

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORCID : - - -

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /

Tezin Savunma Tarihi : / /

Tez Danışmanı :
ORCID : - - -

Trabzon

ÖNSÖZ

“Çok Değişkenli Katlı Lineer Modeller Altında Parametre Tahmini” isimli bu tez Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı, Doktora Programı’nda hazırlanmıştır.

Bu tez çalışmasında bana danışmanlık yapan, saygı değer hocam Prof. Dr. Orhan KESEMEN’ e bu sürecin bir parçası olduğu için teşekkür ediyorum.

Akademik hayatımın her aşamasında sadece bir rehber değil, aynı zamanda arkamda duran bir güç olan; bilgeliği, sabrı ve bana olan inancıyla bu yolculukta hep bir adım önde olmamı sağlayan; akademik başarılarımın yanı sıra kişisel gelişimime de büyük katkı sunan değerli hocam Prof. Dr. Nesrin GÜLER’ e en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak, eşim Dr. Abdurrahman BÜYÜKKAYA ve oğlum Ali Mert BÜYÜKKAYA’ ya verdikleri destek ve gösterdikleri sabır için yürekten teşekkür ediyorum.

Bu tez çalışmasının gelecekte yapılacak araştırmalara katkı sağlamasını umut ediyorum.

Melek ERİŞ BÜYÜKKAYA
Trabzon 2025

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Çok Değişkenli Katlı Lineer Modeller Altında Parametre Tahmini” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Orhan KESEMEN’ in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 24/06/2025

Melek ERİŞ BÜYÜKKAYA

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	IX
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Matematiksel Altyapı	5
1.2.1. Matris Cebiri: Temel Kavramlar	5
1.2.2. Kuadratik Formlar ve İlişkili Tanımlar	8
1.2.3. Blok Matrisler	9
1.2.4. Matris Tersleri	9
1.2.5. Matris Denklemleri	10
1.2.6. Vektör Uzayı ve İzdüşüm Matrisleri.....	11
1.2.7. Rasgele Vektörler ve Matrisler	12
1.2.8. Rank ve Özellikleri	13
1.2.9. Bir Matrisin Kronecker Çarpımı ve Vektörleştirme İşlemi	15
1.2.10. Parametre Tahmininde Bazı Optimizasyon Yöntemleri	16
1.3. Lineer Modeller.....	18
1.3.1. Lineer Modellerde Tahmin	20
1.3.2. Lineer Modellerde Optimizasyon Yöntemleri	22
1.3.3. Lineer Modellerde Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması	27
1.4. Aşırı Parametrelili Lineer Modeller	28
1.4.1. Aşırı Parametrelili Lineer Modellerde Tahmin	29
1.4.2. Aşırı Parametrelili Lineer Modellerde Optimizasyon Yöntemleri.....	31
1.4.3. Aşırı Parametrelili Lineer Modellerde Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması	33
1.5. Kısıtlı Modeller	35
1.5.1. Model ve Kısıtın Ortak Matris Formunda Yazılması	35
1.5.2. Yeniden Parametrelendirme Yöntemi.....	36

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	38
2.1. Kısıtlı Çok Değişkenli Katlı Lineer Modeller	38
2.2. Kısıtlı Aşırı Parametrelili Çok Değişkenli Katlı Lineer Modeller	39
2.3. Yeniden Parametrelendirme Yöntemi ile Modellerin Belirlenmesi.....	40
2.4. Tahmin Edilebilme	40
2.4.1. Kısıtlı Aşırı Parametrelili Çok Değişkenli Katlı Lineer Modeller Altında BLUP Hesabı	43
2.4.2. Kısıtlı Çok Değişkenli Katlı Lineer Modeller Altında BLUP Hesabı.....	54
2.5. Kısıtlı Çok Katlı Lineer Modellerde BLUE' ların Eşitlik İlişkileri	58
3. SONUÇLAR.....	63
4. ÖNERİLER.....	65
5. KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	

Doktora Tezi

ÖZET

ÇOK DEĞİŞKENLİ KATLI LİNEER MODELLER ALTINDA PARAMETRE TAHMİNİ

Melek ERİŞ BÜYÜKKAYA

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Orhan KESEMEN
2025, 72 Sayfa

İstatistikte, lineer modeller kavramı geniş bir yer tutar. Özellikle çok değişkenli lineer modellerde parametre tahminleri ve yorumları literatürde geniş bir uygulama alanı bulur. Bu konudaki çalışmalar, açıklayıcı bir değişken grubuyla tek bir bağımlı değişkeni açıklamaya odaklanır. Ancak, gerçek hayatta iki veya daha fazla bağımlı değişkeni aynı anda içeren problemlere de sıkça rastlanır. Bu tür durumlar, klasik çok değişkenli modellerin ötesine geçilerek daha genel yapılara ihtiyaç duyulduğunu göstermektedir.

Bu tezde, kısıtlı çok değişkenli katlı lineer modeller ile bu modellerin aşırı parametrelili versiyonu ele alınmaktadır. Bu modeller altında tüm bilinmeyen parametre matrislerinin En İyi Lineer Yansız Ön Tahmin Edici (BLUP) ve En İyi Lineer Yansız Tahmin Edici (BLUE)'lerini hesaplamak için analitik formüllerinin elde edilmesi hedeflenmiştir. Ancak, bilinmeyen parametre matrisi üzerindeki kısıtlar, ele alınan modeller altında bu işlemi zorlaştırmaktadır. Çalışmada, bu zorluğun üstesinden gelmek amacıyla, yeniden parametrelendirme yöntemi kullanılarak kısıtlar ortadan kaldırılmıştır. Böylece elde edilen yeni modeller için kuadratik matris optimizasyon teknikleri ile tüm bilinmeyen parametre matrislerinin BLUP/BUE'ları için analitik formüllerin türetilmesi sağlanmıştır. Sonuç olarak BLUP/BUE'lara yeni ve değerli özellik kazandırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: BLUP, Çok değişkenli katlı lineer modeller, Kuadratik matris optimizasyon yöntemi, Parametre kısıtı

PhD. Thesis

SUMMARY

PARAMETER ESTIMATION UNDER CONSTRAINED MULTIVARIATE LINEAR MODEL

Melek ERİŞ BÜYÜKKAYA

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Statistics and Computer Sciences Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Orhan KESEMEN
2025, 72 Pages

In statistical analysis, linear models occupy a significant place. Particularly in multivariate linear models, parameter estimation and interpretations have a wide range of applications in the literature. Studies in this area often focus on explaining a single dependent variable with a group of explanatory variables. However, in real-world scenarios, problems involving two or more dependent variables simultaneously are frequently encountered. Such situations demonstrate the need for more general structures that go beyond classical multivariate models.

This thesis focuses on constrained multivariate linear models and their over-parameterized version. The aim is to derive analytical formulas for the Best Linear Unbiased Predictor (BLUP) and the Best Linear Unbiased Estimator (BLUE) of all unknown parameter matrices under these models. However, the constraints on the unknown parameter matrix complicate the process within the framework of the given models. In the study, the constraints are eliminated using the reparameterization method to overcome this difficulty. Thus, for the new models obtained, analytical formulas for BLUP/BLUE of all unknown parameter matrices are derived using quadratic matrix optimization techniques. As a result, new and valuable features are gained for BLUP/BLUE.

Key Words: BLUP, Multivariate linear models, Quadratic matrix optimization method, Parameter constraint,

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^{n \times 1}$	: n boyutlu reel vektör kümesi
$\mathbb{R}^{t \times s}$	: $t \times s$ boyutlu reel matris kümesi
$x, y, z, \dots$	: Vektörler
$K, L, M, \dots$	: Matrisler
$T = (t_{ij})$	: Elemanları (t_{ij}) olan T matrisi
I_n	: n boyutlu birim matris
T'	: T matrisinin transpozu
T^{-1}	: T matrisinin tersi
T^-	: T matrisinin genelleştirilmiş tersi
T^+	: T matrisinin Moore—Penrose genelleştirilmiş tersi
$T^\perp$	: T matrisinin dik tümleyeni
P_T, E_T, F_T	: T matrisinin dik izdüşüm matrisleri
$i_+(T)$	: T matrisinin pozitif inertiası
$i_-(T)$	: T matrisinin negatif inertiası
$r(T)$	: T matrisinin rankı
$\mathfrak{R}(T)$	: T matrisinin sütun uzayı
$T \otimes S$	: T ve S matrislerinin kronecker çarpımı
$[T, S]$	: Parçalanmış matris
$cov(.)$	: Kovaryans operatörü
$E(.)$	: Beklenen değer operatörü
$D(.)$	: Varyans—Kovaryans operatörü (Dağılım operatörü)
$\Leftrightarrow$	: Ancak ve ancak
$\square$	: İspat sonu
BLUE	: En iyi lineer yansız tahmin edici (Best linear unbiased estimator)
BLUP	: En iyi lineer yansız ön tahmin edici (Best linear unbiased predictor)
LPO	: Löwner kısmi sıralaması (Löwner partial ordering)

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Günümüzde, teknolojinin gelişmesi, sağlık, eğitim, iletişim gibi alanlarda büyük ilerlemeler sağlarken, aynı zamanda birtakım sorunları da beraberinde getirmiştir. Özellikle veri güvenliği, gizlilik ihlalleri, işsizlik, dijital bağımlılık ve çevre kirliliği gibi sorunlar ön plana çıkmıştır. Bu sorunları kolay ve anlaşılır seviyede tutmak ve açıklamak veya birbirinden bağımsız gibi görünen olaylar arasında ilişki kurabilmek önemlidir. Diğer bir deyişle, bu sorunlarla başa çıkmak için istatistiksel yöntemler önemli bir rol oynar. Örneğin, istatistiksel analizler sayesinde veri güvenliği açıkları belirlenir, işsizlik oranları ve dijital bağımlılık eğilimleri incelenir ve çözüm önerileri geliştirilebilir. Ayrıca, teknolojik çevresel etkilerin ölçülmesi ve bu etkilerin minimize edilmesi için istatistiksel modellemeler kullanılabilir.

Model, gerçek dünyadaki bir olgunun bir ifadesi iken, akıl ile gerçek dünyadaki olguları anlama ve anlatma işi modelleme ile yapılır (Öztürk & Özbek, 2004). İstatistiksel modellemeler ise, veriler ile bir sistemin nasıl çalıştığını açıklayan matematiksel bir yapıdır. Modeller, temel bilimlerden sosyal bilimlere kadar birçok disiplinde yaygın olarak kullanılan güçlü araçlardır. Gerçek dünyadaki karmaşık sistemleri daha iyi anlamak, analiz etmek ve tahminlerde bulunmak amacıyla oluşturulan modeller, bu sistemlerin temel özelliklerini yansıtarak daha sade ve anlaşılır bir form sunar. Gerçek dünyada karşılaşılan sorunlar genellikle çok faktörlü ve karmaşık yapılar içerir, bu nedenle doğrudan analiz edilmeleri zor olabilir. Modeller, belirli varsayımlar altında bu karmaşıklığı azaltır ve çözüm sürecini daha yönetilebilir hale getirir. Modelleme sürecinde, sistemin temel unsurları ve ilişkileri belirlenir, ardından bu ilişkiler matematiksel, istatistiksel veya bilgisayar tabanlı yapılar aracılığıyla temsil edilir. Bu şekilde, modeller aracılığıyla karmaşık olaylar, anlaşılması daha kolay yapılara dönüştürülür ve gelecekteki durumlar tahmin edilebilir.

Modelleme ile gerçek tam anlamıyla yansıtılamasa da, problemin çözümüne yönelik bir temsili oluşturur. Varsayımlar ise, modelin basitleştirilmesi adına yapılan kısıtlamalar olup, bu varsayımların ne kadar gerçekçi olduğu, modelin doğruluğu ve geçerliliği açısından kritik bir öneme sahiptir. Böylece, modeller bir yandan sistemlerin karmaşıklığını sadeleştirirken, diğer yandan karar vericilere analitik çözümler sunma imkânı tanır.

Regresyon analizi, iki veya daha fazla değişkenin birbirleriyle neden sonuç ilişkisi olduğunu gösteren matematiksel bir ilişkiyi modellemek ve bu ilişkiyi kullanarak bir konu hakkında tahminler yapmak için kullanılan bir istatistiksel yöntemdir (Gamgam & Altunkaynak, 2015). Özellikle bilimsel araştırmalarda, mühendislik uygulamalarında ve sosyal bilimlerde sıkça başvurulmuş bu yöntem, değişkenler arasındaki sebep-sonuç ilişkisini ortaya koyarak gelecekteki sonuçları tahmin etme fırsatı sunar. Regresyon analizi sayesinde bir değişkenin diğerine olan etkisi ölçülerek, aralarındaki ilişki niceliksel olarak ifade edilebilir. Örneğin, ziraat mühendisleri buğday verimi ile gübre miktarı arasındaki ilişkiyi anlamak için regresyon analizini kullanabilir. Gübre miktarındaki artışın buğday verimi üzerindeki etkisi bu yöntemle analiz edilebilir ve optimal gübre miktarını belirlemek amacıyla matematiksel modeller oluşturulabilir. Aynı şekilde, eğitimciler öğrencilerin devamsızlık gün sayıları ile başarı dereceleri arasındaki ilişkiyi analiz ederek, devamsızlığın başarı üzerindeki olası etkilerini değerlendirebilirler. Bu tür analizler, eğitim politikalarının veya öğretim stratejilerinin belirlenmesinde önemli bir rol oynayabilir.

Regresyon analizinin en yaygın ve temel uygulamalarından biri lineer regresyon modelidir. Bu modellerde bilinmeyen parametrelerin tahminlerini elde etmek karşılaşılan klasik problemlerdendir. Bu tip modellerden istatistiksel sonuçlar çıkarılırken, önce model formüle edilir daha sonra, modeldeki bilinmeyen tüm vektörler veya bu vektörlerin fonksiyonları çeşitli yöntemlerle tahmin edilebilir. Bu modellere ilişkin çıkarım ve tahmin problemlerinde, örnek bilgilerin yanı sıra, verinin içerdęi bilgilerin dışında, bilinmeyen parametre için çoğu zaman önceden mevcut olan ek bilgiler de bulunabilmektedir. Bu ek bilgi, genellikle model varsayımlarına eklenen, bilinmeyen parametreler üzerindeki kesin veya stokastik kısıtlamalar olabilir. Parametreler üzerinde lineer hipotez testi, bilinmeyen bir parametrenin tek bir bileşeninin kesin bilgisi ve modellerdeki belirli katsayılar arasındaki oranların bilinen bilgisi gibi bazı durumlarda parametreler üzerinde kesin kısıtlamalar ortaya çıkar (Ren, 2015). Bilinmeyen parametreler üzerinde kesin kısıtlamaya sahip lineer bir model, kısıtlı lineer model olarak bilinir. Bu modeller istatistiksel literatürde çeşitli yönlerden geniş çapta araştırılmıştır (Amemiya, 1985; Büyükkaya, 2024, Baksalary & Pordzik, 1989, 1990; Chipman & Rao, 1964; Dent, 1980; Güler & Büyükkaya, 2024b; Hallum vd., 1973; Haupt & Oberhofer, 2002; Ma & Tian, 2022; Mathew, 1983; Li vd., 2023; Ravikumar vd., 2000; Tian vd., 2008).

Araştırmacılar bazen aynı gözlemlenen verileri eşleştirmek için birden fazla alternatif modelin olduğu birçok durumla karşı karşıya kalabilirler. Bu modeller, belirli bir

gözlemlenen vektör için modellere regresörlerin eklenmesi veya çıkarılmasıyla oluşturulabilir. Modele yeni regresörlerin eklenmesi, istatistiksel analizlerde ve modelleme çalışmalarında önemli bir adımdır. Yeni regresörler eklemek, modelin açıklayıcılık gücünü artırarak bağımlı değişkenle olan ilişkileri daha iyi yakalayabilir. Bu sayede eksik veya önemli bilgilerin modele dahil edilmesi sağlanırken, doğrusal ilişkilerin yanı sıra karmaşık etkileşimlerin de yakalanmasına olanak tanır. Belirli bir doğrusal modele yeni regresörler içeren yeni parçalar eklenerek modelin aşırı parametrelili bir modeli elde edilir. Literatürde aşırı parametrelili bir model, örneğin zengin parametrelili bir model, aşırı uyumlu bir model ve yanlış tanımlanmış bir model olarak da bilinir, ayrıca gereksiz değişkenlerin dahil edildiği doğrusal bir model olarak da adlandırılır. İstatistik literatüründe bu tür modellerle ilgili pek çok çalışma bulunmaktadır (Baksalary, 1984; Bhimasankaram & Jammalamadaka, 1994; Dube, 1999; Güler vd., 2014; Güler & Büyükkaya, 2024a; Hodges, 2014; Isotalo vd., 2007; Jammalamadaka & Sengupta, 2007; Jun & Pinkse, 2009; Kadiyala, 1986; Mitra & Moore, 1973; Qian & Tian, 2006; Tian & Jiang, 2017; Wijekoon & Trenkler, 1989). Özellikle çok değişkenli lineer modellerde parametre tahminleri ve istatistiksel analizler, bu konularla ilgili çalışmalarda kullanılabilir.

Yapılan çalışmaların birçoğunda bir değişkeni açıklamak için açıklayıcı bir değişken grubu kullanılmıştır. Gerçek hayatta, birden fazla bağımlı değişkeni içeren ve herhangi bir açıklayıcı değişken grubuyla aynı anda açıklanabilecek şekilde birden fazla bağımlı değişken içeren bir modelle ilgili sorunlarla karşılaşmak mümkündür. Bu tür çoklu bağımlılık ilişkileri, klasik çok değişkenli modellerin açıklayıcı gücünün ötesine geçilmesini gerektirmektedir. Zira klasik modeller genellikle tek bir bağımlı değişken üzerine odaklanmakta ve değişkenler arası eşzamanlı ilişkileri yeterince yansıtamamaktadır. Bu nedenle, birden fazla bağımlı değişkenin çoklu açıklayıcı değişkenlerle birlikte modellendiği daha genel yapılara duyulan ihtiyaç artmıştır. Bu genel yapılar arasında son dönemde öne çıkanlardan biri, çok değişkenli katlı lineer modellerdir. Bu bağlamda, çok değişkenli katlı lineer modeller söz konusu genel yapılar arasında dikkat çeken güçlü bir modelleme çerçevesi sunmaktadır. Son zamanlarda bazı çalışmalarda bu modellere yer verilmiştir (Jiang & Tian, 2023).

Bilinmeyen parametreler için farklı özelliklere sahip birçok tahmin edici mevcuttur. Yansızlık, ele alınan modeller altında, bilinmeyen parametrelerin tahmin edicilerini belirlemek için önemli bir kriterdir ve yansız tahmin ediciler tek değildir. Bilinmeyen parametreler için uygun bir ön tahmin edici veya tahmin edici belirlemenin en iyi ve bilinen

yöntemi, diğer tüm yansız tahmin ediciler arasında en küçük kovaryans matrisine sahip olan tahmin edicilerin bulunmasıdır. Bu nedenle, yansız tahmin edicilerin kovaryans matrisleri, genel olarak uygun olan tahmin ediciyi belirlemek için yapılacak karşılaştırmalarda ölçüt olarak kullanılır. Yansız ve en küçük kovaryans matrisine sahip ve en çok kullanılan tahmin ediciler En İyi Lineer Yansız Ön Tahmin Edici (BLUP) ve En İyi Lineer Yansız Tahmin Edici (BLUE)' dir.

Lineer regresyon modellerindeki parametre uzaylarının BLUE ve BLUP hesapları, matrisler için Löwner kısmi sıralaması (LPO) ile belirli optimizasyon kriterlerine göre tek tip olarak tanımlanır. Lineer regresyon modelleri altında BLUE ve BLUP' lar ile ilişkili optimizasyon problemleri, matrislerin genelleştirilmiş tersleri aracılığıyla analitik olarak ifade edilmiştir (Drygas, 1970; Rao, 1973; Zyskind, 1967). Lineer regresyon modellerdeki tüm bilinmeyen parametrelerin BLUE ve BLUP' larını hesaplamak için kullanılan analitik formüller, LPO vasıtasıyla kısıtlı kuadratik matris değerli fonksiyonların optimizasyon problemleri kullanılarak da çözülebilir. Son yıllarda bazı çalışmalarda bu tip problemlerinin kesin çözümleri LPO ile elde edilmiştir (Güler & Büyükkaya, 2023a; Tian, 2015). Başka bir deyişle, bu problemler lineer regresyon modellerindeki bilinmeyen parametrelerin eşzamanlı tahmin ve ön tahmin problemlerinin çözümüne uygulanmıştır. Yani bilinmeyen parametrelerin ön tahmin veya tahmin edicilerini bulmak için tanımlanan minimizasyon problemi bir kısıtlı kuadratik matris değerli fonksiyonun optimizasyon problemine karşılık gelmektedir. Çalışmanın araştırma sorusu; Lineer modellere uygulanan matris değerli kuadratik optimizasyon yöntemi çok değişkenli katlı lineer modellere de uygulanabilir mi? şeklindedir.

Bu tezde, çok değişkenli katlı lineer modeller, model varsayımlarına eklenen, bilinmeyen parametreler üzerindeki kesin kısıtlamalar ile ele alınmıştır. Ayrıca belirli bir gözlemlenen vektör için bu kısıtlı modellere regresörlerin eklenmesi ile kısıtlı aşırı parametrelili çok değişkenli katlı lineer modeller elde edilmiştir. Tezin temel amacı, düşünülen modellerdeki tüm bilinmeyen parametre matrislerinin BLUP' larını ve BLUE' larını hesaplamak için analitik formüller türetmektir. Ancak, bilinmeyen parametre matrisi üzerinde yapılan kısıt, ele alınan modeller altında analitik formüller üretmeyi zorlaştırmaktadır. Bu nedenle kısıtlamanın ortadan kalkması gerekmektedir. Bunun için kullanılan en etkin yöntemlerden biri yeniden parametrelendirme yöntemidir. Bu yöntem ile ele alınan kısıtlı model, kısıtsız model formuna dönüştürülür. Böylece yeniden parametrelendirilmiş kısıtsız çok değişkenli katlı modeller altında, bazı kuadratik matris

optimizasyon yöntemleri kullanarak tüm bilinmeyen parametre matrislerinin BLUP' larını ve BLUE' larını hesaplamak için analitik formüllerin türetilmesi sağlanır. Elde edilen BLUP ve BLUE denklemleri ile dağılım matrisleri elde edilir. Gerekli karşılaştırmalar bu dağılım matrisleri ile sağlanabilir.

Ele alınan kısıtlı modelin kısıtsız model formuna dönüştürülmesinde kullanılan bir diğer yöntem ise model ile kısıtın ortak bir formda yazılmasıdır. Bu yöntem ile model ve kısıt, bilinmeyen parametrelerin ortak olduğu matris formunda yazılır. Böylece ele alınan kısıtlı model, kısıtsız model formuna dönmüş olur. Dolayısıyla, ele alınan modeller altında bilinmeyen parametre vektörleri üzerinde yapılmak istenen parametre tahmini, bu yöntem ile elde edilen kısıtsız modeller için yapılabilir

Bu tez, ele alınan modeller ve uygulanan yöntemler açısından özgün olup, literatüre yeni ve derinlemesine bir katkı sunmaktadır.

1.2. Matematiksel Altyapı

Bu bölümde, çalışmanın temellerini oluşturan ve ilerleyen kısımlarda kullanılacak olan matris teorisine dair temel kavramlar ve yöntemler ele alınacaktır. Matris cebirinden kronecker çarpım ve vektörleşmeye kadar uzanan bu başlıklar, çok değişkenli lineer modellerin analizi için gerekli matematiksel altyapıyı sağlamaktadır.

1.2.1. Matris Cebiri: Temel Kavramlar

Tanım 1. Tümü birden sıfır olmayan $k_1, k_2, \dots, k_n$ skalerleri $k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n = 0$ olacak şekilde varsa, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ vektörlerinin kümesine lineer bağımlıdır, diğer durumda lineer bağımsızdır denir (Magnus & Neudecker, 1988).

Tanım 2. $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin sütunları $t_1, t_2, \dots, t_n$ olsun. T matrisinin sütunlarının bir lineer kombinasyonu, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörü için $Tx = x_1t_1 + x_2t_2 + \dots + x_nt_n$ ifadesi ile gösterilir. T matrisinin sütunlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilen tüm vektörlerin kümesine T matrisinin sütun uzayı denir ve $\mathcal{R}(T)$ şeklinde ifade edilir. $\mathcal{R}(T) = \{y \in \mathbb{R}^{n \times 1}; y = Tx, x \in \mathbb{R}^{n \times 1}\}$, T matrisinin sütunları tarafından üretilir (Venit & Bishop, 1985; Sengupta & Jammalamadaka, 2003).

Tanım 3. $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin $t'_1, t'_2, \dots, t'_n$ satırları tarafından üretilen $\mathbb{R}^{n \times 1}$ in alt uzayına T matrisinin satır uzayı denir. T matrisinin satır uzayı $\mathfrak{R}(T')$ olarak gösterilir (Sengupta & Jammalamadaka, 2003).

Tanım 4. Bir matrisin sütun rankı, matrisin sütun uzayı boyutu, satır rankı ise matrisin satır uzayı boyutudur (Venit & Bishop, 1985).

Tanım 5. $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi aşağıdaki özelliklerin sağlanması durumunda satırca indirgenmiş eşalon formundaki matris olarak adlandırılır. Bu tanım sütunca indirgenmiş eşalon matris için de geçerlidir (Torunbalcı Aydın, 2017).

- a) Eğer matrisin bir satırındaki tüm elemanları sıfır ise, bunlar matrisin en alt satırında bulunmalıdır.
- b) Matrisin sıfırdan farklı ilk satırının ilk elemanı 1 olmalıdır. Bu elemana bu satırın ilk elamanı denir.
- c) Sıfırdan farklı her bir satırda bu ilk eleman, bir önceki satıra göre sağa doğru bir kaymak suretiyle yer alır.
- d) Eğer matrisin sütununun birisi bu ilk elemanı içeriyorsa, o sütundaki diğer elemanların hepsi sıfırdır.

Tanım 6. $R_1, R_2, \dots, R_n$ satırlarından oluşan bir matris üzerinde yapılan aşağıdaki işlemlere elementer matris satır işlemleri denir (Lipschutz & Lipson, 2008).

- a) İki satır karşılıklı olarak değiştirilebilir. Bu satırlar R_k ve R_l olarak gösterilirse, satırların karşılıklı yer değiştirilmesi $R_k \leftrightarrow R_l$ şeklinde yazılır.
- b) Bir satır sıfırdan farklı bir katıyla yer değiştirebilir. Bu satır R_k olarak gösterilirse, R_k 'nin $sR_k (s \neq 0)$ ile yer değiştirilmesi $R_k \leftrightarrow sR_k$ şeklinde yazılır.
- c) Bir satır, başka bir satırın bir katı ile kendisinin toplamı olan satır ile yer değiştirilebilir. Bu satır R_l olarak gösterilirse, R_l satırının $sR_k (s \neq 0)$ ile R_l 'nin toplamı ile değiştirilmesi, $R_l \leftrightarrow R_l + sR_k$ şeklinde yazılır.

Tanım 7. $C_1, C_2, \dots, C_n$ sütunlarından oluşan bir matris üzerinde yapılan aşağıdaki işlemlere elementer matris sütun işlemleri denir (Lipschutz & Lipson, 2008).

- a) İki sütun karşılıklı olarak değiştirilebilir. Bu sütunlar C_k ve C_l olarak gösterilirse, sütunların karşılıklı yer değiştirilmesi $C_k \leftrightarrow C_l$ şeklinde yazılır.
- b) Bir sütun sıfırdan farklı bir katıyla yer değiştirebilir. Bu sütun C_k olarak gösterilirse, C_k 'nin $sC_k (s \neq 0)$ ile yer değiştirilmesi $C_k \leftrightarrow sC_k$ şeklinde yazılır.

- c) Bir sütun, başka bir sütunun bir katı ile kendisinin toplamı olan sütun ile yer değiştirilebilir. Bu sütun C_l olarak gösterilirse, C_l sütununun sC_k ($s \neq 0$) ile C_l 'nin toplamı ile değiştirilmesi, $C_l \leftrightarrow C_l + sC_k$ şeklinde yazılır.

Teorem 8. $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi, $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin satır indirgenmiş eşalon biçimi olsun. İki matrisinin satır uzayları aynıdır (Venit & Bishop, 1985).

Tanım 9. Bir matrisin satır uzayının boyutuna satır rankı, sütun uzayının boyutuna ise sütun rankı denir. Bir matrisinin satır indirgenmiş eşalon biçimindeki sıfırdan farklı satırlarının sayısına da rank denir ve $r(\cdot)$ operatörü ile gösterilir. (Venit & Bishop, 1985).

Teorem 10. Bir matrisinin rankı, o matrisin hem satır hem de sütun rankına eşittir (Venit & Bishop, 1985).

Tanım 11. $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ olmak üzere, eğer S, T matrisinin elementer sütun veya satır işlemleri sonucu elde edilen bir matris ise, T 'ye S matrisine denk bir matristir denir (Seber, 2008).

Teorem 12. T, S matrisine denk bir matris ise rankları eşittir, yani $r(T) = r(S)$ 'dir (Seber, 2008).

Tanım 13. $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matris olmak üzere, $Tx = \rho x$ sağlayacak şekilde sıfır olmayan bir x vektörü mevcutsa, ρ skaleri T matrisinin özdeğeri, x vektörü ise ρ özdeğerine karşılık bir özvektör olarak tanımlanır (Harville, 1997).

Tanım 14. $T = T' \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matrisinin inertiası,

$$ln(T) = \{i_+(T), i_-(T), i_0(T)\}$$

şeklinde ifade edilir (Tian, 2010). Burada $i_-(T)$, $i_+(T)$ ve $i_0(T)$ ifadeleri sırasıyla T matrisinin negatif, pozitif ve sıfır inertialarına karşılık gelir. Yani bu gösterimler sırasıyla T matrisinin katlılıklarıyla birlikte göz önünde bulundurulanan negatif değerli, pozitif değerli ve sıfıra eşit olan özdeğerlerinin sayısını gösterir.

Teorem 15. $T = T' \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matrisinin negatif ve pozitif inertialarının toplamı, matrisin rankına eşittir. Başka bir ifadeyle,

$$r(T) = i_-(T) + i_+(T)$$

şeklindedir (Tian, 2010).

1.2.2. Kuadratik Formlar ve İlişkili Tanımlar

Tanım 16. $T = (t_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ simetrik matris ve $y = (y_i) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ vektör olmak üzere,

$$y'Ty = \sum_i^m \sum_j^m y_i y_j t_{ij}$$

ifadesi, y vektörünün kuadratik formu olarak tanımlanır. T matrisi ise kuadratik formun matrisi olarak adlandırılır. $y'Ty$ kuadratik formu, T matrisi tarafından karakterize edilmektedir. Bu durumda kuadratik form aracılığıyla verilebilecek bazı tanımlar aşağıdadır (Sengupta & Jammalamadaka, 2003; Graybill, 1969).

- a) Eğer $y'Ty > 0$ ise ($\forall y \neq 0$), T pozitif tanımlı matristir,
- b) Eğer $y'Ty < 0$ ise ($\forall y \neq 0$), T negatif tanımlı matristir,
- c) Eğer $y'Ty \geq 0$ ise ($\forall y$), T pozitif yarı-tanımlı matristir,
- d) Eğer $y'Ty \leq 0$ ise ($\forall y$), T negatif yarı-tanımlı matristir.

Tanım 17. T ve S simetrik matrisler olmak üzere $T \succcurlyeq S$ gösteriminde “ $\succcurlyeq$ ” şeklinde ifade edilen matris sıralaması LPO’ dur (Bhatia, 2007).

T simetrik ve uygun boyutlu bir matris olmak üzere, Tanım 16 ve Tanım 17’ ye göre

- a) T negatif tanımlı matris ise $T < 0$,
- b) T negatif yarı-tanımlı matris ise $T \leq 0$,
- c) T pozitif tanımlı matris ise $T > 0$,
- d) T pozitif yarı-tanımlı matris ise $T \geq 0$

şeklinde gösterilir.

T, S simetrik ve aynı boyutlu iki matris olmak üzere, Tanım 16 ve Tanım 17’ ye göre

- a) $T - S$ negatif tanımlı matris ise $T < S$,
- b) $T - S$ negatif yarı-tanımlı matris ise $T \leq S$,
- c) $T - S$ pozitif tanımlı matris ise $T > S$,
- d) $T - S$ pozitif yarı-tanımlı matris ise $T \geq S$

şeklinde gösterilir.

Tanım 18. T ve S pozitif yarı-tanımlı matrisler olmak üzere, eğer $S - T$ pozitif yarı-tanımlıysa T, S den LPO’ ya göre küçüktür ve $S \succcurlyeq T$ ya da $T \preccurlyeq S$ şeklinde ifade edilir. $S -$

T pozitif tanımlıysa, T matrisi kesinlikle S matrisinden küçüktür ve $T < S$ ya da $S > T$ biçimindedir (Sengupta & Jammalamadaka, 2003).

Tanım 19. $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matrisinin p ranklı pozitif yarı-tanımlı matris olmasının gerek ve yeter şartı $T = SS'$ sağlayacak biçimde p ranklı $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matrisinin mevcut olmasıdır (Seber, 1977).

1.2.3. Blok Matrisler

Tanım 20. Blok matris, orijinal matrisin elemanlarının, birbirinden ayrık ve her birinin yalnızca bir alt matris içinde yer aldığı alt matrislere bölünmesiyle elde edilen bir yapıdır. Bu alt matrisler, matrisin daha karmaşık işlemlerini ve analizini kolaylaştırmak için kullanılır. Örneğin, $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi için

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

olmak üzere $T_{11} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $T_{12} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$, $T_{21} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$ ve $T_{22} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$, T matrisinin bir parçalanışıdır. Burada $m_1 + m_2 = m$ ve $n_1 + n_2 = n$ ' dir. Yukarıda verilen matrisin transpozesi

$$T' = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Seber, 2008).

Blok matrisler bilgisayar bilimlerinde boyutları büyük olan matrislerin etkin bir şekilde işlenmesi amacıyla kullanılmaktadır. Özellikle metin madenciliği alanındaki matrislerin boyutlarının büyük olması nedeniyle işlenmeleri oldukça güç olmaktadır. Blok matrisler yardımıyla, bu alandaki matrisler daha küçük boyutlu matrislere ayrılıp tek veya daha fazla işlemci yardımı ile işlenerek hedeflenen sonuçların elde edilmesi sağlanmaktadır.

1.2.4. Matris Tersleri

Tanım 21. $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ birim matris ve $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ herhangi bir matris olsun. $TS = ST = I_n$ olacak şekilde bir $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi mevcutsa, S matrisine T matrisinin tersi

denir ve $S = T^{-1}$ şeklinde gösterilir. Tersinir (yani tersi olan) matrisler düzgün (yani tekil olmayan) matrisler olarak da adlandırılır (Taşçı, 2011).

Tanım 22. $T \in \mathbb{R}^{n \times p}$ matrisi olmak üzere, $TST = T$ şartını sağlayan $S \in \mathbb{R}^{p \times n}$ matrisine, T matrisinin genelleştirilmiş tersi denir. $S = T^{-}$ şeklinde ifade edilir (Seber, 2008).

Teorem 23. Herhangi bir T matrisinin, en az bir T^{-} genelleştirilmiş tersi daima mevcuttur (Seber, 2008).

Teorem 24. $T \in \mathbb{R}^{n \times p}$ matrisi ele alınsın:

- a) $TST = T$,
- b) $STS = S$,
- c) $(TS)' = TS$,
- d) $(ST)' = ST$

şartlarını sağlayan tek bir $S \in \mathbb{R}^{p \times n}$ matrisi mevcut ise, S matrisine T matrisinin Moore-Penrose genelleştirilmiş tersi denir. $S = T^{+}$ şeklinde ifade edilir (Harville, 1997).

Teorem 25. T $n \times p$ boyutlu bir matris olmak üzere, T^{+} matrisi de $p \times n$ boyutlu matristir (Harville, 1997).

Teorem 26. $(T')^{+} = (T^{+})'$ şeklindedir (Harville, 1997).

1.2.5. Matris Denklemleri

Tanım 27. $M \in \mathbb{R}^{p \times r}$, $K \in \mathbb{R}^{t \times s}$ ve $E \in \mathbb{R}^{p \times s}$ matrisleri olmak üzere, en az bir $L \in \mathbb{R}^{r \times t}$ matrisi, $MLK = E$ denklem sistemini sağlıyorsa, matris denklem sistemi tutarlıdır, aksi halde tutarsızdır denir (Graybill, 1969).

Teorem 28. $MLK = E$ matris denklem sistemi tutarlıdır $\Leftrightarrow \mathfrak{R}(E) \subset \mathfrak{R}(M)$ ve $\mathfrak{R}(E') \subset \mathfrak{R}(K')$ dir (Graybill, 1969).

Teorem 29. S ve T uygun boyutlu herhangi iki matris olmak üzere, $MLK = E$ matris denklem sistemi tutarlıysa

$$L = M^{+}EK^{+} + (I - M^{+}M)S + T(I - KK^{+})$$

şeklindeki T matrisi, denklem sisteminin genel çözümünü ifade eder (Graybill, 1969).

Sonuç 30. $MLK = E$ matris denklem sistemi tutarlıysa, denklem sisteminin bir çözümü

$$L = M^+EK^+$$

dır (Graybill, 1969).

$MLK = E$ denklem sisteminde $K = I$ birim matris alındığında, matris denklem sistemi $ML = E$ haline dönüşür. Bu durumda Teorem 29' un başka bir önemli sonucu aşağıdaki lemmada verilebilir. Bu lemma, lineer regresyon modellerde parametre tahminleri ile ilişkili sonuçlar ve özellikler elde edilirken karşılaşılan matris denklemlerinin çözümünde kullanılır.

Lemma 31. $ML = E$ lineer matris denklemi tutarlıdır $\Leftrightarrow r[M, E] = r(M)$, ya da denk olarak, $MM^+E = E$ eşitliği sağlanır. Bu durumda, $ML = E$ lineer matris denkleminin genel çözümü, S uygun boyutlu keyfi bir matris olmak üzere,

$$L = M^+E + (I - M^+M)S$$

formundadır (Penrose, 1955).

1.2.6. Vektör Uzayı ve İzdüşüm Matrisleri

Bu kısımda verilen tanım ve teoremler hakkında (Sengupta & Jammalamadaka, 2003) kaynağından detaylı bilgi edinilebilir.

Tanım 32. Herhangi $t, s \in \mathbb{R}$ ve $k, l \in W$ için $tk + sl \in W$ sağlayacak biçimdeki vektörlerin boştan farklı bir W kümesi vektör uzayı olarak tanımlanır.

Tanım 33. W_1 ve W_2 herhangi iki vektör uzayı olmak üzere, W_1 ' deki her vektör W_2 ' deki bütün vektörlere dik ise bu durumda W_1 ve W_2 birbirine dik denir. Bu durum $W_1 \perp W_2$ biçiminde gösterilir.

Tanım 34. W_1 ve W_2 herhangi iki vektör uzayı olmak üzere, $k \in W_1$ ve $l \in W_2$ için $k + l$ şeklindeki bütün vektörleri barındıran vektör uzayı W_1 ve W_2 vektör uzaylarının toplamı olarak tanımlanır. Bu durum $W_1 + W_2$ şeklinde ifade edilir. W_1 ve W_2 vektör uzaylarının birbirine dik olduğu durumda $W_1 + W_2$ toplamı $W_1 \oplus W_2$ biçiminde gösterilir.

Tanım 35. $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^{n+1}$ sağlanıyor ise W_1 ve W_2 birbirlerinin dik tümleyenidir. Bu durum $W_1 = W_2^\perp$ (ya da $W_2 = W_1^\perp$) olarak ifade edilir. Ayrıca herhangi bir W vektör uzayı için $(W^\perp)^\perp = W$ şeklindedir.

Tanım 36. W vektör uzayı ele alınsın. $\forall t \in W$ için $Pt = t$ ve $Pt \in W$ sağlanıyorsa P matrisi izdüşüm matrisidir. Ayrıca, eğer $I - P$, $W^\perp$ vektör uzayının izdüşüm matrisi oluyorsa, P matrisi W 'nin dik izdüşüm matrisidir. Her izdüşüm matrisi idempotenttir.

Teorem 37. Bir T matrisi ele alınsın. TT^+ , $\mathfrak{R}(T)$ 'nin bir dik izdüşüm matrisidir (Tian, 2010).

Teorem 38. $T \in \mathbb{R}^{n \times p}$ bir matris olmak üzere, $\mathfrak{R}(TT^+) = \mathfrak{R}(T)$ ve $\mathfrak{R}(I_n - TT^+) = \mathfrak{R}(T)^\perp$ şeklindedir.

Teorem 39. $T \in \mathbb{R}^{n \times p}$ bir matris olmak üzere, sırasıyla $P_T = TT^+$, $E_T = T^\perp = I_n - TT^+$ ve $F_T = I_p - T^+T$ matrisleri $\mathfrak{R}(T)$, $\mathfrak{R}(T)^\perp$ ve $\mathfrak{R}(T')^\perp$ üzerinde dik izdüşüm matrisleridir.

Teorem 40. T ve S uygun boyutlu matrisler olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

- a) $S'T = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{R}(S) = \mathfrak{R}(T)^\perp$,
- b) $\mathfrak{R}(S) \subseteq \mathfrak{R}(T) \Leftrightarrow \mathfrak{R}(S)^\perp \subseteq \mathfrak{R}(T)^\perp$.

1.2.7. Rasgele Vektörler ve Matrisler

Bu bölümde, rasgele değişkenlerden oluşan rasgele vektör ve rasgele matrisler hakkında temel bilgiler ve teoremler sunulmaktadır. Konuya ilişkin (Seber, 1977; Puntanen vd., 2011) kaynaklarından detaylı bilgi edinilebilir.

Tanım 41. $V = (v_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ rasgele matrisi için beklenen değer,

$$E(V) = (E(v_{ij}))$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 42. Bir rasgele V matrisi ve bilinen matrisler M , L ve K için, $MVL + K$ 'nin beklenen değeri

$$E(MVL + K) = ME(V)L + K$$

şeklindedir.

Teorem 43. Bilinen matrisler M ile N ve rasgele matrisler U ile V olmak üzere, $MU + NV$ 'nin beklenen değeri

$$E(MU + NV) = ME(U) + NE(V)$$

şeklindedir.

Tanım 44. w rasgele değişken ve $\lambda = E(w)$ olmak üzere w 'nin varyansı,

$$\text{var}(w) = \sigma_w^2 = E(w - \lambda)^2$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 45. u, w rasgele değişken ve $\lambda = E(u)$, $\mu = E(w)$ olmak üzere, u ve w arasındaki kovaryans,

$$\text{cov}(u, w) = \sigma_{uw} = E(u - \lambda)(w - \mu)'$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca $D(u) = \text{cov}(u, u) = E(u - \lambda)(u - \lambda)'$ dir.

Teorem 46. M ile N bilinen matrisler ve U ile V rasgele matrisleri için,

$$\text{cov}(MU, NV) = M \text{cov}(U, V) N'$$

şeklinde ifade edilir.

1.2.8. Rank ve Özellikleri

Tahminler ile ilgili sonuçlar elde edilirken Lemma 31' deki matris denkleminin çözümünden yararlanılır. Bu çözüm Lemma 31' den de görüleceği üzere matrislerin M^+ ile gösterilen terslerini içerir. Karşılaşılan karmaşık yapıları matrislerin denklemlerini daha sade forma getirebilmek için matris cebrine başvurulur. Matrislerin özellikle de rank formülleri, karşılaşılan matris ifadelerini sade forma getirmede kullanılır. Ayrıca matrislerin rankları ile ilgili detaylı bilgi için Marsaglia & Styan (1974); simetrik matrislerin inertia ve rankları üzerine detaylı bilgi için Tian (2012) ve Tian & Jiang (2016) kaynağına bakılabilir.

Blok matrislerin ranklarına ilişkin bazı sonuçlar aşağıda ifade edilmiştir.

Lemma 47. $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ve $K \in \mathbb{R}^{l \times n}$ olsun. Bu durumda

$$r[M, L] = r(M) + r(E_M L) = r(L) + r(E_L M), \quad (1)$$

$$r \begin{bmatrix} M \\ K \end{bmatrix} = r(M) + r(KF_M) = r(K) + r(MF_K), \quad (2)$$

$$r \begin{bmatrix} M & L \\ K & 0 \end{bmatrix} = r(L) + r(K) + r(E_L MF_K), \quad (3)$$

$$r \begin{bmatrix} MM' & L \\ L' & 0 \end{bmatrix} = r[M, L] + r(L) \quad (4)$$

ve

$$\mathfrak{R}(L) \subseteq \mathfrak{R}(M) \text{ ve } \mathfrak{R}(K') \subseteq \mathfrak{R}(M') \text{ ise } r \begin{bmatrix} M & L \\ K & D \end{bmatrix} = r(M) + r(D - KM^+L) \quad (5)$$

dir. Özellikle,

- a) $r[M, L] = r(M) \Leftrightarrow \mathfrak{R}(L) \subseteq \mathfrak{R}(M) \Leftrightarrow MM^+L = L \Leftrightarrow E_M L = 0,$
- b) $r \begin{bmatrix} M \\ K \end{bmatrix} = r(M) \Leftrightarrow \mathfrak{R}(K') \subseteq \mathfrak{R}(M') \Leftrightarrow KM^+M = K \Leftrightarrow KF_M = 0,$
- c) $r[M, L] = r(M) + r(L) \Leftrightarrow \mathfrak{R}(M) \cap \mathfrak{R}(L) = \{0\} \Leftrightarrow \mathfrak{R}[(E_M L)'] = \mathfrak{R}(L') \Leftrightarrow \mathfrak{R}[(E_L M)'] = \mathfrak{R}(M'),$
- d) $r \begin{bmatrix} M \\ K \end{bmatrix} = r(M) + r(K) \Leftrightarrow \mathfrak{R}(M') \cap \mathfrak{R}(K') = \{0\} \Leftrightarrow \mathfrak{R}(KF_M) = \mathfrak{R}(K) \Leftrightarrow \mathfrak{R}(MF_K) = \mathfrak{R}(M).$

Lemma 48. Uygun boyutlu T_1, S_1, T_2, S_2 ve T_3 matrislerinin $\mathfrak{R}(T'_1) \subseteq \mathfrak{R}(S'_1), \mathfrak{R}(T_2) \subseteq \mathfrak{R}(S_1), \mathfrak{R}(T'_2) \subseteq \mathfrak{R}(S'_2)$ ve $\mathfrak{R}(T_3) \subseteq \mathfrak{R}(S_2)$ şartlarını sağladığını varsayalım. O zaman

$$r(T_1 S_1^+ T_2 S_2^+ T_3) = r \begin{bmatrix} 0 & S_2 & T_3 \\ S_1 & T_2 & 0 \\ T_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(S_1) - r(S_2)$$

dir. Böylece

$$T_1 S_1^+ T_2 S_2^+ T_3 = 0 \Leftrightarrow r \begin{bmatrix} 0 & S_2 & T_3 \\ S_1 & T_2 & 0 \\ T_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = r(S_1) + r(S_2)$$

dir.

Lemma 47 ve 48' deki matris rank formülleri ve bunların sonuçları, matrisler ve bunların işlemleri için çeşitli basit veya karmaşık cebirsel eşitlikleri oluşturmak ve karakterize etmek için oldukça yararlı teknikler olarak kabul edilmektedir.

1.2.9. Bir Matrisin Kronecker Çarpımı ve Vektörleştirme İşlemi

Lemma 49. $T = (t_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ve $S = (s_{ij}) \in \mathbb{R}^{r \times q}$ matrislerinin kronecker çarpımı $T \otimes S$ olmak üzere,

$$T \otimes S = \begin{bmatrix} t_{11}S & t_{12}S & \cdots & t_{1p}S \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}S & t_{n2}S & \cdots & t_{np}S \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Burada $T \otimes S \in \mathbb{R}^{nr \times pq}$ dir. Kronecker çarpım literatürde direkt çarpım veya matris tensör çarpımı olarak da isimlendirilir (Taşçı, 2011).

Kronecker çarpımla ilgili bazı özellikler aşağıda verilmektedir.

- a) $T \otimes S \neq S \otimes T$ dir.
- b) $\forall k \in \mathbb{R}$ ve T, S matrisleri için $(kT) \otimes S = T \otimes (kS)$ dir.
- c) T, S ve M matrisleri için $(T \otimes S) \otimes M = T \otimes (S \otimes M)$ dir.
- d) T, S ve M uygun boyunlu matrisleri için $(T + S) \otimes M = T \otimes M + S \otimes M$ dir.

Tanım 50. $T = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi ele alınsın. O zaman $\vec{T}$, T matrisinin sütunlarının art arda yazılmasıyla elde edilen bir vektördür ve $\vec{T} = (t'_1, t'_2, \dots, t'_n)' \in \mathbb{R}^{mn \times 1}$ olarak tanımlanır (Seber, 2008). Burada ise $(\vec{\cdot})$ vektörleştirme işlemini göstermektedir. Bu özdeşlik, özellikle çok değişkenli istatistiksel modellerde kullanışlıdır. Kronecker çarpımı sayesinde üçlü çarpım yapısının tek bir matris çarpımına indirgenmesi sağlanarak hesaplamalar önemli ölçüde kolaylaştırılır.

Vektörleştirme işlemi ile ilgili bazı özellikler aşağıda verilmektedir.

- a) $\vec{T} = (I_n \otimes T)\vec{I}_n = (T' \otimes I_m)\vec{I}_m$ dir.
- b) $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $S \in \mathbb{R}^{n \times q}$ uygun boyunlu matrisleri için $\vec{TS} = (I_q \otimes T)\vec{S} = (S' \otimes T)\vec{I}_n = (S' \otimes I_m)\vec{T}$ dir.
- c) $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ve $M \in \mathbb{R}^{q \times r}$ uygun boyunlu matrisleri için $\vec{TSM} = (M' \otimes T)\vec{S} = (I_r \otimes TS)\vec{M} = (M'S' \otimes I_m)\vec{T}$ dir.

1.2.10. Parametre Tahmininde Bazı Optimizasyon Yöntemleri

Kelime anlamı olarak, optimizasyon, en uygun duruma getirme olarak tanımlanmaktadır (Türk Dil Kurumu Sözlükleri, 2025). Bir sistemin işleyişini ve özelliklerini yansıtan, sistemin içindeki ve çevresindeki diğer sistemlerle olan etkileşimleri kapsayan matematiksel ifadeler ise optimizasyon modellerini oluşturmaktadır (Williams, 1999). Optimizasyondaki iki ana unsur modelleme ve analiz olarak nitelendirilmektedir (Türkay, 2023).

İstatistiksel teorinin ve optimizasyonun birçok yönden yakından bağlantılı olduğu iyi bilinmektedir. Optimizasyon problemleri (maksimizasyon veya minimizasyon) istatistiğin birçok alanında karşılaşılan problemlerdir (Gentle, 2006). Örneğin, istatistiksel tahmin ve modelleme özel optimizasyon problemlerindendir. İstatistiksel bir yöntem, bir optimizasyon probleminin çözümüne dayandığında, bu problemi açık bir şekilde formüle etmek, hem yöntemi anlamaya hem de yöntemin uygulanma amaçlarına uygun olup olmadığına karar vermeye yardımcı olur.

İstatistikte karşılaşılan optimizasyon problemlerinden bazılarında, genellikle, bir lineer denklem sisteminin çözülmesiyle sonuçlara ulaşılabilir, bununla birlikte, diğer birçok problemin çözümleri yinelemeli (iteratif) yöntemlerle elde edilebilir (Lange vd., 2014). Bir istatistiksel model formüle edildikten sonra, parametreler optimizasyon yöntemleriyle tahmin edilebilir ve tahminler genellikle bazı fonksiyonlar aracılığıyla minimumlaştırma veya maksimumlaştırma işlemleri ile bulunur.

Lineer regresyon modellerinden istatistiksel sonuçlar çıkarılırken, model formüle edildikten sonra, modeldeki bilinmeyen tüm vektörler veya bu vektörlerin fonksiyonları çeşitli yöntemlerle tahmin edilebilir. Bunun için optimizasyon yöntemlerinden yararlanılabilir. İstatistiksel tahminlerin elde edilmesinde kullanılan yaygın bir optimizasyon yöntemi olarak, gözlenen verilerin yoğunluğuyla orantılı bir fonksiyon olan olabilirlik fonksiyonu maksimumlaştırılabilir veya başka bir genel tahmin yöntemi olarak, artıkların bir normunun minimumlaştırılmasına dayanan yöntem kullanılabilir. Başka bir deyişle, bir regresyon modelinin veri için en uygun model olması en küçük kareler gibi minimum bir norm cinsinden tanımlanabilir. Bu optimizasyon yaklaşımlarının yanı sıra literatürde çok kullanılan diğer yöntemler olarak Momentler ve Bayes yöntemleri sayılabilir. İstatistiksel uygulamalarda optimizasyonun diğer kullanımlarından bazıları verilerin toplanmasından

önce ortaya çıkar, örneğin deneysel veya örnekleme hatalarını en aza indirmek için bir deney veya anket tasarlanırken optimizasyon kullanılabilir (Gentle, 2006).

Lineer regresyon modellerinde, bilinmeyen parametrelerin en iyi tahminlerini elde etmek, belirli optimizasyon süreçleri ile mümkündür. Bu süreçte, BLUE ve BLUP tahmin edicileri, LPO kullanılarak optimize edilir. Genelleştirilmiş ters matrislerle ifade edilen bu tahminler, belirli kısıtlar altında quadratik matris değerli fonksiyonların optimizasyon problemleri olarak çözümlenebilir. Böylece, lineer regresyon modelleri kapsamında, hem tahmin problemleri hem de sonuç çıkartma ortak bir yapıda ele alınır. Özellikle, bu tahminler, kısıtlanmış minimizasyon problemlerinin bir sonucu olarak ortaya çıkar ve matris değerli quadratik fonksiyonların maksimumlaştırılmasıyla ilgili temel bir lemmaya dayanır (Güler & Büyükkaya, 2023a). Bu lemma, bilinmeyen parametrelerin hem tahmini hem de öngörüsünde kritik bir rol oynayarak, optimizasyon sürecinin temelini oluşturur.

Lemma 51. $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ve $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ matrisleri verilsin ve $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitif yarı-tanımlı matris olsun. Kabul edelim ki $X_0 A = B$ olacak şekilde $X_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisi mevcut olsun. Bu durumda

$$\max_{XA=B} i_+(X_0 P X'_0 - X P X') = r \begin{bmatrix} X_0 P \\ A' \end{bmatrix} - r(A) = r(X_0 P A^\perp)$$

ifadesi $XA = B$ matris denkleminin tüm çözümlerine göre $X_0 P X'_0 - X P X'$ ifadesinin maksimum pozitif inertiasıdır. Bu yüzden $XA = B$ matris denkleminin tüm çözümleri için $X_0 P X'_0 \preceq X P X'$ sağlanacak şekilde $X_0 A = B$ matris denkleminin X_0 çözümü vardır $\Leftrightarrow X_0$ çözümü hem $X_0 A = B$ hem de $X_0 P A^\perp = 0$ denklemlerinin her ikisini de sağlar (Tian, 2012). Yani birleştirilmiş formda ifade edildiğinde

$$X_0 [A, \quad P A^\perp] = [B, \quad 0] \quad (6)$$

dir. $XA = B$ matris denklemi tutarlı olduğunda (6) matris denklemi de tutarlıdır. Bu denklemin genel çözümü

$$X_0 = [B, \quad 0][A, \quad P A^\perp]^+ + U[A, \quad P A^\perp]^\perp \quad (7)$$

olarak yazılabilir. Burada $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ keyfi bir matristir. Ayrıca (6) denklemini sağlayan X_0 matrisi tektir $\Leftrightarrow r[A, PA^\perp] = n$ dir. $\square$

Lemma 52. (Tian, 2015) $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ve simetrik $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri verilsin ve pozitif yarı-tanımlı $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ olsun. T değişken matrisi için $TA = B$ matris denklemi tutarlı olmak üzere, bu matris denklemine göre

$$f(T) = (TC + D)M(TC + D)' - N$$

fonksiyonu ele alınsın. Bu durumda, $TA = B$ matris denkleminin tüm çözümleri için $f(T) \geq f(S)$ sağlanacak şekilde $SA = B$ matris denkleminin bir S çözümü daima vardır. Bu eşitsizliği sağlayan S matrisi

$$S[A, CMC'A^\perp] = [B, -DMC'A^\perp] \quad (8)$$

tutarlı matris denklemi ile belirlenir. S matrisinin genel ifadesi

$$S = \underset{SA=B}{\operatorname{argmin}} f(T) = [B, -DMC'A^\perp][A, CMC'A^\perp]^+ + U[A, CMC']^\perp, \quad (9)$$

ve karşılık gelen $f(S)$ ve $f(T)$ fonksiyonlarının analitik ifadeleri

$$\begin{aligned} f(S) &= \min_{SA=B} f(T) = (BA^+C + D)M(BA^+C + D)' \\ &\quad - (BA^+C + D)MC'(A^\perp CMC'A^\perp)^+ CM(BA^+C + D)' - N, \end{aligned}$$

$$f(T) = f(S) + (TC + D)MC'(A^\perp CMC'A^\perp)^+ CM(TC + D)'$$

olarak verilir. Burada $U \in \mathbb{R}^{n \times p}$ keyfi bir matristir. $\square$

1.3. Lineer Modeller

Lineer modeller, hem teorik hem de pratik bakış açılarından en yaygın kullanılan istatistiksel yöntemlerden biridir. Araştırmacılar, değişkenler arasındaki lineer ilişkileri modelleyerek tahmin yapabilir, veri yapısını daha iyi anlayabilir ve gelecekteki olasılıkları

öngörebilir. Bu kısımda, lineer modellerin temel özellikleri üzerinde durulacaktır. Ayrıca, lineer modellerde tahmin yöntemleri ve optimizasyon teknikleri ele alınarak, elde edilen tahmin edicilerin karşılaştırılması verilecektir.

Bir lineer model, genel olarak

$$\mathcal{M}: y = X\alpha + \varepsilon \quad (10)$$

biçiminde ifade edilir. Bu model genel varsayımlar altında ele alındığında hata teriminin beklenen değeri ve dağılım matrisi

$$\begin{aligned} E(\varepsilon) &= 0, \\ cov(\varepsilon, \varepsilon) &= D(\varepsilon) = \sigma^2 \Sigma \end{aligned} \quad (11)$$

olarak yazılabilir. (11)'deki varsayımlara göre,

$$\begin{aligned} E(y) &= X\alpha, \\ cov(y, y) &= D(y) = \sigma^2 \Sigma \end{aligned} \quad (12)$$

dir. Yani (11) veya (12) eşitliklerinde verilen varsayımlarda ifade edilmek istenen, modellerdeki rasgele vektörler için birinci ve ikinci momentlerin varlığı dışında herhangi bir dağılım varsayımının yapılmadığı ve verilen matrislerin rankları ile ilgili herhangi bir kısıtlama olmadığıdır.

Ele alınan $\mathcal{M}$ modelinde,

- $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ gözlemlenebilir yanıt değişkenlerinin bir vektörü,
- $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tam ranklı olması gerekmeyen bilinen bir matris,
- $\alpha \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ sabit fakat bilinmeyen parametrelerin bir vektörü,
- $\varepsilon \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ rasgele hataların gözlemlenemeyen bir vektörü,
- σ^2 bilinmeyen pozitif bir parametre,
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tam ranklı olması gerekmeyen pozitif yarı-tanımlı bilinen bir matris

dir.

Burada $\mathcal{M}$ modelinin tutarlı olduğu kabul edilmektedir. $\mathcal{M}$ modelinin tutarlılığı bir olasılıkla $y \in \mathcal{R}[X, \Sigma]$ ifadesinin sağlanması olarak tanımlanır (Rao, 1973).

1.3.1. Lineer Modellerde Tahmin

$K \in \mathbb{R}^{s \times k}$ ve $H \in \mathbb{R}^{s \times n}$ olmak üzere, $\mathcal{M}$ modelindeki tüm bilinmeyen vektörlerin tahmin ve ön tahmin edicileri üzerinde bazı sonuçlar elde edebilmek için

$$\phi = K\alpha + H\varepsilon \quad (13)$$

vektörü ele alınabilir. (11) veya (12)' deki varsayımlara göre

$$\begin{aligned} E(\phi) &= K\alpha, \\ D(\phi) &= \sigma^2 H \Sigma H', \\ \text{cov}(\phi, y) &= \sigma^2 H \Sigma \end{aligned} \quad (14)$$

yazılır. (13)'deki K ve H matrisleri yerine bazı özel matrislerin yazılmasıyla

- a) $K = X$ ve $H = I_n$ alınırsa $\phi = X\alpha + \varepsilon = y$,
- b) $H = 0$ alınırsa $\phi = K\alpha$,
- c) $K = X$ ve $H = 0$ alınırsa $\phi = X\alpha$,
- d) $K = I_k$ ve $H = 0$ alınırsa $\phi = \alpha$,
- e) $K = 0$ ve $H = I_n$ alınırsa $\phi = \varepsilon$

elde edilir.

Bu bölümün kalan kısmında $\mathcal{M}$ lineer regresyon modelindeki bilinmeyen parametrelerinin ϕ genel vektörünün tahmin edilebilirliği ve bu vektörün tahmin edicileri kapsamında bazı tanımlar verilecektir.

Tanım 53. (10)'daki $\mathcal{M}$ lineer modeli ve (13)'deki ϕ vektörü ele alınsın. $L \in \mathbb{R}^{s \times n}$ olmak üzere, $E(Ly - \phi) = 0$ eşitliğini sağlayan bir Ly lineer istatistiği mevcut ise, ϕ vektörüne $\mathcal{M}$ modelinde ön tahmin edilebilirdir denir.

ϕ vektörünün ve bu vektörün bazı özel hallerinin tahmin edilebilirliğine ilişkin tanımlar aşağıda ifade edilmiştir (Alalouf & Styan, 1979).

- a) ϕ vektörü $\mathcal{M}$ modelinde ön tahmin edilebilirdir $\Leftrightarrow \mathfrak{R}(K') \subseteq \mathfrak{R}(X') \Leftrightarrow K\alpha$ vektörü $\mathcal{M}$ modelinde tahmin edilebilirdir.
- b) $X\alpha + \varepsilon$ vektörü $\mathcal{M}$ modelinde her zaman ön tahmin edilebilirdir.
- c) $X\alpha$ vektörü $\mathcal{M}$ modelinde her zaman tahmin edilebilirdir.
- d) ε vektörü $\mathcal{M}$ modelinde her zaman ön tahmin edilebilirdir.

e) α vektörü $\mathcal{M}$ modelinde tahmin edilebilirdir $\Leftrightarrow r(X) = k'$ dır.

İstatistik literatüründe, lineer regresyon modellerinde bilinmeyen parametreler için uygun bir tahmin ve ön tahmin edici belirlemenin en iyi bilinen yöntemi, diğer tüm yansız tahmin ediciler arasında kovaryans matrisi en küçük olan tahmin edicilerin bulunmasıdır. LPO' a göre kovaryans matrisi en küçük olan BLUE ve BLUP ile ilgili tanım aşağıda verilmiştir

Tanım 54. ϕ vektörü $\mathcal{M}$ modelinde ön tahmin edilebilir olsun. Bu durumda, $K\alpha$ vektörü de $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilirdir. Böylece, $L \in \mathbb{R}^{s \times n}$ olmak üzere, $E(Ly - \phi) = 0$ eşitliğini sağlayan bir Ly vektörü aynı zamanda $D(Ly - \phi)$ dağılım matrisini minimum yapacak şekilde mevcut ise, Ly istatistiği ϕ vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında BLUP' ı olarak tanımlanır ve

$$Ly = BLUP_{\mathcal{M}}(\phi) = BLUP_{\mathcal{M}}(K\alpha + H\varepsilon) \quad (15)$$

olarak gösterilir (Goldberger, 1962; Puntanen vd., 2011). Başka bir deyişle,

$$Ly = BLUP_{\mathcal{M}}(\phi) \Leftrightarrow E(Ly - \phi) = 0 \text{ eşitliğine göre } D(Ly - \phi) = \min \quad (16)$$

dir.

Eğer ϕ vektöründe $H = 0$ olarak alınırsa, BLUP tanımı BLUE tanımına indirgenmiş olur. Yani, bu durumda $G \in \mathbb{R}^{s \times n}$ olmak üzere, $E(Gy - K\alpha) = 0$ eşitliğini sağlayan bir Gy vektörü aynı zamanda $D(Gy)$ dağılım matrisini minimum yapacak şekilde mevcut ise, Gy istatistiği $K\alpha$ vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında BLUE' su olarak tanımlanır ve

$$Gy = BLUE_{\mathcal{M}}(K\alpha)$$

olarak gösterilir. Başka bir deyişle,

$$Gy = BLUE_{\mathcal{M}}(K\alpha) \Leftrightarrow E(Gy - K\alpha) = 0 \text{ eşitliğine göre } D(Gy) = \min$$

dir.

Tanım 53 ve 54 ile verilen tanımlar ve gösterimler $X\alpha + \varepsilon$, $X\alpha$, α , $H\varepsilon$ ve ε vektörleri için benzer şekilde ifade edilebilir.

1.3.2. Lineer Modellerde Optimizasyon Yöntemleri

Lemma 51' ye göre aşağıdaki sonuç yazılabilir. Detaylar için Güler & Büyükkaya (2023a) çalışmasına bakılabilir.

Lemma 55. $\mathcal{M}$ modeli ele alınsın ve ϕ vektörünün bu model altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. Ly ve Ty istatistikleri bu model altında ϕ vektörü için iki lineer yansız ön tahmin edici olmak üzere,

$$E(Ly - \phi) = 0 \Leftrightarrow LX = K, \text{ yani } [L, -I_s] \begin{bmatrix} X \\ K \end{bmatrix} = 0, \quad (17)$$

$$E(Ty - \phi) = 0 \Leftrightarrow TX = K, \text{ yani } [T, -I_s] \begin{bmatrix} X \\ K \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

ve

$$\begin{aligned} D(Ly - \phi) &= (L - H)\Sigma(L - H)' \\ &= [L, -I_s] \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix}' [L, -I_s]' \\ &:= f(L), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} D(Ty - \phi) &= (T - H)\Sigma(T - H)' \\ &= [T, -I_s] \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix}' [T, -I_s]' \\ &:= f(T) \end{aligned} \quad (20)$$

eşitlikleri yazılabilir. $\mathcal{M}$ modeli altında ϕ vektörü için herhangi iki Ly ve Ty lineer yansız ön tahmin edicileri ele alındığında, (13) ile verilen ϕ vektörünün BLUP' ının bulunması için ifade edilen matris minimumlaştırma problemi, $E(Ly - \phi) = 0$ eşitliğine ya da denk olarak $LX = K$ tutarlı matris denkleminde göre L matrisinin bulunmasına karşılık gelir öyle ki $E(Ty - \phi) = 0$ ya da denk olarak $TX = K$ tutarlı matris denkleminde göre $f(L) \leq f(T)$ yani $D(Ly - \phi) \leq D(Ty - \phi)$ ya da denk olarak

$$D(Ly - \phi) - D(Ty - \phi) \leq 0 \quad (21)$$

olmasına karşılık gelir, yani bu durumda (16)' a göre $Ly = BLUP(\phi)$ yazılır. (21)' de verilen ifade (19) ve (20)' den

$$(L - H)\Sigma(L - H)' - (T - H)\Sigma(T - H)' \preceq 0$$

ya da denk olarak

$$\begin{bmatrix} L, & -I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} L, & -I_s \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} T, & -I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} T, & -I_s \end{bmatrix}' \preceq 0$$

olarak yazılır. Dolayısıyla Lemma 51 dikkate alındığında,

$$\begin{aligned} & \max_{E(Ty-\phi)=0} i_+(D(Ly - \phi) - D(Ty - \phi)) \\ &= r \left(\begin{bmatrix} L, & -I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X \\ K \end{bmatrix}' \right) - r \begin{bmatrix} X \\ K \end{bmatrix} \\ &= r \left(\begin{bmatrix} L, & -I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X \\ K \end{bmatrix}^\perp \right) \end{aligned}$$

yazılır. Buradan (17)' e göre

$$\begin{aligned} D(Ly - \phi) = \min & \Leftrightarrow Ly = BLUP_{\mathcal{M}}(\phi) \\ & \Leftrightarrow L \begin{bmatrix} X \\ K \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X \\ K \end{bmatrix}^\perp = [K, \ 0] \\ & \Leftrightarrow L[X, \ \Sigma X^\perp] = [K, \ H\Sigma X^\perp]. \end{aligned} \tag{22}$$

(16) veya Lemma 31' den, (22) matris denkleminin genel çözümü

$$L = [K, \ H\Sigma X^\perp][X, \ \Sigma X^\perp]^+ + U[X, \ \Sigma X^\perp]^\perp \tag{23}$$

olarak yazılır. □

Teorem 56. ϕ vektörü $\mathcal{M}$ modeli altında ön tahmin edilebilir olsun. Bu durumda, $K\alpha$ vektörü de $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilirdir. Ly ve Ty istatistiklerinin $\mathcal{M}$ modeli altında ϕ vektörü için iki lineer yansız ön tahmin edici olduğu kabul edilsin. Bu durumda $D(Ly - \phi) - D(Ty - \phi)$ farkının $TX = K$ tutarlı matris denklemine göre maksimum pozitif inertiası

$$maks_{TX=K} i_+(D(Ly - \phi) - D(Ty - \phi)) = r \left([L, -I_s] \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X \\ K \end{bmatrix}^\perp \right)$$

olarak yazılır. Böylece,

$$D(Ly - \phi) = \min \Leftrightarrow Ly = BLUP(\phi) \Leftrightarrow L[X, \Sigma X^\perp] = [K, H\Sigma X^\perp]$$

dir. Bu matris denkleminin genel çözümü $\mathcal{M}$ modeli altında ϕ ' nin BLUP' ına karşılık gelir:

$$BLUP_{\mathcal{M}}(\phi) = Ly = ([K, H\Sigma X^\perp][X, \Sigma X^\perp]^+ + U_m[X, \Sigma X^\perp]^\perp)y \quad (24)$$

olarak yazılır. Burada $U_m \in \mathbb{R}^{s \times n}$ dir. Özellikle de

a) $BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)$ tektir $\Leftrightarrow L$ tektir ve $\mathcal{M}$ tutarlıdır $\Leftrightarrow$

$$r[X, \Sigma X^\perp] = n$$

dir.

b) $W_m = [X, \Sigma X^\perp]$ olmak üzere, aşağıdaki rank ve range eşitliği sağlanır:

$$\begin{aligned} r(W_m) &= r[X, X^\perp \Sigma] = r[X, \Sigma], \\ \Re(W_m) &= \Re[X, X^\perp \Sigma] = \Re[X, \Sigma]. \end{aligned} \quad (25)$$

c) $W_m = [X, \Sigma X^\perp]$ olmak üzere aşağıdaki kovaryans matris eşitlikleri sağlanır:

$$D(BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)) = \sigma^2([K, H\Sigma X^\perp]W_m^+) \Sigma ([K, H\Sigma X^\perp]W_m^+)', \quad (26)$$

$$cov\{BLUP_{\mathcal{M}}(\phi), \phi\} = \sigma^2([K, H\Sigma X^\perp]W_m^+) \Sigma H', \quad (27)$$

ve

$$D(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)) = \sigma^2([K, H\Sigma X^\perp]W_m^+ - H) \Sigma ([K, H\Sigma X^\perp]W_m^+ - H)'. \quad (28)$$

Ayrıca Gy ve Fy istatistiklerinin $\mathcal{M}$ modeli altında $K\alpha$ vektörü için iki lineer yansız tahmin edici olduğu kabul edilsin. Bu durumda $D(Gy) - D(Fy)$ farkının $FX = K$ tutarlı matris denkleminde göre maksimum pozitif inertiası

$$\max_{FX=K} i_+(D(Gy) - D(Fy)) = r \left([G, -I_s] \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X \\ K \end{bmatrix}^\perp \right)$$

olarak yazılır. Böylece,

$$D(Gy) = \min \Leftrightarrow Gy = BLUE_{\mathcal{M}}(K\alpha) \Leftrightarrow G[X, \Sigma X^\perp] = [K, 0]$$

dir. Bu matris denklemi tutarlıdır ve bu matris denkleminin parametrik formdaki genel çözümü $G = [K, 0][X, \Sigma X^\perp]^+ + U[X, \Sigma X^\perp]^\perp$ olduğundan

$$BLUE_{\mathcal{M}}(K\alpha) = Gy = ([K, 0][X, \Sigma X^\perp]^+ + U_m[X, \Sigma X^\perp]^\perp)y$$

olarak yazılır. Burada $U_m \in R^{s \times n}$ keyfi bir matristir. $BLUE_{\mathcal{M}}(K\alpha)$ 'nın dağılım matrisi ise

$$D(BLUE_{\mathcal{M}}(K\alpha)) = [K, 0][X, \Sigma X^\perp]^+ \Sigma ([K, 0][X, \Sigma X^\perp]^+)'$$

olarak ifade edilir. Benzer şekilde,

$$BLUE_{\mathcal{M}}(X\alpha) = ([X, 0][X, \Sigma X^\perp]^+ + U_m[X, \Sigma X^\perp]^\perp)y$$

ve

$$BLUP_{\mathcal{M}}(\varepsilon) = ([0, \Sigma X^\perp][X, \Sigma X^\perp]^+ + U[X, \Sigma X^\perp]^\perp)y$$

olarak yazılır. α vektörü $\mathcal{M}$ modeli altında tahmin edilebilir olduğunda

$$BLUE_{\mathcal{M}}(\alpha) = ([I_k, 0][X, \Sigma X^\perp]^+ + U[X, \Sigma X^\perp]^\perp)y$$

olarak yazılır. □

Lemma 52'e göre aşağıdaki sonuç yazılabilir. Detaylar için Tian (2015) çalışmasına bakılabilir.

Lemma 57. $\mathcal{M}$ modeli ele alınsın ve ϕ vektörünün bu model altında ön tahmin edilebilir olduğu kabul edilsin. Ty istatistiği bu model altında ϕ vektörü için bir lineer yansız ön tahmin edici olmak üzere, (18)' de verilen ifadeler için

$$E(Ty - \phi) = 0 \Leftrightarrow TX = K \Leftrightarrow \mathcal{C}(K') \subseteq \mathcal{C}(X')$$

yazılır ve buradaki son ifade Tanım 53' e göre ϕ vektörünün $\mathcal{M}$ modeli altında ön tahmin edilebilir olmasına denktir. (20)' e göre ise

$$f(T) = D(Ty - \phi) = (T - H)\Sigma(T - H)'$$

eşitliği dikkate alındığında, Lemma 52' e göre, $TX = K$ matris denkleminin tüm çözümleri için

$$f(T) \geq f(L)$$

yani

$$D(Ty - \phi) \geq D(Ly - \phi)$$

ya da denk olarak

$$(T - H)\Sigma(T - H)' \geq (L - H)\Sigma(L - H)'$$

olacak şekilde $LX = K$ matris denkleminin bir L çözümü daima vardır, yani $E(Ly - \phi) = 0$ ' dır. Bu eşitsizliği sağlayan L matrisi (8)' ye göre

$$L[X, \Sigma X^\perp] = [K, H\Sigma X^\perp]$$

tutarlı matris denklemleri ile belirlenir. Bu durumda, L matrisinin genel ifadesi (9)' e göre

$$L = [K, H\Sigma X^\perp][X, \Sigma X^\perp]^+ + U[X, \Sigma X^\perp]^\perp$$

olarak yazılır. Dolayısıyla, (16)' da verilen

$$Ly = BLUP_{\mathcal{M}}(\phi) \Leftrightarrow E(Ly - \phi) = 0 \text{ eşitliğine göre } D(Ly - \phi) = \min$$

ifadesi LPO' a göre sınırlı ikinci dereceden matris değerli fonksiyonun Lemma 52' de verilen optimizasyon problemine karşılık gelir. Yani $LX = K$ eşitliğine göre $f(L) = D(Ly - \phi) = \min$ sağlanacak şekilde bir L çözümü daima vardır. Böylece, ϕ vektörü $\mathcal{M}$ modeli altında ön tahmin edilebilir olduğunda aşağıdaki ifade elde edilir:

$$D(Ly - \phi) = \min \Leftrightarrow Ly = BLUP_{\mathcal{M}}(\phi) \Leftrightarrow L[X, \Sigma X^\perp] = [K, H\Sigma X^\perp]. \quad \square$$

1.3.3. Lineer Modellerde Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması

Matrisleri içeren ifadeler arasında karşılaştırmalar söz konusu olduğunda ise, sıralamalar için LPO' dan yararlanılır. İlk olarak Löwner tarafından tanımlanan (Löwner, 1934) ve kendi adıyla anılan LPO, simetrik matrisler için çok kullanışlı ve aynı zamanda güçlü bir özelliktir. Simetrik matrislerin LPO ile ilişkileri hakkında detaylı bilgi için Puntanen vd., (2011) çalışmasına bakılabilir.

Önceki bölümde elde edilen sonuçlar direkt optimizasyon problemine karşılık gelmektedir. İstatistikte bir diğer optimizasyon yaklaşımı olarak lineer modellerdeki bilinmeyen parametrelerin optimal tahmin veya ön tahmin edicilerini belirlemek problemi ele alınabilir. Tahmin edicilerin performans karşılaştırmasında yaygın olarak kullanılan ölçütlerden biri kovaryans matris karşılaştırmasıdır. BLUE ve BLUP, tanımları gereği yansızlık ve diğer yansız tahmin ve ön tahmin edicilere göre en küçük kovaryans matrise sahip olma özelliklerine sahiptir. BLUE ve BLUP bu özellikleri nedeniyle, istatistiksel çıkarım teorisinde önemli bir role sahiptir ve sıklıkla çeşitli tahmin ve ön tahmin edicilerin performanslarını değerlendirmek için kullanılırlar. Bu durumda, lineer regresyon modelleri altında bilinmeyen parametreler için herhangi bir tahmin edicinin dağılım matrisi ile BLUE ve BLUP' ın dağılım matrislerinin karşılaştırılması, ele alınan tahmin edicinin optimalliğinin belirlenmesini sağlar. Ele aldığımız konu çerçevesinde, aşağıda ilişkili bir sonuç verilmiştir.

Teorem 58. (Tian, 2017) ϕ vektörü $\mathcal{M}$ modelinde ön tahmin edilebilir ve $BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)$, (24)' de verildiği gibi olsun. Ayrıca simetrik $M_1 \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ve

$$L = \begin{bmatrix} \sigma^2 \Sigma & 0 & X \\ 0 & -M_1 & K - HX \\ X' & K' - X'H' & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma H' & X \\ H\Sigma & H\Sigma H' - \sigma^{-2} M_1 & K \\ X' & K' & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

- a) $D(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)) > M_1 \Leftrightarrow i_+(L_1) = r[X, \Sigma] + s.$
- b) $D(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)) < M_1 \Leftrightarrow i_-(L_1) = r(X) + s.$
- c) $D(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)) \geq M_1 \Leftrightarrow i_-(L_1) = r(X).$
- d) $D(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)) \leq M_1 \Leftrightarrow i_+(L_1) = r[X, \Sigma].$
- e) $D(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)) = M_1 \Leftrightarrow r(L_1) = r(X) + r[X, \Sigma]$

eşitlik ve eşitsizlikleri elde edilir. □

Teorem 58 ile verilen sonuçlar $K\alpha$, $X\alpha$, α , $H\varepsilon$ ve ε vektörleri için de ifade edilebilir. Bu sonuçla ilgili detaylı bilgi için Güler (2022), Güler & Büyükkaya (2019, 2021, 2022), Tian & Guo (2016) çalışmalarına bakılabilir. Ek olarak, farklı varsayımlarla BLUP' ların karşılaştırılmasına, Dong vd. (2014), Haslett & Puntanen (2010, 2011), Liu & Wang (2013) çalışmaları örnek olarak verilebilir.

Yukarıda belirtilen durumlara ek olarak, lineer modellerinin istatistiksel çıkarımı sırasında aynı gözlemlenebilir rastgele değişken vektörüne uymaya aday birçok farklı model ortaya çıkabilir. Bu modeller genellikle modellere bazı regresörler eklenerek veya silinerek ortaya çıkar. $\mathcal{M}$ modeline $Z\gamma$ regresörünün eklenmesiyle yeni bir model elde edilir. Bu model bir sonraki bölümde verilecektir.

1.4. Aşırı Parametrelili Lineer Modeller

Bu kısımda, aşırı parametrelili lineer modellerin temel özellikleri üzerinde durulacaktır. Ayrıca, bu modellerde tahmin yöntemleri ve optimizasyon teknikleri ele alınarak, elde edilen tahmin edicilerin karşılaştırılması verilecektir.

Bir aşırı parametrelili lineer model genel olarak

$$\mathcal{N}: y = X\alpha + Z\gamma + \varepsilon = [X, \quad Z] \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} + \varepsilon \quad (29)$$

biçiminde ifade edilir. Bu model genel varsayımlar altında ele alındığında hata teriminin beklenen değeri ve dağılım matrisi (11)' deki gibidir. Ayrıca bu varsayımlara göre

$$\begin{aligned} E(y) &= X\alpha + Z\gamma, \\ D(y) &= \sigma^2 \Sigma \end{aligned} \quad (30)$$

dir. Yani (11) veya (30) eşitliklerinde verilen varsayımlarda ifade edilmek istenen, modellerdeki rasgele vektörler için birinci ve ikinci momentlerin varlığı dışında herhangi bir dağılım varsayımının yapılmadığı ve verilen matrislerin rankları ile ilgili herhangi bir kısıtlama olmadığıdır. Ele alınan $\mathcal{N}$ modelinde,

- $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ gözlemlenebilir yanıt değişkenlerinin bir vektörü,
- $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$ tam ranklı olması gerekmeyen bilinen bir matris,
- $Z \in \mathbb{R}^{n \times q}$ tam ranklı olması gerekmeyen bilinen bir matris,
- $\gamma \in \mathbb{R}^{q \times 1}$ sabit fakat bilinmeyen parametrelerin bir vektörü,
- $\alpha \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ sabit fakat bilinmeyen parametrelerin bir vektörü,
- $\varepsilon \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ rasgele hataların gözlemlenemeyen bir vektörü,
- σ^2 bilinmeyen pozitif bir parametre,
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tam ranklı olması gerekmeyen pozitif yarı-tanımlı bilinen bir matris

dir.

Buradaki $\mathcal{N}$ modelinin tutarlı olduğu kabul edilmektedir. Bu modelin tutarlılığı bir olasılıkla $y \in \mathfrak{R}[X, \quad Z, \quad \Sigma]$ ifadesinin sağlanması olarak tanımlanır (Rao, 1973).

1.4.1. Aşırı Parametrelili Lineer Modellerde Tahmin

$\mathcal{N}$ modelinin tüm bilinmeyen vektörlerinin tahmin ve ön tahmin edicileri üzerine sonuçlar elde edebilmek için $K \in \mathbb{R}^{s \times k}$ ve $H \in \mathbb{R}^{s \times n}$ olmak üzere,

$$\phi = K\alpha + H\varepsilon = [K, \quad 0] \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} + H\varepsilon = \hat{K} \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} + H\varepsilon \quad (31)$$

vektörü ele alınabilir. Burada $\hat{K} = [K, 0] \in \mathbb{R}^{s \times (k+n)}$ dir. (11) veya (30)' daki varsayımlara göre

$$\begin{aligned} E(\phi) &= K\alpha, \\ D(\phi) &= \sigma^2 H \Sigma H', \\ cov(\phi, y) &= \sigma^2 H \Sigma \end{aligned} \quad (32)$$

yazılır.

Bu bölümün kalan kısmında $\mathcal{N}$ modelindeki bilinmeyen parametrelerinin ϕ genel vektörünün tahmin edilebilirliği ve bu vektörün tahmin edicileri kapsamında bazı tanımlar verilecektir.

Tanım 59. ϕ vektörünün ve bu vektörün bazı özel hallerinin tahmin edilebilirliğine ilişkin tanımlar aşağıda ifade edilmiştir.

a) ϕ vektörü $\mathcal{N}$ modelinde ön tahmin edilebilirdir $\Leftrightarrow$

$$\mathfrak{R}(\hat{K}') \subseteq \mathfrak{R}([X, Z]')$$

dir $\Leftrightarrow K\alpha$ vektörü de $\mathcal{N}$ modelinde tahmin edilebilirdir.

b) $X\alpha + \varepsilon$ vektörü $\mathcal{N}$ modelinde ön tahmin edilebilirdir $\Leftrightarrow r[X, Z] = r(X) + r(Z) \Leftrightarrow \mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(Z) = \{0\} \Leftrightarrow X\alpha$ vektörü $\mathcal{N}$ modelinde tahmin edilebilirdir.

c) α vektörü $\mathcal{N}$ modelinde tahmin edilebilirdir $\Leftrightarrow r(Z^\perp X) = k$ dır.

Tanım 60. ϕ vektörü $\mathcal{N}$ modeli altında ön tahmin edilebilir olsun. Eğer Ly istatistiği, LPO' ya göre

$$Ly = BLUP_{\mathcal{N}}(\phi) \Leftrightarrow E(Ly - \phi) = 0 \text{ eşitliğine göre } D(Ly - \phi) = \min \quad (33)$$

olacak şekilde varsa, $\mathcal{N}$ modeli altında ϕ nin BLUP' ı

$$Ly = BLUP_{\mathcal{N}}(\phi) = BLUP_{\mathcal{N}}\left(\hat{K} \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} + H\varepsilon\right) = BLUP_{\mathcal{N}}(K\alpha + H\varepsilon) \quad (34)$$

olarak tanımlanır.

Eğer ϕ vektöründe $H = 0$ olarak alınır, Ly , $\mathcal{N}$ modeli altında $K\alpha$ 'nın BLUE'una karşılık gelir. İlave olarak, $K = 0$ ve $H = I_n$ alınır, Ly , $\mathcal{N}$ modeli altında ε 'nin BLUP'ına karşılık gelir

1.4.2. Aşırı Parametrelili Lineer Modellerde Optimizasyon Yöntemleri

Teorem 61. $\mathcal{N}$ modeli altında ϕ vektörü tahmin edilebilir olsun. $\mathcal{N}$ modeli altında ϕ vektörünün iki yansız ön tahmin edicileri Ly ve Ty olsun. O zaman $T[X, Z] = \hat{K}$ eşitliğine göre $D(Ly - \phi) - D(Ty - \phi)$ 'nin maksimum pozitif inertiası

$$i_+(D(Ly - \phi) - D(Ty - \phi)) = r \left([L, -I_s] \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} I_n \\ H \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} [X, Z] \\ \hat{K} \end{bmatrix}^\perp \right) \quad (35)$$

dır. Böylece $D(Ly - \phi) = \min$ eşitliğine göre $E(Ly - \phi) = 0$ 'dır. Buradan

$$\begin{aligned} Ly = BLUP_{\mathcal{N}}(\phi) &= BLUP_{\mathcal{N}} \left(\hat{K} \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} + H\varepsilon \right) = BLUP_{\mathcal{N}}(K\alpha + H\varepsilon) \\ &\Leftrightarrow L[X, Z, \Sigma[X, Z]^\perp] = [\hat{K}, H\Sigma[X, Z]^\perp] \end{aligned} \quad (36)$$

yazılır. (36) denklemin tutarlı olup çözümü $\mathcal{N}$ modeli altında ϕ 'nin BLUP'ına karşılık gelir.

$W_n = [X, Z, \Sigma[X, Z]^\perp]$ ve $\hat{K} = [K, 0]$ olmak üzere,

$$BLUP_{\mathcal{N}}(\phi) = Ly = ([\hat{K}, H\Sigma[X, Z]^\perp]W_n^+ + U_nW_n^\perp)y \quad (37)$$

dir. Burada $U_n \in \mathbb{R}^{s \times n}$ dir. Özellikle de

- a) $r[X, Z, \Sigma[X, Z]^\perp] = n \Leftrightarrow L$ tektir ve $\mathcal{N}$ tutarlıdır $\Leftrightarrow BLUP_{\mathcal{N}}(\phi)$ tektir.
- b) $W_n = [X, Z, \Sigma[X, Z]^\perp]$ olmak üzere, aşağıdaki rank ve range eşitliği sağlanır:

$$\begin{aligned} r(W_n) &= r[X, Z, [X, Z]^\perp \Sigma] = r[X, Z, \Sigma], \\ \Re(W_n) &= \Re[X, Z, [X, Z]^\perp \Sigma] = \Re[X, Z, \Sigma]. \end{aligned} \quad (38)$$

- c) $W_n = [X, Z, \Sigma[X, Z]^\perp]$ ve $\hat{K} = [K, 0]$ olmak üzere aşağıdaki kovaryans matris eşitlikleri sağlanır:

$$D(BLUP_{\mathcal{N}}(\phi)) = \sigma^2([\hat{K}, H\Sigma[X, Z]^\perp]W_n^+)\Sigma([\hat{K}, H\Sigma[X, Z]^\perp]W_n^+)', \quad (39)$$

$$cov\{BLUP_{\mathcal{N}}(\phi), \phi\} = \sigma^2([\hat{K}, H\Sigma[X, Z]^\perp]W_n^+)\Sigma H', \quad (40)$$

ve

$$\begin{aligned} D(\phi - BLUP_{\mathcal{N}}(\phi)) &= \sigma^2([\hat{K}, H\Sigma[X, Z]^\perp]W_n^+ - H) \\ &\quad \times \Sigma([\hat{K}, H\Sigma[X, Z]^\perp]W_n^+ - H)'. \end{aligned} \quad (41)$$

Ayrıca Gy ve Fy istatistiklerinin $\mathcal{N}$ modelinde $K\alpha$ vektörü için iki lineer yansız tahmin edici olduğu kabul edilsin. Bu durumda $D(Gy) - D(Fy)$ farkının $FX = K$ tutarlı matris denkleminde göre maksimum pozitif inertiası

$$maks_{FX=K} i_+(D(Gy) - D(Fy)) = r\left([G, -I_s] \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} [X, Z]^\perp \\ \hat{K} \end{bmatrix}\right)$$

olarak yazılır. Böylece,

$$D(Gy) = \min \Leftrightarrow Gy = BLUE_{\mathcal{N}}(K\alpha) \Leftrightarrow G[X, Z, \Sigma[X, Z]^\perp] = [\hat{K}, 0]$$

dir. Bu matris denklemi tutarlıdır ve bu matris denkleminin parametrik formdaki genel çözümü $G = [\hat{K}, 0][X, Z, \Sigma[X, Z]^\perp]^+ + U_n[X, Z, \Sigma[X, Z]^\perp]^\perp$ olduğundan

$$BLUE_{\mathcal{N}}(K\alpha) = Gy = ([\hat{K}, 0][X, Z, \Sigma[X, Z]^\perp]^+ + U_n[X, Z, \Sigma[X, Z]^\perp]^\perp)y$$

olarak yazılır. Burada $U_n \in \mathbb{R}^{s \times n}$ keyfi bir matristir. $BLUE_{\mathcal{N}}(K\alpha)$ 'nın dağılım matrisi ise

$$D(BLUE_{\mathcal{N}}(K\alpha)) = [\hat{K}, 0][X, Z, \Sigma[X, Z]^\perp]^+ \Sigma([\hat{K}, 0][X, Z, \Sigma[X, Z]^\perp]^+)'$$

olarak ifade edilir. Benzer şekilde,

$$BLUE_{\mathcal{N}}(X\alpha) = ([\hat{X}, 0][X, Z, \Sigma[X, Z]^\perp]^+ + U[X, Z, \Sigma[X, Z]^\perp]^\perp)y$$

ve

$$BLUP_{\mathcal{N}}(\varepsilon) = ([0, \Sigma[X, Z]^{\perp}][X, Z, \Sigma[X, Z]^{\perp}]^+ + U[X, Z, \Sigma[X, Z]^{\perp}]^{\perp})y$$

dir. α vektörü $\mathcal{N}$ modeli altında tahmin edilebilir olduğunda

$$BLUE_{\mathcal{N}}(\alpha) = ([I_k, 0][X, Z, \Sigma[X, Z]^{\perp}]^+ + U_n[X, Z, \Sigma[X, Z]^{\perp}]^{\perp})y$$

olarak yazılır. □

1.4.3. Aşırı Parametrelili Lineer Modellerde Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması

Teorem 62. $\mathcal{N}$ modelinde ϕ ön tahmin edilebilir olsun. $BLUP_{\mathcal{N}}(\phi)$, (37)' de verildiği gibi olsun. Ayrıca simetrik $M_2 \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ve

$$L_2 = \begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma H' & [X, Z] \\ H\Sigma & H\Sigma H' - \sigma^{-2}M_2 & \hat{K} \\ [X, Z]' & \hat{K}' & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

- a) $D(\phi - BLUP_{\mathcal{N}}(\phi)) > M_2 \Leftrightarrow i_+(L_2) = r[X, Z, \Sigma] + s,$
- b) $D(\phi - BLUP_{\mathcal{N}}(\phi)) < M_2 \Leftrightarrow i_-(L_2) = r[X, Z] + s,$
- c) $D(\phi - BLUP_{\mathcal{N}}(\phi)) \geq M_2 \Leftrightarrow i_-(L_2) = r[X, Z],$
- d) $D(\phi - BLUP_{\mathcal{N}}(\phi)) \leq M_2 \Leftrightarrow i_+(L_2) = r[X, Z, \Sigma],$
- e) $D(\phi - BLUP_{\mathcal{N}}(\phi)) = M_2 \Leftrightarrow r(L_2) = r[X, Z] + r[X, Z, \Sigma]$

eşitlik ve eşitsizlikleri elde edilir. □

Sonuçlar $K\alpha$, $X\alpha$, α , $H\varepsilon$ ve ε vektörleri için de ifade edilebilir (Güler & Büyükkaya, 2024a, 2025).

İki veya daha fazla farklı lineer model arasında ilişki kurmak, regresyon analizinde klasik araştırma konularından biridir. Bu problemlerden biri, gözlemlenebilir rastgele değişkenlerin aynı vektörü için yapılandırılmış iki lineer model arasındaki ilişkiyi araştırmak iken, bir diğeri aynı kısmi parametrelere sahip iki lineer model arasındaki ilişkiyi

araştırmaktır. Farklı model tipleri arasındaki ilişkilerin araştırılması için yukarıda belirtilenlere uygun olarak, mevcut çalışmada, genel varsayımlarla iki model ele alıyoruz: lineer model ve ilk modelin yeni regresör eklenmiş bir biçimi olan aşırı parametrelili lineer model. Bu iki modelin bazı ortak noktaları olmasına rağmen, bunların çıkarım sonuçları mutlaka aynı değildir, ancak bu modeller altında tahmin ve ön tahmin sonuçları arasında ilişkiler olabilir. Bu nedenle, bilinmeyen vektörlerin tahmin edicilerinin veya ön tahmin edicilerinin bağlantıları üzerine bu modellerden türetilen problemlerin karakterize edilmesi ve bu modellerin çeşitli çıkarım sonuçlarının karşılaştırılması dikkat çekicidir. Aşağıda $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ modelinin bir kovaryans matris karşılaştırması verilmiştir. Ayrıntılı bilgiler için Güler & Büyükkaya, (2025) kaynağına bakılabilir.

Teorem 63. ϕ vektörü $\mathcal{N}$ modeli (ayrıca $\mathcal{M}$ modeli) altında ön tahmin edilebilir. $BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)$ ve $BLUP_{\mathcal{N}}(\phi)$, (24) ve (37)' de verildiği gibi olsun. Ayrıca

$$L_3 = \begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma & \Sigma H' & 0 & 0 & X \\ \Sigma & 0 & 0 & X & Z & 0 \\ H\Sigma & 0 & 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & X' & K' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

- a) $D(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)) > D(\phi - BLUP_{\mathcal{N}}(\phi)) \Leftrightarrow i_+(L_3) = r[X, \Sigma] + r[X, Z] + s.$
- b) $D(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)) < D(\phi - BLUP_{\mathcal{N}}(\phi)) \Leftrightarrow i_-(L_3) = r[X, Z, \Sigma] + r(X) + s.$
- c) $D(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)) \geq D(\phi - BLUP_{\mathcal{N}}(\phi)) \Leftrightarrow i_-(L_3) = r[X, Z, \Sigma] + r(X).$
- d) $D(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)) \leq D(\phi - BLUP_{\mathcal{N}}(\phi)) \Leftrightarrow i_+(L_3) = r[X, \Sigma] + r[X, Z].$
- e) $D(\phi - BLUP_{\mathcal{M}}(\phi)) = D(\phi - BLUP_{\mathcal{N}}(\phi)) \Leftrightarrow r(L_3) = r[X, Z, \Sigma] + r(X) + r[X, \Sigma] + r[X, Z].$

eşitlik ve eşitsizlikleri elde edilir. □

1.5. Kısıtlı Modeller

Bir kısıtlı lineer model ve kısıtlı aşırı parametrelı lineer model, sırasıyla,

$$\mathcal{M}_c: y = X\alpha + \varepsilon, C\alpha = d \quad (42)$$

ve

$$\mathcal{N}_c: y = X\alpha + Z\gamma + \varepsilon, C\alpha = d \quad (43)$$

biçiminde ifade edilir. Bu modeller genel varsayımlar altında ele alındığında $\mathcal{M}_c$ ve $\mathcal{N}_c$ modellerinin hata teriminin beklenen değeri ve dağılım matrisi sırasıyla (11) veya (12) ve (30)' daki gibidir. Burada $C \in \mathbb{R}^{s \times k}$ ve $d \in \mathbb{R}^{s \times 1}$ bilinen bir matristir.

Ele alınan kısıtlı modeller altında tahmin yapabilmek için modelleri kısıtsız hale getirmek gerekir. Bunun için literatürde bilinen iki yöntem vardır. Biri kısıtlı modeli matris biçiminde yazmak, diğeri ise yeniden parametrelendirmektir.

1.5.1. Model ve Kısıtın Ortak Matris Formunda Yazılması

(42)' de verilen $\mathcal{M}_c$ modeli ile modele eklenen kısıt, bilinmeyen parametreler bakımından ortak bir matris formunda yazılsın. Yani X ve C matrisleri $\begin{bmatrix} X \\ C \end{bmatrix}$, aynı şekilde y ve d vektörleri de $\begin{bmatrix} y \\ d \end{bmatrix}$ şeklinde sütun matrisleri olarak bir araya getirilsin. Bu süreçte hata terimi olan ε vektörü sıfır ile genişletilerek yeniden düzenlenirse, aşağıdaki kısıtsız lineer model elde edilir:

$$\begin{bmatrix} y \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ C \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}; \hat{y} = \hat{X}\alpha + \hat{\varepsilon}. \quad (44)$$

Benzer şekilde (43)' de verilen $\mathcal{N}_c$ modeli ile modele eklenen kısıt, bilinmeyen parametreler bakımından ortak bir matris formunda yazılabilir. Yukarıdaki bilgilere ek olarak Z matrisi sıfır ile genişletilirse, aşağıdaki kısıtsız aşırı parametrelı lineer model elde edilir:

$$\begin{bmatrix} y \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ C \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} \gamma + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}; \hat{y} = \hat{X}\alpha + \hat{Z}\gamma + \hat{\varepsilon}. \quad (45)$$

Burada $\hat{y} = \begin{bmatrix} y \\ d \end{bmatrix}$, $\hat{X} = \begin{bmatrix} X \\ C \end{bmatrix}$, $\hat{Z} = \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}$, dir. Böylece, (44) ve (45) kısıtsız modelleri, başlangıçtaki kısıtlı modellerdeki tüm parametrelerin bir arada olduğu kısıtsız bir formata dönüştürülmüş olur. Bu dönüşüm sayesinde, başlangıçtaki kısıtlı modellerin sınırlamalarından kurtulmuş ve bilinmeyen parametrelerin tahmin edilmesinde daha geniş bir alan sağlanmış olur. Bu da, modelleme sürecine daha esnek ve kapsamlı bir tahmin yeteneği kazandıracaktır.

(44) ve (45) kısıtsız modelleri, $\mathcal{M}_c$ ve $\mathcal{N}_c$ modelleriyle aynı yapısal özelliklere sahiptir. Bu, $\mathcal{M}_c$ ve $\mathcal{N}_c$ modellerindeki bilinmeyen parametreler üzerine tahmin probleminin, (44) ve (45) modelleri ile çözülebileceği anlamına gelir. Kısıtsız modellerdeki tüm parametrelerin bir arada olması, bu modellerin analizini ve çözümünü kolaylaştırır. Bu nedenle, (44) ve (45) modelleri üzerinde tahmin süreci, Bölüm 1.2 ve 1.3’ de elde edilen hesaplamalara benzer bir şekilde yürütülebilir. Bu yöntem ile ilgili ayrıntılı bilgiler için Güler (2024); Güler & Büyükkaya, (2023b); Güler & Büyükkaya, (2024a) çalışmaları örnek verilebilir.

1.5.2. Yeniden Parametrelendirme Yöntemi

Literatürdeki birçok çalışmada kısıtlı modellerin tahmin sürecinde yeniden parametrelendirme yöntemi kullanılır (Büyükkaya, 2024, Güler & Büyükkaya, 2024b). Bu yöntem, parametre kısıtlarını daha esnek bir şekilde ele alarak kısıtlı modeli kısıtsız forma dönüştürme imkanı sağlar. Bu yöntemle göre, $\mathcal{M}_c$ ve $\mathcal{N}_c$ modellerinde,

$$C\alpha = d$$

kısıtı Lemma 31’ e göre çözülürse, yeniden parametrelendirilmiş bir çözüm elde edilir. Bu çözüme göre

$$\alpha = C^+d + F_C u$$

ifadesi elde edilir. Burada u yeniden parametrelendirilmiş fakat keyfi bir vektördür. Bu çözüm, $\mathcal{M}_c$ ve $\mathcal{N}_c$ modellerinde yerine yerine konulduğunda, sırasıyla aşağıdaki kısıtsız modeller elde edilir:

$$\mathcal{M}_u : y - XC^+d = XF_Cu + \varepsilon \quad (46)$$

ve

$$\mathcal{N}_u : y - XC^+d = XF_Cu + Z\gamma + \varepsilon. \quad (47)$$

$\mathcal{M}_u$ ve $\mathcal{N}_u$ modelleri de $\mathcal{M}_c$ ve $\mathcal{N}_c$ modelleriyle aynı yapısal özelliklere sahiptir. Dolayısıyla tahmin sürecinde $\mathcal{M}_u$ ve $\mathcal{N}_u$ modelleri ele alınıp, Bölüm 1.2 ve 1.3’ de elde edilen hesaplamalara benzer şekilde eşitlik ve eşitsizlikler elde edilebilir.

Bu çalışma boyunca ele alınan kısıtlı modeller yeniden parametrelendirme yöntemi ile kısıtsız forma getirilecektir. Elde edilen yeni modeller üzerinde hesaplama yapılacaktır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu tezde, bazı kısıtlamalar ile çok değişkenli katlı lineer modeller ve bu modellerle ilişkili aşırı parametrelili çok değişkenli katlı lineer modeller altında tüm bilinmeyen parametre matrislerinin BLUP/BBLUE' larını hesaplamak için analitik formüller türetilmesi amaçlanmaktadır. Bu bölümün, ilk kısmında kısıtlı çok değişkenli katlı lineer modeller, ikinci kısımda ise kısıtlı aşırı parametrelili çok değişkenli katlı lineer modeller tanıtılacaktır. Üçüncü kısımda ise yeniden parametrelendirme yöntemi ile kısıtlı modellerin aynı yapısal özelliklere sahip versiyonu olan kısıtsız çok değişkenli katlı modeller elde edilecektir. Daha sonra, bazı kuadratik matris optimizasyon yöntemleri kullanarak ise bu modeller altında tüm bilinmeyen parametre matrislerinin BLUP/BBLUE' larını hesaplamak için analitik formüllerin türetilmesi sağlanacaktır. Son olarak, bu modeller altında BLUE' ların değerlendirme analizi yapılacaktır.

2.1. Kısıtlı Çok Değişkenli Katlı Lineer Modeller

Çok değişkenli katlı lineer model, parametre matrisi üzerindeki kısıtla beraber, genel olarak

$$S_c: Y = X\Theta + \Psi, \quad C\Theta = D \quad (48)$$

biçiminde ifade edilir. Bu model genel varsayımlar altında ele alındığında hata teriminin beklenen değeri ve dağılım matrisi

$$\begin{aligned} E(\Psi) &= 0, \\ D(\vec{\Psi}) &= \sigma^2(\Sigma_2 \otimes \Sigma_1) \end{aligned} \quad (49)$$

olarak yazılabilir. (49)' daki varsayımlara göre,

$$\begin{aligned} E(Y) &= X\Theta, \\ D(\vec{Y}) &= \sigma^2(\Sigma_2 \otimes \Sigma_1) \end{aligned} \quad (50)$$

dir. Ele alınan $\mathcal{S}_c$ modelinde,

- $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gözlemlenebilir bağımlı değişkenlerinin bir matrisini,
- $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{s \times p}$ ve $D \in \mathbb{R}^{s \times m}$ keyfi ranklı bilinen bir matrisi,
- $\Theta \in \mathbb{R}^{p \times m}$ sabit fakat bilinmeyen parametrelerin bir matrisi,
- $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ rasgele dağılımlı hata terimlerinin bir matrisini,
- σ^2 bilinmeyen pozitif bir parametreyi,
- $\Sigma_1 = (\sigma_{1ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $\Sigma_2 = (\sigma_{2ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ keyfi ranklı pozitif yarı-tanımlı bilinen bir matrisi,
- $\otimes$, Kronecker çarpımını

gösterir.

2.2. Kısıtlı Aşırı Parametrelili Çok Değişkenli Katlı Lineer Modeller

$\mathcal{S}_c$ modelini gerçek bir model olarak ele alıp modelin sağ tarafına yeni regresörler içeren yeni bir parça ekleyerek, (48)' in

$$\mathcal{R}_c: Y = X\Theta + Z\Gamma + \Psi, \quad C\Theta = D \quad (51)$$

tarafından formüle edilen, $Z\Gamma$ büyütme parçasıyla aşırı parametrelili bir versiyonunu elde ederiz. Burada $Z \in \mathbb{R}^{n \times q}$ keyfi ranklı bilinen bir matris, $\Gamma \in \mathbb{R}^{q \times m}$ sabit fakat bilinmeyen parametre matrisidir. Bu model genel varsayımlar altında ele alındığında hata teriminin beklenen değeri ve dağılım matrisi

$$\begin{aligned} E(Y) &= X\Theta + Z\Gamma, \\ D(\vec{Y}) &= \sigma^2(\Sigma_2 \otimes \Sigma_1) \end{aligned} \quad (52)$$

dir. Ele alınan modeller yapı olarak benzemelerine rağmen içerdikleri bazı farklılıklardan dolayı modellerdeki ortak bilinmeyen parametre matrisinin tahmin edicileri farklı cebirsel ifadeler ve dolayısı ile farklı özelliklere ve performanslara sahiptir.

2.3. Yeniden Parametrelendirme Yöntemi ile Modellerin Belirlenmesi

$\mathcal{S}_c$ ve $\mathcal{R}_c$ modellerindeki lineer kısıtlama denklemi $C\Theta = D$ tutarlı olup, bu matris denkleminin genel çözümü Lemma 31' den

$$\Theta = C^+D + F_C\Omega \quad (53)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\Omega \in \mathbb{R}^{p \times m}$ yeniden parametrelendirilmiş fakat keyfi bir matristir. Θ matrisinin $\mathcal{S}_c$ ve $\mathcal{R}_c$ modellerinde yerine yazılmasıyla birlikte sırasıyla aşağıdaki kısıtsız modeller elde edilir:

$$\mathcal{S}_u: Y = XF_C\Omega + \Psi, \quad (54)$$

ve

$$\mathcal{R}_u: Y = XF_C\Omega + Z\Gamma + \Psi. \quad (55)$$

Burada $\Upsilon = Y - XC^+D$ dir. Böylece $\mathcal{S}_c$ ve $\mathcal{R}_c$ kısıtlı modelleri altında yapılmak istenen tahminler $\mathcal{S}_u$ ve $\mathcal{R}_u$ kısıtsız modelleri altında yapılabilir.

2.4. Tahmin Edilebilme

$\mathcal{S}_c$ ve $\mathcal{R}_c$ modelleri, bilinmeyen matrisler Θ ve Ψ üzerinde birlikte ve ayrı ayrı istatistiksel çıkarımlar yapmak için kullanılabilir. Bu modeller altında tüm ortak bilinmeyen matrislerin belirli fonksiyonlarına ilişkin tahmin ve tahmin sonuçları oluşturmak için

$$\Phi = K\Theta + J\Psi = [K, \quad 0] \begin{bmatrix} \Theta \\ \Gamma \end{bmatrix} + J\Psi := \hat{K} \begin{bmatrix} \Theta \\ \Gamma \end{bmatrix} + J\Psi \quad (56)$$

veya denk olarak

$$\vec{\Phi} = (I_m \otimes K)\vec{\Theta} + (I_m \otimes J)\vec{\Psi}$$

matrisi ele alınabilir. Burada $K \in \mathbb{R}^{k \times p}$, $J \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ve $\widehat{K} = [K, \ 0] \in \mathbb{R}^{k \times (p+q)}$, dir. (56)' dan

$$E(\Phi) = K\Theta \text{ veya } E(\vec{\Phi}) = (I_m \otimes K)\vec{\Theta},$$

$$D(\vec{\Phi}) = \sigma^2(I_m \otimes J)(\Sigma_2 \otimes \Sigma_1)(I_m \otimes J)'$$

ve

$$\text{cov}(\vec{\Phi}, \vec{Y}) = \sigma^2(I_m \otimes J)(\Sigma_2 \otimes \Sigma_1)$$

elde edilir.

(56)' daki Φ matrisinin tüm bilinmeyen matrislerinin tahmin ve ön tahmin edicileri üzerine sonuçlar elde edebilmek için (53)' deki Θ , (56)' daki Φ matrisinde yerine konulursa, aşağıdaki yeniden parametrelendirilmiş Δ matrisi yazılabilir:

$$\Delta = KF_C\Omega + J\Psi = [KF_C, \ 0] \begin{bmatrix} \Omega \\ \Gamma \end{bmatrix} + J\Psi := \widehat{KF_C} \begin{bmatrix} \Omega \\ \Gamma \end{bmatrix} + J\Psi \quad (57)$$

veya denk olarak

$$\vec{\Delta} = (I_m \otimes KF_C)\vec{\Omega} + (I_m \otimes J)\vec{\Psi}.$$

Burada $\Delta = \Phi - KC^+D$ ve $\widehat{KF_C} = [KF_C, \ 0]$ ' dir. (57)' den

$$E(\Delta) = KF_C\Omega \text{ veya } E(\vec{\Delta}) = (I_m \otimes KF_C)\vec{\Omega},$$

$$D(\vec{\Delta}) = \sigma^2(I_m \otimes J)(\Sigma_2 \otimes \Sigma_1)(I_m \otimes J)', \quad (58)$$

ve

$$\text{cov}(\vec{\Delta}, \vec{Y}) = \sigma^2(I_m \otimes J)(\Sigma_2 \otimes \Sigma_1)$$

elde edilir.

Tanım 64. (Gan vd., 2017) Φ ve Δ matrisi (56) ve (57)' deki gibi olsun.

- a) $E(TY + T_1 - \Phi) = 0$ veya $E(\hat{T}\vec{Y} + \hat{T}_1 - \vec{\Phi}) = 0$ sağlanacak şekilde $T \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ve $T_1 \in \mathbb{R}^{k \times m}$ veya $\hat{T} \in \mathbb{R}^{km \times nm}$ ve $\hat{T}_1 \in \mathbb{R}^{km \times 1}$ matrisleri varsa $\mathcal{R}_c$ modeli altında Φ veya $\vec{\Phi}$ tahmin edilebilir. Ayrıca, $\mathcal{R}_c$ modeli altında Φ veya $\vec{\Phi}$ tahmin edilebilir ise $\mathcal{S}_c$ modeli altında da tahmin edilebilir.
- b) Eğer $E(TY - \Delta) = 0$ veya $E(\hat{T}\vec{Y} - \vec{\Delta}) = 0$ olacak şekilde $T \in \mathbb{R}^{k \times n}$ veya $\hat{T} \in \mathbb{R}^{km \times nm}$ matrisi varsa, Δ veya $\vec{\Delta}$ matrisi $\mathcal{R}_u$ modeli altında tahmin edilebilir. Ayrıca, $\mathcal{R}_u$ modeli altında Δ veya $\vec{\Delta}$ tahmin edilebilir ise $\mathcal{S}_u$ modeli altında da tahmin edilebilir.

Δ matrisi ve bu matrisin bazı özel hallerinin tahmin edilebilirliğine ilişkin tanımlar aşağıda ifade edilmiştir.

- i) Δ matrisi $\mathcal{S}_u$ modelinde ön tahmin edilebilir $\Leftrightarrow \mathfrak{R}(I_m \otimes (KF_C)') \subseteq \mathfrak{R}(I_m \otimes (XF_C)') \Leftrightarrow \mathfrak{R}[(KF_C)'] \subseteq \mathfrak{R}[(XF_C)']$.
- ii) $KF_C\Omega$ matrisi $\mathcal{S}_u$ modelinde tahmin edilebilir $\Leftrightarrow \mathfrak{R}[(KF_C)'] \subseteq \mathfrak{R}[(XF_C)']$.
- iii) $XF_C\Omega$ vektörü $\mathcal{S}_u$ modelinde her zaman tahmin edilebilir.
- iv) Δ matrisi $\mathcal{R}_u$ modelinde ön tahmin edilebilir $\Leftrightarrow \mathfrak{R}(I_m \otimes [KF_C, 0]') \subseteq \mathfrak{R}(I_m \otimes [XF_C, Z]') \Leftrightarrow \mathfrak{R}([KF_C, 0]') \subseteq \mathfrak{R}([XF_C, Z]')$.
- v) $KF_C\Omega$ matrisi $\mathcal{R}_u$ altında tahmin edilebilir $\Leftrightarrow \mathfrak{R}([KF_C, 0]') \subseteq \mathfrak{R}([XF_C, Z]') \Leftrightarrow \mathfrak{R}[(KF_C)'] \subseteq \mathfrak{R}[(XF_C)'Z^\perp]$.
- vi) $XF_C\Omega$ matrisi $\mathcal{R}_u$ altında tahmin edilebilir $\Leftrightarrow \mathfrak{R}(XF_C\Omega) \cap \mathfrak{R}(Z) = \{0\}$.

Sonuç olarak, Φ matrisi $\mathcal{R}_c$ (dolayısıyla da $\mathcal{S}_c$) modeli altında tahmin edilebilir $\Leftrightarrow \Delta$ matrisi $\mathcal{R}_u$ (dolayısıyla da $\mathcal{S}_u$) modeli altında tahmin edilebilir (Tian & Wang, 2020, Teorem 2.4).

Bu çalışmada, $\mathcal{S}_u$ ve $\mathcal{R}_u$ modellerinin tutarlı olduğu varsayılmıştır. Modellerin tutarlılık tanımları aşağıda verilmiştir.

- a) $\mathcal{S}_u$ modeli tutarlıdır $\Leftrightarrow Y \in \mathfrak{R}[XF_C, \Sigma_2 \otimes \Sigma_1]$ 1 olasılıkla sağlanır.
- b) $\mathcal{R}_u$ modeli tutarlıdır $\Leftrightarrow Y \in \mathfrak{R}[XF_C, Z, \Sigma_2 \otimes \Sigma_1]$ 1 olasılıkla sağlanır.

2.4.1. Kısıtlı Aşırı Parametrelili Çok Değişkenli Katlı Lineer Modeller Altında BLUP Hesabı

Bu bölümde $\mathcal{R}_u$ modeli için temel BLUP denklemi ve ilişkili bazı özellikler verilecektir. Verilen tanım ve teoremin $\mathcal{R}_c$ modeline karşılık geldiği gösterilecektir.

Tanım 65. Δ , $\mathcal{R}_u$ modeli altında tahmin edilebilir olsun. LPO' da

$$D(\overline{TY - \Delta}) = \min \text{ eşitliğine göre } E(TY - \Delta) = 0$$

olacak şekilde TY matrisi varsa, TY , Δ ' nın BLUP' ı olarak tanımlanır ve

$$TY = BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta) = BLUP_{\mathcal{R}_u} \left([KF_C, \quad 0] \begin{bmatrix} \Omega \\ \Gamma \end{bmatrix} + J\Psi \right) = BLUP_{\mathcal{R}_u} \left(\widehat{KF_C} \begin{bmatrix} \Omega \\ \Gamma \end{bmatrix} + J\Psi \right) \quad (59)$$

dır. Eğer Δ ' daki $J = 0$ ise TY , $KF_C\Omega$ ' nin BLUE' suna karşılık gelir ve

$$TY = BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega)$$

olarak yazılır. İlave olarak, eğer Δ ' daki $K = 0$ ve $J = I_n$ ise TY , Ψ ' nin BLUP' suna karşılık gelir ve

$$TY = BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Psi)$$

olarak yazılır. Ayrıca, Tanım 64' den

$$\begin{aligned} D(TY + T_1 - \Phi) &= \min \text{ eşitliğine göre } E(TY + T_1 - \Phi) = 0 \\ \Leftrightarrow D(TY - \Delta) &= \min \text{ eşitliğine göre } E(TY - \Delta) = 0 \end{aligned}$$

yani

$$BLUP_{\mathcal{R}_c}(\Phi) = KC^+D + BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)$$

eşitliği sağlanır. Eşitliğin her iki yanı Φ matrisinden çıkarılırsa,

$$\Phi - BLUP_{\mathcal{R}_c}(\Phi) = \Phi - KC^+D - BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)$$

elde edilir. $\Delta = \Phi - KC^+D$ olduğundan

$$\Phi - BLUP_{\mathcal{R}_c}(\Phi) = \Delta - BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)$$

yani,

$$D[\Phi - BLUP_{\mathcal{R}_c}(\Phi)] = D[\Delta - BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)] \quad (60)$$

elde edilir. (60)' dan da görüldüğü üzere $\mathcal{R}_c$ modeli altında Φ matrisinin BLUP' ı, $\mathcal{R}_u$ modeli altında Δ ' nın BLUP' ından elde edilir. Diğer bir deyişle, kısıtlı bir modeldeki tüm bilinmeyen matrislerin BLUP' ı, kısıtsız bir model için türetilen bazı iyi bilinen standart prosedürlerden türetilir. Yine (60) eşitliği, $\mathcal{R}_c$ modeli altında Φ matrisinin BLUP' ının dağılım matrisinin karşılaştırma problemi de $\mathcal{R}_u$ modeli altında Δ ' nın BLUP' ının dağılım matrisinin karşılaştırma problemine karşılık gelir.

$\mathcal{R}_u$ modeli modeli altında Δ ' nın BLUP üzerinde temel sonuçlar aşağıdaki teoremden toplanmıştır.

Teorem 66. $\mathcal{R}_u$ modeli altında Δ tahmin edilebilir olsun. TY ve SY , $\mathcal{R}_u$ modeli altında Δ için iki yansız lineer tahmin ediciler olsun. $S[XF_C, Z] = \widehat{KF}_C$ eşitliğine göre $D(\overrightarrow{TY - \Delta}) - D(\overrightarrow{SY - \Delta})$ ' nın maksimal pozitif inertiaları

$$maks_{E(SY - \Delta)=0} i_+ \left(D(\overrightarrow{TY - \Delta}) - D(\overrightarrow{SY - \Delta}) \right) = r \left([T, -I_k] \begin{bmatrix} I_n \\ J \end{bmatrix} cov(\Psi) \begin{bmatrix} I_n \\ J \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} XF_C, Z \\ \widehat{KF}_C \end{bmatrix}^\perp \right)$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} TY = BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta) &\Leftrightarrow E(TY - \Delta) = 0 \text{ eşitliğine göre } D(\overrightarrow{TY - \Delta}) = \min \\ &\Leftrightarrow T[XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp] = [KF_C, 0, J\Sigma_1[XF_C, Z]^\perp] \end{aligned} \quad (61)$$

dir. Bu matris denklemi tutarlıdır. Bu durumda, bu denklemin genel çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta) = T\Upsilon = ([\widehat{KF}_C, \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]W_r^+ + U_r W_r^\perp)\Upsilon \quad (62)$$

veya denk olarak,

$$\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)} = (I_m \otimes T)\vec{\Upsilon} = (I_m \otimes ([\widehat{KF}_C, \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]W_r^+ + U_r W_r^\perp))\vec{\Upsilon}.$$

Burada, $U_r \in \mathbb{R}^{k \times n}$ keyfi matris, $\widehat{KF}_C = [KF_C, \quad 0]$ ve $W_r = [XF_C, \quad Z, \quad \Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]$ dir. İlave olarak aşağıdaki sonuçlar sağlanır.

- a) $r(W_r) = n \Leftrightarrow T$ tektir.
- b) $\mathcal{R}_u$ modeli tutarlıdır $\Leftrightarrow BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)$ tektir.
- c) Aşağıdaki rank ve range (aralık) eşitlikleri sağlanır:

$$r(W_r) = r([XF_C, \quad Z, \quad \Sigma_1]) = r([XF_C, \quad Z, \quad [XF_C, \quad Z]^\perp \Sigma_1])$$

ve

$$\mathfrak{R}(W_r) = \mathfrak{R}([XF_C, \quad Z, \quad \Sigma_1]) = \mathfrak{R}([XF_C, \quad Z, \quad [XF_C, \quad Z]^\perp \Sigma_1]).$$

- d) $BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta) - \Delta'$ nin beklenen değeri, $\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)}$ ve $\vec{\Delta} - \overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)}$ nin dağılım matrisi, $\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)}$ ve $\vec{\Delta}$ arasındaki kovaryans matrisi aşağıdaki gibidir:

$$E[BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta) - \Delta] = 0,$$

$$\begin{aligned} D[\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)}] &= \sigma^2 \Sigma_2 \otimes [\widehat{KF}_C, \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]W_r^+ \\ &\quad \times \Sigma_1([\widehat{KF}_C, \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]W_r^+)', \end{aligned} \quad (63)$$

$$\text{cov}\{\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)}, \vec{\Delta}\} = \sigma^2 \Sigma_2 \otimes [\widehat{KF}_C, \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]W_r^+ \Sigma_1 J' \quad (64)$$

ve

$$D \left[\vec{\Delta} - \overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)} \right] = \sigma^2 \Sigma_2 \otimes ([\widehat{KF}_C, \quad J \Sigma_1 [XF_C, \quad Z]^\perp] W_r^+ - J) \\ \times \Sigma_1 ([\widehat{KF}_C, \quad J \Sigma_1 [XF_C, \quad Z]^\perp] W_r^+ - J)' \quad (65)$$

dır.

İspat. $\mathcal{R}_u$ modelini düşünelim. $\mathcal{R}_u$ ' deki Δ için TY ve SY iki tane yansız tahmin edici olsun. O zaman $TY - \Delta$ ' nın beklenen değeri ve kovaryans matrisi sırasıyla,

$$E(TY - \Delta) = 0 \Leftrightarrow T[XF_C, \quad Z] = \widehat{KF}_C \\ \Leftrightarrow [T, \quad -I_k] \begin{bmatrix} XF_C, \quad Z \\ \widehat{KF}_C \end{bmatrix} = 0 \\ \text{yani } [T, \quad -I_k] \begin{bmatrix} XF_C, \quad Z \\ KF_C, \quad 0 \end{bmatrix} = 0$$

ve

$$D(\overrightarrow{TY - \Delta}) = (I_m \otimes (T - J)) \text{cov}(\Psi) (I_m \otimes (T - J))' \\ = \sigma^2 (I_m \otimes (T - J)) (\Sigma_2 \otimes \Sigma_1) (I_m \otimes (T - J))' \\ = \sigma^2 \Sigma_2 \otimes (T - J) \Sigma_1 (T - J)' \\ = \sigma^2 \Sigma_2 \otimes [T, \quad -I_k] \begin{bmatrix} I_n \\ J \end{bmatrix} \Sigma_1 \begin{bmatrix} I_n \\ J \end{bmatrix}' [T, \quad -I_k]' \\ = \sigma^2 \Sigma_2 \otimes f(T)$$

olup, burada

$$f(T) = [T, \quad -I_k] \begin{bmatrix} I_n \\ J \end{bmatrix} \Sigma_1 \begin{bmatrix} I_n \\ J \end{bmatrix}' [T, \quad -I_k]'$$

dir. $\mathcal{R}_u$ modeli altında Δ için SY yansız tahmin edicisi de, yukarıdaki ifadelerde T yerine S alınarak benzer şekilde yazılır. Yani,

$$E(SY - \Delta) = 0 \Leftrightarrow S[XF_C, \quad Z] = \widehat{KF}_C$$

ve

$$\begin{aligned} D(\overrightarrow{SY - \Delta}) &= \sigma^2 \Sigma_2 \otimes [S, -I_k] \begin{bmatrix} I_n \\ J \end{bmatrix} \Sigma_1 \begin{bmatrix} I_n \\ J \end{bmatrix}' [S, -I_k]' \\ &= \sigma^2 \Sigma_2 \otimes f(S) \end{aligned}$$

dir. (62)'deki $\mathcal{R}_u$ modeli altında Δ 'nın BLUP'ını bulmak için verilen matris minimizasyon problemi,

$$S[XF_C, Z] = \widehat{KF}_C \text{ eşitliğine göre } \Sigma_2 \otimes f(T) \preceq \Sigma_2 \otimes f(S) \quad (66)$$

veya denk olarak,

$$S[XF_C, Z] = \widehat{KF}_C \text{ eşitliğine göre } f(T) \preceq f(S)$$

olacak şekilde $T[XF_C, Z] = \widehat{KF}_C$ tutarlı lineer matris denkleminin T çözümünü bulmak için ifade edilebilir. Buradaki Σ_2 sıfır olmayan pozitif yarı-tanımlı matristir. (66), Lemma 51' de verilen LPO' da standart kısıtlı quadratik matris değerli fonksiyon optimizasyon problemidir. Bu da, $\mathcal{R}_u$ altında Δ 'nın BLUP'ını bulmaya karşılık gelir. Lemma 51 kullanılarak, Δ 'nın BLUP'ının temel denklemi (61) elde edilir. Lemma 31 ve (61) kullanılarak, (62) elde edilir. Sonuç (a), (62)'den çıkar. Sonuç (b)'deki ifadeler iyi bilinen sonuçlardır; ayrıca bkz. (Tian, 2013), Lemma 2.1(a)). Sonuç (c) için ayrıca bkz. (Puntanen vd., 2011). (62)'den $\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)}$ 'nin dağılım matrisi

$$\begin{aligned} D[\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)}] &= (I_m \otimes T) \text{cov}(\Psi) (I_m \otimes T)' \\ &= \sigma^2 (I_m \otimes T) (\Sigma_2 \otimes \Sigma_1) (I_m \otimes T)' \\ &= \sigma^2 \Sigma_2 \otimes T \Sigma_1 T' \\ &= \sigma^2 \Sigma_2 \otimes ([\widehat{KF}_C, J \Sigma_1 [XF_C, Z]^\perp] W_r^+ + U_r W_r^\perp) \\ &\quad \times \Sigma_1 ([\widehat{KF}_C, J \Sigma_1 [XF_C, Z]^\perp] W_r^+ + U_r W_r^\perp)' \\ &= \sigma^2 \Sigma_2 \otimes [\widehat{KF}_C, J \Sigma_1 [XF_C, Z]^\perp] W_r^+ \\ &\quad \times \Sigma_1 ([\widehat{KF}_C, J \Sigma_1 [XF_C, Z]^\perp] W_r^+)' \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)}$ ile $\vec{\Delta}$ arasındaki kovaryans matris

$$\begin{aligned}
 cov\{\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)}, \vec{\Delta}\} &= (I_m \otimes T)cov(\Psi)(I_m \otimes J)' \\
 &= \sigma^2(I_m \otimes T)(\Sigma_2 \otimes \Sigma_1)(I_m \otimes J)' \\
 &= \sigma^2 \Sigma_2 \otimes T \Sigma_1 J' \\
 &= \sigma^2 \Sigma_2 \otimes ([\widehat{KF}_C, \quad J \Sigma_1 [XF_C, \quad Z]^\perp] W_r^+ + U_r W_r^\perp) \Sigma_1 J'
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $\vec{\Delta} - \overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)}$ 'nin dağılım matrisi ise

$$\begin{aligned}
 D[\vec{\Delta} - \overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)}] \\
 = D(\vec{\Delta}) - cov\{\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)}, \vec{\Delta}\} - cov\{\vec{\Delta}, \overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)}\} + D(\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)})
 \end{aligned}$$

olmak üzere, sırasıyla (58), (63) ve (64)'den

$$\begin{aligned}
 D[\vec{\Delta} - \overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)}] &= \sigma^2 \Sigma_2 \otimes J \Sigma_1 J' - \sigma^2 \Sigma_2 \otimes [\widehat{KF}_C, \quad J \Sigma_1 [XF_C, \quad Z]^\perp] W_r^+ \Sigma_1 J' \\
 &\quad - \sigma^2 \Sigma_2 \otimes J \Sigma_1 ([\widehat{KF}_C, \quad J \Sigma_1 [XF_C, \quad Z]^\perp] W_r^+)' \\
 &\quad + \sigma^2 \Sigma_2 \otimes [\widehat{KF}_C, \quad J \Sigma_1 [XF_C, \quad Z]^\perp] W_r^+ \\
 &\quad \times \Sigma_1 ([\widehat{KF}_C, \quad J \Sigma_1 [XF_C, \quad Z]^\perp] W_r^+)' \\
 &= \sigma^2 \Sigma_2 \otimes ([\widehat{KF}_C, \quad J \Sigma_1 [XF_C, \quad Z]^\perp] W_r^+ - J) \Sigma_1 \\
 &\quad \times ([\widehat{KF}_C, \quad J \Sigma_1 [XF_C, \quad Z]^\perp] W_r^+ - J)'
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Sonuç d) ispatlanmış oldu. $\square$

Sonuç 67. $KF_C \Omega$, $\mathcal{R}_u$ modeli altında tahmin edilebilir olsun. $XF_C \Omega$ daima $\mathcal{R}_u$ modeli altında tahmin edilebilirdir. Bu durumda

$$T[XF_C, \quad Z, \quad \Sigma_1 [XF_C, \quad Z]^\perp] = [KF_C, \quad 0, \quad 0]$$

lineer denklem sistemi tutarlıdır ve aşağıdaki sonuçlar sağlanır.

a) $BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C \Omega)$ 'nin genel ifadesi

$$BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega) = T\Upsilon = ([\widehat{KF}_C, \quad 0]W_r^+ + U_{r_1}W_r^\perp)\Upsilon \quad (67)$$

olmak üzere,

$$E[BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega)] = KF_C\Omega$$

ve

$$D \left[\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega)} \right] = \sigma^2 \Sigma_2 \otimes [\widehat{KF}_C, \quad 0]W_r^+ \Sigma_1 ([\widehat{KF}_C, \quad 0]W_r^+)' \quad (68)$$

dir. Burada $\widehat{KF}_C = [KF_C, \quad 0]$, $W_r = [XF_C, \quad Z, \quad \Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]$ ve U_{r_1} keyfi bir matristir.

b) $BLUE_{\mathcal{R}_u}(XF_C\Omega)$ ' nin genel ifadesi

$$BLUE_{\mathcal{R}_u}(XF_C\Omega) = T\Upsilon = ([\widehat{XF}_C, \quad 0]W_r^+ + U_{r_1}W_r^\perp)\Upsilon \quad (69)$$

olmak üzere,

$$E[BLUE_{\mathcal{R}_u}(XF_C\Omega)] = XF_C\Omega$$

ve

$$D \left[\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{R}_u}(XF_C\Omega)} \right] = \sigma^2 \Sigma_2 \otimes [\widehat{XF}_C, \quad 0]W_r^+ \Sigma_1 ([\widehat{XF}_C, \quad 0]W_r^+)' \quad (70)$$

dir. Burada $\widehat{KF}_C = [KF_C, \quad 0]$, $W_r = [XF_C, \quad Z, \quad \Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]$ ve U_{r_1} keyfi bir matristir.

c) $BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Psi)$ ' nin genel ifadesi

$$\begin{aligned} BLUP_{\mathcal{R}_u}(J\Psi) &= T\Upsilon = ([0, \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]W_r^+ + U_{r_2}W_r^\perp)\Upsilon \\ &= (J\Sigma_1([XF_C, \quad Z]^\perp \Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp)^+ + U_{r_2}W_r^\perp)\Upsilon \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} D \left\{ \overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Psi)}, \overrightarrow{\Psi} \right\} &= D \left\{ \overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(J\Psi)} \right\} \\ &= \sigma^2 \Sigma_2 \Sigma_1 ([XF_C, \quad Z]^\perp \Sigma_1 [XF_C, \quad Z]^\perp)^+ \Sigma_1 \end{aligned} \quad (71)$$

ve

$$\begin{aligned} D \left[\overrightarrow{\Psi} - \overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Psi)} \right] &= D(\overrightarrow{\Psi}) - D \left(\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Psi)} \right) \\ &= \sigma^2 \Sigma_2 \otimes \Sigma_1 - \sigma^2 \Sigma_2 \otimes \Sigma_1 ([XF_C, \quad Z]^\perp \Sigma_1 [XF_C, \quad Z]^\perp)^+ \Sigma_1 \end{aligned} \quad (72)$$

dir. Burada $\widehat{KF_C} = [KF_C, \quad 0]$, $W_r = [XF_C, \quad Z, \quad \Sigma_1 [XF_C, \quad Z]^\perp]$ ve U_{r_2} keyfi bir matristir.

d) $BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)$, $BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega)$ ve $BLUP_{\mathcal{R}_u}(J\Psi)$ aşağıdakileri sağlar:

$$BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta) = BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega) + BLUP_{\mathcal{R}_u}(J\Psi) \quad (73)$$

veya denk olarak,

$$\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)} = \overrightarrow{BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega)} + \overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(J\Psi)}$$

dır. Ayrıca,

$$cov\{BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega), BLUP_{\mathcal{R}_u}(J\Psi)\} = 0 \quad (74)$$

ve

$$D \left\{ \overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)} \right\} = D \left\{ \overrightarrow{BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega)} \right\} + D \left\{ \overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(J\Psi)} \right\} \quad (75)$$

dir.

e) Υ , $BLUE_{\mathcal{R}_u}(XF_C\Omega)$ ve $BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Psi)$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

$$Y = BLUE_{\mathcal{R}_u}(XF_C\Omega) + BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Psi),$$

$$cov\{\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{R}_u}(XF_C\Omega)}, \overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Psi)}\} = 0$$

ve

$$D(\vec{Y}) = D[\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{R}_u}(XF_C\Omega)}] + D[\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Psi)}].$$

İspat. (57)' deki $\Delta = KF_C\Omega + J\Psi = [KF_C, \ 0] \begin{bmatrix} \Omega \\ \Gamma \end{bmatrix} + J\Psi := \widehat{KF_C} \begin{bmatrix} \Omega \\ \Gamma \end{bmatrix} + J\Psi$ eşitliğinde özel olarak $J = 0$ alınırsa, (62)' deki BLUP denklemi tanım gereği BLUE denklemine dönüşür. Yani

$$BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta) = BLUP_{\mathcal{R}}(KF_C\Omega + J\Psi) = T\Upsilon = ([\widehat{KF_C}, \ J\Sigma_1[XF_C, \ Z]^{\perp}]W_r^+ + U_r W_r^{\perp})\Upsilon$$

ise $J = 0$ için

$$BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega + 0\Psi) = T\Upsilon = ([\widehat{KF_C}, \ 0\Sigma_1[XF_C, \ Z]^{\perp}]W_r^+ + U_r W_r^{\perp})\Upsilon$$

yani,

$$BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega) = T\Upsilon = ([\widehat{KF_C}, \ 0]W_r^+ + U_{r_1} W_r^{\perp})\Upsilon$$

veya denk olarak

$$\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega)} = (I_m \otimes T)\vec{Y} = \left(I_m \otimes ([\widehat{KF_C}, \ 0]W_r^+ + U_{r_1} W_r^{\perp})\right)\vec{Y}$$

elde edilir. (67)' den (68) ve $K = X$ alınırsa (69) elde edilir. (69)' dan (70) elde edilir. (57)' deki Δ eşitliğinde özel olarak $K = 0$ alınırsa

$$BLUP_{\mathcal{R}_u}(0F_C\Omega + J\Psi) = T\Upsilon = ([0\widehat{F_C}, \ J\Sigma_1[XF_C, \ Z]^{\perp}]W_r^+ + U_r W_r^{\perp})\Upsilon$$

yani

$$BLUP_{\mathcal{R}_u}(J\Psi) = T\Upsilon = ([0, \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]W_r^+ + U_{r_2}W_r^\perp)\Upsilon$$

veya denk olarak

$$\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(J\Psi)} = (I_m \otimes T)\vec{Y} = \left(I_m \otimes ([0, \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]W_r^+ + U_{r_2}W_r^\perp) \right) \vec{Y}$$

elde edilir. $BLUP_{\mathcal{R}_u}(J\Psi)$ eşitliği kullanılarak (71) ve (72) görülür. Ayrıca U_r matrisi $U_r = U_{r_1} + U_{r_2}$ olarak göz önüne alınırsa, $[\widehat{KF}_C, \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]$ aşağıdaki gibi yazılır:

$$[\widehat{KF}_C, \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp] = [\widehat{KF}_C, \quad 0] + [0, \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp].$$

Böylece (62)' deki $BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta)$, denk olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta) &= ([\widehat{KF}_C, \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]W_r^+ + U_rW_r^\perp)\Upsilon \\ &= \left(([\widehat{KF}_C, \quad 0] + [0 \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp])W_r^+ + (U_{r_1} + U_{r_2})W_r^\perp \right) \Upsilon \\ &= ([\widehat{KF}_C, \quad 0]W_r^+ + U_{r_1}W_r^\perp)\Upsilon + ([0, \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]W_r^+ + U_{r_2}W_r^\perp)\Upsilon \\ &= \overrightarrow{BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega)} + \overrightarrow{BLUP_{\mathcal{R}_u}(J\Psi)}. \end{aligned}$$

Böylece (73) ispatlanmış olur. $BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega)$ ve $BLUP_{\mathcal{R}_u}(J\Psi)$ arasındaki kovaryans matrisi

$$\begin{aligned} &cov\{BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega), BLUP_{\mathcal{R}_u}(J\Psi)\} \\ &= \sigma^2 \Sigma_2 \otimes ([\widehat{KF}_C, \quad 0]W_r^+ + U_{r_1}W_r^\perp)\Sigma_1([0, \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]W_r^+ + U_{r_2}W_r^\perp)' \\ &= \sigma^2 \Sigma_2 \otimes ([\widehat{KF}_C, \quad 0]W_r^+)\Sigma_1([0, \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]W_r^+)' \end{aligned}$$

olup, son ifadeye Lemma 48 uygulanırsa,

$$r([\widehat{KF}_C, \quad 0]W_r^+)\Sigma_1([0, \quad J\Sigma_1[XF_C, \quad Z]^\perp]W_r^+)'$$

$$\begin{aligned}
&= r \begin{bmatrix} 0 & [XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp]' & [0, J\Sigma_1[XF_C, Z]^\perp]' \\ [XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp] & \Sigma_1 & 0 \\ [\widehat{KF_C}, 0] & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad -2r[XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp] \\
&= r \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} [XF_C, Z]' \\ [XF_C, Z]^\perp \Sigma_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ [XF_C, Z]^\perp \Sigma_1 J' \end{bmatrix} \\ [XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp] & \Sigma_1 & 0 \\ [\widehat{KF_C}, 0] & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad -2r[XF_C, Z, \Sigma_1] \\
&= r \begin{bmatrix} 0 & 0 & [XF_C, Z]' & 0 \\ 0 & 0 & [XF_C, Z]^\perp \Sigma_1 & [XF_C, Z]^\perp \Sigma_1 J' \\ [XF_C, Z] & \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp & \Sigma_1 & 0 \\ [\widehat{KF_C}, 0] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2r[XF_C, Z, \Sigma_1] \\
&= r \begin{bmatrix} 0 & 0 & [XF_C, Z]' & 0 \\ 0 & -[XF_C, Z]^\perp \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp & 0 & [XF_C, Z]^\perp \Sigma_1 J' \\ [XF_C, Z] & 0 & \Sigma_1 & 0 \\ [\widehat{KF_C}, 0] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad -2r[XF_C, Z, \Sigma_1] \\
&= r \begin{bmatrix} 0 & [XF_C, Z]' & 0 & 0 \\ [XF_C, Z] & \Sigma_1 & 0 & 0 \\ [\widehat{KF_C}, 0] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -[XF_C, Z]^\perp \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp & [XF_C, Z]^\perp \Sigma_1 J' \end{bmatrix} \\
&\quad -2r[XF_C, Z, \Sigma_1] \\
&= r \begin{bmatrix} 0 & [XF_C, Z]' \\ [XF_C, Z] & \Sigma_1 \\ [\widehat{KF_C}, 0] & 0 \end{bmatrix} + r[[XF_C, Z]^\perp \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp, [XF_C, Z]^\perp \Sigma_1 J'] \\
&\quad -2r[XF_C, Z, \Sigma_1] \\
&= r \begin{bmatrix} XF_C & Z \\ \widehat{KF_C} & 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} [XF_C, Z]' \\ \Sigma_1 \end{bmatrix} + r[[XF_C, Z], \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp, \Sigma_1 J'] - r[XF_C, Z] \\
&\quad -2r[XF_C, Z, \Sigma_1] \\
&= r[XF_C, Z] + r[XF_C, Z, \Sigma_1] + r[XF_C, Z, \Sigma_1] - r[XF_C, Z] - 2r[XF_C, Z, \Sigma_1] \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (74) ispat edilmiş olur. (63), (68) ve (71)' den (75) eşitliği elde edilir. (e)' deki sonuçlar ise (d)' den doğrudan görülür. $\square$

Sonuç 68. $\mathcal{R}_u$, $\mathcal{R}_c$ kısıtlı modelinin kısıtsız bir modeli olmak üzere, tekrar parametrelendirme yöntemi ile oluşturulmuş olsun. Φ ve Δ , (56) ve (57)' deki gibi olsun. Φ ve Δ sırasıyla $\mathcal{R}_c$ ve $\mathcal{R}_u$ modelleri altında tahmin edilebilir olsun. O zaman

$$\begin{aligned} BLUP_{\mathcal{R}_c}(\Phi) &= KC^+D + BLUP_{\mathcal{R}_u}(\Delta) \\ &= KC^+D + ([\widehat{KF}_C \quad J\Sigma_1[XF_C \quad Z]^+])W_r^+ + U_r W_r^\perp Y \\ &= KC^+D + ([\widehat{KF}_C \quad J\Sigma_1[XF_C \quad Z]^+])W_r^+ + U_r W_r^\perp (Y - XC^+D) \end{aligned}$$

dir. Burada U_r keyfi bir matris ve $W_r = [XF_C, \quad Z, \quad \Sigma_1[XF_C, \quad Z]^+]$ ' dir. Özellikle de, (56) ve (57)' deki Φ ve Δ ' da $J = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} BLUE_{\mathcal{R}_c}(K\Theta) &= KC^+D + BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega) \\ &= KC^+D + ([\widehat{KF}_C, \quad 0])W_r^+ + U_r W_r^\perp (Y - XC^+D) \end{aligned}$$

elde edilir.

2.4.2. Kısıtlı Çok Değişkenli Katlı Lineer Modeller Altında BLUP Hesabı

Bu bölümde $\mathcal{S}_u$ modeli için temel BLUP denklemi ve ilişkili bazı özellikler verilecektir.

Tanım 69. Δ , $\mathcal{S}_u$ modeli altında tahmin edilebilir olsun. LPO' da

$$\begin{aligned} E(TY - \Delta) &= 0 \text{ eşitliğine göre } D(\overline{TY - \Delta}) = \min \\ \Leftrightarrow TY &= BLUP_{\mathcal{S}_u}(\Delta) = BLUP_{\mathcal{S}_u}(KF_C\Omega + J\Psi) \end{aligned}$$

olacak şekilde TY matrisi vardır. Eğer Δ ' daki $J = 0$ ise $TY, KF_C\Omega$ ' nin BLUE' suna karşılık gelir ve

$$TY = BLUE_{\mathcal{S}_u}(KF_C\Omega)$$

olarak yazılır. İlave olarak, eğer Δ ' daki $K = 0$ ise TY, Ψ ' nin BLUP' na karşılık gelir ve

$$TY = BLUP_{\mathcal{S}_u}(J\Psi)$$

olarak yazılır.

$\mathcal{S}_u$ modeli, $\mathcal{S}_c$ modelinin yeniden parametrelendirilmiş versiyonu olmak üzere, aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$BLUP_{\mathcal{S}_c}(\Phi) = KC^+D + BLUP_{\mathcal{S}_u}(\Delta).$$

Eşitliğin her iki yanını Φ matrisinden çıkarılırsa,

$$\Phi - BLUP_{\mathcal{S}_c}(\Phi) = \Phi - KC^+D - BLUP_{\mathcal{S}_u}(\Delta)$$

elde edilir. $\Delta = \Phi - KC^+D$ olduğundan

$$\Phi - BLUP_{\mathcal{S}_c}(\Phi) = \Delta - BLUP_{\mathcal{S}_u}(\Delta)$$

yani,

$$D[\Phi - BLUP_{\mathcal{S}_c}(\Phi)] = D[\Delta - BLUP_{\mathcal{S}_u}(\Delta)]$$

elde edilir. Bu da, $\mathcal{S}_c$ modeli altında Φ matrisinin BLUP' ı, $\mathcal{S}_u$ modeli altında Δ ' nın BLUP' ından elde edilir demektir.

Teorem 70. $\mathcal{S}_u$ modeli altında Δ tahmin edilebilir olsun. TY ve HY , $\mathcal{S}_u$ modeli altında Δ için iki yansız lineer tahmin ediciler olsun. $HXF_C = KF_C$ eşitliğine göre $D(\overrightarrow{TY - \Delta}) - D(\overrightarrow{HY - \Delta})$ ' nın maksimal pozitif inertiaları

$$\max_{E(HY - \Delta) = 0} i_+ \left(D(\overrightarrow{TY - \Delta}) - D(\overrightarrow{HY - \Delta}) \right) = r \left([T, -I_k] \begin{bmatrix} I_n \\ J \end{bmatrix} cov(\Psi) \begin{bmatrix} I_n \\ J \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} XF_C \\ KF_C \end{bmatrix}^\perp \right)$$

dir. Böylece

$$TY = BLUP_{\mathcal{S}_u}(\Delta) \Leftrightarrow E(TY - \Delta) = 0 \text{ eşitliğine göre } D(\overrightarrow{TY - \Delta}) = \min \quad (76)$$

$$\Leftrightarrow T[XF_C, \quad \Sigma_1(XF_C)^\perp] = [KF_C, \quad J\Sigma_1(XF_C)^\perp]$$

dir. Bu matris denklemi tutarlıdır. Bu durumda, bu denklemin genel çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$BLUP_{\mathcal{S}_u}(\Delta) = T\Upsilon = ([KF_C, \quad J\Sigma_1(XF_C)^\perp]W_s^+ + U_s W_s^\perp)\Upsilon \quad (77)$$

veya denk olarak,

$$\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{S}_u}(\Delta)} = (I_m \otimes T)\vec{\Upsilon} = (I_m \otimes ([KF_C, \quad J\Sigma_1(XF_C)^\perp]W_s^+ + U_s W_s^\perp))\vec{\Upsilon}.$$

Burada, $U_s \in \mathbb{R}^{k \times n}$ keyfi matris ve $W_s = [XF_C, \quad \Sigma_1(XF_C)^\perp]'$ dir. Özellikle de

$$BLUE_{\mathcal{S}_u}(KF_C\Omega) = T\Upsilon = ([KF_C, \quad 0]W_s^+ + U_{s_1} W_s^\perp)\Upsilon \quad (78)$$

veya denk olarak,

$$\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{S}_u}(KF_C\Omega)} = (I_m \otimes T)\vec{\Upsilon} = (I_m \otimes [KF_C, \quad 0]W_s^+ + U_{s_1} W_s^\perp)\vec{\Upsilon}$$

ve

$$BLUP_{\mathcal{S}_u}(\Psi) = T\Upsilon = ([0, \quad \Sigma_1(XF_C)^\perp]W_s^+ + U_{s_2} W_s^\perp)\Upsilon$$

veya denk olarak,

$$\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{S}_u}(\Psi)} = (I_m \otimes T)\vec{\Upsilon} = (I_m \otimes ([0, \quad \Sigma_1(XF_C)^\perp]W_s^+ + U_{s_2} W_s^\perp))\vec{\Upsilon}$$

dir. Burada $U_{s_1}, U_{s_2} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ keyfi matrislerdir. İlave olarak W_s aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$r(W_s) = r([XF_C, \quad \Sigma_1]) = r([XF_C, \quad (XF_C)^\perp \Sigma_1])$$

ve

$$\Re(W_s) = \Re([XF_C, \Sigma_1]) = \Re([XF_C, (XF_C)^\perp \Sigma_1]).$$

Ayrıca, (77)' deki $BLUP_{\mathcal{S}_u}(\Delta)$ ile

$$D \left[\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{S}_u}(\Delta)} \right] = \sigma^2 \Sigma_2 \otimes [KF_C, J\Sigma_1(XF_C)^\perp] W_s^+ \Sigma_1 ([KF_C, J\Sigma_1(XF_C)^\perp] W_s^+)',$$

$$cov\{\overrightarrow{BLUP_{\mathcal{S}_u}(\Delta)}, \vec{\Delta}\} = \sigma^2 \Sigma_2 \otimes [KF_C, J\Sigma_1(XF_C)^\perp] W_s^+ \Sigma_1 J'$$

ve

$$\begin{aligned} D \left[\vec{\Delta} - \overrightarrow{BLUP_{\mathcal{S}_u}(\Delta)} \right] \\ = \sigma^2 \Sigma_2 \otimes ([KF_C, J\Sigma_1(XF_C)^\perp] W_s^+ - J) \Sigma_1 ([KF_C, J\Sigma_1(XF_C)^\perp] W_s^+ - J)' \end{aligned}$$

yazılabilir. (78)' deki $BLUE_{\mathcal{S}_u}(KF_C \Omega)$ ile

$$D \left[\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{S}_u}(KF_C \Omega)} \right] = \sigma^2 \Sigma_2 \otimes [KF_C, 0] W_s^+ \Sigma_1 ([KF_C, 0] W_s^+)' \quad (79)$$

elde edilir.

Bu teorem, Teorem 66' den doğrudan görülür. Şöyle ki Teorem 66' deki modeller Teorem 70' daki modellerin aşırı parametrelili halidir. Özel olarak $Z = 0$ alınırsa aşırı parametrelili model, asıl modele indirgenir. İspatta da $Z = 0$ alınması yeterlidir. Bu nedenle önce aşırı parametrelili modeller gösterilir ve ispatlanır. Daha sonra asıl modellere bakılır.

Sonuç 71. $\mathcal{S}_u$, $\mathcal{S}_c$ kısıtlı modelinin kısıtsız bir modeli olmak üzere, tekrar parametrelendirme yöntemi ile oluşturulmuş olsun. Φ ve Δ , (56) ve (57)' deki gibi olsun. Φ ve Δ sırasıyla $\mathcal{S}_c$ ve $\mathcal{S}_u$ modelleri altında tahmin edilebilir olsun. O zaman

$$\begin{aligned} BLUP_{\mathcal{S}_c}(\Phi) &= KC^+D + BLUP_{\mathcal{S}_u}(\Delta) \\ &= KC^+D + ([KF_C, J\Sigma_1(XF_C)^\perp] W_s^+ + U_s W_s^\perp) Y \\ &= KC^+D + ([KF_C, J\Sigma_1(XF_C)^\perp] W_s^+ + U_s W_s^\perp) (Y - XC^+D) \end{aligned}$$

dir. Burada U_s keyfi bir matris ve $W_s = [XF_C, \Sigma_1(XF_C)^\perp]'$ dir. Özellikle de, (56) ve (57)'deki Φ ve Δ ' da $J = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} BLUE_{S_c}(K\Theta) &= KC^+D + BLUE_{S_u}(KF_C\Omega) \\ &= KC^+D + ([KF_C, 0]W_s^+ + U_sW_s^\perp)(Y - XC^+D) \end{aligned}$$

elde edilir. □

2.5. Kısıtlı Çok Kath Lineer Modellerde BLUE' ların Eşitlik İlişkileri

G_1Y ve G_2Y iki lineer istatistiği arasında aşağıdaki üç önemli durum söylenebilir.

Tanım 72. Y rasgele bir matris olsun.

- a) $G_1 = G_2 \Leftrightarrow G_1Y = G_2Y$ eşitliği tanım olarak sağlanır.
- b) $E(G_1Y - G_2Y) = 0$ ve $cov(\overline{G_1Y} - \overline{G_2Y}) = 0$ eşitliklerinin her ikisi de sağlanır $\Leftrightarrow G_1Y = G_2Y$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır.
- c) $E(G_1Y) = E(G_2Y)$ ve $cov(\overline{G_1Y}) = cov(\overline{G_2Y})$ eşitliklerinin her ikisi de sağlanır $\Leftrightarrow G_1Y$ ve G_2Y lineer istatistiklerinin beklenen ve kovaryans matrisleri aynıdır.

$KF_C\Omega$, $\mathcal{R}_u$ modeli altında tahmin edilebilir olduğu varsayılın. O zaman tanım gereği $\mathcal{S}_u$ modeli için de tahmin edilebilirdir. Bu durumda $\mathcal{R}_u$ modelinde $KF_C\Omega$ ' nin BLUE' su (67) olarak yazılırken, $\mathcal{S}_u$ modelinde $KF_C\Omega$ ' nin BLUE' su (78) olarak yazılır. Elde edilen BLUE eşitlikleri aynı olması gerekli değildir. Böylece bir önceki tanım ile elde edilen BLUE' lar arasında ilişki kurmak doğaldır.

Teorem 73. $KF_C\Omega$, $\mathcal{R}_u$ modeli (ayrıca $\mathcal{S}_u$ modeli) altında tahmin edilebilir. $BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega)$ ve $BLUE_{\mathcal{S}_u}(KF_C\Omega)$ sırasıyla (67) ve (78)' deki gibi olsun.

$$M = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & XF_C & Z \\ (XF_C)' & 0 & 0 \\ 0 & KF_C & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } N = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & XF_C & Z \\ (XF_C)' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri tanımlansın. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

- a) $BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega) = BLUE_{\mathcal{S}_u}(KF_C\Omega)$ tanım olarak sağlanır;
- b) $BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega) = BLUE_{\mathcal{S}_u}(KF_C\Omega)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır;

$$\text{c)} \quad D \left(\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{S}_u}(KF_C\Omega)} - \overrightarrow{BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega)} \right) = 0;$$

$$\text{d)} \quad D \left(\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega)} \right) = D \left(\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{S}_u}(KF_C\Omega)} \right);$$

$$\text{e)} \quad r(M) = r(N).$$

İspat. (67) ve (78) birleştirilirse,

$$T[XF_C, \Sigma_1(XF_C)^\perp, XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp] = [KF_C, 0, KF_C, 0, 0]$$

olan yeni bir matris denklemi elde edilir. Bu denklem T için bir çözüme sahiptir $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & r \begin{bmatrix} XF_C & \Sigma_1(XF_C)^\perp & XF_C & Z & \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp \\ KF_C & 0 & KF_C & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= r[XF_C, \Sigma_1(XF_C)^\perp, XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp]. \end{aligned}$$

$\Re([XF_C, Z]^\perp) \subseteq \Re((XF_C)^\perp)$ ve elementer işlemler ile eşitliğin iki yanı sırası ile sadeleştirilirse,

$$\begin{aligned} & r \begin{bmatrix} XF_C & \Sigma_1(XF_C)^\perp & XF_C & Z & \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp \\ KF_C & 0 & KF_C & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= r \begin{bmatrix} \Sigma_1(XF_C)^\perp & XF_C & Z \\ 0 & KF_C & 0 \end{bmatrix} \\ &= r \begin{bmatrix} \Sigma_1 & XF_C & Z \\ (XF_C)' & 0 & 0 \\ 0 & KF_C & 0 \end{bmatrix} - r(XF_C) \\ &= r(M) - r(XF_C) \end{aligned}$$

elde edilir. (2) ve $(XF_C)^\perp = F_{(XF_C)'} ile$

$$\begin{aligned} r[XF_C, \Sigma_1(XF_C)^\perp, XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp] &= r[\Sigma_1(XF_C)^\perp, XF_C, Z] \\ &= r \begin{bmatrix} \Sigma_1 & XF_C & Z \\ (XF_C)' & 0 & 0 \end{bmatrix} - r(XF_C) \\ &= r(N) - r(XF_C) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, (a), (e)' deki rank eşitliğine denktir.

Tanım 72 (b) ile $BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega) = BLUE_{\mathcal{S}_u}(KF_C\Omega)$ 1 olasılıkla sağlanır $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
E \left(BLUE_{\mathcal{S}_u}(KF_C\Omega) - BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega) \right) &= 0, \\
D \left(\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{S}_u}(XF_C\Omega)} - \overrightarrow{BLUE_{\mathcal{R}_u}(XF_C\Omega)} \right) &= 0
\end{aligned} \tag{80}$$

dır. (80)' deki ilk eşitlik doğal olarak sağlanır. Böylece, (b) ve (c) denktir. İlave olarak, (c)' deki eşitlik

$$\begin{aligned}
& (I_m \otimes [KF_C, 0][XF_C, \Sigma_1(XF_C)^\perp]^+ \\
& - I_m \otimes ([\widehat{KF_C}, 0][XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp]^+))(\Sigma_2 \otimes \Sigma_1) \\
& = \Sigma_2 \otimes ([KF_C, 0][XF_C, \Sigma_1(XF_C)^\perp]^+ \Sigma_1 - [\widehat{KF_C}, 0] \\
& \quad \times [XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp]^+ \Sigma_1 \\
& = 0
\end{aligned} \tag{81}$$

denktir. Burada $\Sigma_2 \neq 0$ olmak üzere (81),

$$[KF_C, 0][XF_C, \Sigma_1(XF_C)^\perp]^+ \Sigma_1 - [\widehat{KF_C}, 0][XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp]^+ \Sigma_1 = 0 \tag{82}$$

eşitliğine denktir. (82)' nin her iki yanına da (5) uygulanırsa, ayrıca elementer satır işlemlerinin yanında (2) ve (3) ile sadeleşirse,

$$\begin{aligned}
& r([KF_C, 0][XF_C, \Sigma_1(XF_C)^\perp]^+ \Sigma_1 - [\widehat{KF_C}, 0][XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp]^+ \Sigma_1) \\
& = r \begin{bmatrix} [XF_C, \Sigma_1(XF_C)^\perp] & 0 & \Sigma_1 \\ 0 & -[XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp] & \Sigma_1 \\ [KF_C, 0] & [\widehat{KF_C}, 0] & 0 \end{bmatrix} - r[XF_C, \Sigma_1(XF_C)^\perp] \\
& \quad - r[XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp] \\
& = r \begin{bmatrix} XF_C & \Sigma_1(XF_C)^\perp & 0 & 0 & 0 & \Sigma_1 \\ 0 & 0 & -XF_C & -Z & -\Sigma_1[XF_C, Z]^\perp & \Sigma_1 \\ KF_C & 0 & KF_C & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[XF_C, \Sigma_1] \\
& \quad - r[XF_C, Z, \Sigma_1] \\
& = r \begin{bmatrix} XF_C & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_1 \\ XF_C & -\Sigma_1(XF_C)^\perp & -XF_C & -Z & 0 & \Sigma_1 \\ 0 & 0 & KF_C & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[XF_C, \Sigma_1] - r[XF_C, Z, \Sigma_1] \\
& = r \begin{bmatrix} XF_C & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_1 \\ 0 & -\Sigma_1(XF_C)^\perp & -XF_C & -Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & KF_C & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[XF_C, \Sigma_1] - r[XF_C, Z, \Sigma_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r \begin{bmatrix} XF_C & \Sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma_1(XF_C)^\perp & -XF_C & -Z \\ 0 & 0 & 0 & KF_C & 0 \end{bmatrix} - r[XF_C, \Sigma_1] - r[XF_C, Z, \Sigma_1] \\
&= r \begin{bmatrix} \Sigma_1(XF_C)^\perp & XF_C & Z \\ 0 & KF_C & 0 \end{bmatrix} - r[XF_C, Z, \Sigma_1] \\
&= r \begin{bmatrix} \Sigma_1 & XF_C & Z \\ (XF_C)' & 0 & 0 \\ 0 & KF_C & 0 \end{bmatrix} - r(XF_C) - r[XF_C, Z, \Sigma_1] = r(M) - r(N) \tag{83}
\end{aligned}$$

elde edilir. (83)' ün her iki yanı sıfıra eşitlenirse, (c) ve (e)' nin denkliği elde edilir.

(78) ve (67)' den

$$\begin{aligned}
&D \left(\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{S}_u}(KF_C\Omega)} - \overrightarrow{BLUE_{\mathcal{R}_u}(KF_C\Omega)} \right) \\
&= \sigma^2 \Sigma_2 \otimes [KF_C, 0][XF_C, \Sigma_1(XF_C)^\perp]^+ \Sigma_1 \\
&\quad \times ([KF_C, 0][XF_C, \Sigma_1(XF_C)^\perp]^+)' \\
&- \sigma^2 \Sigma_2 \otimes [\widehat{KF_C}, 0][XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp]^+ \Sigma_1 \\
&\quad \times ([\widehat{KF_C}, 0][XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp]^+)' \tag{84}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
&r \left(D \left(\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{S}}(KF_C\Omega)} - \overrightarrow{BLUE_{\mathcal{R}}(KF_C\Omega)} \right) \right) \\
&= r(\Sigma_2) r([KF_C, 0][XF_C, \Sigma_1(XF_C)^\perp]^+ \Sigma_1 ([KF_C, 0][XF_C, \Sigma_1(XF_C)^\perp]^+)' \\
&\quad - [\widehat{KF_C}, 0][XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp]^+ \Sigma_1 \\
&\quad \times ([\widehat{KF_C}, 0][XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp]^+)' \tag{85}
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
&r([KF_C, 0][XF_C, \Sigma_1(XF_C)^\perp]^+ \Sigma_1 ([KF_C, 0][XF_C, \Sigma_1(XF_C)^\perp]^+)' \\
&\quad - [\widehat{KF_C}, 0][XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp]^+ \Sigma_1 \\
&\quad \times ([\widehat{KF_C}, 0][XF_C, Z, \Sigma_1[XF_C, Z]^\perp]^+)' \\
&= r(M) - r(N) \tag{86}
\end{aligned}$$

olduğu görülür (Lu vd., 2015). (85) ve (86)' dan

$$r\left(D\left(\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{S}}(KF_C\Omega)} - \overrightarrow{BLUE_{\mathcal{R}}(KF_C\Omega)}\right)\right) = r(\Sigma_2)(r(M) - r(N))$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafı sıfıra eşitlenirse, (d)'nin (e)'e denkliği görülür. $\square$

Son olarak, $K = X$ için Teorem 'in bir sonucu aşağıdaki gibidir.

Sonuç 74. $XF_C\Omega$, $\mathcal{R}_u$ modelinde tahmin edilebilir olsun yani, $\mathfrak{R}(XF_C\Omega) \cap \mathfrak{R}(Z) = \{0\}$. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

- a) $BLUE_{\mathcal{R}_u}(XF_C\Omega) = BLUE_{\mathcal{S}_u}(XF_C\Omega)$ tanım olarak sağlanır;
- b) $BLUE_{\mathcal{R}_u}(XF_C\Omega) = BLUE_{\mathcal{S}_u}(XF_C\Omega)$ eşitliği 1 olasılıkla sağlanır;
- c) $D\left(\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{S}_u}(XF_C\Omega)} - \overrightarrow{BLUE_{\mathcal{R}_u}(XF_C\Omega)}\right) = 0$;
- d) $D\left(\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{R}_u}(XF_C\Omega)}\right) = D\left(\overrightarrow{BLUE_{\mathcal{S}_u}(XF_C\Omega)}\right)$;
- e) $r\begin{bmatrix} \Sigma_1 & Z \\ (XF_C)' & 0 \end{bmatrix} = r[\Sigma_1, \quad XF_C, \quad Z]$.

İspat. Önceki teoremde $K = X$ alınırsa, (4)'den

$$r(M) = r\begin{bmatrix} \Sigma_1 & XF_C & Z \\ (XF_C)' & 0 & 0 \\ 0 & KF_C & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \Sigma_1 & Z \\ (XF_C)' & 0 \end{bmatrix} + r(XF_C),$$

$$r(N) = r\begin{bmatrix} \Sigma_1 & XF_C & Z \\ (XF_C)' & 0 & 0 \end{bmatrix} = r[\Sigma_1, \quad XF_C, \quad Z] + r(XF_C)$$

elde edilir. Böylece Sonuç (e)'deki eşitlik Teorem 73 (e)'dekine indirgenir.

3. SONUÇLAR

İstatistiksel teori ve optimizasyon teorisi birçok yönden yakından bağlantılıdır. Özellikle araştırmacılar, çeşitli matematiksel optimizasyon metotları aracılığıyla lineer regresyon modellerde bilinmeyen parametrelerin en iyi tahminlerini ortaya koymaya çalışmaktadır. Yani bir modeldeki bilinmeyen parametrelerin tahmini, matematik ve istatistikteki çeşitli optimizasyon yöntemleri aracılığıyla oluşturulmaktadır. Günümüzde, modern hesaplama istatistikleri ile büyük verilerin olduğu problemlerin üstesinden gelmek için giderek daha fazla yüksek boyutlu optimizasyon yöntemleri kullanılmaya ihtiyaç duyulmaktadır.

İstatistiksel çıkarımlardaki birçok optimizasyon problemi, elde edilen denklemlerin minimizasyon veya maksimizasyon problemine dönüştürülebilmekte ve bu optimizasyon problemlerine analitik çözümler türetilmektedir. Tahmin analizinde kullanılan yöntemler, verilerin en küçük kareler yöntemi, ağırlıklı en küçük kareler yöntemi, en iyi lineer yansız tahmin yöntemi vb. gibi çeşitli optimizasyon yöntemleriyle analiz edileceği deneylere uygulanabilir.

Bu tezde ikinci dereceden matris değerli fonksiyonun optimizasyon problemi, LPO' na göre aşırı parametrelili çok değişkenli katlı lineer modeldeki bilinmeyen parametrelerin tahmin ve ön tahminlerini incelemek için kullanılmıştır. Ayrıca matris teorisinde bazı kesin cebirsel yöntem ve tekniklerin iyi organize edilmiş kullanımı yoluyla aşırı parametrelili çok değişkenli katlı lineer modellerde bilinmeyen parametrelerin tahmin edicileri arasında bağlantılar kurmaya yönelik araştırma problemi tanımlanmış ve incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, yalnızca tahmin edicilerin birbirleriyle olan ilişkilerini değil, aynı zamanda bu modellerde parametrik tahmin yapılarına dair önemli yapısal içgörüler de sunmaktadır. Ayrıca, BLUP ve BLUE kavramlarının çeşitli özel durumlar altında nasıl örtüştüğü veya farklılaştığı, cebirsel olarak kesin ve anlamlı biçimlerde gösterilmiştir. Bu bağlamda, tez çalışmasındaki teorik çerçeve, hem aşırı parametrelili hem de klasik çok değişkenli modeller arasında metodolojik bir köprü kurmakla birlikte, istatistiksel çıkarımın temel yapı taşları olan BLUE ve BLUP üzerine sağlam bir temel inşa etmektedir. Elde edilen denklemlerin ve rank ilişkilerinin, yalnızca istatistiksel teori açısından değil, aynı zamanda uygulamalı alanlarda model karşılaştırmaları, model seçim kriterleri ve parametrik hassasiyet analizleri gibi konular için de önemli katkılar sunacağı değerlendirilmektedir.

Sonuç olarak, bu tezde geliştirilen yöntemlerin ve ortaya konan eşitliklerin, çok değişkenli analizlerde cebirsel metodolojiye yeni bir perspektif kazandıracağı, aşırı parametrelili yapıların tahmin teorisindeki rolüne ışık tutacağı ve literatürdeki mevcut yaklaşımlara hem tamamlayıcı hem de yenilikçi bir katkı sağlayacağı düşünülmektedir



4. ÖNERİLER

Bu çalışmada, aşırı parametrelili kısıtlı çok değişkenli katlı lineer modellere genel bir yaklaşım sunuldu. Kesin lineer kısıtlamalara tabi aşırı parametrelili kısıtlı çok değişkenli katlı lineer modellerin yeniden parametrelendirme yöntemi kullanıldı. Bu modelleri ele almanın bir diğer popüler yaklaşımı, aşırı parametrelili kısıtlı çok değişkenli katlı lineer modelinin iki verilen parçasını, yani model parçasını ve kısıtlama parçasını, birleştirilmiş bir formda birleştirerek yeni bir birleşik model oluşturmaktır. Bu yaklaşıma göre, açıkça kısıtlı model $\mathcal{M}$ ve aşırı parametrelili kısıtlı modeli $\mathcal{N}$, aşağıdaki örtük kısıtlı çok değişkenli katlı lineer model ve aşırı parametrelendirilmiş modeline dönüştür.

$$\hat{\mathcal{S}}: \begin{bmatrix} Y \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ C \end{bmatrix} \Theta + \begin{bmatrix} \Psi \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ile } D \begin{bmatrix} Y \\ D \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \Sigma_2 \otimes \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (87)$$

ve

$$\hat{\mathcal{R}}: \begin{bmatrix} Y \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ C \end{bmatrix} \Theta + \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} \Gamma + \begin{bmatrix} \Psi \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ile } D \begin{bmatrix} Y \\ D \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \Sigma_2 \otimes \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (88)$$

Özetle modellerin bu formda alınması da farklı bir bakış açısı ile elde edilmiş aynı sonuçlar olacaktır.

- Bu tezde katlı lineer modeller ve onun aşırı parametrelili versiyonu tam kısıt ile ele alınmıştır.
 - Modeller farklı sınır ile ele alınabilir.
- Ele alınan kısıtlı modeller, yeniden parametrelendirme yöntemi ile kısıtsız forma getirilmiştir.
 - Çalışmayı geliştirmek için (87) ve (88)' de de olduğu gibi parametrelendirme yönteminden farklı teknikler uygulanabilir.
- Bu tezde literatürde yaygın bir şekilde kullanılan optimizasyon teknikleri kullanılarak parametre tahmini yapılmıştır.
 - Çalışmayı geliştirmek için farklı optimizasyon teknikleri de kullanılabilir.

- Ele alınan model altında bilinmeyen parametrelerin BLUP ve BLUE tahminleri yapılmıştır.
 - Farklı tahmin ediciler içinde yapılabilir. Örneğin; OLSP ve OLSE.



5. KAYNAKLAR

- Alalouf, I. S., & Styan G. P. H. (1979). Characterizations of estimability in the general linear model. *Ann. Stat.*, 7(1), 194–200.
- Amemiya, T. (1985). *Advanced Econometrics*. Oxford, Basil Blackwell.
- Bhatia, R. (2007). *Positive definite matrices. Princeton series in applied mathematics*. Princeton University Press. Princeton, NJ.
- Baksalary, J. K. (1984). A study of the equivalence between a Gauss–Markoff model and its augmentation by nuisance parameters. *Series Statistics* 15(1), 3–35.
- Baksalary, J. K., & Pordzik, P. R. (1989). Inverse-partitioned-matrix method for the general Gauss–Markov model with linear restrictions. *J. Stat. Plan. Inference*, 23(2), 133–143.
- Baksalary, J. K., & Pordzik, P. R. (1990). A note on comparing the unrestricted and restricted least-squares estimators. *Linear Algebra Appl.*, 127, 371–378.
- Bhimasankaram, P., & Jammalamadaka, S. R. (1994). Updates of statistics in a general linear model: A statistical interpretation and applications. *Commun. Stat. - Simul. Comput.*, 23(3), 789–801.
- Büyükkaya, M. E. (2024). Comparison of predictors under constrained general linear model and its future observations. *Commun. Stat.-Theory Methods*, 53, 8929–8941.
- Chipman, J. S., & Rao, M. M. (1964) The treatment of linear restrictions in regression analysis. *Econometrica*, 32(1/2), 198–209.
- Dent, W. T. (1980). On restricted estimation in linear models. *J. Econom.*, 12(1), 49–58.
- Dong, B., Guo, W., & Tian, Y. (2014). On relations between BLUEs under two transformed linear models. *J. Multivar. Anal.*, 131, 279–292.
- Drygas, H. (1970). *The Coordinate-free Approach to Gauss-Markov Estimation*. Heidelberg: Springer.
- Dube, M. (1999). Mixed regression estimator under inclusion of some superfluous variables. *Test*, 8(2), 411–417.
- Gamgam, H., & Altunkaynak, B. (2015). *SPSS Uygulamalı Regresyon Analizi*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Gentle, J. E. (2006). *Optimization Methods for Applications in Statistics. Statistics and Computing Series*, New York: Springer, Chapter 1: Statistical Methods as Optimization Problems.

- Goldberger, A. S. (1962). Best linear unbiased prediction in the generalized linear regression model. *J. Am. Stat. Assoc.*, 57(298), 369–375.
- Graybill, F. A. (1969). *Introduction to matrices with applications in statistics*. Wadworth Publising Company inc., California.
- Güler, N. (2022). On relations between BLUPs under two transformed linear random-effects models, *Commun. Stat.- Simul. Comput.*, 51(9), 5099–5125.
- Güler, N. (2024). Analysis of Optimal Prediction Under Stochastically Restricted Linear Model and Its Subsample Models, *Axioms*, 13 (12), 882.
- Güler, N., & Büyükkaya, M. E. (2019). Notes on comparison of covariance matrices of BLUPs under linear random-effects model with its two sub-sample models, *Iranian J. Sci. Tech. Transactions A*, 43, 2993–3002.
- Güler, N., & Büyükkaya, M. E. (2021). Rank and inertia formulas for covariance matrices of BLUPs in general linear mixed models, *Commun. Stat.- Theory Methods*, 50(21), 4997–5012.
- Güler, N., & Büyükkaya, M. E. (2022). Some remarks on comparison of predictors in seemingly unrelated linear mixed models, *Appl. Math.*, 67, 525–542.
- Güler, N., & Büyükkaya, M. E. (2023a). Inertia and rank approach in transformed linear mixed models for comparison of BLUPs. *Commun. Stat.-Theory Methods*, 52(9), 3108–3123.
- Güler, N., & Büyükkaya, M. E. (2023b). Statistical inference of a stochastically restricted linear mixed model, *AIMS Math.*, 8, 24401–24417.
- Güler, N., & Büyükkaya, M. E. (2024a). Further remarks on constrained over-parameterized linear models. *Stat. Pap.*, 65, 975–988.
- Güler, N., & Büyükkaya, M. E. (2024b). A matrix approach to determine optimal predictors in a constrained linear mixed model, *Open Mathematics*, 22 (1), 20240114.
- Güler, N., & Büyükkaya, M. E. (2025). *Advanced Mathematics for the Modeling and Solution of Challenging Problems in Engineering: Comparison for the Dispersion Matrices of BLUPs in an Over-Parameterized Linear Model and Its Related Models*. Springer.
- Güler, N., Puntanen, S., & Özdemir, H. (2014). On the BLUEs in two linear models via C. R. Rao's Pandora's Box. *Commun. Stat. - Theory Methods*, 43(5), 921–931.
- Hallum, C. R., Lewis, T. O., & Boullion, T. L. (1973). Estimation in the restricted general linear model with a positive semidefinite covariance matrix. *Communications in Statistics*, 1(2), 157–166.
- Harville, D. A. (1997). *Matrix algebra from a statisticians perspective*. Springer.

- Haslett, S. J., & Puntanen, S. (2010). Equality of BLUEs or BLUPs under two linear models using stochastic restrictions. *Stat. Pap.*, 51, 465–475.
- Haslett, S. J., & Puntanen, S. (2011). On the equality of the BLUPs under two linear mixed models. *Metrika*, 74(3), 381–395.
- Haupt, H., & Oberhofer, W. (2002). Fully restricted linear regression: a pedagogical note. *Econ. Bull.*, 3(1), 1–7.
- Hodges, J. S. (2014). *Richly Parameterized Linear Models: Additive, Time Series, and Spatial Models Using Random Effects*. CRC Press, Boca Raton.
- Isotalo, J., Puntanen, S., & Styan, G. P. H. (2007). Effect of adding regressors on the equality of the OLSE and BLUE. *Int. J. Stat. Sci.*, 6, 193–201.
- Jammalamadaka, S. R., & Sengupta, D. (2007). Inclusion and exclusion of data or parameters in the general linear model. *Stat. Probab. Lett.*, 77(12), 1235–1247.
- Jiang, B., & Tian, Y. (2023). Equivalence Analysis of Statistical Inference Results under True and Misspecified Multivariate Linear Models, *Mathematics*, 11 (1), 182.
- Jun, S. J., & Pinkse, J. (2009). Adding regressors to obtain efficiency. *Econom. Theory*, 25(1), 298–301.
- Kadiyala, K. (1986). Mixed regression estimator under misspecification. *Econ. Lett.*, 21(1), 27–30.
- Lange, K., Chi, E. C., & Zhou, H. (2014). A brief survey of modern optimization for statisticians. *Int. Stat. Rev.*, 82(1), 46–70.
- Li, W., Tian, Y., & Yuan, R. (2023). Statistical analysis of a linear regression model with restrictions and superfluous variables. *J. Ind. Manag. Optim.* 19(5), 3107–3127.
- Liu, X., & Wang, Q. W. (2013). Equality of the BLUPs under the mixed linear model when random components and errors are correlated. *J. Multivar. Anal.*, 116, 297–309.
- Lipschutz, S., & Lipson, M. (2008). *Schaum's Outline of Linear Algebra Fourth Edition*. McGraw-Hill Education
- Löwner, K. (1934). Über monotone Matrixfunktionen. *Math Z*, 38, 177–216.
- Lu, C., Gan, S., & Tian, Y. (2015). Some remarks on general linear model with new regressors. *Stat. Prob. Lett.*, 97, 16–24.
- Ma, R., & Tian, Y. (2022). A matrix approach to a general partitioned linear model with partial pa-rameter restrictions. *Linear Multilinear Algebra* 70(13), 2513–2532.
- Magnus, J. R., & Neudecker, H. (1988). *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. John Wiley. G. Britain.

- Marsaglia, G., & Styan, G. (1974). Equalities and inequalities for ranks of matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 2, 269–292.
- Mathew, T. (1983). A note on best linear unbiased estimation in the restricted general linear model. *Series Statistics*, 14(1), 3–6.
- Mitra, S. K., & Moore, B. J. (1973). Gauss–Markov estimation with an incorrect dispersion matrix. *Sankhya: Indian J. Stat.*, 35(2), 139–152.
- Öztürk, F., & Özbek, L. (2004). *Matematiksel Modelleme ve Simülasyon*. Ankara: Gazi Kitabevi.
- Penrose, R., (1955). A generalized inverse for matrices. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 51(3), 406–413.
- Puntanen, S., Styan, G. P. H., & Isotalo, J. (2011). *Matrix Tricks for Linear Statistical Models: Our Personal Top Twenty*. Heidelberg: Springer.
- Qian, H., & Tian, Y. (2006). Partially superfluous observations. *Econom. Theory*, 22(3), 529–536.
- Rao, C. R. (1973). Representations of best linear unbiased estimators in the Gauss–Markoff model with a singular dispersion matrix. *J Multivar. Anal.*, 3(3), 276–292.
- Ravikumar, B., Ray, S., & Savin, N. E. (2000). Robust wald tests in sur systems with adding-up restrictions. *Econometrica*, 68(3), 715–719.
- Ren, X. (2015). Corrigendum to “On the equivalence of the BLUEs under a general linear model and its restricted and stochastically restricted models” [Statist. Probab. Lett. 90 (2014) 1–10]. *Stat. Probab. Lett.*, 104, 181–185.
- Seber, G. A. F. (1977). *Linear regression analysis*. John Wiley, New York.
- Seber, G. A. F. (2008). *A matrix handbook for statisticians*. John Wiley & Sons, Inc. New Jersey.
- Sengupta, D., & Jammalamadaka, S. R. (2003). *Linear models an integrated approach*. World Scientific. Singapore.
- Taşçı, D. (2011). *Lineer Cebir*, 4. Baskı, Gazi Üniversitesi. Ankara.
- Tian, Y. (2010). Equalities and inequalities for inertias of Hermitian matrices with applications. *Linear Algebra Appl.*, 433(1), 263–296.
- Tian, Y. (2012). Solving optimization problems on ranks and inertias of some constrained nonlinear matrix functions via an algebraic linearization method. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, 75(2), 717–734.
- Tian, Y. (2013). On properties of BLUEs under general linear regression models. *J. Stat. Plan. Inference*, 143(4), 771–782.

- Tian, Y. (2015). A new derivation of BLUPs under random-effects model. *Metrika*, 78(8), 905–918.
- Tian, Y. (2017). Matrix rank and inertia formulas in the analysis of general linear models. *Open Math.*, 15(1), 126–150.
- Tian, Y., Beisiegel, M., Dagenais, E., & Haines, C. (2008). On the natural restrictions in the singular Gauss–Markov model. *Stat. Pap.*, 49(3), 553–564.
- Tian, Y., & Guo, W. (2016). On comparison of dispersion matrices of estimators under a constrained linear model. *Stat Methods Appl.*, 25(4), 623–649.
- Tian, Y., & Jiang, B. (2016). Matrix rank/inertia formulas for least-squares solutions with statistical applications. *Spec. Matrices*, 4(1), 130–140.
- Tian, Y., & Jiang, B. (2017). A new analysis of the relationships between a general linear model and its mis-specified forms. *J. Korean Stat. Soc.*, 46(2), 182–193.
- Tian, Y., & Wang, J. (2020). Some remarks on fundamental formulas and facts in the statistical analysis of a constrained general linear model, *Comm. Statist.TheoryMethods* 49 (5), 1201–1216.
- Türk Dil Kurumu Sözlükleri (2025). *Güncel Türkçe Sözlük*.
- Türkay, M. (2023). *Optimizasyon modelleri ve çözüm metodları*. (19 Temmuz 2023: <http://home.ku.edu.tr/~mturkay/indr501/Optimizasyon.pdf>)
- Torunbalcı Aydın, F. (2017). *Lineer Cebir*. 2. Basım, Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.
- Venit, S., & Bishop, W. (1985). *Elementary linear algebra*. PWS publishers. Massachusetts.
- Wijekoon, P., & Trenkler, G. (1989). Mean square error matrix superiority of estimators under linear restrictions and misspecification. *Econ. Lett.*, 30(2), 141–149.
- Williams, H. P. (1999). *Model Building in Mathematical Programming*. 4th edition, New York: Wiley.
- Zyskind, G. (1967). On canonical forms, non-negative covariance matrices and best and simple least squares linear estimators in linear models. *Ann. Math. Stat.*, 38(4), 1092–1109.

ÖZGEÇMİŞ

Melek Eriş Büyükkaya, İlk okul, ortaokul ve lise eğitimini İstanbul’ da tamamladı. 2009 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’ nde lisans eğitime başladı ve buradan 2013 yılında bölüm birincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı’nda başladığı lisansüstü eğitimini 2019 yılında doktor derecesi ile tamamladı.

2015 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başlayan Melek Eriş Büyükkaya, aynı üniversitenin İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı’nda yüksek lisans programına kaydoldu ve 2019 yılında bu programı tamamladı. Halen aynı anabilim dalında doktora programına devam etmekte ve akademik çalışmalarını sürdürmektedir.

Evli ve bir çocuk annesi olan Melek Eriş Büyükkaya, iyi derecede İngilizce bilmektedir.