



**T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇOK DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ
SYLVESTER POLİNOMLARI**

ŞULE SOYTÜRK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ NEJLA ÖZMEN**

DÜZCE, 2019

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ
SYLVESTER POLİNOMLARI

Şule SOYTÜRK tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN

Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN

Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. Yüksel SOYKAN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Doç.Dr. İlhame AMİRALİ

Düzce Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 04/10/2019

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

04 Ekim 2019

Şule Soytürk

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması, Düzce Üniversitesi BAP-2018.05.04.799 numaralı Bilimsel Araştırma Projesiyle desteklenmiştir.

04 Ekim 2019

Şule Soytürk

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER.....	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
3. SYLVESTER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ	8
3.1. TEK DEĞİŞKENLİ SYLVESTER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ....	8
3.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ	9
3.3. MODIFIED GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ	13
3.3.1. Modified Genelleştirilmiş Sylvester Polinomları ve Özellikleri.....	13
3.3.2. Bilinear ve Bilateral Doğurucu Fonksiyonlar	16
3.3.3. Genelleştirilmiş Lauricella Fonksiyonları	22
4. ÇOK DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ.....	30
4.1. ÜÇ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ	30
4.2. ÜÇ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER POLİNOMLARI İÇİN BILINEAR VE BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR	36
4.3. ÜÇ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER POLİNOMLARI İLE APPELL FONKSİYONLARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER.....	44
4.4. ÜÇ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER POLİNOMLARI İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ LAURICELLA FONKSİYONLARI İÇİN BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR	47
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	54
6. KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ.....	57

SİMGELER

$U_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r)$

$\Gamma(x)$

${}_2F_1(a, b; c; x)$

$H_n(x)$

$F_1[\dots; x, y]$

$F_2[\dots; x, y]$

$P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$

$L_n^{(\alpha)}(x)$

$f_n(x; a, b)$

$(\alpha)_n$

$F^{(3)}[\dots; x, y, z]$

$f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h)$

$\varphi_n(x)$

$f_n(x; a)$

$F_A^{(s)}$

$F_B^{(s)}$

$F_D^{(s)}$

Erkuş-Srivastava Polinomu

Gamma Fonksiyonu

Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu

Hermite Polinomları

İki değişkenli Appell Hipergeometrik Fonksiyon

İki değişkenli Appell Hipergeometrik Fonksiyon

Jacobi Polinomu

Laguerre Polinomları

Modified Genelleştirilmiş Sylvester Polinomu

Pochhammer Sembolü

Srivastava'nın Genelleştirilmiş Hipergeometrik Fonksiyonu

Üç Değişkenli Genelleştirilmiş Sylvester Polinomları

Tek Değişkenli Sylvester Polinomları

Tek Değişkenli Genelleştirilmiş Sylvester Polinomları

1. çeşit Lauricella Fonksiyonu

2. çeşit Lauricella Fonksiyonu

4. çeşit Lauricella Fonksiyonu

ÖZET

ÇOK DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER POLİNOMLARI

Şule SOYTÜRK

Düzce Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN

Ekim 2019, 56 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu tezin ne ile ilgili olduğuna dair kısa bir tanıtım ve Sylvester polinomlarının literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde ön bilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar ve lemmalar verilmiştir. Üçüncü bölüm de, tek değişkenli Sylvester polinomu, genelleştirilmiş Sylvester polinomları ve modified genelleştirilmiş Sylvester polinomlarının özelliklerinden oluşmaktadır. Dördüncü bölümde ise, çok değişkenli Sylvester polinomları tanıtıldı, özellikleri verildi. Ayrıca bu polinomlar için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonlarını veren teoremler elde edildi. Burada verilen teoremlerin sonuçları ve uygulamaları incelendi. Çok değişkenli Sylvester polinomlarının Appell ve genelleştirilmiş Lauricella fonksiyonları arasındaki bağıntılar incelendi. Özel durumlarına yer verildi. Son bölümde bu tez için bazı sonuç ve öneriler sunulmuştur.

Anahtar sözcükler: Doğurucu fonksiyon, Hipergeometrik fonksiyon, Genelleştirilmiş Sylvester polinomları, Multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyon, Rekürans bağıntısı.

ABSTRACT

MULTIVARIABLE GENERALIZED SYLVESTER POLYNOMIALS

Şule SOYTÜRK

Duzce University

Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master's Thesis

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Nejla ÖZMEN

October 2019, 56 pages

This thesis consists of four chapters. The first section is devoted to the introduction. A brief introduction to what this thesis is about and the literature summary of Sylvester polynomials are given. In the second part, some definitions and lemmas are given. In the third chapter, univariate Sylvester polynomial, generalized Sylvester polynomials and modified generalized Sylvester polynomials are composed of properties. In the fourth chapter, Sylvester polynomials with multiple variables are introduced and their properties are given. In addition, theorems for these polynomials yielding bilinear and bilateral generating functions were obtained. The results and applications of the theorems given here were examined. Correlations between Appell and generalized Lauricella functions of multivariable Sylvester polynomials were examined. Exceptions were given. In the last chapter, some conclusions and recommendations are presented for this thesis.

Keywords: Generating function, Hypergeometric function, Generalized Sylvester polynomials, Multilinear and multilateral generating function, Recurrence relation.

1. GİRİŞ

Genelleştirilmiş fonksiyonlar, özel fonksiyonların literatür de önemli bir kısmını teşkil etmektedir. Tek değişkenli özel fonksiyonlar olarak bilinen Hermite polinomları, Laguerre polinomları, Legendere polinomları, Gegenbauer polinomları, Jacobi polinomları, Rice polinomları ve Genelleştirilmiş Sylvester polinomlarının...vb. genelleştirmeleri her geçen gün önemini daha da arttırmaktadır. Doğa uygulamalarının problemleri ile bu polinomlar yakından ilişkilidir. Genelleştirilmiş Sylvester polinomları, hipergeometrik fonksiyonların özel bir kısmıdır. Matematiksel analiz ve uygulamalarda önemli bir yer tutmaktadır. Bu tezde kullanılan Sylvester polinomları hakkında genel bir değerlendirme yapılacak olursa, şunları söylemek mümkündür.

Tek değişkenli Sylvester polinomları ilk kez İngiliz matematikçi J. J. Sylvester tarafından 1879 yılında çalışılmıştır [1]. 1960 yılında E. D. Rainville tarafından,

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{n!} {}_2F_0\left(-n, x; -; -\frac{1}{x}\right)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu polinomun doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; a) t^n = (1-t)^{-x} e^{axt}$$

şeklinde [2]. 1980 yılında bu polinom A. K. Agarwall ve H. L. Manocha tarafından genelleştirilmiş, ve

$$f_n(x; a) = \frac{(ax)^n}{n!} {}_2F_0\left(-n, x; -; -\frac{1}{ax}\right) \quad (a \neq 0)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu polinomun doğurucu fonksiyonu

$$(1-t)^{-x} e^{axt} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; a) t^n$$

şeklindedir [3]. 2014 yılında M. A. Malik tarafından modified genelleştirilmiş Sylvester polinomları

$$f_n(x; a, b) = \frac{(bx)^n}{n!} {}_2F_0[-n, ax; -; (-bx)^{-1}] \quad b \neq 0$$

şeklinde tanımlanmıştır [4]. Bu polinomun doğurucu fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; a, b) t^n = (1-t)^{-ax} e^{bxt} \quad (|t| < 1)$$

şeklindedir [4]. 2017 yılında J. Choi ve M. Ahlaq tarafından üç değişkenli Sylvester polinomları

$$\begin{aligned} & f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\ &= \frac{(dx)^n (ey)^n (hz)^n}{n!} \sum_{r,s,k=0}^{\infty} \frac{(-n)_{r+s+k} (ax)_r (by)_s (cz)_k}{r! s! k!} \left(-\frac{1}{dx}\right)^r \left(-\frac{1}{ey}\right)^s \left(-\frac{1}{hz}\right)^k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır [5]. Bu polinomun doğurucu fonksiyonu

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) t^n \\ &= e^{dehxyz} (1 - ehzyt)^{-ax-k} (1 - dhxzt)^{-by} (1 - dexyt)^{-cz} \end{aligned}$$

şeklindedir [5].

Günümüzde daha hâlen Sylvester polinomuyla ilgili birçok çalışma ve özelliklerini bulmak mümkündür [6]-[11]. Uygun koşullar altında hipergeometrik polinomların farklı tip özellikleri hâlen çalışılmaktadır.

Ayrıca tezimizde, çok değişkenli Sylvester polinomunun başka özellikleride bulmak mümkündür. Çok değişkenli Sylvester polinomları için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyonları veren teoremler elde edildi. Bu teoremler kullanılarak bazı bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları verildi. Bu teoremlere ek olarak, Appell polinomları ve genelleştirilmiş Lauricella fonksiyonları için bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları elde edildi. Son olarak sonuç ve önerilere yer verildi.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. POCHHAMMER SEMBOLÜ

$(\lambda)_\vartheta$ Pochhammer sembolü, λ reel ya da kompleks bir sayı, ϑ sıfır yada pozitif bir sayı olmak üzere

$$(\lambda)_\vartheta = \begin{cases} (\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + \vartheta - 1), & \vartheta \geq 1 \\ 1, & \vartheta = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

2.2. HİPERGEOMETRİK FONKSİYON

α, β ve γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere,

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \lambda; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\lambda)_n} \frac{x^n}{n!}$$

şeklinde tanımlanan hipergeometrik seri literatürde $F(\alpha, \beta; \lambda; x)$ ile gösterilir ve bu fonksiyona hipergeometrik fonksiyon denir. Genelleştirilmiş hipergeometrik seri,

$${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n (\gamma_2)_n \dots (\gamma_q)_n} \frac{x^n}{n!}$$

şeklinde tanımlanır.

2.3. GAMMA FONKSİYONU

$Re(z) > 0$ olmak üzere Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

şeklinde tanımlanır.

2.4. BAZI HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARIN SERİ AÇILIMLARI

$$1) (1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha)_n \frac{x^n}{n!} = {}_2F_1(\alpha, \beta; \beta; x)$$

$$2) \ln(1+x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (1)_n (-x)^n}{(2)_n n!} = {}_2F_1(1, 1; 2; -x)$$

hipergeometrik fonksiyonları şeklinde seriye açılımlarına sahiptir.

2.5. DOĞURUCU FONKSİYON

İki değişkenli bir $F(x, t)$ fonksiyonu t 'nin kuvvetlerine göre

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) t^n$$

şeklinde bir seriye açılabilirse, $F(x, t)$ fonksiyonuna $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar ailesinin bir doğurucu fonksiyonu denir. Burada c_n 'ler x ve t 'den bağımsız n 'nin bir fonksiyonu olup değişik parametreler içerirler.

Üç değişkenli $D(x, y, t)$ fonksiyonu, t 'nin kuvvetlerine göre

$$D(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k h_k(x) h_k(y) t^k$$

şeklinde bir seriye açılabilirse, $D(x, y, t)$ fonksiyonuna $h_k(x)$ fonksiyonları için bilineer doğurucu fonksiyon denir.

Üç değişkenli $D(x, y, t)$ fonksiyonu t 'nin kuvvetlerine göre

$$D(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k h_k(x) g_k(y) t^k$$

şeklinde bir seriye açılabilirse $D(x, y, t)$ fonksiyonuna $h_k(x)$ ve $g_k(y)$ fonksiyonları için bilateral doğurucu fonksiyon denir.

$(r + 1)$ değişkenli $D(x_1, x_2, \dots, x_r, t)$ t 'nin kuvvetlerine göre,

$$D(x_1, x_2, \dots, x_r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_k(x_1) f_k(x_2) \dots f_k(x_r) t^k$$

şeklinde bir seriye açılabilirse, $D(x, y, t)$ fonksiyonuna $f_k(x_1), f_k(x_2), \dots, f_k(x_r)$ fonksiyonları için multilineer doğurucu fonksiyon denir.

$(r + 1)$ değişkenli $D(x_1, x_2, \dots, x_r, t)$ t nin kuvvetlerine göre

$$D(x_1, x_2, \dots, x_r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_{1k}(x_1) f_{2k}(x_2) \dots f_{rk}(x_r) t^k$$

şeklinde bir seriye açılabilirse, $D(x_1, x_2, \dots, x_r, t)$ fonksiyonuna $f_{1k}(x_1), f_{2k}(x_2), \dots, f_{rk}(x_r)$ fonksiyonları için multilateral doğurucu fonksiyon denir.

2.6. BAZI KULLANIŞLI LEMMALAR

Lemma 2.1. Aşağıda bazı lemmalar ispatsız verilecektir [2]:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} A(k, n - pk)$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n + pk)$$

$$3) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n - k)$$

$$4) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n + k)$$

$$5) \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{\lfloor k/p \rfloor} A(k, l) = \sum_{l=0}^{\lfloor n/p \rfloor} \sum_{k=0}^{n-pl} A(k + pl, l)$$

3. SYLVESTER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde tek değişkenli Sylvester polinomları, genelleştirilmiş Sylvester polinomları ve genelleştirilmiş modified Sylvester polinomları tanıtılacak ve bu polinomların özellikleri hakkında genel bilgiler verilecektir.

3.1. TEK DEĞİŞKENLİ SYLVESTER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

İlk defa 1879 yılında Sylvester tarafından tanımlanan bu polinom aşağıdaki gibi hipergeometrik fonksiyon cinsinden tanımlanmıştır [1]:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{n!} {}_2F_0\left(-n, x; -; -\frac{1}{x}\right) \quad (3.1)$$

Bu polinom

$$(1-t)^{-x} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) t^n \quad (3.2)$$

şeklinde doğurucu fonksiyona sahiptir [2]. Eşitlik (3.1) yardımıyla bu polinomun birkaç özel değeri şu şekildedir:

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = 2x$$

$$\varphi_2(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$\varphi_3(x) = \frac{4}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x$$

$$\varphi_4(x) = \frac{2}{3}x^4 + x^3 + \frac{19}{24}x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$\varphi_5(x) = \frac{4}{15}x^5 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{11}{12}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}x$$

1960 yılında E. D. Rainville bu polinomun başka bir doğurucu fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlamıştır [2]:

$$(1 - xt)^{-c} {}_2F_0 \left(c, x; -; \frac{t}{1 - xt} \right) \cong \sum_{n=0}^{\infty} (c)_n \varphi_n(x) t^n \quad (3.3)$$

3.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

A. K. Agarwal ve H. L. Manocha 1980 yılında tek değişkenli Sylvester polinomlarını genelleştirmişler ve

$$f_n(x; a) = \frac{(ax)^n}{n!} {}_2F_0 \left(-n, x; -; -\frac{1}{ax} \right) \quad (a \neq 0) \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlamışlardır [3]. Buradaki ${}_2F_0$, Gauss hipergeometrik fonksiyondur. Genelleştirilmiş Sylvester polinomları

$$(1 - t)^{-x} e^{axt} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; a) t^n \quad (3.5)$$

şeklinde doğurucu fonksiyona sahiptir [3]. Genelleştirilmiş Sylvester polinomları

$$(1 - ax t)^{-c} {}_2F_0 \left(c, x; -; \frac{t}{1 - ax t} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (c)_n f_n(x; a) t^n \quad (3.6)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} f_{n+k}(x; a) t^n = (1-t)^{-x-k} e^{axt} f_k(x; a(1-t)) \quad (3.7)$$

şeklinde bir başka doğurucu fonksiyonlara sahiptir [3].

Eşitlik (3.4), Eşitlik (3.5) ve Eşitlik (3.6)'da $a = 1$ alınırsa, Eşitlik (3.1), Eşitlik (3.2) ve Eşitlik (3.3) ifadeleri elde edilir [1], [2].

Eşitlik (3.4) bağıntısı kullanılarak, bu polinomun birkaç özel değeri şu şekildedir.

$$f_0(x; a) = 1$$

$$f_1(x; a) = x(a+1)$$

$$f_2(x; a) = \frac{1}{2}x^2(a^2 + 2a + 1) + \frac{1}{2}x$$

$$f_3(x; a) = \frac{1}{6}x^3(a^3 + 3a + 1) + \frac{1}{6}x^2(3a^2 + 3a + 3) + \frac{1}{3}x$$

$$f_4(x; a) = \frac{1}{24}x^4(a^4 + 6a^2 + 8a + 1) + \frac{1}{24}x^3(6a^2 + 12a + 6) + \frac{1}{24}x^2(8a + 11) + \frac{1}{4}x$$

$$f_5(x; a) = \frac{1}{120}x^5(a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1) + \frac{1}{120}x^4(10a^3 + 30a^2 + 30a + 10) + \frac{1}{120}x^3(20a^2 + 55a + 35) + \frac{1}{120}x^2(30a + 50) + \frac{1}{5}x$$

Genelleştirilmiş Sylvester polinomları ile Laguerre polinomları arasında

$$f_n(x; a) = (-1)^n L_n^{(-x-n)}(ax) \quad (3.8)$$

şeklinde bir ilişki vardır [3]. Buradaki Laguerre polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha-n)}(x) t^n = (1+t)^\alpha e^{-xt} \quad (3.9)$$

doğurucu fonksiyona sahiptir [1].

Teorem 3.1. Tek değişkenli genelleştirilmiş Sylvester polinomları için aşağıdaki

doğurucu fonksiyon bağıntıları geçerlidir [12]:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; a + bn) t^n = \frac{e^{au}}{1 - bu} \left(1 - \frac{u}{x}\right), \quad u = xte^{bu} \quad (3.10)$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x + cn; a) t^n = \frac{(1 - v)^{-x} e^{axv}}{1 - v[c(1 - v)^{-1} + ac]}, \quad v = t(1 - v)^{-c} e^{acv} \quad (3.11)$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} f_n\left(x + cn; \frac{a + bn}{x + cn}\right) t^n = \frac{(1 - w)^{-x} e^{aw}}{1 - w[c(1 - w)^{-1} + b]}, \quad w = t(1 - v)^{-c} e^{bw} \quad (3.12)$$

Teorem 3.2. Tek değişkenli genelleştirilmiş Sylvester polinomları için aşağıdaki toplam ifadeleri geçerlidir [3], [13].

$$a) f_n(x; a) = \sum_{r=0}^n \frac{\{x(a - b)\}^r f_{n-r}(x; b)}{r!} \quad (3.13)$$

$$b) f_n(x + y; a) = \sum_{r=0}^n f_{n-r}(x; a) f_r(y; a) \quad (3.14)$$

$$c) f_n(x; a + b) = \sum_{r=0}^n \frac{(bx)^r f_{n-r}(x; a)}{r!} \quad (3.15)$$

$$d) \sum_{r=0}^n f_{n-r}(x; a + b) f_r(y; a + b) = \sum_{r=0}^n \frac{\{b(x + y)\}^r f_{n-r}(x + y; a)}{r!} \quad (3.16)$$

$$e) (n + 1)f_{n+1}(x; a) = x \left[af_n(x) + \sum_{r=0}^n f_{n-r}(x) \right] \quad (3.17)$$

$$f) f_n(x; ab) = \sum_{r=0}^n \frac{\{ax(b - 1)\}^{n-1}}{(n - 1)!} f_k(x; a) \quad (3.18)$$

Teorem 3.3. Tek değişkenli genelleştirilmiş Sylvester polinomları için, μ -üncü basamaktan $y_1, \dots, y_s$, $s \geq 1$ kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan $g_\mu(y_1, \dots, y_s)$ ($s \in \mathbb{N}$) fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} & \Omega_{n,p,q}^{\mu,m}(y_1, \dots, y_s; z) \\ &= \sum_{k=0}^{[n/q]} \binom{m+n}{n-qk} a_{k,\mu} g_{kp+\mu}(y_1, \dots, y_s) z^k, \quad (a_{k,\mu} \neq 0, \quad k, p, q \in \mathbb{C}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

ve

$$H_{y,q}^{\mu,m}[x; a; y_1, \dots, y_s; t] = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,\mu} f_{nq+m}(x; a) g_{np+\mu}(y_1, \dots, y_s) t^n \quad (3.20)$$

olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_{m+n}(x; a) \Omega_{n,p,q}^{\mu,m}(y_1, \dots, y_s; z) t^n, n \geq 0 \\ &= (-t)^{-x-m} e^{axt} H_{p,q}^{\mu,m} \left[[x; a(1-t); y_1, \dots, y_s; z \left(\frac{t}{1-t} \right)^q] \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

ifadesi gerçekleşir [14].

3.3. MODIFIED GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde tek değişkenli modified genelleştirilmiş Sylvester polinomları tanıtılacak ve özellikleri verilecektir. Ayrıca bu polinomun bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları verilecektir.

3.3.1. Modified Genelleştirilmiş Sylvester Polinomları ve Özellikleri

Tek değişkenli modified genelleştirilmiş Sylvester polinomları $f_n(x; a, b)$,

$$f_n(x; a, b) = \frac{(bx)^n}{n!} {}_2F_0[-n, ax; -; (-bx)^{-1}], b \neq 0 \quad (3.22)$$

şeklinde tanımlanmıştır [4]. Eğer Eşitlik (3.22) ifadesinde $a = 1$ ve $b = 1$ alınırsa, Eşitlik (3.1) ifadesi elde edilir [3]. Bu polinomun doğurucu fonksiyonları,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; a, b) t^n = (1-t)^{-ax} e^{bxt} \quad (|t| < 1) \quad (3.23)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n f_n(x; a, b) t^n = (1-bxt)^{-\lambda} {}_2F_0\left[\lambda, ax; -; \left(\frac{t}{1-bxt}\right)\right], \quad (3.24)$$

şeklindedir [4].

Lemma 3.3.1. Aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısı geçerlidir [15]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} f_{n+k}(x; a, b) t^n = (1-t)^{-ax-k} e^{bxt} f_k(x; a, b(1-t)) \quad (3.25)$$

İspat: Eşitlik (3.23) ifadesinde, t yerine $t + u$ yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; a, b) (t+u)^n = (1-t-u)^{-ax} e^{bx(t+u)}$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafına binom açılımı uygulanırsa, sağ tarafında gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; a, b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{n-k} u^k = (1-t)^{-ax} \left(1 - \frac{u}{1-t}\right)^{-ax} e^{bxt} e^{bxu}$$

elde edilir. Son ifadeye Lemma 2.1'deki bağıntı kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} f_{n+k}(x; a, b) t^n u^k = (1-t)^{-ax} e^{bxt} \sum_{k=0}^{\infty} (1-t)^{-k} f_k(x; a, b(1-t)) u^k$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının u^k katsayıları birbirine eşitlenirse, ispat tamamlanır. ■

Lemma 3.3.2. Tek değişkenli modified genelleştirilmiş Sylvester polinomları için aşağıdaki toplam ifadesi geçerlidir [6]:

$$f_n(x_1 + x_2; a, b) = \sum_{m=0}^n f_{n-m}(x_1; a, b) f_m(x_2; a, b) \quad (3.26)$$

İspat: Eşitlik (3.23) bağıntısında x yerine $x_1 + x_2$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_1 + x_2; a, b) t^n &= (1-t)^{-ax_1 - ax_2} e^{b(x_1+x_2)t} \\ &= (1-t)^{-ax_1} e^{bx_1 t} (1-t)^{-ax_2} e^{bx_2 t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_1; a, b) t^n \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x_2; a, b) t^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_n(x_1; a, b) f_m(x_2; a, b) t^{n+m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n f_{n-m}(x_1; a, b) f_m(x_2; a, b) t^n \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafın t^n katsayıları birbirine eşitlenirse, ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.3.1. Tek değişkenli modified genelleştirilmiş Sylvester polinomu aşığıdaki integral bağıntısına sahiptir [6]:

$$f_n(x; a, b) = \frac{1}{n! \Gamma(ax)} \int_0^\infty e^{-u} u^{ax-1} (bx + u)^n du, \quad \operatorname{Re}(x) > 0.$$

İspat: $\operatorname{Re}(v) > 0$ için,

$$a^{-v} = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^\infty e^{-at} t^{v-1} dt,$$

bağıntısı geçerlidir [16]. Eşitlik (3.23) bağıntısına, yukarıdaki bağıntı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^\infty f_n(x; a, b) t^n &= \frac{1}{\Gamma(ax)} \int_0^\infty e^{-(1-t)u} u^{ax-1} e^{bxt} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(ax)} \int_0^\infty e^{-u} u^{ax-1} e^{(bx+u)t} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(ax)} \int_0^\infty e^{-u} u^{ax-1} \sum_{n=0}^\infty (bx + u)^n \frac{t^n}{n!} du \\ &= \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{n! \Gamma(ax)} \int_0^\infty e^{-u} u^{ax-1} (bx + u)^n du \right) t^n \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadenin her iki tarafının t^n 'nin katsayıları birbirine eşitlenirse, ispat tamamlanır. ■

Özellik 3.3.1. Tek değişkenli modified genelleştirilmiş Sylvester polinomu aşığıdaki türev içeren rekürans bağıntısına sahiptir [6]:

$$\frac{\partial}{\partial x} f_n(x; a, b) = b f_{n-1}(x; a, b) + a \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(m+1)} f_{n-m-1}(x; a, b).$$

Özellik 3.3.2. Tek değişkenli modified genelleştirilmiş Sylvester polinomu aşağıdaki türev içermeyen rekürans bağıntısına sahiptir [6]:

$$(n+1)f_{n+1}(x; a, b) = x \left(b f_n(x; a, b) + a \sum_{m=0}^n f_{n-m}(x; a, b) \right).$$

3.3.2. Bilinear ve Bilateral Doğurucu Fonksiyonlar

Bu kısımda tek değişkenli modified Sylvester polinomları için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları verildi. Burada kullanılan yöntem ve uygulamaları [6], [17]-[21] numaralı çalışmalarda bulmak mümkündür.

Teorem 3.3.2. Tek değişkenli modified genelleştirilmiş Sylvester polinomları için, μ - üncü basamaktan $y_1, \dots, y_r$, $r \geq 1$ kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(y_1, \dots, y_r)$ ($r \in \mathbb{N}$) fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_r; \zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \zeta^k \quad (a_k \neq 0)$$

ve

$$\Theta_{n,p}^{\mu, \omega}(x; a, b; y_1, \dots, y_r; \xi) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k f_{n-pk}(x; a, b) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \xi^k \quad (3.27)$$

olsun. Her $p \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu, \psi} \left(x; a, b; y_1, \dots, y_r; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n = (1-t)^{-ax} e^{bxt} \Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_r; \eta) \quad (3.28)$$

ifadesi gerçekleşir [6].

İspat: Eşitlik (3.28) ifadesinin sol tarafına S diyelim. Eşitlik (3.27) ifadesi Eşitlik (3.28)'da yerine yazılırsa,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k f_{n-pk}(x; a, b) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \eta^k t^{n-pk}$$

elde edilir. Bu son ifadede Lemma 2.1 ve Eşitlik (3.23) bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_n(x; a, b) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \eta^k t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; a, b) t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \eta^k \\ &= (1-t)^{-ax} e^{bxt} \Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_r; \eta) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.3.1. Teorem 3.3.2'de

$$\Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) = \Phi_{\mu+\psi k}^{(a)}(y_1, \dots, y_r)$$

alınırsa,

$$\Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_r; \zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_{\mu+\psi k}^{(a)}(y_1, \dots, y_r) \zeta^k \quad (a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C})$$

$$\Theta_{n,p}^{\mu, \omega}(x; a, b; y_1, \dots, y_2; \xi) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k f_{n-pk}(x; a, b) \Phi_{\mu+\psi k}^{(a)}(y_1, \dots, y_r) \xi^k$$

elde edilir.

Böylece,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k f_{n-pk}(x; a, b) \Phi_{\mu+\psi k}^{(a)}(y_1, \dots, y_r) \frac{\zeta^k}{t^{pk}} t^n = (1-t)^{-ax} e^{bxt} \Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_r; \zeta)$$

elde edilir. Burada kullanılan $\Phi_{\mu+\psi k}^{(a)}(y_1, \dots, y_r)$ çok değişkenli bir polinomdur. Bu polinom

$$(1 - x_1 t)^{-a} e^{(x_2 + \dots + x_r)t} = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(a)}(x_1, \dots, x_r) t^n \quad (a \in \mathbb{C}; |t| < \{|t|^{-1}\}) \quad (3.29)$$

şeklinde doğurucu fonksiyonuna sahiptir [21].

Uyarı 3.3.1. Sonuç 3.3.1’de $a_k = 1$, $\mu = 0$, $\psi = 1$ alınır ve Eşitlik (3.29) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} f_{n-pk}(x; a, b) \Phi_k^{(a)}(y_1, \dots, y_r) \zeta^k t^{n-pk} \\ &= (1-t)^{-ax} e^{bxt} (1 - y_1 \zeta)^{-a} e^{(y_2 + \dots + y_r)\zeta} \quad (|\zeta| < \{|y_1|^{-1}\}, \quad |t| < 1) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece modified Sylvester polinomunun bir ailesi için bilateral doğurucu fonksiyonu elde edilmiş olur [6].

Teorem 3.3.3. Tek değişkenli modified genelleştirilmiş Sylvester polinomları için, μ - üncü basamaktan $y_1, \dots, y_r$, $r \geq 1$ kompleks değişkenli sifıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(y_1, \dots, y_r)$ ($r \in \mathbb{N}$) fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu, \psi}^{n,p}(x_1 + x_2; a, b; y_1, \dots, y_r; t) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k f_{n-pk}(x_1 + x_2; a, b) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) t^k,$$

olsun. Burada $a_k \neq 0$, $n, p \in \mathbb{N}$ ve $[n/p]$ tam değerdir. Her $p \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l f_{n-k}(x_1; a, b) f_{k-pl}(x_2; a, b) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) t^l \\
& = \Lambda_{\mu, \psi}^{n, p}(x_1 + x_2; a, b; y_1, \dots, y_r; t)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

ifadesi gerçekleşir [6].

İspat: Eşitlik (3.30) ifadesinin sol tarafına T diyelim. Eşitlik (3.26) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{l=0}^{[n/p]} \sum_{k=0}^{n-pl} a_l f_{n-k-pl}(x_1; a, b) f_k(x_2; a, b) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) t^l \\
&= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l \left(\sum_{k=0}^{n-pl} f_{n-k-pl}(x_1; a, b) f_k(x_2; a, b) \right) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) t^l \\
&= \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l f_{n-pl}(x_1 + x_2; a, b) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) t^l \\
&= \Lambda_{\mu, \psi}^{n, p}(x_1 + x_2; a, b; y_1, \dots, y_r; t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.3.2. Teorem 3.3.2’de $r = 1$, $y_1 = x_3$ ve

$$\Omega_{\mu+\psi k}(x_3) = f_{\mu+\psi k}(x_3; a, b)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\mu, \psi}^{n, p}(x_1 + x_2; a, b; x_3; a, b; t) &:= \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_{n-pk}(x_1 + x_2; a, b) f_{\mu+\psi k}(x_3; a, b) t^k \\
&(a_k \neq 0, \quad \mu, \psi \in \mathbb{C})
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece,

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l f_{n-k}(x_1; a, b) f_{k-pl}(x_2; a, b) f_{\mu+\psi l}(x_3; a, b) t^l \quad (3.31)$$

$$= \Lambda_{\mu, \psi}^{n, p}(x_1 + x_2; a, b; x_3; a, b; t)$$

elde edilir. Burada kullanılan $f_{\mu+\psi k}(x_3; a, b)$, modified Sylvester polinomudur.

Uyarı 3.3.2. Sonuç 3.3.2’de $a_k = 1$, $\mu = 0$, $\psi = 1$ alınır ve Eşitlik (3.26) bağıntısı kullanılırsa

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k f_{n-l}(x_1 + x_2; a, b) f_l(x_3; a, b) = f_n(x_1 + x_2 + x_3; a, b)$$

elde edilir. Böylece modified Sylvester polinomunun bir ailesi için toplam ifadesi elde edilir [6].

Teorem 3.3.4. Tek değişkenli modified genelleştirilmiş Sylvester polinomları için, μ - üncü basamaktan $y_1, \dots, y_r$, $r \geq 1$ kompleks değişkenli sifıra denk olmayan $\Omega_{\mu}(y_1, \dots, y_r)$ ($r \in \mathbb{N}$) fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu, p, q}(x; a, b; y_1, \dots, y_r; t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_{m+pn}(x; a, b) \Omega_{\mu+pn}(y_1, \dots, y_r) t^n, \quad a_n \neq 0$$

ve

$$\theta_{n, p, q}(y_1, \dots, y_r; z) := \sum_{k=0}^{[n/q]} \binom{m+n}{n-pk} a_k \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) z^k, \quad (3.32)$$

olsun. Her $p, q \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{m+n}(x; a, b) \theta_{n, p, q}(y_1, \dots, y_r; z) t^n \quad (3.33)$$

$$= (1-t)^{-ax-m} e^{bxt} \Lambda_{\mu, p, q}\left(x; a, b(1-t); y_1, \dots, y_r; z \left(\frac{t}{1-t}\right)^q\right)$$

ifadesi gerçekleşir [6].

İspat: Eşitlik (3.33) ifadesinin sol tarafına T diyelim. Eşitlik (3.32) ifadesi Eşitlik (3.33)'de yerine yazılırsa,

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} f_{m+n}(x; c) \sum_{k=0}^{[n/q]} \binom{m+n}{n-qk} a_k \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) z^k t^n$$

ifadesi elde edilir. Bu son ifade de Lemma 2.1'deki bağıntı ve Eşitlik (3.25) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+n+qk}{n} f_{m+n+qk}(x; c) a_k \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) z^k t^{n+qk} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n+qk}{n} f_{m+n+qk}(x; a, b) t^n \right) a_k \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) (zt^q)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1-t)^{-ax-m-qk} e^{bxt} f_{m+qk}(x; a, b(1-t)) \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) (zt^q)^k \\ &= (1-t)^{-ax-m} e^{bxt} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (1-t)^{-qk} f_{m+qk}(x; a, b(1-t)) \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) (zt^q)^k \\ &= (1-t)^{-ax-m} e^{bxt} \Lambda_{\mu,p,q} \left(x; a, b(1-t); y_1, \dots, y_r; z \left(\frac{t}{1-t} \right)^q \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.3.3. Teorem 3.3.4'de $s = r$ ve

$$\Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) = u_{\mu+\psi k}^{(a_1, \dots, a_r)}(y_1, \dots, y_r)$$

alınırsa,

$$\Lambda_{\mu,p,q}(x; a, b; y_1, \dots, y_r; t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_{m+qn}(x; a, b) u_{\mu+pk}^{(a_1, \dots, a_2)}(y_1, \dots, y_r) t^n$$

($a_n \neq 0, m \in \mathbb{N}_0, \mu, \psi \in \mathbb{C}$)

ve

$$\theta_{n,p,q}(y_1, \dots, y_r; z) := \sum_{k=0}^{[n/q]} \binom{m+n}{n-qk} a_k u_{\mu+pk}^{(a_1, \dots, a_r)}(y_1, \dots, y_r) z^k$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_{m+n}(x; a, b) \theta_{n,p,q}(y_1, \dots, y_r; z) t^n \\ &= (1-t)^{-ax-m} e^{bxt} \Lambda_{\mu,p,q} \left(x; a, b(1-t); y_1, \dots, y_r; z \left(\frac{t}{1-t} \right)^q \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

olur. Burada kullanılan $u_n^{(a_1, \dots, a_r)}(y_1, \dots, y_r)$, Erkus-Srivastava polinomudur.

Bu polinom,

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^r \left\{ (1 - x_j t^{m_j})^{-a_j} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(a_1, \dots, a_r)}(x_1, \dots, x_r) t^n \\ & (a_j \in \mathbb{C} (j = 1, \dots, r)); |t| < \min\{|x_1|^{-1/m_1}, \dots, |x_r|^{-1/m_r}\} \end{aligned}$$

doğurucu fonksiyonuna sahiptir [19].

3.3.3. Genelleştirilmiş Lauricella Fonksiyonları

Bu kısımda modified genelleştirilmiş Sylvester polinomları ile genelleştirilmiş Lauricella fonksiyonlarının bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları verilecektir. Burada genelleştirilmiş Lauricella fonksiyonlarında $n = 2$ alınır, iki değişkenli Appell fonksiyonları elde edilir. Bu durumda,

$$F_A^{(2)} = F_2, \quad F_B^{(2)} = F_3, \quad F_C^{(2)} = F_4, \quad F_D^{(2)} = F_1,$$

bağıntısı elde edilir [14].

Bu bağıntıların açılımları,

$$F_1[a, b, b'; c; x, y] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m-n}(b)_m(b')_n}{(c)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \quad (3.35)$$

$$F_2[a, b, b'; c, c'; x, y] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_m(c')_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \quad (3.36)$$

$$F_3[a, a', b, b'; c; x, y] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_m(a')_n(b)_m(b')_n}{(c)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \quad (3.37)$$

$$F_4[a, b, ; c, c'; x, y] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c)_m(c')_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \quad (3.38)$$

şeklindedir.

H. M. Srivastava ve M. C. Daoust tarafından genelleştirilen Lauricella fonksiyonları, iki değişkenli Kampé de Fériet hipergeometrik fonksiyonların aşağıdaki gibi genelleştirilmesidir [22].

$$\begin{aligned} & F_{C:D^{(1)}, \dots, D^{(n)}}^{A:B^{(1)}, \dots, B^{(n)}} \left(\begin{matrix} [(a): \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)}]: & [(b^{(1)}): \phi^{(1)}]; & \dots; & [(b^{(n)}): \phi^{(n)}]; \\ [(c): \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(n)}]: & [(d^{(1)}): \delta^{(1)}]; & \dots; & [(d^{(n)}): \delta^{(n)}]; \end{matrix} \middle| z_1, \dots, z_n \right) \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} \Omega(m_1, \dots, m_n) \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{z_n^{m_n}}{m_n!}. \end{aligned}$$

Buradaki $\Omega(m_1, \dots, m_n)$, ifadesi

$$\Omega(m_1, \dots, m_n) := \frac{\prod_{j=1}^A (a_j)_{m_1 \theta_j^{(1)} + \dots + m_n \theta_j^{(n)}}}{\prod_{j=1}^C (c_j)_{m_1 \psi_j^{(1)} + \dots + m_n \psi_j^{(n)}}} \frac{\prod_{j=1}^{B^{(1)}} (b_j^{(1)})_{m_1 \phi_j^{(1)}}}{\prod_{j=1}^{D^{(1)}} (d_j^{(1)})_{m_1 \delta_j^{(1)}}} \dots \frac{\prod_{j=1}^{B^{(n)}} (b_j^{(n)})_{m_n \phi_j^{(n)}}}{\prod_{j=1}^{D^{(n)}} (d_j^{(n)})_{m_n \delta_j^{(n)}}}$$

şeklindedir. Buradaki $(\lambda)_v$, Pochhammer sembolü ve katsayıları,

$$\begin{aligned}
&\theta_j^{(k)}(j = 1, \dots, A; k = 1, \dots, n) \text{ ve } \phi_j^{(k)}(j = 1, \dots, B^{(k)}; k = 1, \dots, n), \\
&\psi_j^{(k)}(j = 1, \dots, C; k = 1, \dots, n) \text{ ve } \delta_j^{(k)}(j = 1, \dots, D^{(k)}; k = 1, \dots, n), \\
&\left(b_{B^{(k)}}^{(k)}\right), \quad b_j^{(k)}(j = 1, \dots, B^{(k)}; k = 1, \dots, n), \\
&\left(d_{D^{(k)}}^{(k)}\right), \quad d_j^{(k)}(j = 1, \dots, D^{(k)}; k = 1, \dots, n),
\end{aligned}$$

reel sabitler şeklindedir [20].

Tanım 3.3.1. Negatif olmayan $\{\Omega(m_1, m_2, \dots, m_s)\}_{m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}_0}$ dizisi için, $u_1; u_2, \dots, u_s$ ($s \geq 1$) reel veya kompleks değişkenli $\varphi_n(u_1; u_2, \dots, u_s)$ polinomu

$$\begin{aligned}
\varphi_n(u_1; u_2, \dots, u_s) &:= \sum_{m_1=0}^n \sum_{m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{(-n)_{m_1} ((b))_{m_1 \phi}}{((d))_{m_1 \delta}} \\
&\times \Omega(f(m_1, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) \frac{u_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Buradaki katsayılar,

$$((b))_{m_1 \phi} = \prod_{j=1}^B (b_j)_{m_1 \phi_j} \text{ and } ((d))_{m_1 \delta} = \prod_{j=1}^D (d_j)_{m_1 \delta_j}$$

şeklindedir [20].

Teorem 3.3.5. Modified Sylvester polinomları için aşağıdaki bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı geçerlidir [6]:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; a, b) \varphi_n(u_1; u_2, \dots, u_s) t^n \\
&= (1-t)^{-ax} e^{bxt} \sum_{m_1, k, m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{(m_1+k)\phi} (ax)_k}{((d))_{(m_1+k)\delta}}
\end{aligned}$$

$$\times \Omega(f((m_1 + k), \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) \frac{(-u_1 b x t)^{m_1}}{m_1!} \frac{\left(\frac{u_1 t}{t-1}\right)^k}{k!} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!}.$$

Buradaki $\varphi_n(u_1; u_2, \dots, u_s)$, Eşitlik (3.34)'daki gibidir.

İspat: Eşitlik (3.34) ifadesi Teorem 3.3.5'in sol tarafına yazılır, gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; a, b) \varphi_n(u_1; u_2, \dots, u_s) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; a, b) \sum_{m_1=0}^n \sum_{m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{(-n)_{m_1} ((b))_{m_1 \phi}}{((d))_{m_1 \delta}} \\ & \times \Omega(f(m_1, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) \frac{u_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!} t^n \\ &= \sum_{m_1, m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{m_1 \phi}}{((d))_{m_1 \delta}} \Omega(f(m_1, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) \\ & \times (-u_1 t)^{m_1} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!} (1-t)^{-ax-m_1} e^{bxt} f_{m_1}(x; a, b(1-t)) \\ &= (1-t)^{-ax} e^{bxt} \sum_{m_1, m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{m_1 \phi}}{((d))_{m_1 \delta}} \Omega(f(m_1, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) \\ & \times \left(-\frac{u_1 t}{1-t}\right)^{m_1} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!} \frac{(bx(1-t))^{m_1}}{m_1!} \sum_{k=0}^{m_1} (-m_1)_k (ax)_k \frac{(-bx(1-t))^{-k}}{k!} \\ &= (1-t)^{-ax} e^{bxt} \\ & \times \sum_{m_1, m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{(m_1+k)\phi}}{((d))_{(m_1+k)\delta}} \Omega(f((m_1+k), m_2, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) (ax)_k \\ & \times \frac{(-u_1 b x t)^{m_1}}{m_1!} \frac{\left(\frac{u_1 t}{t-1}\right)^k}{k!} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.3.4. Teorem 3.3.5’de

$$\Omega(f(m_1, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s)$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^A (a_{1j})_{m_1 \theta_j^{(1)} + \dots + m_s \theta_j^{(s)}} \prod_{j=1}^{B^{(2)}} (b_j^{(2)})_{m_2 \phi_j^{(2)}} \dots \prod_{j=1}^{B^{(s)}} (b_j^{(s)})_{m_s \phi_j^{(s)}}}{\prod_{j=1}^E (c_j)_{m_1 \psi_j^{(1)} + \dots + m_s \psi_j^{(s)}} \prod_{j=1}^{D^{(2)}} (d_j^{(2)})_{m_2 \delta_j^{(2)}} \dots \prod_{j=1}^{D^{(s)}} (d_j^{(s)})_{m_s \delta_j^{(s)}}}$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; a, b) F_{E:D;D^{(2)};\dots;D^{(s)}}^{A:B+1;B^{(2)};\dots;B^{(s)}} \left(\begin{matrix} [(a_1): \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(s)}]: & [-n: 1], [(b): \phi]; \\ [(c): \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(s)}]: & [(d): \delta]; \\ [(b^{(2)}): \phi^{(2)}]; \dots; [(b^{(s)}): \phi^{(s)}]; & \\ [(d^{(2)}): \delta^{(2)}]; \dots; [(d^{(s)}): \delta^{(s)}]; & \end{matrix} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. u_1, u_2, \dots, u_s \right) t^n \\ &= (1-t)^{-ax} e^{bxt} F_{E+D:0;0;D^{(2)};\dots;D^{(s)}}^{A+B:0;1;B^{(2)};\dots;B^{(s)}} \left(\begin{matrix} [(e): \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(s+1)}]: & -, [ax: 1]; \\ [(f): \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(s+1)}]: & -; \\ [(b^{(2)}): \phi^{(2)}]; \dots; [(b^{(s)}): \phi^{(s)}]; & \\ [(d^{(2)}): \delta^{(2)}]; \dots; [(d^{(s)}): \delta^{(s)}]; & \end{matrix} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. (-u_1 bxt), \left(\frac{u_1 t}{t-1} \right), u_1, \dots, u_s \right) \end{aligned}$$

bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir. Buradaki, e_j , f_j , $\varphi_j^{(s)}$ ve $\xi_j^{(s)}$ ’nin katsayıları

$$e_j = \begin{cases} a_{1j}, & (1 \leq j \leq A) \\ b_j - A, & (A < j \leq A+B) \end{cases}$$

$$f_j = \begin{cases} c_j, & (1 \leq j \leq E) \\ d_j - E, & (E < j \leq E+D) \end{cases}$$

$$\varphi_j^{(r)} = \begin{cases} \theta_j^{(1)} & (1 \leq j \leq A; 1 \leq r \leq 2) \\ \theta_j^{(r-1)} & (1 \leq j \leq A; 2 < r \leq s+1) \\ \phi_{j-A} & (A < j \leq A+B; 1 \leq r \leq 2) \\ 0 & (A < j \leq A+B; 2 < r \leq s+1) \end{cases}$$

ve

$$\xi_j^{(r)} = \begin{cases} \psi_j^{(1)} & (1 \leq j \leq E; 1 \leq r \leq 2) \\ \psi_j^{(r-1)} & (1 \leq j \leq E; 2 < r \leq s+1) \\ \delta_{j-E} & (E < j \leq E+D; 1 \leq r \leq 2) \\ 0 & (E < j \leq E+D; 2 < r \leq s+1) \end{cases}$$

şeklindedir [6].

Sonuç 3.3.5. Teorem 3.3.5’de

$$\Omega(f(m_1, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) = \frac{(a_1)_{m_1+\dots+m_s} (b_2)_{m_2} \dots (b_s)_{m_s}}{(c_1)_{m_1} \dots (c_s)_{m_s}}$$

ve

$$\phi = \delta = 0 \quad (\phi_1 = \dots = \phi_B = \delta_1 \dots = \delta_D = 0)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; a, b) F_A^{(s)}[a_1, -n, b_2, \dots, b_s; c_1, \dots, c_s; u_1, u_2, \dots, u_s] t^n \\ &= (1-t)^{-ax} e^{bxt} F_{1:0;1;1;\dots;1}^{1:0;1;1;\dots;1} \left(\begin{matrix} [(a_1): 1, \dots, 1]: & -; [ax: 1]; \\ [(c_1): \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(s+1)}]: & -; & -; \\ [b_2: 1]; \dots; [b_s: 1]; \\ (-u_1 bxt), \left(\frac{u_1 t}{t-1}\right), u_2, \dots, u_s, \\ [c_2: 1]; \dots; [c_s: 1]; \end{matrix} \right), \end{aligned}$$

bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir.

Buradaki, $\psi^{(\eta)}$ 'nin katsayıları

$$\psi^{(\eta)} = \begin{cases} 1, & (1 \leq \eta \leq 2), \\ 0, & (2 < \eta \leq s+1), \end{cases}$$

şeklindedir. Buradaki $F_A^{(s)}$, birinci çeşit Lauricella fonksiyonudur[6].

Sonuç 3.3.6. Teorem 3.3.5'de

$$\Omega(f(m_1, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) = \frac{\left(a_1^{(1)}\right)_{m_2} \dots \left(a_1^{(s-1)}\right)_{m_s} \left(a_2^{(1)}\right)_{m_2} \dots \left(a_2^{(s-1)}\right)_{m_s}}{(c)_{m_1+\dots+m_s}}$$

ve

$$B = 1, \phi_1 = 1, \delta = 0,$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; a, b) F_B^{(s)} \left[-n, a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(s-1)}, b_1, a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(s-1)}; c; u_1, u_2, \dots, u_s \right] t^n \\ &= (1-t)^{-ax} e^{bxt} F_{1:0;0;0;\dots;0}^{1:0;1;2;\dots;2} \left(\begin{matrix} [(b_1): \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(s+1)}]: & -; [ax: 1]; \\ [(c): 1, \dots, 1]: & -; -; \end{matrix} \right. \\ & \left. \begin{matrix} [a^{(1)}: 1]; \dots; [a^{(s-1)}: 1]; \\ (-u_1 bxt), \left(\frac{u_1 t}{t-1}\right), u_2, \dots, u_s \end{matrix} \right), \\ & - ; \dots ; - ; \end{aligned}$$

bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir. Buradaki, $\theta^{(\eta)}$ 'nin katsayıları

$$\theta^{(\eta)} = \begin{cases} 1, & (1 \leq \eta \leq 2) \\ 0, & (2 < \eta \leq k+1) \end{cases}$$

şeklindedir. Buradaki $F_B^{(s)}$, ikinci çeşit Lauricella fonksiyonudur [6].

Sonuç 3.3.7. Teorem 3.3.5’de $\phi = \delta = 0$ ve

$$\Omega(f(m_1, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) = \frac{(a_1)_{m_1+\dots+m_s} (b_2)_{m_2} \dots (b_s)_{m_s}}{(c)_{m_1+\dots+m_s}}$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; a, b) F_D^{(s)}[a_1, -n, b_2, \dots, b_s; c; u_1, u_2, \dots, u_s] t^n \\ &= (1-t)^{-ax} e^{bxt} F_D^{(s+1)} \left[a_1, 0, ax, b_2, \dots, b_s; c; (-u_1 bxt), \left(\frac{u_1 t}{t-1} \right), u_2, \dots, u_s \right] \end{aligned}$$

bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir. Buradaki $F_D^{(s)}$, dördüncü çeşit Lauricella fonksiyonudur [6].

4. ÇOK DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde üç değişkenli genelleştirilmiş Sylvester polinomları tanıtılacak ve özellikleri verilecektir. Bu üç değişkenli Sylvester polinomlarını, çok değişkenli Sylvester polinomları diye adlandıracamız. Ayrıca bu polinomun bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları verilecektir. Bu bağıntılar yardımıyla bazı özel durumlar elde edilecektir.

4.1. ÜÇ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

2017 yılında Choi ve Aklaq, üç değişkenli Sylvester polinomlarını $f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h)$,

$$f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) := \frac{(dx)^n(ey)^n(hz)^n}{n!} \quad (4.1)$$

$$\times F^{(3)} \left[\begin{matrix} -n :: & -; & -; & -: & ax; & by; & cz; & -\frac{1}{dx}, -\frac{1}{ey}, -\frac{1}{hz} \\ -:: & -; & -; & -: & -; & -; & -; & \end{matrix} \right],$$

şeklinde tanımlamışlardır [5]. Buradaki $F^{(3)}[...; x, y, z]$, üç değişkenli Srivastava'nın genelleştirilmiş hipergeometrik serisidir [14]. Eşitlik (4.1) ifadesi düzenlenirse,

$$\begin{aligned} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) &:= \frac{(dx)^n(ey)^n(hz)^n}{n!} \sum_{r,s,k=0}^{\infty} \frac{(-n)_{r+s+k}(ax)_r(by)_s(cz)_k}{r!s!k!} \left(-\frac{1}{dx}\right)^r \left(-\frac{1}{ey}\right)^s \left(-\frac{1}{hz}\right)^k \\ &:= \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^{n-r} \sum_{k=0}^{n-r-s} \frac{(ax)_r(by)_s(cz)_k(dx)^n(ey)^n(hz)^n}{r!s!k!(n-r-s-k)!(dx)^r(ey)^s(hz)^k} \end{aligned} \quad (4.2)$$

ifadesi elde edilir.

Bu üç değişkenli Sylvester polinomunun doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) t^n \quad (4.3)$$

$$= e^{dxyhzt} (1 - ehzyt)^{-ax} (1 - dhxzt)^{-by} (1 - dext)^{-cz}$$

şeklindedir [5]. Ayrıca bu polinomun bir başka doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) t^n \quad (4.4)$$

$$= e^{dehxyz} (1 - ehzyt)^{-ax-k} (1 - dhxzt)^{-by-k} (1 - dext)^{-cz-k} \\ \times f_k(x, y, z; a, b, c, d(1 - ehzyt), e(1 - dhxzt), h(1 - dext)),$$

şeklindedir [5].

Lemma 4.1. Çok değişkenli modified genelleştirilmiş Sylvester polinomları için aşağıdaki toplam ifadesi geçerlidir [23]:

$$f_n(x_1 + x_2, y, z; a, b, c, d, e, h) \\ = \sum_{m=0}^n \frac{1}{(1 - dx_1 hzt)^m (1 - dx_2 eyt)^m} f_{n-m}(x_1, y, z; a, b, c, d, e, h) \\ \times f_m(x_2, y(1 - dx_1 hzt), z(1 - dx_2 eyt); a, b, c, d, e, h).$$

İspat: Eşitlik (4.3) bağıntısında x yerine $x_1 + x_2$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_1 + x_2, y, z; a, b, c, d, e, h) t^n \\ = e^{(x_1+x_2)deyhzt} (1 - eyhzt)^{-a(x_1+x_2)} (1 - d(x_1 + x_2)hzt)^{-by} (1 - d(x_1 + x_2)eyt)^{-cz}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - eyhzt)^{-ax_1} e^{dx_1 eyhzt} (1 - eyhzt)^{-ax_2} e^{dx_2 eyhzt} \\
&\quad \times (1 - dx_1 hzt - dx_2 hzt)^{-by} (1 - dx_1 eyt - dx_2 eyt)^{-cz} \\
&= e^{dx_1 eyhzt} (1 - eyhzt)^{-ax_1} (1 - dx_1 hzt)^{-by} (1 - dx_1 eyt)^{-cz} \\
&\quad \times e^{dx_2 eyhzt} (1 - eyhzt)^{-ax_2} \left(1 - \frac{dx_2 hzt}{1 - dx_1 hzt}\right)^{-by} \left(1 - \frac{dx_2 eyt}{1 - dx_1 eyt}\right)^{-cz} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_1, y, z; a, b, c, d, e, h) t^n \left(e^{dx_2 eyhzt \frac{(1-dx_1 hzt)(1-dx_1 eyt)}{(1-dx_1 hzt)(1-dx_1 eyt)}} \right) \\
&\quad \times \left(1 - eyhzt \frac{(1 - dx_1 hzt)(1 - dx_1 eyt)}{(1 - dx_1 hzt)(1 - dx_1 eyt)}\right)^{-ax_2} \\
&\quad \times \left(1 - dx_2 hzt \frac{(1 - dx_1 hzt)(1 - dx_1 eyt)}{(1 - dx_1 hzt)(1 - dx_1 eyt)}\right)^{-by} \\
&\quad \times \left(1 - dx_2 eyt \frac{(1 - dx_1 hzt)(1 - dx_1 eyt)}{(1 - dx_1 hzt)(1 - dx_1 eyt)}\right)^{-cz} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_1, y, z; a, b, c, d, e, h) t^n \\
&\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x_2, y(1 - dx_1 hzt), z(1 - dx_1 eyt); a, b, c, d, e, h) \\
&\quad \times \frac{t^m}{(1 - dx_1 hzt)^m (1 - dx_1 eyt)^m} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_n(x_1, y, z; a, b, c, d, e, h) f_m(x_2, y(1 - dx_1 hzt), z(1 - dx_1 eyt); a, b, c, d, e, h) \\
&\quad \times \frac{t^{n+m}}{(1 - dx_1 hzt)^m (1 - dx_1 eyt)^m} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n f_{n-m}(x_1, y, z; a, b, c, d, e, h) f_m(x_2, y(1 - dx_1 hzt), z(1 - dx_1 eyt); a, b, c, d, e, h) \\
&\quad \times \frac{t^n}{(1 - dx_1 hzt)^m (1 - dx_1 eyt)^m}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının t^n katsayıları birbirine eşitlenirse, ispat tamamlanır.

Teorem 4.1. Çok değişkenli genelleştirilmiş Sylvester polinomu aşığıdaki integral bağıntısına sahiptir [23]:

$$\begin{aligned}
& f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&= \frac{1}{n! \Gamma(ax) \Gamma(by) \Gamma(cz)} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \\
&\quad \times \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u_1+u_2+u_3)} u_1^{ax-1} u_2^{by-1} u_3^{cz-1} (dehxyz)^{n-m} \\
&\quad \times (ehyzu_1 + dhxzu_2 + dexyu_3)^m du_1 du_2 du_3.
\end{aligned}$$

İspat: $Re(v) > 0$ için,

$$a^{-v} = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^\infty e^{-at} t^{v-1} dt,$$

bağıntısı geçerlidir [16]. Eşitlik (4.3) bağıntısına, yukarıdaki bağıntı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^\infty f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) t^n \\
&= e^{dehxyz t} \frac{1}{\Gamma(ax)} \int_0^\infty e^{-(1-ehyzt)u_1} u_1^{ax-1} du_1 \\
&\quad \times \frac{1}{\Gamma(by)} \int_0^\infty e^{-(1-dhxzt)u_2} u_2^{by-1} du_2 \frac{1}{\Gamma(cz)} \int_0^\infty e^{-(1-dexyt)u_3} u_3^{cz-1} du_3 \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(dehxyz t)^n}{n!} \frac{1}{\Gamma(ax) \Gamma(by) \Gamma(cz)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u_1-u_2-u_3} \\
&\quad \times e^{(ehyzu_1+dhxzu_2+dexyu_3)t} u_1^{ax-1} u_2^{by-1} u_3^{cz-1} du_1 du_2 du_3 \\
&= \frac{1}{\Gamma(ax) \Gamma(by) \Gamma(cz)} \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(dehxyz)^n t^n}{n!} e^{-(u_1+u_2+u_3)} \\
&\quad \times \sum_{m=0}^\infty \frac{(ehyzu_1 + dhxzu_2 + dexyu_3)^m t^m}{m!} u_1^{ax-1} u_2^{by-1} u_3^{cz-1} du_1 du_2 du_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n! \Gamma(ax) \Gamma(by) \Gamma(cz)} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u_1+u_2+u_3)} u_1^{ax-1} u_2^{by-1} u_3^{cz-1} \right. \\
&\quad \times (dehxyz)^{n-m} (ehyzu_1 + dhxzu_2 + dexyu_3)^m du_1 du_2 du_3 \Big) t^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadenin heriki tarafının t^n 'nin katsayıları birbirine eşitlenirse, ispat tamamlanır. ■

Özellik 4.1. Çok değişkenli genelleştirilmiş Sylvester polinomu aşağıdaki türev içeren rekürans bağıntılarına sahiptir [23]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&= (dehxyz) f_{n-1}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&\quad + (a) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(ehyz)^{m+1}}{(m+1)} f_{n-m-1}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&\quad + (bdhxyz) \sum_{m=0}^{n-1} (dhxz)^m f_{n-m-1}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&\quad + (cdeyz) \sum_{m=0}^{n-1} (dexy)^m f_{n-m-1}(x, y, z; a, b, c, d, e, h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&= (dehxyz) f_{n-1}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&\quad + (axehez) \sum_{m=0}^{n-1} (ehyz)^m f_{n-m-1}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&\quad + (b) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(dhxz)^{m+1}}{(m+1)} f_{n-m-1}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&\quad + (cdexz) \sum_{m=0}^{n-1} (dexy)^m f_{n-m-1}(x, y, z; a, b, c, d, e, h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&= (dehxy) f_{n-1}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&+ (axe hy) \sum_{m=0}^{n-1} (ehyz)^m f_{n-m-1}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&+ (bydhx) \sum_{m=0}^{n-1} (dhxz)^m f_{n-m-1}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&+ (c) \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(dexy)^{m+1}}{m+1} f_{n-m-1}(x, y, z; a, b, c, d, e, h)
\end{aligned}$$

Özellik 4.2. Çok değişkenli genelleştirilmiş Sylvester polinomu aşağıdaki türev içermeyen rekürans bağıntısına sahiptir [23]:

$$\begin{aligned}
& (n+1) f_{n+1}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&= (dehxyz) f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&+ (ax) \sum_{m=0}^{\infty} (ehyz)^{m+1} f_{n-m}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&+ (by) \sum_{m=0}^{\infty} (dhxz)^{m+1} f_{n-m}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\
&+ (cz) \sum_{m=0}^{\infty} (dexy)^{m+1} f_{n-m}(x, y, z; a, b, c, d, e, h).
\end{aligned}$$

4.2. ÜÇ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER POLİNOMLARI İÇİN BILINEAR VE BILATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Bu kısımda çok değişkenli Sylvester polinomları için bilinear ve bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları verildi. Burada kullanılan yöntem ve uygulamaları [6], [17]-[21], [23] numaralı çalışmalarda bulmak mümkündür.

Teorem 4.2. Çok değişkenli genelleştirilmiş Sylvester polinomları için, μ -üncü basamaktan $y_1, \dots, y_r, r \geq 1$ kompleks değişkenli sifıra denk olmayan $\Omega_\mu(y_1, \dots, y_r)$ ($r \in \mathbb{N}$) fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,\psi}(y_1, \dots, y_r; \zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \zeta^k, \quad (a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C}) \quad (4.5)$$

ve

$$\begin{aligned} & \Theta_{n,p}^{\mu,\psi}(x; c; y_1, \dots, y_r; \xi) \\ & := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k f_{n-pk}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \xi^k, \end{aligned} \quad (4.6)$$

olsun. Her $p \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{n,p}^{\mu,\psi} \left(x, y, z; a, b, c, d, e, h; y_1, \dots, y_r; \frac{\eta}{t^p} \right) t^n \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & = e^{dxe y h z t} (1 - e y h z t)^{-ax} (1 - d x h z t)^{-by} (1 - d x e y t)^{-cz} \\ & \quad \times \Lambda_{\mu,\psi}(y_1, \dots, y_r; \eta), \end{aligned}$$

ifadesi gerçekleşir [23].

İspat: Eşitlik (4.7) ifadesinin sol tarafına S diyelim. Eşitlik (4.6) ifadesi Eşitlik (4.7)'de yerine yazılırsa,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k f_{n-pk}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \eta^k t^{n-pk},$$

elde edilir. Bu son ifadede Lemma 2.1 ve Eşitlik (4.3) bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \eta^k t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) t^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) \eta^k \\ &= e^{dexyzt} (1 - eyhzt)^{-ax} (1 - dxhzt)^{-by} (1 - dxezt)^{-cz} \\ &\quad \times \Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_r; \eta) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.1. Teorem 4.2'de

$$\Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) = h_{\mu+\psi k}^{(a_1, \dots, a_r)}(y_1, \dots, y_r)$$

alınırsa,

$$\Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_r; \zeta) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_{\mu+\psi k}^{(a_1, \dots, a_r)}(y_1, \dots, y_r) \zeta^k \quad (a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C})$$

$$\Theta_{n, p}^{\mu, \psi}(x; c; y_1, \dots, y_r; \xi) := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k f_{n-pk}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) h_{\mu+\psi k}^{(a_1, \dots, a_r)}(y_1, \dots, y_r) \xi^k,$$

elde edilir.

Böylece,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k f_{n-pk}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) h_{\mu+\psi k}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(y_1, \dots, y_r) \frac{\eta^k}{t^{pk}} t^n \quad (4.8)$$

$$= e^{dxe y h z t} (1 - e y h z t)^{-ax} (1 - d x h z t)^{-by} (1 - d x e y t)^{-cz} \Lambda_{\mu, \psi}(y_1, \dots, y_r; \eta)$$

elde edilir [23]. Burada kullanılan $h_{\mu+\psi k}^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(y_1, \dots, y_r)$ çok değişkenli Lagrange-Hermite polinomudur.

Bu polinom

$$\prod_{j=1}^r \{(1 - x_j t^j)^{-\alpha_j}\} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(x_1, \dots, x_r) t^n \quad (4.9)$$

$$(\alpha \in \mathbb{C}; |t| < \min\{|x_1|^{-1}, |x_2|^{-1/2}, \dots, |x_r|^{-1/r}\}).$$

şeklinde doğurucu fonksiyonuna sahiptir [24].

Uyarı 4.1. Sonuç 4.1’de $a_k = 1$, $\mu = 0$, $\psi = 1$ alınır ve Eşitlik (4.9) bağıntısı kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/p]} f_{n-pk}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) h_k^{(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}(y_1, \dots, y_r) \eta^k t^{n-pk}$$

$$= e^{dxe y h z t} (1 - e y h z t)^{-ax} (1 - d x h z t)^{-by}$$

$$\times (1 - d x e y t)^{-cz} \prod_{j=1}^r \{(1 - y_j \eta^j)^{-\alpha_j}\}$$

$$(|\zeta| < \min\{|y_1|^{-1}, |y_2|^{-2}, \dots, |y_r|^{-1/r}\}, \quad |\eta| < 1)$$

elde edilir. Böylece çok değişkenli Sylvester polinomunun bir ailesi için bilateral doğurucu fonksiyonu elde edilmiş olur [23].

Teorem 4.3. Çok değişkenli genelleştirilmiş Sylvester polinomları için, μ -üncü basamaktan $y_1, \dots, y_r$, $r \geq 1$ kompleks değişkenli sifıra denk olmayan $\Omega_\mu(y_1, \dots, y_r)$ ($r \in \mathbb{N}$) fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,\psi}^{n,p}(x_1 + x_2; c; y_1, \dots, y_r; t) \\ := \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k f_{n-pk}(x_1 + x_2, y, z; a, b, c, d, e, h) \Omega_{\mu+\psi k}(y_1, \dots, y_r) t^k$$

olsun. Burada $a_k \neq 0$, $n, p \in \mathbb{N}$ ve $[n/p]$ tam değerdir.

Her $p \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l \frac{1}{[(1 - dx_1 hzt)(1 - dx_1 eyt)]^{k-pl}} f_{n-k}(x_1, y, z; a, b, c, d, e, h) \\ \times f_{k-pl}(x_2, y(1 - dx_1 hzt), z(1 - dx_1 eyt); a, b, c, d, e, h) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) t^l \\ = \Lambda_{\mu,\psi}^{n,p}(x_1 + x_2, y, z; a, b, c, d, e, h; y_1, \dots, y_r; t) \quad (4.10)$$

ifadesi gerçekleşir [23].

İspat: Eşitlik (4.10) ifadesinin sol tarafına T diyelim. Eşitlik (4.5) ifadesi kullanılırsa,

$$T = \sum_{l=0}^{[n/p]} \sum_{k=0}^{n-pl} a_l \frac{1}{[(1 - dx_1 hzt)(1 - dx_1 eyt)]^k} f_{n-k-pl}(x_1, y, z; a, b, c, d, e, h) \\ \times f_k(x_2, y(1 - dx_1 hzt), z(1 - dx_1 eyt); a, b, c, d, e, h) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) t^l \\ = \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l \left(\sum_{k=0}^{n-pl} \frac{1}{[(1 - dx_1 hzt)(1 - dx_1 eyt)]^k} f_{n-k-pl}(x_1, y, z; a, b, c, d, e, h) \right) \\ \times f_k(x_2, y(1 - dx_1 hzt), z(1 - dx_1 eyt); a, b, c, d, e, h) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) t^l \\ = \sum_{l=0}^{[n/p]} a_l f_{n-pl}(x_1 + x_2, y, z; a, b, c, d, e, h) \Omega_{\mu+\psi l}(y_1, \dots, y_r) t^l$$

$$= \Lambda_{\mu,\psi}^{n,p}(x_1 + x_2, y, z; a, b, c, d, e, h; y_1, \dots, y_r; t),$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.2. Teorem 4.2’de $r = 3$ ve

$$\Omega_{\mu+\psi l}(y_1, y_2, y_3) = f_{\mu+\psi l}(x_3, y, z; a, b, c, d, e, h)$$

alınırsa,

$$\Lambda_{\mu,\psi}^{n,p}(x_1 + x_2, y, z; a, b, c, d, e, h; x_3, y, z; a, b, c, d, e, h; t)$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/p]} a_k f_{n-pk}(x_1 + x_2, y, z; a, b, c, d, e, h)$$

$$\times f_{\mu+\psi k}(x_3, y, z; a, b, c, d, e, h) t^k, \quad (a_k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C})$$

elde edilir. Böylece,

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{[k/p]} a_l \frac{1}{[(1 - dx_1 hzt)(1 - dx_1 eyt)]^{k-pl}} f_{n-k}(x_1, y, z; a, b, c, d, e, h)$$

$$\times f_{k-pl}(x_2, y(1 - dx_1 hzt), z(1 - dx_1 eyt); a, b, c, d, e, h) f_{\mu+\psi l}(x_3, y, z; a, b, c, d, e, h) t^l$$

$$= \Lambda_{\mu,\psi}^{n,p}(x_1 + x_2, y, z; a, b, c, d, e, h; x_3, y, z; a, b, c, d, e, h; t)$$

elde edilir [23]. Burada kullanılan $f_{\mu+\psi l}(x_3, y, z; a, b, c, d, e, h)$, çok değişkenli Sylvester polinomudur.

Teorem 4.4. Çok değişkenli genelleştirilmiş Sylvester polinomları için, μ -üncü basamaktan $y_1, \dots, y_r$, $r \geq 1$ kompleks değişkenli sıfıra denk olmayan $\Omega_\mu(y_1, \dots, y_r)$ ($r \in \mathbb{N}$) fonksiyonu için,

$$\Lambda_{\mu,p,q}(x, y, z; a, b, c, d, e, h; y_1, \dots, y_r; t)$$

$$:= \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_{m+qk}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) t^k, \quad a_k \neq 0,$$

ve

$$\theta_{n,p,q}(y_1, \dots, y_r; z) := \sum_{k=0}^{[n/q]} \binom{m+n}{n-qk} a_k \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) z^k.$$

olsun.

Her $p, q \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_{m+n}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \theta_{n,p,q}(y_1, \dots, y_r; z) t^n \\ &= e^{dehxyt} (1 - ehzyt)^{-ax} (1 - dhxzt)^{-by} (1 - dexyt)^{-cz} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} & \times \Lambda_{\mu,p,q}(x, y, z; a, b, c, d(1 - ehzyt), e(1 - dhxzt), h(1 - dexyz); \\ & y_1, \dots, y_r; z \left(\frac{t}{(1 - ehzyt)(1 - dhxzt)(1 - dexyt)} \right)^q) \end{aligned}$$

ifadesi gerekleřir [23].

İspat: Eşitlik (4.12) ifadesinin sol tarafına T diyelim. Eşitlik (4.5) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{m+n}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) a_k \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) z^k t^{n+pk} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n+qk}{n} f_{m+n+qk}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) t^n \right) a_k \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) (zt^q)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{dehxyzt} (1 - ehzyt)^{-ax-m-qk} (1 - dhxzt)^{-by-m-qk} (1 - dexyt)^{-cz-m-qk} \\
&\quad \times f_{m+qk}(x, y, z; a, b, c, d(1 - ehzyt), e(1 - dhxzt), h(1 - dexyt)) \\
&\quad \times \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) (zt^q)^k \\
&= e^{dehxyzt} (1 - ehzyt)^{-ax-m} (1 - dhxzt)^{-by-m} (1 - dexyt)^{-cz-m} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_{m+qk}(x, y, z; a, b, c, d(1 - ehzyt), e(1 - dhxzt), h(1 - dexyt)) \\
&\quad \times \Omega_{\mu+pk}(y_1, \dots, y_r) \left(\frac{zt^q}{(1 - ehzyt)^q (1 - dhxzt)^q (1 - dexyt)^q} \right)^k \\
&= e^{dehxyzt} (1 - ehzyt)^{-ax-m} (1 - dhxzt)^{-by-m} (1 - dexyt)^{-cz-m} \\
&\quad \times \Lambda_{\mu,p,q}(x, y, z; a, b, c, d(1 - ehzyt), e(1 - dhxzt), h(1 - dexyt); \\
&\quad \quad y_1, \dots, y_r; z \left(\frac{t}{(1 - ehzyt)(1 - dhxzt)(1 - dexyt)} \right)^q)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.3. Teorem 4.4’de $s = 1$ ve

$$\Omega_{\mu+\psi k}(y_1) = P_{\mu+\psi k}^{(\alpha, \beta)}(w)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\mu,p,q}(x, y, z; a, b, c, d, e, h; w; t) &:= \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_{m+qn}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) P_{\mu+pn}^{(\alpha, \beta)}(w) t^k \\
&\quad (a_k \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}_0, k \neq 0, \mu, \psi \in \mathbb{C})
\end{aligned}$$

ve

$$\theta_{n,p,q}(w; z) := \sum_{k=0}^{[n/q]} \binom{m+n}{n-qn} a_k P_{\mu+pn}^{(\alpha,\beta)}(w) z^k$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_{m+n}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \theta_{n,p,q}(w; z) t^n \\ &= e^{dehxyz} (1 - ehzyt)^{-ax-m} (1 - dhxzt)^{-by-m} (1 - dexyt)^{-cz-m} \\ & \times \Lambda_{\mu,p,q}(x, y, z; a, b, c, d(1 - ehzyt), e(1 - dhxzt), h(1 - dexyt); \\ & \quad y_1, \dots, y_r; z \left(\frac{t}{(1 - ehzyt)(1 - dhxzt)(1 - dexyt)} \right)^q) \end{aligned}$$

elde edilir [23]. Burada kullanılan $P_n^{(\alpha,\beta)}(y)$, klasik Jacobi polinomudur. Bu polinom,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) t^n = \frac{2^{\alpha+\beta}}{\rho} (1 - t + \rho)^{-\alpha} (1 + t + \rho)^{-\beta}, \quad \{\rho = (1 - 2xt + t^2)^{1/2}\}$$

doğurucu fonksiyonuna sahiptir [1].

4.3. ÜÇ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER POLİNOMLARI İLE APPELL FONKSİYONLARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Bu kısımda çok değişkenli Sylvester polinomları ile Appell fonksiyonları için bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları verilecektir.

Teorem 4.5. Çok değişkenli Sylvester polinomları için aşağıdaki bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı geçerlidir [23]:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) F_1(a_1, -n, b_2; c_1; u_1, u_2) t^n \\ &= e^{dxe y h z t} (1 - ey h z t)^{-ax} (1 - dx h z t)^{-by} (1 - dxeyt)^{-cz} \times \\ & F_D^{(5)} \left[a_1, -, ax, by, cz, b_2; c_1; -u_1xyzdeht, \frac{-u_1teyhz}{1-ehyz t}, \frac{-u_1tdxhz}{1-dhxzt}, \frac{-u_1tdxey}{1-dexyt}, u_2 \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

buradaki $F_D^{(5)}$, Lauricella fonksiyonudur.

İspat: Eşitlik (4.13) ifadesinin sol tarafına, Eşitlik (4.4) ve Eşitlik (3.35) bağıntılarının değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) F_1(a_1, -n, b_2; c_1; u_1, u_2) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \\ & \times \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+p} (-n)_m (b_2)_p}{(c_1)_{m+p}} \frac{u_1^m u_2^p}{m! p!} t^n \\ &= \sum_{m,p=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{m} f_{n+m}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) t^n \right) \frac{(a_1)_{m+p} (b_2)_p}{(c_1)_{m+p}} (-u_1 t)^m \frac{u_2^p}{p!} \\ &= e^{dxe y h z t} (1 - ey h z t)^{-ax} (1 - dx h z t)^{-by} (1 - dxeyt)^{-cz} \\ & \times \sum_{m,p=0}^{\infty} f_m(x, y, z; a, b, c, d, (1 - eh y z t), e(1 - dh x z t), h(1 - dex y t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(a_1)_{m+p}(b_2)_p}{(c_1)_{m+p}} \left(\frac{-u_1 t}{(1-ehyzt)(1-dhxzt)(1-dexyt)} \right)^m \frac{u_2^p}{p!} \\
& = e^{dxe y h z t} (1-eyhzt)^{-ax} (1-dxhzt)^{-by} (1-dxeyt)^{-cz} \\
& \times \sum_{m,r,s,k,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+r+s+k+p} (ax)_r (by)_s (cz)_k (b_1)_p}{(c_1)_{m+r+s+k+p}} \\
& \times \frac{(-u_1 xyzdeht)^m}{m!} \frac{\left(-\frac{u_1 teyhz}{1-dhxzt} \right)^s}{s!} \frac{\left(-\frac{u_1 tdxhz}{1-ehyzt} \right)^r}{r!} \frac{\left(-\frac{u_1 tdxey}{1-dexyt} \right)^k}{k!} \frac{u_2^p}{p!} \\
& = e^{dxe y h z t} (1-eyhzt)^{-ax} (1-dxhzt)^{-by} (1-dxeyt)^{-cz} \\
& \times F_D^{(5)} \left[a_1, -, ax, by, cz, b_2; c_1; -u_1 xyzdeht, \frac{-u_1 teyhz}{1-ehyzt}, \frac{-u_1 tdxhz}{1-dhxzt}, \frac{-u_1 tdxey}{1-dexyt}, u_2 \right],
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Eşitlik (4.11) bağıntısı ispatlanmış olur. ■

Teorem 4.6. Çok değişkenli Sylvester polinomları için aşağıdaki bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı geçerlidir [23]:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) F_2(a_1, -n, b_1; c_1, c_2; u_1, u_2) t^n \quad (4.14) \\
& = e^{dxe y h z t} (1-eyhzt)^{-ax} (1-dxhzt)^{-by} (1-dxeyt)^{-cz} \\
& \times F_A^{(5)} \left[a_1, -, ax, by, cz, b_2; c_1, c_2; -u_1 xyzdeht, \frac{-u_1 teyhz}{1-ehyzt}, \frac{-u_1 tdxhz}{1-dhxzt}, \frac{-u_1 tdxey}{1-dexyt}, u_2 \right].
\end{aligned}$$

Buradaki $F_A^{(s)}$, Lauricella fonksiyonudur.

İspat: Eşitlik (4.14) ifadesinin sol tarafına, Eşitlik (4.4) ve Eşitlik (3.36) bağıntılarının değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) F_2(a_1, -n, b_1; c_1, c_2; u_1, u_2) t^n \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+p} (-n)_m (b_1)_p}{(c_1)_m (c_2)_p} \frac{u_1^m}{m!} \frac{u_2^p}{p!} t^n \\
& = \sum_{m,p=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} f_{n+m}(x, y, z; a, b, c, d, e, h) t^n \right) \frac{(a_1)_{m+p} (b_2)_p}{(c_1)_m (c_2)_p} (-u_1 t)^m \frac{u_2^p}{p!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{dxeyhzt}(1 - eyhzt)^{-ax}(1 - dxhzt)^{-by}(1 - dxeyt)^{-cz} \\
&\times \sum_{m,r,s,k,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+r+s+k+p}(ax)_r(by)_s(cz)_k(b_1)_p}{(c_1)_{m+r+s+k+p}(c_2)_p} \\
&\times \frac{(-u_1xyzdeht)^m}{m!} \frac{\left(-\frac{u_1teyhz}{1-dhxzt}\right)^s}{s!} \frac{\left(-\frac{u_1tdxhz}{1-ehyzt}\right)^r}{r!} \frac{\left(-\frac{u_1tdxey}{1-dexyt}\right)^k}{k!} \frac{u_2^p}{p!} \\
&= e^{dxeyhzt}(1 - eyhzt)^{-ax}(1 - dxhzt)^{-by}(1 - dxeyt)^{-cz} \\
&\times F_A^{(5)}\left[a_1, -, ax, by, cz, b_2; c_1, c_2; -u_1xyzdeht, \frac{-u_1teyhz}{1-ehyzt}, \frac{-u_1tdxhz}{1-dhxzt}, \frac{-u_1tdxey}{1-dexyt}, u_2\right],
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Eşitlik (4.14) bağıntısı ispatlanmış olur. ■

4.4. ÜÇ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ SYLVESTER POLİNOMLARI İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ LAURICELLA FONKSİYONLARI İÇİN BİLATERAL DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Bu kısımda çok değişkenli Sylvester polinomları ile genelleştirilmiş Lauricella fonksiyonları için bilateral doğurucu fonksiyon bağıntıları verilecektir.

Teorem 4.7. Çok değişkenli Sylvester polinomları için aşağıdaki bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \varphi_n(u_1; u_2, \dots, u_s) t^n \\
&= e^{dehxyz} (1 - ehzyt)^{-ax} (1 - dhxzt)^{-by} (1 - dexyt)^{-cz} \\
&\times \sum_{m_1, r, s, k, m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \Omega(f(m_1 + r + s + k, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) \frac{((b))_{(m_1+r+s+k)\phi}}{((d))_{(m_1+r+s+k)\delta}} \\
&\times (ax)_r (by)_s (cz)_k \frac{(dx(1 - ehzyt))^{m_1} (ey(1 - dhxzt))^{m_1} (hz(1 - dexyt))^{m_1}}{r! s! k! (m_1 - r - s - k)! (dx(1 - ehzyt))^r (ey(1 - dhxzt))^s (hz(1 - dexyt))^k} \\
&\times \frac{(-u_1xyzdeht)^{m_1}}{m_1!} \frac{(\frac{-u_1yzeht}{1 - ehzyt})^r}{r!} \frac{(\frac{-u_1xzdht}{1 - dhxzt})^s}{s!} \frac{(\frac{-u_1xydet}{1 - dexyt})^k}{k!} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!}.
\end{aligned}$$

Buradaki $\varphi_n(u_1; u_2, \dots, u_s)$, Eşitlik (3.34)'deki gibidir.

İspat: Eşitlik (3.34) ifadesi Teorem 4.7'in sol tarafına yazılır, gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \varphi_n(u_1; u_2, \dots, u_s) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \sum_{m_1=0}^n \sum_{m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{(-n)_{m_1} ((b))_{m_1\phi}}{((d))_{m_1\delta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \Omega(f(m_1, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) \frac{u_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!} t^n \\
& = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{m_1\phi}}{((d))_{m_1\delta}} \Omega(f(m_1, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) e^{dehxyzt} (1 - ehzyt)^{-ax-m_1} \\
& \times (1 - dhxzt)^{-by-m_1} (1 - dexyt)^{-cz-m_1} \\
& \times f_{m_1}(x, y, z; a, b, c, d(1 - ehzyt), e(1 - dhxzt), h(1 - dexyt)) (-u_1 t)^{m_1} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!} \\
& = e^{dehxyzt} (1 - ehzyt)^{-ax} (1 - dhxzt)^{-by} (1 - dexyt)^{-cz} \\
& \times \sum_{m_1, m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{m_1\phi}}{((d))_{m_1\delta}} \Omega(f(m_1, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) \\
& \times f_{m_1}(x, y, z; a, b, c, d(1 - ehzyt), e(1 - dhxzt), h(1 - dexyt)) \\
& \times \left(-\frac{u_1 t}{(1 - ehzyt)(1 - dhxzt)(1 - dexyt)} \right)^{m_1} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!} \\
& = e^{dehxyzt} (1 - ehzyt)^{-ax} (1 - dhxzt)^{-by} (1 - dexyt)^{-cz} \\
& \times \sum_{m_1, m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \frac{((b))_{m_1\phi}}{((d))_{m_1\delta}} \Omega(f(m_1, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) \\
& \times \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{s=0}^{m_1-r} \sum_{k=0}^{m_1-r-s} \frac{(ax)_r (by)_s (cz)_k (dx(1 - ehzyt))^{m_1} (ey(1 - dhxzt))^{m_1}}{r! s! k! (m_1 - r - s - k)! (dx(1 - ehzyt))^r (ey(1 - dhxzt))^s} \\
& \times \frac{(hz(1 - dexyt))^{m_1}}{(hz(1 - dexyt))^k} \left(-\frac{u_1 t}{(1 - ehzyt)(1 - dhxzt)(1 - dexyt)} \right)^{m_1} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!},
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.1'deki uygun ifade birkaç defa uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) \varphi_n(u_1; u_2, \dots, u_s) t^n \\
& = e^{dehxyzt} (1 - ehzyt)^{-ax} (1 - dhxzt)^{-by} (1 - dexyt)^{-cz}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{m_1, r, s, k, m_2, \dots, m_s=0}^{\infty} \Omega(f(m_1 + r + s + k, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) \\
& \times \frac{((b))_{(m_1+r+s+k)\phi}}{((d))_{(m_1+r+s+k)\delta}} \frac{(ax)_r (by)_s (cz)_k}{r! s! k! (m_1 - r - s - k)!} \\
& \times \frac{(dx(1 - ehzyt))^{m_1} (ey(1 - dhxzt))^{m_1} (hz(1 - dexyt))^{m_1}}{(dx(1 - ehzyt))^r (ey(1 - dhxzt))^s (hz(1 - dexyt))^k} \\
& \times \frac{(-u_1xyzdeht)^{m_1}}{m_1!} \frac{(\frac{-u_1yzeht}{1 - ehzyt})^r}{r!} \frac{(\frac{-u_1xzdht}{1 - dhxzt})^s}{s!} \frac{(\frac{-u_1xydet}{1 - dexyt})^k}{k!} \frac{u_2^{m_2}}{m_2!} \dots \frac{u_s^{m_s}}{m_s!},
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.4. Teorem 4.7’de

$$\Omega(f(m_1, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s)$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^A (a_j)_{m_1 \theta_j^{(1)} + \dots + m_s \theta_j^{(s)}} \prod_{j=1}^{B^{(2)}} (b_j^{(2)})_{m_2 \phi_j^{(2)}} \prod_{j=1}^{B^{(s)}} (b_j^{(s)})_{m_s \phi_j^{(s)}}}{\prod_{j=1}^E (c_j)_{m_1 \psi_j^{(1)} + \dots + m_s \psi_j^{(s)}} \prod_{j=1}^{D^{(2)}} (d_j^{(2)})_{m_2 \delta_j^{(2)}} \dots \prod_{j=1}^{D^{(s)}} (d_j^{(s)})_{m_s \delta_j^{(s)}}}$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) F_{E:D;D^{(2)}, \dots, D^{(s)}}^{A:B+1;B^{(2)}, \dots, B^{(s)}} \left(\begin{array}{l} [(a_1): \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(s)}]: \quad [-n: 1], [(b): \phi]; \\ [(c): \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(s)}]: \quad [(d): \delta]; \\ [(b^{(2)}): \phi^{(2)}]; \dots; [(b^{(s)}): \phi^{(s)}]; \\ [(d^{(2)}): \delta^{(2)}]; \dots; [(d^{(s)}): \delta^{(s)}]; \end{array} \right. \\
& \quad \left. u_1, u_2, \dots, u_s \right) t^n \\
& = e^{dehxyzt} (1 - ehzyt)^{-ax} (1 - dhxzt)^{-by} (1 - dexyt)^{-cz} \\
& \times F_{E+D:0;0;D^{(2)}, \dots, D^{(s)}}^{A+B:0;1;B^{(2)}, \dots, B^{(s)}} \left(\begin{array}{l} [(e): \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(s+3)}]: \quad -; [ax: 1]; [by: 1]; [cz: 1]; [(b^{(2)}): \phi^{(2)}]; \\ [(f): \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(s+3)}]: \quad -; \quad -; \quad -; \quad -; [(d^{(2)}): \delta^{(2)}]; \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots; [(b^{(s)}): \phi^{(s)}]; \\ & \left((-u_1xyzdeht), \left(\frac{-u_1yzeht}{1 - ehyzt} \right), \left(\frac{-u_1xzdht}{1 - dhxzt} \right), \left(\frac{-u_1xydet}{1 - dexyt} \right), u_2, \dots, u_s \right) \\ & \dots; [(d^{(s)}): \delta^{(s)}]; \end{aligned}$$

bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir. Buradaki, e_j , f_j , $\varphi_j^{(s)}$ ve $\xi_j^{(s)}$ 'nin katsayıları

$$e_j = \begin{cases} a_{1j}, & (1 \leq j \leq A) \\ b_j - A, & (A < j \leq A + B) \end{cases}$$

$$f_j = \begin{cases} c_j, & (1 \leq j \leq E) \\ d_j - E, & (E < j \leq E + D) \end{cases}$$

$$\varphi_j^{(r)} = \begin{cases} \theta_j^{(1)} & (1 \leq j \leq A; 1 \leq r \leq 4) \\ \theta_j^{(r-1)} & (1 \leq j \leq A; 4 < r \leq s+3) \\ \phi_{j-A} & (1 \leq j \leq A; 1 \leq r \leq 4) \\ 0 & (1 \leq j \leq A; 4 < r \leq s+3) \end{cases}$$

ve

$$\xi_j^{(r)} = \begin{cases} \psi_j^{(1)} & (1 \leq j \leq E; 1 \leq r \leq 4) \\ \psi_j^{(r-1)} & (1 \leq j \leq E; 4 < r \leq s+3) \\ \delta_{j-E} & (E < j \leq E + D; 1 \leq r \leq 4) \\ 0 & (E < j \leq E + D; 4 < r \leq s+3) \end{cases}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.5. Teorem 4.7’de

$$\Omega(f(m_1, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) = \frac{(a_1)_{m_1+\dots+m_s} (b_2)_{m_2} \dots (b_s)_{m_s}}{(c_1)_{m_1} \dots (c_s)_{m_s}}$$

ve

$$\phi = \delta = 0 \quad (\phi_1 = \dots = \phi_B = \delta_1 \dots = \delta_D = 0)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) F_A^{(s)}[a_1, -n, b_2, \dots, b_s; c_1, \dots, c_s; u_1, u_2, \dots, u_s] t^n \\ &= e^{dehxyzt} (1 - ehzyt)^{-ax} (1 - dhxzt)^{-by} (1 - dexyt)^{-cz} \\ & \times F_{1:0;0;1;\dots;1}^{1:0;1;1;\dots;1} \left(\begin{array}{c} [(a_1): 1, \dots, 1]: \quad -; [ax: 1]; [by: 1]; [cz: 1]; \\ [(c_1): \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(s+3)}]: \quad -; \quad -; \quad -; \quad -; \\ [b_2: 1]; \dots; [b_s: 1]; \\ (-u_1xyzdeht), \left(\frac{-u_1yzeht}{1-ehzyt}\right), \left(\frac{-u_1xzdht}{1-dhxzt}\right), \left(\frac{-u_1xydet}{1-dexyt}\right) u_2, \dots, u_s \\ [c_2: 1]; \dots; [c_s: 1]; \end{array} \right), \end{aligned}$$

bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir. Buradaki, $\psi^{(\eta)}$ ’nin katsayıları

$$\psi^{(\eta)} = \begin{cases} 1, & (1 \leq \eta \leq 4), \\ 0, & (4 < \eta \leq s+3), \end{cases}$$

şeklindedir. Buradaki $F_A^{(s)}$, birinci çeşit Lauricella fonksiyonudur.

Sonuç 4.6. Teorem 4.7’de $B = 1$, $\phi_1 = 1$, $\delta = 0$ ve

$$\Omega(f(m_1, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) = \frac{\left(a_1^{(1)}\right)_{m_2} \dots \left(a_1^{(s-1)}\right)_{m_s} \left(a_2^{(1)}\right)_{m_2} \dots \left(a_2^{(s-1)}\right)_{m_s}}{(c)_{m_1+\dots+m_s}}$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) F_B^{(s)} \left[-n, a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(s-1)}, b_1, a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(s-1)}; c; u_1, u_2, \dots, u_s \right] t^n \\ &= e^{dehxyzt} (1 - ehzyt)^{-ax} (1 - dhxzt)^{-by} (1 - dexyt)^{-cz} \\ & \times F_{1:0;0;0;0;0;\dots;0}^{1:0;1;1;1;2;\dots;2} \left(\begin{array}{l} [(b_1): \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(s+3)}]: \quad -; [ax: 1]; [by: 1]; [cz: 1]; [a^{(1)}: 1]; \\ [(c): 1, \dots, 1]: \quad \quad \quad -; \quad \quad -; \quad \quad -; \quad \quad -; \quad \quad -; \\ \dots; [a^{(s-1)}: 1]; \\ (-u_1xyzdeht), \left(\frac{-u_1yzeht}{1 - ehzyt}\right), \left(\frac{-u_1xzdht}{1 - dhxzt}\right), \left(\frac{-u_1xydet}{1 - dexyt}\right) u_2, \dots, u_s \\ \dots; \quad \quad \quad -; \end{array} \right), \end{aligned}$$

bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir. Buradaki, $\theta^{(\eta)}$ ’nin katsayıları

$$\theta^{(\eta)} = \begin{cases} 1, & (1 \leq \eta \leq 4) \\ 0, & (4 < \eta \leq s + 3) \end{cases}$$

şeklindedir. Buradaki $F_B^{(s)}$, ikinci çeşit Lauricella fonksiyonudur.

Sonuç 4.7. Teorem 4.7’de

$$\Omega(f(m_1, \dots, m_s), m_2, \dots, m_s) = \frac{(a_1)_{m_1+\dots+m_s} (b_2)_{m_2} \dots (b_s)_{m_s}}{(c)_{m_1+\dots+m_s}}$$

ve

$$\phi = \delta = 0,$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x, y, z; a, b, c, d, e, h) F_D^{(s)}[a_1, -n, b_2, \dots, b_s; c; u_1, u_2, \dots, u_s] t^n \\ &= e^{dehxyzt} (1 - ehyzt)^{-ax} (1 - dhxzt)^{-by} (1 - dexyt)^{-cz} \\ &\times F_D^{(s+3)}[a_1, 0, ax, by, cz, b_2, \dots, b_s; c \\ &\quad (-u_1xyzdeht), \left(\frac{-u_1yzeht}{1 - ehyzt}\right), \left(\frac{-u_1xzdht}{1 - dhxzt}\right), \left(\frac{-u_1xydet}{1 - dexyt}\right), u_2, \dots, u_s] \end{aligned}$$

bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir. Buradaki $F_D^{(s)}$, dördüncü çeşit Lauricella fonksiyonudur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada tek değişkenli Sylvester polinomları, onların genelleştirilmiş halleri, toplam ifadeleri, modified genelleştirilmiş Sylvester polinomları incelenmiştir. Bu polinomların bazı özellikleri verildikten sonra bu polinomlar yardımıyla üç değişkenli genelleştirilmiş Sylvester polinomları için multilineer ve multilateral doğurucu fonksiyon bağıntılarını veren teoremler elde edilmiştir. Ayrıca bu teoremlerin özel durumları elde edildi ve özel tipten bazı polinomların üç değişkenli genelleştirilmiş Sylvester polinomlarının Appell ve genelleştirilmiş Lauricella fonksiyonları arasındaki ilişkileri verildi.

Bu tezde çalışılan konuların ışığı altında gelecekte farklı polinomların doğurucu fonksiyon bağıntıları, başka polinomlarla ilişkisi elde edilebilir. Hatta bu polinomların n – değişkenlisi tanımlanıp benzer özellikler incelenebilir. Ayrıca burada kullanılan yöntemler, başka polinomların farklı özelliklerinin incelenmesi konusunda yardımcı bir kaynak oluşturmaktadır.

6. KAYNAKLAR

- [1] A. Edr lyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, 3. cilt, New York, USA: McGraw-Hill Book Company, 1955.
- [2] E. D. Rainville, *Special Functions*, New York, USA: The Macmillan Company, 1960.
- [3] A. K. Agarwal, H. L. Manocha, “On some new generating functions,” *Matemati ki Vesnik*, c. 32, sayı 4, ss. 395–402, 1980.
- [4] M. A. Malik, “A note on generating functions and summation formulae for modified generalized Sylvester polynomials,” *International Journal on Recent and Innovation Trends in Computing and Communication*, c. 2, ss. 2162-2165, 2014.
- [5] J. Choi and M. Akhlaq, “Note on generating functions of generalized Sylvester polynomials of several variables,” *Far East Journal of Mathematical Sciences*, c. 12, sayı 11, ss. 2877-2894, 2017.
- [6] N.  zmen, “Bilateral and bilinear generating functions for the modified generalized Sylvester polynomials,” *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, c. 33, sayı 2, ss. 279–293, 2018.
- [7] N.  zmen and E. Erkus-Duman, “On the generalized Sylvester polynomials,” *Analysis, Probability, Applications, and Computation*, ss. 47-55, 2019.
- [8] R. Jakimczuk, “The leading coefficient in the Sylvester’s polynomials,” *International Mathematical Forum*, c. 3, sayı 25, ss. 1123-1228, 2008.
- [9] H. S. Cohl, R. S. Costas-Santos and T. V. Wakhare, “Some generating functions for q -Polynomials,” *Symmetry*, c. 10, sayı 12, ss. 12, 2018,
- [10] M. Akhlaq, “Generating functions of q -Sylvester and q -Mittag-Leffler polynomials,” *JK Research Journal in Mathematics and Computer Sciences*, c. 1, sayı 1, ss. 45-48, 2018.
- [11] N.  zmen and  . Soytürk, “Generalized Sylvester polynomials of in several variables,” *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, c. 13, sayı 2, ss. 1093–1109, 2018.
- [12] L. Carlitz, “A class of generating functions,” *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, c. 8, sayı 3, ss 518-532, 1977.
- [13] A. K. Agarwall, R. Bhatia and H. L. Manocha, “Alternative methods of obtainig differential operat r representations,” *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, c. 13, sayı 2, ss 237-246, 1982.
- [14] H. M. Srivastava, “Some bilateral generating functions for a certain class of special functions I and II,” *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, c. 83, sayı 2, ss 234-246, 1980.
- [15] H. M. Srivastava and H. L. Monacha, *A Treatise on Generating Functions*, New York, USA: Ellis Horwood Limited, 1984.

- [16] P. J. Davis, “Leonhard Euler's integral: A historical profile of the gamma function,” *The American Mathematical Monthly*, c. 66, sayı 10, ss. 849-869, 1959.
- [17] R. Aktaş and E. Erkuş-Duman, “The Laguerre polynomials in several variables,” *Mathematica Slovaca*, c. 63, sayı 3, ss. 531-544, 2013.
- [18] N. Özmen, “New generating function relations for the q -generalized Cesàro polynomials,” *Journal of Function Spaces*, c. 2019, ss. 7, 2019.
- [19] E. Erkuş and H. M. Srivastava, “A unified presentation of some families of multivariable polynomials,” *Integral Transform Special Functions*, c. 17, ss. 267-273, 2006.
- [20] S.-J. Liu, S.-D. Lin, H. M. Srivastava and M.-M. Wong, “Bilateral generating functions for the Erkuş-Srivastava polynomials and the generalized Lauricella functions,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 218, ss. 7685-7693, 2012.
- [21] N. Özmen and E. Erkuş-Duman, “Some results for a family of multivariable polynomials,” *American Institute of Physics Conference Proceedings*, c. 1558, ss. 1124-1127, 2013.
- [22] H. M. Srivastava and M. C. Daoust, “Certain generalized Neumann expansions associated with the Kampé de Fériet function,” *Nederlandse Akademie van Wetenschappen Indagationes Mathematicae*, c. 31, ss. 449-457, 1969.
- [23] N. Özmen and Ş. Soytürk, “Generalized Sylvester polynomials of in several variables,” *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, c. 13, sayı 2, ss. 1093–1109, 2018.
- [24] A. Altın ve E. Erkuş, “On a multivariable extension of the Lagrange–Hermite polynomials,” *Integral Transforms and Special Functions*, c. 17, ss. 239–244, 2006.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Şule SOYTÜRK
Doğum Tarihi ve Yeri : 28.02.1992 Kartal/İSTANBUL
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : sule.soyturk61@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2019
Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2016
Lise		Kaynarca Şevket Sabancı Lisesi	2010

BİLDİRİ

N. Özmen and Ş. Soytürk, “Generalized Sylvester Polynomials of Three Variables,” *International Conference on Mathematical Advances and Applications*, Istanbul, TURKEY, 2018.

YAYIN

N. Özmen and Ş. Soytürk, “Generalized Sylvester Polynomials of in Several Variables”, *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, cilt 13, sayı 2, ss 1093–1109, 2018.