öğrencilerin kenarortay içeren problemde doğru çözüme ulaşamayan stratejiler, ilgili strateji kapsamında yaptığı çizim ve işlemleri sunulmuştur.

Tablo 3.3. Kenarortay içeren problemde doğru çözüme ulaşmayan stratejiler

Stratejiler	Görüşme Bulguları	Yapılan çizim ve işlemler
DE ve BF doğru parçalarının kesişimi özel bir noktadır	 (Ö2)	Bu çözüm denemesinde Ö1 ve Ö2, DE ve BF doğru parçalarının kesişim noktasının ağırlık merkezi olduğunu düşünmüştür ancak her iki öğrencide DE doğru parçasının kenarortay olmadığını fark ederek yeni stratejiler denemek istemiştir.
AE kenarortayını ve FE doğru parçasını çizme	 (Ö6)	Bu çözüm denemesinde Ö6, AE kenarortayını ve FE doğru parçasını çizerek benzerlik teoremlerini kullanmak istemiştir ancak bu çizimden yararlanarak çözüme ulaşamayacağını düşünerek yeni stratejiler denemek istemiştir.
DE ve BF doğru parçalarının kesişimi ile köşe noktalarını birleştirme	 (Ö8)	Bu çözüm denemesinde Ö8, DE ve BF doğru parçalarının kesişimi ile köşe noktalarını KA ve KC doğru parçaları ile birleştirmiş ancak bu çizimden yararlanarak çözüme ulaşamayacağını düşünerek yeni stratejiler denemek istemiştir.

3.2. Öğrencilerin Açortay İçeren Problemde Kullandıkları Çözüm Stratejilerine Yönelik Bulgular

Açortay içeren problemde öğrencilerden Şekil 3.9'deki ABC üçgeninde BAC açısına ait açortay doğrusunun BC kenarını D noktasında kesen ve $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BD| = p$, $|DC| = q$ olmak üzere; $\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$ olduğunu olabildiğince çok şekilde göstermeleri istenilmiştir.



Şekil 3.9. Açıortay içeren problem

Tablo 3.4’de öğrencileri açıortay içeren problemde kullandıkları başlangıç stratejileri sunulmuştur.

Tablo 3.4. Öğrencilerin açıortay içeren problemdeki başlangıç stratejileri

Başlangıç Stratejisi	Öğrenci
- Özel açı değerlerini deneme	Ö7
- Açıortay kuralı olduğunu kabul etme	Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö8
- Paralelkenara tamamlama	Ö1

Tablo 3.4 incelendiğinde öğrencilerin çoğunluğunun ilk olarak bu problemin bir kural olduğunu düşündüğü, bazı öğrencilerin ise ya özel açı değerlerine odaklandığı ya da üçgeni paralelkenara tamamlayarak başladığı görülmektedir.

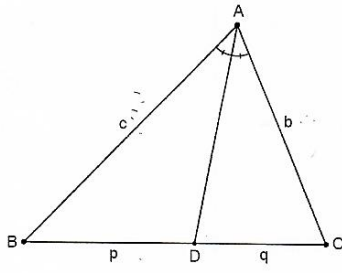
Öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun başlangıç stratejisi olarak istenilen durumun bir teorem olduğunu belirttikleri ancak teoremin neden doğru olduğuna dair bir gerekçe sunamadıkları saptanmıştır. Öğrencilere ilgili teoremin hangi koşullarda geçerli olduğu sorulduğunda;

Ö2: Ben bunu ezberlemişim, nereden geldiğini hiçbir şekilde bilmiyorum.

Ö4: Orasını bilmiyorum, şekli gördüğümde aklıma bu geldi.

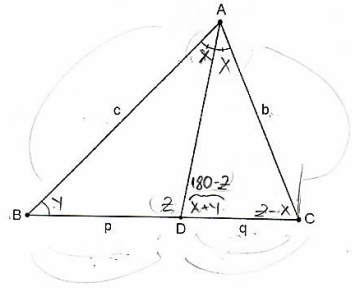
Ö7: Tam olarak hatırlamıyorum acaba 3 açıortay ile mi alakalıydı? Net hatırlamıyorum ama açıortay teoremiydi galiba.

şeklinde cevaplar vermişlerdir. Ayrıca öğrenciler istenilen durum olan $\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$ yerine Görsel 3.17’de sunulduğu gibi ders kitaplarında iç açıortay teoreminin sonucu olarak verilen $\frac{c}{p} = \frac{b}{q}$ eşitliğini yazma eğiliminde bulunmuşlardır.



$$\frac{c}{p} = \frac{b}{q}$$

a. Ö4

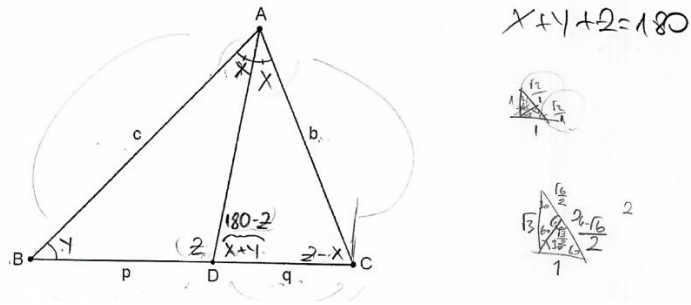


$$\frac{c}{p} = \frac{b}{q}$$

b. Ö6

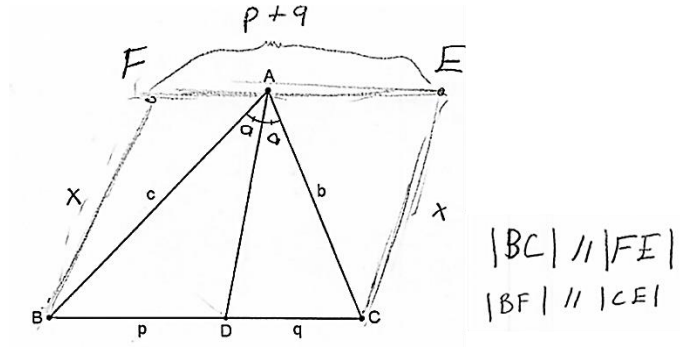
Görsel 3.17. Öğrencilerin başlangıç stratejileri

Diğer başlangıç stratejileri kapsamında Ö7 açılara odaklanmış, açılara özel değerler vererek problemde istenilen durumu göstermeyi denemiştir ancak özel değerlerle genel bir sonuca ulaşamayacağı düşüncesiyle farklı stratejilere geçmiştir. Öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.18’de sunulmuştur.



Görsel 3.18. Ö7’nin başlangıç stratejisi

Ö1 ise başlangıç stratejisi olarak verilen şekli Görsel 3.19’deki gibi paralelkenara tamamlamış ancak doğru çözüme ulaşamamıştır. Ö1’in paralelkenara tamamlarken açığortayı ve özelliklerini kullanmadığı görülmüştür. Ayrıca öğrenci açığortayı göz önünde bulundurarak yeni çizimler yapacağını belirtmiştir.



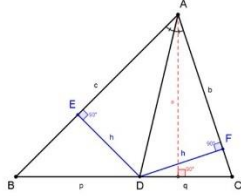
Görsel 3.19. Öl'in başlangıç stratejisi

Öğrencilerin kullandıkları başlangıç stratejilerinin ardından Şekil 3.10'da verilen açıortay içeren probleme ait çözüm gruplarındaki stratejileri ile çözüm gruplarında olmayan ve doğru çözüme ulaşmayan stratejileri incelenmiştir.

Açıortay İçeren Problem

1. Çözüm Grubu

Açıortay ayağından üçgenin kenarlarına dik inme

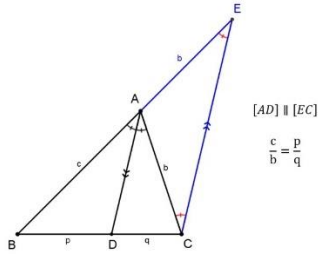


$$\frac{A(\triangle ABD)}{A(\triangle ACD)} = \frac{\frac{c \cdot h}{2}}{\frac{b \cdot h}{2}} = \frac{p \cdot a}{q \cdot a} = \frac{p}{q}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$$

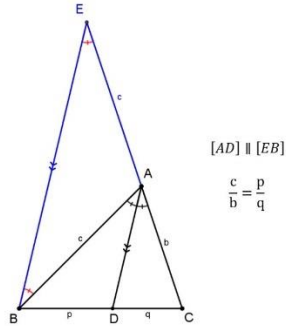
2. Çözüm Grubu

Açıortaya paralel çizme



$$[AD] \parallel [EC]$$

$$\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$$

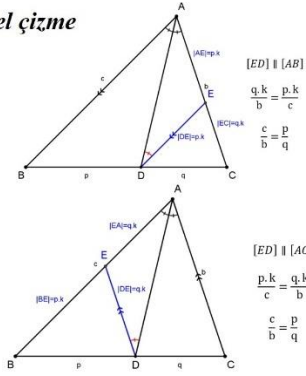


$$[AD] \parallel [EB]$$

$$\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$$

3. Çözüm Grubu

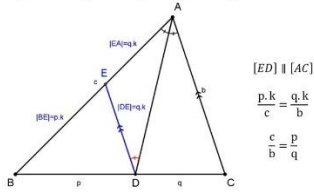
Açıortay ayağından üçgenin kenarlarına paralel çizme



$$[ED] \parallel [AB]$$

$$\frac{q \cdot k}{b} = \frac{p \cdot k}{c}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$$

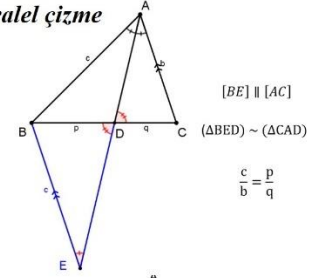


$$[ED] \parallel [AC]$$

$$\frac{p \cdot k}{c} = \frac{q \cdot k}{b}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$$

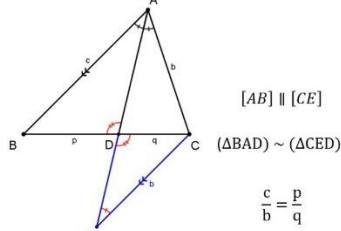
Açıortay uzantısından üçgenin kenarlarına paralel çizme



$$[BE] \parallel [AC]$$

$$(\triangle BED) \sim (\triangle CAD)$$

$$\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$$



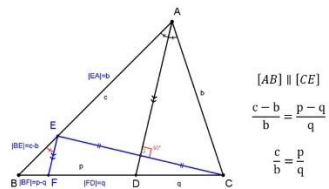
$$[AB] \parallel [CE]$$

$$(\triangle BAD) \sim (\triangle CED)$$

$$\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$$

4. Çözüm Grubu

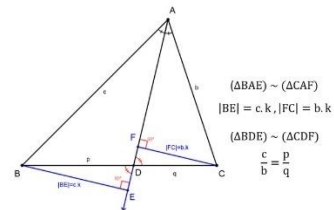
Açıortaya ve/veya açıortay uzantısına dik inme



$$[AB] \parallel [CE]$$

$$\frac{c-b}{b} = \frac{p-q}{q}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$$



$$(\triangle BAE) \sim (\triangle CAF)$$

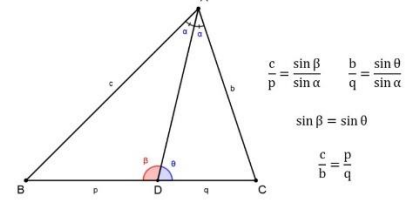
$$[BE] = c \cdot k, [FC] = b \cdot k$$

$$(\triangle BDE) \sim (\triangle CDF)$$

$$\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$$

5. Çözüm Grubu

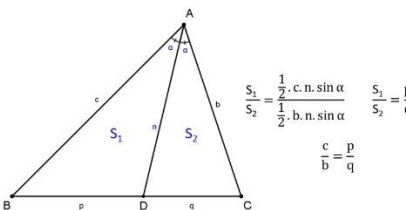
Yardımcı elemanı çözümü (trigonometri)



$$\frac{c}{p} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad \frac{b}{q} = \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}$$

$$\sin \beta = \sin \theta$$

$$\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$$



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot c \cdot n \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot n \cdot \sin \alpha} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{p}{q}$$

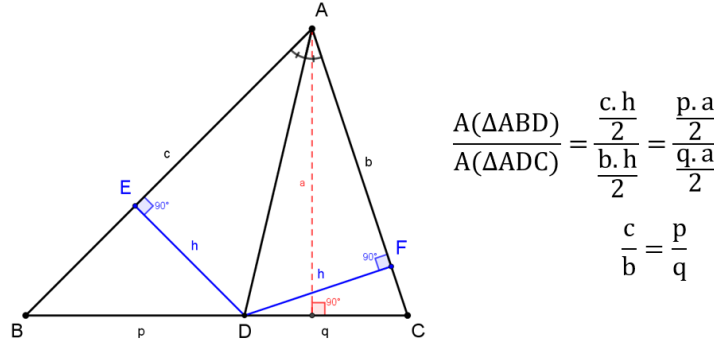
$$\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$$

Şekil 3.10. Açıortay içeren probleme ait çözüm grupları

3.2.1. 1. Çözüm grubu stratejileri

3.2.1.1. Açığortay ayağından üçgenin kenarlarına dik inme

Açığortay içeren problemin ilk çözüm grubu açığortay ayağından üçgenin kenarlarına dik inme stratejisidir. Bu stratejide açığortay ayağından AB ve AC kenarlarına dik inilerek ABD ve ADC üçgenlerine ait yükseklikler oluşturulması esastır. Böylece ABD ve ADC üçgenlerin alanları A ve D noktasından çizilen yükseklikler yardımıyla bulunmaktadır. ABD üçgeninin alanı için $\frac{c \cdot h}{2} = \frac{p \cdot a}{2}$, ADC üçgeni için $\frac{b \cdot h}{2} = \frac{q \cdot a}{2}$ eşitlikleri oranlandığında (Bkz. Şekil 3.11) problemde istenilen durum gösterilmektedir. Bu çözüm grubu açığortayın ayırdığı üçgenlerin alanlarının iki farklı yükseklik ile belirlenerek eşitlenmesine dayanmaktadır.



Şekil 3.11. Açığortay ayağından üçgenin kenarlarına dik çizme stratejisinin çözümü

Öğrencilerden Ö2, Ö3, Ö5 ve Ö6'nın bu stratejiyi uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö2 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.20'de sunulmuştur.

Ö2: Açığortay dediğimizde aklıma diklik geliyor. [D noktasından çizilen dikmelerin eşit olduğu özelliğini söyleyerek kenarlara dikmeler çiziyor.]

A: Burada diklikler çizdin. Peki diklik olduğunda neler yapabiliriz?

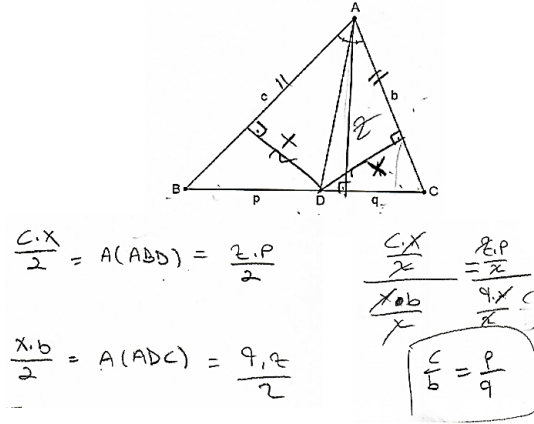
Ö2: Pisagor Teoremi ve Öklid Teoremi aklıma geliyor. Fakat burada kullanamıyorum.

A: Bir üçgende diklikten nasıl yararlanabiliriz?

Ö2: ADB üçgeni için yüksekliktir. Alan bulabiliriz.

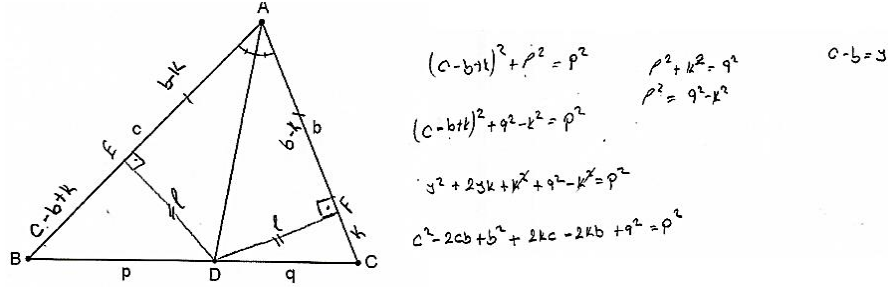
A: Alanları bilmek bu soruda bize ne sağlar?

Ö2: Belki alanları oranlayabiliriz.



Görsel 3.20. Ö2'nin açığortay ayağından üçgenin kenarlarına dik çizme stratejisine ait çözümü

Öğrencilerden Ö7 ise açığortay ayağından üçgenin kenarlarına dik inme stratejisini uygulamış ancak çözüme ulaşamamıştır. Öğrenci çizim sonrasında açığortayın özelliklerinden ve Pisagor teoreminden yararlanarak istenilen durumu göstermeyi denemiş ancak bilinmeyen sayısının fazla, işlemlerin karmaşık ve buradan çözüme ulaşamayacağını belirterek başka stratejiler uygulamak için yeni kağıda geçiş yapmıştır. Öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.21'de sunulmuştur.



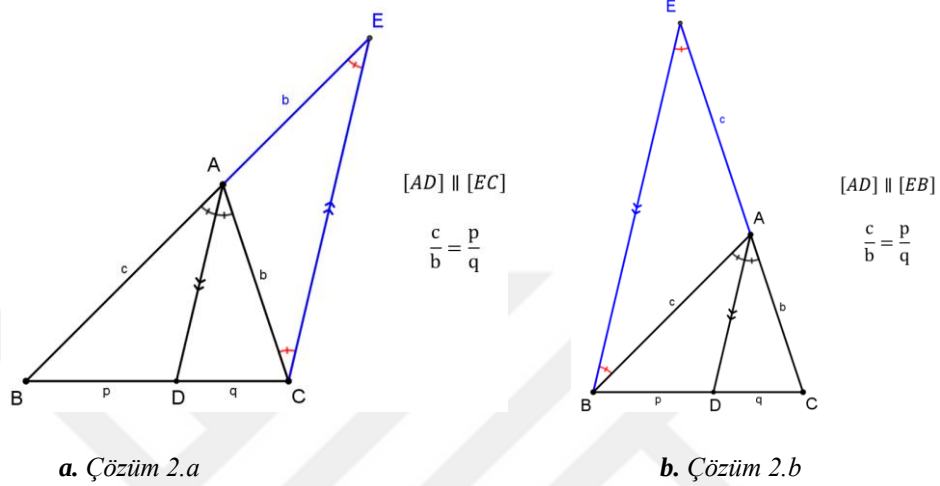
Görsel 3.21. Ö7'nin çözüm için denediği strateji

3.2.2. 2. Çözüm grubu stratejileri

3.2.2.1. Açığortaya paralel çizme

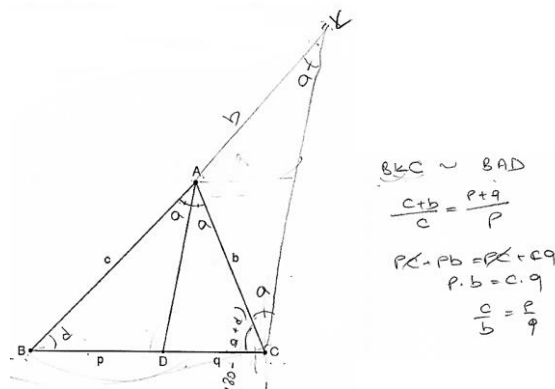
Açığortay içeren problemin ikinci çözüm grubu açığortaya paralel çizme stratejisidir. Bu stratejiye ait 2 farklı çözüm bulunmaktadır. İlk çözümde C köşesinden geçen ve açığortaya paralel çizilen doğrunun BA kenarının uzantısıyla kesiştirilmesi (Bkz. Şekil 3.12.a), diğer çözümde ise B köşesinden geçen ve açığortaya paralel çizilen doğrunun CA

kenar uzantısıyla kesiştirilmesi (Bkz. Şekil 3.12.b) esastır. Böylece oluşan benzer üçgenler üzerinden Thales teoreminden yararlanarak problemde istenilen durumun 2 farklı şekilde gösterilmesi sağlanmıştır. Bu çözüm grubu kenar uzantıları ve açıortay doğrusuna çizilen paralel doğrular ile ikizkenar üçgen oluşturup Thales teoreminin uygulanmasına dayanmaktadır.

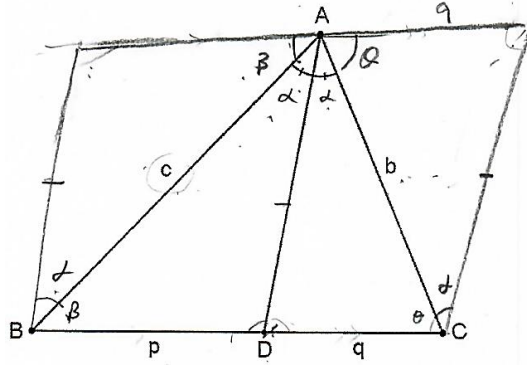


Şekil 3.12. Açıortaya paralel çizme stratejisinin çözümleri

Öğrencilerden Ö4 ve Ö6'nın çözüm 2.a'yı uygulayarak doğru çözüme ulaştıkları görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö4'ün yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.22'de sunulmuştur.



Görsel 3.22. Ö4'ün açıortaya paralel çizme stratejisine (çözüm 2.a) ait çözümünü

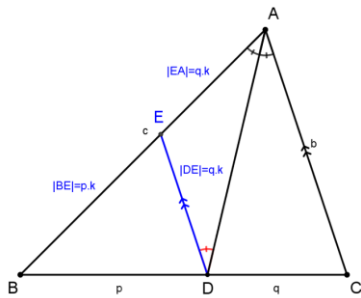


Görsel 3.24. Ö8'in çözüm için denediği strateji

3.2.3. 3. Çözüm grubu stratejileri

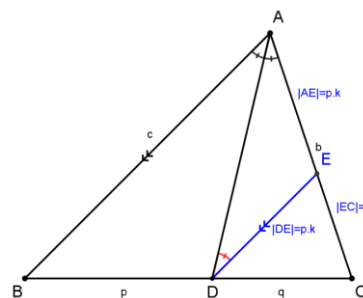
3.2.3.1. Açkırtay ayağından üçgenin kenarlarına paralel çizme

Açıortay içeren problemin üçüncü çözüm grubu stratejilerinden biri açıortay ayağından üçgenin kenarlarına paralel çizme stratejisidir. Bu stratejiye ait 2 farklı çözüm bulunmaktadır. İlk çözümde açıortay ayağından geçen ve AC kenarına paralel çizme (Bkz. Şekil 3.13.a), diğer çözümde ise açıortay ayağından geçen ve AB kenarına paralel çizme (Bkz. Şekil 3.13.b) esastır. Böylece oluşan benzer üçgenler için Thales teoreminden yararlanarak problemde istenilen durumun 2 farklı şekilde gösterilmesi sağlanmıştır. Çözüm grubunun bu stratejisi açıortay ayağından üçgenin kenarlarına çizilen paralel doğrulara, oluşan ikizkenar üçgene ve Thales teoreminin uygulanmasına dayanmaktadır.



a. Çözüm 3.a

$$\begin{aligned} [ED] \parallel [AC] \\ \frac{p \cdot k}{c} &= \frac{q \cdot k}{b} \\ \frac{c}{b} &= \frac{p}{q} \end{aligned}$$

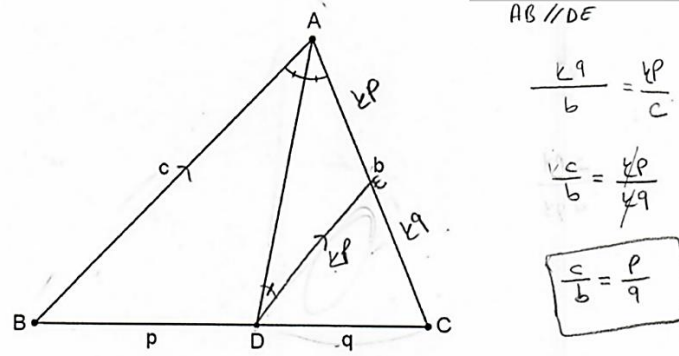


b. Çözüm 3.b

$$\begin{aligned} [ED] \parallel [AB] \\ \frac{q \cdot k}{b} &= \frac{p \cdot k}{c} \\ \frac{c}{b} &= \frac{p}{q} \end{aligned}$$

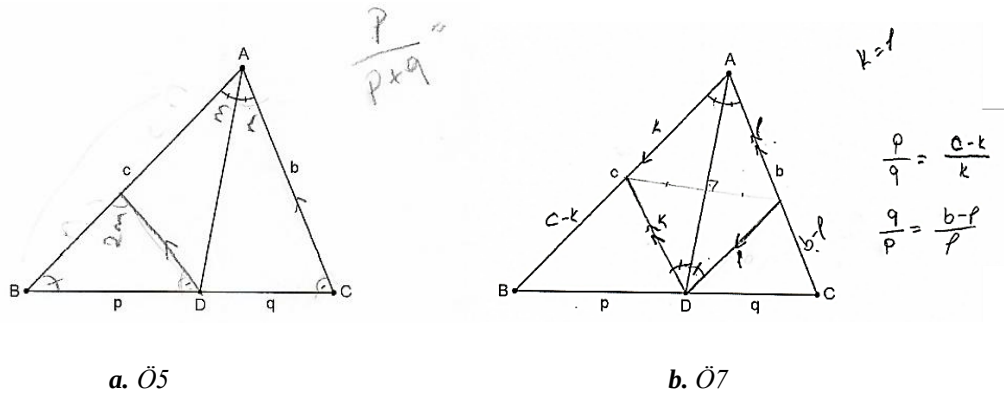
Şekil 3.13. Açkırtay ayağından üçgenin kenarlarına paralel çizme stratejisinin çözümleri

Öğrencilerden sadece Ö2'nin çözüm 3b'yı uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö2'nin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.25'de sunulmuştur.



Görsel 3.25. Ö2'nin açkırtay ayağından üçgenin kenarlarına paralel çizme stratejisine ait çözümü (Çözüm 2b)

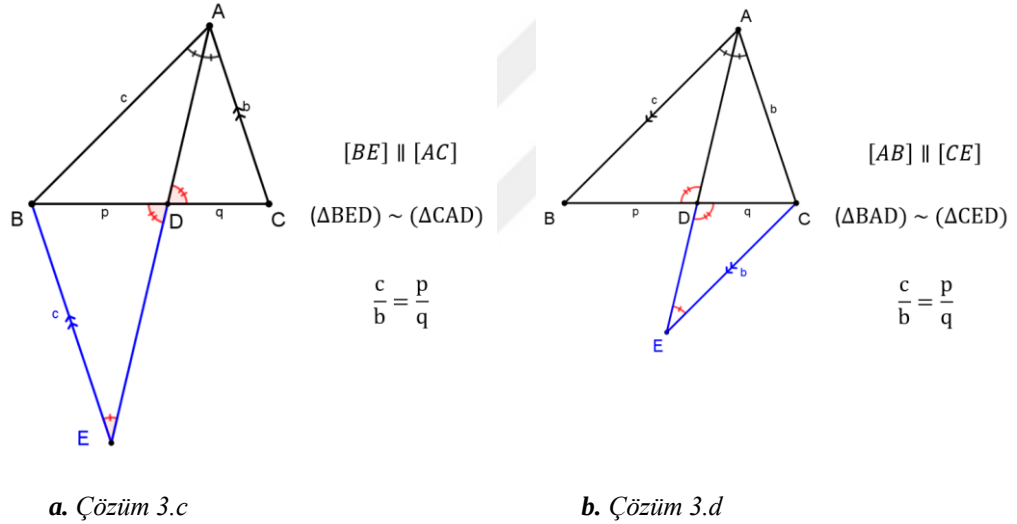
Öğrencilerden Ö5 ve Ö7'nin ise açkırtay ayağından üçgenin kenarlarına paralel çizme stratejisini uyguladığı ancak çözüme ulaşamadığı görülmüştür. Ö5 açkırtay ayağından geçen ve AC kenarına paralel doğru çizmiş (Bkz. Görsel 3.26.a), Ö7 ise açkırtay ayağından geçen ve AC kenarına paralel ile açkırtay ayağından geçen ve AB kenarına paralel doğru çizdikten (Bkz. Görsel 3.26.b) sonra her iki öğrenci temel benzerlik teoreminden yararlanarak istenilen durumu göstermeyi denemiştir. Her iki öğrenci de temel benzerlik teoreminin belirli bir bölümü yazmış ancak benzerlik yardımıyla ulaştıkları sonuçları eşitlemeyi eksik bıraktıkları için doğru çözüme ulaşamamışlardır. Problem çözme sürecinde öğrencilerin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.26'de sunulmuştur.



Görsel 3.26. Öğrencilerin çözüm için denediği stratejiler

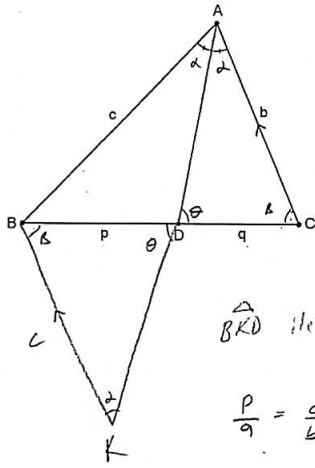
3.2.3.2. Açıortay uzantısından üçgenin kenarlarına paralel çizme

Açıortay içeren problemin üçüncü çözüm grubu stratejilerinden diğeri açıortay uzantısından kenarlara paralel çizme stratejisidir. Bu stratejiye ait 2 farklı çözüm bulunmaktadır. İlk stratejide B noktasından geçen ve AC kenarına paralel doğru çizilip açıortay uzantısı ile kesiştirilmesi (Bkz. Şekil 3.14.a), diğer çözümde ise C noktasından geçen ve AB kenarına paralel doğru çizilip açıortay uzantısı ile kesiştirilmesi (Bkz. Şekil 3.14.b) esastır. Böylece oluşan üçgenlerde Açı-Açı-Açı (A.A.A.) benzerliğinden yararlanarak problemde istenilen durumun 2 farklı şekilde gösterilmesi sağlanmıştır. Çözüm grubunun bu stratejisi üçgenin kenarlarına paralel doğrular çizilmesine ve ters açılardan yararlanarak benzerlik teoremlerinin uygulanmasına dayanmaktadır.

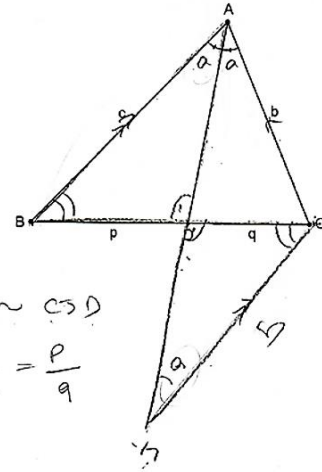


Şekil 3.14. Açıortay uzantısından üçgenin kenarlarına paralel çizme stratejisinin çözümleri

Öğrencilerden Ö2 ve Ö8'in çözüm 3.c'yı ve Ö4 ve Ö8'in ise çözüm 3.d'yi uygulayarak doğru çözüme ulaşmışlardır. Problem çözme sürecinde öğrencilerin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.27'de sunulmuştur.



a. Ö8'e (çözüm 3.c) ait çözüm



b. Ö4'e (çözüm 3.d) ait çözümü

Görsel 3.27. Öğrencilerin açortay uzantısından üçgenin kenarlarına paralel çizme stratejisine ait çözümleri

Öğrencilerden Ö1 ve Ö6'nın ise açortay uzantısından kenarlara paralel çizme stratejisini uyguladığı ancak çözüme ulaşamadığı görülmüştür. Ö1, B noktasından geçen ve AC kenarına paralel doğru çizerek şekli paralelkenara tamamlamış (Bkz. Görsel 3.28.a), Ö6 ise C noktasından geçen ve AB kenarına paralel doğru çizerek üçgenin bir bölümünden paralelkenar (Bkz. Görsel 3.28.b) elde ettiği görülmüştür. Her iki öğrenci de yapmış oldukları çizimlerin problemde istenilen durumu gösterebilmek için yeterli olmayacağını belirtmiştir. Problem çözme sürecinde Ö1 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.28.a'da sunulmuştur.

Ö1: Paralelkenardan başlayabiliyor muyuz? (BF, CE ve FE doğru parçalarını çizdi)

A: Bu çizimlerini neye göre yaptın?

Ö1: BC kenarı FE ye paralel

A: Başka ne gibi şeyler çizdin?

Ö1: BF paralel CE, $|FE|=p+q$ olur. BF ve EC x demek istiyorum

A: Tabi diyebilirsin.

Ö1: Bir yerden benzerlik bulmam gerekiyor.

A: Neden benzerlik kullanmayı düşündün

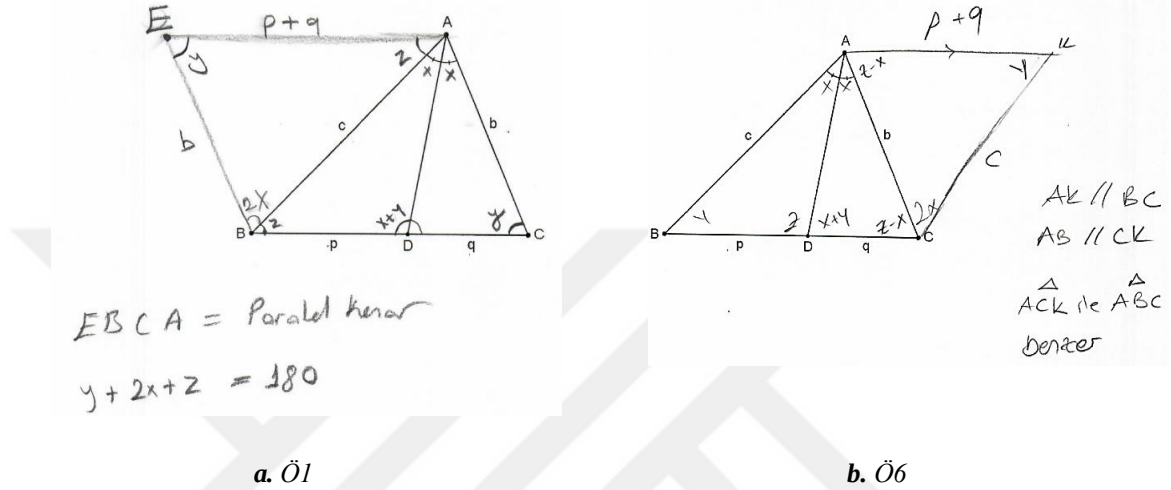
Ö1: Eşlik olmaz kenarları bilmiyoruz, bu yüzden benzerlik yapabiliriz. Acaba ters açılardan gidebilir miyiz?

A: Ters açılar nedir?

Ö1: Z kuralıdır

A: Z kuralı dediğin şey nedir?

Ö1: İç ters açıydı, bunun içinde paralellik gerekiyor.

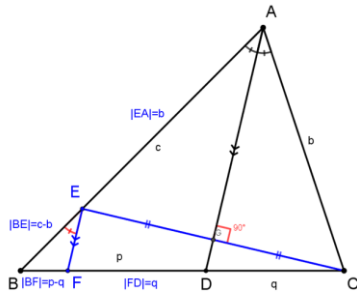


Görsel 3.28. Öğrencilerin çözüm için denediği stratejiler

3.2.4. 4. Çözüm grubu stratejileri

3.2.4.1. Açıortaya ve/veya açıortay uzantısına dik inme

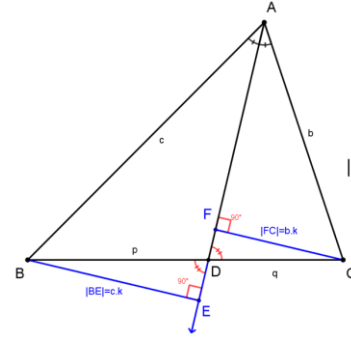
Açıortay içeren problemin dördüncü çözüm grubu açıortaya ve/veya açıortay uzantısına dik inme stratejisidir. Bu stratejiye ait 2 farklı çözüm bulunmaktadır. İlk çözümde C noktasından açıortaya dik inme ve inilen dikmenin uzantısının AB kenarı ile kesişim noktasından açıortaya paralel doğru çizilmesi (Bkz. Şekil 3.15.a), diğer çözümde ise C noktasından açıortaya dik inilmesi ve B noktasından açıortayın uzantısına dik inilmesi (Bkz. Şekil 3.15.b) esastır. Böylece elde edilen üçgenlerde benzerlik teoremlerinden yararlanarak problemde istenilen durumun 2 farklı şekilde gösterilmesi sağlanmıştır. Bu çözüm grubu dikmeler ve ters açılardan yararlanarak benzerlik teoremlerinin uygulanmasına dayanmaktadır.



$$[AB] \parallel [CE]$$

$$\frac{c-b}{b} = \frac{p-q}{q}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$$



$$(\triangle BAE) \sim (\triangle CAF)$$

$$|BE| = c.k, |FC| = b.k$$

$$(\triangle BDE) \sim (\triangle CDF)$$

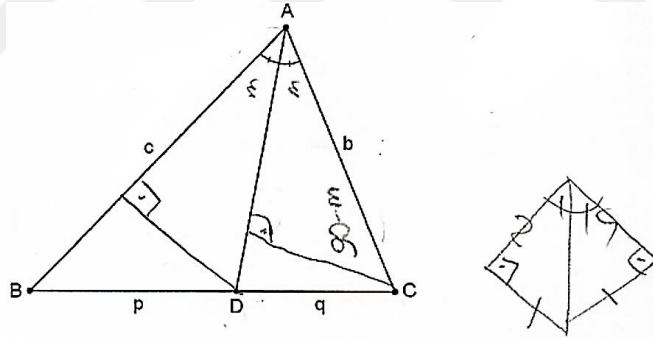
$$\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$$

a. Çözüm 4.a

b. Çözüm 4.b

Şekil 3.15. Açığortaya ve/veya açığortay uzantısına dik çizme stratejisinin çözümleri

Öğrencilerden bu stratejiyi kullanarak doğru çözüme ulaşan bir öğrenci olmamıştır. Ö5, Çözüm 4b'nin bir kısmı olan C noktasından açığortaya dik ve açığortay ayağından AB kenarına dik inmiştir. Öğrenci açığortayın bir özelliğini hatırladığı belirtip yaptığı çizimlerden çözüme ulaşamayacağını belirterek yeni kağıda geçiş yapmıştır. Öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.29'de sunulmuştur.



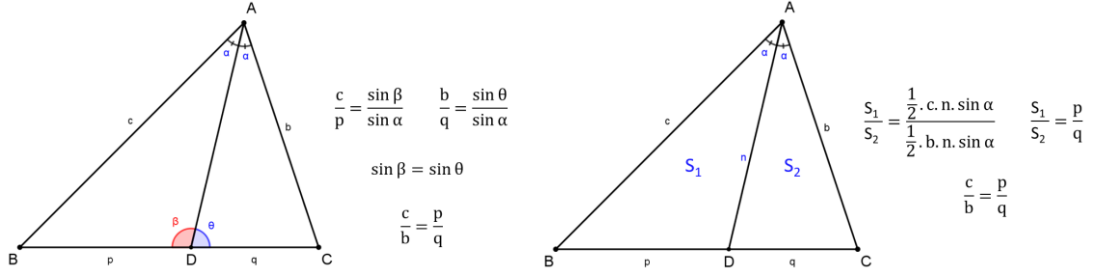
Görsel 3.29. Ö5'in çözüm için denediği strateji

3.2.5. 5. Çözüm Grubu Stratejileri

3.2.5.1. Yardımcı elemansız çözüm (trigonometri)

Açıortay içeren problemin beşinci çözüm grubu yardımcı elemansız çözüm (trigonometri) stratejisidir. Bu stratejiye ait 2 farklı çözüm bulunur. İlk çözümde ABD ve ADC üçgenlerinde sinüs teoreminin uygulanması (Bkz. Şekil 3.16.a), diğer çözümde ise ABD ve ADC üçgenlerinde sinüs alan formülünden (Bkz. Şekil 3.16.b) yararlanarak

problemde istenilen durumun 2 farklı şekilde gösterilmesi sağlanmıştır. Bu çözüm grubu trigonometri konusundaki sinüs özelliklerine dayanmaktadır.



a. Çözüm 5.a

b. Çözüm 5.b

Şekil 3.16. Yardımcı elemansız çözüm (trigonometri) stratejisinin çözümleri

Öğrencilerden bu stratejiyi kullanarak doğru çözüme ulaşan ve bu stratejiyi uygulayan öğrenci olmamıştır.

3.2.6. Öğrencilerin açıortay içeren problemdeki toplam çözüm sayılarına yönelik bulgular

Tablo 3.5’de açıortay içeren probleme ait çözüm grupları ve bu çözüm gruplarına ait stratejileri uygulayarak doğru çözüme ulaşan öğrenciler gösterilmektedir.

Tablo 3.5. Öğrencilerin açkırtay içeren problemdeki toplam çözüml sayıları

Tema	Kod (Strateji)	Çözüm	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4	Ö5	Ö6	Ö7	Ö8
1. Çözüm Grubu	Açkırtay ayağından üçgenin kenarlarına dik inme	1		✓	✓		✓	✓		
2. Çözüm Grubu	Açkırtaya paralel çizme	2.a				✓		✓		
		2.b				✓		✓		
3. Çözüm Grubu	Açkırtay ayağından üçgenin kenarlarına paralel çizme	3.a		✓						
		3.b								
	Açkırtay uzantısından üçgenin kenarlarına paralel çizme	3.c		✓						✓
		3.d				✓				✓
4. Çözüm Grubu	Açkırtaya ve/veya açkırtay uzantısına dik inme	4.a								
		4.b								
5. Çözüm Grubu	Yardımcı elemansız çözüm (trigonometri)	5.a								
		5.b								
Toplam Çözüm Sayısı			0	3	1	3	1	3	0	2

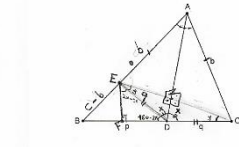
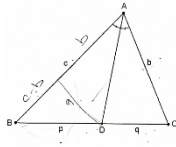
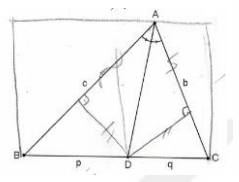
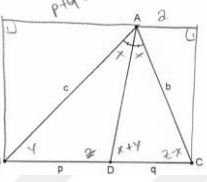
Tablo 3.5 incelendiğinde, öğrencileri en çok doğru çözüme ulaştıran çözüm stratejisinin 1. çözüm grubuna ait olan açkırtay ayağından üçgenin kenarlarına dik inme ve açkırtaya paralel çizme stratejisinin 1. çözümü olduğu görülmektedir. Öğrencilerin istenilen durumun gösterilmesi için belirli noktalardan dik indikleri ve bu diklikleri sıklıkla alan bağıntılarının, Pisagor teoreminin veya Öklid teoreminin uygulanmasında kullandıkları görülmüştür. Ek olarak öğrenciler paralel doğrular çizerek temel benzerlik ve Thales teoremlerini uygulamayı denemiştir. Ayrıca öğrencilerin sıklıkla verilen şekli dikdörtgene veya paralelkenara tamamlama eğiliminde olmalarına karşın bu stratejiyle doğru çözüme ulaşan öğrenci olmamıştır.

Tablo 3.5 incelendiğinde, öğrencilerinin bazılarının (Ö1 ve Ö7) doğru çözüme ulaşamadıkları ve öğrencilerin çözüm stratejilerini çeşitlendiremedikleri görülmüştür.

3.2.7. Doğru çözüme ulaşamayan stratejiler

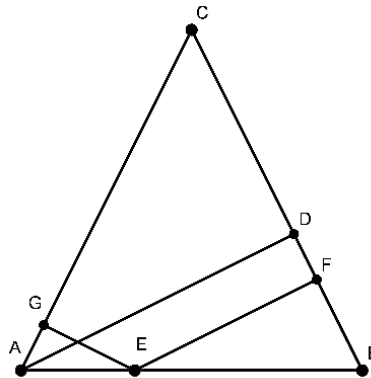
Tablo 3.6'da öğrencilerin açkırtay içeren problemde doğru çözüme ulaşamayan stratejiler, ilgili strateji kapsamında yaptığı çizim ve işlemleri sunulmuştur.

Tablo 3.6. Açıortay içeren problemde doğru çözüme ulaşmayan stratejiler

Stratejiler	Görüşme Bulguları	Yapılan çizim ve işlemler	
Açıortay ayağında üçgenin kenarına q uzunluğunda doğru parçası çizme	 (Ö1)	 (Ö4)	Bu stratejide D noktasından AB kenarına q uzunluğunda doğru parçası çizilmiştir. Her iki öğrenci de şeklin deltoid olduğunu belirtmiştir ancak doğru çözüme ulaşamamıştır.
Dikdörtgen oluşturma	 (Ö3)	 (Ö6)	Bu stratejide ABC üçgenini içine alan ve bir kenarı BC olan dikdörtgen çizmiştir. Her iki öğrenci de yapılan çizimler sonrasında doğru çözüme ulaşamamıştır.

3.3. Öğrencilerin Yükseklik İçeren Problemde Kullandıkları Çözüm Stratejilerine Yönelik Bulgular

Yükseklik içeren problemde öğrencilerden Şekil 3.17'deki $|AC|=|CB|$ olan bir ABC ikizkenar üçgeninde E noktası AB kenarı üzerinde ve $[CB] \perp [EF]$, $[CB] \perp [AD]$ ve $[AC] \perp [EG]$ olmak üzere; $|EG|+|EF|=|AD|$ olduğunu olabildiğince çok şekilde göstermeleri istenilmiştir.



Şekil 3.17. Yükseklik içeren problem

Tablo 3.7'de öğrencilerin yükseklik içeren problemde kullandıkları başlangıç stratejileri sunulmuştur.

Tablo 3.7. Öğrencilerin yükseklik içeren problemdeki başlangıç stratejileri

Başlangıç Stratejisi	Öğrenci
- E noktasından AD yüksekliğine dik çizme	Ö1
- Bir kural olduğunu kabul etme	Ö2, Ö3, Ö5, Ö7
- CE doğru parçasını çizme	Ö4
- Benzerlik	Ö6
- A noktasından EF doğru parçasının uzantısına dik çizme	Ö8

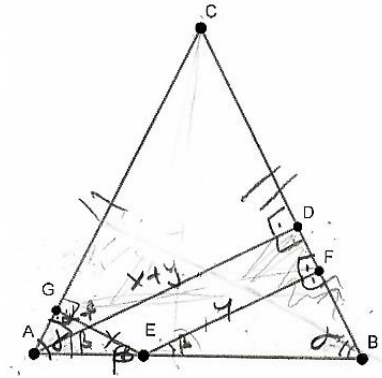
Tablo 3.7 incelendiğinde öğrencilerin çoğunluğunun ilk olarak bu problemi bir kural olarak düşündüğü, bazı öğrencilerin E ve A noktalardan dik çizdikleri, bazılarının belirli noktaları doğru parçası yardımıyla birleştirdikleri veya benzerlik teoremlerini uygulamak için üçgenlere odaklandıkları görülmektedir.

Öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun başlangıç stratejisi olarak istenilen durumun bir teorem olduğunu belirttikleri ancak teoremin neden doğru olduğuna dair bir gerekçe sunamadıkları saptanmıştır. Öğrencilere ilgili teoremin hangi koşullarda geçerli olduğu ve nedeni sorulduğunda;

Ö2: Aklıma ilk olarak benzerlik olabileceği geldi çünkü ADB ile EBF üçgenleri arasında bir paralellik var.

Ö5: Şimdiye karar hiç sorgulamadım, bilemiyorum

şeklinde cevaplar vermişlerdir. Ö3'ün başlangıç stratejisi olarak yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.30'de sunulmuştur.



Görsel 3.30. Ö4'ün başlangıç stratejisi

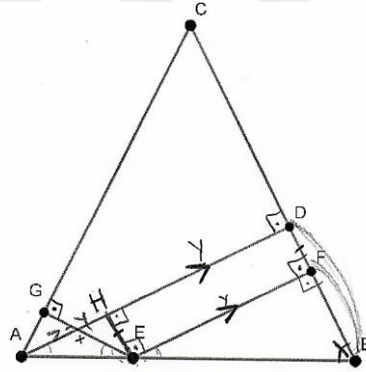
Diğer başlangıç stratejileri kapsamında Ö1, E noktasından AD yüksekliğine dik inip oluşan dikdörtgen yardımıyla problemde istenilen durumu göstermeyi denemiştir. Ö1'in problem çözme sürecindeki görüşmenin bir kesiti aşağıda sunulmuştur.

Ö1: HE'yi çizdikten sonra dikdörtgen oluşur. EF ve HD uzunlukların eşittir. AH uzunluğu EG'ye eşit olmalı.

A: Evet dediğini gösterebilersen istenilen duruma ulaşılabilir.

Ö1: Bize ikizkenar bir üçgen vermiş acaba bunu nasıl kullanabilirim. CE birleştirsem bir şey gelmez, Pisagor'dan olmaz

Öğrenci problem üzerinde bir süre daha düşündükten sonra bir sonuca ulaşamayacağı düşüncesiyle farklı stratejiler denemeye karar vermiştir. Ö1'in başlangıç stratejisi olarak yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.31'de sunulmuştur.



Görsel 3.31. Ö1'in başlangıç stratejisi

Ö4 ise başlangıç stratejisi olarak C ve E noktalarını doğru parçası ile birleştirerek problemde istenilen durumu göstermeyi denemiştir. Problem çözme sürecinde Ö4 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda sunulmuştur.

Ö4: İlk olarak C ve E noktalarını birleştirmek veya D den AB ye paralel doğru çizmek geldi.

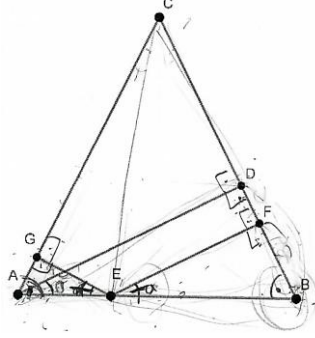
A: Bu söylediklerin ile çözüm nasıl yapılabilir?

Ö4: Öklid geldi aklıma

A: Öklid nedir?

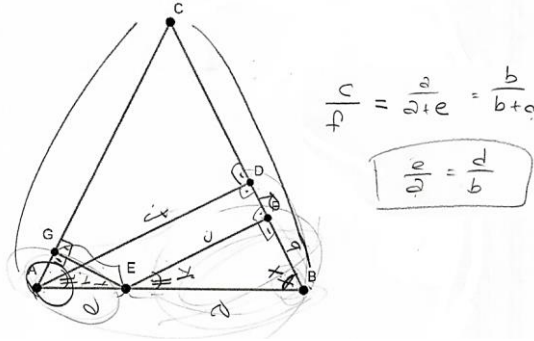
Ö4: Dikten dik iniliyordu, dik bir doğru parçası çizebilirim kullanabilirim fakat elimde bir değer yok. Ama ilk aklıma gelen bu oldu

Öğrenci problem üzerinde bir süre daha düşündükten sonra bir sonuca ulaşamayacağı düşüncesiyle farklı stratejiler denemeye karar vermiştir. Ö4'ün başlangıç stratejileri kapsamında yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.32'de sunulmuştur.



Görsel 3.32. Ö5'ün başlangıç stratejisi

Ö6 ise başlangıç stratejisi olarak ABD ve EBF üçgenlerinin benzer olduğunu belirterek problemde istenilen durumu göstermeyi denemiş ancak problemin gösterilebilmesi için yeterli olmayacağı düşüncesiyle farklı stratejiler denemeye karar vermiştir. Öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.33'de sunulmuştur.



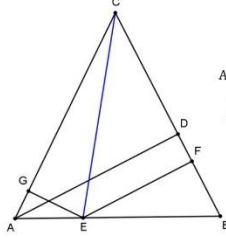
Görsel 3.33. Ö6'nın başlangıç stratejisi

Ö8 ise başlangıç stratejisi olarak AC kenarını ve EF doğru parçasını uzatıp kesiştirerek problemde istenilen durumu göstermeyi denemiş ancak problemin gösterilebilmesi için yeterli olmayacağı düşüncesiyle farklı stratejiler denemeye karar vermiştir. Öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.34'de sunulmuştur.

Yükseklik İçeren Problem

1. Çözüm Grubu

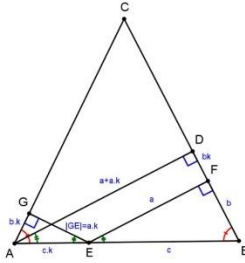
ABC üçgenini iki üçgene ayırma



$$\begin{aligned} A(\triangle ACE) + A(\triangle CEB) &= A(\triangle ABC) \\ \frac{|AC||GE|}{2} + \frac{|BC||EF|}{2} &= \frac{|BC||AD|}{2} \\ |BC| &= |AC| \\ |GE| + |EF| &= |AD| \end{aligned}$$

2. Çözüm Grubu

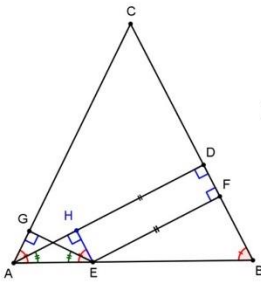
Yardımcı elemanlı çözüm (benzerlik)



$$\begin{aligned} (\triangle BFE) &\sim (\triangle AGE) \\ \frac{a}{a+k} &= \frac{b}{b+k} = \frac{c}{c+k} = \frac{1}{1+k} \\ (\triangle BFE) &\sim (\triangle BDA) \\ \frac{a}{a+a+k} &= \frac{b}{b+b+k} = \frac{c}{c+c+k} = \frac{1}{1+k} \\ |AD| &= a + ak, |GE| = a \cdot k, |EF| = a \\ |GE| + |EF| &= |AD| \end{aligned}$$

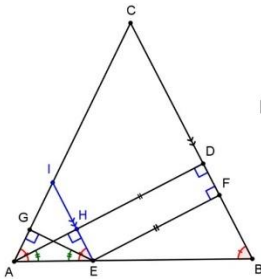
3. Çözüm Grubu

Yüksekliğe dik inme



$$\begin{aligned} (\triangle EHA) &\cong (\triangle AGE) \\ |GE| &= |AH|, |HD| = |EF| \\ |AH| + |HD| &= |AD| \\ |GE| + |EF| &= |AD| \end{aligned}$$

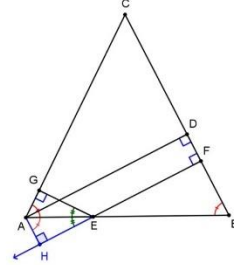
Üçgenin kenarına paralel çizme



$$\begin{aligned} (\triangle EHA) &\cong (\triangle AGE) \\ |GE| &= |AH|, |HD| = |EF| \\ |AH| + |HD| &= |AD| \\ |GE| + |EF| &= |AD| \end{aligned}$$

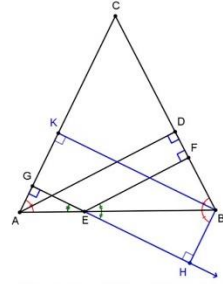
4. Çözüm Grubu

FE doğru parçasının uzantısına dik inme



$$\begin{aligned} (\triangle AHE) &\cong (\triangle AGE) \\ |GE| &= |HE| \\ |HE| + |EF| &= |AD| \\ |GE| + |EF| &= |AD| \end{aligned}$$

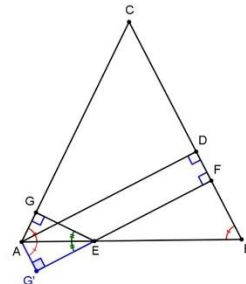
GE doğru parçasının uzantısına dik inme



$$\begin{aligned} (\triangle BFE) &\cong (\triangle BHE) \\ |EF| &= |EH|, |KB| = |AD| \\ |GE| + |EH| &= |KB| \\ |GE| + |EF| &= |AD| \end{aligned}$$

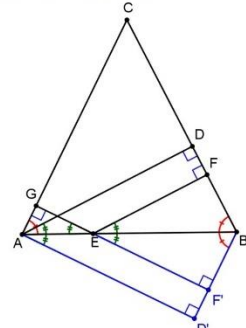
5. Çözüm Grubu

AGE üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma



$$\begin{aligned} |AG| &= |AG'| \\ |GE| &= |G'E| \\ |G'E| + |EF| &= |AD| \\ |GE| + |EF| &= |AD| \end{aligned}$$

ADB ve EFB üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma



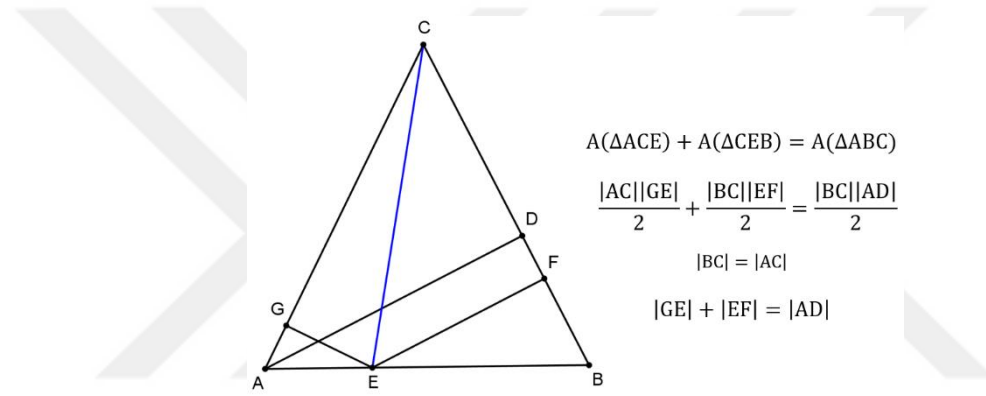
$$\begin{aligned} |EF| &= |EF'| \\ |AD| &= |AD'| \\ |GE| + |EF'| &= |AD'| \\ |GE| + |EF| &= |AD| \end{aligned}$$

Şekil 3.18. Yükseklik içeren probleme ait çözüm grupları

3.3.1. 1. Çözüm grubu stratejileri

3.3.1.1. ABC üçgenini iki üçgene ayırma

Yükseklik içeren problemin ilk çözüm grubu ABC üçgenini iki üçgene ayırma stratejisidir. Bu stratejide C köşesi ile E noktası doğru parçası ile birleştirilerek ABC üçgeni iki üçgene ayrılmakta ve bu ayrılan iki üçgenin yükseklikleri ([EG] ve [EF]) yardımıyla alanları toplamı ABC üçgeninin alanına eşitlenmektedir (Bkz. Şekil 3.19). Bu çözüm grubu var olan dikliklerin üçgenlerin yüksekliği olarak kullanılmasına ve bir bütünü oluşturan iki üçgenin alanlarının toplanarak büyük üçgenin alanına eşitlenmesine dayanmaktadır.



Şekil 3.19. ABC üçgenini iki üçgene ayırma stratejisinin çözümü

Öğrencilerden Ö2, Ö5, Ö6 ve Ö7'nin bu stratejiyi uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö5 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.35'de sunulmuştur.

Ö5: (CE doğru parçasını çizdi)

A: Bu doğru parçasını neden çizdin?

Ö5: CAE ve CEB üçgenleriyle ilgili bir şey yapılabilir, eş olamazlar.

A: Burada CE çizdiğimizde ne değişti?

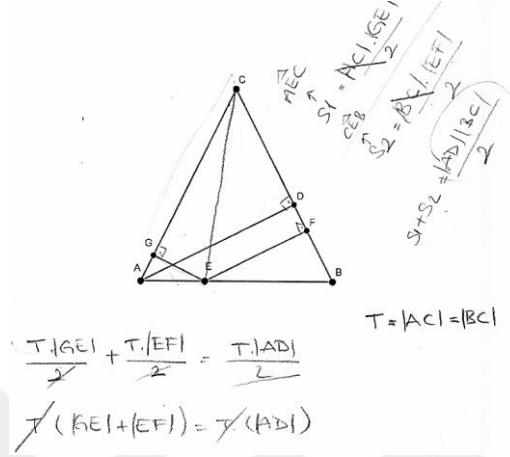
Ö5: AGE üçgeninden çıkıp büyük üçgene (ACE) odaklandım (Bir süre sessiz kalarak düşündü)

A: Neler düşünüyorsun?

Ö5: Net bir sonuç bulamıyorum, bir yere dayandıramıyorum. ACE ve CEB alanlarını bulabilirim fakat eşit olmadığı için bir şey çıkmayacağını düşünüyorum

A: Bizden ne istenilmişti

Ö5: $EG+EF=AD$ olması gerekiyor. (AEC ve CEB üçgenlerinin alanlarını toplayıp ABC üçgeninin alanına eşitledi)



Görsel 3.35. Ö5'in ABC üçgenini ikiye bölme stratejisine ait çözümü

Öğrencilerden Ö1, Ö3, Ö4 ve Ö8'in ise ABC üçgenini iki üçgene ayırma stratejisini uyguladıkları ancak çözüme ulaşamadıkları görülmüştür. Ö1, Ö3 ve Ö8, çizdikleri CE doğru parçasının açıortay olabileceğini düşünmüşler ancak yeterli bilgi olmadığından bu düşüncelerinden vazgeçmişlerdir. Problem çözme sürecinde Ö8 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.36'de sunulmuştur.

Ö8: Aklıma CE'yi çizmek geldi.

A: Sen burada C ve E noktalarını birleştirdin. Bunu yaptığımızda ne elde edebiliriz?

Ö8: (Açıları yerleştirdi) Acaba CE çizdiğimizde açıortay olur mu?

A: Açıortay nasıl oluyordu.

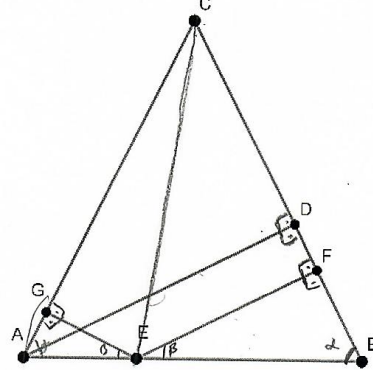
Ö8: Olabilme ihtimali var çünkü kenara bağlı değil.

A: Burada her zaman olabilir mi?

Ö8: Her zaman olamaz.

A: Sen C noktasından doğru parçası çizdikten sonra bir şey değişti mi?

Ö8: Sadece noktaları birleştirmiş oldum.

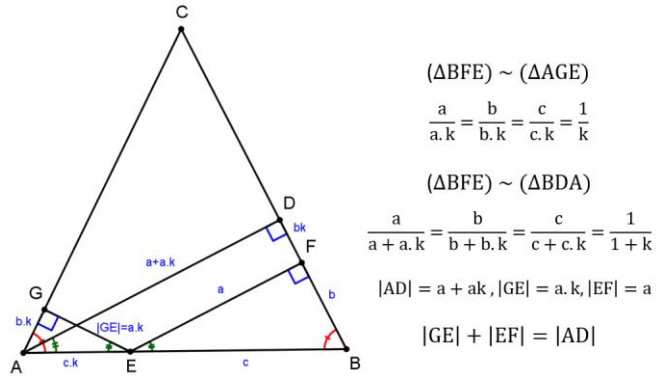


Görsel 3.36. Ö8'in çözüm için denediği strateji

3.3.2. 2. Çözüm grubu stratejileri

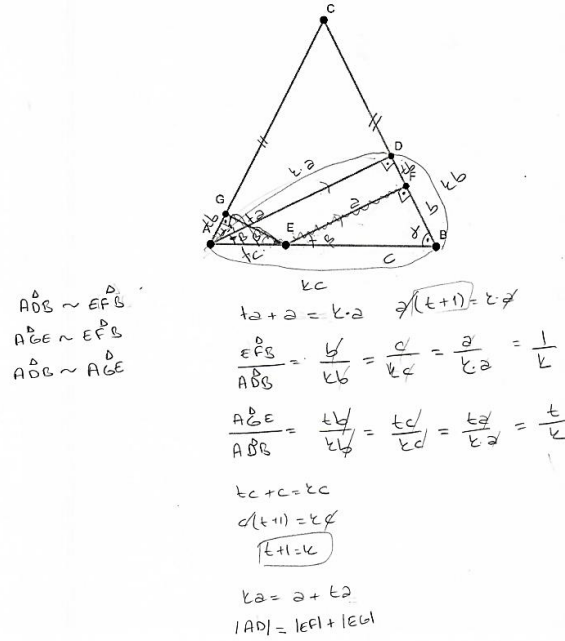
3.3.2.1. Yardımcı elemansız çözüm (benzerlik)

Açıortay içeren problemin ikinci çözüm grubu yardımcı elemansız çözüm (benzerlik) stratejisidir. Bu stratejide BFE ve AGE üçgenleri arasında A.A.A benzerliği kullanılarak üçgenlerin kenarları arasında bir benzerlik oranı belirlenmiş daha sonra BFE ve BDA üçgenleri arasında A.A.A benzerliği kullanılarak (Bkz. Şekil 3.20) problemde istenilen durumun gösterilmesi sağlanmıştır. Bu çözüm grubu ikizkenar üçgen özelliklerinin ve benzer üçgenler arasındaki ilişkilerin kullanılmasına dayanmaktadır.



Şekil 3.20. Yardımcı elemansız çözüm (benzerlik) stratejisinin çözümü

Öğrencilerden sadece Ö2'nin bu strateji ile doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö2'in yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.37'de sunulmuştur.



Görsel 3.37. Ö2'nin yardımcı elemansız çözüm (benzerlik) stratejisine ait çözümü

Öğrencilerden Ö1, Ö5, Ö6 ve Ö7'nin ise yardımcı elemansız çözüm (benzerlik) stratejisini uyguladıkları ancak doğru çözüme ulaşamadıkları görülmüştür. Öğrenciler genellikle ADB ve EFB üçgenleri arasında bir benzerlik ilişkisi olduğunu fark ederek AD ve EF doğru parçalarının uzunlukları arasında bir oran olduğunu belirtmiş ancak AGE üçgeni ile ilişkilendirmedikleri için doğru çözüme ulaşamamışlardır. Problem çözme sürecinde Ö5 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.38'de sunulmuştur.

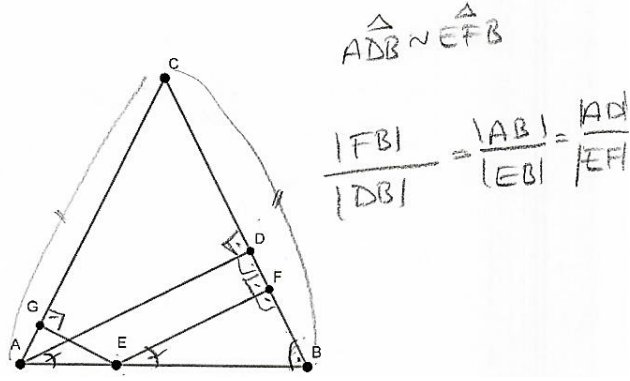
Ö5: ADB ile ADC üçgenlerini düşündüğümde benzerlik yok. ADB ile EFB üçgenleri benzer olur açıları eştir.

A: Düşüncelerini yazarak gösterebilir misin?

Ö5: AD ve EF birbirine orantılıdır.

A: Bir orantı var dedin buradan toplamsal bir ilişkiye nasıl geçebiliriz?

Ö5: Aklıma bir şey gelmiyor.

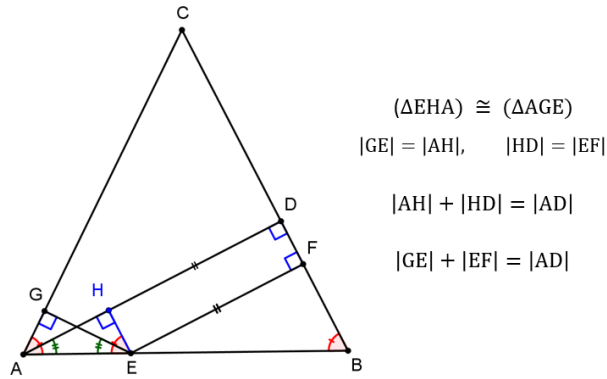


Görsel 3.38. Ö5'in çözüm için denediği strateji

3.3.3. 3. Çözüm grubu stratejileri

3.3.3.1. Yüksekliğe dik inme

Yükseklik içeren problemin üçüncü çözüm grubu stratejilerinden biri yüksekliğe dik inme stratejisidir. Bu stratejide E noktasından AD yüksekliğine dik inip HEFD dikdörtgeninin özelliklerinden ve AGE-EHA üçgenlerinin eşliğinden yararlanarak (Bkz. Şekil 3.21) problemde istenilen durumun gösterilmesi sağlanmıştır. Çözüm grubunun bu stratejisi inilen diklik yardımıyla oluşan dikdörtgen özelliklerinin ve üçgenlerde eşliğin uygulanmasına dayanmaktadır.



Şekil 3.21. Yüksekliğe dik inme stratejisinin çözümü

Öğrencilerden Ö3, Ö5 ve Ö7'nin bu stratejiyi uygulayarak doğru çözüme ulaşmışlardır. Problem çözme sürecinde Ö7, GAE ve KAE üçgenlerinin benzerlik oranının 1 olduğunu belirterek istenilen durumu göstermiştir. Öğrenci ile gerçekleştirilen

Ö7: E noktasından AD ye dik atsam

A: Neden böyle yaptın

Ö7: Bir dikdörtgen oluşturmak istedim, GAE ve AKE eştir

A: Buna nasıl karar verdin

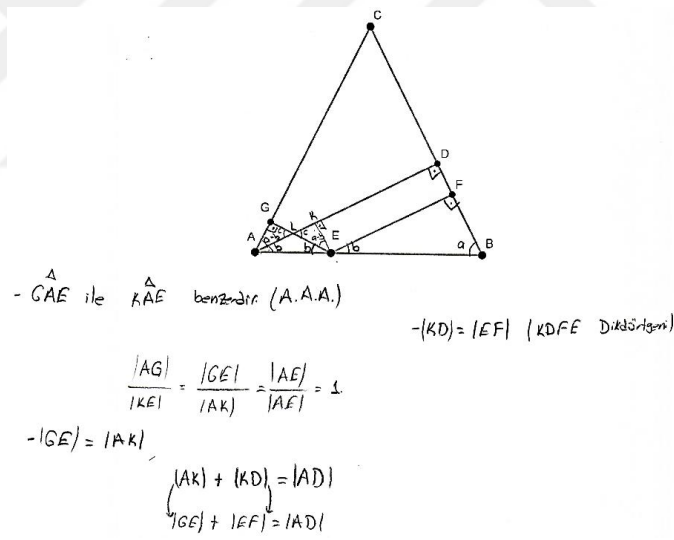
Ö7: AAA benzerliği vardır.

A: Eş demiştin ama benzer olduğunu söyledin

Ö7: Hipotenüsleri aynı eş olabilir.

A: Yazarak gösterebilir misin?

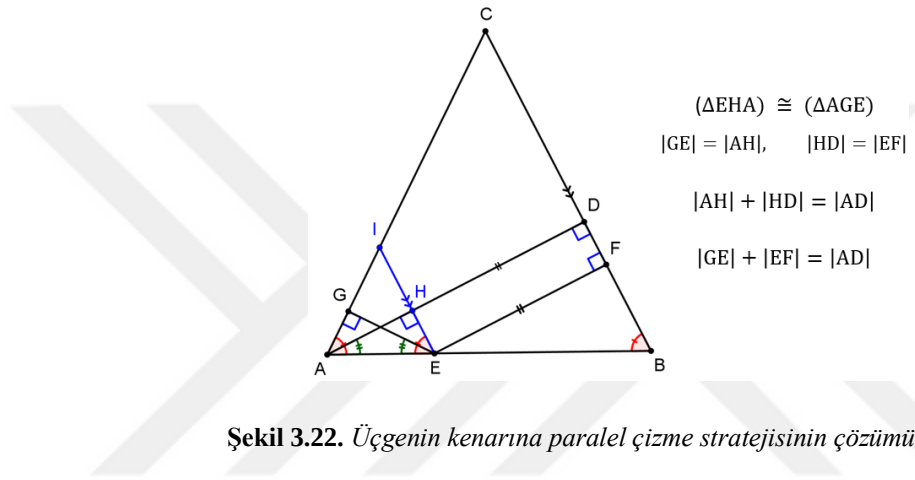
Ö7: (Üçgenlerin kenarlarını oranladı) $GE=AK$ olur. Dikdörtgeni de kullanarak istenilen durumu gösterebiliriz.



Öğrencilerden Ö1'in ise yüksekliğe dik inme stratejisini uyguladığı ancak doğru çözüme ulaşamadığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö1 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti başlangıç stratejileri bölümünde, yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.31'de sunulmuştur.

3.3.3.2. Üçgenin kenarına paralel çizme

Yükseklik içeren problemin üçüncü çözüm grubu stratejilerinden diğeri üçgenin kenarına paralel çizme stratejisidir. Bu stratejide E noktasından BC kenarına paralel doğru çizildikten sonra yöndeş açılardan çizilen paralel doğrunun AD yüksekliğine dik olduğu gösterilip HEFD dikdörtgeninin özelliklerinden ve AGE-EHA üçgenlerinin eşliğinden yararlanarak (Bkz. Şekil 3.22) problemde istenilen durumun gösterilmesi sağlanmıştır. Çözüm grubunun bu stratejisi çizilen paralel doğru yardımıyla dikdörtgen özelliklerinin ve üçgenlerde eşliğin uygulanmasına dayanmaktadır.



Şekil 3.22. Üçgenin kenarına paralel çizme stratejisinin çözümü

Öğrencilerden sadece Ö6'nın bu stratejiyi uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö6 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencilerin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.40'de sunulmuştur.

Ö6: (E noktasından BC kenarına paralel bir doğru çiziyor.) ALE ile ABC'yi oranlayabilirim.

A: Bu durumda istenilen toplamsal duruma nasıl ulaşabiliriz?

Ö6: Ekstra ACD ile AKL'yi de oranlayabilirim

A: Bunları oranlarsak ne elde edebiliriz?

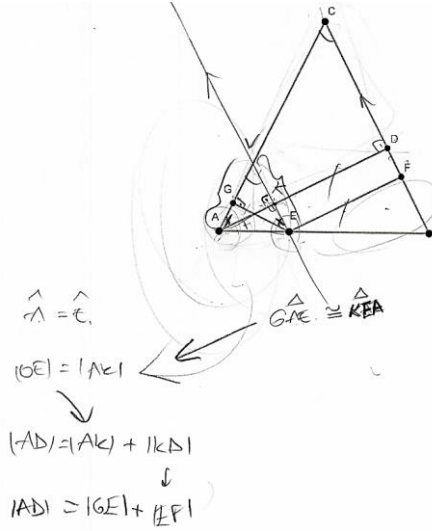
Ö6: AD ve KA'yı elde edebiliriz.

A: Burada oluşan KD ve EF arasında bir ilişki var mı?

Ö6: Eşit olduğunu belirtiyor. (AK ve EG doğru parçalarına) bunlarda eşit olur.

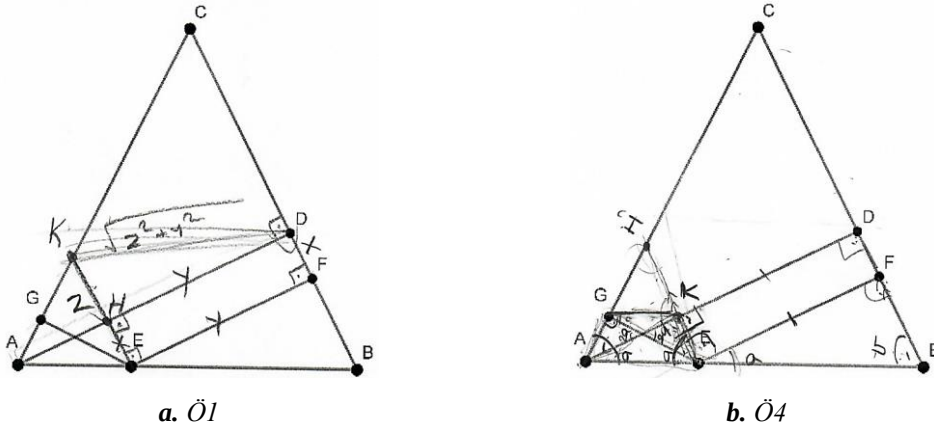
A: Bu çıkarıma nereden ulaşabiliriz.

Ö6: (Öğrenci üçgenlerin eşliğini gösterip, istenilen duruma ulaştı.)



Görsel 3.40. Ö6'nın üçgenin kenarına paralel çizme stratejisine ait çözümü

Öğrencilerden Ö1 ve Ö4 ise üçgenin kenarına paralel çizme stratejisini uygulamış ancak doğru çözüme ulaşamamışlardır. Ö1 çizimden sonra diklikler olduğu için Pisagor teoremini uygulamayı denemiş (Bkz. Görsel 3.41.a), Ö4 ise çizimden sonra (Bkz. Görsel 3.41.b) oluşan üçgenler arasında eşlik ilişkisini gösteremediği için doğru çözüme ulaşamamıştır. Problem çözme sürecinde Ö1 ve Ö4'ün yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.41'de sunulmuştur.

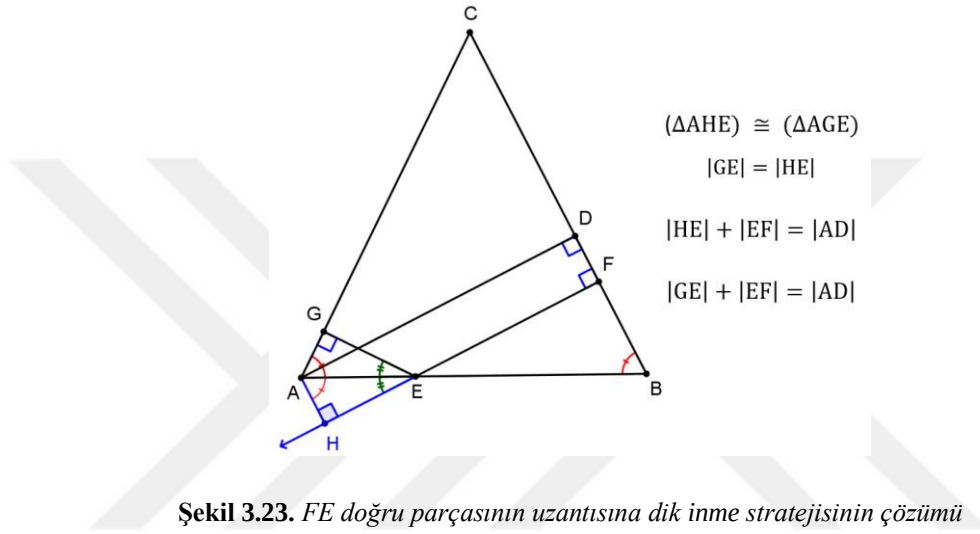


Görsel 3.41. Öğrencilerin çözüm için denediği stratejiler

3.3.4. 4. Çözüm grubu stratejileri

3.3.4.1. FE doğru parçasının uzantısına dik inme

Yükseklik içeren problemin dördüncü çözüm grubu stratejilerinden biri FE doğru parçasının uzantısına dik inme stratejisidir. Bu stratejide EF doğru parçasının uzantısına A köşesinden dik inilerek oluşan AGE-AHE üçgenlerinin eşliğinden veya açıortay özelliklerinden yararlanarak (Bkz. Şekil 3.23) problemde istenilen durumun gösterilmesi sağlanmıştır. Çözüm grubunun bu stratejisi dik doğru inilerek oluşan üçgenlerde eşliğin uygulanmasına ve ortaya çıkan dikdörtgenin özelliklerine dayanmaktadır.



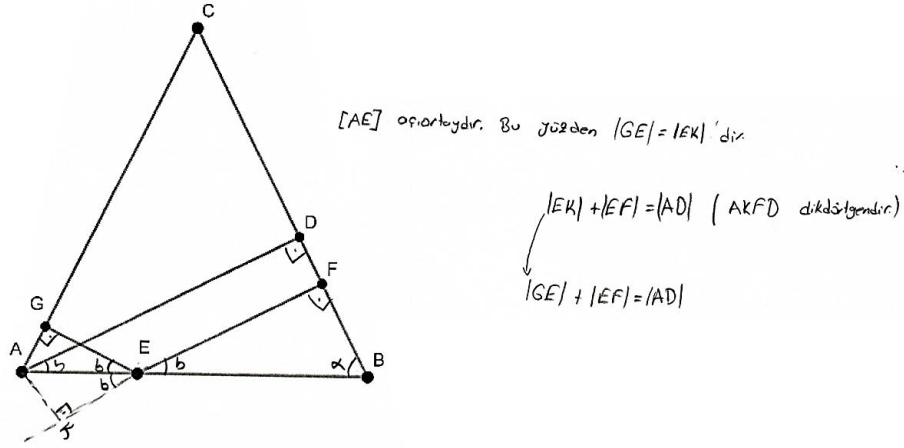
Öğrencilerden Ö1 ve Ö7'nin bu stratejiyi uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö7 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencilerin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.42'de sunulmuştur.

Ö7: EF'yi uzatsak, AD ve EF zaten paralel. (Açıları harflendirdi.)

Ö7: Ters açılardan AE açıortay oldu. A noktasından EF'nin uzantısına dik atsam.

A: Buradan ne elde edebiliriz?

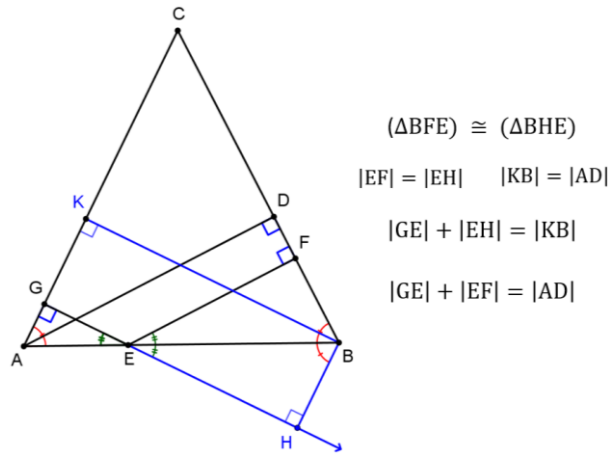
Ö7: $|GE|=|EK|$ oldu, $|AG|=|AK|$ oldu. $|KF|=|AD|$ olduğundan buradan istenilen duruma ulaşılır.



Görsel 3.42. Ö7'nin FE doğru parçasının uzantısına dik inme stratejisine ait çözümü

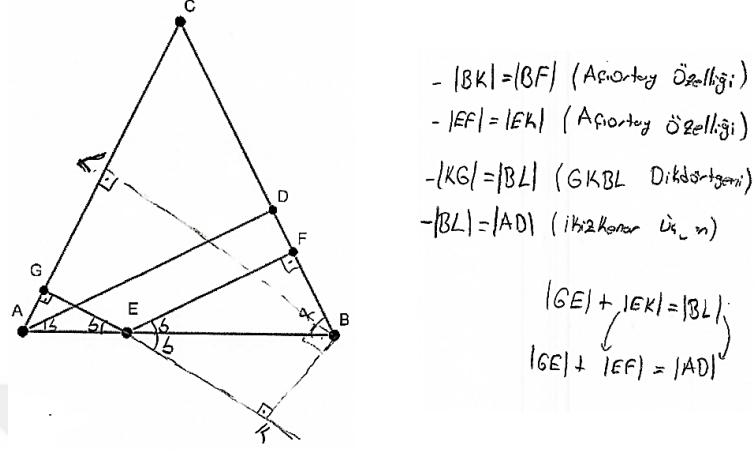
3.3.4.2. GE doğru parçasının uzantısına dik inme

Yükseklik içeren problemin dördüncü çözüm grubu stratejilerinden biri GE doğru parçasının uzantısına dik inme stratejisidir. Bu stratejide B köşesinden çizilen yükseklik ve GE doğru parçasının uzantısına B köşesinden dik inilerek oluşan BFE-BHE üçgenlerinin eşliğinden veya açıortay özelliklerinden yararlanarak (Bkz. Şekil 3.24) problemde istenilen durumun gösterilmesi sağlanmıştır. Çözüm grubunun bu stratejisi dik doğru ile oluşan üçgenlerde eşliğin uygulanmasına ek olarak, ikizkenar üçgende eş kenarlara ait yüksekliklerin uzunluklarının eşit olduğuna ve dikdörtgen özelliklerine dayanmaktadır.



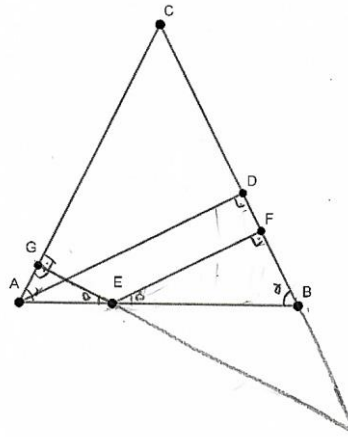
Şekil 3.24. GE doğru parçasının uzantısına dik inme stratejisinin çözümü

Öğrencilerden sadece Ö7'nin bu stratejiyi uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö7'nin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.43'de sunulmuştur.

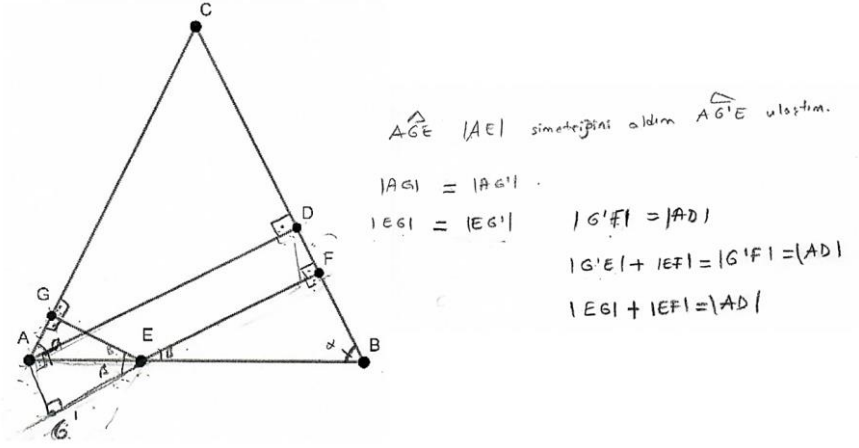


Görsel 3.43. Ö7'nin GE doğru parçasının uzantısına dik inme stratejisine ait çözümü

Öğrencilerden Ö8 ise GE doğru parçasının uzantısına dik inme stratejisinin ilk aşaması olan GE doğru parçasının uzantısını almış ancak çözüme ulaşamamıştır. Öğrenci GE doğru parçasının uzantısına ek olarak CB kenarının uzantısını alarak bu doğruları kesiştirmiş ancak asıl yapmak istediğinin simetri almak olduğunu belirterek düşüncesini denemek için yeni kağıda geçiş yapmıştır. Problem çözme sürecinde Ö8'in yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.44'de sunulmuştur.



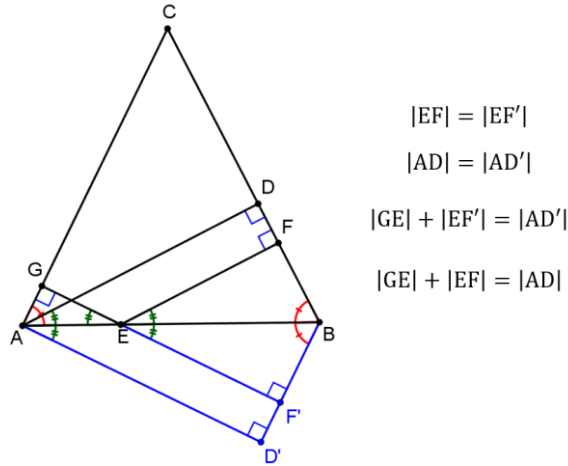
Görsel 3.44. Ö8'in çözüm için denediği strateji



Görsel 3.45. Ö8'in AGE üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma stratejisine ait çözümü

3.3.5.2. ADB ve EFB üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma

Yükseklik içeren problemin beşinci çözüm grubu stratejilerinden diğeri ADB ve EFB üçgenlerinin AB kenarına göre simetrisini alma stratejisidir. Bu stratejide simetri alınmasıyla ADB-AD'B ve EFB-EF'B üçgenlerinin eşliğinden ve oluşan dikdörtgenin özelliklerinden yararlanılmaktadır (Bkz. Şekil 3.26). Çözüm grubunun bu stratejisi simetri yoluyla oluşan eş üçgenlerin birleşiminden oluşan dikdörtgen özelliklerine dayanmaktadır.



Şekil 3.26. ADB ve EFB üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma stratejisinin çözümü

Öğrencilerden sadece Ö8'in bu stratejiyi uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö8 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencilerin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.46'da sunulmuştur.

Ö8: Simetri almak istiyorum.

A: Hangi şeklin neye göre simetriğini alacaksın?

Ö8: ADB'nin AB ye göre simetriğini alacağım.

A: Buradan EF ve EG ye nasıl geçiş yapacağız?

Ö8: EF'nin EB ye göre simetriğini alacağım.

A: Peki EF' GE'nin devamı mı olur?

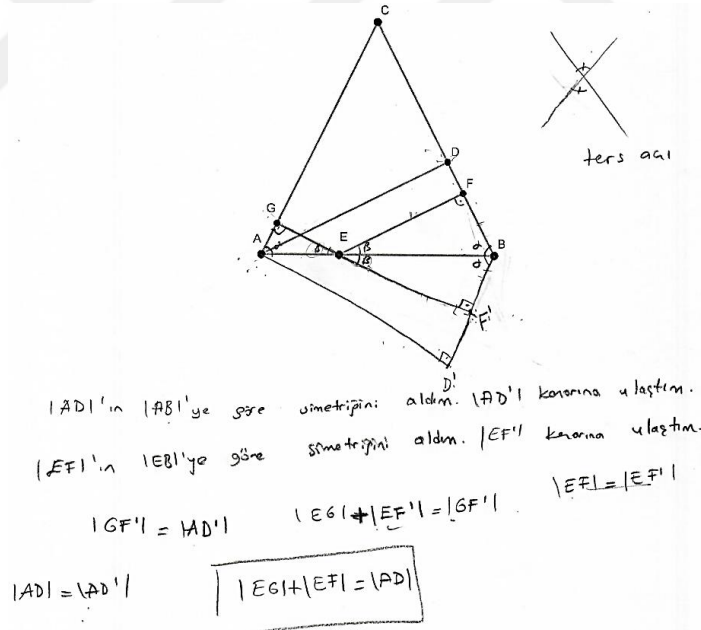
Ö8: Olur.. ama neden ? Aslında F'nin simetriği F' oldu. EFBF' deltoid oldu.

A: Buradan ne yapabiliriz?

Ö8: Ters açılardan yararlanarak GEF' nin doğru olduğunu belirtti.

A: İşlemlerini yazarak gösterebilir misin?

Ö8: Aslında ilk çözümle (AGE üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma stratejisi) aynı yöntem olduğunu düşünmüştüm. Aslında aynı mantık ama farklı simetriler var.



Görsel 3.46. ADB ve EFB üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma stratejisine ait çözümü

3.3.6. Öğrencilerin yükseklik içeren problemdeki toplam çözüm sayılarına yönelik bulgular

Tablo 3.8'de yükseklik içeren probleme ait çözüm grupları ve bu çözüm gruplarına ait stratejileri uygulayarak doğru çözüme ulaşan öğrenciler gösterilmektedir.

Tablo 3.8. Öğrencilerin yükseklik içeren problemdeki toplam çözüm sayıları

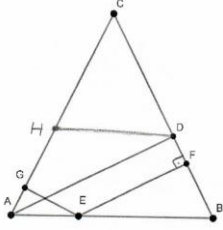
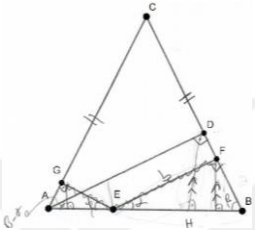
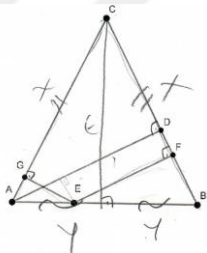
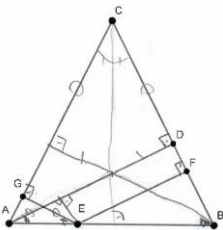
Tema	Kod (Strateji)	Çözüm	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4	Ö5	Ö6	Ö7	Ö8
1. Çözüm Grubu	ABC üçgenini iki üçgene ayırma	1.a		✓			✓	✓	✓	
2. Çözüm Grubu	Yardımcı elemansız çözüm (benzerlik)	2.a		✓						
3. Çözüm Grubu	Yüksekliğe dik inme	3.a			✓		✓		✓	
	Üçgenin kenarına paralel çizme	3.b						✓		
4. Çözüm Grubu	FE doğru parçasının uzantısına dik inme	4.a	✓						✓	
	GE doğru parçasının uzantısına dik inme	4.b							✓	
5. Çözüm Grubu	AGE üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma	5.a								✓
	ADB ve EFB üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma	5.b								✓
Toplam Çözüm Sayısı			1	2	1	0	2	2	4	2

Tablo 3.8 incelendiğinde, öğrencileri en çok doğru çözüme ulaştıran çözüm stratejisinin 1. çözüm grubuna ait olan ABC üçgenini iki üçgene ayırma ve 3. çözüm grubuna ait olan yüksekliğe dik inme stratejileri olduğu görülmüştür.

3.3.7. Doğru çözüme ulaşmayan stratejiler

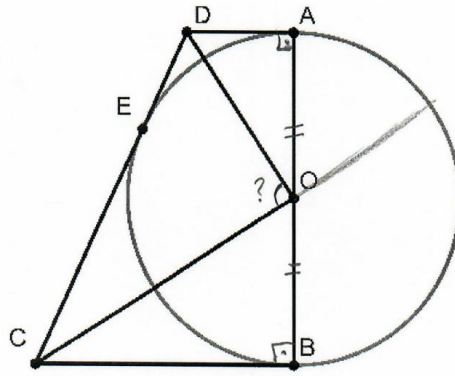
Tablo 3.9’da öğrencilerin yükseklik içeren problemde doğru çözüme ulaşamayan stratejileri, ilgili strateji kapsamında yaptığı çizim ve işlemleri sunulmuştur.

Tablo 3.9. Yükseklik içeren problemde doğru çözüme ulaşmayan stratejiler

Stratejiler	Görüşme Bulguları	Yapılan çizim ve işlemler
D noktasından geçen AB kenarına paralel doğru çizme	 (Ö1)	Bu çözüm denemesinde Ö1 ve Ö6, D noktasından geçen AB kenarına paralel doğru çizmiştir ancak bu çizimi yapan iki öğrenci de yeterli bir çizim olmadığını düşündükleri için yeni stratejiler denemek istemiştir.
F ve D noktalarından AB kenarına dik çizme	 (Ö2)	Bu çözüm denemesinde Ö2 ve Ö7, F ve D noktalarından AB kenarına dik çizmiştir. Çizimi yapan her iki öğrencide dik açıdan dik olduklarını belirterek Öklid teoreminden yararlanmak istediler ancak kenar uzunluklarını bilmedikleri ve çok fazla bilinmeyen kullanılması gerektiği için bu çizimden vazgeçmiştir.
C köşesinden AB kenarına dik (yükseklik) çizme	 (Ö3)	Bu çözüm denemesinde Ö3 ve Ö5, C köşesinden AB kenara dik çizmiştir. Öğrenciler ikizkenar üçgende yükseklik ve kenarortay aynı doğru parçası olduğunu belirterek bu özelliği kullanmıştır ancak istenilen durumun gösterilmesine uygun olmadığını düşündükleri için yeni stratejiler denemek istemiştir.
B köşesinden AC kenarına dik (yükseklik) çizme	 (Ö5)	Bu çözüm denemesinde Ö5 ve Ö6, B köşesinden AC kenara dik çizmiştir. Öğrenciler ikizkenar üçgende EŞ kenarlara ait yüksekliklerin eşit olduğunu belirterek bu özelliği ve oluşan açıları kullanmıştır ancak istenilen durumun gösterilmesi için uygun olmadığını düşündükleri için yeni stratejiler denemek istemiştir.

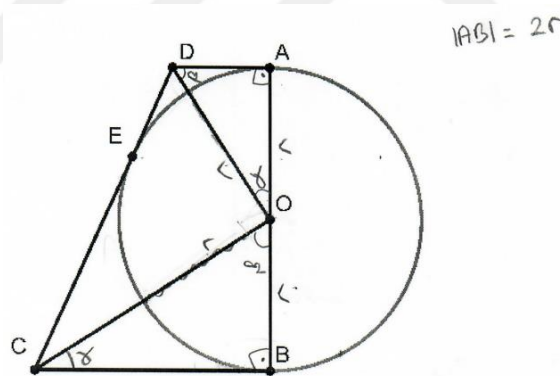
3.4. Öğrencilerin Çember Probleminde Kullandıkları Çözüm Stratejilerine Yönelik Bulgular

Çember probleminde öğrencilerden [AB], Şekil 3.27'deki O merkezli çemberin çapı ve [AD], [DC] ve [CB], O merkezli çembere teğet olmak üzere $m(\widehat{DOC})=90^\circ$ olduğunu olabildiğince çok şekilde göstermeleri istenilmiştir.



Görsel 3.48. Öl'in başlangıç stratejisi

Diğer başlangıç stratejileri kapsamında Ö3'ün, istenilen durumun bir kural olduğunu belirttiği ancak kuralın neden doğru olduğuna dair bir gerekçe sunmadığı saptanmıştır. Ö2 ise açılardan yararlanarak ADO ve COB üçgenleri arasında benzerlik ilişkisi kurmayı denemiş ancak açı ve kenarlar arasından bir ilişki bulamadığı için doğru çözüme ulaşamamıştır. Problem çözme sürecinde Ö2'in yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.49'de sunulmuştur.

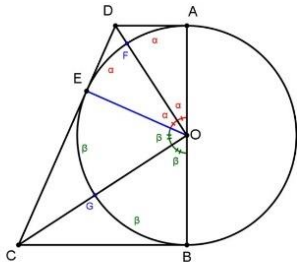


Görsel 3.49. *Ö2'nin başlangıç stratejisi*

Öğrencilerin kullandıkları başlangıç stratejilerinin ardından Şekil 3.28’de yükseklik içeren probleme ait çözüm gruplarındaki stratejiler ile çözüm gruplarında olmayan ve doğru çözüme ulaşmayan stratejiler sunulmuştur.

The diagram shows a circle with center \$O\$ tangent to two intersecting lines \$AC\$ and \$BC\$ at points \$E\$ and \$B\$ respectively. A vertical line segment \$AB\$ passes through \$O\$. Point \$D\$ lies on line \$AC\$, and a line segment \$CD\$ is drawn. A line segment \$OD\$ is drawn from the center \$O\$ to point \$D\$. The angle between \$OD\$ and \$OB\$ is labeled \$\alpha\$ (red), the angle between \$OD\$ and \$OE\$ is labeled \$\beta\$ (green), and the angle between \$OE\$ and \$OB\$ is labeled \$\gamma\$ (blue).

$$m(\widehat{DOC}) = 90^\circ$$

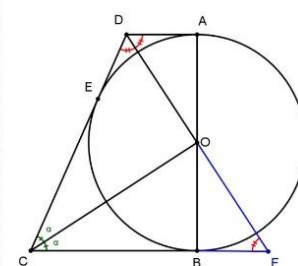


$$m(\widehat{DOC}) = 90^\circ$$

$$m(\widehat{DOC}) = 90^\circ$$

$$m(\widehat{DOC}) = 90^\circ$$

$$m(\widehat{DOC}) = 90^\circ$$


$$m(\widehat{DOC}) = 90^\circ$$

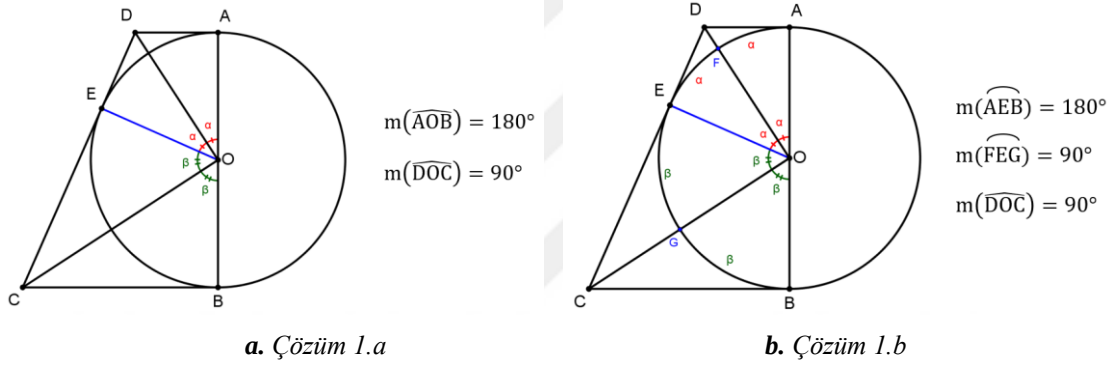
$$m(\widehat{DOC}) = 90^\circ$$

Şekil 3.28. Çember problemine ait çözüm grupları

3.4.1. 1. Çözüm grubu stratejileri

3.4.1.1. EO doğru parçasını (yarıçapını) çizme

Çember probleminin ilk çözüm grubu başlangıç stratejisinde olduğu gibi EO doğru parçasını (yarıçapını) çizme stratejisidir. Bu stratejiye ait 2 farklı çözüm bulunmaktadır. İlk çözümde O merkezinin ve E noktasının doğru parçasıyla birleştirilmesiyle DOC açısının bölünüp, çemberde teğet özelliklerinin sonucu olan OD ve OC açıortaylarının açılardan (Bkz. Şekil 3.29.a) yararlanılmıştır. İkinci çözümde ise merkez açılar ile bu açılara karşılık gelen yay ölçüleri arasındaki ilişkiden (Bkz. Şekil 3.29.b) yararlanarak problemde istenilen durumun gösterilmesi sağlanmıştır. Bu çözüm grubu çizilen doğru parçası ile çemberde teğet özelliklerinin kullanılmasına dayanmaktadır.



Şekil 3.29. EO doğru parçasını (yarıçapını) çizme stratejisinin çözümleri

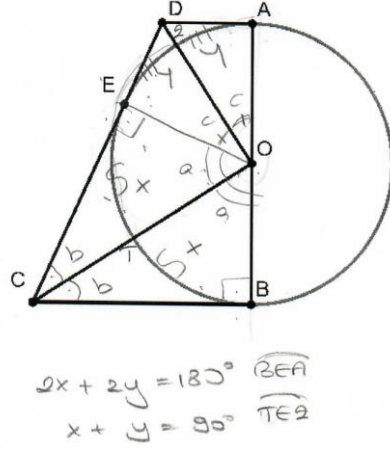
Her öğrencinin bu stratejideki çözüm 1.a'yı uygulanarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö7, EO doğru parçasının çizilmesinin ardından çemberde teğet özelliklerinden yararlanarak EDA ve EAO üçgenlerinin ikizkenar olduğuna karar vermiş ve bu üçgenlerin EDAO deltoidini oluşturduğunu belirtmiştir. Böylece deltoidde açı özelliklerinden yararlanarak istenilen durumu göstermiştir. Öğrenci ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve çözümü Görsel 3.50'de sunulmuştur.

Ö7: A ve B açısına dik diyeceğim.

A: Neden?

Ö7: Çember özelliği teğete merkezden çizilen doğru parçası diktir. Yine teğet özelliğinden AD - DE ve EC - CB birbirine eşittir.

A: Teğet özelliğini kullandın.

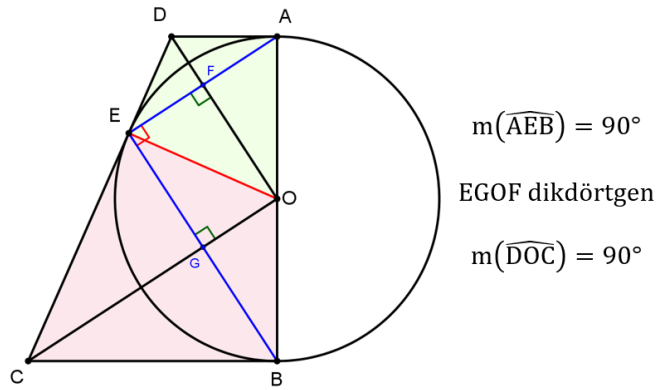


Görsel 3.51. Ö4'ün EO doğru parçasını (yarıçapını) çizme stratejisine ait çözümü

3.4.2. 2. Çözüm grubu stratejileri

3.4.2.1. AE ve EB doğru parçalarını çizme

Çember probleminin ikinci çözüm grubu AE ve EB doğru parçalarını çizme stratejisidir. Bu stratejide AE ve EB doğru parçaları çizilip, EOBC ve EOAD deltoidlerinin köşegen özelliklerine dayanarak OD ve OC açıortaylarının bu doğru parçalarını dik olarak kesmelerinden ve çapı gören çevre açının dik olmasından (Bkz. Şekil 3.30) yararlanarak problemde istenilen durumun gösterilmesi sağlanmıştır. Bu çözüm grubu çizilen doğru parçaları ile çemberde teğet özelliklerinin ve çapı gören çevre açının kullanılmasına dayanmaktadır.



Şekil 3.30. AE ve EB doğru parçalarını çizme stratejisinin çözümü

Öğrencilerden Ö5 ve Ö8'in bu stratejiyi uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö8, BEC ikizkenar üçgeninin açıortayı olan CO

doğru parçasının, EB kenarı ile dik kesiştiğini ve EDA ikizkenar üçgeninin açıortayı olan DO doğru parçasının, EB kenarı ile dik kesiştiğini belirtmiştir. Böylece çapı gören BEA çevre açısının dik olmasıyla oluşan EMOK dikdörtgeninden yararlanarak problemde istenilen durumu göstermiştir. Öğrenci ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve çözümü Görsel 3.52’de sunulmuştur.

Ö8: AEB dik üçgenini çizsem işime yarar mı acaba? (AE ve EB doğru parçalarını çizme)

A: Burada ne yaptın?

Ö8: AEB üçgenini çizdim ve E açısı dik olur

A: Neden dik olur?

Ö8: Çapı gören çevre açısı özelliği

A: Dik olduğunu söyledik. Buradan ne elde edebiliriz?

Ö8: Ne işime yarar acaba.

A: Bizim amacımız neydi bunu düşünebilirsin.

Ö8: (EMOK göstererek) buradan bir kare çıktı. Ama nereden geldiğini soracaksınız

A: Evet, kare olur mu?

Ö8: K açısı dik olacak zaten

A: Neden kesin dik olur

Ö8: BEC ikizkenar bir üçgen açıortaydan K açısı dik olur.

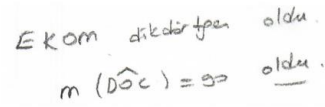
A: Evet buradan ne söyleyebiliriz?

Ö8: E ve K açıları dik oldu

A: DOC açısını bilmek için yeterli mi?

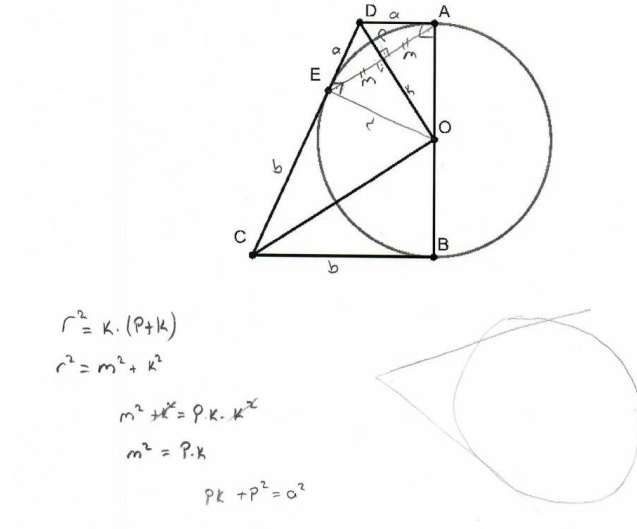
Ö8: Hayır belki EMO açısı farklı olabilir.

Ö8: EDA üçgeni içinde. Benzer bir şey yapabiliriz. EMOK dörtgeninde 3 açısı dik olduğu için diğer açıda dik olur.



Öğrencilerden Ö7'in ise AE ve EO doğru parçalarını çizmiş ancak EB doğru parçasını çizmemiştir. Ayrıca ADO üçgeninde Öklid teoremini uygulamak istemiş ancak bu şekilde DOC açısının dik olduğu gösterilemeyeceğinden dolayı çözüme ulaşamadığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö7 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.53'de sunulmuştur.

Ö7: a, p ve k dan bir şeyler bulup gidebilirim. (Bazı eşitlikler yazdı ancak ilerleyemedi.)

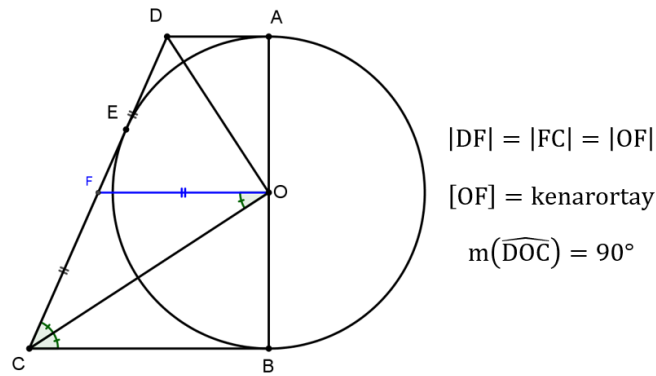


Görsel 3.53. Ö7'nin çözüm için dendiği strateji

3.4.3. 3. Çözüm grubu stratejileri

3.4.3.1. ABCD yamuğunun orta tabanını çizme

Çember probleminin üçüncü çözüm grubu ABCD yamuğunun orta tabanını çizme stratejisidir. Bu stratejide ABCD dik yamuğunun orta tabanı çizilip OF doğru parçasının DOC üçgeninin kenarortayı olduğu gösterilir. Ardından iç ters açılar ile kenarortay özelliği kullanarak (Bkz. Şekil 3.31) problemde istenilen durumun gösterilmesi sağlanmıştır. Bu çözüm grubu orta taban çizilmesi ve çizilen orta tabanın kenarortay ile ilişkilendirilmesine dayanmaktadır.



Şekil 3.31. ABCD yamuğunun orta tabanını çizme stratejisinin çözümü

Öğrencilerden sadece Ö5'in bu stratejiyi uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö5, ABCD dik yamuğuna odaklanarak OF orta

tabanını çizmiş ve CFO-FDO ikizkenar üçgenlerinden yararlanarak OF orta tabanının DOC üçgeninin kenarortayı olduğuna ulaşmıştır. Böylece kenarortay özelliklerinden yararlanarak istenilen durumu göstermiştir. Öğrenci ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve çözümü Görsel 3.54’de sunulmuştur.

Ö5: Dik yamuk var oradan bir şey gelecek gibi hissediyorum. (O noktasından doğru parçası çizdi)

A: Bunu doğru parçasını neye göre çizdin?

Ö5: O noktası 2 ye böldüğü için ve diklik olduğu için aklıma Thales yöntemi geldi.

A: Thales yöntemi dediğin bilgiyi nasıl kullanıyorduk?

Ö5: Oran yapıyorduk, Birde OF orta taban olduğu için alt ve üstün toplamın yarısı oluyordu

A: Burada OF çizerken neye dikkat ettik her çizim doğru olur mu?

Ö5: F, DC’nin ortası olacak şekilde çizdim. Yamukta böyle bir özellik vardı diye hatırlıyorum ama nasıl gösterebilirim onu düşünüyorum.

A: O zaman düşünelim nasıl gösterebiliriz.

Ö5: (İç ters açılardan yararlanarak açıları yerleştirdi.) 90 dereceden inmiş burada muhteşem üçlü var?

A: 90 dereceden indiğini nereden biliyoruz?

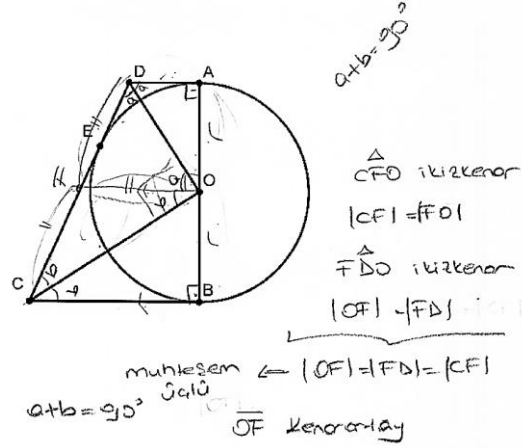
Ö5: Yok ikizkenarlıklardan DF, FO ve FC eşit. Buradan da muhteşem üçlü var DOC dik olur.

A: Burada OF’nin ne gibi özelliği var?

Ö5: Üçü eşit olduğu için muhteşem üçlü var.

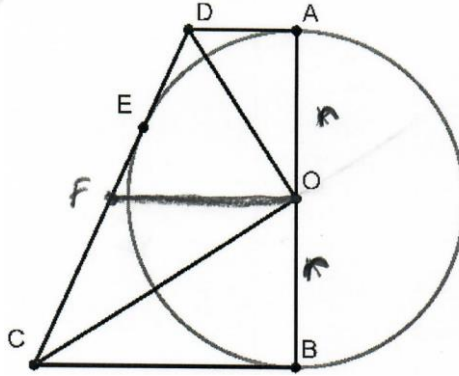
A: Muhteşem üçlü dediğin şey ne?

Ö5: OF kenarortaydır, buradan yapılıyor.



Görsel 3.54. Ö5'in ABCD yamuğunun orta tabanını çizme stratejisine ait çözümü

Öğrencilerden Ö1'in ise ABCD yamuğunun orta tabanını çizme stratejisini uyguladığı ancak çözüme ulaşamadığı görülmüştür. Öğrenci görüşmenin sonlarında O noktası ile DC doğru parçasının orta noktasını birleştirmek istediğini belirterek çizimini yapmış ancak düşüncesini iletilemediği için görüşme sonlandırılmıştır. Problem çözme sürecinde Ö1'in yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.55'de sunulmuştur.



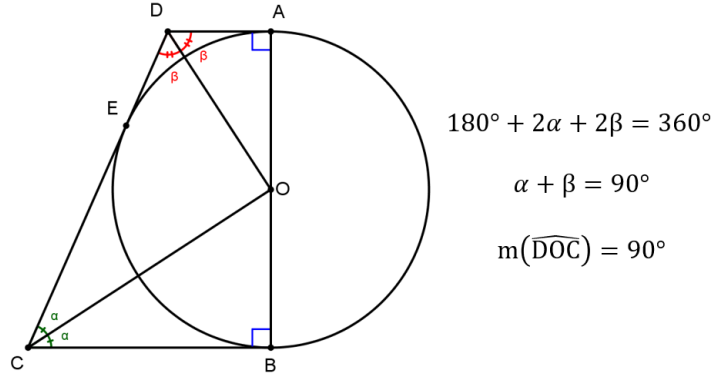
Görsel 3.55. Ö1'in çözüm için denediği strateji

3.4.4. 4. Çözüm grubu stratejileri

3.4.4.1. Çember ve yamukta açı özelliklerini kullanma

Çember probleminin dördüncü çözüm grubu stratejilerinden biri çember ve yamukta açı özelliklerini kullanma stratejisidir. Bu stratejide çemberde teğet özelliklerinden olan OC ve OD açıortaylarını kullanıp ABCD yamuğunun ve DOC üçgeninin iç açılarının toplamından yararlanarak (Bkz. Şekil 3.32) problemde istenilen

durumun gösterilmesi sağlanmıştır. Çözüm grubunun bu stratejisi çemberde teğet özellikleri yardımıyla açıları temsil etmeye ve üçgen-dörtgen şekillerinin iç açıları toplamına dayanmaktadır.

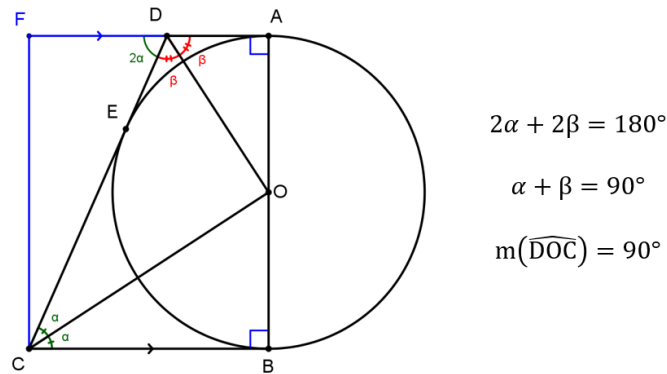


Şekil 3.32. Çember ve yamukta açı özelliklerini kullanma stratejisinin çözümü

Öğrencilerden bu stratejiyi kullanarak doğru çözüme ulaşan öğrenci olmadığı görülmüştür.

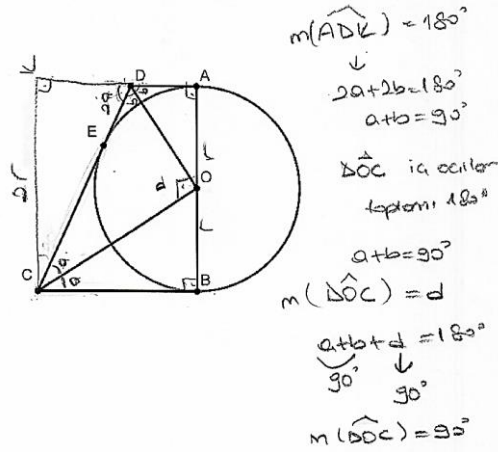
3.4.4.2. Dikdörtgen oluşturma

Çember probleminin dördüncü çözüm grubu stratejilerinden diğeri dikdörtgen oluşturma stratejisidir. Bu stratejide AD doğru parçasının uzantısına C noktasından dik doğru çizmek esastır. Böylece çemberde teğet özelliklerinden olan OC ve OD açıortaylarından ve iç ters açılardan yararlanarak (Bkz. Şekil 3.33) problemde istenilen durumun gösterilmesi sağlanmıştır. Çözüm grubunun bu stratejisi çemberde teğet özellikleri yardımıyla açıları temsil etmeye, iç ters açılara ve doğru açının ölçüsüne dayanmaktadır.



Şekil 3.33. Dikdörtgen oluşturma stratejisinin çözümü

Öğrencilerden sadece Ö5'in bu stratejiyi uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö5, dikdörtgen oluşturduktan sonra iç ters açılardan yararlanarak açıları şekil üzerinde göstermiştir. Böylece ADK doğru açısının ve DOC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğundan yararlanarak istenilen durumu göstermiştir. Öğrenciye ait çözüm Görsel 3.56'de sunulmuştur.



Görsel 3.56. Ö5'in dikdörtgen oluşturma stratejisine ait çözümü

Öğrencilerden Ö2, Ö7 ve Ö8'nin ise dikdörtgen oluşturma stratejisini uyguladıkları ancak çözüme ulaşamadıkları görülmüştür. Öğrenciler dikdörtgen oluşturma stratejini uygularken yaptıkları çizimlerin DOC üçgeninin açılmış hali olarak düşündüklerini belirtmiştir ancak bu durumun kesinliğiyle ilgili bir sonuca ulaşamadıkları için çözüme ulaşamamışlardır. Problem çözme sürecinde Ö8 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.57'de sunulmuştur.

Ö8: Bir de dikdörtgene tamamlayayım.

A: Peki bunu neye göre yaptık?

Ö8: Ben yamuğu tamamladım.

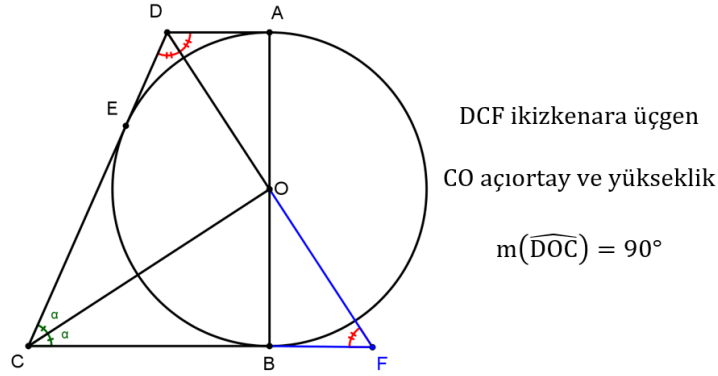
A: Nasıl tamamladın?

Ö8: DOC'yi açmışız gibi düşündüm hatta Z noktası O' olur.

A: Burada simetri mi aldın yoksa AD doğru parçasını mı uzattın?

Ö8: AD'yi uzattım BC ye paralel, ZC de AB paralel. Daha sonra sanki DOC çizdiğim kısma katlanmış gibi geldi.

Böylece CO açıortayının aynı zamanda ikizkenar üçgende yükseklik olması özelliğinden yararlanarak (Bkz. Şekil 3.34) problemde istenilen durumun gösterilmesi sağlanmıştır. Çözüm grubunun bu stratejisi çizilen uzantılar ile oluşan üçgenlerde eşlik ilişkilerine, çemberde teğet özelliklerinin ve ikizkenar üçgende açıortay, kenarortay ve yüksekliğin aynı olmasına dayanmaktadır.



Şekil 3.34. DO ve CB doğru parçalarını uzatma stratejisinin çözümü

Öğrencilerden Ö5 ve Ö6'nın bu stratejiyi uygulayarak doğru çözüme ulaştığı görülmüştür. Problem çözme sürecinde Ö5 ile gerçekleştirilen görüşmenin bir kesiti aşağıda ve öğrencinin yaptığı çizim ve işlemler Görsel 3.58'de sunulmuştur.

Ö5: Bir üçgen yapmış oldum.

A: Nasıl bir üçgen oluşturdu?

Ö5: CB ve DO uzatıp kesiştirdim.

A: Buradan ne yapabiliriz?

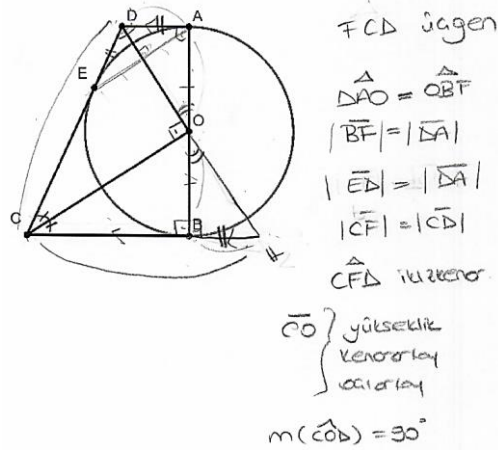
Ö5: Teğet geldikleri için DC ve FC eşit oldu.

A: CE ve BC eşit demiştik kalan parçaların eşitliğini nasıl söyleyebiliriz?

Ö5: Biraz düşüneyim, üçgenler eş olsa olabilir. DA ve BF paralel ve kum saatinden AO ve OB r olduğu için DA ve BF eşit olur.

A: Burada ne kullandım tam olarak yazarak gösterebilir misin?

Ö5: CFD üçgenini ikizkenar olduğu için CO açıortay, yükseklik ve kenarortay olur.



Görsel 3.58. Ö5'in DO ve CB doğru parçalarını uzatma stratejisine ait çözümü

3.4.6. Öğrencilerin çember problemindeki toplam çözüm sayılarına yönelik bulgular

Tablo 3.11'de çember problemine ait çözüm grupları ve bu çözüm gruplarına ait stratejileri uygulayarak doğru çözüme ulaşan öğrenciler gösterilmektedir.

Tablo 3.11. Öğrencilerin çember problemindeki toplam çözüm sayıları

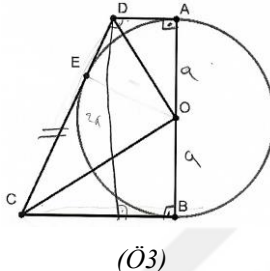
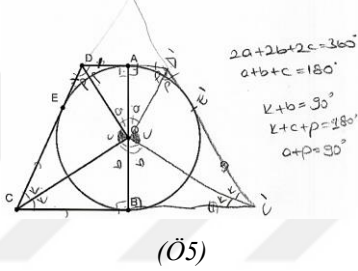
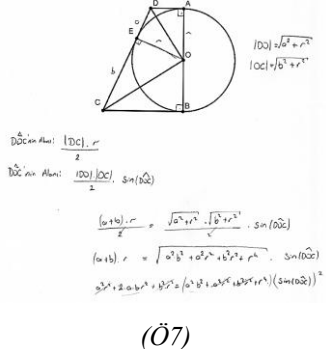
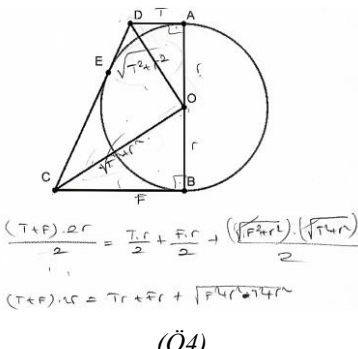
Tema	Kod (Strateji)	Çözüm	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4	Ö5	Ö6	Ö7	Ö8
1. Çözüm Grubu	EO doğru parçasını (yarıçapını) çizme	1.a	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
		1.b	✓	✓		✓	✓		✓	
2. Çözüm Grubu	AE ve EB doğru parçalarını çizme	2					✓			✓
3. Çözüm Grubu	ABCD yamuğunun orta tabanını çizme	3					✓			
4. Çözüm Grubu	Çember ve yamukta açı özelliklerini kullanma	4.a								
	Dikdörtgen oluşturma	4.b					✓			
5. Çözüm Grubu	DO ve CB doğru parçalarını uzatma	5					✓	✓		
Toplam Çözüm Sayısı			2	2	1	2	6	2	2	2

Tablo 3.11 incelendiğinde, öğrencileri en çok doğru çözüme ulaştıran çözüm stratejisinin 1. çözüm grubuna ait olan EO doğru parçasını (yarıçapını) çizme strateji olduğu görülmüştür. Bütün öğrenciler EO doğru parçasını çizerek problemde istenilen durumu göstermiştir.

3.4.7. Doğru çözüme ulaşmayan stratejiler

Tablo 3.12’de öğrencilerin çember probleminde doğru çözüme ulaşamayan stratejiler, ilgili strateji kapsamında yaptığı çizim ve işlemleri sunulmuştur.

Tablo 3.12. Çember probleminde doğru çözüme ulaşmayan stratejiler

Stratejiler	Görüşme Bulguları	Yapılan çizim ve işlemler
D noktasından BC kenarına dik çizme		Bu çözüm denemesinde Ö3, Ö7 ve Ö8, D noktasından BC kenarına dik çizerek dikdörtgen oluşturduklarını belirtmiştir ancak öğrenciler problemde istenilen durumu göstermek için çemberde teğet özelliklerini veya yamuk özelliklerini kullanmak gerektiğini düşündükleri için yeni stratejiler denemek istemiştir.
ABCD yamuğunun AB çapına göre simetriğini alma		Bu çözüm denemesinde Ö5, ABCD yamuğunun AB çapına göre simetriğini almıştır ancak problemde verilen bilgiler haricinde yeni bir bilgiye ulaşamadığını belirterek görüşme sonlandırılmıştır.
Sinüs alan formülünden yararlanma		Bu çözüm denemesinde Ö7, EO doğru parçasını çizmiş ve DOC üçgeninin alanını biri sinüslü alan formülünden yararlanarak 2 farklı şekilde bulup eşitlemek istemiştir ancak işlemlerin karmaşık ve sonuca ulaşamayacağını düşündüğü için yeni stratejiler denemek istemiştir.
Yamuğun alanı		Bu çözüm denemesinde Ö4, DOC üçgeninin alanının yamuğun alanının 2 katı olduğunu belirterek bu eşitliği yazmak istemiştir ancak çok fazla bilinmeyen uzunluk olduğunu ve sonuca ulaşamayacağını düşündüğü için yeni stratejiler denemek istemiştir.

3.5. Çok Çözümlü Problemleri Çözme Stratejilerde Yardımcı Elemanların Rolüne Yönelik Bulgular

Bu başlık altında araştırma kapsamında incelenen dört çok çözümlü problemde öğrencilerin çözüm süreçlerinde hangi yardımcı elemandan yararlandıkları ve bu yardımcı elemanların problem çözme süreçlerindeki rolleri ele alınmıştır.

3.5.1. Kenarortay içeren problemi çözme sürecinde kullanılan yardımcı elemanların rolü

Kenarortay içeren probleminin 1. çözüm grubu stratejilerinden benzer üçgenlerden yararlanma stratejisinde yardımcı eleman eklenmeden istenilen durum gösterilmiştir. Kenarortay çizme stratejisinde ise eklenen kenarortaylar yardımıyla ağırlık merkezi bulunmuştur. Eklenen yardımcı eleman ağırlık merkezi ve eşlik-benzerlik özelliklerinin kullanılmasına imkân sağlamıştır.

2. çözüm grubu stratejilerinden FE doğru parçasını çizme stratejisinde, öğrenciler üçgenin iki kenarına ait orta noktaları olan F ve E'yi doğru parçası ile birleştirmiştir. Böylece eklenen yardımcı eleman eşlik-benzerlik özelliklerinin kullanılmasına imkân sağlamıştır. Eşlik-benzerlik özelliklerinin kullanılmasından sonra öğrenciler, FE doğru parçasının aslında dik bir doğru parçası olduğunu fark ederek Pisagor teoreminden yararlanmış ve çözüm sayılarını arttırmışlardır. Çözüm grubu stratejilerinden diğeri olan DF doğru parçasını çizme stratejisinde ise FE doğru parçasını çizme stratejisine benzer olarak eklenen yardımcı eleman eşlik-benzerlik özelliklerinin ve Pisagor teoreminin kullanılmasına imkân sağlamıştır.

3. çözüm grubu dikdörtgen oluşturma stratejisinde öğrenciler dikmeler çizmiş, dikdörtgen oluşturarak çözüme ulaşmışlardır. Böylece yardımcı eleman çizimi dikdörtgenin özelliklerinin kullanılmasına imkân sağlamıştır. Öğrenciler 2. çözüm grubu stratejilerinde FE ve DE doğru parçalarının kenarlara dik olduğunu gösterdikleri için çizimlerini yaparken doğrudan dikme çizmek istediklerini belirterek çizim yapmışlardır.

4. çözüm grubu stratejisi olan paralelkenar oluşturma stratejisinde öğrenciler bir doğru parçasının simetriğini çizmiştir. Eklenen yardımcı eleman eşlik-benzerlik ve paralelkenar özelliklerinin kullanılmasına imkân sağlamıştır.

Çözüm sürecinde bazı öğrencilerin “belki bir sonuca ulaşabilirim” düşüncesiyle bazı yardımcı elemanlar çizdikleri görülmüştür.

3.5.2. Açıortay içeren problemi çözme sürecinde kullanılan yardımcı elemanların rolü

Açıortay içeren problemin 1. çözüm grubu stratejisi olan açıortay ayağından üçgenin kenarlarına dik inme stratejisinde öğrenciler dikmeler çizmiştir. Eklenen yardımcı eleman ilk olarak öğrencilerin açıortay özelliklerini hatırlamalarına imkân sağlamıştır. Açıortay özelliklerini fark ettikten sonra öğrenciler alan bağıntılarından yararlanarak istenilen durumu göstermişlerdir.

2. çözüm grubu stratejisi olan açıortaya paralel çizme stratejisinde öğrenciler paralel doğru çizmiştir. Eklenen yardımcı eleman yörünge ve iç-ters açılarının fark edilmesine imkân sağlamıştır. Daha sonra öğrencilerin şekli farklı bir üçgene tamamlayarak eşlik-benzerlik özelliklerini kullandıkları görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin bu çözüm stratejisinde farklı bir köşeden paralel doğru çizerek yeni bir çözüm yolu da elde ettikleri saptanmıştır.

3. çözüm grubu stratejilerinden açıortay ayağından üçgenin kenarlarına paralel çizme ve açıortay uzantısından üçgenin kenarlarına paralel çizme stratejilerinde öğrenciler paralel doğrulara odaklanmışlardır. Eklenen yardımcı eleman yörünge ve iç-ters açılarının fark edilmesine imkân sağlamıştır. Daha sonra öğrenciler eşlik-benzerlik özelliklerinden yararlanarak istenilen durumu göstermişlerdir.

4. çözüm grubu stratejisi olan açıortaya ve/veya açıortay uzantısına dik inme stratejisinde dikmeler çizilmiştir. Bu stratejiyi kullanarak doğru çözüme ulaşan öğrenci olmamıştır.

5. çözüm grubu stratejisi olan yardımcı elemansız çözüm stratejisinde ek çizim yapılmadan trigonometri özellikleri kullanarak çözüme ulaşılması beklenmektedir. Bu stratejiyi kullanarak da doğru çözüme ulaşan öğrenci olmamıştır.

Çözüm sürecinde öğrencilerin sıklıkla eşlik-benzerlik ilişkisi arayabilmek için paralel doğrular çizdikleri görülmektedir. Öğrenciler şeklin farklı noktalarından paralel doğrular çizerek çözüme ulaşmıştır. Paralel doğrular çizerken paralelkenar oluşturmuşlar ve paralelkenar özelliklerini hatırlayarak problemi çözmeye çalışmışlardır. Burada

yardımcı elemanların eklenmesi öğrencileri geçmiş bilgilerini hatırlatmaya ve kullanmaya yönlendirmiştir. Ayrıca öğrencilerin “belki bir sonuca ulaşabilirim” düşüncesiyle bazı yardımcı elemanlar çizdikleri de görülmüştür.

3.5.3. Yükseklik içeren problemi çözme sürecinde kullanılan yardımcı elemanların rolü

Yükseklik içeren problemin 1. çözüm grubu stratejisi olan ABC üçgenini iki üçgene ayırma stratejisinde üçgeni bölen bir doğru parçası çizilmiştir. Eklenen yardımcı eleman öğrencilerin şeklin bütünü yerine oluşan iki küçük üçgene odaklanmalarına imkân sağlamıştır. Daha sonra öğrenciler problemde verilen diklikleri alan bağıntısı yardımıyla kullanabileceklerini fark ederek istenilen durumu göstermişlerdir.

2. çözüm grubu stratejisi olan yardımcı elemansız çözüm stratejisinde ek çizim yapılmadan eşlik-benzerlik özellikleri kullanarak çözüme ulaşılması beklenmektedir.

3. çözüm grubu stratejilerinden yüksekliğe dik inme stratejisinde öğrenciler dikdörtgen oluşturma düşüncesiyle dikme çizmiştir. Eklenen yardımcı eleman üçgenlerde eşlik-benzerlik ilişkilerinin kurulmasına imkân sağlamıştır. Çözüm grubunun bir diğer stratejisi olan üçgenin kenarına paralel çizme stratejisinde paralel doğru çizilmiştir. Eklenen yardımcı eleman diğer stratejide de olduğu gibi üçgenlerde eşlik-benzerlik ilişkilerinin kurulmasına imkân sağlamıştır. Daha sonra öğrenciler eşlik-benzerlik ve dikdörtgen özelliklerinden yararlanarak istenilen durumu göstermişlerdir.

4. çözüm grubu stratejilerinden FE doğru parçasının uzantısına dik inme ve GE doğru parçasının uzantısına dik inme stratejilerinde öğrenciler dikdörtgen oluşturma düşüncesiyle dikme çizmiştir. Eklenen yardımcı eleman yondeş ve iç-ters açılardan üçgenlerde eşlik-benzerlik ilişkilerinin kurulmasına imkân sağlamıştır. Daha sonra öğrenciler eşlik-benzerlik ve dikdörtgen özelliklerinden yararlanarak istenilen durumu göstermişlerdir.

5. çözüm grubu stratejilerinden AGE üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma ve ADB ve EFB üçgeninin AB kenarına göre simetrisini alma stratejilerinde öğrenciler dikdörtgen oluşturma düşüncesiyle doğru parçalarının simetriğini alarak yeni doğru parçaları çizmiştir. Eklenen yardımcı eleman yondeş ve iç-ters açılardan yararlanarak üçgenlerde eşlik-benzerlik ilişkilerinin kurulmasına imkân sağlamıştır.

Çözüm sürecinde öğrenciler yaptıkları çizimler ile deltoid gibi dörtgenleri oluşturdıkları ve bu dörtgenin özelliklerinden yararlanarak problemde çözüm yollarını arttırdıkları görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin yükseklik içeren problemde verilen farklı noktalardan dikmeler çizerek Pisagor ve Öklid teoremlerini kullanmayı denedikleri görülmüştür. Diğer problemlerde olduğu gibi öğrenciler “belki bir sonuca ulaşabilirim” düşüncesiyle bazı yardımcı elemanlar çizmişlerdir.

3.5.4. Çember problemini çözme sürecinde kullanılan yardımcı elemanların rolü

Çember probleminin 1. çözüm grubu stratejisi olan EO doğru parçasını (yarıçapını) çizme stratejisinde öğrenciler çemberde teğet özelliklerinden yararlanmak için yarıçap çizmiştir. Eklenen yardımcı eleman öğrencilerin şeklin bütünü yerine şeklin parçalarına odaklanmalarına imkân sağlamıştır. Daha sonra öğrenciler çemberde teğet özelliklerinden yararlanarak çizilen doğru parçasının dik olduğunu hatırlayarak problem çözme sürecine devam etmiştir. Ardından açıortay, deltoid ve çemberde yay özelliklerinden yararlanarak istenilen durumu göstermişlerdir.

2. çözüm grubu stratejisi olan AE ve EB doğru parçalarını çizme stratejisinde öğrenciler, daha önceki çözüm grubu stratejisinde elde ettikleri deltoid özelliklerini kullanabilmek için deltoidlerin köşegenleri olan doğru parçalarını çizmiştir. Eklenen yardımcı elemanlar problemde bir dörtgen ve çemberin çevre açısını oluşturulmasına imkân sağlamıştır. Daha sonra öğrenciler çemberde çevre açısı ve deltoid özelliklerini kullanarak oluşan dörtgenin aslında dikdörtgen olduğunu fark etmişlerdir.

3. çözüm grubu stratejisi olan ABCD yamuğunun orta tabanını çizme stratejisinde öğrenciler dik yamuğu fark ederek orta taban olarak bir doğru parçası çizmiştir. Eklenen yardımcı eleman Thales teoremini hatırlatarak kenarlar arasında ilişki kurulmasına imkân sağlamıştır. Daha sonra elde edilen yeni bilgilere göre çizilen doğru parçasının aslında kenarortay olduğu fark edilmiştir. Ardından öğrenciler ikizkenar üçgen ve kenarortay özelliklerinden yararlanarak istenilen durumu göstermişlerdir.

4. çözüm grubu stratejilerinden çember ve yamukta açı özelliklerini kullanma stratejisinde ek çizim yapılmadan çember ve çokgen özelliklerinin kullanılarak çözüme ulaşılması beklenmektedir. Çözüm grubunun bir diğer stratejisi olan dikdörtgen oluşturma stratejisinde ise dikmeler çizilmiştir. Eklenen yardımcı eleman iç-ters açılar

fark edilmesine imkân sağlamıştır. Daha sonra öğrenciler üçgen ve dörtgenin açı özelliklerinden yararlanarak istenilen durumu göstermişlerdir.

5. çözüm grubu stratejisi olan DO ve CB doğru parçalarını uzatma stratejisinde öğrenciler, “belki bir sonuca ulaşabilirim” düşüncesiyle doğru parçaları çizmiştir. Eklenen yardımcı elemanlar eşlik-benzerlik ilişkilerinin fark edilmesine imkân sağlamıştır. Daha sonra öğrenciler ikizkenar üçgende eş açılara ait olmadan köşeden inilen yükseklik, kenarortay ve yüksekliğin aynı doğru parçası olması özelliğinden yararlanarak istenilen durumu göstermişlerdir.

Çözüm sürecinde öğrencilerin çember probleminde yardımcı eleman ekleme konusunda, diğer problemlere göre daha rahat hissettikleri görülmüştür. Ayrıca öğrenciler dikme çizdikleri durumlarda sıklıkla alan bağıntılarından yararlanmış ve Pisagor teoremini uygulama eğiliminde olmuşlardır.

4. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde, araştırma sürecinde elde edilen sonuçlar iki başlık altında sunulmuştur. Ardından araştırma sonuçları ile literatürdeki diğer araştırmalar tartışılmış ve önerilere yer verilmiştir.

4.1. Sonuç

Kenarortay içeren problemde öğrencilerin sıklıkla üçgenin kenarlarının orta noktalarını doğru parçasıyla birleştirip bilinen teorem ve özellikleri kullanmaları ulaşılan ilk sonuçlardandır. Öğrenciler başta doğru parçası olarak çizdikleri yardımcı elemanların aslında diklik gibi başka özelliklerinin olduğunu fark ederek çözüm stratejilerini bu yönde geliştirmişlerdir. Problemde çözüm bulabilmek veya çözüm sayısını artırabilmek için öğrenciler genellikle geçmiş problem çözme deneyimlerini hatırlamaya çalışarak ek çizimler yapmışlardır. Öğrencilerin bazıları görüşmelerin başlarından problemde “muhteşem üçlü” olarak isimlendirdikleri kenarortay özelliğinden yararlanmaları gerektiğini düşünmektedir. Ancak bu özelliğin neyi ifade ettiği veya nedeni sorgulandığında cevap verememişlerdir. Buna ek olarak problemde verilen doğru parçası ile kenarortayın kesişiminin ağırlık merkezi olduğunu belirtmişlerdir. Görüşme sırasında sorulan sorular ve öğrenciden istenen açıklamalardan sonra öğrenciler ağırlık merkezinin neresi olacağını hatırlamışlardır. Kenarortay içeren problem araştırma sürecinde incelenen ilk problem olduğu için bazı öğrenciler ek çizim yapmadan verilen şekil üzerinde eşlik-benzerlik ilişkileri kurmaya çalışmıştır. Ancak istedikleri ilişkiyi bulamamalarının ardından “kum saati” ve “kelebek” şeklinde isimlendirdikleri eşlik-benzerlik özelliklerini kullanabilmek için ek çizimler yapmışlardır.

Açıortay içeren problemde öğrencilerin istenilen durumun gösterilmesi için belirli noktalardan dik inmeleri ve bu dikmeleri sıklıkla alan bağıntılarının ve bilinen teoreminin uygulanmasında kullanmaları ulaşılan diğer bir sonuçtur. Ek olarak öğrenciler paralel doğrular çizerek eşlik-benzerlik özelliklerini uygulamayı denemiştir. Ayrıca öğrencilerin sıklıkla verilen şekli dikdörtgene veya paralelkenara tamamlama eğiliminde olmalarına karşın bu stratejiyle doğru çözüme ulaşan öğrenci olmamıştır. Öğrencilerin çoğunluğu problem ile ilk karşılaştığında istenilen durumun bir kural olduğunu belirtmiş ancak bu kuralın gerekçesi sorulduğunda ezberlediklerini veya daha önce hiç sorgulamadıklarını belirtmişlerdir. Öğrencilerin istenilen durum olan $\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$ yerine ders kitaplarında iç

açıortay teoreminin sonucu olarak verilen $\frac{c}{p} = \frac{b}{q}$ eşitliğini yazma eğiliminde bulunmaları bu durumun göstergesidir. Öğrenciler daha önceki öğretim süreçlerinde, açıortay ile ilgili özellikleri doğrudan ezberlediklerini belirtmişler, bu nedenle açıortay teoreminin veya özelliklerinin nedenlerini göstermekte zorluk yaşamışlardır. Öğrenciler daha önceki problem çözme deneyimlerinde problemlerde kenar uzunluklarının verildiğini bu sayede açıortay teoremini rahatlıkla uygulayabildiklerini belirtmişlerdir. Ancak açıortay içeren araştırma probleminde kenar uzunluklarını bilmedikleri için istenilen durumu göstermekte zorlanmışlardır. Öğrenciler ek çizim yapmakta zorlandıkları durumlarda kâğıdı çevirerek şeklin farklı kısımlarına odaklanmışlardır. Görüşmelerin sonlarına yaklaşıldığında öğrenciler “belki bir sonuca ulaşabilirim” düşüncesiyle rastgele ek çizimler yapmışlardır. Ancak rastgele yapılan bu ek çizimlerle geometrik olarak bazı imkansız çizimlerde gerçekleşmiştir.

Yükseklik içeren problemde öğrencilerin sıklıkla üçgeni iki üçgene ayırma ve dikme inme eğiliminde olmaları ulaşılan diğer bir sonuçtur. Yükseklik içeren problemde çok sayıda diklik durumunun olmasından dolayı öğrenciler ilk olarak Pisagor teoremini, Öklid teoremini veya alan bağıntılarını uygulamaya çalışmış ancak kenar uzunluklarını bilmedikleri için çözüme ulaşamayacaklarını fark etmişlerdir. Pisagor ve Öklid teoremlerinden sonuca ulaşamayan öğrenciler problemde dikmeler ile ikizkenar üçgen olduğu için eşlik-benzerlik ilişkileri arayarak çözüme ulaşmışlardır. Öğrenciler problemi farklı stratejiler kullanarak çözmek için sıklıkla bazı noktalardan dikler çizmişlerdir. Çizilen bu dikmeler yeni eşlik-benzerlik ilişkilerinin fark edilmesine ve dikdörtgenin özelliklerini kullanmasını imkân sağlamıştır.

Çember probleminde ulaşılan sonuçlardan biri öğrencilerin sıklıkla çember özelliklerini kullanabilmek için yarıçap çizimeleridir. Eklenen yardımcı eleman çemberde teğet özelliklerinin kullanılmasına ve ikizkenar üçgenlerin fark edilmesine imkân sağlamıştır. Ayrıca doğru parçası aracılığıyla dik yamuğu iki deltoide bölerek problemde istenilen durum farklı yollarla da gösterilmiştir. Öğrencilerin bazıları çemberin kirişlerini ve yarıçaplarını oluşturan deltoidlerin köşegen özelliklerini kullanarak çözümlerini çeşitlendirmiştir. Bazı öğrenciler çemberin merkezinden dik yamuğa ait orta tabanı da çizmişlerdir. Çizilen bu orta taban dik yamuğun içinde olan üçgenin kenarortayı olmuştur. Böylece problem için çizilen orta taban kenarortay ve iç ters açılarının özelliklerinin kullanılmasını sağlamıştır. Diğer problemlerde olduğu gibi dik açılarının olmasından dolayı

öğrencilerin bilinen teoremleri uygulamak istedikleri elde edilen sonuçlar arasında bulunmaktadır.

Araştırma sürecinden elde edilen en genel sonuç öğrencilerin üçgenin yardımcı elemanları olan açıortay, kenarortay ve yükseklik ile ilgili özellik ve teoremleri hatırlamaları ancak bu özelliklerin veya teoremlerin gerekçelerini sunmada yetersiz kalmalarıdır. Ayrıca öğrenciler problemlerin çözüm süreçlerinde kullandıkları özelliklerin “muhteşem üçlü”, “Z kuralı”, “312 kuralı” gibi bazı ezberlemeye yönelik isimlendirmelerle hatırlamışlardır. İncelenen dört problemde de öğrenciler dik açı ile karşılaştıklarında ilk olarak Pisagor ve Öklid teoremlerini uygulama eğilimindedirler. Ancak araştırma problemlerinde öğrencilerden özellik veya teoremleri doğrudan uygulamak yerine nedenlerini göstermeleri istenilmiştir. Bu yüzden öğrenciler genellikle Pisagor ve Öklid teoremlerini işlemlerin karmaşık ve bilinmeyen sayısının fazla olduğu gerekçesiyle uygulamaktan vazgeçmişlerdir. Görüşme süreçlerinde öğrencilerin bir özelliği hatırlayamadığı durumlarda araştırmacı tarafından yönlendirici sorular sorulmuş ve öğrencilerin özellikleri kendilerinin keşfetmeleri sağlanmıştır. Böylece öğrenciler bilgilerini ve geçmiş deneyimlerini hatırlayarak problemde istenilen durumları göstermişlerdir.

Elde edilen diğer bir sonuç öğrencilerin daha önceki problem çözme süreçlerinde genellikle tek çözüme ulaştıkları için her problemi tek çözümlü gibi düşünmeleridir. Ayrıca ek çizim yapma konusunda öğrencilerin rahat olmamaları ve hata yapmamak için ek çizim yapmamaları ulaşılan diğer bir sonuçtur. Ancak çözüm sayısını arttırabilmek için problemin farklı noktalarına odaklanarak ek çizim yapmaya çalışmaları çok çözümlü problemlerin öğrencilerin problem çözme süreçlerindeki etkisini göstermektedir. Öğrenciler ek çizimler yaparken bazı durumlarda geometrik inşaları göz ardı ederek rastgele çizimler yapmışlardır. Bu yüzden öğrencilerin doğru olarak çizdiklerini düşündükleri bazı çizimlerin geometrik olarak imkânsız olduğu görülmüştür.

Tablo 4.1’de problemlere göre öğrencilerin çözüm sayıları gösterilmektedir.

Tablo 4.1. Problemlere göre öğrencilerin çözüm sayıları

Öğrenci	Kenarortay İçeren Problem	Açıortay İçeren Problem	Yükseklik İçeren Problem	Çember Problemi
Ö1	2	0	1	2
Ö2	4	3	2	2
Ö3	3	1	1	1
Ö4	3	3	0	2
Ö5	5	1	2	6
Ö6	4	3	2	2
Ö7	3	0	4	2
Ö8	1	2	2	2

Tablo 4.1 incelendiğinde, öğrencilerin çoğunlukla problemlerde 1 ile 3 arasında farklı çözüm buldukları görülmüştür. Bunun yanı sıra Ö2, Ö5 ve Ö6 diğer öğrencilere göre daha fazla çözüm bulmuştur.

4.2. Tartışma

İlköğretim matematik öğretmenliği programındaki birinci sınıf öğrencilerinin çok çözümlü problemleri çözme süreçlerinde kullandıkları stratejilerin incelenmesi ve bu stratejilerde yardımcı elemanların rolünün belirlenmesinin amaçlandığı bu araştırmada bir takım önemli sonuçlara ulaşılmıştır. Öğrenciler, daha önceki problem çözme süreçlerinde genellikle tek çözüme ulaştıklarını bu yüzden her problemi tek çözümü varmış gibi düşündüklerini belirtmişlerdir. Öğrencilerin ilkokuldan başlayarak yüksek öğrenime kadar çoktan seçmeli soruların bulunduğu sınavlar ile değerlendirildikleri için problem veya soruları tek yolla çözüme ulaştırmalarının yeterli olması bu durumun en temel sebeplerinden biri olabilir. Böylece öğrenciler problemlerde çok çözüm yolu arayarak farklı matematiksel bilgi ve stratejilerden yararlanmak yerine en hızlı ve kolay olan çözüme ulaşmaya alışmışlardır. Schoenfeld (1988, s.163-164) tarafından yapılan çalışmada da benzer şekilde öğrencilerin problem türlerine göre belirli çözüm yollarının olduğunu düşündükleri sonucuna ulaşılmıştır. Ek olarak Leikin ve Levav-Waynberg (2007, s.366-367) ve Leikin (2011, s. 1003) yapmış oldukları çalışmada öğretmenler öğretim programını belirli zaman süresinde tamamlamak zorunda olmaları ve öğrencilerin çok çözümlü problemleri incelerken kafalarının karışabileceğini

düşündükleri için çok çözümlü problemleri öğretim süreçlerine entegre etme konusunda çekingen tavır sergilemişlerdir. Her ne kadar bazı öğretmenler çok çözümlü problemleri öğretme ve öğrenme süreçlerine entegre etmekte çekingen olsalar da çok çözümlü problemler hem öğrenciler hem de öğretmenler için matematiksel düşünmeyi ve problem çözme becerilerini geliştirme potansiyeline sahiptir. Araştırma kapsamında araştırmacı dört problemi tıpkı öğrenciler gibi belirli süre içinde olabildiğince çok yolla çözmeyi denemiştir. Araştırmacı eksiksiz şekilde uzman çözüm alanlarını belirlemeye çalışsa da kenarortay, yükseklik ve çember içeren problemlerde klinik görüşmelerden sonra öğrenciler tarafından uzman çözüm alanına eklenecek ek çözümler ortaya çıktığı görülmüştür. Bu durum çok çözümlü problemleri uygulamanın yalnızca öğrencilerin matematiksel düşüncelerini geliştirmekle kalmayıp aynı zamanda öğretmenlerin de öğretirken öğrenmelerine veya bakış açılarını geliştirmeye imkân sağladığının bir göstergesidir. Bu bulgulara paralel olarak Leikin (2009, s. 35) ve Stupelac ve Ben-Chaimab (2017, s. 103) tarafından yapılan çalışmalarda çok çözümlü problemlerin sınıf içi tartışmaları zenginleştirmek için bir araç sağladığı, öğrencilerin matematiksel düşünme, akıl yürütme ve yaratıcılıklarını geliştirmeye yardımcı olduğunu belirtmişlerdir. Ek olarak öğrencilerin çözümlerine dayanarak öğretmen adayları ve öğretmenlerin uzman çözüm alanlarını geliştirip öğretme yoluyla öğrendiklerini ortaya çıkarmışlardır. Öğrenciler problemleri çözme süreçlerinde açıortay ve kenarortay gibi yardımcı elemanların bazı temel özellikleri hatırlamakta veya hatırladıkları özelliklerinin nedenlerini belirtme konusunda güçlük çektikleri görülmüştür. Ancak çok çözümlü problemler öğrencilere özgür bir çalışma alanı sunduğu için klinik görüşme sırasında çözüm denemelerine ek olarak araştırmacının sorgulamalarıyla unuttukları özellikleri hatırladıkları veya yeni özellikler keşfetmelerine imkân sağladığı görülmüştür. Benzer şekilde Leikin (2014, s.78) çok çözümlü problemler ile matematiksel araştırmalar arasındaki ilişkiyi analiz ettiği çalışmasında çok çözümlü problemlerin öğrencilere esneklik sağlayarak verilen geometrik şekle ait ek özelliklerinin keşfedildiği sonucuna ulaşmıştır.

Öğrencilerin klinik görüşmelerin ilk oturumlarında ek çizim yapma konusunda rahat hissetmedikleri ve hata yapmamak için az sayıda ek çizim yaptıkları görülmüştür. Öğrencilerin ek çizimler yoluyla şekle yardımcı eleman ekleme konusunda zorlanmalarının nedenleri geometrik şekillere yardımcı eleman eklenmesini teşvik etmeyen bir öğretim şeklinin olması veya geometri bilgisindeki bazı temel eksikler

olabilir. Öyle ki öğrenciler verilen bir geometrik şeklin temel özelliklerini bilmeden bu şekle eklenecek olan yardımcı elemanın neden eklenmesi gerektiğini ve şekilde neleri değiştirebileceğinin farkında olmayacaktır. Benzer şekilde Palatnik ve Dreyfusb (2019, s.2) ve Hsu (2007, s.57) öğrencilerin problem çözme ve ispat süreçlerinde yardımcı elemanları kullanmada zorluk yaşadıklarını ve bu zorluğun nedenleri olarak yardımcı elemanların eklenmesi gereken problemlerin yeterli şekilde incelenmemesi ve öğrencilerin şekille etkileşime girecekleri dinamik ortamların sağlanmaması olarak belirtmişlerdir.

Öğrenciler problemlerle ilk karşılaştıklarında yardımcı eleman çizmeden problemin mevcut verilerinden yararlanarak eşlik-benzerlik ilişkisi, diklikler yardımıyla alan bulma ve geometrik şekillerin temel özelliklerinden yararlanarak istenilen durumu göstermeyi denemişlerdir. Problemlerde belirli zamanda olabildiğince çok yolla çözüm bulunulması istenildiğinden öğrenciler mevcut bilgileri kullandıktan sonra çözüm yollarını arttırmak için şekle yeni elemanlar eklemişlerdir. Herbst'in (2004, s.12) de belirttiği gibi yardımcı elemanlar, öğrencilerin problemde verilen nesneler ile etkileşime girmesine imkân sağlamaktadır. Bu noktada çok çözümlü problemlerin öğrencilerin şekle yardımcı eleman eklenmesini teşvik ettiği söylenebilir. Polya (2017, s. 44) yardımcı elemanların kullanım nedenlerini 3 başlık altında incelemiştir. Bu nedenlerden ilk ikisi olan “bilinen sonuçları kullanmaya çalışmak” ve “tanımlara geri dönmek” genellikle yardımcı elemanın hatırlatıcı rolünün olduğunu göstermektedir. Üçüncü “problemi daha kapsamlı, daha düşündürücü ve daha tanıdık hale getirmek” nedeni kapsamında ise yardımcı elemanın problemde tam olarak nasıl kullanılacağı bilinmese de daha çok sezgisel olarak problemin daha anlamlı hale getirilmesi beklenir. Palatnik ve Sigler (2019) tarafından yapılan çalışmada Polya'nın sunduğu birinci ve ikinci nedene odaklanılarak bu nedenleri kendi içlerinde şekli bölen ve ilgisiz nesneleri birleştiren yardımcı eleman olmak üzere iki alt başlığa ayırmıştır. Bu araştırmada klinik görüşmeler sırasında öğrencilerin problemde verileri kullandıktan sonra farklı çözüm yollarına ulaşmak için ekledikleri yardımcı elemanlar incelendiğinde ilk olarak sıklıkla yükseklik veya dikme çizdikleri görülmüştür. Çizilen bu yükseklikler öğrencilere alan bulma formülünü hatırlatarak problemin farklı yolla çözülmesini sağlamıştır. Ayrıca öğrenciler “geometri problemlerinde dik çizildiğinde sonuç çıkıyordu” düşüncesiyle diklikler çizerek Pisagor ve Öklid teoremlerini uygulamayı denemişlerdir. Ulaşılan bu bulguların paralelinde Palatnik ve Dreyfusb (2019, s.13) tarafından yapılan çalışmada onuncu sınıf lise öğrencilerin

yardımcı eleman eklenmesi gereken problemlerde doğru çözüme ulaşmak için ilk olarak yükseklik çizerek alan bulma formüllerini kullandıkları görülmüştür. Bu durum yardımcı elemanların bilinen sonuçları veya tanımları hatırlamaya olan katkısını göstermektedir. Klinik görüşmelerde öğrenciler Palatnik ve Sigler'in (2019) belirttiği gibi ilgisiz nesneleri birleştiren ve şekli bölen yardımcı elemanları sıklıkla kullanmışlardır. Yükseklik içeren problemin birinci çözüm grubu stratejisi olan ABC üçgenini iki üçgene ayırma stratejisinde şekle eklenen yardımcı eleman şekli bölerek alan formülünün kullanılmasını hatırlatmıştır (Bkz. Şekil 3.19). Benzer şekilde açortay içeren problemin ikinci çözüm grubu stratejisi olan açortaya paralel çizme stratejisinde şekle eklenen yardımcı eleman şeklindeki ilgisiz nesneleri birleştirerek öğrencilerin yeni ayrıntıları fark ederek matematiksel ilişkiler kurmasını sağlamıştır (Bkz. Şekil 3.12). Klinik görüşme oturumlarının sonlarına gelindiğinde öğrenciler Polya'nın yardımcı elemanları kullanım nedenlerinin üçüncüsü kapsamında problemi daha anlamlı ve iyi hale getirebilmek için bazı yardımcı elemanları şekle eklemişlerdir. Bazı öğrencilerin şekle yardımcı eleman eklerken yalnızca kalem ve kâğıt kullandıkları için geometrik temellere aykırı imkânsız çizimler yaptıkları görülmüştür. Bu durum öğrencilerin geometrik şekilleri dinamik olarak algılamakta zorlandıklarının göstergesidir. Kâğıt-kalem ortamının ötesinde olan dinamik geometri ortamlarının görselleştirme gücü ve dinamik yapısı öğrencilerin geometrik kavram ve yapıları inceleyerek özelliklerini belirlemeye ve yapılar üzerinde araştırma yapmaya imkân sağlamaktadır (Köse, 2008, s.15). Küçükkahveci (2020, s.104-105) tarafından ilköğretim matematik öğretmenliği programındaki ikinci sınıf öğrencilerinin kâğıt-kalem ve dinamik geometri ortamında çok çözümlü problemlerde çözüm yollarını incelenmesini amaçlayan çalışmada dinamik geometri yazılımı kullanarak gerçekleştirilen problem çözme süreçlerinde kâğıt-kalem ortamına göre daha çok sayıda çözüm geliştirildiği sonucuna ulaşılmıştır.

Araştırma kapsamında ulaşılan bir diğer önemli sonuç ise öğrencilerin üçgenin yardımcı elemanları olan açortay, kenarortay ve yükseklik ile ilgili özellik ve teoremleri hatırladıkları ancak bu özelliklerin veya teoremlerin gerekçelerini sunmada yetersiz kalmalarıdır. Ayrıca öğrenciler problem çözüm süreçlerinde kullandıkları özelliklerin “muhteşem üçlü”, “Z kuralı”, “312 kuralı” gibi bazı ezberlemeye yönelik isimlendirmelerle hatırladıkları görülmüştür. Güven ve Karataş (2003, s.73) 8. sınıf öğrencileri ile yaptıkları çalışmada öğrenciler geometriyi anlamsız formüllerin ezberlenmesi gerektiği zor bir ders olarak algılamaktadır. Öğrencilerin böyle bir algıya

sahip olmalarında ve formüllerini gerekçelendirmeden yalnızca ezberleyerek uygulamaya alışmalarında değerlendirme sistemleri etkili olabilir.

Bu bağlamda çok çözümlü geometri problemlerin uygulanması öğrencileri şekle yardımcı elemanların eklenmesini teşvik ederek, tek bir problem üzerinde birden çok matematiksel kavram veya yapının uygulanmasına imkân sağladığı için matematiksel düşünceyi ve problem çözme süreçlerini geliştirir.

4.3. Öneriler

Bu bölümde öneriler araştırma sonuçlarına yönelik ve ileride yapılacak araştırmalara yönelik olmak üzere iki başlık altında sunulmuştur.

4.3.1. Araştırma sonuçlarına yönelik öneriler

- Çok çözümlü problemlerin öğrencilere özgür bir çalışma ortamı sunarak onların matematiksel düşünmesini ve problem çözme becerilerini geliştirme potansiyeli göz önüne alınırsa öğrenme ve öğretme süreçlerinde daha fazla yer verilebilir.
- Çok çözümlü geometri problemlerinde çözüm stratejilerini farklılaştırmak için yardımcı elemanların sıklıkla kullanıldığı göz önüne alınırsa geometrik yapıların öğretiminde ve bilgilerin pekiştirilmesi için yardımcı elemanların eklenmesi gereken problemler seçilmelidir.
- Öğrencilerin, problem çözme süreçlerinde şekle yardımcı elemanlar eklenirken yanlış veya imkânsız çizim yapmalarını önlemek ve yardımcı elemanın şekle olan katkısını dinamik olarak inceleyebilmek için dinamik geometri ortamları kullanılabilir.
- Öğrencilerin teorem ve özellikleri sıklıkla doğrudan ezberlendiği göz önüne alınırsa öğrenme ve öğretme süreçlerinde incelenen teoremlerin (veya özelliklerin) nedenlerinin ve ispatlarının açıklanması sağlanmalıdır.

4.3.2. İleride yapılacak araştırmalara yönelik öneriler

- Katılımcılarını ortaokul veya lise düzeyindeki öğrencilerin oluşturduğu bir araştırma ile çok çözümlü problemlerdeki çözüm stratejileri ve yardımcı elemanların rolünün incelenmesi sağlanabilir.

- Araştırmanın kâğıt-kalem ortamının ötesinde dinamik geometri yazılımlarından yararlanarak yürütülmesi de sağlanarak yardımcı elemanların farklı ortamlarda kullanım nedenleri incelenebilir.
- Bu araştırmanın aksine öğrencilere bir problemin çözümü için 45 dakika gibi bir süre yerine daha geniş bir zaman dilimi sunularak çözüm stratejileri incelenebilir.



KAYNAKÇA

- Altun, M. (2016). *Matematik öğretimi* (12. baskı). Alfa Aktüel Yayınları.
- Altun, H. (2018). Lise öğrencilerinin geometri ders başarılarının van hiele geometrik düşünme düzeylerine göre incelenmesi. *Turkish Studies Educational Sciences*, 13(11), 157–168.
- Artut, P. D., ve Tarım, K. (2016). İlkokul matematik dersi programlarının problem çözme açısından incelenmesi. M. F. Özmantar, A. Öztürk ve E. Bay (Editörler), *Reform ve değişim bağlamında ilkokul matematik öğretim programları* içinde (s. 294–316). Ankara: Pegem Akademi.
- Bayazit, İ., ve Aksoy, Y. (2015). Matematiksel problemlerin öğrenim ve öğretimi. E. Bingölbali ve M. F. Özmantar (Editörler), *İlköğretimde karşılaşılan matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri* içinde (5. baskı, s. 287–312). Ankara: Pegem Akademi.
- Baykul, Y. (2020). *Ortaokulda matematik öğretimi (5-8. sınıflar)* (4. baskı). Ankara: Pegem Akademi.
- Baykul, Y. (2021). *İlkokulda matematik öğretimi* (15. baskı). Ankara: Pegem Akademi.
- Berkant, H. G., ve Çadırlı, G. (2019). Ortaokul Öğrencilerinin Geometri Öz-Yeterlik İnançlarının ve Geometrik Düşünme Becerilerinin İncelenmesi. *Turkish Journal of Educational Studies*, 6(3), 29–52.
- Braun, V., ve Clarke, V. (2019). Psikolojide tematik analizin kullanımı (Çev. S. N. Şad, N. Özer ve A. Atlı) *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, 7(2), 873–898.
- Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş., ve Demirel, F. (2019). *Eğitimde bilimsel araştırma yöntemleri* (26. baskı). Ankara: Pegem Akademi.
- Creswell, J. W. (2009). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches* (3. baskı). Sage Publications.
- Çalık, M., ve Sözbilir, M. (2014). İçerik analizinin parametreleri. *Eğitim ve Bilim*, 39(174), 33–38.
- Dewey, J. (1910). *How we think*. D.C. Heath ve Co.
- Fan, L., Qi, C., Liu, X., Wang, Y., and Lin, M. (2017). Does a transformation approach improve students' ability in constructing auxiliary lines for solving geometric problems? An intervention-based study with two Chinese classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 229–248.

- Ginsburg, H. (1981). The Clinical Interview in Psychological Research on Mathematical Thinking: Aims, Rationales, Techniques. *For the Learning of Mathematics*, 1(3), 4–11.
- Glesne, C., Ersoy, A., ve Yalçınoglu, P. (2015). *Nitel araştırmaya giriş* (5.baskı). Ankara: Anı Yayıncılık.
- Goldin, G. A. (1997). Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 9, 40–62.
- Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. Kelly, A. E. ve Lesh, R. A. (Ed), *Handbook of research design in mathematics and science education* içinde (s. 517-545). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Gridos, P., Avgerinos, E., Mamona-Downs, J., and Vlachou, R. (2022). Geometrical Figure Apprehension, Construction of Auxiliary Lines, and Multiple Solutions in Problem Solving: Aspects of Mathematical Creativity in School Geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(3), 619–636.
- Guba, E. G., and Lincoln, Y. S. (1982). Epistemological and methodological bases of naturalistic inquiry. *Educational Communication & Technology Journal*, 30(4), 233–252.
- Güven, B., ve Karataş, İ. (2003). Dinamik Geometri Yazılımı Cabrı ile Geometri Öğrenme: Öğrenci Görüşleri. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 2(2), 67–78.
- Herbst, P. (2004). Interactions with diagrams and the making of reasoned conjectures in geometry. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 36(5), 129–139.
- Herbst, P., ve Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: what is it that is going on for students? *Cognition and Instruction*, 24(1), 73–122.
- Hsu H. (2007). Geometric calculations are more than calculations. *Proceedings of the 31st conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Seoul. pp. 57–64.
- Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(2), 145–165.
- Karataş, İ., ve Güven, B. (2003). Problem Çözme Davranışlarının Değerlendirilmesinde Kullanılan Yöntemler: Klinik Mülakatın Potansiyeli. *İlköğretim Online*, 2(2), 2–9.

- Kömlüksiz, M., ve Gökmenoğlu, T. (2020). Ortaokul matematik öğretim programlarında öğretim strateji, yöntem ve teknikleri. M. F. Özmantar, H. Akkoç, B. Kuşdemir Kayıran, ve M. Özyurt (Editörler), *Ortaokul matematik öğretim programları tarihsel bir inceleme içinde* (2.baskı s. 151–184). Ankara: Pegem Akademi.
- Köse, N. Y. (2008). *İlköğretim 5. Sınıf öğrencilerinin dinamik geometri yazılımı cabri geometriyle simetriyi anlamlandırmalarının belirlenmesi: bir eylem araştırması* [Doktora Tezi]. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Köse, N. Y., ve Özen Ünal, D. (2020). Ortaokul matematik öğretim programlarındaki reform hareketlerinin geometri öğrenme alanına yansması. M. F. Özmantar, H. Akkoç, B. Kuşdemir Kayıran, ve M. Özyurt (Editörler), *Ortaokul matematik öğretim programları tarihsel bir inceleme* (2. Baskı, s. 247–274). Ankara: Pegem Akademi.
- Krulik, S., and Rudnick, J. A. (1989). *Problem solving: A handbook for senior high school teachers*. Allyn and Bacon.
- Küçükkahveci, M. Ö. (2020). *Matematik öğretmen adaylarının geogebra ortamlarında çoklu çözüm gerektiren problemleri çözme süreçlerinin incelenmesi* [Yüksek Lisans Tezi]. Kastamonu: Kastamonu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.
- Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks, *European Research in Mathematics Education V*, Larnaca, Cyprus, pp. 2330-2339
- Leikin, R. (2009). Multiple proof tasks: teacher practice and teacher education. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, pp. 31–37.
- Leikin, R. (2010). Learning through teaching through the lens of multiple solution tasks. In R. Leikin ve R. Zazkis (Eds.), *Learning Through Teaching Mathematics* (pp. 69–85). Springer Netherlands.
- Leikin, R. (2011). Multiple-solution tasks: from a teacher education course to teacher practice. *ZDM*, 43(6-7), 993–1006.
- Leikin, R. (2014). Challenging mathematics with multiple solution tasks and mathematical investigations in geometry. In Y. Li, E. A. Silver, and S. Li (Eds.), *Advances in Mathematics Education. Transforming mathematics instruction* (pp. 59–80). Springer International Publishing.

- Leikin, R., and Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 66(3), 349–371.
- Leikin, R., and Levav-Waynberg, A. (2008). Solution spaces of multiple-solution connecting tasks as a mirror of the development of mathematics teachers' knowledge. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 8(3), 233–251.
- Levav-Waynberg, A., and Leikin, R. (2012). Using multiple solution tasks for the evaluation of students' problem-solving performance in geometry. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 12(4), 311–333.
- Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma: Desen ve uygulama için bir rehber* (Çev. S. Turan). Ankara: Nobel Yayınları
- Merriam, S. B., and Tisdell, E. J. (2015). *Qualitative research: A guide to design and implementation* (Fourth edition). Jossey-Bass.
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2018). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar)*. Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2018). *Ortaöğretim matematik dersi (9,10,11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2014). *Principles to actions: ensuring mathematical success for all*. NCTM, National Council of Teachers of Mathematics.
- Palatnik, A., and Dreyfus, T. (2019). Students' reasons for introducing auxiliary lines in proving situations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 55, 100679.
- Palatnik, A., and Sigler, A. (2019). Focusing attention on auxiliary lines when introduced into geometric problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(2), 202–215.
- Polya, G. (2017). *Nasıl çözmeli* (Çev. B. S. Soyer). Ankara: Tübitak Yayınları
- Saraçoğlu, M., ve Aşılıoğlu, B. (2022). Türkiye'de geometrik düşünme üzerine yapılan araştırmalara ilişkin bir meta-sentez. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, 21(81), 91–116.

- Schoenfeld, A. H. (1988). When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of 'Well-Taught' Mathematics Courses. *Educational Psychologist*, 23(2), 145–166.
- Schroeder, T. L., and Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. R. Trafton and A. P. Shulte (Eds.), *New directions for elementary school mathematics: 1989 yearbook* (pp. 31–42). National Council of Teachers of Mathematics.
- Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *The Mathematics Teacher*, 78(6), 448–456.
- Stupel, M., and Ben-Chaim, D. (2017). Using multiple solutions to mathematical problems to develop pedagogical and mathematical thinking: A case study in a teacher education program. *Investigations in Mathematics Learning*, 9(2), 86–108.
- Topçu, M. S., ve Çiftçi, A. (2020). 21. yüzyıl becerileri ve stem. A. D. Öğretir Özçelik ve M. N. Tuğluk (Editörler), *Eğitimde ve endüstride 21. yüzyıl becerileri içinde*(4.baskı, s. 95–117). Ankara: Pegem Akademi.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., ve Bay-Williams, J. M. (2021). *İlkokul ve ortaokul matematiği gelişimsel yaklaşımla öğretim* (Çev. Edit. S. Durmuş). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.
- Yıldırım, A., ve Şimşek, H. (2018). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (11. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldırım, A., ve Şimşek, H. (2021). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (12. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldızlar, M. (2020). *Yapılandırmacı öğretimde matematik problemlerini çözebilme yöntemleri* (6. baskı). Ankara: Pegem Akademi.
- Yılmaz, T. Y. (2014). *Öğrencilerin çok çözümlü problemlerde kullandıkları stratejilerin belirlenmesi ve matematiksel yaratıcılıklarının değerlendirilmesi* [Yüksek Lisans Tezi]. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Yılmaz, T. Y., ve Köse, N. Y. (2015). Öğrencilerin Çok Çözümlü Problemler ile İmtihani: Çözümlerde Kullanılan Stratejilerin Belirlenmesi. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, 3(3), 77–100.

http-1: <https://sozluk.gov.tr> (Erişim Tarihi: 09.04.2021)

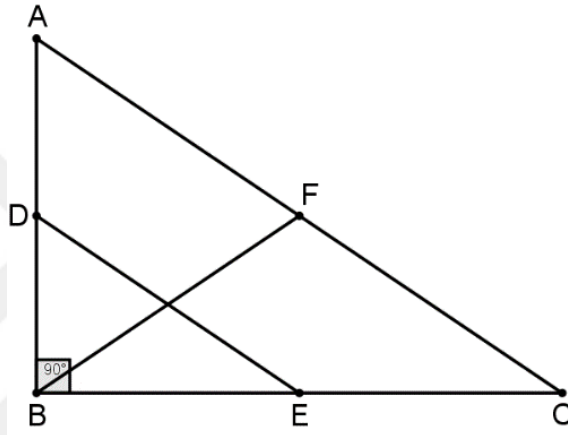
EK-1. Klinik Görüşme Formları

(Kenarortay İçeren Problem)

ABC bir dik üçgendir.

D, E ve F noktaları sırasıyla $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ve $\overline{AC}$ kenarlarının orta noktalarıdır.

$|DE| = |BF|$ olduğunu olabildiğince çok şekilde gösterin.



EK-1. Klinik Görüşme Formları (Devamı)

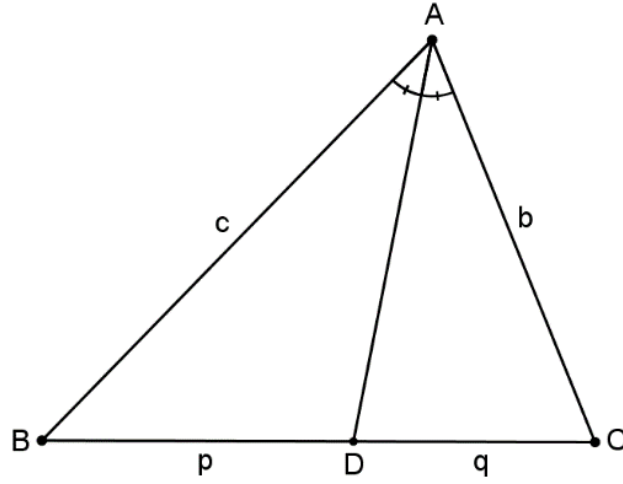
(Açıortay İçeren Problem)

ABC bir üçgen olmak üzere;

$\widehat{BAC}$ açısına ait açıortay doğrusunun $\overline{BC}$ kenarını kestiği nokta D olsun.

$|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BD| = p$, $|DC| = q$ olmak üzere;

$\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$ olduğunu olabildiğince çok şekilde gösterin.



EK-1. Klinik Görüşme Formları (Devamı)

(Yükseklik İçeren Problem)

ABC üçgeni ikizkenar bir üçgendir.

$$|AC| = |CB|$$

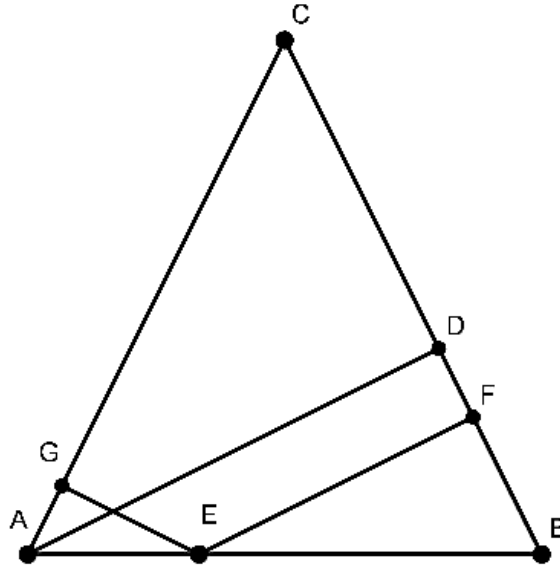
E noktası $\overline{AB}$ üzerindedir.

$$\overline{CB} \perp \overline{EF}$$

$$\overline{CB} \perp \overline{AD}$$

$$\overline{AC} \perp \overline{EG}$$

$|EG| + |EF| = |AD|$ olduğunu olabildiğince çok şekilde gösterin.



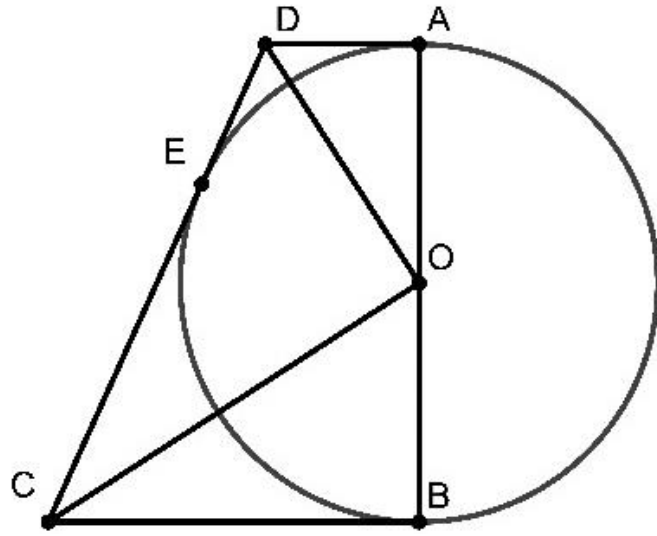
EK-1. Klinik Görüşme Formları (Devamı)

(Çember Problemi)

$|AB|$, O merkezli çemberin çapıdır.

$\overline{AD}$, $\overline{DC}$ ve $\overline{CB}$, O merkezli çembere teğettir.

$m(\widehat{DOC}) = 90^\circ$ olduğunu olabildiğince çok şekilde gösterin.



EK-2. Araştırma Gönüllü Katılım Formu

ARAŞTIRMA GÖNÜLLÜ KATILIM FORMU

Bu çalışma, “Çok Çözümlü Problemleri Çözme Sürecinde Yardımcı Elemanların Rolü” başlıklı yüksek lisans tez çalışmasıdır. Bu çalışma ile öğretmen adaylarının çok çözümü geometri problemlerinde kullandıkları çözüm stratejilerinin ve öğretmen adaylarının bu stratejilerdeki yardımcı elemanların rolü belirlenmesi amaçlanmıştır. Çalışma, Ergün DUMAN tarafından yürütülmekte ve sonuçları ile çok çözümü problemleri çözme sürecinde yardımcı elemanların rolünü ortaya konacaktır.

- Bu çalışmaya katılımınız gönüllülük esasına dayanmaktadır.
- Araştırma verileri sizden; çalışmanın amacı doğrultusunda video kayıtları ve görüşme formları ile toplanacaktır.
- İsmınızı yazmak ya da kimliğinizi açığa çıkaracak bir bilgi vermek zorunda değilsiniz/araştırmada katılımcıların isimleri gizli tutulacaktır.
- Araştırma kapsamında toplanan veriler, sadece bilimsel amaçlar doğrultusunda kullanılacak araştırmanın amacı dışında ya da bir başka araştırmada kullanılmayacak ve gerekmesi halinde sizin (yazılı) izniniz olmadan başkalarıyla paylaşılmayacaktır.
- İstemeniz halinde sizden toplanan verileri inceleme hakkınız bulunmaktadır.
- Sizden toplanan veriler elektronik ortamda korunacak ve araştırma bitiminde arşivlenecek veya imha edilecektir.
- Veri toplama sürecinde/süreçlerinde size rahatsızlık verebilecek herhangi bir soru/talep olmayacaktır. Yine de katılımınız sırasında herhangi bir sebepten rahatsızlık hissederseniz çalışmadan istediğiniz zamanda ayrılabilirsiniz. Çalışmadan ayrılmanız durumunda sizden toplanan veriler çalışmadan çıkarılacak ve imha edilecektir.

Gönüllü katılım formunu okumak ve değerlendirmek üzere ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Çalışma hakkındaki sorularınızı Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'na () yöneltebilirsiniz.

Araştırmacı Adı: Ergün DUMAN

Adres:

Cep Tel:

Bu çalışmaya tamamen kendi rızamla, istediğim takdirde çalışmadan ayrılabileceğimi bilerek verdiğim bilgilerin bilimsel amaçlarla kullanılmasını kabul ediyorum.

(Lütfen bu formu doldurup imzaladıktan sonra veri toplayan kişiye veriniz.)

Katılımcı Ad ve Soyadı:

İmza:

Tarih:

EK-3. Etik Kurul Onay Belgesi

Evrak Kayıt Tarihi: 15.04.2021

Protokol No: 60779

Tarih: 27.04.2021



ANADOLU ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERÎ BİLİMLER BİLİMSEL ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİĞİ KURULU
KARAR BELGESİ

ÇALIŞMANIN TÜRÜ:	Yüksek Lisans Tez Çalışması	
KONU:	Eğitim Bilimleri	
BAŞLIK:	Çok Çözümlü Problemleri Çözme Sürecinde Yardımcı Elemanların Rolü: Bir Öğretim Deneyi	
PROJE/TEZ YÜRÜTÜCÜSÜ:	Prof. Dr. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE	
TEZ YAZARI:	Ergün DUMAN	
ALT KOMİSYON GÖRÜŞÜ:	-	
KARAR:	Olumlu	

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ergün Duman

Yabancı Dil : İngilizce

Doğum Yeri ve Yılı :

E-Posta:

Eğitim Geçmişi:

- 2020-2023, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Tezli Yüksek Lisans Programı.
- 2015-2020, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı.

Mesleki Geçmişi:

- 2023-....., Araştırma Görevlisi, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı.
- 2020-2023, Araştırma Görevlisi, Maltepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

Yayınları ve/veya Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

- Duman, E., Köse, N. (2021). Üçgenin yardımcı elemanlarının geometri öğretimindeki rolü nedir? Matematiksel bir analiz ve ilgili çalışmaların değerlendirilmesi. (Özet Bildiri/Sözlü Sunum) 5. *Uluslararası Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi (TÜRKBİLMAT-5) Sempozyumu*, Antalya
- Duman, E., Köse, N. (2019). Öğretmenlik Uygulaması Dersi Kapsamında Geliştirilen Geogebra Tabanlı Uygulamalar. (Özet Bildiri/Sözlü Sunum) 5. *Uluslararası Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi (TÜRKBİLMAT-5) Sempozyumu*, İzmir

Ödülleri:

- 2020-2023, TÜBİTAK BİDEB Yurt İçi Yüksek Lisans Bursiyerliği, Ankara.