

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMA LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
ÇİZELGE LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER	3
2.1 Ön Bilgiler	3
2.2 Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm(Transform)	8
2.3 İki Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm(Transform)	11
3. TEK DEĞİŞKENLİ PADE YAKLAŞIMLARI	17
3.1 Padé Yaklaşımının Hesaplanması.....	21
3.2 Padé Tablosu	23
4. ÇOK DEĞİŞKENLİ PADE YAKLAŞIMLARI	30
5. UYGULAMALAR	38
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	65
KAYNAKLAR.....	66
ÖZGEÇMİŞ.....	68

KISALTMA LİSTESİ

DCD	Diferensiyel Cebirsel Denklem
DT	Diferensiyel Transform
DT	Differential Transform
DTM	Diferensiyel Transform Metodu
DTM	Differential Transform Method
KDD	Kısmi Diferensiyel Denklem
PY	Padé Yaklaşımları

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1	$f(x) = \sqrt{(1 + \frac{x}{2})/(1 + 2x)}$ ve $f(x)$ in $[1/1]$ Padé yaklaşımı	27
Şekil 3.2	$f(x) = e^{-x}$ fonksiyonu, $P_5(x)$ Taylor serisi ve $r(x)$ Padé yaklaşımı.	29
Şekil 4.1	$f(x, y) = 1 + (x/0.1 - y) + \sin(xy)$ fonksiyonu.....	36
Şekil 4.2	$f(x, y)$ 'nin $P_3(x, y) = 1 + 10x + 101xy + 1000xy^2$ Taylor açılımı	36
Şekil 4.3	$r_{1,1}(x, y) = (1 + 10x - 10.1y/1 - 10.1y)$ Padé yaklaşımı.	37
Şekil 5.1	$f_1(x) = v_1(x) = e^{-x} + x \sin x$, $T(v_1(x))$ DT ve $r_{3,2}(x)$ PY	40
Şekil 5.2	$f_2(x) = v_2(x) = \sin x$, $T(v_2(x))$ DT ve $r_{5,4}(x)$ PY	41
Şekil 5.3	$f_3(x, t) = u(x, t) = 4/5(e^{(x+t/4)} - e^{(x-t)}) + x^2 + t^2/4$ analitik çözümü.....	48
Şekil 5.4	$T(u(x, t)) = t + x^2 + tx - (1/8)t^2 + (1/2)tx^2 + (13/96)t^3$ DT çözümü	48
Şekil 5.5	$T(u(x, t))$ DT çözümünün $r_{3,2}(x, t)$ PY.....	49
Şekil 5.6	$f_4(x, t) = u(x, t) = e^x \cosh t + e^{-x} \sinh t$ analitik çözümü.....	57
Şekil 5.7	$T_1(u(x, t))$ DT çözümü	57
Şekil 5.8	$T_1(u(x, t))$ DT çözümünün $r_{3,2}(x, t)$ PY.....	58
Şekil 5.9	$g(x, t) = v(x, t) = e^{-x} \cosh t - e^x \sinh t$ analitik çözümü	63
Şekil 5.10	$T_1(v(x))$ DT çözümü	63
Şekil 5.11	$T_1(v(x))$ DT çözümünün $r_{3,2}(x, t)$ PY	64

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 2.1 Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm (transform) metodunun temel işlemleri	9
Çizelge 3.1 Padé tablosu	23
Çizelge 3.2 e^{-x} 'in Padé yaklaşımının bir kısmı	24
Çizelge 3.3 e^x 'in Padé yaklaşımının bir kısmı	25
Çizelge 3.4 $f(x) = e^{-x}$, $P_5(x)$ ve $r(x)$ 'in değerleri	28
Çizelge 5.1 $f_1(x) = v_1(x) = e^{-x} + x \sin x$, $T(v_1(x))$ ve $r_{3,2}(x)$ değerleri	39
Çizelge 5.3 $f_3(x, t) = 4/5(e^{(x+t/4)} - e^{(x-t)}) + x^2 + t^2 / 4$, $T(u(x, t))$ ve $r_{3,2}(x, t)$ değerleri.....	47
Çizelge 5.4 $f_4(x, t) = u(x, t) = e^x \cosh t + e^{-x} \sinh t$, $T_1(u(x, t))$ ve $r_{3,2}(x, t)$ değerleri	56
Çizelge 5.5 $g(x, t) = v(x, t) = e^{-x} \cosh t - e^x \sinh t$, $T_1(v(x, t))$ ve $r_{3,2}(x, t)$ değerleri	62

ÖNSÖZ

Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne bağlı Matematik anabilim dalında hazırlanan bu yüksek lisans tezi altı bölümden meydana gelmektedir.

Birinci bölüm giriş bölümü olup, basit anlamda çalışmanın konusunu özetlemekte, amaç ve yönteme ışık tutmaktadır. İkinci bölüm, asıl ele alınacak konu olan çok değişkenli Padé yaklaşımlarına hazırlık niteliğindeki ön bilgilerden oluşmakta, üçüncü bölüm ise asıl konunun daha iyi anlaşılmasını sağlayan tek değişkenli Padé yaklaşımlarını ele almaktadır. Dördüncü bölüm ise asıl konumuz olan çok değişkenli Padé yaklaşımlarını ele almaktadır. Beşinci bölüm ise, uygulamalar kısmı olup, Padé yaklaşımları ve DTM'nin karşılaştırmalarına yönelik uygulamaları kapsamaktadır. Altıncı bölümde ise, bir önceki bölümde yapılan uygulamalar göz önünde tutularak yapılan karşılaştırmalara ait sonuç ve tartışma yer almaktadır.

Bu çalışma esnasında katkılarını esirgemeyen Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik bölümü öğretim üyeleri Yrd.Doç.Dr.Ercan Çelik ve Prof.Dr. Mustafa bayram ile Fatih Üniversitesi misafir öğretim üyesi Prof.Dr.Alexey Lukashov ve benden maddi ve manevi yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen ağabeyim Prof.Dr.Abdulmecit Turut'a sonsuz teşekkürlerimle...

Veyis TURUT

ÖZET

Diferensiyel denklem sistemlerinin çözümü için çeşitli nümerik metotlar mevcuttur. Bunlardan birisi de Padé yaklaşımlarıdır. Padé yaklaşımlarının genellikle bir çok nümerik metottan üstün olduğu bilinmektedir. Bu tezde, bu üstünlüğü göstermek için Padé yaklaşımları ve diferensiyel transform metodu(DTM) karşılaştırıldı. Bu karşılaştırma özellikle çok değişkenli Padé yaklaşımları ve iki boyutlu DTM arasında yapıldı. Bazı diferensiyel cebirsel denklemler(DCD) ve kısmi diferensiyel denklemler(KDD) iki boyutlu DTM ile çözüldü. Bu çözümlere ait tek ve çok değişkenli Padé yaklaşımları, DTM ile bulunan çözümlerle karşılaştırıldı. Sonuç olarak, tek ve çok değişkenli Padé yaklaşımlarının sırasıyla bir ve iki boyutlu DTM'den üstün bir yaklaşıma sahip olduğu görüldü.

Anahtar Kelimeler: Tek değişkenli Padé yaklaşımları, Çok değişkenli Padé yaklaşımları, Bir boyutlu diferensiyel transform metodu(DTM), İki boyutlu diferensiyel transform metodu(DTM), Kısmi diferensiyel denklemler(KDD), Diferensiyel cebirsel denklemler(DCD).

ABSTRACT

A variety of numerical methods are available for the solution of systems of differential equations. One of them is Padé approximants. It is known that Padé approximants are usually superior to many numerical methods. In this thesis, to show this superiority Padé approximants and Differential transform method(DTM) were compared. This comparison especially was made between two-dimensional transform method and multivariate Padé approximants. Some differential-algebraic equations(DAE) and partial differential equations(PDE) were solved by using DTM. The univariate and multivariate Padé approximants of this solutions were compared to solutions that found by DTM . As a result, it was seen that univariate and multivariate Padé approximants are respectively superior to one-dimensional and two-dimensional DTM.

Keywords: Univariate Padé approximants, Multivariate Padé approximants, One-dimensional differential transform method(DTM), Two-dimensional differential transform method(DTM), Partial differential equations(PDE), Differential-Algebraic equations(DAE).

1. GİRİŞ

Öklid algoritması ve sürekli kesirlere bağlı olarak ortaya çıkan ve geliştirilen Padé yaklaşımlarının geçmişi çok eskidir. Henri Eugène Padé tarafından kullanılan şekliyle günümüze ulaşana kadar bir çok ünlü matematikçi farklı problemlere çözüm bulabilmek amacıyla Padé yaklaşımlarını kullandı. Euler, C.G.J. Jacobi, Michell Rolle, Georg Ferdinand Frobenius, Jean Darboux ve Daniel Bernoulli gibi matematikçiler tarafından matematiğin farklı alanlarında farklı problemlere çözüm bulabilmek için kullanıldı(Brezinski, 1991).

Günümüzde yaygın bir şekilde Padé yaklaşımları diferensiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde, kuvvet serilerinin analitik devam problemlerinde, ortogonal polinomlar üzerinde çalışılmasında (Markov fonksiyonları için Padé denklemlerinde payda denkleminin ortogonal olduğu bilinmektedir), kuvvet serilerine ait singüleritenin, sıfır noktalarının, köklerin ve kutup notalarının bulunmasında kullanılır.

Padé yaklaşımlarının diğer nümerik yaklaşımlara göre daha iyi sonuçlar vermesi, bu yaklaşıma olan ilgiyi artırdı ve sadece matematikte değil, fizikte, kimyada, astronomide ve daha farklı bilimsel alanlarda kullanılmasına yol açtı.

Tek değişkenli Padé yaklaşımları üzerine birçok çalışma yapılmasına rağmen, çok değişkenli Padé yaklaşımları üzerine yapılan çalışma sayısı oldukça sınırlıdır. Çok değişkenli Padé yaklaşımlarının tanımı ilk kez 1973 te J.S.R. Chisholm tarafından, daha genel tanımlama ise Levin tarafından yapılmıştır. Teorisini ve temel kavramlarını işleyen ilk kapsamlı makale ise 1983 te Annie Cuyt tarafından yayınlanmıştır(Guillaume ve Huard, 2000). Tek değişkenlilerin birçok özelliği açıklığa kavuşturulmasına rağmen, çok değişkenliler için yapılan çalışmalar çok sınırlıdır. Fakat çok değişkenli Pade yaklaşımlarının, tek değişkenli Padé yaklaşımlarının birçok özelliğini kapsadığını söylemek mümkündür.

Bir çok çalışmada tek değişkenli Padé yaklaşımları ile diğer nümerik yaklaşımlar kıyaslandığında , Padé yaklaşımlarının daha iyi bir yaklaşım sergilediği bilinmektedir. Fakat çok değişkenli Padé yaklaşımları için literatürde, diğer nümerik yaklaşımlarla yapılan karşılaştırmaları kapsayan araştırmalara rastlamak hemen hemen mümkün değildir.

Çalışmamızda Padé yaklaşımlarını, diferensiyel transform metoduyla (DTM) çözülen diferensiyel cebirsel denklem (DCD) ve kısmi diferensiyel denklem (KDD) çözümleriyle karşılaştırdık. Bunu hem tek değişkenliler hem de çok değişkenliler için yaptık. Ayrıca Padé yaklaşımlarını kısa da olsa Taylor serileriyle kıyasladık.

DTM diferensiyel denklemlerin çözümünü elde etmek için kullanılan nümerik bir metottur. Bu metot ilk kez Zhou tarafından elektirik devre analizindeki lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemleri için uygulandı(Ayaz, 2003).

DTM ile çözülmesi istenen diferensiyel denklemin seri çözümü bulunur. Ama bulunan çözüm, serinin çok sınırlı kısmi toplamlarını kapsar. Metot olarak, pratik olduğu söylenebilir. Fakat Padé yaklaşımları ile kıyaslandığında, Padé yaklaşımlarının DTM den daha iyi yaklaşım sergilediği çalışmamız incelendiğinde rahatlıkla fark edilebilir.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1 Ön Bilgiler

Bu kısımda, araştırmamızdaki teorik boşlukları doldurması amacıyla tezde kullanılan bazı temel kavramlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1: Bir bağımsız değişken ile bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini ihtiva eden denkleme diferensiyel denklem denir. Bu tür denklemler en genel olarak

$$f(x, y, y', y'', \dots, y, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $y^{(n)}$, y 'nin x 'e göre n 'yinci türevidir. (2.1) denklemi $y^{(n)}$ ye göre çözülürse

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

elde edilir. Bu da (2.1) in açık formda yazılmış şeklidir.

Tanım 2.2: $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$

şeklindeki denklemlere lineer diferensiyel denklem denir. Görüldüğü gibi eşitliğin sağ tarafındaki r ve sol tarafta ki $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ katsayıları x değişkenine bağlıdır(Kreyszig,1993).

Tanım 2.3: Bir bağımlı değişken(bilinmeyen fonksiyon) ile iki veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini ihtiva eden bir bağıntıya kısmi diferensiyel denklem denir. Bu tanıma göre z bağımlı ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımsız değişkenler olmak üzere,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, z_{x_1}, z_{x_2}, \dots, z_{x_n}, z_{x_1x_1}, \dots) = 0 \quad (2.3)$$

bağıntısı bir bağımlı ve n – bağımsız değişkenli kısmi diferensiyel denklemdir.Örneğin,

$$xz_x - yz_y = xzy$$

$$z_{xxx} - zz_y + z^2 = 0$$

birer kısmi diferensiyel denklemdirler.

Tanım 2.4: Eğer (2.3) kısmi diferensiyel denklemindeki F fonksiyonu bağımlı değişken ve onun kısmi türevlerine göre lineer ise bu denkleme lineer kısmi diferensiyel denklem denir.

$$xz_x - yz_y = xzy$$

denklemini lineer kısmi diferensiyel denklemdir (Bayram, 2001).

Tanım 2.5: Diferensiyel cebirsel denklem sistemi başlangıç değeri ile birlikte

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0 \quad (2.4)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0$$

formundadır. (2.4) denklemine genel non-lineer kapalı (implicit) differensiyel cebirsel denklem denir. Burada $F \in R^n, y \in R^n$ ve $t \in R$ dir. Diferensiyel cebirsel denklem açık olarak

$$F(y', y, x, t) = 0$$

$$G(y, x, t) = 0$$

şeklinde yazılabilir. (2.4) kısmında görüldüğü gibi diferensiyel cebirsel denklemler üzerinde cebirsel kısıtlamalar vardır. Burada y diferensiyel değişkenin ve x de cebirsel değişkenin vektörleridir (Çelik, 2002).

Tanım 2.6: m yinci dereceden bir

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

polinomunu göz önüne alalım. Bu polinomun sıfıra eşit kılınmasıyla yazılan

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

şeklinde ki denkleme cebirsel denklem denir. Pozitif m tamsayısına $f(x) = 0$ denkleminin derecesi denir. $f(x)$ polinomunda $f(x_i) = 0$ denklemini sağlayan

x_i ye denklemin kökü denir.

Tanım 2.7: $c_i, b \in R$ ve x_i 'lerde değişkenler olmak üzere,

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = b$$

şeklinde ki bir ifadeye lineer denklem denir.

$a_{ij}, b_i \in R$ ve x_i bilinmeyenler olmak üzere,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

şeklinde ki bir ifadeye lineer denklem sistemi adı verilir. Burada

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

matrisine sistemin katsayılar matrisi ve

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{ile} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

matrislerine de, sırası ile sistemin ikinci yanı ve bilinmeyenler matrisi denir.

$$[A : B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

matrisine de sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi denir.

Yukarıdaki lineer denklem sistemini, matrisle $Ax = B$ şeklinde gösterebiliriz. Bir lineer denklem sisteminde, sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi üzerinde yapılan elementer satır işlemleri, sistemin çözümünü değiştirmez. Yani;

i) Herhangi iki denklemin yeri değiştirilirse,

ii) Herhangi bir denklemin her iki yanı sıfırdan farklı bir skalerle çarpılırsa,

iii) Herhangi bir denklemin her iki yanı, herhangi bir skalerle çarpıldıktan

sonra başka bir denklemle taraf tarafa toplanırsa sistemin çözümleri aynı kalır. Bu sebepten, $[A:B]$ genişletilmiş katsayılar matrisini eşelon forma getirerek çözümler bulunabilir. Bu metotla sistemi çözmeye Gaus-Jordan yok etme ve katsayılar matrisini indirgenmiş eşelon forma getirerek çözmeye de Gauss-Jordan indirgeme adı verilir.

Tanım 2.8: A $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $|A| \neq 0$ ise A matrisine (tersi mevcut ise) non-singüler (regüler) matris, $|A| = 0$ ise A matrisine (tersi mevcut olmayan) singüler (regüler olmayan) matris denir.

Tanım 2.9: A , n . mertebeden bir regüler matris ($|A| \neq 0$) ise $Ax = B$ lineer denklem sisteminin tek çözümü var ve bu çözüm

$$x = A^{-1}B,$$

eşitliği ile verilir. Burada anlatılmak istenen,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümü; Δ , A matrisinin determinanı olmak üzere,

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_2 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_2 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

determinantları hesaplanır ve tek çözüm olan,

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$$

olarak değerleri bulunur. Lineer $Ax = B$ denklemini çözmek için uygulanan bu kurala Cramer Kuralı denir.

Tanım 2.10: a pozitif bir reel sayı ve $a \neq 1$ olmak üzere ,

$$f: R \longrightarrow R, f(x) = a^x$$

fonksiyonuna üstel fonksiyon, a yada üstel fonksiyonun tabanı denir.

Tanım 2.11: Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ de her mertebeden türevi varsa ,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n + \dots$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun $x_0 = c$ deki Taylor serisi denir. Eğer $c = 0$ alınırsa bu seriye $f(x)$ fonksiyonunun Maclauren serisi adı verilir.

Tanım 2.12: x bir değişken ve c bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n + \dots$$

serisine c merkezli kuvvet serisi denir. Eğer bu tanımda $c = 0$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

elde edilir. Ayrıca $x = c$ olması durumunda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 \text{ olur.}$$

2.2 Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm(Transform)

Bir $y(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (2.5)$$

(2.5) denkleminde $y(x)$ asıl(orijinal) fonksiyon, $Y(k)$ da T – *fonksiyonu* olarak adlandırılan dönüşüm fonksiyonudur(Bildik ve Konuralp, 2006).

$Y(k)$ 'nın diferensiyel ters dönüşümü,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (2.6)$$

olarak tanımlanır.(2.5) ve (2.6) denklemlerinden

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (2.7)$$

elde edilir.(2.7) denklemi diferensiyel dönüşümün(transformun) Taylor serisi açılımından türetildiği düşüncesini akla getirmektedir. Fakat bu metot sembolik olarak türevleri hesaplamamaktadır. Bununla beraber, hesaplamalar için gerekli türevler, aşağıdaki çizelge 2.1 de görüldüğü gibi asıl(orijinal) fonksiyonların dönüşüm denklemleri olarak tarif edilen bir iteratif yöntemle hesaplanırlar(Ayaz, 2003).

Yukarıdaki (2.5) ve(2.6) denklemlerinin tanımlarından, Çizelge 2.1 deki temel matematiksel işlemlerin dönüşüm fonksiyonlarıyla uyduğu kolaylıkla görülebilir ve kanıtlanabilir. Uygulamalarda, $y(x)$ fonksiyonu sonlu bir seriyle ifade edilir ve (2.6) denklemi

$$y(x) = \sum_{k=0}^m x^k Y(k) \quad (2.8)$$

olarak yazılabilir. (2.8) denklemi ile $\sum_{k=m+1}^{\infty} x^k Y(k)$ ifadesinin ihmal edilebilecek kadar küçük olduğu açıkça görülmektedir.(Ayaz, 2003).

Çizelge 2.1 Bir boyutlu diferensiyel dönüşüm (transform) metodunun temel işlemleri

Asıl(Orijinal) fonksiyon	Dönüşüm(Transform) fonksiyonu
$y(x) = u(x) \pm v(x)$	$Y(k) = U(k) \pm V(k)$
$y(x) = cw(x)$	$Y(k) = cW(k)$
$y(x) = dw/dx$	$Y(k) = (k+1)W(k+1)$
$y(x) = d^j w/dx^j$	$Y(k) = (k+1)(k+2)\cdots(k+j)W(k+j)$
$y(x) = u(x)v(x)$	$Y(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$
$y(x) = x^j$	$Y(k) = \delta(k-j) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$

Örnek 2.3.1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -(1+x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

diferensiyel cebirsel denklemini ve

$$\begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{v}_1(0) \\ \dot{v}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

başlangıç değerlerini göz önüne alalım.(2.9) denklemi,

$$v_1'(x) - xv_2'(x) + v_1(x) - xv_2(x) = 0 \quad (2.11)$$

$$v_2(x) = \sin x \quad (2.12)$$

şeklinde yazılabilir.

Çizelge (2.1)'deki diferensiyel dönüşüm(transform) metodonun temel özelliklerini kullanarak ve (2.11) ve (2.12) denklemlerinin dönüşümünü(transformunu) alarak;

$$V_1(k+1) = \frac{1}{(k+1)} \left[\sum_{r=0}^k (k-r+1) \delta(r-1) V_2(k-r+1) - V_1(k) + V_2(k) + \sum_{r=0}^k \delta(r-1) V_2(k-r) \right], \quad (2.13)$$

$$v_2(x) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!} x^k \quad (2.14)$$

elde edilir. (2.13) denkleminde $k = 0, 1, \dots, m$ değerleri için $V_1(k)$ serisinin katsayıları

$$V_1(1) = -1, V_1(2) = \frac{3}{2!}, V_1(3) = -\frac{1}{3!}, V_1(4) = -\frac{3}{4!}, V_1(5) = -\frac{1}{5!}, V_1(6) = -\frac{7}{6!},$$

$$V_2(1) = 1, V_2(2) = 0, V_2(3) = \frac{1}{3!}, V_2(4) = 0, V_2(5) = \frac{1}{5!}, V_2(6) = 0, V_2(7) = -\frac{1}{7!}, V_2(8) = 0 \dots$$

bulunur ve aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

$$V_1(k) = \begin{cases} -\frac{1}{k!}, & k \text{ tek ise,} \\ \frac{k+1}{k!}, & k \text{ çift ve } \frac{k+2}{2} \text{ çift ise,} \\ -\frac{(k-1)}{k!}, & k \text{ çift ve } \frac{k+2}{2} \text{ tek ise,} \end{cases} \quad (2.15)$$

$$V_2(k) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!}, & k \text{ tek ise,} \\ 0, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

(2.16)

$V_1(k)$ ve $V_2(k)$ değerleri (2.6) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$v_1(x) = 1 - x + \frac{3}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \dots \quad (2.17)$$

$$v_2(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots \quad (2.18)$$

sonuçları elde edilir. Analitik çözüm ise aşağıdaki gibidir,

$$\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} + x \sin x \\ \sin x \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

2.3 İki Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm(Transform)

İki boyutlu diferensiyel dönüşüme(taransform) ait temel tanımlar ve teoremler aşağıdaki gibidir:

$w(x, y)$ asıl(orijinal) fonksiyon olmak üzere,

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{0,0} \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlanan $W(k, h)$ fonksiyonuna dönüşüm(transfom) fonksiyonu denir. $W(k, h)$

T - *fonksiyonu* olarak adlandırılır. $W(k, h)$ 'ın diferensiyel ters dönüşümü ise,

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) x^k y^h \quad (2.21)$$

olarak tanımlanır.(2.20) ve (2.21) denklemlerinden

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{0,0} x^k y^h \quad (2.22)$$

denklemini elde edilir.

Teorem 2.4.1:

Eğer $w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$ ise,

$$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h) \quad (2.23)$$

olur. (Ayaz, 2004a)

Teorem 2.4.2:

Eğer $w(x, y) = cu(x, y)$ ise, $(c : \text{sabit})$

$$W(k, h) = cU(k, h) \quad (2.24)$$

olur. (Ayaz, 2004a)

Teorem 2.4.3:

Eğer $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ ise,

$$W(k, h) = (k+1)U(k+1, h) \quad (2.25)$$

olur. (Ayaz, 2004a)

Teorem 2.4.4:

Eğer $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ ise,

$$W(k, h) = (h+1)U(k, h+1) \quad (2.26)$$

olur. (Ayaz, 2004a)

Teorem 2.4.5:

Eğer $w(x, y) = \frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$ ise,

$$W(k, h) = (k+1)(k+2) \cdots (k+r)(h+1)(h+2) \cdots (h+s) \times U(k+r, h+s) \quad (2.27)$$

olur. (Ayaz, 2004a)

Teorem 2.4.6:

Eğer $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)$ ise,

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s) V(k-r, s) \quad (2.28)$$

olur. (Ayaz, 2004a)

Teorem 2.4.7:

Eğer $w(x, y) = x^m y^n$ ise,

$$W(k, h) = \delta(k-m, h-n) = \begin{cases} 1, & k=m \text{ ve } h=n, \\ 0, & k \neq m \text{ ve } h \neq n, \end{cases} \quad (2.29)$$

olur. (Ayaz, 2004a)

Teorem 2.4.8:

Eğer $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$ ise,

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1) U(r+1, h-s) V(k-r+1, s) \quad (2.30)$$

olur. (Ayaz, 2004a)

Teorem 2.4.9:

Eğer $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$ ise,

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (s+1)(h-s+1) U(r, h-s+1) V(k-r, s+1) \quad (2.31)$$

olur. (Ayaz, 2004a)

Teorem 2.4.10:

$$\text{Eğer } w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \text{ ise,}$$

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s)V(r, h-s+1) \quad (2.32)$$

olur. (Ayaz, 2004a)

Theorem 2.4.11:

$$\text{Eğer } w(x, y) = u(x, y)v(x, y)w(x, y) \text{ ise,}$$

$$w(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U(r, h-s-p)V(t, s)\Omega(k-r-t, p) \quad (2.33)$$

olur. (Ayaz, 2004a)

Theorem 2.4.12:

$$\text{Eğer } w(x, y) = u(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \text{ ise,}$$

$$w(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (t+1)(k-r-t+1)U(r, h-s-p) \\ \times V(t+1, s)\Omega(k-r-t+1, p) \quad (2.34)$$

olur. (Ayaz, 2004a)

Theorem 2.4.13:

$$\text{Eğer } w(x, y) = u(x, y)v(x, y) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \text{ ise,}$$

$$w(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+2)(k-r-t+1)U(r, h-s-p) \\ \times V(t, s)\Omega(k-r-t+2, p) \quad (2.35)$$

olur. (Ayaz, 2004a)

Şimdi iki boyutlu diferensiyel transform metoduyla, bir kısmi diferensiyel denklemin nasıl çözüldüğüne bir örnek verelim.

Örnek 2.4.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.36)$$

$$(x, 0) = \frac{1}{c} x^2, \quad x > 0, \quad c > 0, \quad (c : \text{keyfi sabit}) \quad (2.37)$$

Yukarıda (2.37) başlangıç değer şartıyla verilen (2.36) kısmi diferensiyel denklemini göz önüne alalım. İki boyutlu diferensiyel transformun temel işlemlerine göre (2.36) denkleminin iki boyutlu transformunu alırsak,

$$\begin{aligned} (h+1)U(k, h+1) &= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s) \\ &\quad \times U(k-r+1, s) + \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(k-r+2) \\ &\quad \times U(r, h-s)U(k-r+2, s). \end{aligned} \quad (2.38)$$

elde edilir. (2.37) başlangıç şartını (2.38) denkleminde uygularsak,

$$U(i, 0) = 0, \quad i = 0, 1, 3, \dots, m, \quad (2.39)$$

$$U(2, 0) = \frac{1}{c}. \quad (2.40)$$

elde edilir. (2.39) ve (2.40) denklemlerini (2.38) de yerine yazarsak, $m \rightarrow \infty$ durumu göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} U(2, 1) &= \frac{6}{c^2}, \\ U(2, 2) &= \frac{36}{c^3}, \\ U(2, 3) &= \frac{216}{c^4}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

elde edilir. Bütün $W(k, h)$ değerlerini (2.21) denkleminde yerine yazarsak,

$$u(x,t) = x^2 \left(\frac{1}{c} + \frac{6}{c^2}t + \frac{36}{c^3}t^2 + \frac{216}{c^4}t^3 + \dots \right). \quad (2.42)$$

elde edilir. Elde edilen çözüme ait analitik çözüm

$$u(x,t) = x^2 \left(\frac{1}{c-6t} \right). \quad (2.43)$$

şeklindedir.

3. TEK DEĞİŞKENLİ PADE YAKLAŞIMLARI

f fonksiyonu $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ yani;

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad (c_0 \neq 0) \quad (3.1)$$

şeklinde bir kuvvet serisiyle temsil edilsin. Bu durumda bu kuvvet serisinin Padé yaklaşımı

$$[m/n] = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n} \quad (3.2)$$

şeklinde bir rasyonel fonksiyondur (polinomların oranı). Payın derecesi m , paydanın derecesi n dir. (3.2) de $m+1$ tane payın katsayısı ve $n+1$ tane de paydanın katsayısı vardır. Burada (3.2)'nin paydasının tanımsız olmaması için $b_0 = 1$ alınmalıdır. Bu seçimle (3.2)'nin payının $m+1$ tane bağımsız katsayısı ve paydasının n tane bağımsız katsayısı olur. Tüm yaklaşımda $m+n+1$ tane bilinmeyen katsayı vardır. $[m/n]$, (3.1)'deki kuvvet serisinin ilk $m+n+1$ terimine karşılık gelir (Baker ve Grave-Morris, 1996). (3.1)'deki

$$1, x, x^2, \dots, x^{m+n}$$

$m+n$ dereceli kuvvet serisine karşılık gelen Padé yaklaşımını

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n} + O(x^{m+n+1}) \quad (3.3)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.3) denkleminde içler dışlar çarpımı yapılsa

$$(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n)(c_0 + c_1x + \dots) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m + O(x^{m+n+1}) \quad (3.4)$$

elde edilir. (3.4) denklemindeki $x^{m+1}, x^{m+2}, \dots, x^{m+n}$ katsayılarının eşitliğinden

$$\begin{aligned}
b_n c_{m-n+1} + b_{n-1} c_{m-n+2} + \cdots + b_0 c_{m+1} &= 0 \\
b_n c_{m-n+2} + b_{n-1} c_{m-n+3} + \cdots + b_0 c_{m+2} &= 0 \\
&\vdots \\
b_n c_m + b_{n-1} c_{m+1} + \cdots + b_0 c_{m+n} &= 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

sistemi elde edilir. $b_0 = 1$ olduğu için, (3.5) denklemi n tane lineer denklemden oluşur.

Yani;

$$\begin{bmatrix} c_{m-n+1} & c_{m-n+2} & c_{m-n+3} & \cdots & c_m \\ c_{m-n+2} & c_{m-n+3} & c_{m-n+4} & \cdots & c_{m+1} \\ c_{m-n+2} & c_{m-n+4} & c_{m-n+5} & \cdots & c_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_m & c_{m+1} & c_{m+2} & & c_{m+n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{m+1} \\ c_{m+2} \\ c_{m+3} \\ \vdots \\ c_{m+n} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

olur. Buradan b_i katsayıları bulunur. Diğer yandan (3.3) denkleminde payın

katsayıları olan $a_0, a_1, \dots, a_m$ katsayıları $1, x, x^2, \dots, x^m$ terimlerin katsayılarının eşitliğinden

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_0 \\
a_1 &= c_1 + b_1 c_0 \\
a_2 &= c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\
&\vdots \\
a_m &= c_m + \sum_{i=1}^{\min(m,n)} b_i c_{m-i}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

olarak bulunur. Böylece (3.6) ve (3.7) denklemleri Padé yaklaşımının pay ve paydası olarak tanımlanır. Dolayısıyla bu denklemlere Padé denklemleri denir. Padé yaklaşımının hesaplanmasında görülecektir ki, Padé denklemleri katsayılar hesaplanmadan (3.8) de ki

$$p(x) = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^m c_i x^i & x \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i & \cdots & x^n \sum_{i=0}^{m-n} c_i x^i \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix}, \quad q(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^n \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

denklemleriyle de elde edilebilir . Bu denklemler yardımıyla x^{m+n} yinci dereceden $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ kuvvet serisine karşılık gelen $[m/n]$ Padé yaklaşımı oluşturulur.Yani verilen $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ kuvvet serisini keyfi dereceden Maclaurin serisine dönüştürerek,bu serinin keyfi Padé yaklaşımı (serisi) oluşturulur.(Bundan sonra p ve q 'nün kesin polinomsal dereceleri ∂ ile,seri içerisindeki dereceleri ω ile gösterilecektir)

Yani bir $f(x)$ fonksiyonu için $[m/n]_f(x)$ Padé yaklaşımı problemi; Padé yaklaşımında pay ve payda polinomları olan

$$p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \quad \text{ve} \quad q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

polinomlarını bulmayı içerir. Yani ,

$$[m/n]_f(x) = \frac{p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i}{q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i} \quad \text{olur.}$$

(3.3) ifadesinde, yapılan içler dışlar çarpımıyla elde edilen (3.5) ve (3.7) denklemlerinde

$[m/n]_f(x)$ bulunurken ;

$$\begin{aligned} \partial(p) &\leq m \\ \partial(q) &\leq n \\ \omega(fq - p) &\geq m + n + 1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

durumu söz konusudur.

Teorem 3.1: Eğer p_1, q_1 ve p_2, q_2 polinomları (3.9) durumunu sağlarsa bu durumda $p_1.q_2 = p_2.q_1$ olur.

İspat 3.1: $p_1.q_2 - p_2.q_1$ ifadesi $(fq_2 - p_2)q_1 - (fq_1 - p_1)q_2$ şeklinde de yazılabilir.(3.9) durumundan

$$\left. \begin{array}{l} \omega(fq_1 - p_1) \geq m + n + 1 \\ \omega(fq_2 - p_2) \geq m + n + 1 \end{array} \right\} \text{ olduğundan}$$

Buradan $\omega(p_1.q_2 - p_2.q_1) \geq m + n + 1$ elde edilir. Fakat $(p_1q_2 - p_2q_1)(x)$ polinomunun derecesi en fazla $m + n$ olacağından, $p_1.q_2 - p_2.q_1$ olur.

Teorem 3.1'in bir sonucu olarak, p_1/q_1 ve p_2/q_2 rasyonel ifadeleri birbirine denktir.

Çalışmamızda şimdiye kadar sadece orijin merkezli kuvvet serileri için Padé yaklaşımının tanımını verdik. Orijin merkezli olmayan ve herhangi bir nokta merkez alınarak ta Padé yaklaşımı tanımlanabilir. Aşağıdaki şekilde tanımlanan;

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x - x_0)^i \quad (c_0 \neq 0)$$

kompleks uzayda x_0 merkezli bir kuvvet serisi olsun. Bu kuvvet serisi için (m, n) dereceli Padé yaklaşımını bulmak mümkündür. Orijin merkezli kuvvet serilerinde kullandığımız yöntemler burada da aynen geçerlidir. Buna göre;

$$p(x) = \sum_{i=0}^m a_i (x - x_0)^i \quad \text{ve} \quad q(x) = \sum_{i=0}^n b_i (x - x_0)^i$$

şeklinde ifade edilir. ve

$$(fq - p)(x) = \sum_{i \geq m+n+1} d_i (x - x_0)^i$$

ifadesinden (3.5) ve (3.7) denklem sistemindekine benzer lineer denklem sistemleri elde edilir ve aynı şekilde çözülür. Ayrıca (3.9)'deki durum burada da aynen geçerlidir.

Teorem 3.2: $r_{m,n}(x)$ rasyonel fonksiyonu bir f fonksiyonuna ait (m,n) dereceli Padé yaklaşımı olmak üzere; her negatif olmayan m,n sayısı için f fonksiyonuna ait tek bir (m,n) dereceli $r_{m,n}(x)$ Padé yaklaşımı vardır.

3.1 Padé Yaklaşımının Hesaplanması

Padé yaklaşımının hesaplanmasında literatürde farklı algoritmalar kullanılmaktadır. Biz çalışmamızda en yaygın ve kullanışlı olan determinant formüllerini kullandık. Şimdide bu yöntem üzerinde duralım.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

serisiyle temsil edilen fonksiyonun (m,n) dereceli Padé yaklaşımını

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_0(x)}{q_0(x)}$$

olarak tanımlarsak,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{p_0(x)}{q_0(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i}$$

ifadesinin içler dışlar çarpımıyla oluşan denklem sistemi ve bu sistemdeki katsayılar determinant yöntemiyle bulunabilir.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \text{ için;}$$

$$F_k(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i \quad k \geq 0$$

$$F_k(x) = 0 \quad k < 0 \quad \text{yazılabilir.}$$

Teorem 3.1.1: Eğer bir f fonksiyonu için (m,n) dereceli Padé yaklaşımı

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_0(x)}{q_0(x)} \quad \text{ve} \quad D_{m,n} = \begin{pmatrix} c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{pmatrix}$$

olarak ifade ediliyor ve $D = \det D_{m,n} \neq 0$ ise;

$$p_0(x) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} F_m(x) & xF_{m-1}(x) & \cdots & x^n F_{m-n}(x) \\ c_{m+1} & & & \\ \vdots & & D_{m,n} & \\ c_{m+n} & & & \end{vmatrix} \quad \text{ve} \quad q_0(x) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^n \\ c_{m+1} & & & \\ \vdots & & D_{m,n} & \\ c_{m+n} & & & \end{vmatrix}$$

olur.

İspat 3.1.1: $D \neq 0$ olduğundan, yukarıdaki (3.5) denklem sisteminde $b_0 = 1$ alındığında bu homojen (3.5) denklem sisteminin tek çözümü olduğu görülmüştü. Aynı şekilde aşağıdaki homojen denklem sistemide aşikar olmayan(nontrivial) çözüme sahiptir.

$$\begin{cases} (1 - q_0(x))b_0 + xb_1 + x^2b_2 + \cdots + x^n b_n = 0 \\ c_{m+1}b_0 + c_m b_1 + \cdots + c_{m+1-n} b_n = 0 \\ \vdots \\ c_{m+n}b_0 + c_{m+n-1}b_1 + \cdots + c_m b_n = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Böylece katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşittir. Yani;

$$\begin{vmatrix} 1 - q_0(x) & x & \cdots & x^n \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix} = 0$$

Aynı zamanda $q_0(x)$ için bir denklem ifadesinin de olduğunu göstermiş oluruz.

Eğer $f(x)q_0(x)$ ifadesini göz önüne alırsak;

$$f(x)q_0(x) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} f(x) & xf(x) & \cdots & x^n f(x) \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix}. \quad (3.11)$$

ifadesi elde edilir. $p_0(x)$ polinomu $f(x)q_0(x)$ serilerindeki m den küçük yada m 'ye eşit dereceye sahip tüm terimleri içerdiğinden (3.11) ifadesinde $p_0(x)$ 'in determinant formatını elde ederiz. Bu da ispatımızı tamamlar.

Determinant algoritması bir çok ekleme ve çarpım işlemlerini ihtiva ettiğinden m ve n 'nin küçük değerlerini hesaplamada daha kullanışlıdır. Bu algoritma yalnızca kapalı formdaki formülleri açmamızda ve bulmamızda yardımcı olurlar.

3.2 Padé Tablosu

Genel anlamda bir $f(x)$ fonksiyonunun Padé yaklaşımını

$$[m/n] = [m/n]_f = [m/n](x) = [m/n]_f(x) = r_{m,n}$$

şeklinde değişik formlarda ifade edebiliriz.

Yaklaşımlara ait tablo sistematik olarak Henri Eugène Padé tarafından verildiği için O'nun anısına hem yaklaşıma, hemde tabloya Padé'nin ismi verilmiştir. Genel anlamda bir fonksiyona ait Padé tablosu aşağıdaki gibidir.

Çizelge 3.1 Padé tablosu

$n \backslash m$	0	1	2	...
0	$[0/0]$	$[1/0]$	$[2/0]$	...
1	$[0/1]$	$[1/1]$	$[2/1]$	...
2	$[0/2]$	$[1/2]$	$[2/2]$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Yukarıda ki çizelge 3.1 formatına uygun e^{-x} ve e^x 'in Padé yaklaşımlarına ait Padé tabloları aşağıdaki gibidir. (Çizelge 3.2 ve Çizelge 3.3)

Çizelge 3.2 e^{-x} 'in Padé yaklaşımının bir kısmı

$n \backslash m$	0	1	2
0	1	$1 - x$	$\frac{2 - 2x + x^2}{2}$
1	$\frac{1}{1+x}$	$\frac{2-x}{2+x}$	$\frac{6-4x+x^2}{6+2x}$
2	$\frac{2}{2+2x+x^2}$	$\frac{6-2x}{6+4x+x^2}$	$\frac{12-6x+x^2}{12+6x+x^2}$

Çizelge 3.3 e^x 'in Padé yaklaşımının bir kısmı

$m \backslash n$	0	1	2	...
0	1	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x+\frac{1}{2}x^2}$	...
1	$1+x$	$\frac{1+\frac{1}{2}x}{1-\frac{1}{2}x}$	$\frac{1+\frac{1}{3}x}{1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}$	...
2	$1+x+\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}{1-\frac{1}{3}x}$	$\frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}$	...
3	$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$	$\frac{1+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{24}x^3}{1-\frac{1}{4}x}$	:	
4	$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$	:		
:				

Yukarıda çizelge 3.3 te de görüldüğü gibi, Padé tablosunda birinci sütun f fonksiyonuna ait serinin kısmi toplamlarını verir. İlk satır ise $\frac{1}{f}$ fonksiyonunun kısmi toplamlarının terslerini içerir.

Şimdi, tek değişkenli bir fonksiyona ait Padé yaklaşımının nasıl bulunacağını ve Padé yaklaşımının ait olduğu fonksiyonla uyumlu olup olmadığına bakalım. (Şekil 3.1)

Örnek 3.1

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}x}{1 + 2x}} = 1 - \frac{3}{4}x + \frac{39}{32}x^2 - \dots$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun $[1/1]$ Padé yaklaşımını hesaplayalım (2.dereceden Padé yaklaşımını). Burada bize verilen fonksiyonun (kuvvet serisinin) x^2 'li terimine kadar olan kısmının Padé yaklaşımını bulacağız (keyfi dereceden). Bu fonksiyonda

$$c_0 = 1, c_1 = \frac{3}{4} \text{ ve } c_2 = \frac{39}{32} \text{ dir.}$$

Bu kuvvet serisine karşılık gelen Padé yaklaşımı

$$1 - \frac{3}{4}x + \frac{39}{32}x^2 = \frac{a_0 + a_1x}{1 + b_1x} + O(x^3)$$

şeklindedir. Bu ifadede içler dışlar çarpımı yapılırsa

$$(1 + b_1x)(1 - \frac{3}{4}x + \frac{39}{32}x^2) = a_0 + a_1x + O(x^3)$$

olur. (3.6)denkleminde

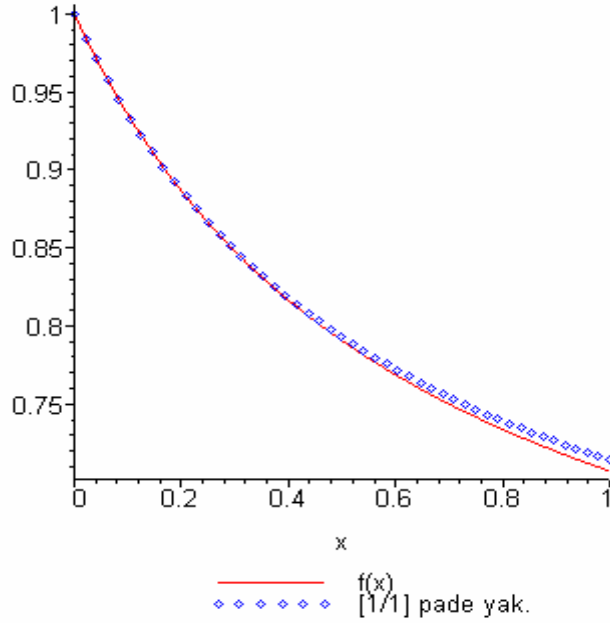
$$(-\frac{3}{4})b_1 = -\frac{39}{32} \Rightarrow b_1 = \frac{13}{8} \text{ olur.}$$

(3.6) denkleminde $a_0 = 1$ ve $a_1 = \frac{7}{8}$ olur. O halde verilen kuvvet serisine karşılık gelen

2.dereceden Padé yaklaşımı

$$[1/1] = \frac{1 + \frac{7}{8}x}{1 + \frac{13}{8}x}$$

şeklinde bulunur. $x \geq 0$ için $f(x)$ ile Padé yaklaşımını aşağıdaki şekilde karşılaştıralım.



Şekil 3.1 $f(x) = \sqrt{(1+\frac{x}{2})/(1+2x)}$ ve $f(x)$ in $[1/1]$ Padé yaklaşımı

Özellikle $f(\infty) = \frac{1}{2} = 0.5$ ve $[1/1](\infty) = \frac{7}{13} = 0.54 \dots$ tür. Herhangi bir özel metod uygulamaksızın Padé yaklaşımı (3.8) denklemlerinden direk olarak hesaplanır.

Örnek 3.2

Bir fonksiyona ait keyfi dereceden kuvvet serisinin mi (Taylor serisi) yoksa Padé yaklaşımının mı daha iyi sonuç verdiğine bakalım. Bunun için aldığımız fonksiyonun Taylor açılımını ve Padé yaklaşımını hesaplayarak karşılaştıralım. Fonksiyon olarak;

$f(x) = e^{-x}$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun beşinci dereceden kuvvet serisi(Taylor açılımı)

$$P_5(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5$$

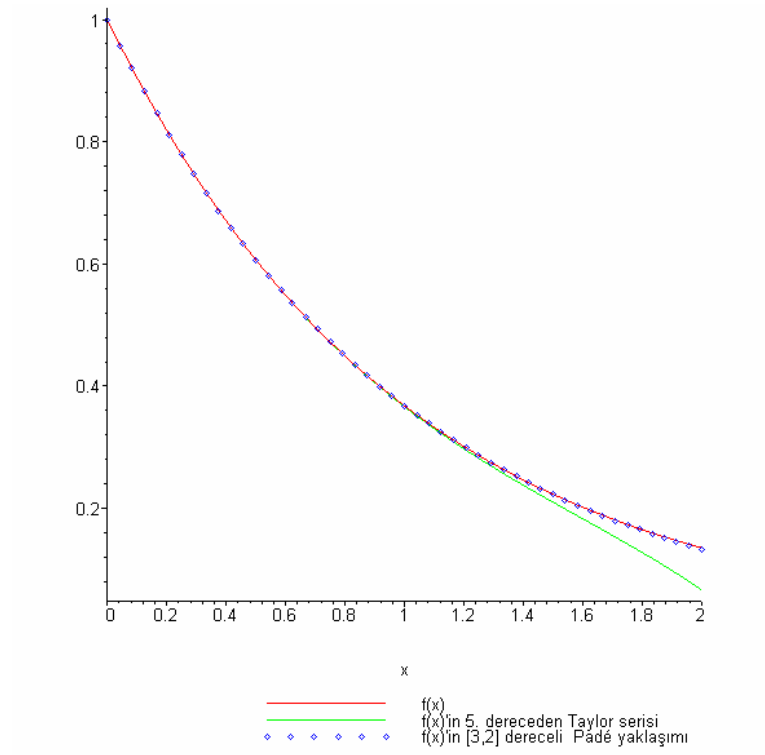
şeklindedir. Bu kuvvet serisinin $m = 3$ ve $n = 2$ için , $[3,2]$ dereceli, yani, beşinci dereceden Pade yaklaşımı (3.8) denklemlerinden

$$r(x) = \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2} \quad \text{olarak bulunur. } f(x) = e^{-x}, P_5(x) \text{ ve } r(x) \text{ 'i aşağıdaki tablo}$$

ve şekilde karşılaştıralım. (Çizelge 3.4 ve Şekil 3.2)

Çizelge 3.4 $f(x) = e^{-x}$, $P_5(x)$ ve $r(x)$ 'in değerleri

x	e^{-x}	$p_5(x)$	$ e^{-x} - p_5(x) $	$r(x)$	$ e^{-x} - r(x) $
0.1	0.9048374180	0.9048374167	0.13×10^{-8}	0.9048374179	0.1×10^{-9}
0.2	0.8187307531	0.8187306667	8.64×10^{-8}	0.8187307456	7.55×10^{-9}
0.3	0.7408182207	0.7408172500	9.707×10^{-7}	0.7408181414	7.93×10^{-8}
0.4	0.6703200460	0.6703146667	5.38×10^{-6}	0.6703196347	4.11×10^{-7}
0.5	0.6065306597	0.6065104167	2.0243×10^{-5}	0.6065292096	1.45×10^{-6}
0.6	0.5488116361	0.5487520000	5.96×10^{-5}	0.5488076312	4.00×10^{-6}
0.7	0.4965853038	0.4964369167	1.48387×10^{-4}	0.4965759550	9.3488×10^{-6}
0.8	0.4493289641	0.4490026667	3.26×10^{-4}	0.4493096647	1.93×10^{-5}
0.9	0.4065696597	0.4059167500	6.529097×10^{-4}	0.4065333809	3.6278×10^{-5}
1.0	0.3678794412	0.3666666667	1.21×10^{-3}	0.3678160920	6.33×10^{-5}



Şekil 3.2 $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonu, $P_5(x)$ Taylor serisi ve $r(x)$ Padé yaklaşımı.

Görüldüğü gibi Padé yaklaşımı kuvvet serisinden daha iyi bir yaklaşım sergilemektedir.

4. ÇOK DEĞİŞKENLİ PADE YAKLAŞIMLARI

Önceki bölümde tek değişkenli Padé yaklaşımlarının nasıl elde edildiklerini ve literatürde de benzer yöntemlerin uygulandığından bahsettik. Son yıllarda bu teknikler çok değişkenli Padé yaklaşımlarına da uyarlandı. Fakat tek değişkenlideki gibi teknikler arasındaki benzerliklerden bahsetmek mümkün değil. Bununla beraber; aşağıda çok değişkenli Padé yaklaşımlarının tanımı için, tek değişkenli Padé yaklaşımları için kullanılan özelliklerin geçerli olmaya devam ettiği görülecektir.

Biz çalışmamızı çift değişkenli fonksiyonlarla sınırlayacağız. Çünkü ikiden fazla değişkene sahip fonksiyonlar için genelleştirme yapılabileceği açıktır.

$$f(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j$$

Taylor serisiyle temsil edilen çift değişkenli $f(x, y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \text{ fonksiyonu için tek değişkenli Padé yaklaşımının;}$$

$$p(x) = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^m c_i x^i & x \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i & \cdots & x^n \sum_{i=0}^{m-n} c_i x^i \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix}, \quad q(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^n \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix}$$

denklemleriyle verildiğini biliyoruz.

$p(x)$ ve $q(x)$ ifadelerinde j 'inci satırı x^{j+m-1} ile çarptıktan sonra, $p(x)$ ve $q(x)$ ifadelerindeki j 'inci sütunu x^{j-1} 'e bölelim. ($j = 2, \dots, n+1$). Bu pay ve paydanın x^m ile çarpımıyla sonuçlanır. Gerekli işlemler yapılsa;

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^m c_i x^i & \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i & \cdots & \sum_{i=0}^{m-n} c_i x^i \\ c_{m+1} x^{m+1} & c_m x^m & \cdots & c_{m+1-n} x^{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} x^{m+n} & c_{m+n-1} x^{m+n-1} & \cdots & c_m x^m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_{m+1} x^{m+1} & c_m x^m & \cdots & c_{m+1-n} x^{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} x^{m+n} & c_{m+n-1} x^{m+n-1} & \cdots & c_m x^m \end{vmatrix}} \cdot \quad (D = \det D_{m,n} \neq 0)$$

elde edilir.

Yukarıdaki determinant doğrudan çift değişkenli $f(x, y)$ fonksiyonu için yazılabilir. Yani

$\sum_{i=0}^k c_i x^i$ toplamının yerine $f(x, y)$ fonksiyonunun k 'inci dereceden Taylor açılımının kısmi toplamı yazıldığında, $c_k x^k$ ifadesi $f(x, y)$ fonksiyonuna ait k 'inci dereceden tüm terimleri içerir. Burada çift değişkenli $c_{ij} x^i y^j$ teriminin derecesi $i + j$ 'dir denilir.

Eğer ,

$$p(x, y) = \begin{vmatrix} \sum_{i+j=0}^m c_{ij} x^i y^j & \sum_{i+j=0}^{m-1} c_{ij} x^i y^j & \cdots & \sum_{i+j=0}^{m-n} c_{ij} x^i y^j \\ \sum_{i+j=m+1} c_{ij} x^i y^j & \sum_{i+j=m} c_{ij} x^i y^j & \cdots & \sum_{i+j=m+1-n} c_{ij} x^i y^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i+j=m+n} c_{ij} x^i y^j & \sum_{i+j=m+n-1} c_{ij} x^i y^j & \cdots & \sum_{i+j=m} c_{ij} x^i y^j \end{vmatrix} \quad (4.1)$$

$$q(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \sum_{i+j=m+1} c_{ij} x^i y^j & \sum_{i+j=m} c_{ij} x^i y^j & \cdots & \sum_{i+j=m+1-n} c_{ij} x^i y^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i+j=m+n} c_{ij} x^i y^j & \sum_{i+j=m+n-1} c_{ij} x^i y^j & \cdots & \sum_{i+j=m} c_{ij} x^i y^j \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

olarak tanımlarsak, $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ 'nin formlarının aşağıdaki şekilde olduğunu görmek kolaydır.

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \sum_{i+j=mn}^{mn+m} a_{ij} x^i y^j \\ q(x, y) &= \sum_{i+j=mn}^{mn+n} b_{ij} x^i y^j \end{aligned} \quad (4.3)$$

Burada (4.3) ifadeleri için aşağıdaki (4.4) durumu söz konusudur.

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(p) \geq mn \\ \partial(p) \leq mn + m \\ \omega(q) \geq mn \\ \partial(q) \leq mn + n \\ \omega[(fq - p)(x, y)] \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Tek değişkenli Padé yaklaşımlarında (3.9) durumuyla kıyaslandığında p ve q 'nin dereceleri, p, q 'nin mertebesi (Padé yaklaşımının derecesi) ve $fq - p$ 'nin derecesinin mn kadar kaydığı görülmektedir. Fakat Padé yaklaşımının indirgenemez formu elde edildiğinde bunun kaybolduğu görülecektir. (Cuyt ve Wuytack, 1987)

Teorem 4.1: Eğer $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ (4.1) ve (4.2) ile verilirse;

$$(fq - p)(x, y) = \sum_{i+j \geq mn+m+n+1} d_{ij} x^i y^j \quad \text{olur. (Cuyt, 1983)}$$

İspat 4.1: Eğer ;

$$A_k(x, y) = \sum_{i+j=mn+k} a_{ij} x^i y^j \quad (k = 0, \dots, m)$$

$$B_k(x, y) = \sum_{i+j=mn+k} b_{ij} x^i y^j \quad (k = 0, \dots, n)$$

$$C_k(x, y) = \sum_{i+j=mn+k} c_{ij} x^i y^j \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

olarak ifade edilirse $(fq - p)(x, y) = \sum_{i+j \geq mn+m+n+1} d_{ij} x^i y^j$ için aşağıdaki yazılabilir:

$$\begin{cases} C_0(x,y)B_0(x,y) = A_0(x,y) \\ C_1(x,y)B_0(x,y) + C_0(x,y)B_1(x,y) = A_1(x,y) \\ \vdots \\ C_m(x,y)B_0(x,y) + \cdots + C_{m-n}(x,y)B_n(x,y) = A_m(x,y) \end{cases} \quad (4.5a)$$

$$\begin{cases} C_{m+1}(x,y)B_0(x,y) + C_{m+1-n}(x,y)B_n(x,y) = 0 \\ \vdots \\ C_{m+n}(x,y)B_0(x,y) + \cdots + C_m(x,y)B_n(x,y) = 0 \end{cases} \quad (4.5b)$$

Burada $k < 0$ için $C_k = 0$ dır. Bu notasyonlara göre;

$$p(x,y) = \sum_{k=0}^m A_k(x,y) \quad \text{ve} \quad q(x,y) = \sum_{k=0}^n B_k(x,y) \quad \text{olarak da ifade edilebilir.}$$

$$B_0(x,y) = \begin{vmatrix} C_m(x,y) & \cdots & C_{m+1-n}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m+n-1}(x,y) & & C_m(x,y) \end{vmatrix}$$

olarak seçip, Cramer kuralını uygulayarak $B_k(x,y)$ için yukarıdaki homojen denklem sistemini çözdükten sonra ,yukarıdaki denklem sistemlerinde $A_k(x,y)$ 'de yerine yazarsak; (4.1) ve (4.2) determinantlarını,yani; $p(x,y)$ ve $q(x,y)$ ifadelerini elde ederiz. (4.1) ve (4.2) de verilen $p(x,y)$ ve $q(x,y)$ (4.4) için bir çözüm oluşturur. Buda ispatımızı tamamlar.

Burada $p(x,y)$ ve $q(x,y)$ ifadelerine çok değişkenli Padé denklemleri denir . Ve

$$r_{m,n}(x,y) = \frac{p_0}{q_0}(x,y)$$

ifadesine de $f(x,y)$ fonksiyonunun (m,n) dereceli indirgenemez Padé yaklaşımı denir.

Teorem 4.2: Her m ve n sayısı için, $f(x,y)$ fonksiyonunun tek bir tane (m,n) dereceli çok

değişkenli Padé yaklaşımı vardır.(Cuyt ve Wuytack, 1987)

Yukarıdaki tanımdan sonra, çok değişkenli Padé yaklaşımı için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 4.1:

$f(x, y) = 1 + \frac{x}{0.1 - y} + \sin(xy)$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyona ait seri açılımı

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} 10^i xy^{i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(xy)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$= 1 + 10x + 101xy + 1000xy^2 + \dots$ şeklinde olur.

$m = 1 = n$ olarak alınırsa; yani m ve n 'nin dereceleri 1 olarak alınırsa; $p(x, y)$ ve $q(x, y)$,

(4.1) ve (4.2) Padé denklemleri kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$p(x, y) = \begin{vmatrix} 1+10x & 1 \\ 101xy & 10x \end{vmatrix} = 10x + 100x^2 - 101xy$$

$$q(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 101xy & 10x \end{vmatrix} = 10x - 101xy$$

elde edilir. Buna göre;

$$\frac{p}{q}(x, y) = \frac{10x + 100x^2 - 101xy}{10x - 101xy}$$

elde edilir. Bu ifadenin indirgenemez formu;

$$r_{1,1}(x, y) = \frac{1 + 10x - 10.1y}{1 - 10.1y} \text{ şeklinde bulunur.}$$

Görüldüğü gibi indirgenemez formu elde ettiğimizde, $mn = 1$ kadar artan derece de kaybolmaktadır. Fakat bu her zaman olmayabilir. Aşağıdaki örnekte bu açıkça görülmektedir. Şunu da hemen belirtelim ki bu elde ettiğimiz sonucu etkilemez.

Örnek 4.2:

$m = 1$ ve $n = 2$ alınırsa; (4.4)'ü sağlayan (4.1) ve (4.2) Padé denklemlerini kullanarak $p(x, y)$

ve $q(x, y)$;

$$p(x, y) = \begin{vmatrix} 1+10x & 1 & 0 \\ 101xy & 10x & 1 \\ 1000xy^2 & 101xy & 10x \end{vmatrix} = 100x^2 - 101xy + 1000x^3 - 2020x^2y + 1000xy^2$$

$$q(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 101xy & 10x & 1 \\ 1000xy^2 & 101xy & 10x \end{vmatrix} = 100x^2 - 101xy + 1010x^2y - 1000xy^2 + 201x^2y^2$$

Bulunur.Buradan,

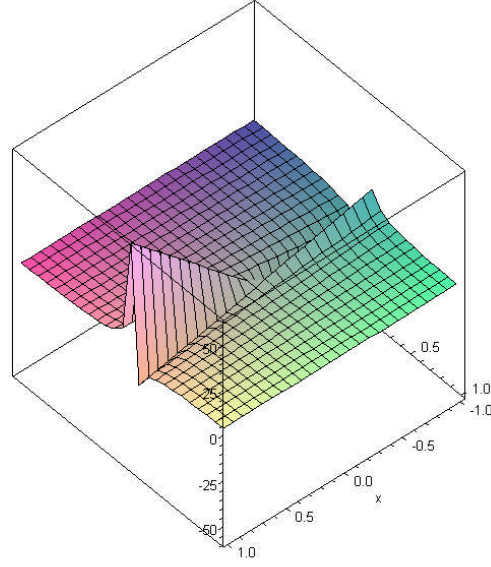
$$\frac{p}{q}(x, y) = \frac{100x^2 - 101xy + 1000x^3 - 2020x^2y + 1000xy^2}{100x^2 - 101xy + 1010x^2y - 1000xy^2 + 201x^2y^2}$$

bulunur. $\frac{p}{q}(x, y)$ ifadesinin indirgenemez formu ise ;

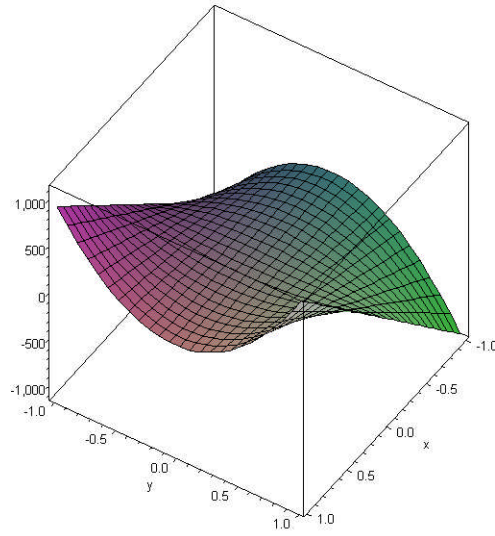
$$r_{1,2}(x, y) = \frac{x - 10.1y + 10x^2 - 20.2xy + 10y^2}{x - 1.01y + 10.1xy - 10y^2 + 2.01xy^2} \text{ bulunur.}$$

$f(x, y) = 1 + \frac{x}{0.1 - y} + \sin(xy)$ fonksiyonuna ait Taylor açılımının ve $r_{1,1}(x, y)$ çok değişkenli

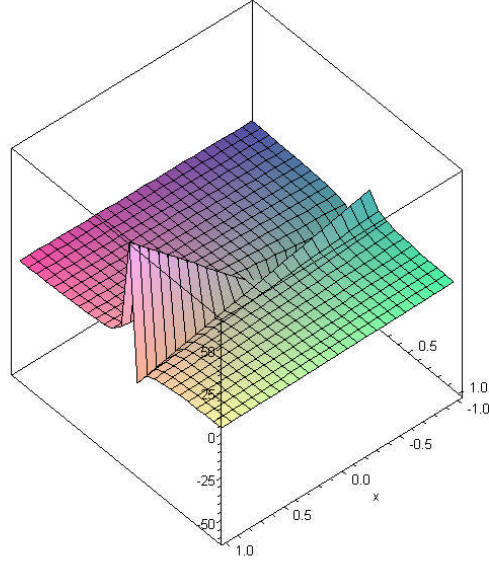
Padé yaklaşımlarının grafiğini, $f(x, y)$ fonksiyonun grafiğiyle R^3 te karşılaştırdığımızda Padé yaklaşımının Taylor serisinden çok daha iyi bir yaklaşım sergilediği görülmektedir. ((Şekil 4.1), (Şekil 4.2), (Şekil 4.3)).



Şekil 4.1 $f(x, y) = 1 + (x/0.1 - y) + \sin(xy)$ fonksiyonu



Şekil 4.2 $f(x, y)$ 'nin $P_3(x, y) = 1 + 10x + 101xy + 1000xy^2$ Taylor açılımı



Şekil 4.3 $r_{1,1}(x, y) = (1 + 10x - 10.1y) / (1 - 10.1y)$ Padé yaklaşımı.

5. UYGULAMALAR

Bu bölümde diferensiyel dönüşüm(transform) metoduyla Padé yaklaşımlarını karşılaştıracğız. Bu karşılaştırmayı hem tek değışkenliler, hemde çok değışkenliler için yapacağız.

İlk önce bir boyutlu diferensiyel transformla çözülen diferensiyel cebirsel denklemin çözümünü ve elde edilen sonuçları, bu denkleme ait Padé yaklaşımlarıyla kıyaslayacağız. Daha sonra da iki boyutlu diferensiyel transformla çözülen kısmi diferensiyel denklemin çözümünü ve elde edilen sonuçları, bu denkleme ait çok değışkenli Padé yaklaşımlarıyla kıyaslayacağız.

Uygulamalarda diferensiyel transform metoduyla bulunan, sırasıyla tek değışkenli ve çok değışkenli $u(x), v(x)$ ve $u(x, t), v(x, t)$ diferensiyel transform denklemleri çizelgelerde ve grafiklerde notasyon karışıklığına yol açmamak için $T(u(x)), T(v(x))$ ve $T(u(x, t)), T(v(x, t))$ ile analitik çözümler ise $f_i(x) = u(x), f_i(x) = v(x)$, çok değışkenliler içinse $f_i(x, t) = u(x, t), f_i(x, t) = v(x, t)$ şeklinde gösterilmiştir.

Uygulama 5.1

$$\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -(1+x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v'_1(0) \\ v'_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki (2.9) diferensiyel cebirsel denklemini 2.bölümde diferensiyel transform metoduyla çözmüştük.

$$T(v_1(x)) = 1 - x + \frac{3}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

$$T(v_2(x)) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots$$

denklemlerini elde etmiştik. 2.bölümde de belirttiğimiz gibi analitik çözüm,

$$\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} + x \sin x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

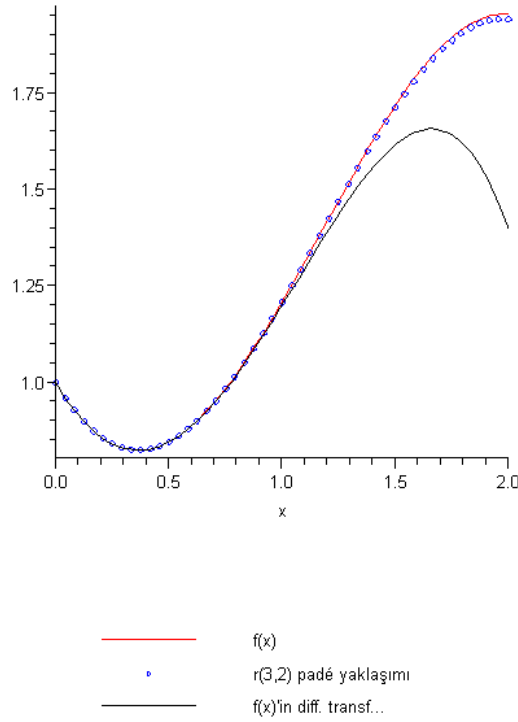
olarak verilmişti. Analitik çözümü baz alarak, Padé yaklaşımlarını ve differensiyel transform metoduyla elde edilen $T(v_1(x))$ ve $T(v_2(x))$ denklemleriyle karşılaştıralım. İlk önce bu karşılaştırmayı $v_1(x)$ için yapalım(Çizelge 5.1). Analitik çözümü $f_1(x) = v_1(x) = e^{-x} + x \sin x$, differensiyel transform metoduyla elde edilen denklemi de $T(v_1(x))$, $T(v_1(x))$ diferensiyel transform çözümüne ait [3,2] dereceli Padé yaklaşımını da $r_{3,2}(x)$ ile gösterelim. Buna göre ,

$$r_{3,2}(x) = \frac{1 - \frac{179}{155}x + \frac{1067}{620}x^2 - \frac{173}{372}x^3}{1 - \frac{24}{155}x + \frac{41}{620}x^2}$$

olarak elde edilir.

Çizelge 5.1 $f_1(x) = v_1(x) = e^{-x} + x \sin x$, $T(v_1(x))$ ve $r_{3,2}(x)$ değerleri

x	$v_1(x) = e^{-x} + x \sin x$	$T(v_1(x))$	$ v_1(x) - T(v_1(x)) $	$r_{3,2}(x)$	$ v_1(x) - r_{3,2}(x) $
0.1	0.9148207597	0.9148207500	9.7×10^{-9}	0.9148207571	2.6×10^{-9}
0.2	0.8584646293	0.8584640000	6.193×10^{-7}	0.8584644668	1.525×10^{-7}
0.3	0.8294742827	0.8294672500	0.0000070327	0.8294726757	0.0000016070
0.4	0.8260873829	0.8260480000	0.0000393829	0.8260790714	0.0000083115
0.5	0.8462434290	0.8460937500	0.0001496790	0.8462143982	0.0000290308
0.6	0.8875971201	0.8871520000	0.0004451201	0.8875181925	0.0000789276
0.7	0.9475376848	0.9464202500	0.0011174348	0.9473575500	0.0001801348
0.8	1.023213837	1.020736000	0.002477837	1.022852861	0.000360976
0.9	1.111563878	1.106566750	0.004997128	1.10910181	0.000653697
1.0	1.209350426	1.200000000	0.0093504426	1.208259587	0.001090839



Şekil 5.1 $f_1(x) = v_1(x) = e^{-x} + x \sin x$, $T(v_1(x))$ DT ve $r_{3,2}(x)$ PY

Yukarıdaki çizelge 5.1 den ve şekil 5.1 den görüldüğü gibi Padé yaklaşımı differensiyel transform metodundan çok daha iyi yaklaşım sergilemektedir.

Şimdi aynı karşılaştırmaları $f_2(x) = v_2(x) = \sin x$ analitik çözümü için yapalım. Aynı şekilde differensiyel transform metoduyla elde edilen $T(v_2(x))$ ve $T(v_2(x))$ çözümüne ait $r_{5,4}(x)$

Padé yaklaşımını karşılaştıracacağız. Buna göre;

$$T(v_2(x)) = v_2(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots$$

olarak bulunmuştu. $T(v_2(x))$ fonksiyonuna ait $r_{5,4}(x)$ Padé yaklaşımı ise,

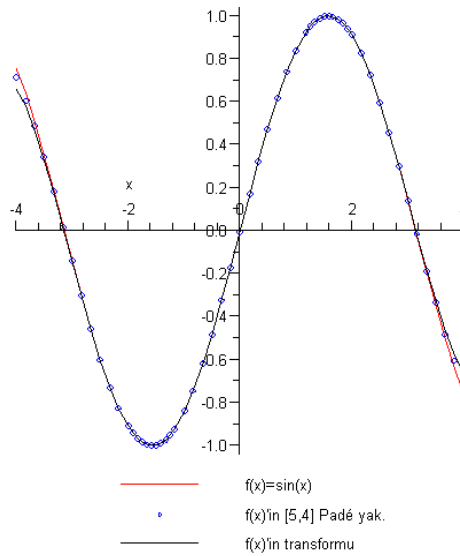
$$r_{5,4}(x) = \frac{\frac{551}{166320}x^5 - \frac{53}{396}x^3 + x}{1 + \frac{13}{396}x^2 + \frac{5}{11088}x^4}$$

olarak elde edilir. Bu fonksiyonlara ait nümerik yaklaşımlar çizelge.5.2 de, aşağıdaki

gibidir. Ayrıca karşılaştırma grafik üzerinde de gösterilmiştir.(şekil.5.2)

Çizelge 5.2 $f_2(x) = v_2(x) = \sin x$, $T(v_2(x))$ ve $r_{5,4}(x)$ değerleri

x	$f_2(x) = \sin x$	$T(v_2(x))$	$ \sin x - T(v_2(x)) $	$r_{5,4}(x)$	$ \sin x - r_{5,4}(x) $
0.1	0.099833416	0.09983341664	1×10^{-11}	0.0998334166	1×10^{-11}
0.2	0.1986693308	0.1986693309	1×10^{-10}	0.1986693308	0
0.3	0.2955202067	0.2955202067	0	0.2955202067	0
0.4	0.3894183423	0.3894183422	1×10^{-10}	0.3894183424	1×10^{-10}
0.5	0.4794255386	0.4794255387	1×10^{-10}	0.4794255383	3×10^{-10}
0.6	0.5646424734	0.5646424735	1×10^{-10}	0.5646424732	2×10^{-10}
0.7	0.6442176872	0.6442176877	5×10^{-10}	0.6442176876	4×10^{-10}
0.8	0.7173560909	0.7173560931	2.2×10^{-9}	0.7173560930	2.1×10^{-9}
0.9	0.7833269096	0.7833269174	7.8×10^{-9}	0.7833269172	7.6×10^{-9}
1.0	0.8414709848	0.8414710097	2.49×10^{-8}	0.841471007	2.27×10^{-8}



Şekil 5.2 $f_2(x) = v_2(x) = \sin x$, $T(v_2(x))$ DT ve $r_{5,4}(x)$ PY

Görüldüğü gibi, Padé yaklaşımı diferensiyel transform metodundan daha iyi bir yaklaşım sergilemektedir.

Uygulama 5.2

Şimdi iki boyutlu bir kısmi diferensiyel denklemi iki boyutlu diferensiyel transform metoduyla çözüp, elde edilen çözümü Padé yaklaşımıyla karşılaştıracakız.

Aşağıdaki lineer kısmi diferensiyel denklemi ve başlangıç değer koşullarını göz önüne alalım.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5.1)$$

$$u(x, 0) = x^2 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = e^x \quad (5.3)$$

İki boyutlu diferensiyel transformun temel özelliklerine ve teoremlerine göre (5.1) denkleminin iki boyutlu diferensiyel transformunu alırsak;

$$(k+1)(k+2)U(k+2, h) - 3(k+1)(h+1)U(k+1, h+1) - 4(k+1)(k+2)U(k+2, h) = 0 \quad (5.4)$$

elde edilir. (5.2) denkleminde,

$$\begin{aligned} U(0, 0) &= 0, \\ U(1, 0) &= 0, \\ U(2, 0) &= 0, \\ U(i, 0) &= 0, \quad i = 3, 4, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.5)$$

elde edilir. (5.3) denkleminde,

$$\begin{aligned}
U(0,1) &= 1, \\
U(1,1) &= 1, \\
U(2,1) &= \frac{2}{2!}, \\
U(i,1) &= \frac{2}{n!}, \quad i = 3, 4, \dots, n.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

elde edilir. (5.5) ve (5.6) ifadelerini (5.4) denkleminde yerine koyarsak ;

$$\begin{aligned}
U(0,2) &= -\frac{1}{8}, \\
U(0,3) &= \frac{13}{96}, \\
U(1,1) &= 1, \\
U(i,1) &= \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

elde edilir. Bütün $U(k,h)$ değerlerini (2.21) denkleminde yerine koyarsak aşağıdaki seri çözümünü elde ederiz;

$$u(x,t) = t + x^2 + tx - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{2}tx^2 + \frac{13}{96}t^3 \tag{5.8}$$

denklemini elde ederiz. Analitik çözüm ise,

$$f_3(x,t) = u(x,t) = \frac{4}{5}e^{\left(\frac{x+t}{4}\right)} - \frac{4}{5}e^{(x-t)} + x^2 + \frac{t^2}{4} \tag{5.9}$$

şeklindedir. Diferansiyel transform seri çözümüne ait çok değişkenli Padé yaklaşımlarını bulmak için (4.1) ve (4.2) determinant ifadelerinden yararlanacağız. Bu uygulama için $r_{3,2}(x,t)$ Padé yaklaşımını bulup diferansiyel transform metoduyla bulduğumuz sonuçla karşılaştıracacağız. Buna göre (4.1) ve (4.2) determinant ifadelerini kullanarak bulduğumuz çok değişkenli Padé denklemleri;

$$p(x,t) = \begin{vmatrix} t+x^2+tx-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{2}tx^2-\frac{3}{8}t^2x+\frac{13}{96}t^3 & t+x^2+tx-\frac{1}{8}t^2 & t \\ \frac{1}{6}tx^3-\frac{3}{16}t^2x^2+\frac{13}{96}t^3x-\frac{17}{512}t^4 & \frac{1}{2}tx^2-\frac{3}{8}t^2x+\frac{13}{96}t^3 & x^2+tx-\frac{1}{8}t^2 \\ \frac{1}{24}tx^4-\frac{1}{16}t^2x^3+\frac{13}{192}t^3x^2-\frac{17}{512}t^4x+\frac{41}{6144}t^5 & \frac{1}{6}tx^3-\frac{3}{16}t^2x^2+\frac{13}{96}t^3x-\frac{17}{512}t^4 & \frac{1}{2}tx^2-\frac{3}{8}t^2x+\frac{13}{96}t^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{11765}{7077888}t^8 - \frac{2395}{294912}t^7x + \frac{557}{294912}t^7 + \frac{523}{36864}t^6 + \frac{119}{4096}t^6x^2 \\
&+ \frac{1}{1536}t^6x - \frac{79}{1536}t^5x + \frac{1}{576}t^5x^2 - \frac{377}{4608}t^5x^3 + \frac{85}{4608}t^4x^3 + \frac{77}{512}t^4x^2 \\
&+ \frac{2995}{18432}t^4x^4 - \frac{1105}{4608}t^3x^5 - \frac{29}{96}t^3x^3 - \frac{15}{512}t^3x^4 + \frac{13}{48}t^2x^4 - \frac{11}{96}t^2x^5 \\
&+ \frac{145}{576}t^2x^6 - \frac{1}{6}tx^5 + \frac{7}{48}tx^6 - \frac{7}{48}tx^7 + \frac{1}{24}x^8 - \frac{1}{6}x^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0.001662219012t^8 - 0.008121066623t^7x + 0.001888699002t^7 \\
&+ 0.01418728299t^6 + 0.02905273438t^6x^2 + 0.0006510416667t^6x \\
&- 0.05143229167t^5x + 0.001736111111t^5x^2 - 0.08181423611t^5x^3 \\
&+ 0.01844618056t^4x^3 + 0.01503906250t^4x^2 + 0.01624891493t^4x^4 \\
&- 0.2398003472t^3x^5 - 0.3020833333t^3x^3 - 0.02929687500t^3x^4 \\
&+ 0.2708333333t^2x^4 - 0.1145833333t^2x^5 + 0.2517361111t^2x^6 \\
&- 0.1666666667tx^5 + 0.1458333333tx^6 - 0.1458333333tx^7 \\
&+ 0.04166666667x^8 - 0.1666666667x^7
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve

$$q(x,t) = \begin{vmatrix} & 1 & & 1 & & 1 \\ \frac{1}{6}tx^3 - \frac{3}{16}t^2x^2 + \frac{13}{96}t^3x - \frac{17}{512}t^4 & \frac{1}{2}tx^2 - \frac{3}{8}t^2x + \frac{13}{96}t^3 & x^2 + tx - \frac{1}{8}t^2 \\ \frac{1}{24}tx^4 - \frac{1}{16}t^2x^3 + \frac{13}{192}t^3x^2 - \frac{17}{512}t^4x + \frac{41}{6144}t^5 & \frac{1}{6}tx^3 - \frac{3}{16}t^2x^2 + \frac{13}{96}t^3x - \frac{17}{512}t^4 & \frac{1}{2}tx^2 - \frac{3}{8}t^2x + \frac{13}{96}t^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{6}x^5 + \frac{523}{36864}t^5 + \frac{13}{48}tx^4 - \frac{29}{96}t^2x^3 + \frac{77}{512}t^3x^2 - \frac{79}{1536}t^4x \\
&+ \frac{15}{4096}t^6 - \frac{5}{48}tx^5 + \frac{5}{32}t^2x^4 - \frac{545}{4608}t^3x^3 + \frac{355}{6144}t^4x^2 - \frac{23}{1152}t^5x \\
&+ \frac{469}{2359296}t^7 + \frac{1}{144}tx^6 - \frac{1}{64}t^2x^5 + \frac{5}{288}t^3x^4 - \frac{35}{3072}t^4x^3 \\
&+ \frac{215}{36864}t^5x^2 - \frac{49}{24576}t^6x + \frac{1}{24}x^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -0.1666666667x^5 + 0.01418728299t^5 + 0.2708333333tx^4 \\
&- 0.03020833333t^2x^3 + 0.1503906250t^3x^2 - 0.05143229167t^4x \\
&+ 0.003662109375t^6 - 0.1041666667tx^5 + 0.1562500000t^2x^4 \\
&- 0.1182725694t^3x^3 + 0.05777994792t^4x^2 - 0.01996527778t^5x \\
&+ 0.0001987881131t^7 + 0.006944444444tx^6 - 0.1562500000t^2x^5 \\
&+ 0.01736111111t^3x^4 - 0.01139322917t^4x^3 + 0.005832248264t^5x^2 \\
&- 0.001993815104t^6x + 0.04166666667x^6
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre ;

$$\begin{aligned}
r_{3,2}(x,t) = & \left(\frac{11765}{7077888}t^8 - \frac{2395}{294912}t^7x + \frac{557}{294912}t^7 + \frac{523}{36864}t^6 \right. \\
& + \frac{119}{4096}t^6x^2 + \frac{1}{1536}t^6x - \frac{79}{1536}t^5x + \frac{1}{576}t^5x^2 - \frac{377}{4608}t^5x^3 \\
& + \frac{85}{4608}t^4x^3 + \frac{77}{512}t^4x^2 + \frac{2995}{18432}t^4x^4 - \frac{1105}{4608}t^3x^5 - \frac{29}{96}t^3x^3 \\
& - \frac{15}{512}t^3x^4 + \frac{13}{48}t^2x^4 - \frac{11}{96}t^2x^5 + \frac{145}{576}t^2x^6 - \frac{1}{6}tx^5 + \frac{7}{48}tx^6 \\
& - \frac{7}{48}tx^7 + \frac{1}{24}x^8 - \frac{1}{6}x^7) / \left(-\frac{1}{6}x^5 + \frac{523}{36864}t^5 + \frac{13}{48}tx^4 - \frac{29}{96}t^2x^3 \right. \\
& + \frac{77}{512}t^3x^2 - \frac{79}{1536}t^4x + \frac{15}{4096}t^6 - \frac{5}{48}tx^5 + \frac{5}{32}t^2x^4 - \frac{545}{4608}t^3x^3 \\
& + \frac{355}{6144}t^4x^2 - \frac{23}{1152}t^5x + \frac{469}{2359296}t^7 + \frac{1}{144}tx^6 - \frac{1}{64}t^2x^5 \\
& \left. + \frac{5}{288}t^3x^4 - \frac{35}{3072}t^4x^3 + \frac{215}{36864}t^5x^2 - \frac{49}{24576}t^6x + \frac{1}{24}x^6 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (0.001662219012t^8 - 0.008121066623t^7x + 0.001888699002t^7 \\
&+ 0.01418728299t^6 + 0.02905273438t^6x^2 + 0.0006510416667t^6x \\
&- 0.05143229167t^5x + 0.001736111111t^5x^2 - 0.08181423611t^5x^3 \\
&+ 0.01844618056t^4x^3 + 0.01503906250t^4x^2 + 0.01624891493t^4x^4 \\
&- 0.2398003472t^3x^5 - 0.3020833333t^3x^3 - 0.02929687500t^3x^4 \\
&+ 0.2708333333t^2x^4 - 0.1145833333t^2x^5 + 0.2517361111t^2x^6 \\
&- 0.1666666667tx^5 + 0.1458333333tx^6 - 0.1458333333tx^7 \\
&+ 0.04166666667x^8 - 0.1666666667x^7)/(-0.1666666667x^5 \\
&+ 0.01418728299t^5 + 0.2708333333tx^4 - 0.03020833333t^2x^3 \\
&+ 0.1503906250t^3x^2 - 0.05143229167t^4x + 0.003662109375t^6 \\
&- 0.1041666667tx^5 + 0.1562500000t^2x^4 - 0.1182725694t^3x^3 \\
&+ 0.05777994792t^4x^2 - 0.01996527778t^5x + 0.0001987881131t^7 \\
&+ 0.006944444444tx^6 - 0.1562500000t^2x^5 + 0.01736111111t^3x^4 \\
&- 0.01139322917t^4x^3 + 0.005832248264t^5x^2 - 0.001993815104t^6x \\
&+ 0.04166666667x^6)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi,

$$T(u(x, t)) = t + x^2 + tx - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{2}tx^2 + \frac{13}{96}t^3$$

$$r_{3,2}(x, t) = \frac{p(x, t)}{q(x, t)},$$

denklemlerini

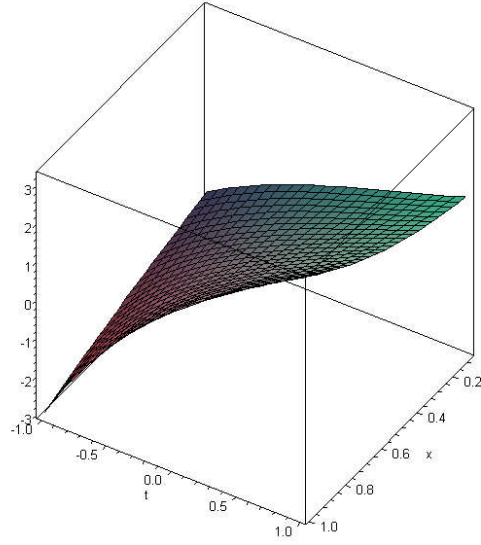
$$f_3(x, t) = u(x, t) = \frac{4}{5}e^{\left(x + \frac{t}{4}\right)} - \frac{4}{5}e^{(x-t)} + x^2 + \frac{t^2}{4}$$

analitik çözümünü baz alınarak karşılaştıralım. Bu karşılaştırmadan (çizelge 5.3)'teki nümerik yaklaşımları ve aşağıdaki grafikleri elde ettik.(Şekil 5.3 , Şekil 5.4 , Şekil 5.5)

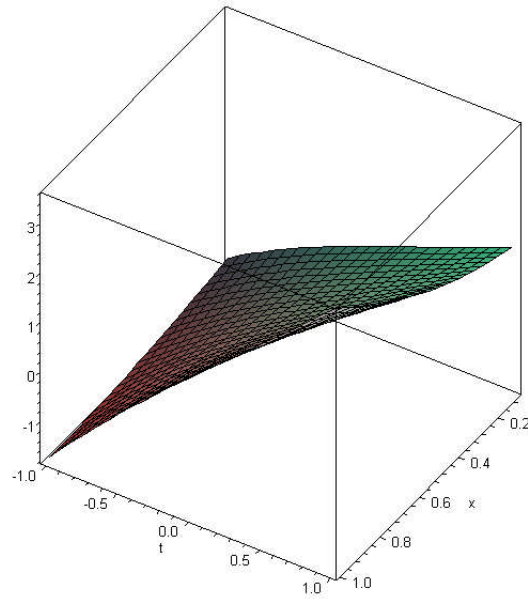
Çizelge 5.3'ten görüleceği gibi Padé yaklaşımları, differensiyel transform metodundan daha iyi yaklaşım sergilemektedir.

Çizelge 5.3 $f_3(x,t) = 4/5(e^{(x+t/4)} - e^{(x-t)}) + x^2 + t^2 / 4$, $T(u(x,t))$ ve $r_{3,2}(x,t)$ değerleri

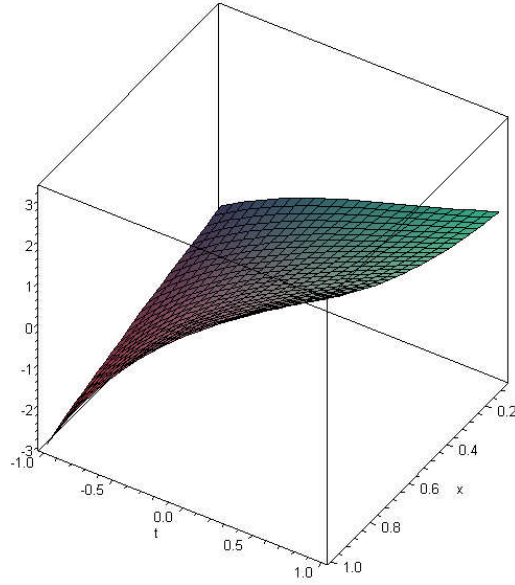
x 'in değişen değerlerine karşın ($t = 0.01$) alınmıştır.					
x	$f_3(x,t) = u(x,t)$	$T(u(x,t))$	$ u(x,t) - T(u(x,t)) $	$r_{3,2}(x,t)$	$ u(x,t) - r_{3,2}(x,t) $
0.1	0.02103541440	0.02103763542	0.00000222102	0.02103541475	3.5×10^{-10}
0.2	0.05219338960	0.05218763542	0.00000575418	0.05219339708	7.48×10^{-9}
0.3	0.1034731510	0.1034376354	0.000035551558	0.1034732091	5.810×10^{-8}
0.4	0.1748875050	0.1747876354	0.00009986958	0.1748877686	2.636×10^{-7}
0.5	0.266406080	0.2662376354	0.00021297258	0.2664514702	8.622×10^{-7}
0.6	0.3781781050	0.3777876354	0.00039046958	0.3781803991	0.0000022941
0.7	0.5100872840	0.5094376354	0.00064964858	0.5100925895	0.0000053055
0.8	0.6621972520	0.6611876354	0.00100961658	0.6622083301	0.0000110781
0.9	0.8345291290	0.8330376354	0.00149149358	0.8345505238	0.0000213948
1.0	1.027106250	1.024987635	0.00211861458	1.027145126	0.000038876



Şekil 5.3 $f_3(x, t) = u(x, t) = 4/5 \left(e^{(x+t/4)} - e^{(x-t)} \right) + x^2 + t^2 / 4$ analitik çözümü



Şekil 5.4 $T(u(x, t)) = t + x^2 + tx - (1/8)t^2 + (1/2)tx^2 + (13/96)t^3$ DT çözümü



Şekil 5.5 $T(u(x,t))$ DT çözümünün $r_{3,2}(x,t)$ PY

Uygulama 5.3

$$u_t + v_x = 0 \quad (5.10)$$

$$v_t + u_x = 0 \quad (5.11)$$

Lineer kısmi differensiyel denklem sistemini ve

$$u(x, 0) = e^x \quad (5.12)$$

$$v(x, 0) = e^{-x} \quad (5.13)$$

başlangıç değerlerini göz önüne alalım.

İlgili teoremleri kullanarak (5.10) ve (5.11) denklemlerinin iki boyutlu differensiyel dönüşümlerini alırsak,

$$U(k, h+1) = -\frac{(k+1)}{(h+1)} V(k+1, h) \quad (5.14)$$

$$U(k+1, h) = -\frac{(h+1)}{(k+1)} V(k, h+1) \quad (5.15)$$

denklemleri elde edilir. Başlangıç değer koşullarını (2.20) denkleminde uyguladığımızda başlangıç dönüşüm katsayıları

$$\sum_{r=0}^{\infty} U(k, 0) x^r = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad (5.16)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} V(k, 0) x^r = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad (5.17)$$

olarak belirlenir. (5.16) ve (5.17) denklemlerinden ,

$$U(0, 0) = 1, \quad V(0, 0) = 1, \quad U(1, 0) = 1, \quad V(1, 0) = -1,$$

$$U(2, 0) = \frac{1}{2!}, \quad V(2, 0) = \frac{1}{2!}, \quad U(3, 0) = \frac{1}{3!}, \quad V(3, 0) = -\frac{1}{3!},$$

bulunur. Daha genel bir ifadeyle:

$$U(k, 0) = \frac{1}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.18)$$

$$V(k, 0) = \frac{(-1)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.19)$$

yazılabilir. Her bir k değeri için, (5.18) ve (5.19) denklemlerini (5.14) ve (5.15) denklemlerinde yazarsak,

$$U(0, 1) = \frac{1}{0!1!}, \quad V(0, 1) = -\frac{1}{0!1!},$$

$$U(2, 1) = -\frac{1}{2!1!}, \quad V(2, 1) = -\frac{1}{2!1!},$$

$$U(0, 2) = -\frac{1}{0!2!}, \quad V(0, 2) = -\frac{1}{2!1!},$$

$$U(2, 2) = -\frac{1}{2!2!}, \quad V(2, 2) = -\frac{1}{2!2!},$$

bulunur. Eğer genelleme yapılırsa,

$$U(k, h) = \begin{cases} \frac{1}{k!h!}, & k = 0, 1, 2, \dots, \text{ ve } h \text{ çift ise} \\ \frac{(-1)^k}{k!h!} & k = 0, 1, 2, \dots, \text{ ve } h \text{ tek ise} \end{cases}$$

$$V(k, h) = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{k!h!}, & k = 0, 1, 2, \dots, \text{ ve } h \text{ çift ise} \\ -\frac{1}{k!h!} & k = 0, 1, 2, \dots, \text{ ve } h \text{ tek ise} \end{cases}$$

Bulduğumuz $W(k, h)$ değerlerini (2.20) denkleminde yerlerine yazarsak, u ve v için bir seri çözümü elde ederiz. Yani:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0,1,\dots}^{\infty} \sum_{h=0,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{k!h!} x^k t^h + \sum_{k=0,1,\dots}^{\infty} \sum_{h=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!h!} x^k t^h \\ &= \left(\sum_{k=0,1,\dots}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right) \left(\sum_{h=0,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{h!} t^h \right) + \left(\sum_{k=0,1,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \right) \left(\sum_{h=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{h!} t^h \right) \\ &= \left(1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{4!} t^4 + \dots \right) \\ &\quad + \left(1 - x + \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{5!} t^5 + \dots \right) \\ v(x, t) &= \sum_{k=0,1,\dots}^{\infty} \sum_{h=0,2,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!h!} x^k t^h - \sum_{k=0,1,\dots}^{\infty} \sum_{h=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k!h!} x^k t^h \\ &= \left(\sum_{k=0,1,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \right) \left(\sum_{h=0,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{h!} t^h \right) - \left(\sum_{k=0,1,\dots}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right) \left(\sum_{h=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{h!} t^h \right) \\ &= \left(1 - x + \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{4!} t^4 + \dots \right) \\ &\quad - \left(1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{5!} t^5 + \dots \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Analitik çözüm ise,

$$(u, v) = (e^x \cosh t + e^{-x} \sinh t, e^{-x} \cosh t - e^x \sinh t)$$

şeklindedir. İlk önce $T_1(u(x, t))$ çözümüne ait $r_{3,2}(x, t)$ Padé yaklaşımını, daha sonra da $T_1(v(x, t))$ diferensiyel transform çözümüne ait $r_{3,2}(x, t)$ Padé yaklaşımını bulup, bu yaklaşımları daha önce bulduğumuz, sırasıyla

$$\begin{aligned} T_1(u(x, t)) = & \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \dots\right) \\ & + \left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \dots\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T_1(v(x, t)) = & \left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \dots\right) \\ & - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \dots\right) \end{aligned}$$

diferensiyel transform çözümleriyle kıyaslayacağız. $T_1(u(x, t))$ DT çözümüne ait,

$$r_{3,2}(x, t) = \frac{p(x, t)}{q(x, t)}$$

Padé yaklaşımını bulmak için uygulama 5.2 de yaptığımız gibi yine (4.1) ve (4.2) Padé determinant denklemlerinden yararlanacağız. (4.1) ve (4.2) denklemlerini kullanırsak $T_1(u(x, t))$ DT çözümüne ait Padé denklemleri,

$$p(x, t) = \begin{vmatrix} 1+x+t+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}t^2-xt+\frac{1}{2}xt+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}x^2t & 1+x+t+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}t^2-xt & 1+x+t \\ \frac{1}{4}x^2t^2+\frac{1}{24}t^4+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{6}xt^3-\frac{1}{6}x^3t & \frac{1}{2}xt^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}x^2t & \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}t^2-xt \\ \frac{1}{120}x^5+\frac{1}{24}xt^4+\frac{1}{12}x^3t^2+\frac{1}{24}x^4t+\frac{1}{120}t^5+\frac{1}{12}x^2t^3 & \frac{1}{4}x^2t^2+\frac{1}{24}t^4+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{6}xt^3-\frac{1}{6}x^3t & \frac{1}{2}xt^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}x^2t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{48}x^2t^4 + \frac{149}{144}x^3t^4 + \frac{35}{36}x^3t^3 - \frac{89}{96}x^4t^4 + \frac{7}{24}t^5x + \frac{5}{48}x^4t^2 \\
&+ \frac{7}{24}x^5t + \frac{1}{144}t^6 + \frac{1}{144}x^6 + \frac{121}{360}x^3t^5 + \frac{701}{1440}x^4t^5 + \frac{101}{240}x^2t^5 \\
&+ \frac{229}{720}t^6x + \frac{149}{144}x^4t^3 + \frac{101}{240}x^5t^2 + \frac{229}{720}x^6t + \frac{1}{240}t^7 \\
&+ \frac{1}{240}x^7 - \frac{131}{720}t^6x^2 + \frac{47}{360}t^7x + \frac{121}{360}x^5t^3 - \frac{131}{720}x^6t^2 \\
&+ \frac{47}{360}x^7t + \frac{1}{960}t^8 + \frac{1}{960}x^8 + \frac{1}{8640}x^9 + \frac{1}{8640}t^9 \\
&+ \frac{23}{576}t^8x + \frac{103}{720}t^7x^2 + \frac{23}{144}t^6x^3 + \frac{701}{1440}t^4x^5 \\
&+ \frac{23}{144}t^3x^6 + \frac{103}{720}t^2x^7 + \frac{23}{576}tx^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0.1041666667x^2t^4 + 1.034722222x^3t^4 + 0.9722222222x^3t^3 \\
&- 0.9270833333x^4t^4 + 0.2916666667t^5x + 0.1041666667x^4t^2 \\
&+ 0.2916666667x^5t + 0.006944444444t^6 + 0.006944444444x^6 \\
&+ 0.3361111111x^3t^5 + 0.4868055556x^4t^5 + 0.4208333333x^2t^5 \\
&+ 0.3180555556t^6x + 1.034722222x^4t^3 + 0.4208333333x^5t^2 \\
&+ 0.3180555556x^6t + 0.004166666667t^7 + 0.004166666667x^7 \\
&- 0.1819444444t^6x^2 + 0.1305555556t^7x + 0.3361111111x^5t^3 \\
&- 0.1819444444x^6t^2 + 0.1305555556x^7t + 0.001041666667t^8 \\
&+ 0.001041666667x^8 + 0.0001157407407x^9 + 0.0001157407407t^9 \\
&+ 0.03993055556t^8x + 0.1430555556t^7x^2 + 0.1597222222t^6x^3 \\
&+ 0.4868055556t^4x^5 + 0.1597222222t^3x^6 + 0.1430555556t^2x^7 \\
&+ 0.03993055556tx^8
\end{aligned}$$

$$q(x,t) = \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 \\
\frac{1}{4}x^2t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}xt^3 - \frac{1}{6}x^3t & \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}x^2t & \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}t^2 - xt \\
\frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{24}xt^4 + \frac{1}{12}x^3t^2 + \frac{1}{24}x^4t + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{12}x^2t^3 & \frac{1}{4}x^2t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}xt^3 - \frac{1}{6}x^3t & \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}x^2t
\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{48}x^2t^4 - \frac{1}{24}x^3t^4 + \frac{35}{36}x^3t^3 + \frac{7}{288}x^4t^4 + \frac{7}{24}t^5x \\
&+ \frac{5}{48}x^4t^2 + \frac{7}{24}x^5t + \frac{1}{144}t^6 + \frac{1}{144}x^6 - \frac{7}{40}x^3t^5 \\
&+ \frac{1}{40}x^2t^5 + \frac{7}{360}t^6x - \frac{1}{24}x^4t^3 + \frac{1}{40}x^5t^2 + \\
&\frac{7}{360}x^6t - \frac{1}{360}t^7 - \frac{1}{360}x^7 + \frac{7}{720}x^6t^2 \\
&- \frac{1}{40}t^7x - \frac{7}{40}x^5t^3 + \frac{7}{720}t^6x^2 - \frac{1}{40}x^7t \\
&+ \frac{1}{2880}t^8 + \frac{1}{2880}x^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0.1041666667x^2t^4 - 0.0416666667x^3t^4 + 0.9722222222x^3t^3 \\
&+ 0.024305555556x^4t^4 + 0.2916666667t^5x + 0.1041666667x^4t^2 \\
&+ 0.2916666667x^5t + 0.006944444444t^6 + 0.006944444444x^6 \\
&- 0.1750000000x^3t^5 + 0.02500000000x^2t^5 + 0.01944444444t^6x \\
&- 0.04166666667x^4t^3 + 0.02500000000x^5t^2 + 0.01944444444x^6t \\
&- 0.002777777778t^7 - 0.002777777778x^7 + 0.009722222222x^6t^2 \\
&- 0.02500000000t^7x - 0.1750000000x^5t^3 + 0.009722222222t^6x^2 \\
&- 0.02500000000x^7t + 0.0003472222222t^8 + 0.0003472222222x^8
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre,

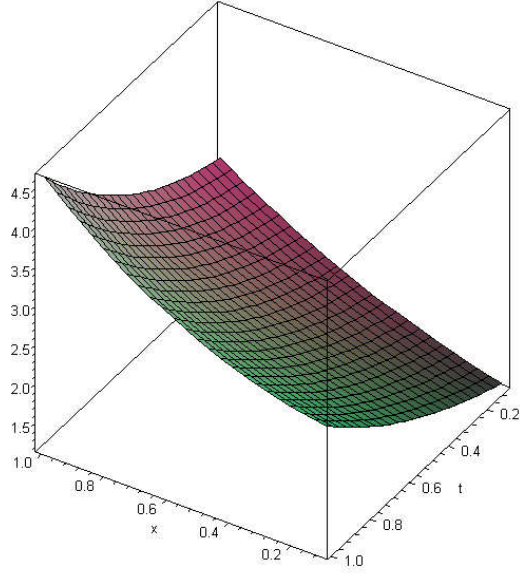
$$\begin{aligned}
r_{3,2}(x,t) = & \left(\frac{5}{48}x^2t^4 + \frac{149}{144}x^3t^4 + \frac{35}{36}x^3t^3 - \frac{89}{96}x^4t^4 + \frac{7}{24}t^5x + \frac{5}{48}x^4t^2 \right. \\
& + \frac{7}{24}x^5t + \frac{1}{144}t^6 + \frac{1}{144}x^6 + \frac{121}{360}x^3t^5 + \frac{701}{1440}x^4t^5 + \frac{101}{240}x^2t^5 + \frac{229}{720}t^6x \\
& + \frac{149}{144}x^4t^3 + \frac{101}{240}x^5t^2 + \frac{229}{720}x^6t + \frac{1}{240}t^7 + \frac{1}{240}x^7 - \frac{131}{720}t^6x^2 + \frac{47}{360}t^7x \\
& + \frac{121}{360}x^5t^3 - \frac{131}{720}x^6t^2 + \frac{47}{360}x^7t + \frac{1}{960}t^8 + \frac{1}{960}x^8 + \frac{1}{8640}x^9 + \frac{1}{8640}t^9 \\
& + \frac{23}{576}t^8x + \frac{103}{720}t^7x^2 + \frac{23}{144}t^6x^3 + \frac{701}{1440}t^4x^5 + \frac{23}{144}t^3x^6 + \frac{103}{720}t^2x^7 \\
& + \frac{23}{576}tx^8 \Big) / \left(\frac{5}{48}x^2t^4 - \frac{1}{24}x^3t^4 + \frac{35}{36}x^3t^3 + \frac{7}{288}x^4t^4 + \frac{7}{24}t^5x + \frac{5}{48}x^4t^2 \right. \\
& + \frac{7}{24}x^5t + \frac{1}{144}t^6 + \frac{1}{144}x^6 - \frac{7}{40}x^3t^5 + \frac{1}{40}x^2t^5 + \frac{7}{360}t^6x - \frac{1}{24}x^4t^3 \\
& + \frac{1}{40}x^5t^2 + \frac{7}{360}x^6t - \frac{1}{360}t^7 - \frac{1}{360}x^7 + \frac{7}{720}x^6t^2 - \frac{1}{40}t^7x - \frac{7}{40}x^5t^3 \\
& \left. + \frac{7}{720}t^6x^2 - \frac{1}{40}x^7t + \frac{1}{2880}t^8 + \frac{1}{2880}x^8 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (0.1041666667x^2t^4 + 1.034722222x^3t^4 + 0.9722222222x^3t^3 \\
&- 0.9270833333x^4t^4 + 0.2916666667t^5x + 0.1041666667x^4t^2 \\
&+ 0.2916666667x^5t + 0.006944444444t^6 + 0.006944444444x^6 \\
&+ 0.3361111111x^3t^5 + 0.4868055556x^4t^5 + 0.4208333333x^2t^5 \\
&+ 0.3180555556t^6x + 1.034722222x^4t^3 + 0.4208333333x^5t^2 \\
&+ 0.3180555556x^6t + 0.004166666667t^7 + 0.004166666667x^7 \\
&- 0.1819444444t^6x^2 + 0.1305555556t^7x + 0.3361111111x^5t^3 \\
&- 0.1819444444x^6t^2 + 0.1305555556x^7t + 0.001041666667t^8 \\
&+ 0.001041666667x^3 + 0.0001157407407x^9 + 0.0001157407407t^9 \\
&+ 0.03993055556t^8x + 0.1430555556t^7x^2 + 0.1597222222t^6x^3 \\
&+ 0.4868055556t^4x^5 + 0.1597222222t^3x^6 + 0.1430555556t^2x^7 \\
&+ 0.03993055556tx^8)/(0.1041666667x^2t^4 - 0.04166666667x^3t^4 \\
&+ 0.9722222222x^3t^3 + 0.02430555556x^4t^4 + 0.2916666667t^5x \\
&+ 0.1041666667x^4t^2 + 0.2916666667x^5t + 0.006944444444t^6 \\
&+ 0.006944444444x^6 - 0.1750000000x^3t^5 + 0.02500000000x^2t^5 \\
&+ 0.01944444444t^6x - 0.04166666667x^4t^3 + 0.02500000000x^5t^2 \\
&+ 0.01944444444x^6t - 0.002777777778t^7 - 0.002777777778x^7 \\
&+ 0.009722222222x^6t^2 - 0.02500000000t^7x - 0.1750000000x^5t^3 \\
&+ 0.009722222222t^6x^2 - 0.02500000000x^7t + 0.0003472222222t^8 \\
&+ 0.0003472222222x^8)
\end{aligned}$$

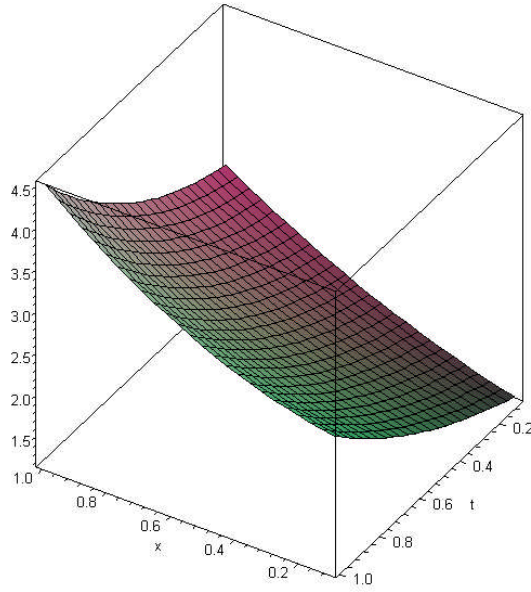
olarak elde edilir. Şimdi differensiyel transform metoduyla elde edilen $T_1(u(x,t))$ çözümünü ve $T_1(u(x,t))$ çözümüne ait $r_{3,2}(x,t)$ Padé yaklaşımını, $f_4(x,t) = u(x,t) = e^x \cosh t + e^{-x} \sinh t$ analitik çözümünü baz alarak karşılaştıralım. Bu karşılaştırmadan aşağıdaki (Çizelge 5.4) ve grafikleri elde ettik. (Şekil 5.6 , Şekil 5.7 , Şekil 5.8)

Çizelge 5.4 $f_4(x,t) = u(x,t) = e^x \cosh t + e^{-x} \sinh t$, $T_1(u(x,t))$ ve $r_{3,2}(x,t)$ değerleri

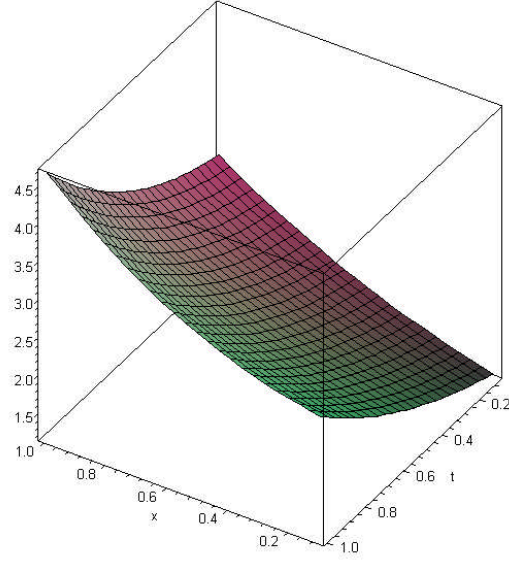
x 'in değişen değerlerine karşın ($t = 0.01$) alınmıştır.					
x	$u(x,t)$	$T_1(u(x,t))$	$ u(x,t) - T(u_1(x,t)) $	$r_{3,2}(x,t)$	$ u(x,t) - r_{3,2}(x,t) $
0.1	1.114274702	1.114270409	0.000004293	1.114274704	2×10^{-9}
0.2	1.229651272	1.229581203	0.000070069	1.229651358	8.6×10^{-8}
0.3	1.357334607	1.356972598	0.000362009	1.357335513	9.06×10^{-7}
0.4	1.498602601	1.497434645	0.001167956	1.498607379	0.000004778
0.5	1.654869115	1.651957392	0.002911723	1.654886221	0.000017106
0.6	1.827698114	1.821530891	0.006167223	1.827746293	0.000048179
0.7	2.018819331	2.007145190	0.011674141	2.018934635	0.000115304
0.8	2.230145570	2.209790339	0.020355231	2.230390825	0.000245255
0.9	2.463791855	2.430456389	0.033335466	2.464268955	0.000477100
1.0	2.722096598	2.670133389	0.051963209	2.722961930	0.000865332



Şekil 5.6 $f_4(x, t) = u(x, t) = e^x \cosh t + e^{-x} \sinh t$ analitik çözümü



Şekil 5.7 $T_1(u(x, t))$ DT çözümü



Şekil 5.8 $T_1(u(x,t))$ DT çözümünün $r_{3,2}(x,t)$ PY

Şimdi $T_1(v(x,t))$ differensiyel transform çözümüne ait $r_{3,2}(x,t)$ Padé yaklaşımını

bulup, DTM ile bulduğumuz

$$T_1(v(x,t)) = \left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \dots\right)$$

$$- \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \dots\right)$$

çözümüyle, $g(x,t) = v(x,t) = e^{-x} \cosh t - e^x \sinh t$ analitik çözümünü baz alarak karşılaştıralım.

Aynı şekilde (4.1) ve (4.2) determinant denklemlerini kullanarak $T_1(v(x,t))$ DT çözümüne ait $r_{3,2}(x,t)$ Padé yaklaşımı aşağıdaki şekilde bulunur. (4.1) ve (4.2) denklemlerine göre Padé denklemleri, $p(x,t)$ ve $q(x,t)$ sırasıyla,

$$p(x,t)=\begin{vmatrix} 1-x-t+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}t^2-xt-\frac{1}{2}xt^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}x^2t & 1-x-t+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}t^2-xt & 1-x-t \\ \frac{1}{4}x^2t^2+\frac{1}{24}t^4+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{6}xt^3-\frac{1}{6}x^3t & -\frac{1}{2}xt^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}x^2t & \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}t^2-xt \\ -\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{24}xt^4-\frac{1}{12}x^3t^2-\frac{1}{24}x^4t-\frac{1}{120}t^5-\frac{1}{12}x^2t^3 & \frac{1}{4}x^2t^2+\frac{1}{24}t^4+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{6}xt^3-\frac{1}{6}x^3t & -\frac{1}{2}xt^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}x^2t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5}{48}x^2t^4 - \frac{149}{144}x^3t^4 + \frac{35}{36}x^3t^3 - \frac{89}{96}x^4t^4 + \frac{7}{24}t^5x + \frac{5}{48}x^4t^2 \\ &+ \frac{7}{24}x^5t + \frac{1}{144}t^6 + \frac{1}{144}x^6 + \frac{121}{360}x^3t^5 - \frac{701}{1440}x^4t^5 - \frac{101}{240}x^2t^5 \\ &- \frac{229}{720}t^6x - \frac{149}{144}x^4t^3 - \frac{101}{240}x^5t^2 - \frac{229}{720}x^6t - \frac{1}{240}t^7 \\ &- \frac{1}{240}x^7 - \frac{131}{720}t^6x^2 + \frac{47}{360}t^7x + \frac{121}{360}x^5t^3 - \frac{131}{720}x^6t^2 \\ &+ \frac{47}{360}x^7t + \frac{1}{960}t^8 + \frac{1}{960}x^8 - \frac{1}{8640}x^9 - \frac{1}{8640}t^9 \\ &- \frac{23}{576}t^8x - \frac{103}{720}t^7x^2 - \frac{23}{144}t^6x^3 - \frac{701}{1440}t^4x^5 \\ &- \frac{23}{144}t^3x^6 - \frac{103}{720}t^2x^7 - \frac{23}{576}tx^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0.1041666667x^2t^4 - 1.034722222x^3t^4 + 0.9722222222x^3t^3 \\ &- 0.9270833333x^4t^4 + 0.2916666667t^5x + 0.1041666667x^4t^2 \\ &+ 0.2916666667x^5t + 0.006944444444t^6 + 0.006944444444x^6 \\ &+ 0.3361111111x^3t^5 - 0.4868055556x^4t^5 - 0.4208333333x^2t^5 \\ &- 0.3180555556t^6x - 1.034722222x^4t^3 - 0.4208333333x^5t^2 \\ &- 0.3180555556x^6t - 0.004166666667t^7 - 0.004166666667x^7 \\ &- 0.1819444444t^6x^2 + 0.1305555556t^7x + 0.3361111111x^5t^3 \\ &- 0.1819444444x^6t^2 + 0.1305555556x^7t + 0.001041666667t^8 \\ &+ 0.001041666667x^8 - 0.0001157407407x^9 - 0.0001157407407t^9 \\ &- 0.03993055556t^8x - 0.1430555556t^7x^2 - 0.1597222222t^6x^3 \\ &- 0.4868055556t^4x^5 - 0.1597222222t^3x^6 - 0.1430555556t^2x^7 \\ &- 0.03993055556tx^8 \end{aligned}$$

bulunur.

$$q(x,t) = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4}x^2t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}xt^3 - \frac{1}{6}x^3t & -\frac{1}{2}xt^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}x^2t & \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}t^2 - xt \\ -\frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{24}xt^4 - \frac{1}{12}x^3t^2 - \frac{1}{24}x^4t - \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{12}x^2t^3 & \frac{1}{4}x^2t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}xt^3 - \frac{1}{6}x^3t & -\frac{1}{2}xt^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}x^2t \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5}{48}x^2t^4 + \frac{1}{24}x^3t^4 + \frac{35}{36}x^3t^3 + \frac{7}{288}x^4t^4 + \frac{7}{24}t^5x \\ &+ \frac{5}{48}x^4t^2 + \frac{7}{24}x^5t + \frac{1}{144}t^6 + \frac{1}{144}x^6 - \frac{7}{40}x^3t^5 \\ &- \frac{1}{40}x^2t^5 - \frac{7}{360}t^6x + \frac{1}{24}x^4t^3 - \frac{1}{40}x^5t^2 \\ &- \frac{7}{360}x^6t + \frac{1}{360}t^7 + \frac{1}{360}x^7 + \frac{7}{720}x^6t^2 \\ &- \frac{1}{40}t^7x - \frac{7}{40}x^5t^3 + \frac{7}{720}t^6x^2 - \frac{1}{40}x^7t \\ &+ \frac{1}{2880}t^8 + \frac{1}{2880}x^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0.1041666667x^2t^4 + 0.0416666667x^3t^4 + 0.9722222222x^3t^3 \\ &+ 0.0243055556x^4t^4 + 0.2916666667t^5x + 0.1041666667x^4t^2 \\ &+ 0.2916666667x^5t + 0.006944444444t^6 + 0.006944444444x^6 \\ &- 0.1750000000x^3t^5 - 0.02500000000x^2t^5 - 0.01944444444t^6x \\ &+ 0.0416666667x^4t^3 - 0.02500000000x^5t^2 - 0.01944444444x^6t \\ &+ 0.002777777778t^7 + 0.002777777778x^7 + 0.009722222222x^6t^2 \\ &- 0.02500000000t^7x - 0.1750000000x^5t^3 + 0.009722222222t^6x^2 \\ &- 0.02500000000x^7t + 0.0003472222222t^8 + 0.0003472222222x^8 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre $r_{3,2}(x,t) = \frac{p(x,t)}{q(x,t)}$,

$$\begin{aligned}
r_{3,2}(x,t) = & \left(\frac{5}{48}x^2t^4 - \frac{149}{144}x^3t^4 + \frac{35}{36}x^3t^3 - \frac{89}{96}x^4t^4 \right. \\
& + \frac{7}{24}t^5x + \frac{5}{48}x^4t^2 + \frac{7}{24}x^5t + \frac{1}{144}t^6 + \frac{1}{144}x^6 + \frac{121}{360}x^3t^5 \\
& - \frac{701}{1440}x^4t^5 - \frac{101}{240}x^2t^5 - \frac{229}{720}t^6x - \frac{149}{144}x^4t^3 - \frac{101}{240}x^5t^2 \\
& - \frac{229}{720}x^6t - \frac{1}{240}t^7 - \frac{1}{240}x^7 - \frac{131}{720}t^6x^2 + \frac{47}{360}t^7x + \frac{121}{360}x^5t^3 \\
& - \frac{131}{720}x^6t^2 + \frac{47}{360}x^7t + \frac{1}{960}t^8 + \frac{1}{960}x^8 - \frac{1}{8640}x^9 - \frac{1}{8640}t^9 \\
& - \frac{23}{576}t^8x - \frac{103}{720}t^7x^2 - \frac{23}{144}t^6x^3 - \frac{701}{1440}t^4x^5 - \frac{23}{144}t^3x^6 - \frac{103}{720}t^2x^7 \\
& - \frac{23}{576}tx^8 \Big) / \left(\frac{5}{48}x^2t^4 + \frac{1}{24}x^3t^4 + \frac{35}{36}x^3t^3 + \frac{7}{288}x^4t^4 + \frac{7}{24}t^5x \right. \\
& + \frac{5}{48}x^4t^2 + \frac{7}{24}x^5t + \frac{1}{144}t^6 + \frac{1}{144}x^6 - \frac{7}{40}x^3t^5 - \frac{1}{40}x^2t^5 - \frac{7}{360}t^6x \\
& + \frac{1}{24}x^4t^3 - \frac{1}{40}x^5t^2 - \frac{7}{360}x^6t + \frac{1}{360}t^7 + \frac{1}{360}x^7 + \frac{7}{720}x^6t^2 - \frac{1}{40}t^7x \\
& \left. - \frac{7}{40}x^5t^3 + \frac{7}{720}t^6x^2 - \frac{1}{40}x^7t + \frac{1}{2880}t^8 + \frac{1}{2880}x^8 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & (0.1041666667x^2t^4 - 1.034722222x^3t^4 + 0.972222222x^3t^3 - 0.9270833333x^4t^4 \\
& + 0.2916666667t^5x + 0.1041666667x^4t^2 + 0.2916666667x^5t + 0.006944444444t^6 \\
& + 0.006944444444x^6 + 0.3361111111x^3t^5 - 0.4868055556x^4t^5 - 0.4208333333x^2t^5 \\
& - 0.3180555556t^6x - 1.034722222x^4t^3 - 0.4208333333x^5t^2 - 0.3180555556x^6t \\
& - 0.004166666667t^7 - 0.004166666667x^7 - 0.1819444444t^6x^2 + 0.1305555556t^7x \\
& + 0.3361111111x^5t^3 - 0.1819444444x^6t^2 + 0.1305555556x^7t + 0.001041666667t^8 \\
& + 0.001041666667x^8 - 0.0001157407407x^9 - 0.0001157407407t^9 - 0.03993055556t^8x \\
& - 0.1430555556t^7x^2 - 0.1597222222t^6x^3 - 0.4868055556t^4x^5 - 0.1597222222t^3x^6 \\
& - 0.1430555556t^2x^7 - 0.03993055556tx^8) / (0.1041666667x^2t^4 + 0.04166666667x^3t^4 \\
& + 0.9722222222x^3t^3 + 0.02430555556x^4t^4 + 0.2916666667t^5x + 0.1041666667x^4t^2 \\
& + 0.2916666667x^5t + 0.006944444444t^6 + 0.006944444444x^6 - 0.1750000000x^3t^5 \\
& - 0.02500000000x^2t^5 - 0.01944444444t^6x + 0.04166666667x^4t^3 - 0.02500000000x^5t^2 \\
& - 0.01944444444x^6t + 0.002777777778t^7 + 0.002777777778x^7 + 0.009722222222x^6t^2 \\
& - 0.02500000000t^7x - 0.1750000000x^5t^3 + 0.009722222222t^6x^2 - 0.02500000000x^7t \\
& + 0.0003472222222t^8 + 0.0003472222222x^8)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

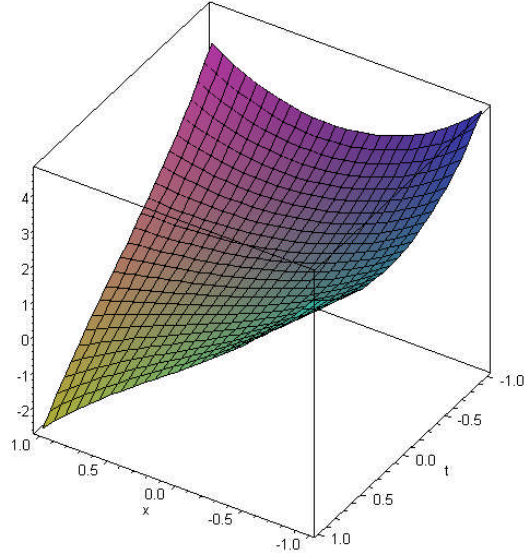
Buna göre ,

$$T_1(v(x,t)) = \left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \dots\right) \\ - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \dots\right)$$

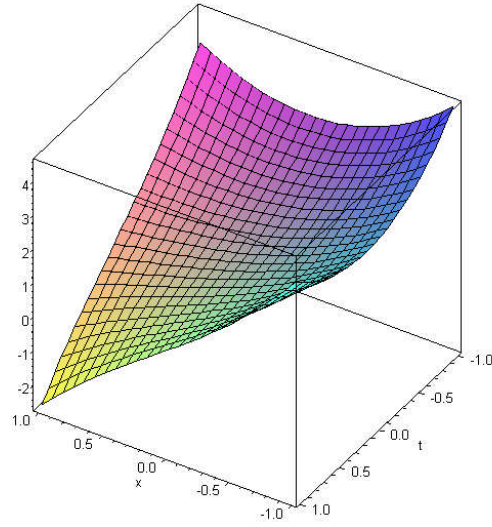
DT çözümüyle, $r_{3,2}(x,t)$ Padé yaklaşımını karşılaştırdığımızda aşağıdaki nümerik sonuçları (Çizelge 5.5) ve grafikleri elde ettik (Şekil 5.8),(Şekil 5.9),(Şekil 5.10)

Çizelge 5.5 $g(x,t) = v(x,t) = e^{-x} \cosh t - e^x \sinh t$, $T_1(v(x,t))$ ve $r_{3,2}(x,t)$ değerleri

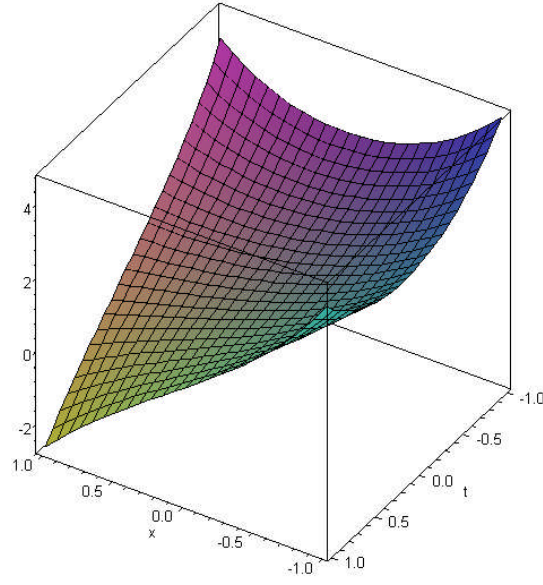
x 'in değişen değerlerine karşın ($t = 0.01$) alınmıştır.					
x	$v(x,t)$	$T_1(v(x,t))$	$ v(x,t) - T_1(v(x,t)) $	$r_{3,2}(x,t)$	$ v(x,t) - r_{3,2}(x,t) $
0.1	0.8938307665	0.8938267241	0.0000040424	0.8938307678	1.3×10^{-9}
0.2	0.8065574584	0.8064940631	0.0000633953	0.8065575337	7.53×10^{-3}
0.3	0.7273564485	0.7270418001	0.0003146484	0.7273572155	7.670×10^{-7}
0.4	0.6554350664	0.6554598849	0.0009751815	0.6554388528	0.0000037864
0.5	0.5900734987	0.5877382674	0.0023352313	0.5900861302	0.0000126315
0.6	0.5306175850	0.5258668973	0.0047506877	0.5306506541	0.0000330691
0.7	0.4764722704	0.4678357246	0.0086365458	0.4765457423	0.0000734719
0.8	0.4270956503	0.4126346991	0.0144609512	0.4272407031	0.0001450528
0.9	0.3819935472	0.3592537706	0.0227397766	0.3822555806	0.0002620334
1.0	0.3407145639	0.3066828889	0.0340316750	0.3411563553	0.0004417914



Şekil 5.9 $g(x,t) = v(x,t) = e^{-x} \cosh t - e^x \sinh t$ analitik çözümü



Şekil 5.10 $T_1(v(x))$ DT çözümü



Şekil 5.11 $T_1(v(x))$ DT çözümünün $r_{3,2}(x,t)$ PY

Görüldüğü gibi, Padé Yaklaşımları(PY) differensiyel Transform Metodundan daha iyi bir yaklaşım sergilemektedir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tek değişkenli diferensiyel denklemler için, tek değişkenli Padé yaklaşımlarının bir çok nümerik metottan iyi yaklaşım sergilediği bilinmektedir. Bu çalışmada aynı yaklaşım çok değişkenli diferensiyel denklemler içinde uygulandı. Karşılaştırma çok değişkenli Padé yaklaşımları ve iki boyutlu diferensiyel transform metodu arasında yapıldı.

Birinci uygulamada tek değişkenli Padé yaklaşımları ve bir boyutlu diferensiyel transform arasında yapıldı. Bu karşılaştırma sonucunda, Padé yaklaşımlarının diferensiyel transform metodundan daha iyi yaklaşım sergilediği ve tam çözümle daha uyumlu olduğu görüldü.

İkinci uygulamada iki boyutlu bir KDD iki boyutlu DTM ile çözüldü. Bulunan sonuç, KDD'nin analitik çözümü baz alınarak, DT çözümünün Padé yaklaşımlarıyla karşılaştırıldı. Bu karşılaştırma sonucu, Padé yaklaşımlarının DTM'den daha iyi yaklaşım sergilediği ve analitik çözümle daha uyumlu olduğu görüldü.

Üçüncü uygulamada ise, başka bir iki boyutlu KDD iki boyutlu DTM ile çözüldü. DTM'den elde edilen çözüm ile bu çözüme ait Padé yaklaşımları karşılaştırıldı. Karşılaştırma sonucu, Padé yaklaşımlarının DTM'den daha iyi yaklaşım sergilediği ve tam çözümle daha uyumlu olduğu görüldü.

Üç uygulamaya bağlı olarak Padé yaklaşımları ve DTM arasında yapılan karşılaştırmalar sonucunda, Padé yaklaşımlarının DTM'den daha iyi bir yaklaşım sergilediği ve tam çözümle daha uyumlu olduğu görüldü.

KAYNAKLAR

- Ayaz, Fatma., (2004a), “Applications of Differential Transform Method to Differential-Algebraic Equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 152:649-657.
- Ayaz, Fatma., (2003), “On the Two-Dimensional Differential Transform Method”, *Applied Mathematics and Computation*, 143:361-374.
- Ayaz, Fatma., (2004b), “Solutions of the System of Differential Equations by Differential Transform Method”, *Applied Mathematics and Computation*, 147:547-567.
- Abdel-Halim Hassan, I. H., (2006), “Comparison Differential Transformation Technique with Adomian Decomposition Method for Linear and Nonlinear Initial Value Problems ”, *Chaos, Solutions and Fractals*.
- Baker, G. A. ve Graves-Morris, P., (1996), *Padé Approximants*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Bayram, M. ve Çelik, E., (2003), “Arbitrary Order Numerical Method for Solving Differential-Algebraic Equation by Padé Series”, *Applied Mathematics and Computation*, 137:57-65.
- Bayram, M. ve Çelik, E., (2004), “Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations System and Applications”, *Applied Mathematics and Computation*, 154:405-413.
- Bayram, M. ve Çelik, E., (2003), “On the Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations by Padé Series”, *Applied Mathematics and Computation*, 137:151-160.
- Bayram, M. ve Çelik, E., (2005), “The Numerical Solution of Physical Problems Modeled as a systems of Differential-Algebraic Equations (DAEs)”, *Applied Mathematics and Computation*, 342:1-6.
- Bayram, M., (2001), *Kısmi Diferensiyel Denklemler*, Atatürk Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Basımevi, Erzurum.
- Bildik, N. ve Konuralp, A., (2006), “Two-Dimensional Differential Transform Method, Adomian’s Decomposition Method, and Variational Iteration Method for Partial Differential Equations”, *International Journal of Computer Mathematics*, Vol.83, 12:973-987.
- Brezinski, C., (1991), *History of Continued Fractions and Padé Approximants*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg.
- Cuyt, A. , (1983), “How Well the Concept of Padé Approximant be Generalized to the Multivariate Case”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 105:25-50.
- Cuyt, A. , (1983), “A Comparison of Some Multivariate Padé Approximants”, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol.14, No.1.
- Cuyt, A. , Tan, J. ve Zhou, P., (2001), “General Order Multivariate Padé Approximants for Pseudo-Multivariate Functions”, *Mathematics of Computation*, Vol.75, 254:727-741.
- Cuyt, A. ve Wuytack, L., (1987), *Nonlinear Methods in Numerical Analysis*, Amsterdam.
- Çelik, E., (2002), *Diferensiyel-Cebirsel Denklemlerin Nümerik Çözümü*, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

- Grag, W.B. ,(1972), “ Padé Table and Its Relation to Certain Algorithms of Numerical Analysis”, Society for Industrial and Applied Mathematics ,Vol.14,1:1-62.
- Guillaume, P., ve Huard, A., (2000), “ Multivariate Padé Approximation”, Journal of Computational and Applied Mathematics ,121:197-219.
- Kreyszig, E., (1993), Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons ,Singapore.
- Mceliece, R.J., ve Shearee, J. B., (1978), “A Property of Euclid’s Algorithm and an Application to Padé Approximation”, Journal On Applied Mathematics. 34:621-615.
- Werner, H. ,(1986), “ Multivariate Padé Approximation”, Numerische Mathematik ,48:429-440.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 18.03.1974

Doğum yeri Muş

Lise 1990-1993 Erzurum Lisesi

Lisans 2001-2005 Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü