

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORCID : - - -

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /

Tezin Savunma Tarihi : / /

Tez Danışmanı :
ORCID : - - -

Trabzon

ÖNSÖZ

“Çok Odaklı Yaklaşımla Esnek Rastgele Sayılar Üretilmesi” isimli bu tez Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı, Doktora Programı’nda hazırlanmıştır.

Tez çalışma süresinde değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren benden yardımlarını, desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Orhan KESEMEN’e, eğitimimde emeği geçen tüm hocalarıma, tez sürecinde hiçbir yardımdan kaçınmayan hocalarım Dr. Öğr. Üyesi Eda ÖZKUL’a, Arş. Gör. Dr. Özge TEZEL’e ve Dr. Öğr. Üyesi Buğra Kaan TİRYAKİ’ye teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak, tüm hayatım boyunca maddi ve manevi her zaman beni destekleyen, her adımda arkamda duran aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezin, bundan sonraki çalışmalara katkı sağlamasını temenni ederim.

Tuncay ULUYURT
Trabzon 2023

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Çok Odaklı Yaklaşımla Esnek Rastgele Sayılar Üretilmesi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Orhan KESEMEN’in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 20/01/2023

Tuncay ULUYURT

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
TABLolar DİZİNİ.....	XVI
SEMBOLLER DİZİNİ	XVII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.2. Bazı İstatistiksel Dağılımlar ve Parametre Tahminleri.....	3
1.2.1. Düzgün Dağılım.....	3
1.2.2. Üstel Dağılım.....	5
1.2.3. Normal Dağılım	6
1.2.4. Laplace Dağılımı	8
1.2.5. Lognormal Dağılım	9
1.3. Ortalamanın Parametre Tahminleri	10
1.3.1. Standart Düzgün Dağılım İçin Momentler	12
1.4. Çok Odaklı İstatistikler.....	13
1.4.1. Standart Düzgün Dağılım İçin Sıralı İstatistikleri	14
1.5. Sözde Rastgele Sayı Üretim Teknikleri.....	17
1.5.1. Düzgün Dağılımdan Rastgele Sayı Üretimi	18
1.5.1. Red/Kabul ile Rastgele Sayı Üretimi.....	19
1.5.2. Ters Dağılım ile Rastgele Sayı Üretimi.....	20
1.6. Dizilerde Uyuşmazlık Ölçüsü.....	21
1.7. Yarı Rastgele Sayı Üretimi.....	22

1.7.1.	Beklenen Yarı Rastgele Sayılar Dizisi	22
1.7.2.	Alt Yarı Rastgele Sayılar Dizisi	24
1.7.3.	Titreşimli Yarı Rastgele Sayılar Dizisi.....	25
1.7.4.	İrrasyonel Yarı Rastgele Sayılar Dizisi	26
1.7.5.	Van Der Corput Yarı Rastgele Sayılar Dizisi.....	28
1.7.6.	Poisson-Disk Yarı Rastgele Sayılar Dizisi	29
1.8.	Uyum İyiliği Testleri	31
1.8.1.	Cramer-von Mises (CVM) Uyum İyiliği Testi.....	31
1.8.2.	Kolmogorov-Smirnov (KS) Uyum İyiliği Testi	32
1.8.3.	Serbest Ki-Kare Testi	32
2.	YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	33
2.1.	Esnek Rastgele Sayı Üretilmesi.....	33
2.1.1.	Standart Düzgün Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Üretilmesi.....	40
2.1.2.	Düzgün Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Üretilmesi	43
2.1.3.	Üstel Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Üretilmesi	45
2.1.4.	Normal Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Üretilmesi.....	47
2.1.5.	Laplace Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Üretilmesi	49
2.1.6.	Lognormal Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Üretilmesi	51
3.	BULGULAR.....	53
3.1.	Esnek Rastgele Sayıların Temel Parametrelere Göre İncelenmesi.....	53
3.1.1.	Standart Düzgün Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Simülasyonları.....	54
3.1.2.	Düzgün Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Simülasyonları	62
3.1.3.	Üstel Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Simülasyonları	68
3.1.4.	Normal Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Simülasyonları	74
3.1.5.	Laplace Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Simülasyonları.....	80
3.1.6.	Lognormal Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Simülasyonları.....	86
4.	SONUÇLAR.....	93
5.	KAYNAKLAR	95

ÖZGEÇMİŞ

Doktora Tezi

ÖZET

ÇOK ODAKLI YAKLAŞIMLA ESNEK RASTGELE SAYILAR ÜRETİLMESİ

Tuncay ULUYURT

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Orhan KESEMEN
2023, 96 Sayfa

Rastgele sayı üretimi istatistik ve veri biliminin en temel konularından birisidir. Rastgele sayılar istatistiksel simülasyonlar, makine öğrenmesi, eğitim, savunma sanayisi, bilgisayar oyunları gibi birçok alanda yaygın bir biçimde kullanılmaktadır.

Bu çalışmada rastgele sayı üreticilerini kullanarak değişken uyumsuzluğa sahip esnek rastgele sayı üretilmesinin algoritması geliştirilmiştir. Önerilen esnek rastgele sayıların formülasyonu ve momentlerinin formülasyonları hesaplanmıştır. Birçok uygulamada kullanılan yarı rastgele sayılar ile sözde rastgele sayılar arasında köprü oluşturacak bir yaklaşım olan esnek rastgele sayı üretici geliştirilmiştir. Esnek rastgele sayıların geliştirilmesinde kullanılan esneklik parametresi $[0,1]$ arasında bir değer alabilmektedir. Esneklik parametresinin 0 olması durumunda beklenen yarı rastgele sayılar, sıfıra yakın olması durumunda yarı rastgele sayılar, 1 olması durumunda ise sözde rastgele sayılar üretilmektedir. Beş farklı dağılımdan farklı örneklem boyutlarında üretilen esnek rastgele sayıların esneklik parametresi arttıkça uyumsuzluk ölçüsünün düzgün bir şekilde arttığı yapılan simülasyonlarda gözlenmiştir. Simülasyonlarda üretilen tüm esnek rastgele sayılar üç farklı uyum iyiliğine testine tabii tutulmuştur. Esneklik parametresi azaldıkça hipotezin reddedilme yüzdesinin düştüğü ve hipotezin I. tip hatası azalır.

Anahtar Kelimeler: Sözde Rastgele Sayılar, Yarı Rastgele Sayılar, Uyumsuzluk Ölçüsü, Esnek Rastgele Sayılar.

PhD. Thesis

SUMMARY

GENERATE SOFT RANDOM NUMBERS WITH A MULTI-FOCUS APPROACH

Tuncay ULUYURT

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Statistical and Computer Sciences Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Orhan KESEMEN
2023, 96 Pages

Random number generation is one of the most fundamental topics in statistics and data science. Random numbers are widely used in many fields such as statistical simulations, machine learning, education, defense industry, computer games.

In this study, an algorithm for generating soft random numbers with variable discrepancy is developed using random number generators. The formulation of the proposed soft random numbers and the formulations of their moments are calculated. A soft random number generator, which is an approach to bridge the quasi-random numbers used in many applications and the pseudo-random numbers, has been developed. The softening parameter used in the development of soft random numbers can take a value between $[0,1]$. If the softening parameter is 0, grid quasi-random numbers are generated, if it is close to zero, quasi-random numbers, and if it is 1, pseudo-random numbers are generated. It has been observed in the simulations that the size of the discrepancy increases regularly as the softening parameter of the soft random numbers generated in different sample sizes from five different distributions increases. All soft random numbers generated in the simulations were tested for three different goodness of fit. It was observed that as the soft parameter decreased, the percentage of rejection of the hypothesis decreased and the type I error of the hypothesis decreases.

Key Words: Pseudo Random Numbers, Quasi Random Numbers, Discrepancy Measure, Soft Random Numbers.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.	[0,1) aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş 12 tane rastgele sayının sayı doğrusunda gösterimi.....	19
Şekil 2.	[0,1) aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş 12 tane beklenen yarı rastgele sayının sayı doğrusunda gösterimi.	23
Şekil 3.	[0,1) aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş 12 tane alt yarı rastgele sayının sayı doğrusunda gösterimi, (a) 2 bölgeye ayrılmış olarak üretilen alt yarı rastgele sayılar, (b) 4 bölgeye ayrılmış olarak üretilen alt yarı rastgele sayılar, (c) 6 bölgeye ayrılmış olarak üretilen alt yarı rastgele sayılar.....	25
Şekil 4.	[0,1) aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş 12 tane rastgele sayının sayı doğrusunda gösterimi.....	26
Şekil 5.	[0,1) aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş 12 tane rastgele sayının sayı doğrusunda gösterimi, (a) altın oran $1 + \frac{5}{2}$ irrasyonel sayı kullanılarak elde edilmiş yarı rastgele sayılar, (b) 2 irrasyonel sayı kullanılarak elde edilmiş yarı rastgele sayılar, (c) π irrasyonel sayı kullanılarak elde edilmiş yarı rastgele sayılar.	27
Şekil 6.	[0,1) aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş 12 tane rastgele sayının sayı doğrusunda gösterimi, (a) 2-tabanında sayı kullanılarak elde edilmiş yarı rastgele sayılar, (b) 3-tabanında sayı kullanılarak elde edilmiş yarı rastgele sayılar, (c) 5-tabanında sayı kullanılarak elde edilmiş yarı rastgele sayılar.	29
Şekil 7.	[0,1) aralığında üretilmiş 12 tane Poisson-Disk yarı rastgele sayının sayı doğrusunda gösterimi, (a) 10 denemeli Poisson-disk yarı rastgele sayılar, (b) 100 denemeli Poisson-disk yarı rastgele sayılar, (c) 1000 denemeli Poisson-disk yarı rastgele sayılar.....	30
Şekil 8.	Standart düzgün dağılımdan farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 9 tane esnek rastgele sayının sayı doğrusu üzerinde gösterimi, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	41
Şekil 9.	İki boyutlu esnek rastgele değerlerin gösterimi, , (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	42

Şekil 10.	Düzgün dağılımdan $[0,10)$ aralığında farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 30 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	43
Şekil 11.	Düzgün dağılımdan $[0,10)$ aralığında farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 100 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	44
Şekil 12.	Düzgün dağılımdan $[0,10)$ aralığında farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 300 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	44
Şekil 13.	Üstel dağılımdan $\lambda = 0.5$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 30 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	45
Şekil 14.	Üstel dağılımdan $\lambda = 0.5$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 100 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	46
Şekil 15.	Üstel dağılımdan $\lambda = 0.5$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 300 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	46
Şekil 16.	Normal dağılımdan $\mu = 5, \sigma = 1.2$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 30 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	47
Şekil 17.	Normal dağılımdan $\mu = 5, \sigma = 1.2$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 100 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	48
Şekil 18.	Normal dağılımdan $\mu = 5, \sigma = 1.2$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 300 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	48
Şekil 19.	Laplace dağılımdan $\mu = 5, \lambda = 1$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 30 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	49

Şekil 20.	Laplace dağılımdan $\mu = 5, \lambda = 1$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 100 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	50
Şekil 21.	Laplace dağılımdan $\mu = 5, \lambda = 1$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 300 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	50
Şekil 22.	Lognormal dağılımdan $\mu = 0.2, \sigma = 0.5$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 30 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	51
Şekil 23.	Lognormal dağılımdan $\mu = 0.2, \sigma = 0.5$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 100 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	52
Şekil 24.	Lognormal dağılımdan $\mu = 0.2, \sigma = 0.5$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 300 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, f $m = 1.0$	52
Şekil 25	Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaları.....	56
Şekil 26	Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki varyanslarının ortalamaları.....	57
Şekil 27	Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaların varyansı	58
Şekil 28	Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki uyumsuzluk ölçüleri	58
Şekil 29	Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testine göre ortalama p-değerleri	59
Şekil 30	Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testine göre ortalama p-değerleri	59
Şekil 31	Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testine göre ortalama p-değerleri	60
Şekil 32	Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testinin kabul yüzdesi	61

Şekil 33	Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testinin kabul yüzdesi	61
Şekil 34	Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testinin kabul yüzdesi	62
Şekil 35	Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaları.....	63
Şekil 36	Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki varyanslarının ortalamaları.....	63
Şekil 37	Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaların varyansı	64
Şekil 38	Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki uyumsuzluk ölçüleri	65
Şekil 39	Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testine göre ortalama p-değerleri	65
Şekil 40	Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testine göre ortalama p-değerleri	66
Şekil 41	Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testine göre ortalama p-değerleri	66
Şekil 42	Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testinin kabul yüzdesi	67
Şekil 43	Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testinin kabul yüzdesi	67
Şekil 44	Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testinin kabul yüzdesi	68
Şekil 45	Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaları.....	69
Şekil 46	Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki varyanslarının ortalamaları.....	69
Şekil 47	Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaların varyansı	70
Şekil 48	Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki uyumsuzluk ölçüleri	71

Şekil 49	Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testine göre ortalama p-değerleri	71
Şekil 50	Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testine göre ortalama p-değerleri	72
Şekil 51	Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testine göre ortalama p-değerleri	72
Şekil 52	Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testinin kabul yüzdesi	73
Şekil 53	Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testinin kabul yüzdesi	73
Şekil 54	Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testinin kabul yüzdesi	74
Şekil 55	Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaları.....	75
Şekil 56	Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki varyanslarının ortalamaları.....	75
Şekil 57	Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaların varyansı	76
Şekil 58	Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki uyumsuzluk ölçüleri	77
Şekil 59	Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testine göre ortalama p-değerleri	77
Şekil 60	Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testine göre ortalama p-değerleri	78
Şekil 61	Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testine göre ortalama p-değerleri	78
Şekil 62	Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testinin kabul yüzdesi	79
Şekil 63	Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testinin kabul yüzdesi	79
Şekil 64	Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testinin kabul yüzdesi	80

Şekil 65	Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaları.....	81
Şekil 66	Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki varyanslarının ortalamaları.....	81
Şekil 67	Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaların varyansı	82
Şekil 68	Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki uyumsuzluk ölçüleri	83
Şekil 69	Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testine göre ortalama p-değerleri	83
Şekil 70	Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testine göre ortalama p-değerleri	84
Şekil 71	Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testine göre ortalama p-değerleri	84
Şekil 72	Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testinin kabul yüzdesi	85
Şekil 73	Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testinin kabul yüzdesi	85
Şekil 74	Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testinin kabul yüzdesi	86
Şekil 75	Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaları.....	87
Şekil 76	Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki varyanslarının ortalamaları.....	87
Şekil 77	Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaların varyansı	88
Şekil 78	Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki uyumsuzluk ölçüleri	88
Şekil 79	Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testine göre ortalama p-değerleri	89
Şekil 80	Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testine göre ortalama p-değerleri	90

Şekil 81	Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testine göre ortalama p-değerleri	90
Şekil 82	Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testinin kabul yüzdesi	91
Şekil 83	Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testinin kabul yüzdesi	91
Şekil 84	Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testinin kabul yüzdesi	92



TABLÖLAR DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1.	[0,1) aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş 12 tane rastgele sayı	18
Tablo 2.	[0,1) aralığında üretilmiş 12 tane beklenen yarı rastgele sayı	24
Tablo 3.	[0,1) aralığında üretilmiş 12 tane alt yarı rastgele sayı.....	25
Tablo 4.	[0,1) aralığında üretilmiş 12 tane titreşimli yarı rastgele sayı	26
Tablo 5.	[0,1) aralığında üretilmiş 12 tane irrasyonel yarı rastgele sayı.....	28
Tablo 6.	[0,1) aralığında üretilmiş 12 tane van der Corput yarı rastgele sayı.....	29
Tablo 7.	[0,1) aralığında üretilmiş 12 tane Poisson-Disk yarı rastgele sayı	31
Tablo 8.	Şekil 8’de verilen grafikteki verilerin sayısal değerleri.....	42
Tablo 9.	Standart düzgün dağılımdan üretilen $n = 10$ tane esnek rastgele sayının simülasyon sonuçları	54
Tablo 10.	Standart düzgün dağılımdan üretilen $n = 30$ tane esnek rastgele sayının simülasyon sonuçları	55
Tablo 11.	Standart düzgün dağılımdan üretilen $n = 50$ tane esnek rastgele sayının simülasyon sonuçları	55
Tablo 12.	Standart düzgün dağılımdan üretilen $n = 100$ tane esnek rastgele sayının simülasyon sonuçları	55
Tablo 13.	Standart düzgün dağılımdan üretilen $n = 300$ tane esnek rastgele sayının simülasyon sonuçları	56

SEMBOLLER DİZİNİ

X	: Rastgele değişken
X'	: Esnek rastgele değişken
$f_X(x; \dots)$	: X rastgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu
$F_X(x; \dots)$	: X rastgele değişkenin birikimli dağılım fonksiyonu
$F_X^{-1}(u; \dots)$	: X rastgele değişkenin ters dağılım fonksiyonu
U	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı rastgele değişken
$E[U]$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı rastgele değişken beklenen değeri
$E[U^2]$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı rastgele değişkenin ikinci momenti
$Var[U]$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı rastgele değişken varyansı
$\bar{U}$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı n tane rastgele değişkenin ortalaması
$E[\bar{U}]$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı n tane rastgele değişkenin ortalamasının beklenen değeri
$E[\bar{U}^2]$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı n tane rastgele değişkenin ikinci momenti
$Var[\bar{U}]$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı n tane rastgele değişkenin ortalamasının varyansı

$U_{(k)}$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı çok odaklı k-ncı sıralı rastgele değişken
$E[U_{(k)}]$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı çok odaklı k-ncı sıralı rastgele değişken beklenen değeri
$E[U_{(k)}^2]$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı çok odaklı k-ncı sıralı rastgele değişken ikinci momenti
$Var[U_{(k)}]$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı çok odaklı k-ncı sıralı rastgele değişken varyansı
U'	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı esnek rastgele değişken
$E[U']$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı esnek rastgele değişken beklenen değeri
$E[U'^2]$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı esnek rastgele değişken ikinci momenti
$Var[U']$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı esnek rastgele değişken varyansı
$\overline{U'}$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı n tane esnek rastgele değişkenin ortalaması
$E[\overline{U'}]$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı n tane esnek rastgele değişkenin ortalamasının beklenen değeri
$E[\overline{U'}^2]$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı n tane esnek rastgele değişkenin ortalamasının ikinci momenti
$Var[\overline{U'}]$	: Standart düzgün dağılımdan $[0,1)$ arasında tanımlı n tane esnek rastgele değişkenin ortalamasının varyansı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Doğada canlıların kendini koruma ve hayatta kalma çabası en önemli içgüdülerden biridir. Dolayısıyla canlıların kendilerini koruma içgüdüğü, çevredeki olayları gözlemlemesine ani değişimlere tepki vermesine neden olmaktadır. Öte yandan insanoğlu olayları gözlemleyerek ve aynı zamanda geçmiş birikimleri kullanmaktadır. Bu şekilde diğer canlılardan farklı olarak çıkarımlar yapmasına ve tahminlerde bulunmasına imkan sağlamaktadır. Bu durumda insanların çok daha iyi tahminlerde bulunabilmesi, belirsizliği kontrol edebilmesine bağlıdır. Oysaki insanoğlu var olduğundan beridir belirsizlikten korkmuştur. Bu ise insanları doğada gerçekleşen her olayı gerçekleşmeden önce tahmin edip kendisini tehlikeye sokmayacak şekilde önlem almaya itmektedir. Bunun için sürekli etraftan gözlemler yapmakta, bilgi toplamakta ve gerçekleşen olaylardan deneyim elde etmektedir. Bu deneyimlerine dayanarak geleceği tahmin edebilmekte ve çıkarımlarda bulunabilmektedir. Öte yandan günümüz gelişmiş ülkeleri de benzer davranış biçimleri göstermektedir. Olaylarının kendilerine yansımaya başlamadan önce tahminlerde bulunup önlem alma yoluna gitmektedirler. Daha net ifadeyle rastgele gelişen olayları kontrol altına almaya çalışmaktadırlar.

Rastgele bir sayı, öngörülemeyen ve herhangi bir model veya düzenden yoksun bir süreç tarafından üretilen bir sayıdır. Rastgele sayılar üretmenin, zar atma veya kartları karıştırma gibi fiziksel işlemler ve algoritma kullanma veya rastgele bir dağılımdan sayı üretme gibi hesaplama yöntemleri dahil olmak üzere birkaç yolu vardır. Bununla birlikte, rasgele sayılar üretmeye yönelik çoğu hesaplama yönteminin gerçekten rasgele olmadığını, bunun yerine sözde rasgele sayı üreteçlerine dayandığına dikkat etmek gerekir. Sözde rastgele sayı üreteçleri, rastgele görünen, ancak aslında deterministik olan ve doğru başlangıç koşulları verildiğinde yeniden üretilebilen sayı dizileri oluşturmak için kullanılan algoritmalarıdır.

Gerçekten rasgele sayılar üretmek için bazı bilgisayarlar, elektronik bileşenler tarafından üretilen gürültü veya malzemelerin radyoaktif bozunması gibi fiziksel süreçlere dayanan donanımsal rasgele sayı üreteçlerini kullanır. Donanımsal rasgele sayı üreteçlerini

genellikle sözde rastgele sayı üreticilerinden daha güvenilir olduğu kabul edilir, ancak uygulanması daha yavaş ve daha pahalıdır.

Günümüzde rastgele sayılar kullanım alanları için aşağıdaki örnekler verilebilir:

- Kriptografi: Rastgele sayılar, genellikle iletişimi güvence altına almak ve verileri korumak için kullanılan kriptografik anahtarlar oluşturmak için kullanılır.
- Simülasyon ve modelleme: Rastgele sayılar, hava durumu modelleri ve finansal piyasalar gibi gerçek dünya süreçlerini modellemek ve simüle etmek için kullanılır.
- Oyun: Rastgele sayılar, şans oyunlarında zar atmak veya bir iskambil destesini karıştırmak gibi rastgele sonuçlar elde etmek için kullanılır.
- Bilimsel araştırma: Rastgele sayılar, bilimsel deneylerde sonuçların yanlı olmamasını sağlamak için kullanılır.
- İstatistiksel örnekleme: Rastgele sayılar, istatistiksel analiz amacıyla daha büyük bir popülasyondan temsili bir örnek seçmek için kullanılır.
- Güvenlik: Rastgele sayılar, parola veya kimlik doğrulama belirteci olarak kullanılabilecek öngörülemez değerler üreterek bilgisayar sistemlerine yönelik saldırılara karşı koruma sağlamak için kullanılır.

Pierre L'Ecuyer ve Richard Simard (2007) tarafından yapılan çalışmada, rasgele sayı üretimi ve testine ilişkin teori, algoritmalar ve bu kavramların pratik uygulamaları dahil olmak üzere kapsamlı bir genel bakış sağlar.

James E. Gentle (2003) tarafından yazılan "Rastgele Sayı Üretimi ve Monte Carlo Yöntemleri", rasgele sayı üretimine ve Monte Carlo yöntemlerindeki uygulamalarına kapsamlı bir giriş niteliğindedir. Bu kitap, doğrusal eş üreticiler de dahil olmak üzere rasgele sayılar üretmek için çeşitli algoritmaları içermekte ve bunların güçlü yanlarını ve sınırlamalarını ortaya koymaktadır.

Donald Knuth'un (2014) "Bilgisayar Programlama Sanatı, Cilt 2: Yarı Sayısal Algoritmalar" adlı eseri, rasgele sayı üretimi ve Monte Carlo yöntemleri üzerine klasik bir referans olarak kabul edilebilir. Bu kitap, doğrusal eş üreticiler ve Mersenne Twister dahil olmak üzere rasgele sayılar üretmek için çeşitli algoritmaları içermekte ve bunların güçlü yanlarını ve sınırlamalarını ortaya koymaktadır. Ayrıca Monte Carlo simülasyonlarında ve istatistiksel analizlerde rasgele sayıların kullanımını da içermektedir.

Harald Niederreiter'in (1992) "Rastgele Sayı Üretimi ve Yarı-Monte Carlo Yöntemleri", rasgele sayı üretimi ve yarı-Monte Carlo yöntemlerine kapsamlı bir giriş niteliğindedir. Bu kitap, düşük tutarsızlık dizileri ve rastgele Monte Carlo benzeri yöntemler

dahil olmak üzere rasgele sayılar üretmek için çeşitli algoritmaları içerir ve bunların sayısal integrallerini ve optimizasyondaki uygulamalarını incelemektedir.

Werner Schindler (2009) tarafından yazılan "Rastgele Sayı Üretimi ve Kriptografik Uygulamalar", anahtar oluşturma ve mesaj kimlik doğrulaması da dahil olmak üzere kriptografik uygulamalarda rasgele sayıların kullanımını tartışan bir kitaptır. Kitap, donanım tabanlı üreteçler ve sözde rasgele sayı üreteçler dahil olmak üzere rasgele sayılar üretmek için çeşitli algoritmaları kapsar ve bunların kriptografik uygulamalar bağlamında güçlü yanlarını ve sınırlamalarını ortaya koymaktadır.

İstatistik teorisinde ise araştırmacılar rastgele olayların davranışını ve değişimini ölçmek üzerine sayısızca yaklaşım geliştirmişlerdir. Bu çalışmada ise gerek rastgele değişkenliğin ölçülmesi ve gerekse bu rastgele değişkenliğin kontrollü bir şekilde gerçekleşmesi amaçlanmıştır.

1.2. Bazı İstatistiksel Dağılımlar ve Parametre Tahminleri

Bu çalışmada yöntemin benzetimleri için kullanılacak dağılımların bazı özellikleri aşağıda verilmektedir. Kullanılacak dağılımların olasılık yoğunluk fonksiyonu, birikimli dağılım fonksiyonu, ters dağılım fonksiyonu, beklenen değeri, ikinci momenti ve varyansları verilmektedir.

1.2.1. Düzgün Dağılım

Düzgün dağılım verilen aralıktaki her elemanın veya seçilen eşit uzunluktaki her aralığın seçilme olasılığı eşit olan dağılımdır (Forsyth, 2018). $[a, b)$ aralığında düzgün dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x < b, \\ 0 & x < a \text{ veya } x \geq b. \end{cases} \quad (1)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Birikimli dağılım fonksiyonu ise,

$$F(x; a, b) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases} \quad (2)$$

biçiminde parçalı bir fonksiyon olarak verilmektedir. Ters dağılım fonksiyonu ise,

$$F^{-1}(u; a, b) = a + u(b - a), \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (3)$$

biçiminde hesaplanmaktadır. $[a, b)$ aralığında tanımlı düzgün dağılımdan X rastgele değişkenin beklenen değeri,

$$E[X] = \frac{(b + a)}{2} \quad (4)$$

olarak bulunmaktadır. X rastgele değişkenin ikinci momenti,

$$E[X^2] = \frac{b^3 - a^3}{3b - 3a} \quad (5)$$

biçiminde bulunurken aynı rastgele değişkenin varyansı ise,

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \frac{(b - a)^2}{12} \end{aligned} \quad (6)$$

biçiminde elde edilir. İkinci moment, varyans ve beklenen değere göre,

$$E[X^2] = Var[X] + (E[X])^2 \quad (7)$$

biçiminde de elde edilebilir. $[a, b)$ aralığındaki X rastgele değişkeni $[0, 1)$ aralığı olarak belirlenirse X değişkeni genelde U değişkeni olarak gösterilir ve standart düzgün dağılımından bir rastgele değişken olarak tanımlanır. $[0, 1)$ aralığında standart düzgün

dağılıma sahip U rastgele değişkenin beklenen değeri (4) eşitliğinde (a,b) değerleri yerine konduğunda,

$$E[U] = \frac{1}{2} \quad (8)$$

olarak bulunur. U rastgele değişkenin ikinci momenti (5) eşitliğinde (a,b) değerleri yerine konduğunda,

$$E[U^2] = \frac{1}{3} \quad (9)$$

olarak bulunur. U rastgele değişkenin varyansı (6) eşitliğinde (a,b) değerleri yerine konduğunda,

$$\begin{aligned} Var[U] &= E[(U - E[U])^2] \\ &= E[U^2] - (E[U])^2 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned} \quad (10)$$

olarak bulunur.

1.2.2. Üstel Dağılım

Üstel dağılım olasılık teorisi ve istatistik biliminde iki poisson noktası arasındaki zaman farkının olasılık dağılımını vermektedir.

Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases} \quad (11)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada $\lambda > 0$ dağılımın hız parametresi olarak ifade edilmektedir. Birikimli dağılım fonksiyonu ise,

$$F(x; \lambda) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases} \quad (12)$$

biçiminde bulunmaktadır. Ters dağılım fonksiyonu ise,

$$F^{-1}(u; \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - u), 0 \leq u < 1 \quad (13)$$

biçiminde bulunmaktadır. Üstel dağılımdan X rastgele bir değişkenin beklenen değeri,

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad (14)$$

biçiminde bulunurken ikinci momenti,

$$E[X^2] = \frac{2}{\lambda^2} \quad (15)$$

bulunmaktadır. X rastgele değişkenin varyansı ise,

$$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2} \quad (16)$$

biçiminde bulunmaktadır.

1.2.3. Normal Dağılım

İstatistikte oldukça önemli bir dağılım olan normal dağılım Gauss dağılımı olarak da bilinir. Doğada veya sosyal hayatta karşılaşılan rastgele olayları temsil etmek için kullanılır. Genelde ölçüm hatalarının normal dağıldığı varsayılır.

Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (17)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada μ dağılımın ortalamasını, σ ise standart sapmasını vermektedir. Birikimli dağılım fonksiyonu ise,

$$F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad (18)$$

biçiminde verilmektedir. Uygulamalarda verilen integralin analitik çözümü yapılamadığı için genelde sayısal çözümü yapılarak tablo şeklinde kullanılmaktadır. Öte yandan sisteme tanıtılan bir hata teriminden yararlanarak normal dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] \quad (19)$$

biçiminde yazılabilir. Burada erf fonksiyonu hata fonksiyonu olarak ifade edilmekte olup $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ olarak verilmektedir. Aynı yaklaşımla ters dağılım fonksiyonu ise,

$$F^{-1}(u; \mu, \sigma) = \mu + \sigma\sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2u - 1) \quad (20)$$

biçiminde tanımlanabilir. Normal dağılımdan X rastgele değişkenin beklenen değeri,

$$E[X] = \mu \quad (21)$$

ve ikinci momenti ise,

$$E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2 \quad (22)$$

olarak bulunmaktadır. Aynı değişkenin varyansı ise,

$$\operatorname{Var}[X] = \sigma^2 \quad (23)$$

olarak bulunmaktadır.

1.2.4. Laplace Dağılımı

Laplace dağılımı iki taraflı üstel dağılım olarak bilinmektedir. Laplace dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; \mu, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda|x - \mu|) \quad (24)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada μ dağılımın konum parametresi ve $\lambda > 0$ dağılımın hız parametresi olarak ifade edilmektedir. Birikimli dağılım fonksiyonu ise,

$$F(x; \mu, \lambda) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(x - \mu)(1 - \exp(-\lambda|x - \mu|)) \quad (25)$$

biçiminde bulunmaktadır. Ters dağılım fonksiyonu ise,

$$F^{-1}(u; \mu, \lambda) = \mu - \frac{1}{\lambda} \text{sign}\left(u - \frac{1}{2}\right) \log\left(1 - 2\left|u - \frac{1}{2}\right|\right) \quad (26)$$

biçiminde bulunmaktadır. Laplace dağılımdan X rastgele bir değişkenin beklenen değeri,

$$E[X] = \mu \quad (27)$$

biçiminde bulunurken ikinci momenti,

$$E[X^2] = \frac{2}{\lambda^2} + \mu^2 \quad (28)$$

biçiminde bulunmaktadır. Aynı değişkenin varyansı ise,

$$\text{Var}[X] = \frac{2}{\lambda^2} \quad (29)$$

biçiminde bulunmaktadır.

1.2.5. Lognormal Dağılım

Sürekli olasılık dağılımlarından olan Lognormal dağılımı normal dağılımla ilişki bir dağılımdır. Normal dağılımdan X rastgele değişkenin $Y = \exp(X)$ şeklinde hesaplanmasıyla elde edilen Y rastgele değişkeni lognormal bir dağılıma sahiptir.

Lognormal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (30)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada μ normal dağılımın ortalamasını, σ ise normal dağılımın standart sapmasını vermektedir. Birikimli dağılım fonksiyonu ise,

$$F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{\exp\left(-\frac{(\log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{x} dx \quad (31)$$

biçiminde verilmektedir. Birikimli dağılım fonksiyonu hata fonksiyonu yardımıyla,

$$F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\log(x) - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] \quad (32)$$

olarak bulunmaktadır. Ters dağılım fonksiyonu ise,

$$F^{-1}(u; \mu, \sigma) = \exp\left(\mu + \sqrt{2\sigma^2} \operatorname{erf}^{-1}(2u - 1)\right) \quad (33)$$

biçiminde bulunmaktadır. Lognormal dağılımdan X rastgele değişkenin beklenen değeri,

$$E[X] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad (34)$$

ve ikinci momenti,

$$E[X^2] = \exp\left(n\mu + \frac{n^2\sigma^2}{2}\right) \quad (35)$$

olarak bulunur. Aynı değişkenin varyansı ise,

$$Var[X] = (\exp(\sigma^2) - 1) \exp(2\mu + \sigma^2) \quad (36)$$

olarak bulunmaktadır.

1.3. Ortalamanın Parametre Tahminleri

Bağımsız ve özdeş dağılımdan n tane rastgele $\{X_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ değişkenin ortalamasının beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E[\bar{X}] &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E[X_k] \\ &= E[X] \end{aligned} \quad (37)$$

olarak bulunurken ortalamanın ikinci momenti,

$$\begin{aligned}
E[\bar{X}^2] &= E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j\right] \\
&= \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{k=1}^n X_k X_k + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n X_i X_j\right] \\
&= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n E[X_k X_k] + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n E[X_i X_j] \right) \\
&= \frac{1}{n^2} (n(E[X]E[X] + Cov[X, X]) + (n^2 - n)E[X]E[X]) \\
&= \frac{(E[X])^2}{n} + \frac{E[(X - E[X])^2]}{n} + (E[X])^2 - \frac{(E[X])^2}{n} \\
&= \frac{E[(X - E[X])^2]}{n} + (E[X])^2
\end{aligned} \tag{38}$$

biçiminde bulunur. (37) ve (38) eşitlikleri yardımıyla varyans hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
Var[\bar{X}] &= E[(\bar{X} - E[\bar{X}])^2] \\
&= E[\bar{X}^2 - 2\bar{X}E[\bar{X}] + (E[\bar{X}])^2] \\
&= E[\bar{X}^2] - 2E[\bar{X}]E[\bar{X}] + (E[\bar{X}])^2 \\
&= E[\bar{X}^2] - (E[\bar{X}])^2 \\
&= \frac{E[(X - E[X])^2]}{n} + (E[X])^2 - (E[X])^2 \\
&= \frac{E[(X - E[X])^2]}{n}
\end{aligned} \tag{39}$$

eşitliği elde edilir.

1.3.1. Standart Düzgün Dağılım İçin Momentler

Yukarıda elde edilen (37) eşitliği standart düzgün dağılım için düzenlenirse ve (8) eşitliği yerine konulursa ortalamanın beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E[\bar{U}] &= E[U] \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (40)$$

biçiminde elde edilir. (38) eşitliği standart düzgün dağılım için düzenlenirse ve (8) ve (10) eşitlikleri yerine konulursa ortalamanın ikinci moment için,

$$\begin{aligned} E[\bar{U}^2] &= \frac{E[(U - E[U])^2]}{n} + (E[U])^2 \\ &= \frac{1}{12n} + \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (41)$$

eşitliği elde edilir. (39) eşitliği standart düzgün dağılım için düzenlenirse ve (10) eşitliği yerine konulursa ortalamanın varyansı için,

$$\begin{aligned} Var[\bar{U}] &= \frac{E[(U - E[U])^2]}{n} \\ &= \frac{1}{12n} \end{aligned} \quad (42)$$

eşitliği elde edilir.

Standart düzgün dağılımdan gelen U rastgele değişkenin parametrelerinin tahmini için aynı rastgele değişkenin n örnekten oluşan bir örnekleminin ortalamasının tahminleri kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir. (40) eşitliğinde $E[U]$ çekilirse,

$$\begin{aligned} E[U] &= E[\bar{U}] \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (43)$$

U rastgele değişkenin beklenen değeri ortalamanın beklenen yardımıyla $1/2$ olarak bulunur. Aynı şekilde (42) eşitliğinde $E[(U - E[U])^2]$ ifadesi eşitliğin soluna alınırsa U rastgele değişkenin varyansı,

$$\begin{aligned} Var[U] &= E[(U - E[U])^2] \\ &= n Var[\bar{U}] \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned} \tag{44}$$

biçiminde bulunur. Diğer taraftan U rastgele değişkenin ikinci momenti ise ortalamanın beklenen değeri ve varyansı cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned} E[U^2] &= Var[U] + (E[U])^2 \\ &= n Var[\bar{U}] + (E[\bar{U}])^2 \\ &= n \frac{1}{12n} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{45}$$

sonucu elde edilir. Görüldüğü gibi U rastgele değişkeninin momentleri ile $\bar{U}$ değişkenin momentleri bulunabildiği görülmektedir. Aynı yaklaşımla $\bar{U}$ rastgele değişkenin yardımıyla da U rastgele değişkenin momentleri bulunabildiği görülmektedir.

1.4. Çok Odaklı İstatistikler

İstatistik biliminde yapılan çalışmalar genelde tek odak (ortalama, ortanca, varyans vb.) üzerinden temsil edilen parametreler ile yapılmaktadır (Dekking, Kraaikamp, Lopuhaä, & Meester, 2005). Öte yandan sıra istatistikleri üzerine yapılan birçok çalışma da mevcuttur. Oysa sıra istatistikleri ile elde edilen parametreler yardımıyla hesaplanacak birçok kitle parametresi daha esnek çözümler verebilmektedir.

Keyfi $F(x)$ dağılımdan üretilen bir rastgele sayılar $\mathbf{x} = \{x_k, (k = 1, 2, \dots, n)\}$ dizisinin k -ncı sıralı istatistiklerinin $\mathbf{x} = \{x_{(k)}, (k = 1, 2, \dots, n)\}$ olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f_X(x) [F_X(x)]^{k-1} [1 - F_X(x)]^{n-k} \quad (46)$$

biçiminde verilmektedir (Dekking, Kraaikamp, Lopuhaä, & Meester, 2005). Burada $f_X(x)$, X rastgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunu gösterirken, $F_X(x)$ birikimli dağılım fonksiyonunu göstermektedir.

1.4.1. Standart Düzgün Dağılım İçin Sıralı İstatistikleri

Sıralı istatistiklerde U rastgele değişken standart düzgün dağılıma sahip ise U rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{U_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [x]^{k-1} [1-x]^{n-k} \quad (47)$$

biçiminde yazılabilir (Dekking, Kraaikamp, Lopuhaä, & Meester, 2005). Standart düzgün dağılımdan seçilen rastgele bir değişkenin sıralı istatistiklerinin beklenen değeri ise,

$$E(U_{(k)}) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 x^k [1-x]^{n-k} dx \quad (48)$$

biçiminde verilmektedir (Dekking, Kraaikamp, Lopuhaä, & Meester, 2005). Eşitliğin sağ tarafında gerekli işlemler yapıldıktan sonra sıralı istatistiklerin beklenen değeri,

$$E(U_{(k)}) = \frac{k}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (49)$$

biçiminde bulunmaktadır (Dekking, Kraaikamp, Lopuhaä, & Meester, 2005). Sıralı istatistiklerin ikinci momenti,

$$E[U_{(k)}^2] = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)} \quad (50)$$

biçiminde bulunurken varyansı,

$$\begin{aligned} Var(U_{(k)}) &= E[U_{(k)}^2] - (E[U_{(k)}])^2 \\ &= \frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2(n+2)} \end{aligned} \quad (51)$$

biçiminde bulunmaktadır (Dekking, Kraaikamp, Lopuhaä, & Meester, 2005). Standart düzgün dağılımdan $\bar{U}$ rastgele değişkenin momentlerini yeniden hesaplamak için sıralı istatistiklerin ortalamalarından yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} E[\bar{U}] &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_{(k)}\right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E[U_{(k)}] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (52)$$

biçiminde ortalamanın beklenen değeri elde edilmiş olur. Aynı yaklaşımla $\bar{U}$ rastgele değişkeni için (38) eşitliği kullanarak ikinci moment,

$$\begin{aligned}
E[\bar{U}^2] &= E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n U_{(k)}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_i U_j\right] \\
&= \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{k=1}^n U_k U_k + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n U_i U_j\right] \\
&= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n E[U_k U_k] + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n E[U_i U_j] \right) \tag{53} \\
&= \frac{1}{n^2} (n(E[U]E[U] + Cov[U, U]) + (n^2 - n)E[U]E[U]) \\
&= \frac{(E[U])^2}{n} + \frac{E[(U - E[U])^2]}{n} + (E[U])^2 - \frac{(E[U])^2}{n} \\
&= \frac{E[(U - E[U])^2]}{n} + (E[U])^2 \\
&= \frac{1}{12n} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Benzer yaklaşımla $\bar{U}$ rastgele değişkenin varyansı ise,

$$\begin{aligned}
E[(\bar{U} - E[\bar{U}])^2] &= E[\bar{U}^2 - 2\bar{U}E[\bar{U}] + (E[\bar{U}])^2] \\
&= E[\bar{U}^2] - 2(E[\bar{U}])^2 + (E[\bar{U}])^2 \\
&= E[\bar{U}^2] - (E[\bar{U}])^2 \\
&= \frac{1}{12n} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{12n}
\end{aligned} \tag{54}$$

biçiminde elde edilir. Standart düzgün dağılıma sahip n tane rastgele değişkenin sıralı istatistiklerin ortalamasının $\bar{U}$ momentleri (52), (53) ve (54) eşitliklerindeki gibi bulunmaktadır. Bu eşitlikler yardımıyla U rastgele değişkeninin momentleri için (43), (44) ve (45) eşitliklerindeki momentlerin elde edilebildiği görülmektedir.

1.5. Sözde Rastgele Sayı Üretim Teknikleri

İstatistik eğitiminde veya simülasyon çalışmalarında sıklıkla yapay veri kullanılmaktadır. Yapay veriler denetimli veriler olduğu için stokastik bir sistemin davranışını gözlemlemekte sıklıkla dağılımı bilinen yapay veriler kullanılmaktadır. Yapay veri üretimi diğer bir adıyla rastgele sayı üretimi bilgisayar ortamında yapay olarak üretilmektedir.

Rastgele sayılar bir olay sonucunda ortaya çıkan ve değeri önceden bilinmeyen ve birbirlerinden bağımsız sayılardır. Rastgele sayılar aldıkları değerlere göre kesikli ve sürekli değerler sınıfında yer alabilir. Kesikli rastgele sayılar belli bir aralıkta sonlu sayıda değer alabilirken sürekli rastgele belli bir aralıkta sonsuz sayıda değer alabilmektedir.

Rastgele sayılar günümüzde bilgisayar oyunlarında, kumar makinelerinde, istatistiksel örneklemede, bilgisayar simülasyonlarında, kriptolojide, rastgele tasarımlarda ve diğer birçok alanda yaygın bir biçimde kullanılmaktadır.

Rastgele sayılar birçok doğa olayının gözlenmesi sonucunda elde edilen sayılar, bir paranın atılmasında yazı tura gelmesi; bir zarın atılmasında 1 den 6'ya kadar sayıların gelmesi; bir otobüs durağına bir saat boyunca gelen yolcuların sayısı; durağa gelen her bir yolcunun bir önceki gelen yolcu arasında süre; bir ağaçtan toplanan yaprakların uzunluğu; bir çocuğun baskül ile tarttığı yoldan geçenlerin kiloları; bir sezonda vizyona giren filmlerin süresi veya elde ettikleri hasılat; yol kenarında kurulan bir radarda yoldan geçen arabaların hız değerleri; A şehrinde B şehrine giden bir otomobilin her dakika başında hızı; bir sınıftaki öğrencilerin boyları; hastaneye gelen hastaların vücut sıcaklığı gibi birçok örnek verilebilir. Günümüzde rastgele sayılar bilgisayarların gelişmesiyle birlikte dijital ortamda yapay olarak üretilmektedir. Rastgele sayılarının tanımı gereği değeri önceden bilinmeyen ve birbirlerinden bağımsız sayılar olmasına rağmen bilgisayar yardımıyla üretilmesinde bu tanımın koşulları yerine getirilmemektedir. Bu olaydan dolayı dijital ortamda üretilen rastgele sayıları sözde rastgele sayılar denir.

Rastgele sayı üretimi, istatistik ve bilgisayar biliminde önemli bir yer tutmaktadır. Bilgisayarda üretilcek sözde rastgele sayılar genelde düzgün dağılım temel alınarak üretilir ve diğer dağılımlara dönüştürülür. Düzgün dağılımdan rastgele sayı üretilmesinde kullanılan en yaygın yöntem doğrusal uyumlu üreteçtir.

1.5.1. Düzgün Dağılımdan Rastgele Sayı Üretimi

Hemen hemen tüm programlama dillerinde rastgele sayı üreten bir algoritma bulunmaktadır. Böyle algoritmalar, bir dizi rastgele sayı üretirken her rastgele sayı bir önceki rastgele sayıdan yararlanarak üretilmektedir. Dolayısıyla başlangıç olarak bir sabit sayı kullanılır. Bu sayıya tohum (seed) denir. Bir rastgele sayılar dizisini $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ olarak tanımlanırsa, bu dizi,

$$X_{k+1} = (aX_k + c) \bmod m, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (55)$$

biçiminde üretilebilir. Burada X_0 değeri tohum olarak kabul edilir ve rastgele sayı dizisine dahil edilmez. Öte yandan a , c ve m değerleri yeterince büyük tamsayılardır. Burada üretilen rastgele sayılar 0 ile $m - 1$ değerleri arasında tamsayı değerlerdir. Genelde programlama dillerinde standart olarak üretilen rastgele sayı m değerine bölünerek $[0, 1)$ arasında bir standart oluşturulmuştur. Böylelikle bu sayılar bir sabitle çarpılıp ve bir sabit eklenerek istenilen aralığa çevrilebilir. Yukarıdaki eşitlikteki sabitler, simülasyonlar yardımıyla önceden en büyük periyodu veren katsayılar olarak seçilmiştir.

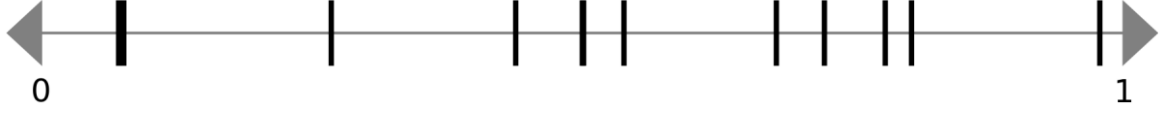
Düzgün olmayan dağılımdan rastgele sayı üretmek için düzgün dağılımdan üretilen rastgele sayı kullanılmaktadır. Bu işlem için iki yaygın yaklaşım bulunmaktadır. Bunlar ters dönüş ve red/kabul yöntemleridir.

Tüm programlama dillerindeki rastgele sayı üreteç fonksiyonu $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan rastgele sayı üreten deterministik bir algoritmaya sahiptir. Rastgele bir sayının deterministik bir algoritmayla üretilmesinden dolayı bu tür rastgele sayılara sözde (pseudo) rastgele sayılar denir (L'Ecuyer, 2012; Ross, 2006). Ters dağılım ve kabul-ret teknikleri rastgele sayı üretmek için kullanılan en yaygın iki yaklaşımdır.

$[0,1)$ aralığında standart düzgün dağılımdan üretilen 12 tane rastgele sayıların değerleri Tablo 1'de verilmiştir ve bu sayılar Şekil 1'de sayı doğrusu üzerinde gösterilmiştir.

Tablo 1. $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş 12 tane rastgele sayı

0.076	0.780	0.438	0.723	0.978	0.538	0.501	0.072	0.268	0.500	0.679	0.804
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------



Şekil 1. $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş 12 tane rastgele sayının sayı doğrusunda gösterimi

1.5.1. Red/Kabul ile Rastgele Sayı Üretimi

Kabul-ret tekniği, $[a, b]$ aralığında keyfi bir dağılımdan rastgele sayı üretmek için yararlı bir tekniktir. Bu tekniği gerçekleştirmek için öncelikle verilen dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonun $f(x)$, $[a, b]$ aralığındaki en büyük değeri olan f_{max} değerinin belirlenmesi gerekir. Kabul-ret tekniğinin algoritması,

Algoritma 1. Kabul-ret tekniğine göre tek değişkenli rastgele sayı üretme algoritması.

```
function accept_reject(f, fmax, a, b, n)
```

```
    k = 1
```

```
    while k <= n do:
```

```
        U1 ~ Uniform(0,1)
```

```
        U2 ~ Uniform(0,1)
```

```
        x = U1*(b-a)+a
```

```
        y = U2*fmax
```

```
        if y < f(x) then:
```

```
            X[k] = x
```

```
            k += 1
```

```
        end if
```

```
    end while
```

```
    return X
```

biçiminde verilmektedir. Bu algoritmaya göre düzgün dağılımdan üretilen iki rastgele sayıdan birincisi $[a, b]$ aralığında üretilen değer aday değer olarak alınmaktadır. İkincisi ise $[0, f_{max})$ arasında üretilen y değeri $f(x)$ fonksiyon değerinden küçükse üretilen x_k aday değeri saklanmakta, büyükse diziden atılarak aynı yaklaşımla yeniden bir değer üretilmektedir. Aynı süreç devam ettirilerek n tane rastgele sayı dizisi oluşturulur.

1.5.2. Ters Dağılım ile Rastgele Sayı Üretimi

Ters dağılım tekniği ile düzgün olmayan dağılımdan rastgele sayı üretmek analitik bir yaklaşım olduğundan, en sık başvuru tekniklerdendir. Bu tekniğin doğrudan uygulanabilmesi ancak dağılım fonksiyonunun tersinin mevcut olması durumunda geçerlidir. Dağılım fonksiyonunun tersinin bulunamadığı durumlarda ise sayısal yöntemler kullanılır (Kesemen, Tiryaki, & Pak, 2019).

Rasgele sayı üretilmek istenen dağılım fonksiyonu $F(x)$ olmak üzere, ters dağılım tekniği ile rasgele sayı üretmek için,

$$X = F_X^{-1}(U) \quad (56)$$

eşitliği kullanılır. Burada $U \in [0,1) \sim \text{Düzgün Dağılım}$, $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan rasgele üretilmiş bir sayıyı göstermektedir. Öte yandan X değişkeni, $F(x)$ dağılımından rastgele bir sayıyı vermektedir. Bu şekilde düzgün dağılımdan üretilen her rastgele sayı, istenen bir dağılımdan rastgele sayıya dönüştürülebilmektedir. Bu yaklaşımla $F_X(x)$ dağılımından rastgele sayı üretilmiş olur. Ters dağılımdan rastgele sayı üretme algoritması Algoritma 2’de verilmiştir.

Algoritma 2. Ters dağılım tekniğine göre tek değişkenli rastgele sayı üretme algoritması.

```
function inverse_random(F, n)
```

```
  for k = 1 to n do:
```

```
    U ~ Uniform(0,1)
```

```
    X[k] = F-1(U)
```

```
  end for
```

```
  return X
```

Örnek verecek olursak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad \lambda > 0, x \geq 0 \quad (57)$$

biçiminde verilen üstel dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \lambda \exp(-\lambda x) dx \\
&= 1 - \exp(-\lambda x)
\end{aligned} \tag{58}$$

olarak bulunur. $X \sim F(x)$ rastgele değişkeni seçilen dağılım fonksiyonundan ise bu rastgele değişkeni birikimli dağılım fonksiyonunda yerine konursa,

$$U = F_X(X) \tag{59}$$

biçiminde elde edilen U değişkeni $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan bir rastgele değişken olur. Aynı şekilde $[0,1)$ aralığındaki düzgün dağılımdan rastgele değişkenin birikimli dağılımın tersinde yerine konursa birikimli dağılımdan rastgele değişken elde edilir. Örnekten devam edilirse,

$$X = F_X^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda} \log_e(1 - U) \tag{60}$$

biçiminde bulunur.

Algoritma 2’de $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan üretilen rastgele değer verilen dağılımın tersinde yerine konduğunda verilen dağılımdan rastgele değere dönüştürülmektedir. Böylelikle verilen her dağılımdan rastgele değerler üretilebilmektedir. Ancak her dağılımın tersi analitik yöntemlerle bulunamamaktadır. Bu durumda başvurulacak en yaygın yöntem red/kabul yöntemidir. Öte yandan asimptotik ve sayısal yaklaşımlar da kullanılmaktadır (Kesemen, Tiryaki, & Pak, 2019).

1.6. Dizilerde Uyuşmazlık Ölçüsü

Bir $[a, b]$ aralığından rastgele seçilen reel sayı değerlerine sahip bir veri kümesinde $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ herhangi bir alt $[c, d]$ aralığa düşen veri sayısı ile aralığın uzunluğu orantılı

ise o veri kümesinin eşit dağıldığı söylenir. Bu ifade istatistiksel bir yaklaşım olduğundan büyük sayılar kanuna göre,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s(\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cap [c, d])}{n} = \frac{d - c}{b - a} \quad (61)$$

ifadesi doğru olur. Burada $s(A)$ fonksiyonu A kümesindeki veri sayısını göstermektedir.

Bir dizi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ için $[a, b]$ aralığına göre D_n uyumsuzluk ölçüsü şu şekilde tanımlarız,

$$D_n = \sup_{a \leq c \leq d \leq b} \left| \frac{s(\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cap [c, d])}{n} - \frac{d - c}{b - a} \right|. \quad (62)$$

Böylece bir dizi, n sonsuza doğru eğilim gösterirken, D_n tutarsızlığı da sıfır olma eğilimindeyse dizinin eşit olarak dağıldığı söylenir (Dick & Pillichshammer, 2010; Niederreiter, 1992).

1.7. Yarı Rastgele Sayı Üretimi

Gerçek hayatta birçok uygulama için rastgele sayılara ihtiyaç duyulmaktadır (Niederreiter, 1992; Sobol, 1967; Tiryaki & Kesemen, 2018). Bu rastgele sayılar için bilgisayar programları yardımıyla üretilen sözde rastgele sayılar kullanılmaktadır. Ancak bazı alanlarda düşük uyumsuzlığa sahip rastgele sayılar ihtiyaç duyulabilir. Özellikle Monte Carlo benzetimlerinde ve kriptoloji çalışmalarında daha iyi sonuçlar almak için yarı rastgele sayılara ihtiyaç duyulmaktadır (Tiryaki & Kesemen, 2018). Bu çalışmada kullanılan yarı rastgele sayılar $[0,1]$ aralığında üretililecektir.

1.7.1. Beklenen Yarı Rastgele Sayılar Dizisi

Beklenen rastgele sayılar diğer bir adıyla ızgara rastgele sayılar verilen $[0,1]$ aralığında tanımlı n tane rastgele sayının tüm aralığı kapsayacak şekilde eşit uzaklıkta dizilmesidir. Bu işlem için eşitlik,

$$x_k = \frac{k}{n}, (k = 1, 2, \dots, n) \quad (63)$$

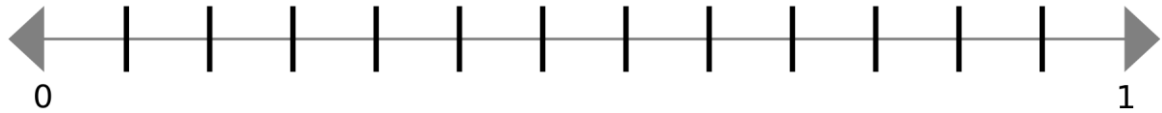
biçiminde tanımlanabilir. x_k değerleri deterministik değerler olduğundan sözde rastgele sayılar ötesinde yarı rastgele sayı bile olmaktan uzaktır. Deterministik olan bu sayılar 0 hariç ancak 1 dahil olacak şekilde bir sayı dizisi olduğundan, dengeleme sağlanması için eşitlik,

$$x_k = \frac{k - 0.5}{n}, (k = 1, 2, \dots, n) \quad (64)$$

biçiminde yarım kaydırma yapılarak elde edilebilir. Daha kullanışlı bir yaklaşım ise sıra istatistiklerinin beklenen değerlerini temel alan yaklaşımdır. Bu yaklaşımda verilen sıralı bir $x = (x_{(k)}, k = 1, 2, 3, \dots, n)$ dizisinin her değerinin beklenen değerini kullanarak düşük uyuşmazlığa sahip sayılar elde edilebilir. $[0,1]$ aralığında n tane beklenen yarı rastgele sayılar,

$$x_{(k)} = \mu_{(k)} = \frac{k}{n + 1}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (65)$$

biçiminde elde edilmektedir (Dekking, Kraaikamp, Lopuhaä, & Meester, 2005). Bu çalışmada sıralı istatistiklerin beklenen değerleri yaklaşımı kullanılacaktır. Bu yaklaşımla $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan üretilen 12 tane beklenen yarı rastgele sayı Şekil 2’de sayı doğrusu üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 2. $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş 12 tane beklenen yarı rastgele sayının sayı doğrusunda gösterimi.

Üretilen bu sayıların eşit aralıklarda olduğu görülmektedir. Başlangıçtan rastgele gibi gözükmese de üretilen bu sayılar bir karıştırma algoritması yardımıyla karıştırılırsa istenen etki yapılmış olur. Bu rastgele sayıların değerleri Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2. [0,1) aralığında üretilmiş 12 tane beklenen yarı rastgele sayı

0.077	0.154	0.231	0.308	0.385	0.462	0.538	0.615	0.692	0.769	0.846	0.923
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

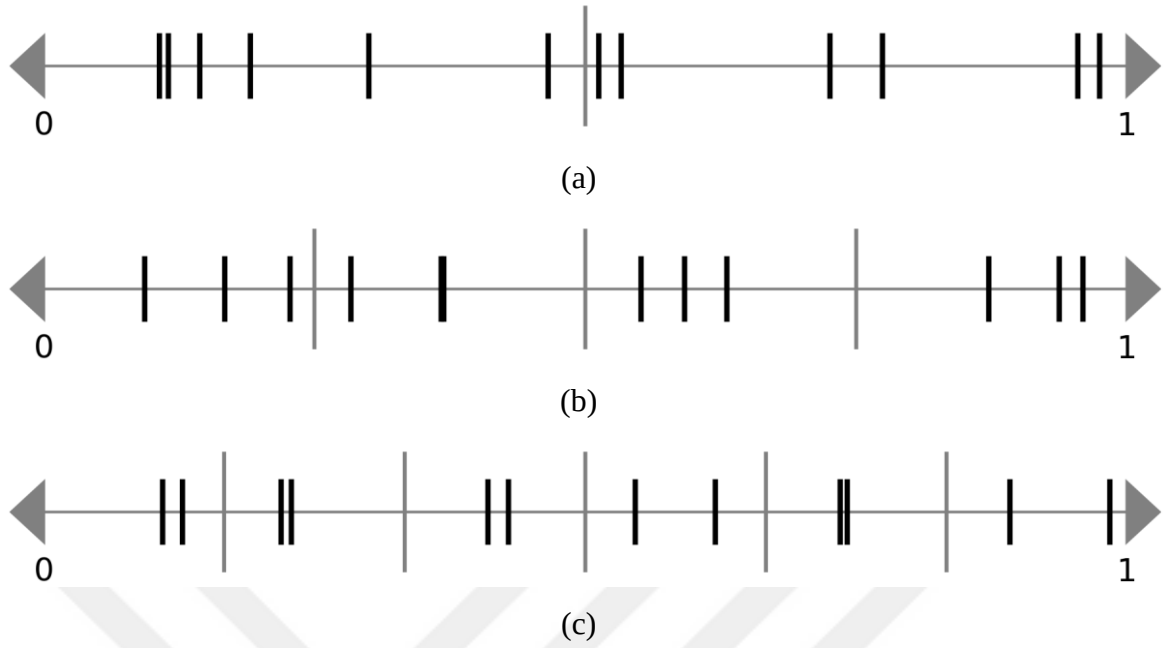
Tablo 2'deki beklenen yarı rastgele sayılar olarak üretilen değerler eşit aralıklarda sıralı şekilde verilmiştir. Bu sayılar istenirse karıştırma algoritması yardımıyla karışık şekilde de verilebilir. Ancak karışık şekilde verilen bu değerler rastgele değerler biçiminde gözükse bile deterministik bir değerler kümesi olduğu söylenebilir.

1.7.2. Alt Yarı Rastgele Sayılar Dizisi

Eşit dağılmış bir rastgele sayılar dizisi elde etmek için $[0, 1]$ aralığı eşit alt aralıklara bölünür. Bu alt aralıklara eşit sayıda rastgele sayı düşecek şekilde sözde rastgele sayılar üretilir. $[0, 1]$ aralığının kaç eşit parçaya bölüneceği araştırmacının tercihinə bırakılmıştır. $[0,1]$ aralığında Alt yarı rastgele sayılar,

$$X_k = \frac{1}{C} \left(((k - 1) \bmod C) + U \right), k = 1, 2, \dots, n \quad (66)$$

eşitliği ile elde edilebilir (Dick & Pillichshammer, 2010; Kuipers & Niederreiter, 2012; Niederreiter, 1992; Drmota & Tichy, 2006). Bu eşitlikte C alt bölge sayısını vermektedir. Şekil 3'te sırasıyla 2,4, ve 6 alt eşit bölgeye bölünen $[0,1]$ aralığında 12 rastgele sayının dağılımı sayı doğrusu üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 3. $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş 12 tane alt yarı rastgele sayının sayı doğrusunda gösterimi, (a) 2 bölgeye ayrılmış olarak üretilen alt yarı rastgele sayılar, (b) 4 bölgeye ayrılmış olarak üretilen alt yarı rastgele sayılar, (c) 6 bölgeye ayrılmış olarak üretilen alt yarı rastgele sayılar.

Sayı doğrusu üzerinde gösterilen alt yarı rastgele sayı kümeleri Tablo 3'te sayısal değerleri verilmiştir.

Tablo 3. $[0,1)$ aralığında üretilmiş 12 tane alt yarı rastgele sayı

0.190	0.533	0.144	0.955	0.107	0.726	0.466	0.512	0.300	0.975	0.115	0.774
0.227	0.283	0.631	0.938	0.167	0.367	0.551	0.873	0.093	0.369	0.591	0.959
0.128	0.219	0.429	0.546	0.742	0.892	0.110	0.228	0.410	0.620	0.735	0.984

Tablo 3'te verilen yarı rastgele sayıların her bölgeden değere sahip olduğu görülmektedir. Noktadan sonraki ilk haneye bakıldığında bile farklılık rahatlıkla görülebilmektedir.

1.7.3. Titreşimli Yarı Rastgele Sayılar Dizisi

Titreşimli yarı rastgele sayı üretmek için düzgün dağılımın sıralı n tane rastgele değişkenin beklenen değeri kullanılmaktadır. Her beklenen sayı ile bir sonraki ardışık

beklenen sayı arasındaki uzaklığın yarısı kadar sağa ve sola aralık belirlenerek bu aralıkta rastgele sayılar üretilmesiyle titreşimli yarı rastgele sayılar elde edilmektedir. Matematiksel olarak,

$$X_k = \mu_k + D \left(U - \frac{1}{2} \right), (k = 1, 2, \dots, n) \quad (67)$$

biçiminde formüle edilebilir (Dick & Pillichshammer, 2010; Kuipers & Niederreiter, 2012; Niederreiter, 1992; Drmota & Tichy, 2006). Burada D iki ardışık beklenen yarı rastgele sayı arasında genişlik olarak alınmakta ve $D = 1/(n + 1)$ biçiminde hesaplanmaktadır. $[0,1)$ aralığında üretilen 12 titreşimli rastgele sayı Şekil 5'te sayı doğrusu üzerinde gösterilmiştir. Gri düşey çizgiler sıralı istatistiklerin beklenen değerlerini gösterirken siyah düşey çizgiler, gri düşeye çizgilerin civarından bulunan titreşimli rastgele sayıları göstermektedir.



Şekil 4. $[0,1)$ aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş 12 tane rastgele sayının sayı doğrusunda gösterimi.

Üretilen titreşimli yarı rastgele sayıların sayısal değerleri Tablo 4'te verilmektedir. Bu sayısal değerlerinden iyi bir dağılım gösterdiği görülmektedir. Bu rastgele sayılar yarı rastgele sayılar olmasına rağmen kısmen de olsa bir rastgelelik içermektedir.

Tablo 4. $[0,1)$ aralığında üretilmiş 12 tane titreşimli yarı rastgele sayı

0.050	0.174	0.224	0.302	0.396	0.463	0.531	0.574	0.658	0.787	0.848	0.939
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

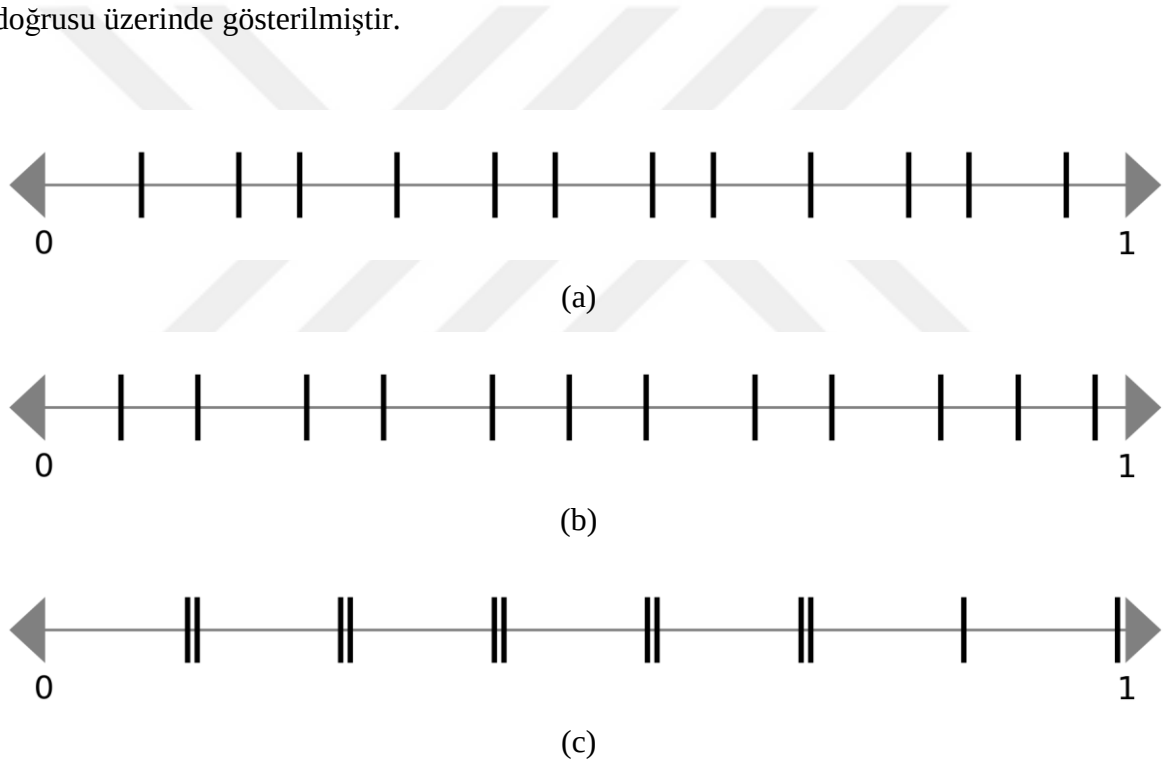
1.7.4. İrrasyonel Yarı Rastgele Sayılar Dizisi

Rasyonel bir sayı iki tam sayının oranı biçiminde yazılabilmektedir. Örneğin 0.75 bir sayı $3/4$ gibi iki tamsayı şeklinde yazılabilmektedir. İrrasyonel sayılar ise iki tam sayının oranı biçiminde yazılamamaktadır. Örnek altın oran, pi ve asal sayıların karekökü gibi sayılar verilebilir.

İrrasyonel yarı rastgele sayıları seçilen bir irrasyonel sayının katlarının 1'e göre modu alınarak elde edilir. Matematiksel olarak,

$$X_k = (X_{k-1} + X_{ir}) \bmod 1, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (68)$$

biçiminde gösterilebilir (Dick & Pillichshammer, 2010; Kuipers & Niederreiter, 2012; Niederreiter, 1992; Drmota & Tichy, 2006). Burada X_0 başlangıç değeri (tohum) olarak kabul edilir, X_{ir} ise seçilen irrasyonel sayıdır. Örnek olarak üretilen 12 tane irrasyonel yarı rastgele sayı Şekil 5'te verilmektedir. Şekil 5 (a)'da altın oran $(1 + \sqrt{5})/2$ irrasyonel sayısı, Şekil 5 (b) $\sqrt{2}$ irrasyonel sayısı ve Şekil 5 (c)'de ise π sayısı seçilerek üretilen sayılar sayı doğrusu üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 5. $[0,1]$ aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş 12 tane rastgele sayının sayı doğrusunda gösterimi, (a) altın oran $(1 + \sqrt{5})/2$ irrasyonel sayı kullanılarak elde edilmiş yarı rastgele sayılar, (b) $\sqrt{2}$ irrasyonel sayı kullanılarak elde edilmiş yarı rastgele sayılar, (c) π irrasyonel sayı kullanılarak elde edilmiş yarı rastgele sayılar.

Şekil 5'te gösterilen yarı rastgele sayılar sayısal olarak Tablo 5'te gösterilmektedir. Üretilen yarı rastgele sayılar deterministik bir yaklaşım göstermesine rağmen seçilen irrasyonel sayının farklı olması üretilen sayıları doğrudan etkilemektedir. Ayrıca üretilecek

rastgele sayılara eklenen tohum değeri de benzer şekilde farklı değerlerin üretilmesi sağlamaktadır.

Tablo 5. [0,1) aralığında üretilmiş 12 tane irrasyonel yarı rastgele sayı

0.414	0.828	0.243	0.657	0.071	0.485	0.899	0.314	0.728	0.142	0.556	0.971
0.142	0.283	0.425	0.566	0.708	0.850	0.991	0.133	0.274	0.416	0.558	0.699
0.618	0.236	0.854	0.472	0.090	0.708	0.326	0.944	0.562	0.180	0.798	0.416

1.7.5. Van Der Corput Yarı Rastgele Sayılar Dizisi

Van der Corput dizisi düşük uyuşmazlık ölçüsüne sahip birim aralıktaki en basit dizidir. Dizinin üretilmesinde doğal sayıların $(1,2,3,\dots)$ b -tabandaki değerleri kullanılmaktadır. Bir k doğal sayısının b tabanındaki karşılığı $d_j(k)$ dizisiyle tanımlanması,

$$k = \sum_{j=0}^{L-1} d_j(k) b^j \quad (69)$$

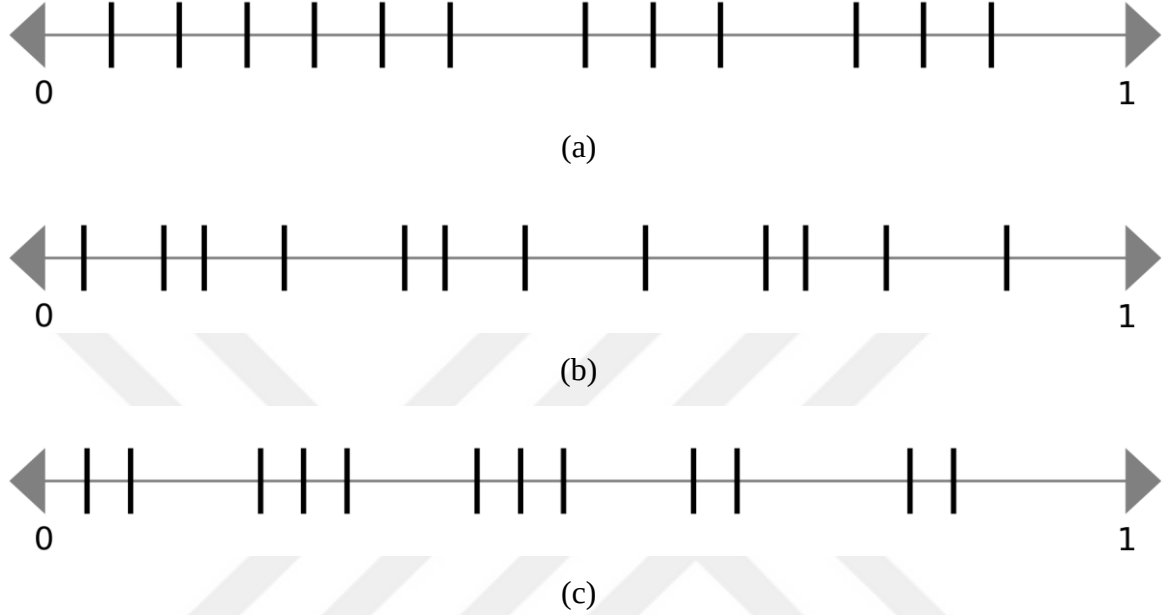
biçiminde verilmektedir. Aynı eşitlikte b tabanı ters çevrilirse,

$$X_k = \sum_{j=0}^{L-1} \frac{d_j(k)}{b^{j+1}} \quad (70)$$

biçiminde yazılmasıyla van der Corput yarı rastgele sayılar dizisi elde edilmiş olur (Dick & Pillichshammer, 2010; Kuipers & Niederreiter, 2012; Niederreiter, 1992; Drmota & Tichy, 2006).

Örnek olarak üretilen 12 tane Van der Corput yarı rastgele sayısı Şekil 6'da verilmektedir. Şekil 6 (a)'da 2 tabanında sayı, Şekil 6 (b) 3-tabanında sayı, ve Şekil 6Şekil 5 (c)'de ise 5 tabanında sayı, seçilerek üretilen yarı rastgele sayılar sayı doğrusu üzerinde gösterilmiştir. Aynı sayıların sayısal değerleri Tablo 6'da verilmiştir. Elde edilen sayıların

rastgele sayılar gibi gözükse de deterministik bir şekilde üretilmesi istenen rastgelelikten uzaktır.



Şekil 6. [0,1) aralığında düzgün dağılımdan üretilmiş 12 tane rastgele sayının sayı doğrusunda gösterimi, (a) 2-tabanında sayı kullanılarak elde edilmiş yarı rastgele sayılar, (b) 3-tabanında sayı kullanılarak elde edilmiş yarı rastgele sayılar, (c) 5-tabanında sayı kullanılarak elde edilmiş yarı rastgele sayılar.

Tablo 6. [0,1) aralığında üretilmiş 12 tane van der Corput yarı rastgele sayı

0.500	0.250	0.750	0.125	0.625	0.375	0.875	0.063	0.563	0.313	0.813	0.188
0.333	0.667	0.111	0.444	0.778	0.222	0.556	0.889	0.037	0.370	0.704	0.148
0.200	0.400	0.600	0.800	0.040	0.240	0.440	0.640	0.840	0.080	0.280	0.480

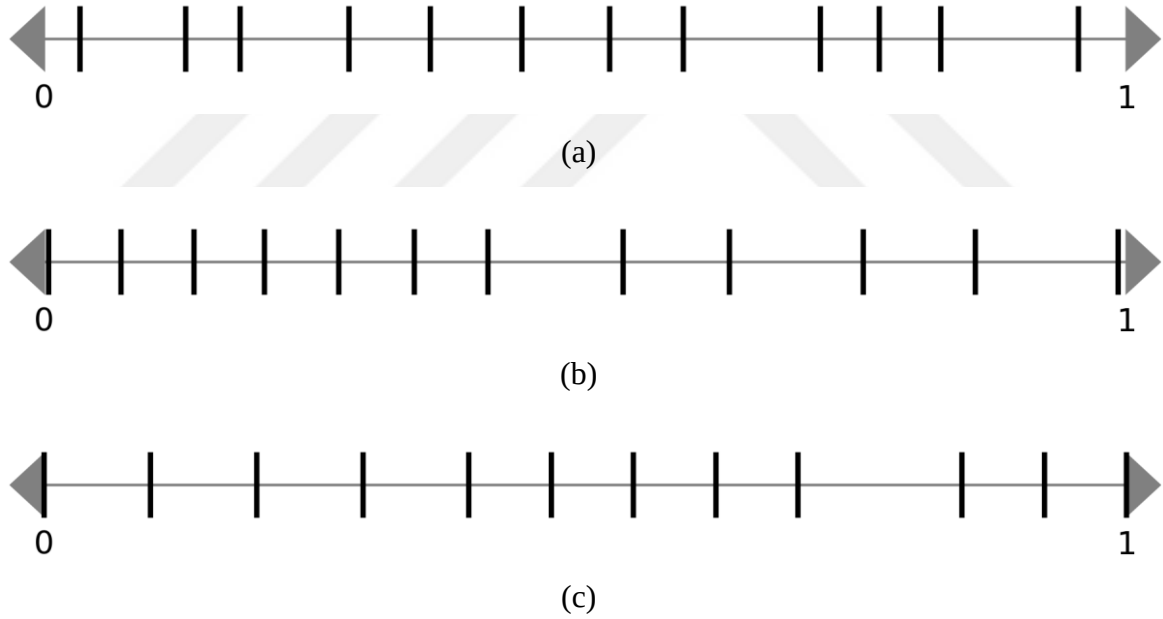
1.7.6. Poisson-Disk Yarı Rastgele Sayılar Dizisi

Üretilen her yeni rastgele sayı öyle üretilsin ki diğerlerinden (önceden üretilen) en uzak konumda bulunsun. Aynı zamanda bu işlem rastgele bir şekilde yapılsın. Bunun için öncelikle verilen aralıkta düzgün dağılımdan bir rastgele sayı üretilir ve listeye eklenir. Daha sonra aynı aralıkta düzgün dağılımdan N tane rastgele sayı üretilir. Bu sayılardan her birinin listedeki tüm değerlere olan en küçük uzaklıkları bulunur. Tüm en küçük uzaklıkların en

büyüküne sahip olan sayı listeye eklenir. Bu işleme n defa tekrar edilerek istenen yarı rastgele sayılar kümesi elde edilir. Matematiksel ifadesi ise,

$$X_k = \arg\max_{x_j} \left(\arg\min_{1 \leq j \leq N} |X - x_j| \right), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (71)$$

biçiminde bulunur (Dick & Pillichshammer, 2010; Kuipers & Niederreiter, 2012; Niederreiter, 1992; Drmota & Tichy, 2006). Örnek olarak deneme sayısı sırasıyla $N = \{10, 100, 1000\}$ olana 12 adet örneklem büyüklüğüne sahip üç örneklem Şekil 7’de verilmektedir. Bu örneklemelerin sayısal değerleri Tablo 7’de verilmektedir. Bu örnekler incelendiğinde verilerin birbirlerine uzak konumlara yerleşmeye çalıştıkları görülmektedir. Aynı zamanda beklenen yarı rastgele gibi eşit uzaklıklara yerleşmemektedir.



Şekil 7. $[0,1)$ aralığında üretilmiş 12 tane Poisson-Disk yarı rastgele sayının sayı doğrusunda gösterimi, (a) 10 denemeli Poisson-disk yarı rastgele sayılar, (b) 100 denemeli Poisson-disk yarı rastgele sayılar, (c) 1000 denemeli Poisson-disk yarı rastgele sayılar.

Tablo 7. $[0,1)$ aralığında üretilmiş 12 tane Poisson-Disk yarı rastgele sayı

0.955	0.131	0.522	0.717	0.357	0.828	0.034	0.442	0.282	0.590	0.771	0.181
0.535	0.004	0.992	0.272	0.757	0.139	0.410	0.860	0.633	0.072	0.204	0.342
0.393	1.000	0.001	0.696	0.197	0.544	0.848	0.099	0.295	0.620	0.468	0.924

1.8. Uyum İyiliği Testleri

Uyum iyiliği testleri, bir örneklemin verilen bir dağılımdan gelip gelmediğini araştırmak için kullanılan testlerdir. Başlıca tek değişkenli uyum iyiliği test yöntemlerine Ki-Kare (CS), Kolmogorov-Smirnov (KS), Cramer von Mises (CvM), Anderson-Darling (AD) ve Kuiper (K) testleri örnek olarak verilebilir (D'Agostino, 1986). Bu çalışmada Cramer von Mises (CvM), Kolmogorov-Smirnov (KS) ve Serbest Ki-Kare (FCS) testleri kullanılacaktır.

Verilen bir örnekleme $x = \{x_k, k = 1, \dots, n\}, x \in \mathbb{R}$ özdeş bir dağılımdan bağımsız rastgele değerlerinin örneklem kümesi bir F dağılımından olsun. Araştırılan hipotez $H_0: F(x) = F_0(x)$ ve karşıt hipotez ise $H_1: F(x) \neq F_0(x)$ verilsin. Burada $F_0(x)$ uygunluğu sorgulanan tek değişkenli dağılım fonksiyonudur. Bu tanımlamalar yardımıyla bahsedilen tek değişkenli uyum iyiliği testleri bu bölümün alt başlıklarında tanımlanmıştır.

1.8.1. Cramer-von Mises (CVM) Uyum İyiliği Testi

Cramer-von Mises testi, teorik dağılım ile deneysel dağılım fonksiyonu arasındaki farkın karesine dayanmaktadır (Darling, 1957; Anderson, 1962; Cramér, 1928). Bu test istatistiği birçok güncellemeler (Stephens, 1970) sonucunda,

$$W^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{k=1}^n \left[F_0(x_{(k)}) - \frac{2k-1}{2n} \right]^2 \quad (72)$$

biçimini almıştır. Bu test istatistiğinde $F_0(x)$ hipotezde sorgulanan teorik dağılım fonksiyonunu gösterirken, $(2k - 1)/2n$ deneysel dağılım fonksiyonuna karşılık gelmektedir. $\{x_{(k)}, k = 1, 2, \dots, n\}$ sıralanmış verileri göstermektedir.

1.8.2. Kolmogorov-Smirnov (KS) Uyum İyiliği Testi

Kolmogorov-Smirnov testi iki kümülatif dağılım fonksiyonunun karşılaştırılması temeline dayanır (Stephens, 1970; Smirnov, 1939). Bunlardan birincisi yokluk hipotezinde verilen $F_0(x)$ kümülatif dağılım fonksiyonudur. İkincisi örneklemden hesaplanan $F_n(x)$ deneysel dağılım fonksiyonudur. KS testinin test istatistiği,

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)| \quad (73)$$

biçiminde verilmektedir. Deneysel dağılım fonksiyonu $F_n(x_{(k)}) = k/n$ biçiminde hesaplanabildiği gibi $F_n(x_{(k)}) = (k - 1)/n$ biçiminde de hesaplanabilir. Ya da her ikisinin mutlak maksimumu alınarak hesaplanabilir (Noughabi & Arghami, 2011).

1.8.3. Serbest Ki-Kare Testi

Tezel ve diğ. tarafından geliştirilen serbest ki-kare testi örneklem verilerinin teorik dağılım değerinin birim vektör biçimine dönüştürerek bileşke kuvvetinin bulunması ilkesine dayanmaktadır (Tezel, Tiryaki, Özkul, & Kesemen, 2021). Bu yaklaşımın test istatistiği

$$R^2 = \frac{2}{n} \left[\left(\sum_{k=1}^n \cos(2\pi F_0(x_k)) \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n \sin(2\pi F_0(x_k)) \right)^2 \right] \quad (74)$$

biçiminde verilmektedir. Burada R^2 istatistiği küçüldükçe verilerin dağılımı teorik (iddia edilen) dağılıma yaklaşırken, büyüdükçe uzaklaşmaktadır. R^2 test istatistiği 2 serbestlik dereceli ki-kare dağılımı gösterdiğinden geniş bir tablo değerine ihtiyaç bulunmamaktadır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Birçok uygulama alanı olan rastgele sayı üretimi, bilişim teknolojilerinin gelişmesiyle daha da önemli bir konuma gelmektedir. Düzgün ve düzgün olmayan dağılımlardan üretilen rastgele sayılar öncelikle standart düzgün dağılımdan üretilen rastgele sayıların ters dağılım fonksiyonu kullanılarak dönüştürülmesiyle elde edilmektedir. Ancak üretilen bu sayıların istenen dağılımı ne kadar yansıttığı uyum iyiliği testleri ile tespit edilmektedir. Bazen bir dağılım modelinden üretilen bir rastgele sayılar dizisi uyum iyiliği testleri sonucunda o dağılımdan gelmediği sonucuna varılabilir. Öte yandan farklı dağılım modelinden üretilen bir rastgele sayılar dizisi ise başka bir dağılımdan gelip gelmediği uyum iyiliği ile test edildiğinde hipotez kabul edilebilir. Bu tür hatalar ortaya konan hipotezin riskini ifade etmektedir.

2.1. Esnek Rastgele Sayı Üretilmesi

Düzgün olmayan dağılımlardan rastgele sayı üretilmek için öncelikle düzgün dağılımdan rastgele sayı üretilmesi gerekir. Düzgün dağılımdan üretilen rastgele sayıların değişken bir uyumsuzluk ile üretilmesiyle elde edilecek rastgele sayılar düzgün olmayan dağılımlara dönüştürüldüğünde de aynı şekilde değişken bir uyumsuzluk gösterecektir. Bu durumda, $[0,1]$ aralığında tanımlı standart düzgün dağılımdan n tane rastgele değişkeni $U_{(k)}$, esneklik parametresi m yardımıyla esnek rastgele değişkene dönüştürülmesi,

$$U'_{(k)} = m \cdot U_{(k)} + (1 - m) \cdot E[U_{(k)}] \quad (75)$$

biçiminde yapılabilir. Böylelikle elde edilen U' rastgele değişkeni daha düşük bir uyumsuzluk ölçüsü gösterecektir. Burada $E[U_{(k)}]$, standart düzgün dağılımdan k -ncı sıralı rastgele değişkenin beklenen değeri olarak ifade edilmektedir. Elde edilen düzgün dağılımdan esnek rastgele değişken yardımıyla keyfi bir $F_X(x)$ dağılım fonksiyonundan esnek bir rastgele değişken elde etmek için,

$$X'_k = F_X^{-1}(U'_k) \quad (76)$$

eşitliği kullanılabilir.

Standart düzgün dağılımdan n tane sıralı rastgele değişkenin k -nci esnek rastgele değişkenin beklenen değeri,

$$\begin{aligned}
 E[U'_{(k)}] &= E[m \cdot U_{(k)} + (1 - m) \cdot E[U_{(k)}]] \\
 &= mE[U_{(k)}] + (1 - m)E[U_{(k)}] \\
 &= mE[U_{(k)}] + (1 - m)E[U_{(k)}] \\
 &= E[U_{(k)}] \\
 &= \frac{k}{n + 1}
 \end{aligned} \tag{77}$$

biçiminde elde edilir. Elde edilen sonuç (49) eşitliğinde olduğu gibidir. Görüldüğü gibi $U'_{(k)}$ esnek rastgele değişkenin beklenen değeri esneklik parametresinden etkilenmemektedir. Standart düzgün dağılımdan k -nci esnek rastgele değişkenin ikinci momenti,

$$\begin{aligned}
 E[U'^2_{(k)}] &= E[(mU_{(k)} + (1 - m)E[U_{(k)}])^2] \\
 &= E[m^2U_{(k)}^2 + 2m(1 - m)E[U_{(k)}]U_{(k)} + (1 - m)^2(E[U_{(k)}])^2] \\
 &= m^2E[U_{(k)}^2] + (2m - 2m^2)E[U_{(k)}]E[U_{(k)}] \\
 &\quad + (1 - 2m + m^2)(E[U_{(k)}])^2 \\
 &= m^2 \left(\frac{k(k + 1)}{(n + 1)(n + 2)} \right) + (2m - 2m^2)(E[U_{(k)}])^2 \\
 &\quad + (1 - 2m + m^2)(E[U_{(k)}])^2 \\
 &= m^2 \left(\frac{k^2 + k}{(n + 1)(n + 2)} \right) + (1 - m^2) \left(\frac{k}{n + 1} \right)^2
 \end{aligned} \tag{78}$$

biçiminde elde edilmektedir. Aynı şekilde standart düzgün dağılımdan k -nci esnek rastgele değişkenin varyansı ise,

$$\begin{aligned}
Var[U'_{(k)}] &= E \left[\left(m \cdot U_{(k)} + (1 - m) \cdot E[U_{(k)}] - E[U_{(k)}] \right)^2 \right] \\
&= E \left[\left(m \cdot U_{(k)} - m \cdot E[U_{(k)}] \right)^2 \right] \\
&= m^2 \left(E[U_{(k)}^2] - 2(E[U_{(k)}])^2 + (E[U_{(k)}])^2 \right) \\
&= m^2 \left(\frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)} - (E[U_{(k)}])^2 \right) \\
&= m^2 \left(\frac{k(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)} \right)
\end{aligned} \tag{79}$$

biçiminde elde edilir. Elde edilen sonuç (51) eşitliğinin m^2 katı olarak bulunmuştur. Bu durumda $U'_{(k)}$ rastgele değişkenin varyansı esneklik parametresinden parabolik olarak etkilenmektedir.

Standart düzgün dağılımdan bağımsız n tane esnek rastgele değişkenin ortalaması,

$$\bar{U}' = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m U_{(k)} + (1 - m) E[U_{(k)}] \tag{80}$$

biçiminde yazılabilir. Standart düzgün dağılımdan bağımsız n tane esnek rastgele değişkenin ortalamasının beklenen değeri,

$$\begin{aligned}
E[\overline{U'}] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n U'_{(k)}\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (mU_k + (1-m)E[U_k])\right] \\
&= \frac{1}{n}E\left[\sum_{k=1}^n mU_k + \sum_{k=1}^n (1-m)E[U_k]\right] \\
&= \frac{m}{n}\sum_{k=1}^n E[U_k] + \frac{1-m}{n}\sum_{k=1}^n E[E[U_k]] \\
&= \frac{m}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k}{n+1} + \frac{1-m}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k}{n+1} \\
&= \frac{m}{2} + \frac{1-m}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{81}$$

biçiminde elde edilir. Aynı yaklaşımla standart düzgün dağılımdan bağımsız n tane esnek rastgele değişkenin ortalamasının ikinci momenti,

$$\begin{aligned}
E[\bar{U}^2] &= E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n U'_{(k)}\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (mU_k + (1-m)E[U_k])\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2}E\left[m^2\left(\sum_{k=1}^n U_k\right)^2 + 2m(1-m)\left(\sum_{k=1}^n U_k\right)\left(\sum_{k=1}^n E[U_k]\right) \right. \\
&\quad \left. + (1-m)^2\left(\sum_{k=1}^n E[U_k]\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2}E\left[m^2\left(\sum_{k=1}^n U_k\right)^2 + 2m(1-m)\left(\sum_{k=1}^n U_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n+1}\right) \right. \\
&\quad \left. + (1-m)^2\left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n+1}\right)^2\right] \tag{82} \\
&= \frac{1}{n^2}E\left[m^2n^2\bar{U}^2 + 2m(1-m)n\bar{U}\left(\frac{n}{2}\right) + (1-m)^2\left(\frac{n}{2}\right)^2\right] \\
&= E\left[m^2\bar{U}^2 + m(1-m)\bar{U} + \frac{(1-m)^2}{4}\right] \\
&= m^2E[\bar{U}^2] + (m-m^2)E[\bar{U}] + \frac{(1-m)^2}{4} \\
&= m^2E[\bar{U}^2] + \frac{2m-2m^2+1-2m+m^2}{4} \\
&= m^2E[\bar{U}^2] + \frac{1-m^2}{4} \\
&= \frac{m^2}{12n} + \frac{m^2}{4} + \frac{1-m^2}{4} \\
&= \frac{m^2}{12n} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Aynı değişkenin beklenen değer ve ikinci momenti yardımıyla varyansı,

$$\begin{aligned}
Var[\overline{U'}] &= E \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n mU_k + (1-m)E[U_k] - E[\overline{U'}] \right)^2 \right] \\
&= E \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n mU_k + (1-m)E[U_k] \right)^2 \right] - (E[\overline{U'}])^2 \\
&= \frac{m^2}{12n} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{m^2}{12n}
\end{aligned} \tag{83}$$

biçiminde elde edilir.

Standart düzgün dağılımdan üretilen n tane esnek rastgele değişkenin örneklem varyansı,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (U'_k - \overline{U'})^2 \tag{84}$$

biçiminde elde edilebilir. Örneklem varyansının beklenen değeri,

$$\begin{aligned}
E[S_{U'}^2] &= E \left[\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (mU_{(k)} + (1-m)E[U_{(k)}] - \bar{U}')^2 \right] \\
&= \frac{1}{n-1} E \left[\sum_{k=1}^n m^2 U_{(k)}^2 + \sum_{k=1}^n 2m(1-m)U_{(k)}E[U_{(k)}] \right. \\
&\quad + \sum_{k=1}^n (1-m)^2 (E[U_{(k)}])^2 - \sum_{k=1}^n 2mU_{(k)}\bar{U}' \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^n 2(1-m)E[U_{(k)}]\bar{U}' + \sum_{k=1}^n \bar{U}'^2 \right] \\
&= \frac{1}{n-1} \left[m^2 \sum_{k=1}^n E[U_{(k)}^2] + 2m(1-m) \sum_{k=1}^n E[U_{(k)}]E[U_{(k)}] \right. \\
&\quad + (1-m)^2 \sum_{k=1}^n (E[U_{(k)}])^2 - 2mE \left[\bar{U}' \sum_{k=1}^n U_k \right] \\
&\quad \left. - 2(1-m) \sum_{k=1}^n E[U_k]E[\bar{U}'] + \sum_{k=1}^n E[\bar{U}'^2] \right] \tag{85}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $E[\bar{U}' \sum_{k=1}^n U_k]$ ifadesi,

$$\begin{aligned}
E[\bar{U}' \bar{U}] &= E \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n mU_k + (1-m)E[U_k] \right) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k \right] \\
&= \frac{1}{n} E \left[\left(m\bar{U} \sum_{k=1}^n U_k + (1-m)\bar{U} \sum_{k=1}^n E[U_k] \right) \right] \\
&= \frac{1}{n} E \left[mn (\bar{U})^2 + \frac{n(1-m)}{2} \bar{U} \right] \\
&= mE[\bar{U}^2] + \frac{(1-m)}{2} E[\bar{U}] \\
&= m \left(\frac{1}{12n} + \frac{1}{4} \right) + \frac{(1-m)}{4} \tag{86}
\end{aligned}$$

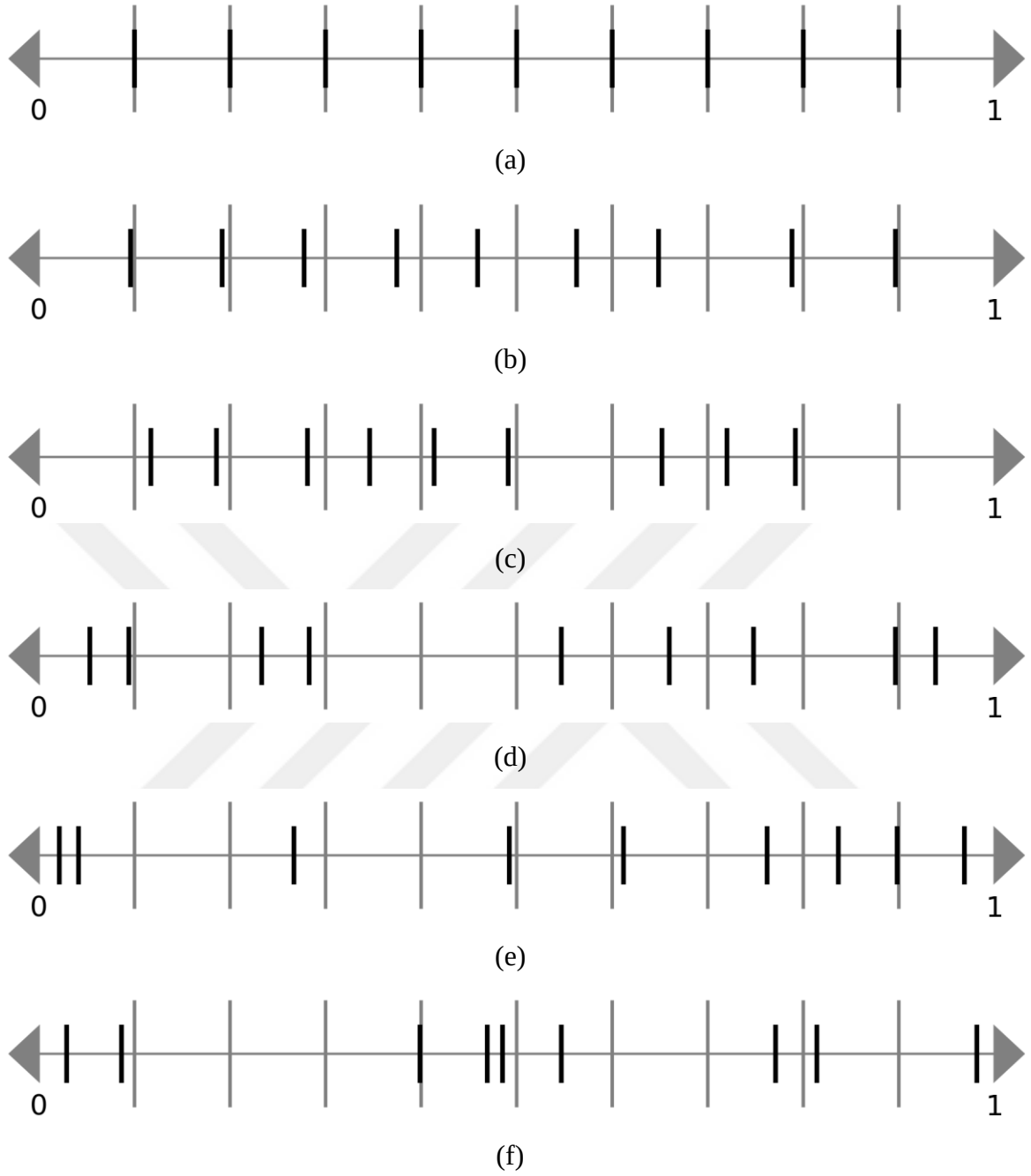
biçiminde elde edilir. (86) eşitliği (85) eşitliğinde yerine konursa standart düzgün dağılımdan n tane rastgele değişkenin örneklem varyansının beklenen değeri,

$$\begin{aligned}
E[S_{U'}^2] &= \frac{1}{n-1} \left[m^2 \sum_{k=1}^n E[U_{(k)}^2] + 2m(1-m) \sum_{k=1}^n E[U_{(k)}]E[U_{(k)}] \right. \\
&\quad + (1-m)^2 \sum_{k=1}^n (E[U_{(k)}])^2 - 2mE \left[\overline{U'} \sum_{k=1}^n U_k \right] \\
&\quad \left. - 2(1-m) \sum_{k=1}^n E[U_k]E[\overline{U'}] + \sum_{k=1}^n E[\overline{U'}^2] \right] \\
&= \frac{n}{n-1} \left[\frac{m^2}{3} + \frac{(1-m^2)(2n+1)}{6(n+1)} - 2m \left(m \left(\frac{1}{12n} + \frac{1}{4} \right) + \frac{(1-m)}{4} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(1-m)}{2} + \frac{m^2}{12n} + \frac{1}{4} \right] \\
&= \frac{n}{n-1} \left[\frac{m^2}{3} + \frac{(1-m^2)(2n+1)}{6(n+1)} - \frac{m^2}{12n} + \frac{1}{4} \right]
\end{aligned} \tag{87}$$

biçiminde elde edilir.

2.1.1. Standart Düzgün Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Üretilmesi

Standart düzgün dağılım üretilen 9 tane esnek rastgele değişkenin sayı doğrusu üzerinde gösterimi Şekil 10'da verilmiştir. Her bir sayı kümesi sırasıyla 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 ve 1.0 esneklik parametresi yardımıyla üretilmiştir. Şekil 10'da sayı doğrusu üzerindeki gri düşey uzun çizgiler sıralı istatistiklerin beklenen değerini gösterirken, siyah düşey çizgiler esnek rastgele sayıları göstermektedir. Esneklik parametresi ($m = 0$) olduğunda tüm siyah çizgiler beklenen değerlerin üzerinde dururken esneklik parametresi (m) arttıkça siyah çizgileri gri çizgilerden (beklenen değerler) uzaklaşmaktadır. Esneklik parametresi (m) 1'e yaklaştıkça siyah çizgilerin oldukça rastgele dağıldığı gözlenmektedir. Aynı esnek rastgele sayılar dizisi Tablo 8'de sayısal değerler olarak verilmektedir. Tablo 8'de ilk satırı ($m = 0$) karışık sırada sayılardan oluşsa da sıralandığında doğrusal bir artış gösterdiği gözlenmektedir. Esneklik parametresi arttıkça doğrusallığın bozulduğu görülmektedir.

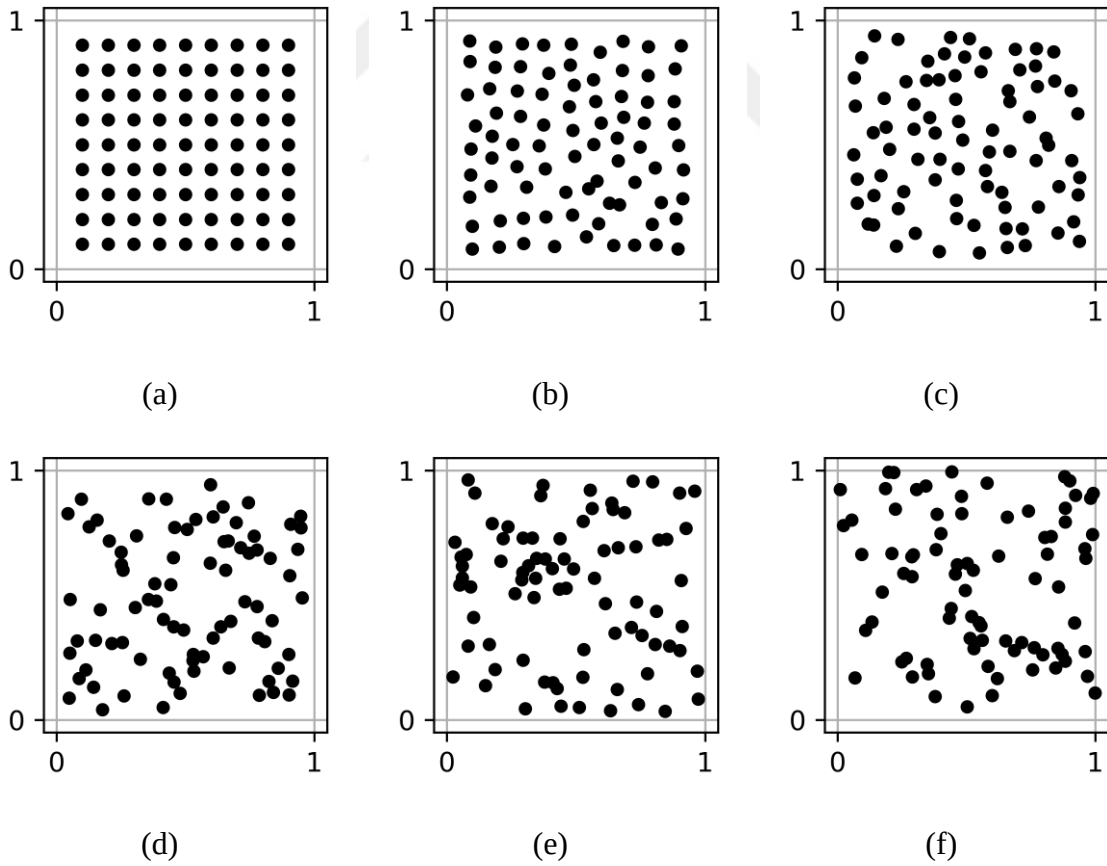


Şekil 8. Standart düzgün dağılımdan farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 9 tane esnek rastgele sayının sayı doğrusu üzerinde gösterimi, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

Tablo 8. Şekil 8’de verilen grafikteki verilerin sayısal değerleri

m	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0.00	0.3000	0.1000	0.9000	0.5000	0.8000	0.6000	0.7000	0.2000	0.4000
0.20	0.1917	0.4592	0.0961	0.6483	0.8960	0.7877	0.3748	0.2775	0.5628
0.40	0.7200	0.7915	0.4910	0.3463	0.4139	0.6519	0.1862	0.2814	0.1177
0.60	0.8961	0.2827	0.2330	0.5466	0.9384	0.6599	0.7477	0.0946	0.0538
0.80	0.0213	0.9685	0.6118	0.0418	0.2673	0.7620	0.8364	0.8982	0.4924
1.00	0.8137	0.9815	0.3989	0.0291	0.7709	0.4849	0.5465	0.4695	0.0865

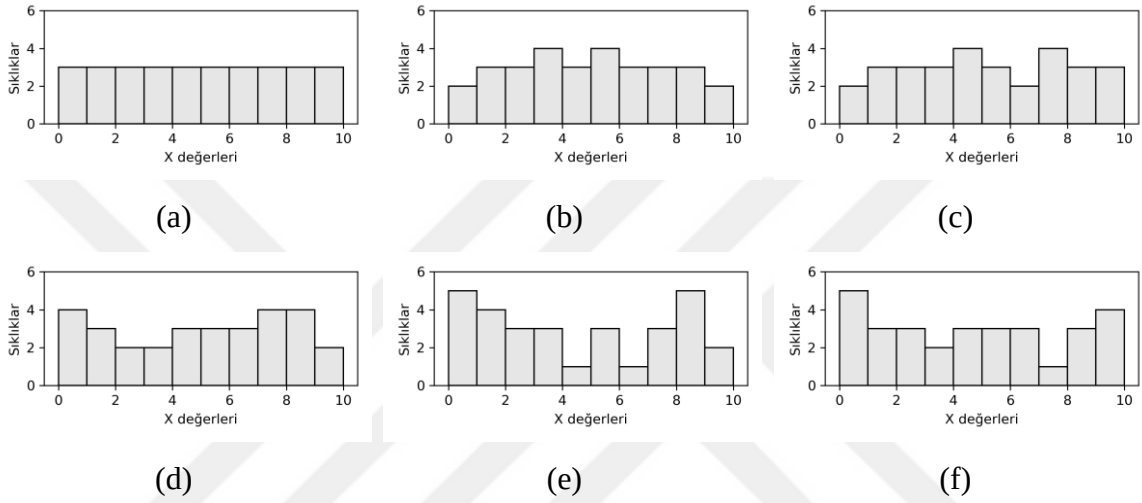
Standart düzgün dağılımdan üretilen esnek rastgele sayılar dizisini çoklu örneklem yaparak genişletirsek iki boyutlu esnek rastgele değişken elde edilebilir. Yatayda ve düşeyde yönde 9ar’lı gruplar halinde 81er tane rastgele değer üretip iki boyutlu bir düzlemde Şekil 9’da gösterilmektedir. Şekil 9’da esneklik parametresi arttıkça noktalar düzensizleşmekte ve birbirlerine yaklaşıp küçük kümeleşmelerin oluştuğu görülmektedir.



Şekil 9. İki boyutlu esnek rastgele değerlerin gösterimi, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

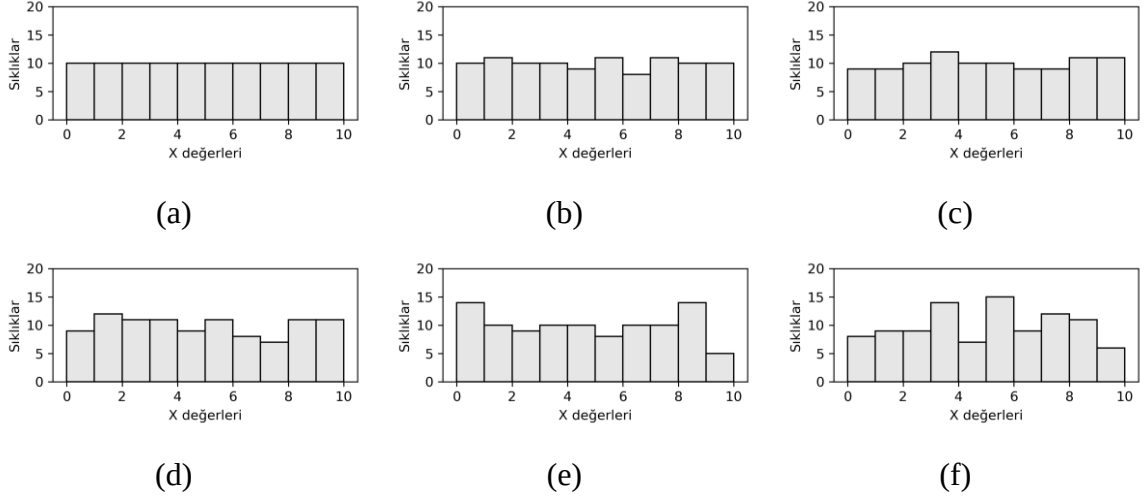
2.1.2. Düzgün Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Üretilmesi

Farklı esneklik parametresi yardımıyla düzgün dağılımdan üretilen 30 tane esnek rastgele sayının histogramı Şekil 10’da görülmektedir. $m = 0$ olduğunda histogramı düzgün dağılımı tam olarak yansıttığı görülmektedir. Esneklik parametresi (m) büyüdükçe histogramda bozulmaların arttığı görülmektedir.



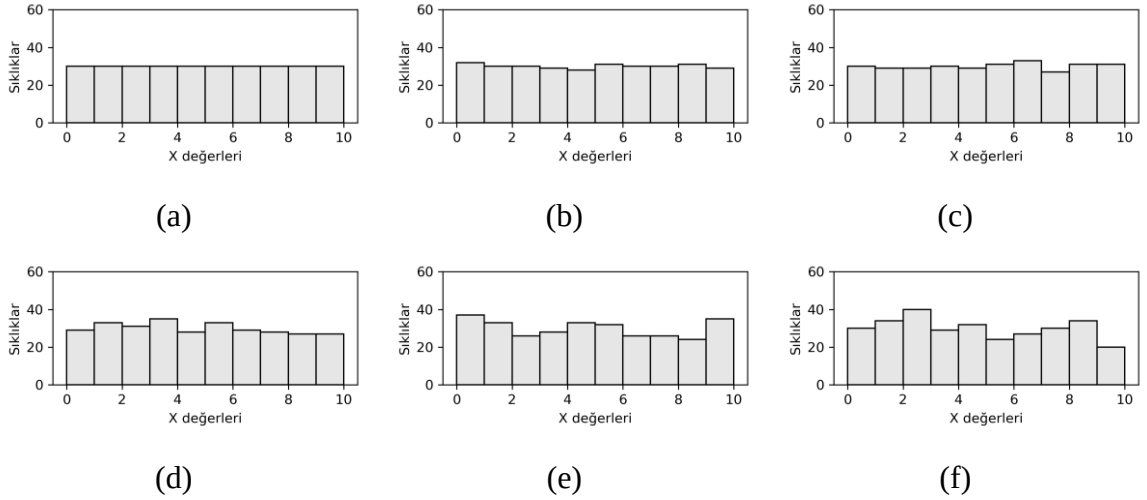
Şekil 10. Düzgün dağılımdan $[0,10)$ aralığında farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 30 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

Farklı esneklik parametresi yardımıyla düzgün dağılımdan üretilen 100 tane esnek rastgele sayının histogramı Şekil 11’de görülmektedir. $m = 0$ olduğunda histogramın her sınıfının sıklık değerinin 10 olduğu ve düzgün dağılımı tam olarak yansıttığı görülmektedir. Esneklik parametresi (m) büyüdükçe histogramdaki bozulmalar Şekil 10’daki histogramlara göre daha net görülmektedir.



Şekil 11. Düzgün dağılımdan $[0,10)$ aralığında farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 100 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

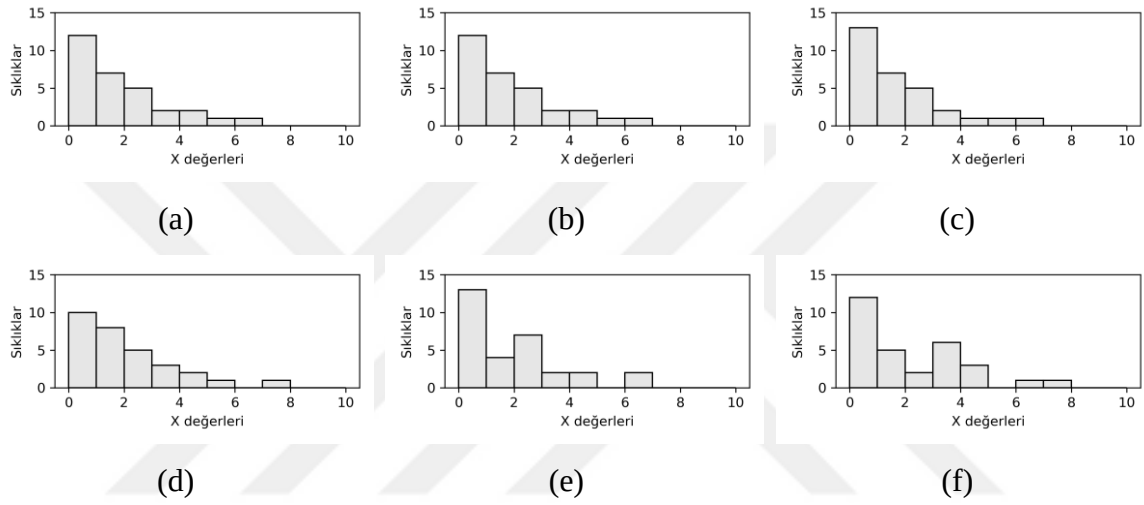
Farklı esneklik parametresi yardımıyla düzgün dağılımdan üretilen 300 tane esnek rastgele sayının histogramı Şekil 12’de görülmektedir. $m = 0$ olduğunda histogramın her sınıfının sıklık değerinin 30 olduğu ve düzgün dağılımı tam olarak yansıttığı görülmektedir. Esneklik parametresi (m) büyüdükçe histogramdaki bozulmalar Şekil 10’daki histogramlara göre daha net görülmektedir.



Şekil 12. Düzgün dağılımdan $[0,10)$ aralığında farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 300 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

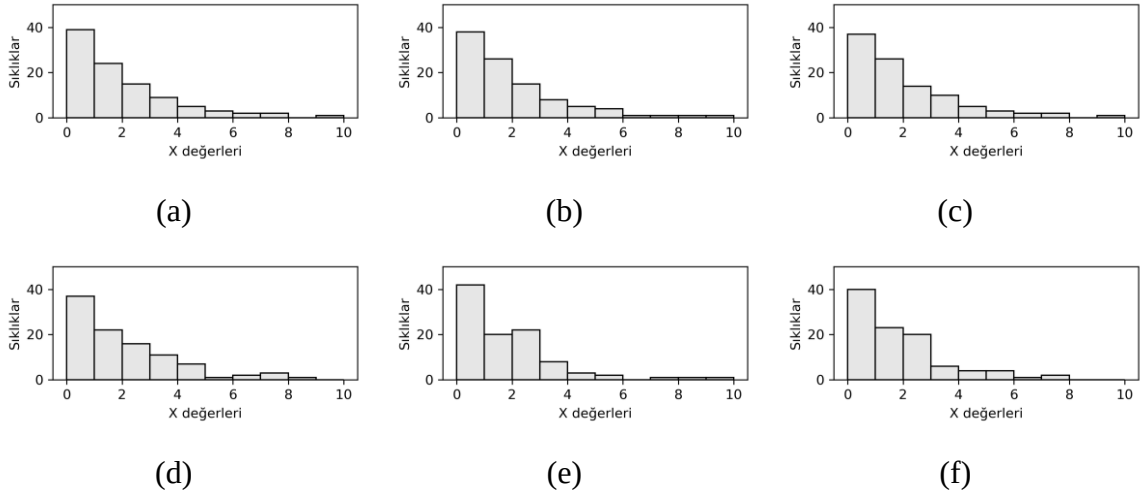
2.1.3. Üstel Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Üretilmesi

Farklı esneklik parametresi yardımıyla üstel dağılımdan üretilen 30 tane esnek rastgele sayının histogramı Şekil 13’da görülmektedir. $m = 0.0$ ve $m = 0.2$ olduğunda histogramı üstel dağılımı yansıtmaması beklenir ancak veri sayısının az olması bazı küçük sapmalar göstermektedir. Esneklik parametresi (m) büyüdükçe histogramda bozulmaların arttığı görülmektedir.



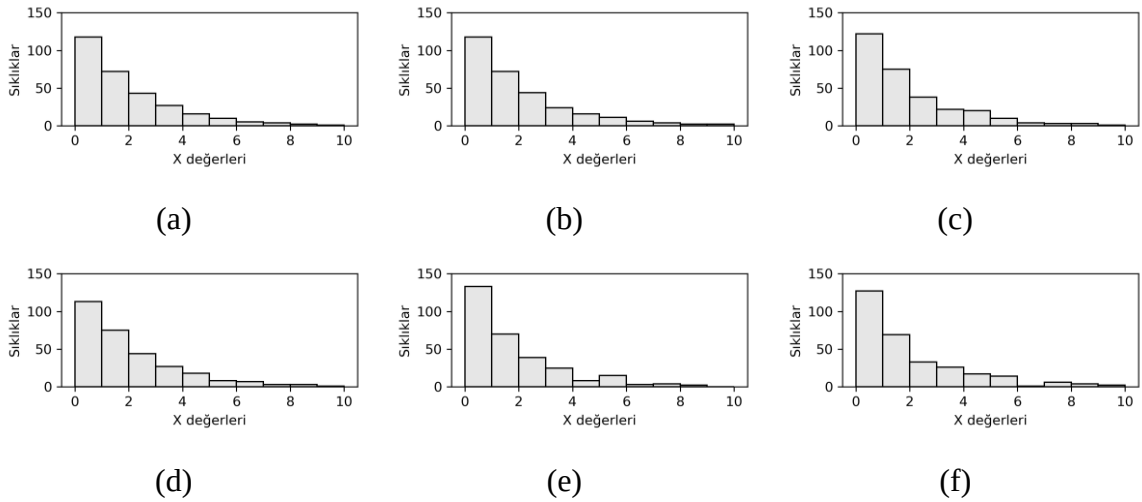
Şekil 13. Üstel dağılımdan $\lambda = 0.5$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 30 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

Farklı esneklik parametresi yardımıyla üstel dağılımdan üretilen 100 tane esnek rastgele sayının histogramı Şekil 14’te görülmektedir. $m = 0.0$ olduğunda histogramı düzgün bir azalım göstererek üstel dağılımı yakınsadığı görülmektedir. Yine de veri sayısından kaynaklanan bazı küçük sapmalar göstermektedir. Esneklik parametresi (m) büyüdükçe histogramda bozulmaların arttığı görülmektedir.



Şekil 14. Üstel dağılımdan $\lambda = 0.5$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 100 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

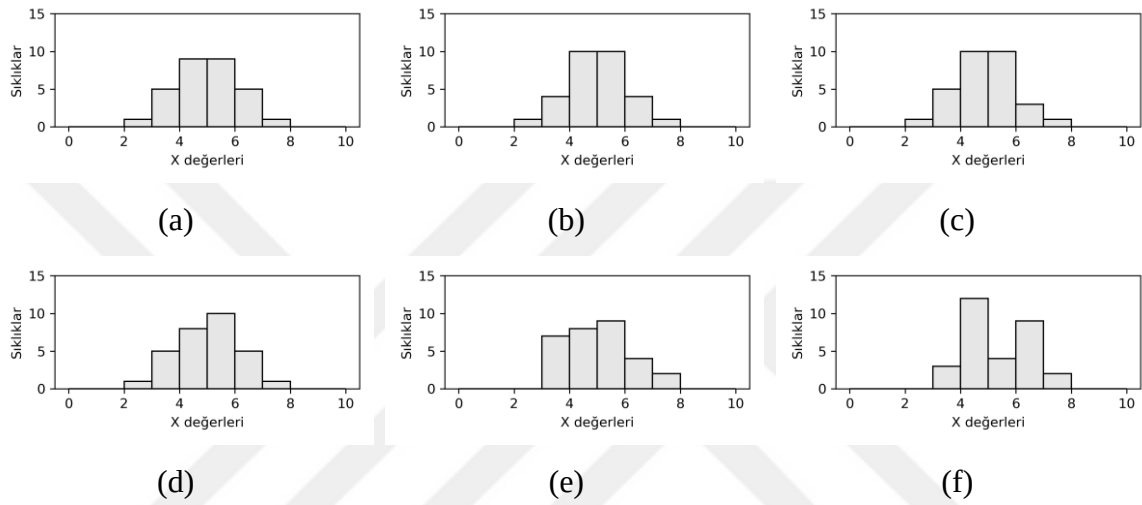
Farklı esneklik parametresi yardımıyla üstel dağılımdan üretilen 300 tane esnek rastgele sayının histogramı Şekil 15'te görülmektedir. $m = 0.0$ olduğunda histogramı düzgün bir azalım göstererek üstel dağılımı yakınsadığı görülmektedir. Esneklik parametresi (m) büyüdükçe histogramda bozulmaların arttığı görülmektedir.



Şekil 15. Üstel dağılımdan $\lambda = 0.5$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 300 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

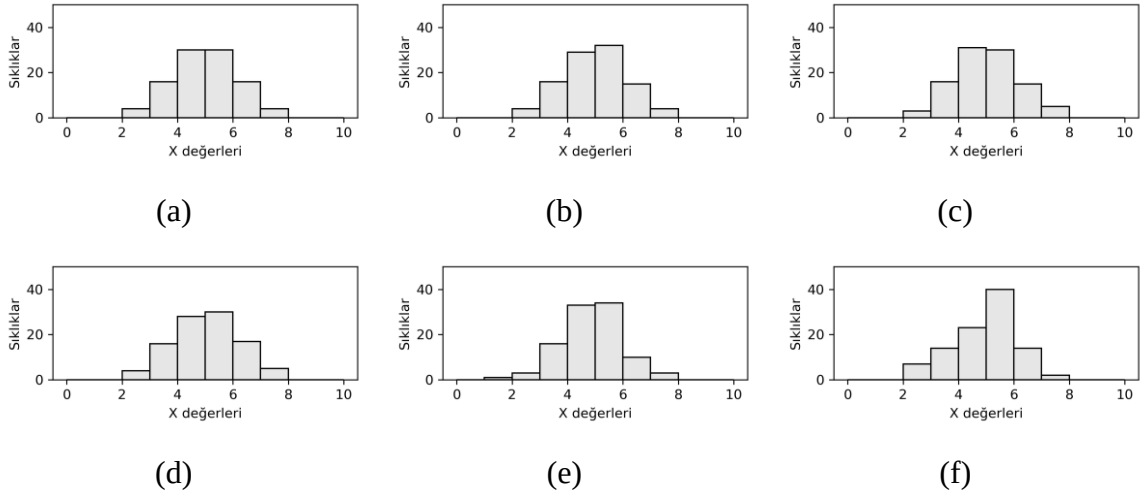
2.1.4. Normal Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Üretilmesi

Farklı esneklik parametresi yardımıyla normal dağılımdan üretilen 30 tane esnek rastgele sayının histogramı Şekil 16’da görülmektedir. $m = 0$ olduğunda histogramı normal dağılımı tam olarak yansıttığı görülmektedir. Esneklik parametresi (m) büyüdükçe histogramdaki simetriklikteki bozulmaların arttığı görülmektedir.



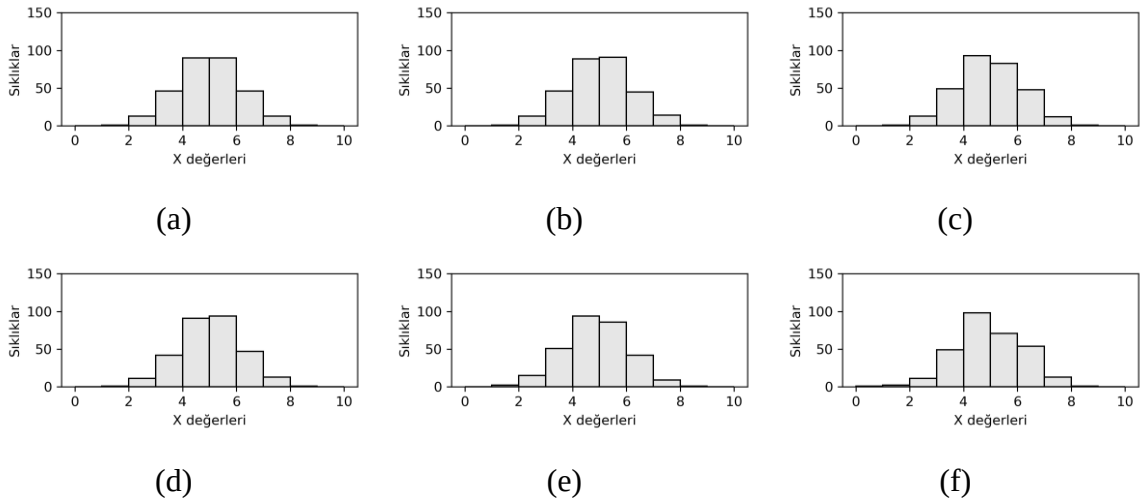
Şekil 16. Normal dağılımdan $\mu = 5, \sigma = 1.2$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 30 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

Farklı esneklik parametresi yardımıyla normal dağılımdan üretilen 100 tane esnek rastgele sayının histogramı Şekil 17’de görülmektedir. $m = 0$ olduğunda histogramı normal dağılımı tam olarak yansıttığı görülmektedir. Esneklik parametresi (m) büyüdükçe histogramdaki simetriklikteki bozulmaların arttığı görülmektedir.



Şekil 17. Normal dağılımdan $\mu = 5, \sigma = 1.2$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 100 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

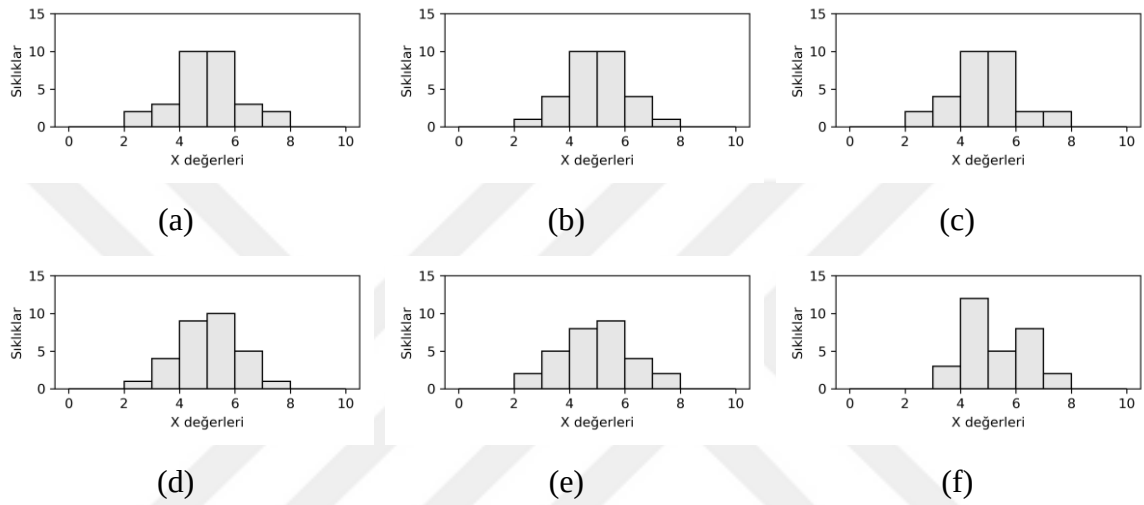
Farklı esneklik parametresi yardımıyla normal dağılımdan üretilen 300 tane esnek rastgele sayının histogramı Şekil 18’de görülmektedir. $m = 0$ olduğunda histogramı normal dağılımı tam olarak yansıttığı görülmektedir. Esneklik parametresi (m) büyüdükçe histogramdaki simetriklikteki bozulmaların arttığı görülmektedir.



Şekil 18. Normal dağılımdan $\mu = 5, \sigma = 1.2$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 300 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

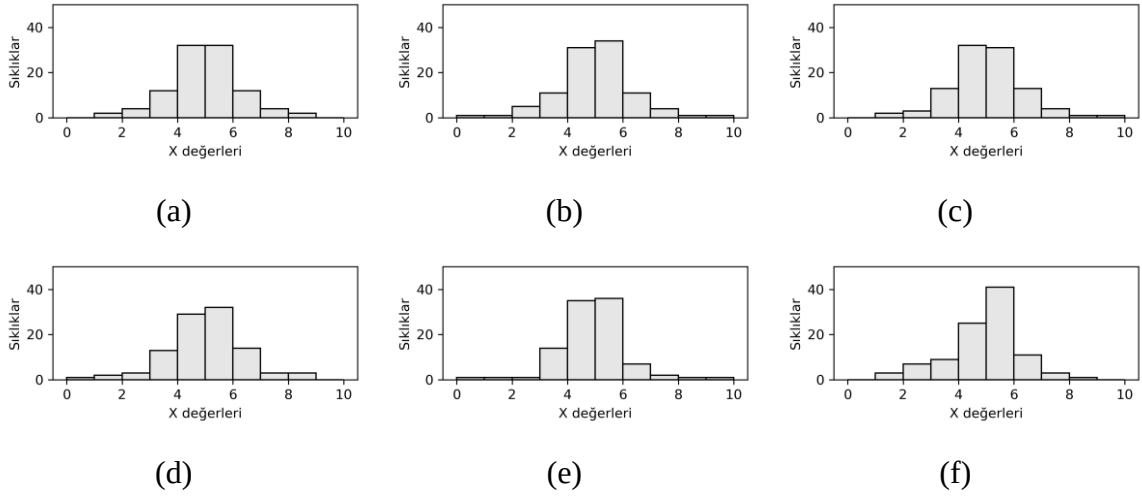
2.1.5. Laplace Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Üretilmesi

Farklı esneklik parametresi yardımıyla Laplace dağılımdan üretilen 30 tane esnek rastgele sayının histogramı Şekil 19’da görülmektedir. $m = 0$ olduğunda histogramı Laplace dağılımı tam olarak yansıttığı görülmektedir. Esneklik parametresi (m) büyüdükçe histogramdaki simetriklikteki bozulmaların arttığı görülmektedir.



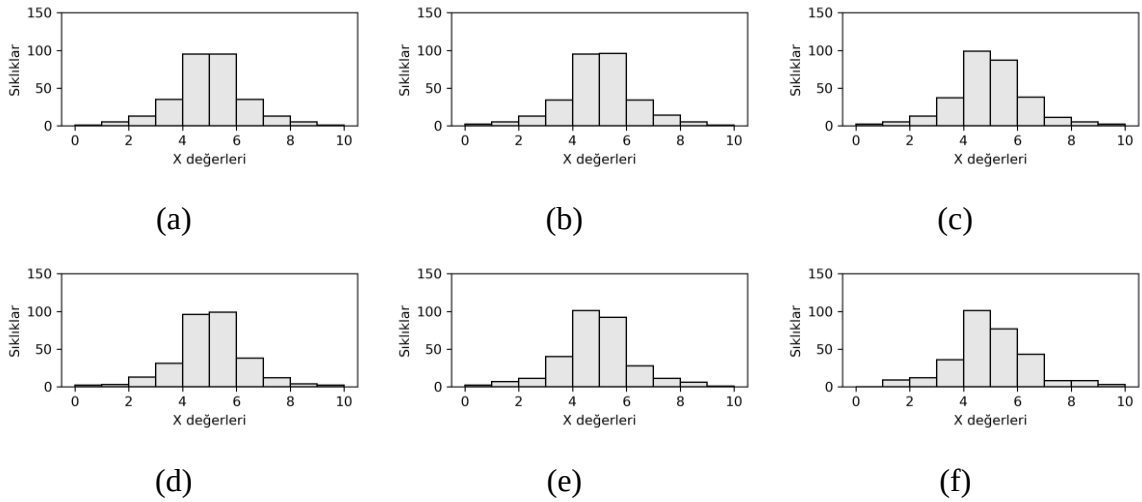
Şekil 19. Laplace dağılımdan $\mu = 5, \lambda = 1$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 30 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

Farklı esneklik parametresi yardımıyla Laplace dağılımdan üretilen 30 tane esnek rastgele sayının histogramı Şekil 20’de görülmektedir. $m = 0$ olduğunda histogramı Laplace dağılımı tam olarak yansıttığı görülmektedir. Esneklik parametresi (m) büyüdükçe histogramdaki simetriklikteki bozulmaların arttığı görülmektedir.



Şekil 20. Laplace dağılımdan $\mu = 5, \lambda = 1$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 100 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

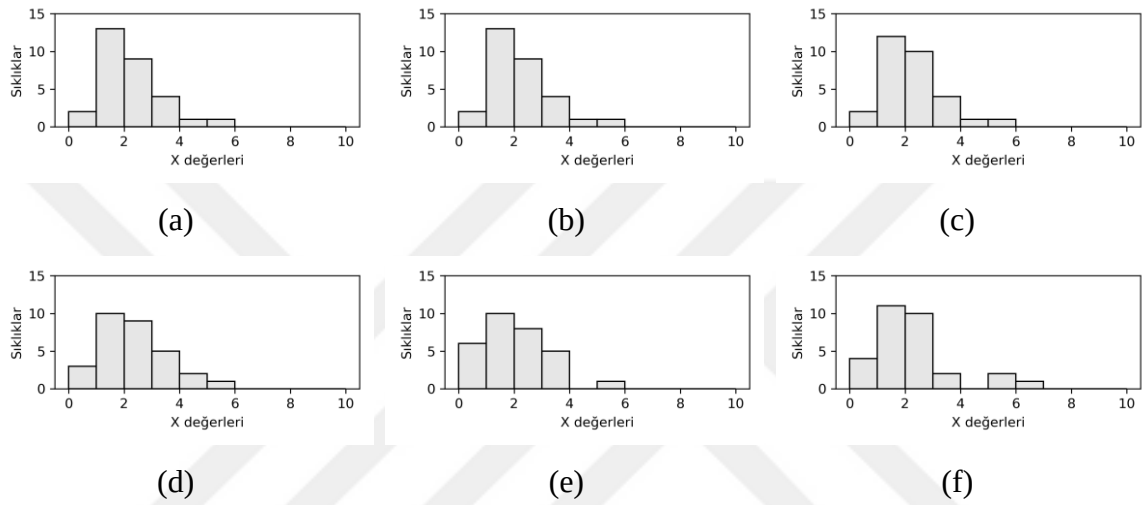
Farklı esneklik parametresi yardımıyla Laplace dağılımdan üretilen 100 tane esnek rastgele sayının histogramı Şekil 21’de görülmektedir. $m = 0$ olduğunda histogramı Laplace dağılımı tam olarak yansıttığı görülmektedir. Esneklik parametresi (m) büyüdükçe histogramdaki simetriklikteki bozulmaların arttığı görülmektedir.



Şekil 21. Laplace dağılımdan $\mu = 5, \lambda = 1$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 300 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

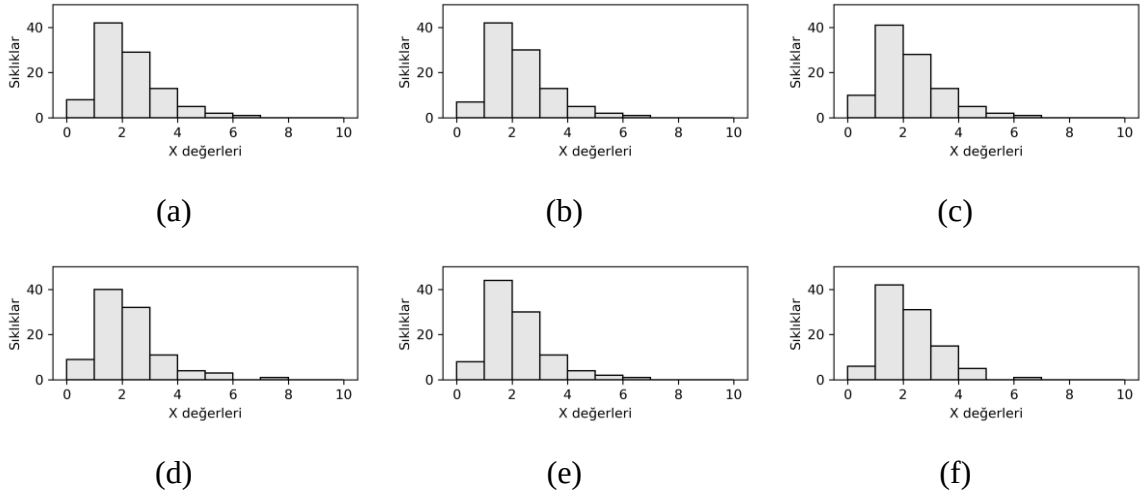
2.1.6. Lognormal Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Üretilmesi

Farklı esneklik parametresi yardımıyla lognormal dağılımdan üretilen 30 tane esnek rastgele sayının histogramı Şekil 22’de görülmektedir. $m = 0$ olduğunda histogramı lognormal dağılımı tam olarak yansıttığı görülmektedir. Esneklik parametresi (m) büyüdükçe histogramdaki simetriklikteki bozulmaların arttığı görülmektedir.



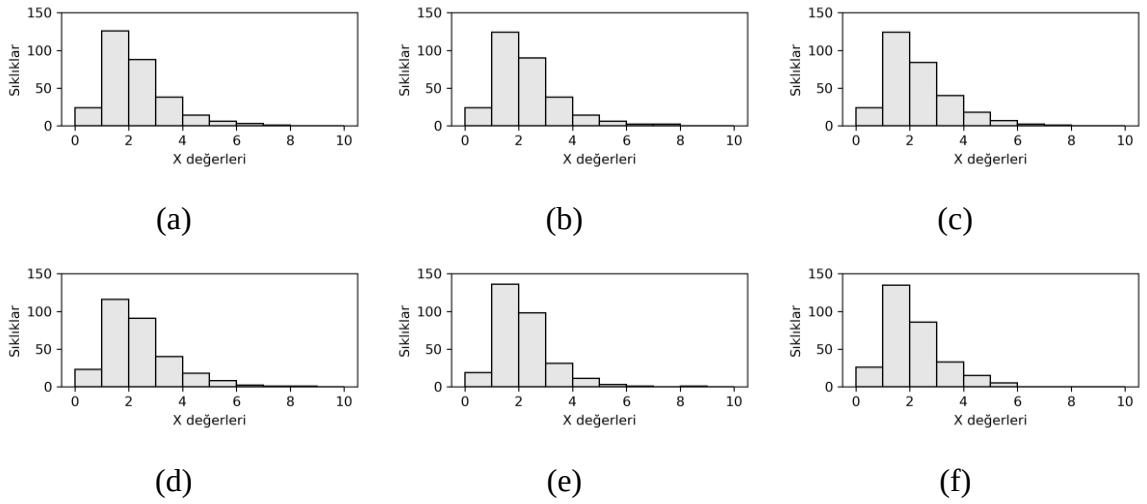
Şekil 22. Lognormal dağılımdan $\mu = 0.2, \sigma = 0.5$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 30 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

Farklı esneklik parametresi yardımıyla lognormal dağılımdan üretilen 100 tane esnek rastgele sayının histogramı Şekil 23’te görülmektedir. $m = 0$ olduğunda histogramı lognormal dağılımı tam olarak yansıttığı görülmektedir. Esneklik parametresi (m) büyüdükçe histogramdaki simetriklikteki bozulmaların arttığı görülmektedir.



Şekil 23. Lognormal dağılımdan $\mu = 0.2, \sigma = 0.5$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 100 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

Farklı esneklik parametresi yardımıyla lognormal dağılımdan üretilen 300 tane esnek rastgele sayının histogramı Şekil 24'te görülmektedir. $m = 0$ olduğunda histogramı lognormal dağılımı tam olarak yansıttığı görülmektedir. Esneklik parametresi (m) büyüdükçe histogramdaki simetriklikteki bozulmaların arttığı görülmektedir.



Şekil 24. Lognormal dağılımdan $\mu = 0.2, \sigma = 0.5$ parametrelili farklı esneklik parametresi (m) yardımıyla üretilen 300 tane esnek rastgele sayıların histogramları, (a) $m = 0.0$, (b) $m = 0.2$, (c) $m = 0.4$, (d) $m = 0.6$, (e) $m = 0.8$, (f) $m = 1.0$.

3. BULGULAR

Önerilen esnek rastgele sayı üretme yaklaşımının nasıl bir veri kümesi oluşturduğu ve bu esnek rastgele sayı kümesinin farklı esneklik parametresine göre istatistikleri ne kadar etkilediği irdelenecektir. Farklı dağılımlardan üretilen esnek rastgele sayıların dağılımı ne kadar yansıttığı ve esneklik parametresinin ve örnek büyüklüğünün uyum iyiliği testlerine etkisi irdelenecektir.

3.1. Esnek Rastgele Sayıların Temel Parametrelere Göre İncelenmesi

Bu bölümde beş farklı sürekli dağılımdan üretilen esnek rastgele sayıların esneklik parametresinin değişik değerlerine göre nasıl değiştiği incelenmiştir. Bu işlem için üretilen rastgele sayıların parametreleri, uyumsuzluk ölçüleri ve seçilen dağılıma uygunluğu ele alınmıştır.

Esnek rastgele sayı üretim simülasyonları için beş farklı dağılım,

- Düzgün dağılım,
- Üstel dağılım,
- Normal dağılım,
- Laplace dağılımı,
- Lognormal dağılım,

olmak üzere üç tane simetrik ve iki tane simetrik olmayan dağılım seçilmiştir. Her bir dağılımdan $n = \{10, 30, 50, 100, 300\}$ biçiminde beş farklı büyüklükte ve $m = \{0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$ biçiminde altı farklı esneklik parametresi ile esnek rastgele sayı üretimi gerçekleştirilmiştir. Ayrıca teorik çalışmalarla karşılaştırmak için standart düzgün dağılımdan aynı ölçülerde esnek rastgele sayı üretilmiştir. Seçilen parametreler ile yapılan tüm rastgele sayı üretimleri 1000 kez tekrarlanmıştır. Dağılıma uygunluk için 3 farklı uyum iyiliği yöntemi tercih edilmiştir. Bu uyum iyiliği testleri,

- Cramer von Mises
- Kolmogorov-Smirnov
- Serbest Ki-Kare

olarak ele alınmıştır. Uyum iyiliği testlerinden elde edilen p-değerlerinin ortalaması ve $\alpha = 0.05$ anlamlılık düzeyine göre kabul edilen H_0 hipotezinin yüzdesi incelenmiştir.

3.1.1. Standart Düzgün Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Simülasyonları

Önerilen esnek rastgele değişkenin standart düzgün dağılıma sahip olması durumunda Bölüm 2.1’de verilen teorik sonuçlarla karşılaştırması gerekir. Bu işlem için öncelikle $[0,1)$ aralığında tanımlı farklı örneklem boyutlarında standart düzgün dağılımdan üretilen rastgele sayıların sonuçları Tablo 9-Tablo 13’te verilmiştir.

Tablo 9-Tablo 13’te farklı örneklemelerde ve farklı esneklik parametrelerinde bile ortama değerin değişmediği gözlenmiştir. (81) eşitliğinde verildiği gibi ortalama $\bar{x}$ değerinin 0.5 civarında olduğu tablolarda görülmektedir. Öte yandan ortalama varyansın esneklik parametresine göre artış gösterdiği görülmektedir. Ayrıca örneklem büyüklüğü arttıkça ortalama varyansta da artış olduğu görülmektedir. Ancak bu artış esneklik parametresinin $m < 1$ değerleri için geçerlilik göstermektedir. Dolayısıyla ortalama varyans hem esneklik parametresi hem de örneklem büyüklüğünden etkilenmektedir. Bu sonuç (87) eşitliğinde de görülmektedir. Benzer sonuçları ortalamanın varyansı için de söylenebilir. Ancak bir farkla, ortalamanın varyansı esneklik parametresiyle artış gösterirken, tam tersi örneklem büyüklüğü ile azalış göstermektedir. Bu sonuçlar (83) eşitliğinde gösterilmektedir.

Esnek rastgele sayı üretmenin en temel amacı aynı parametrelere sahip ancak farklı uyumsuzluk değerlerine sahip olan rastgele sayılar kümesi elde edebilmektir. Bu amaç doğrultusunda elde edilen uyumsuzluk değeri esneklik parametresiyle artış göstermesinin yanı sıra örneklem büyüklüğü ile bir azalış gösterdiği görülmektedir. Dolayısıyla veri sayısı arttıkça uyumsuzluğun azaldığı ve örneklemde elde edilen istatistiklerin kitle parametresine yaklaşması büyük sayılar kanunu doğrularken esneklik parametresine göre değişim göstermesi esnek rastgele sayıların amacını desteklemektedir.

Tablo 9. Standart düzgün dağılımdan üretilen $n = 10$ tane esnek rastgele sayının simülasyon sonuçları

m	Ortalama $\bar{x}$	Ortalama s^2	s_x^2	Ortalama Dn
0.00	0.5000	0.0758	0.0000	0.1818
0.20	0.5004	0.0760	0.0003	0.1955
0.40	0.4990	0.0767	0.0014	0.2296
0.60	0.5001	0.0788	0.0029	0.2713
0.80	0.4968	0.0807	0.0053	0.3189
1.00	0.5014	0.0834	0.0085	0.3687

Tablo 10. Standart düzgün dağılımdan üretilen $n = 30$ tane esnek rastgele sayının simülasyon sonuçları

m	Ortalama $\bar{x}$	Ortalama s^2	$s_{\bar{x}}^2$	Ortalama Dn
0.00	0.5000	0.0806	0.0000	0.0645
0.20	0.5001	0.0806	0.0001	0.0826
0.40	0.4994	0.0809	0.0004	0.1137
0.60	0.4983	0.0816	0.0010	0.1470
0.80	0.4986	0.0824	0.0017	0.1809
1.00	0.5002	0.0838	0.0027	0.2181

Tablo 11. Standart düzgün dağılımdan üretilen $n = 50$ tane esnek rastgele sayının simülasyon sonuçları

m	Ortalama $\bar{x}$	Ortalama s^2	$s_{\bar{x}}^2$	Ortalama Dn
0.00	0.5000	0.0817	0.0000	0.0392
0.20	0.5001	0.0818	0.0001	0.0562
0.40	0.5006	0.0820	0.0003	0.0829
0.60	0.4992	0.0821	0.0006	0.1126
0.80	0.4996	0.0831	0.0011	0.1400
1.00	0.5003	0.0837	0.0016	0.1703

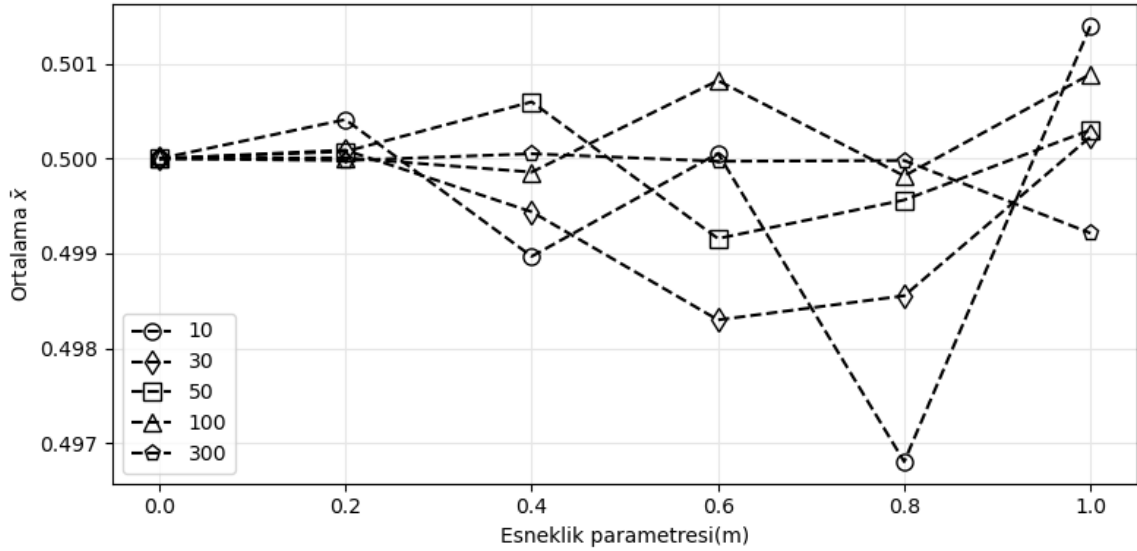
Tablo 12. Standart düzgün dağılımdan üretilen $n = 100$ tane esnek rastgele sayının simülasyon sonuçları

m	Ortalama $\bar{x}$	Ortalama s^2	$s_{\bar{x}}^2$	Ortalama Dn
0.00	0.5000	0.0825	0.0000	0.0198
0.20	0.5000	0.0825	0.0000	0.0348
0.40	0.4999	0.0826	0.0001	0.0557
0.60	0.5008	0.0828	0.0003	0.0784
0.80	0.4998	0.0830	0.0005	0.1009
1.00	0.5009	0.0832	0.0009	0.1225

Tablo 13. Standart düzgün dağılımdan üretilen $n = 300$ tane esnek rastgele sayının simülasyon sonuçları

m	Ortalama $\bar{x}$	Ortalama s^2	$s_{\bar{x}}^2$	Ortalama Dn
0.00	0.5000	0.0831	0.0000	0.0066
0.20	0.5000	0.0830	0.0000	0.0175
0.40	0.5001	0.0831	0.0000	0.0307
0.60	0.5000	0.0831	0.0001	0.0443
0.80	0.5000	0.0831	0.0002	0.0579
1.00	0.4992	0.0833	0.0003	0.0709

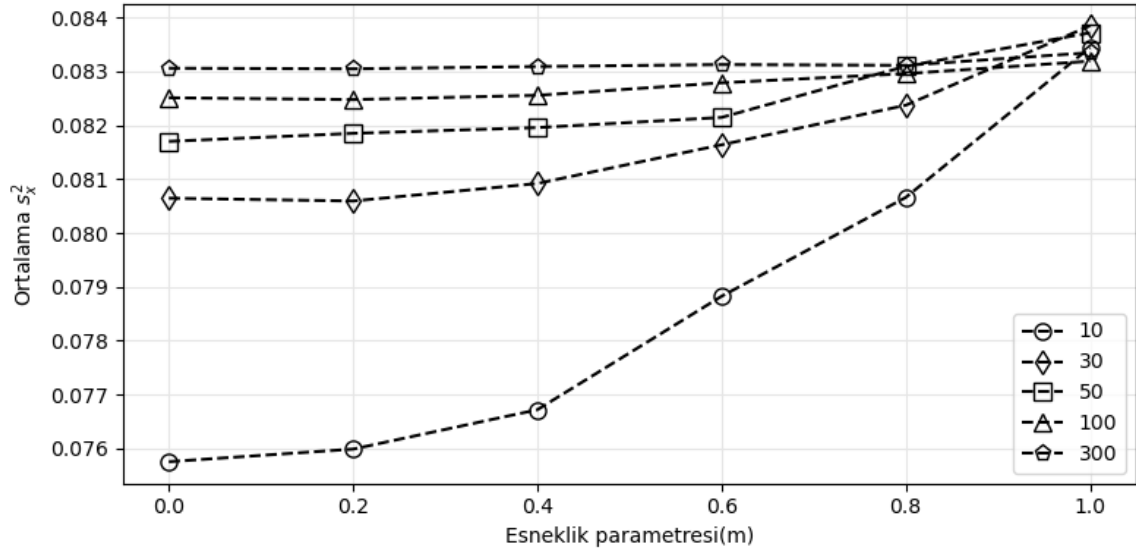
Şekil 25'te standart düzgün dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalamasının ortalama değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 0$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalamanın 0.5 olduğu m değeri arttıkça ortalamanın 0.5 civarında salınım gösterdiği görülmektedir. Öte yandan m değeri arttıkça ortalamadaki saçılmaların artışı gözlenmektedir.



Şekil 25 Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaları

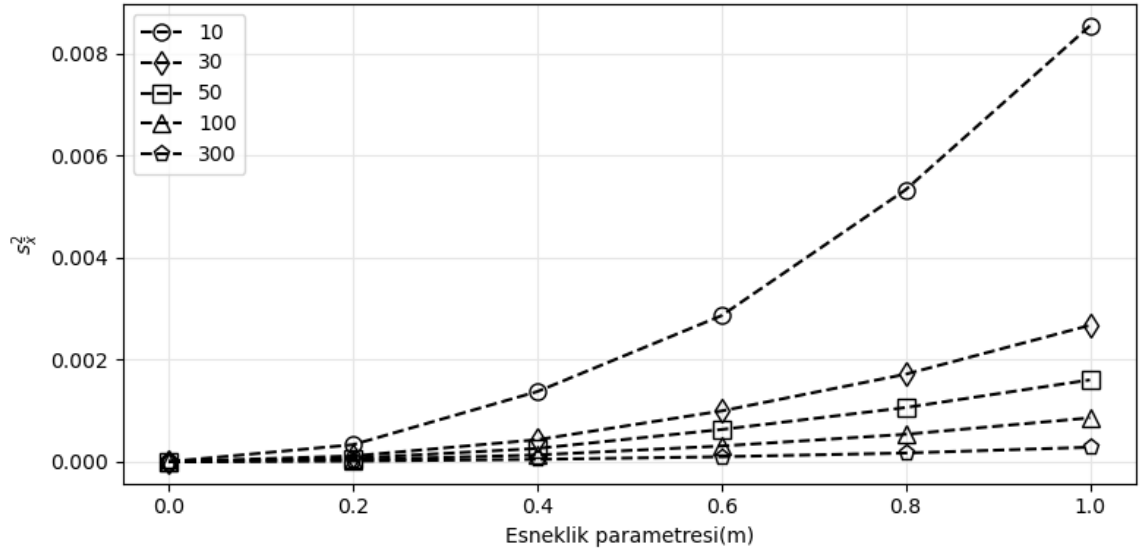
Şekil 26'da standart düzgün dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalama varyans değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 1$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalama varyans

1/12 olduğu m değeri azaldıkça ortalama varyansın değişim gösterdiği 0.075 ile 1/12 arasında bir değişim göstermektedir. (83) eşitliğinde elde edilen soncun simülasyondaki değişimi gözlenmiştir.



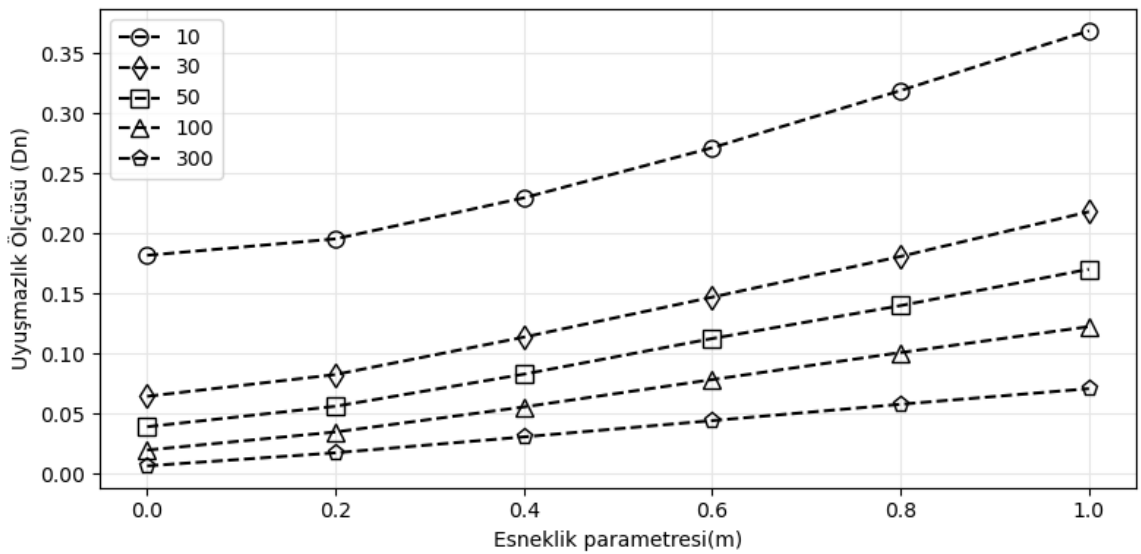
Şekil 26 Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki varyanslarının ortalamaları

Şekil 27’de standart düzgün dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalamasının varyans değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 0$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalamanın varyans değerlerinin 0 olduğu ve m değeri artıkça ortalama varyansın 0 ile 0.083 arasında bir değişim gösterdiği gözlenmektedir. (87) eşitliğinde elde edilen soncun simülasyondaki değişimi gözlenmiştir.



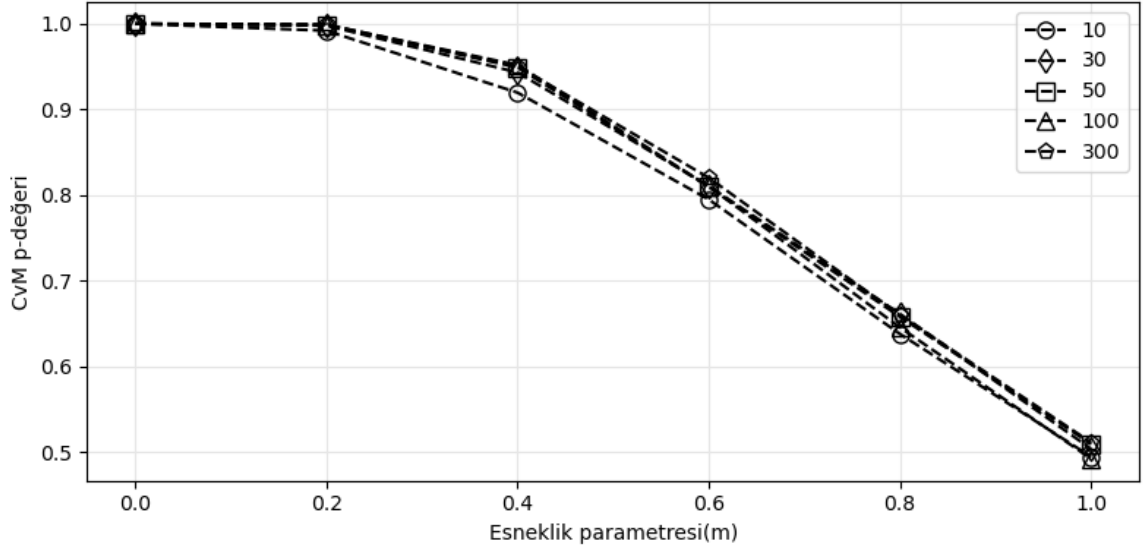
Şekil 27 Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaların varyansı

Şekil 28’de standart düzgün dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin uyumsuzluk ölçüleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. Esnek rastgele sayıların uyumsuzluk ölçüleri esneklik parametresiyle yaklaşık doğrusal ilişkiye sahip olduğu görülmektedir. Tüm örneklem boyutları için uyumsuzluk ölçüsü m değeri arttıkça artmaktadır. Veri sayısı arttıkça uyumsuzluğun azaldığı görülmektedir.

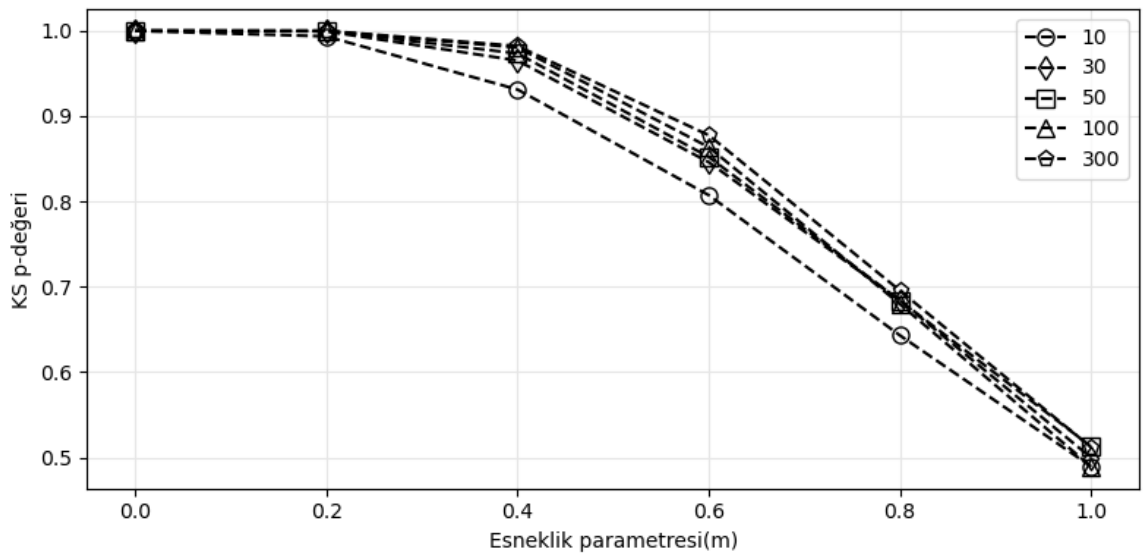


Şekil 28 Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki uyumsuzluk ölçüleri

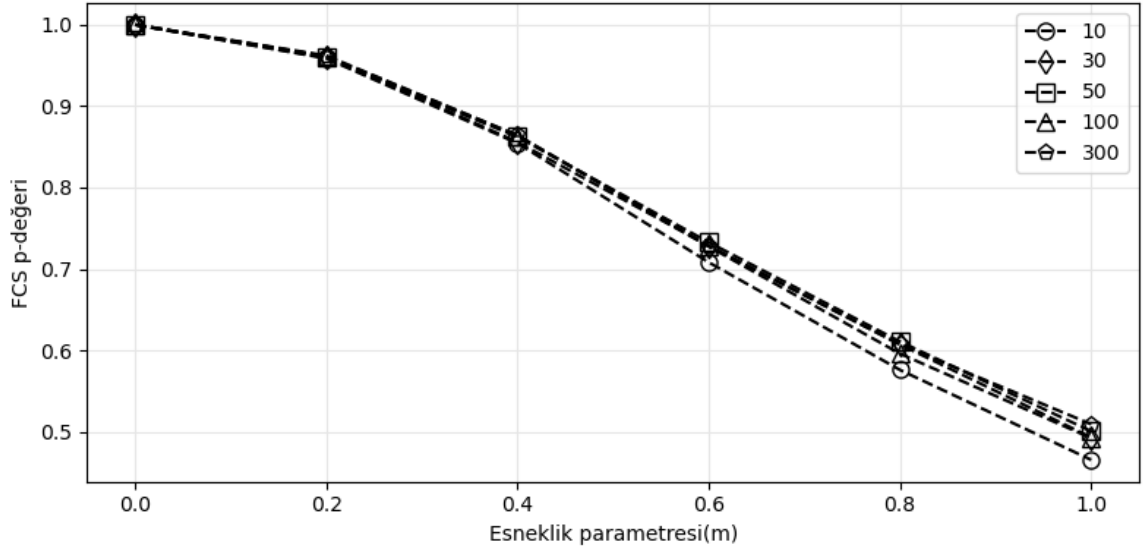
Şekil 29-Şekil 31’de standart düzgün dağılımdan üretilmiş esnek rastgele sayılar için üç farklı uyum iyiliği testleri için ortalama p-değerlerinin esneklik parametresine göre değişimi verilmiştir. Değişimler incelendiğinde her test için $m = 0$ olduğunda ortalama p-değerinin 1 olduğu m değeri arttıkça ortalama p-değerinin azalım gösterdiği görülmektedir. $m = 1$ olduğunda ortalama p-değeri 0.5 civarında olduğu görülmektedir.



Şekil 29 Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testine göre ortalama p-değerleri

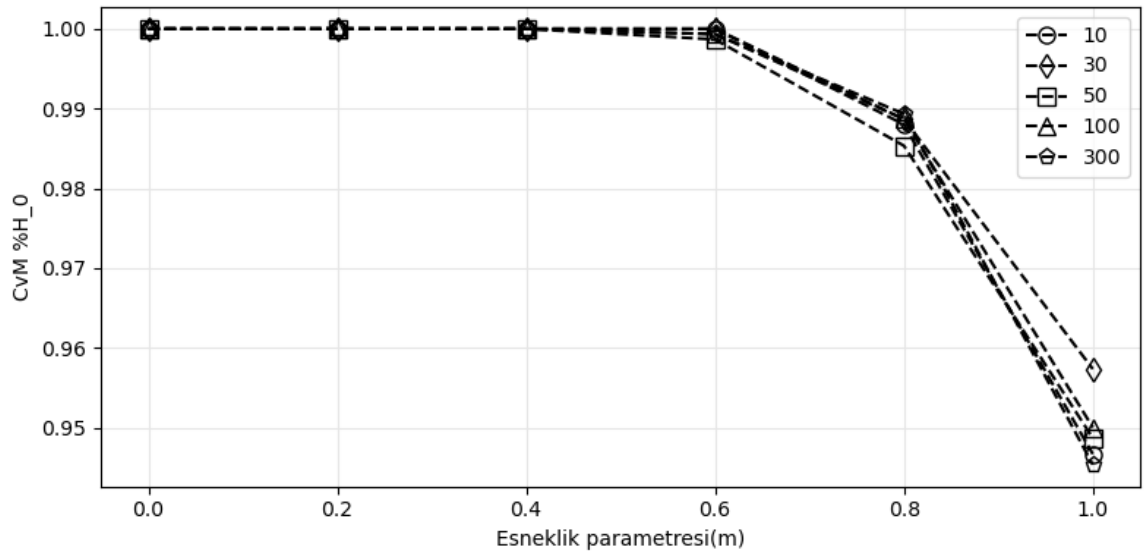


Şekil 30 Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testine göre ortalama p-değerleri

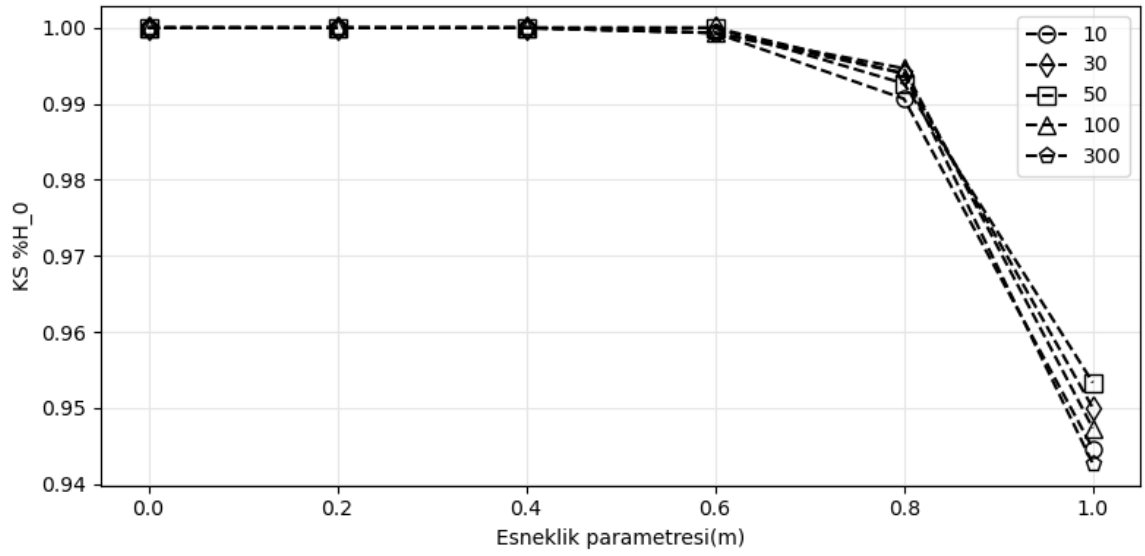


Şekil 31 Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testine göre ortalama p-değerleri

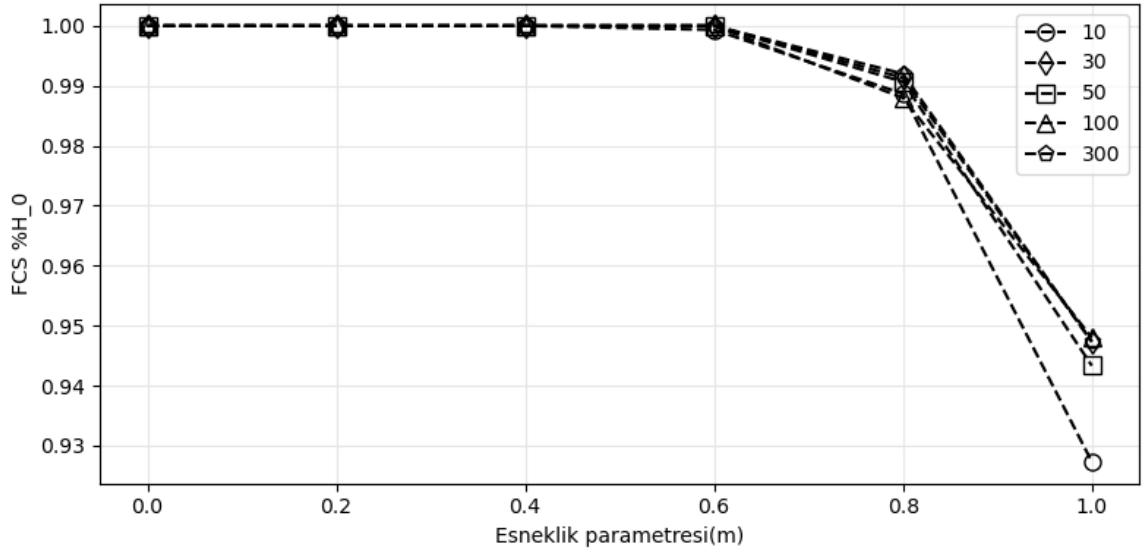
Şekil 32-Şekil 34’de standart düzgün dağılımdan üretilmiş esnek rastgele sayılar için üç farklı uyum iyiliği testleri için kabul oranı esneklik parametresine göre değişimi verilmiştir. Değişimler incelendiğinde her test için $m = 0$ olduğunda kabul oranı 1 olduğu m değeri arttıkça kabul oranının azalım gösterdiği görülmektedir. $m = 1$ olduğunda kabul oranı 0.95 civarında olduğu görülmektedir.



Şekil 32 Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testinin kabul yüzdesi



Şekil 33 Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testinin kabul yüzdesi

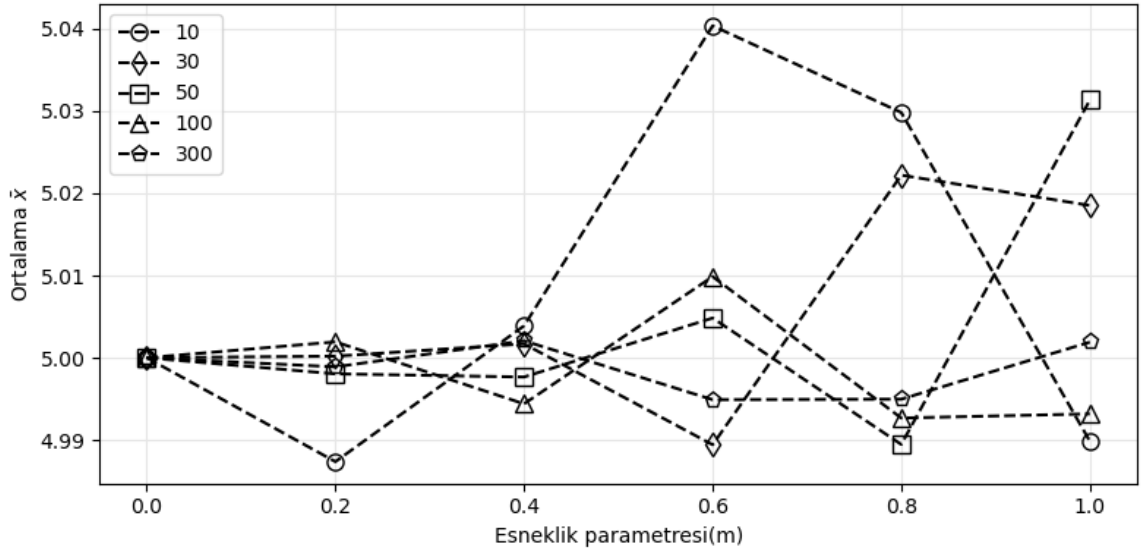


Şekil 34 Standart düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testinin kabul yüzdesi

3.1.2. Düzgün Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Simülasyonları

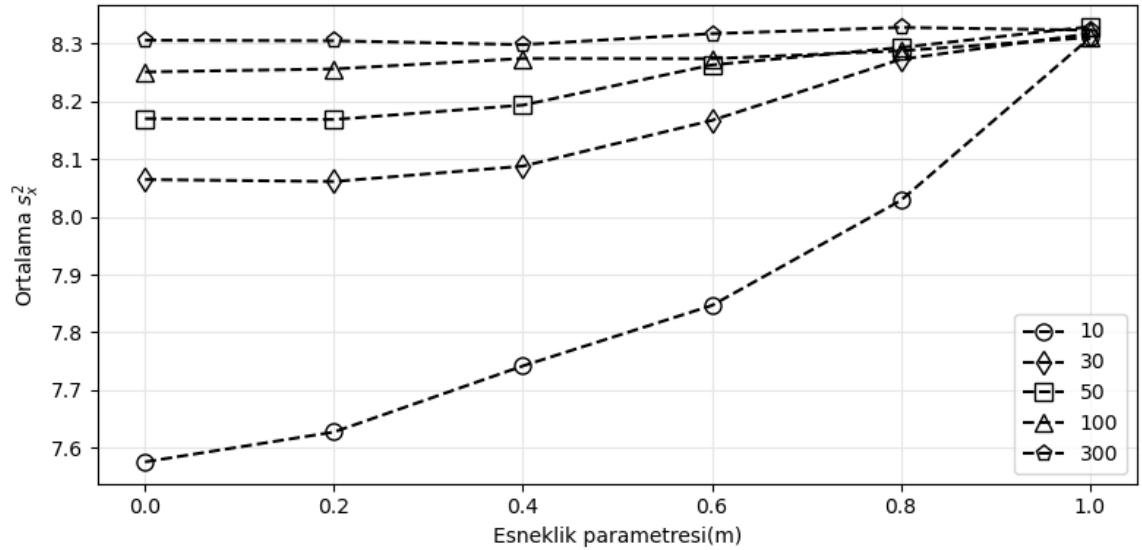
Düzgün dağılımdan $[0,10)$ aralığında üretilen esnek rastgele sayılar kümesinin grafikleri aşağıda verilmiştir.

Şekil 35'te düzgün dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalamasının ortalama değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 0$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalamanın 5 olduğu m değeri arttıkça ortalamanın 5 civarında salınım gösterdiği görülmektedir. Öte yandan m değeri arttıkça ortalamaadaki saçılmaların arttığı gözlenmektedir.



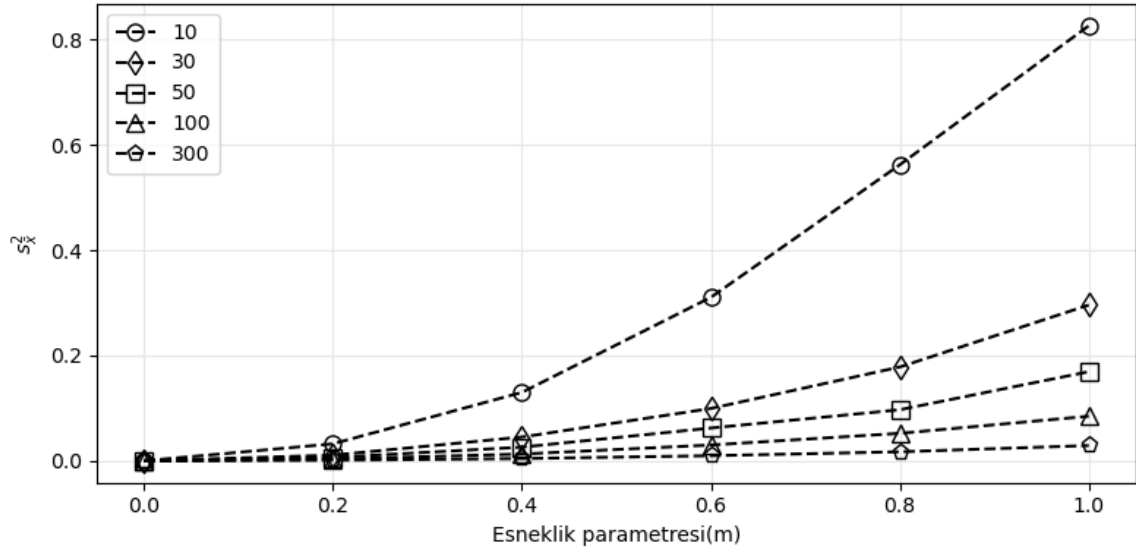
Şekil 35 Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaları

Şekil 36'da düzgün dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalama varyans değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 1$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalama varyans ~ 8.3 olduğu m değeri azaldıkça ortalama varyansın örneklem büyüklüğüne göre değişim gösterdiği 0.76 – 0.83 arasında bir değişim göstermektedir.



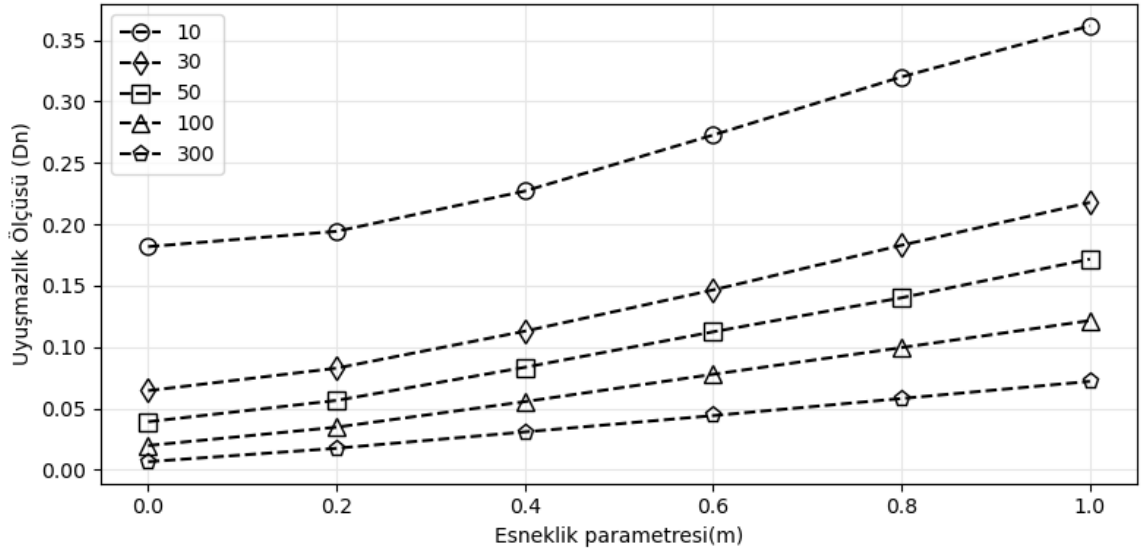
Şekil 36 Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki varyanslarının ortalamaları

Şekil 37’de düzgün dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalamasının varyans değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 0$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalamanın varyans 0 olduğu m değeri arttıkça ortalama varyansın değişim gösterdiği 0 ile 0.83 arasında bir değişim göstermektedir.



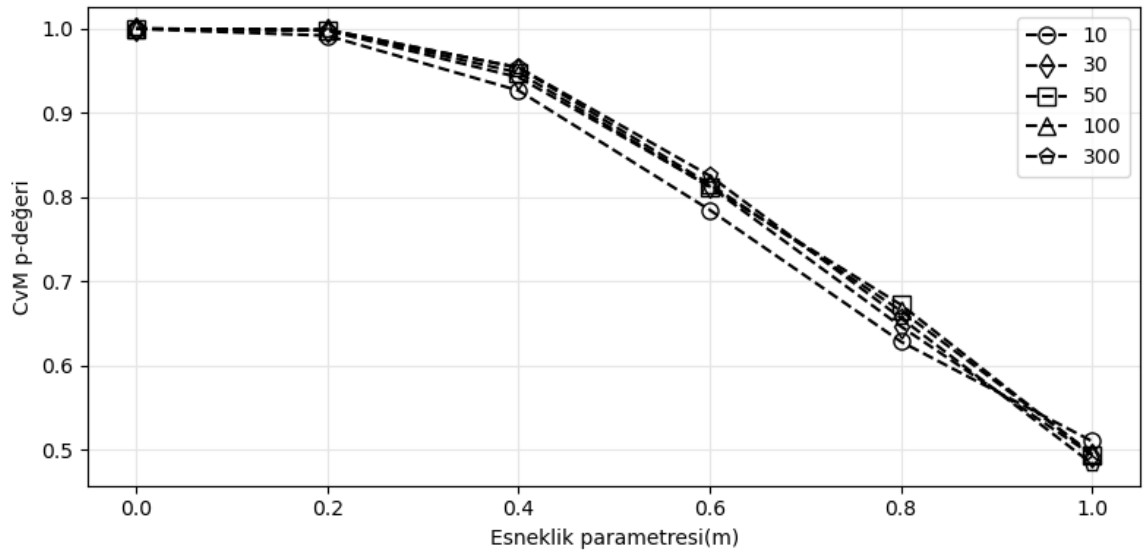
Şekil 37 Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaların varyansı

Şekil 38’de düzgün dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin uyumsuzluk ölçüleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. Esnek rastgele sayıların uyumsuzluk ölçüleri esneklik parametresiyle yaklaşık doğrusal ilişkiye sahip olduğu görülmektedir. Tüm örneklem boyutları için uyumsuzluk ölçüsü m değeri arttıkça artmaktadır. Veri sayısı arttıkça uyumsuzluğun azaldığı görülmektedir.

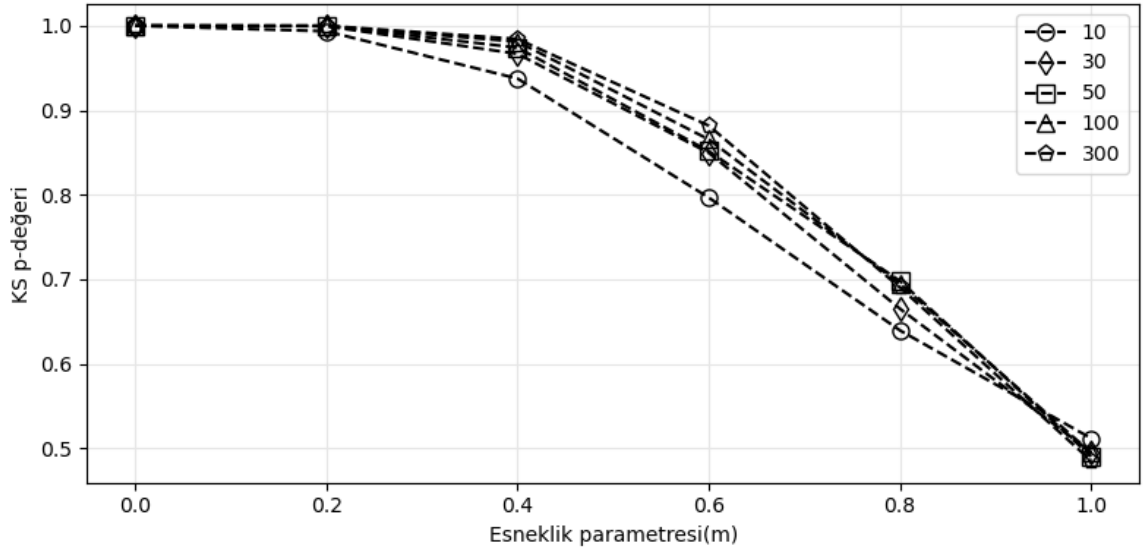


Şekil 38 Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki uyumsuzluk ölçüşü

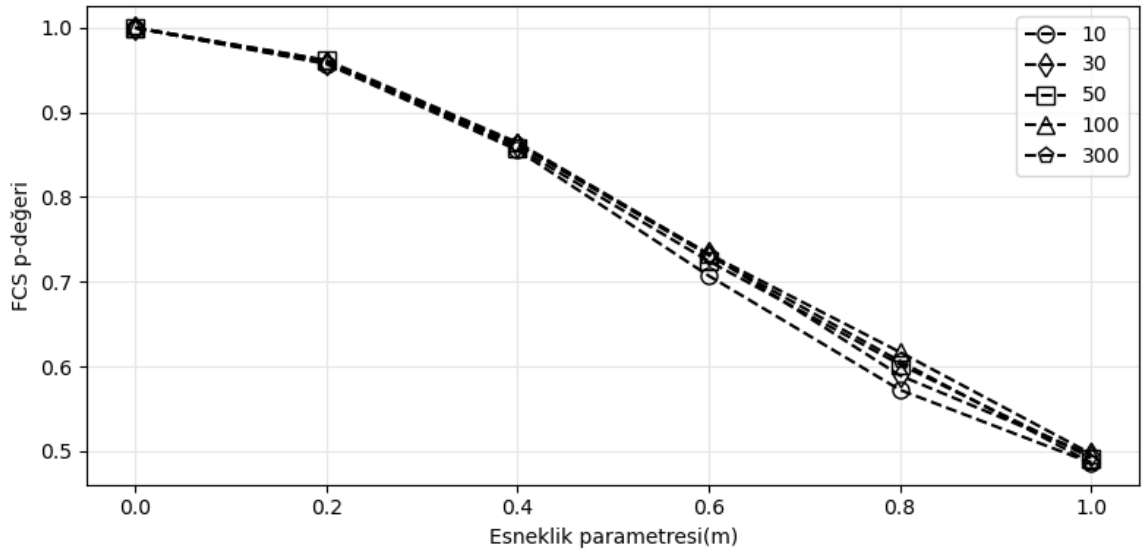
Şekil 39-Şekil 41’de düzgün dağılımdan üretilmiş esnek rastgele sayılar için üç farklı uyum iyiliği testleri için ortalama p-değerlerinin esneklik parametresine göre değişimi verilmiştir. Değişimler incelendiğinde her test için $m = 0$ olduğunda ortalama p-değerinin 1 olduğu m değeri arttıkça ortalama p-değerinin azalım gösterdiği görülmektedir. $m = 1$ olduğunda ortalama p-değeri 0.5 civarında olduğu görülmektedir.



Şekil 39 Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testine göre ortalama p-değerleri



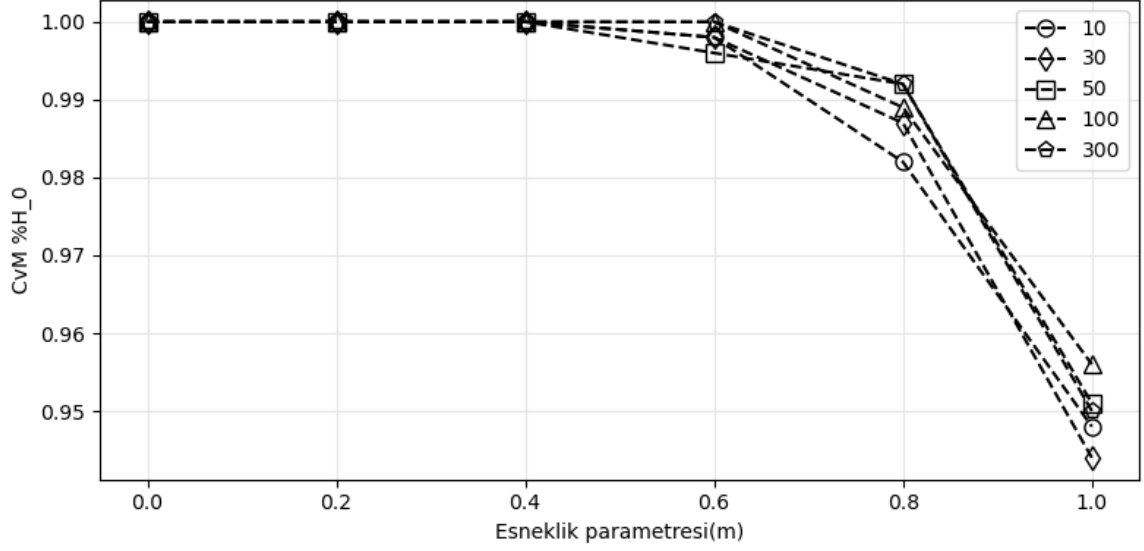
Şekil 40 Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testine göre ortalama p-değerleri



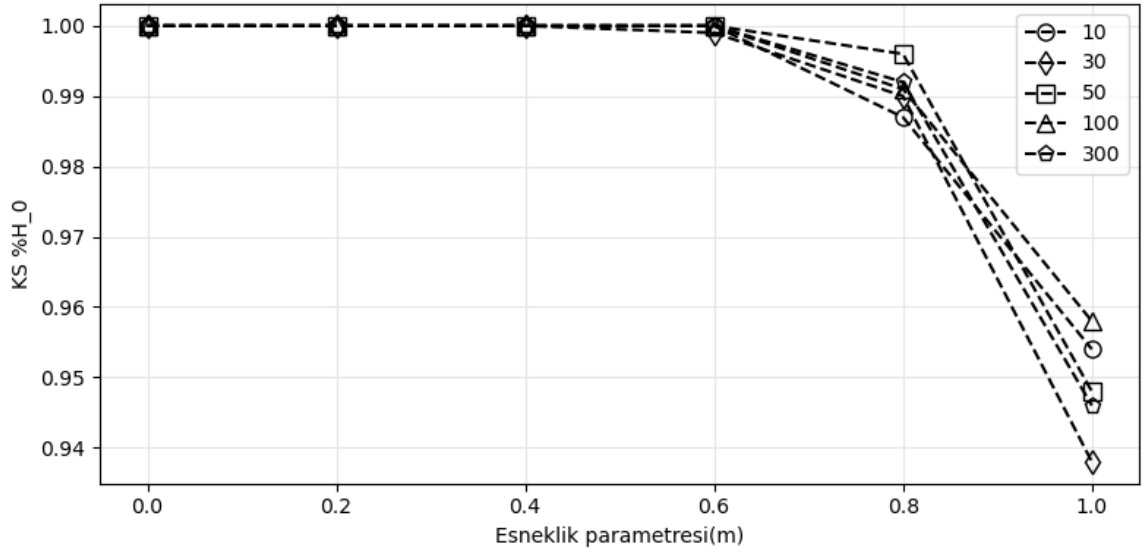
Şekil 41 Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testine göre ortalama p-değerleri

Şekil 42-Şekil 44'te düzgün dağılımdan üretilmiş esnek rastgele sayılar için üç farklı uyum iyiliği testleri için kabul oranı esneklik parametresine göre değişimi verilmiştir. Değişimler incelendiğinde her test için $m = 0$ olduğunda kabul oranı 1 olduğu m değeri

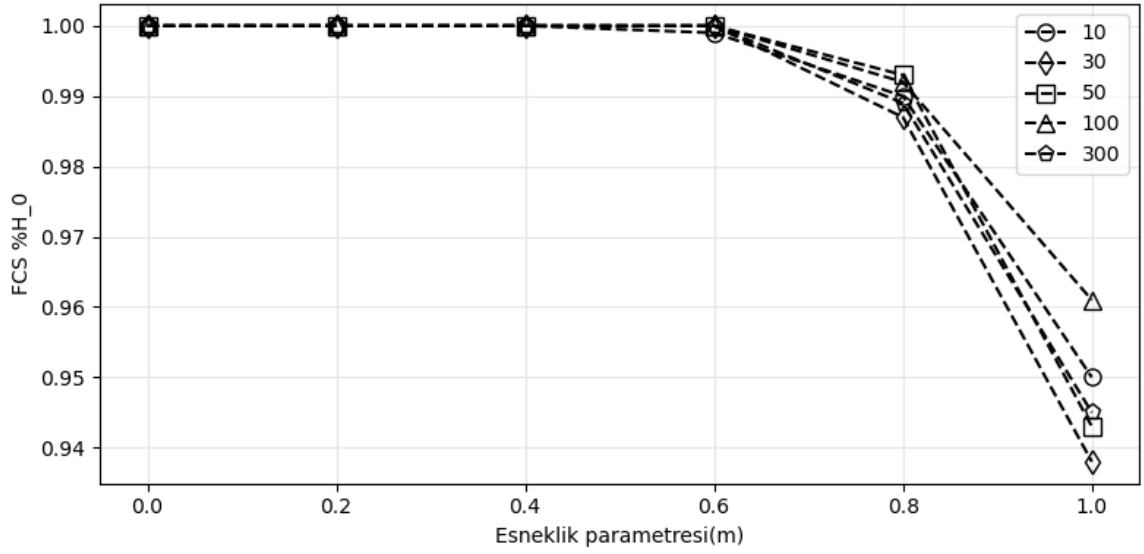
arttıkça kabul oranının azalım gösterdiği görülmektedir. $m = 1$ olduğunda kabul oranı 0.95 civarında olduğu görülmektedir.



Şekil 42 Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testinin kabul yüzdesi



Şekil 43 Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testinin kabul yüzdesi

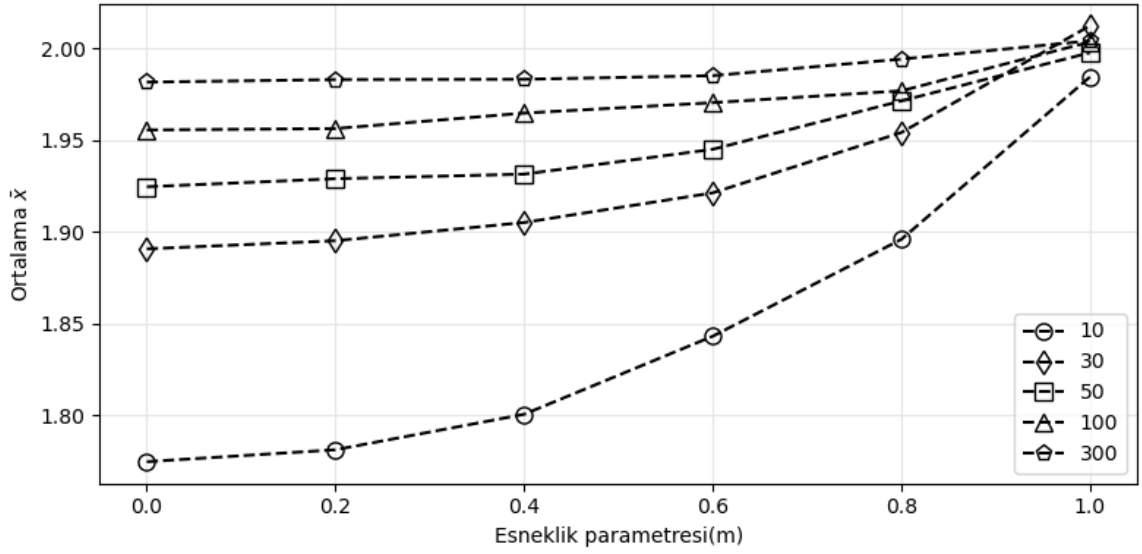


Şekil 44 Düzgün dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testinin kabul yüzdesi

3.1.3. Üstel Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Simülasyonları

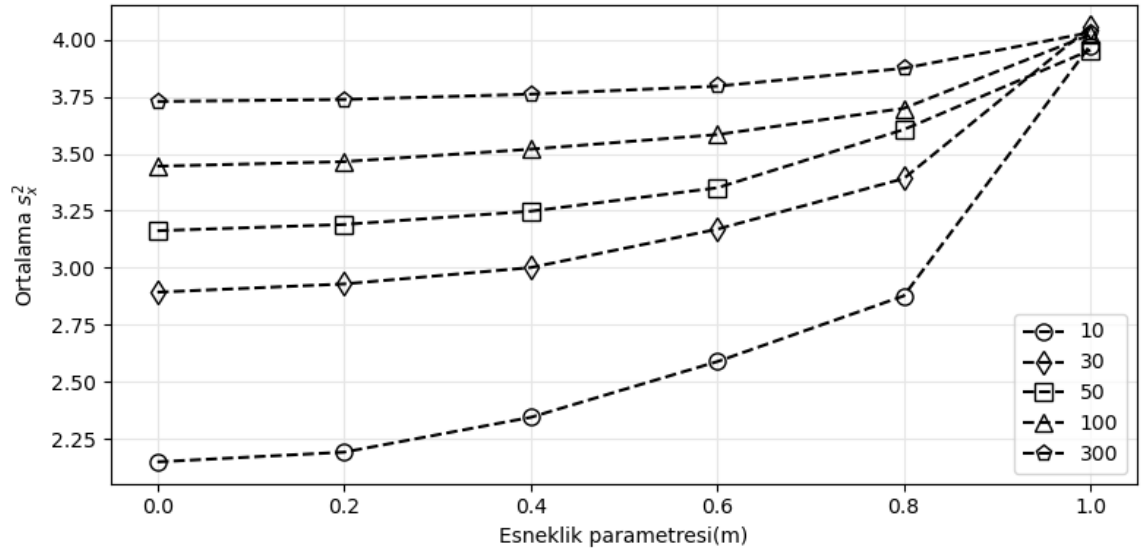
Üstel dağılımdan parametreleri ($\lambda = 0.5$) olacak şekilde üretilen esnek rastgele sayılar kümesinin grafikleri aşağıda verilmiştir.

Şekil 45'te üstel dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalamasının ortalama değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 0$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalamanın 1.75 ile 2 arasında olduğu m değeri arttıkça ortalamanın 2 civarına yaklaştığı görülmektedir. Öte yandan m değeri arttıkça ortalamanın parabolik olarak arttığı gözlenmektedir. Bunun başlıca nedeni simetrik olmayan dağılımlarda ortalamanın varyansın değişimi ile yakın bir ilişki olduğu söylenebilir.



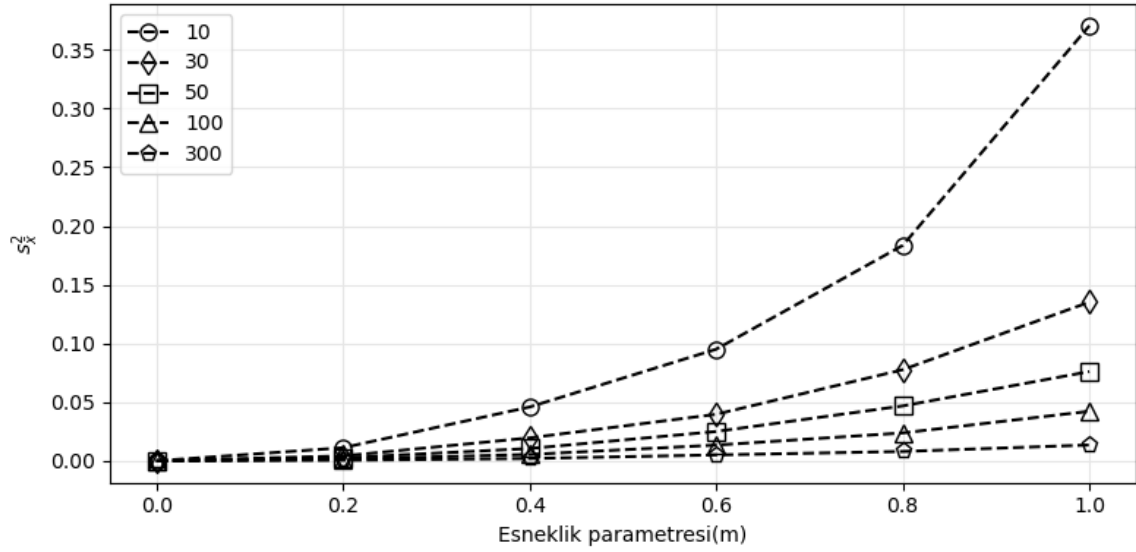
Şekil 45 Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaları

Şekil 46'da üstel dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalama varyans değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 1$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalama varyans ~ 4 olduğu m değeri azaldıkça ortalama varyansın örneklem büyüklüğüne göre değişim gösterdiği 2.25 – 3.75 arasında bir değişim göstermektedir.



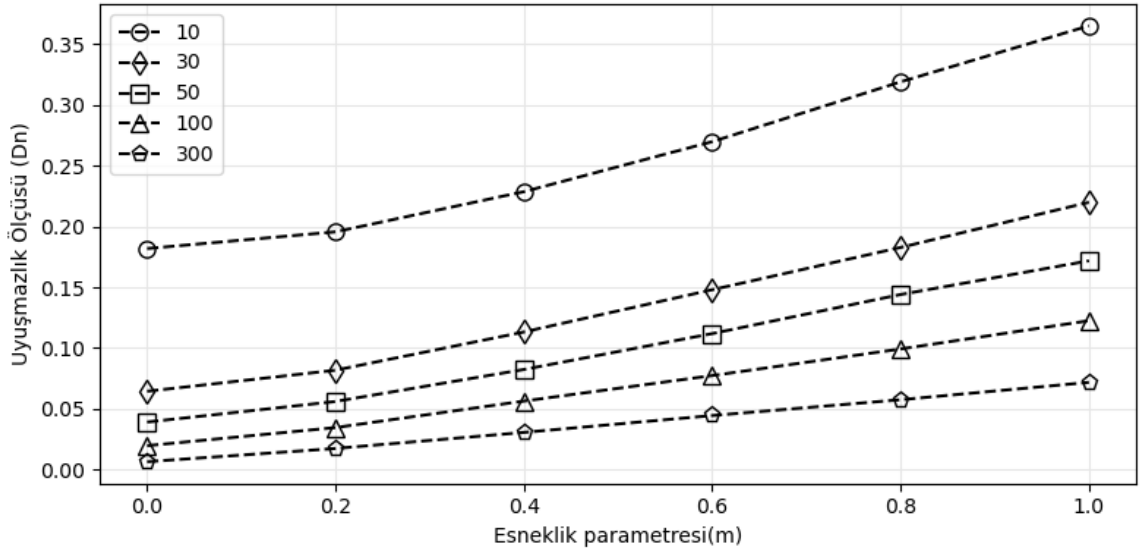
Şekil 46 Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki varyanslarının ortalamaları

Şekil 47’de üstel dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalamasının varyans değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 0$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalamanın varyansının 0 olduğu ve m değeri arttıkça ortalama varyansın diğeri 0 ile 0.36 arasında bir değişim gösterdiği gözlenmektedir.



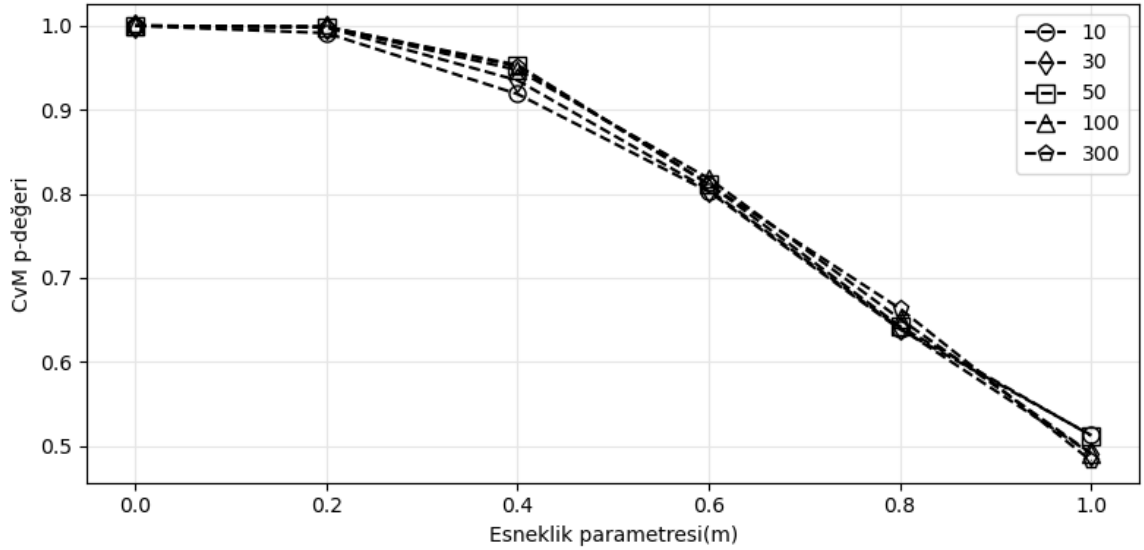
Şekil 47 Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaların varyansı

Şekil 48’de üstel dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin uyumsuzluk ölçüleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. Esnek rastgele sayıların uyumsuzluk ölçüleri esneklik parametresiyle yaklaşık doğrusal ilişkiye sahip olduğu görülmektedir. Tüm örneklem boyutları için uyumsuzluk ölçüsü m değeri arttıkça artmaktadır. Veri sayısı artıkça uyumsuzluğun azaldığı görülmektedir.

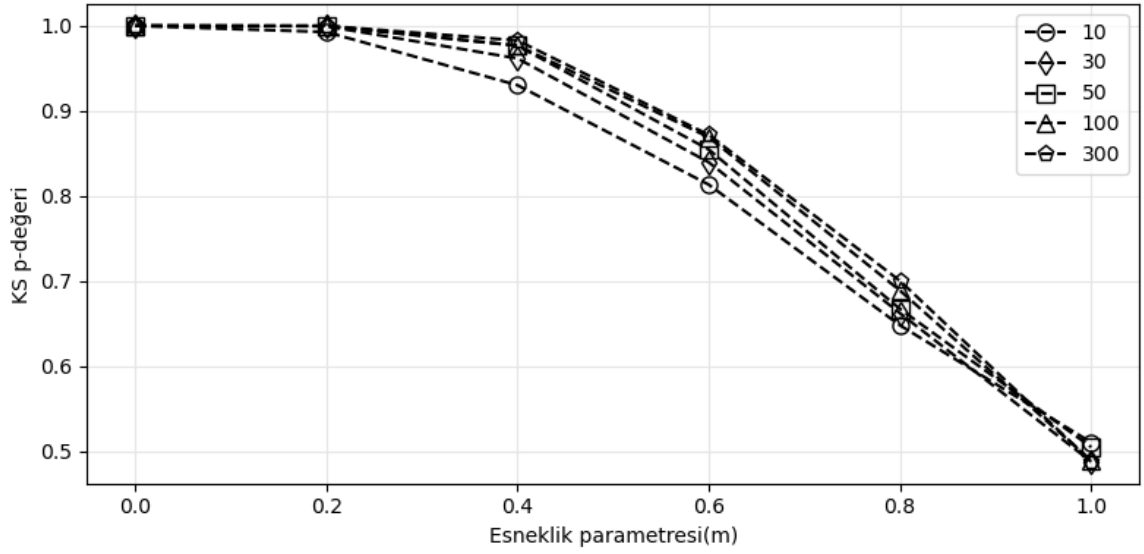


Şekil 48 Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki uyumsuzluk ölçüşü

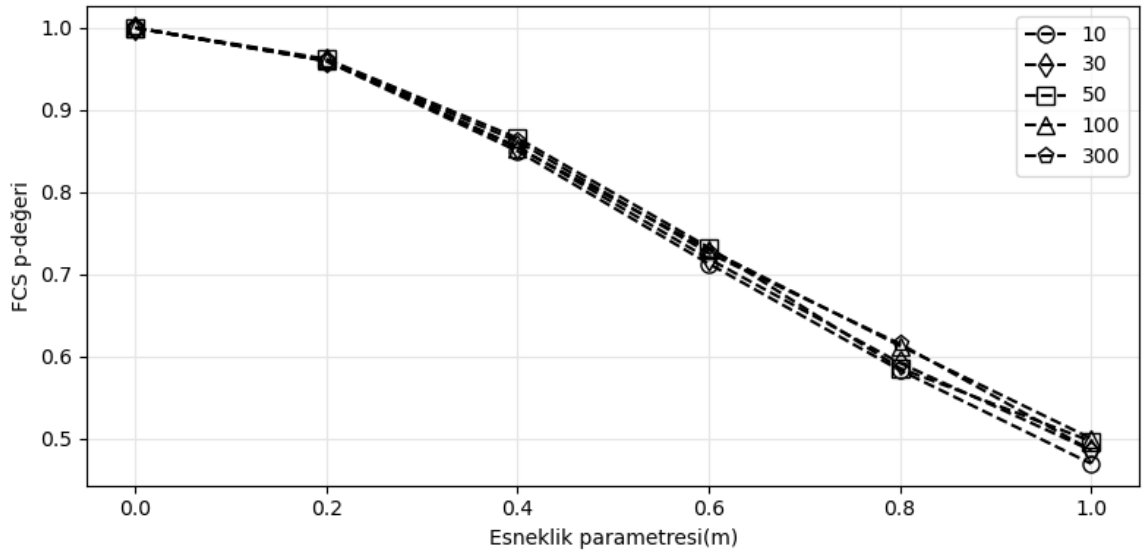
Şekil 49-Şekil 51'de üstel dağılımdan üretilmiş esnek rastgele sayılar için üç farklı uyum iyiliği testleri için ortalama p-değerlerinin esneklik parametresine göre değişimi verilmiştir. Değişimler incelendiğinde her test için $m = 0$ olduğunda ortalama p-değerinin 1 olduğu m değeri arttıkça ortalama p-değerinin azalım gösterdiği görülmektedir. $m = 1$ olduğunda ortalama p-değeri 0.5 civarında olduğu görülmektedir.



Şekil 49 Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testine göre ortalama p-değerleri

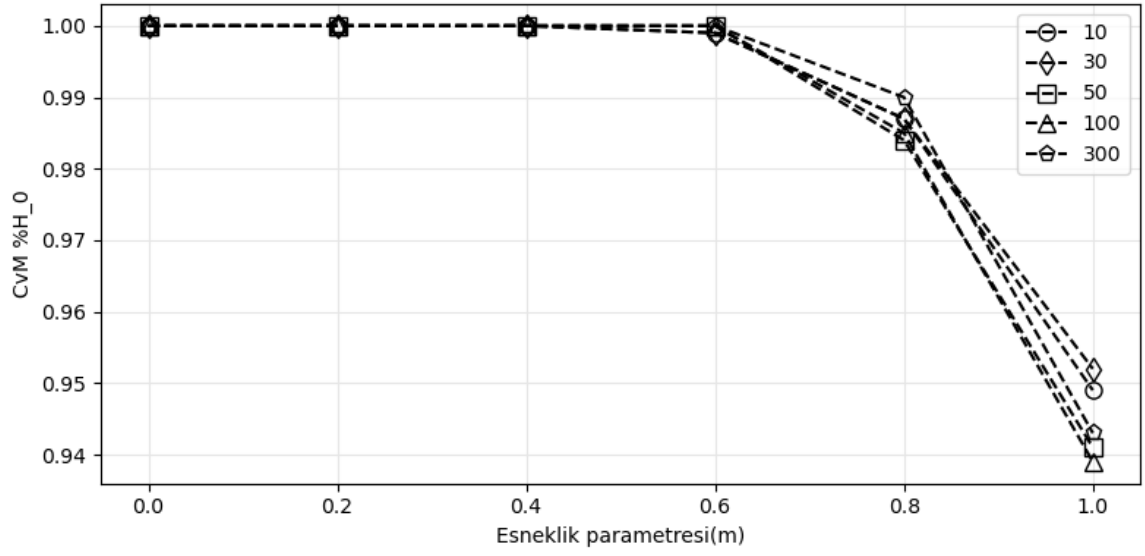


Şekil 50 Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testine göre ortalama p-değerleri

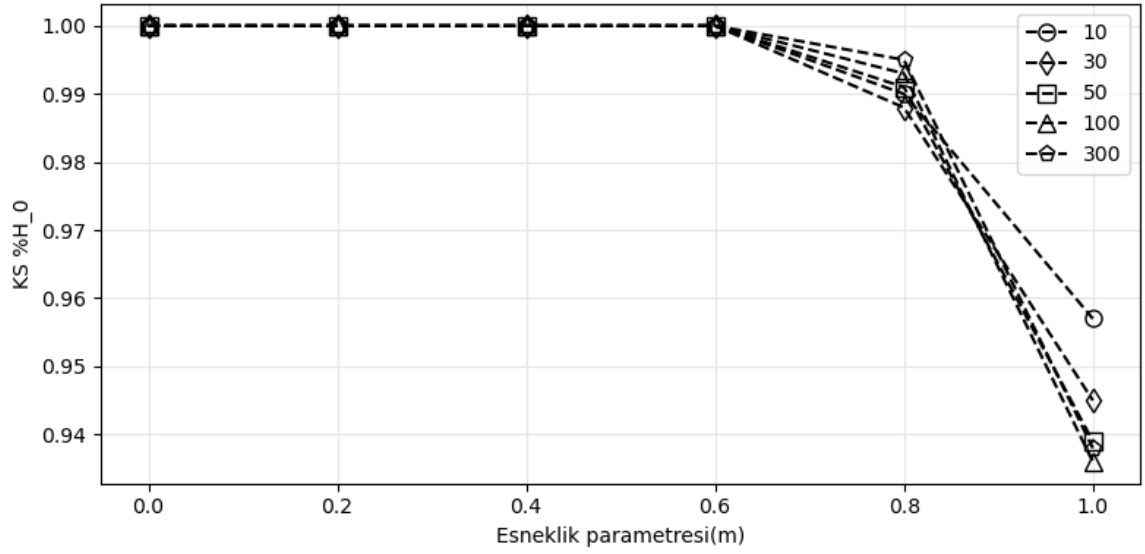


Şekil 51 Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testine göre ortalama p-değerleri

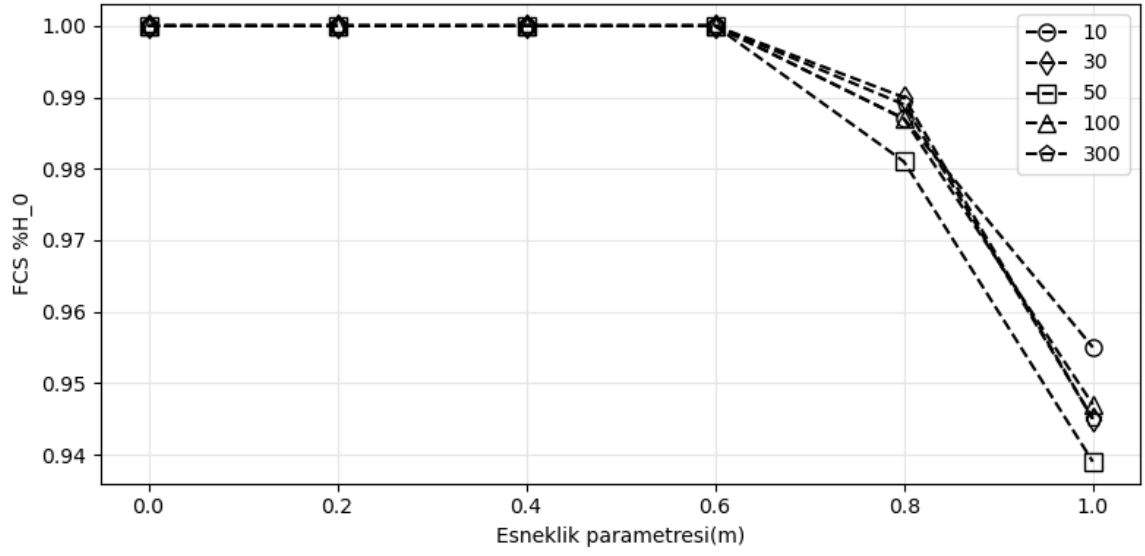
Şekil 52-Şekil 54'te üstel dağılımdan üretilmiş esnek rastgele sayılar için üç farklı uyum iyiliği testleri için kabul oranı esneklik parametresine göre değişimi verilmiştir. Değişimler incelendiğinde her test için $m = 0$ olduğunda kabul oranı 1 olduğu m değeri arttıkça kabul oranının azalım gösterdiği görülmektedir. $m = 1$ olduğunda kabul oranı 0.95 civarında olduğu görülmektedir.



Şekil 52 Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testinin kabul yüzdesi



Şekil 53 Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testinin kabul yüzdesi

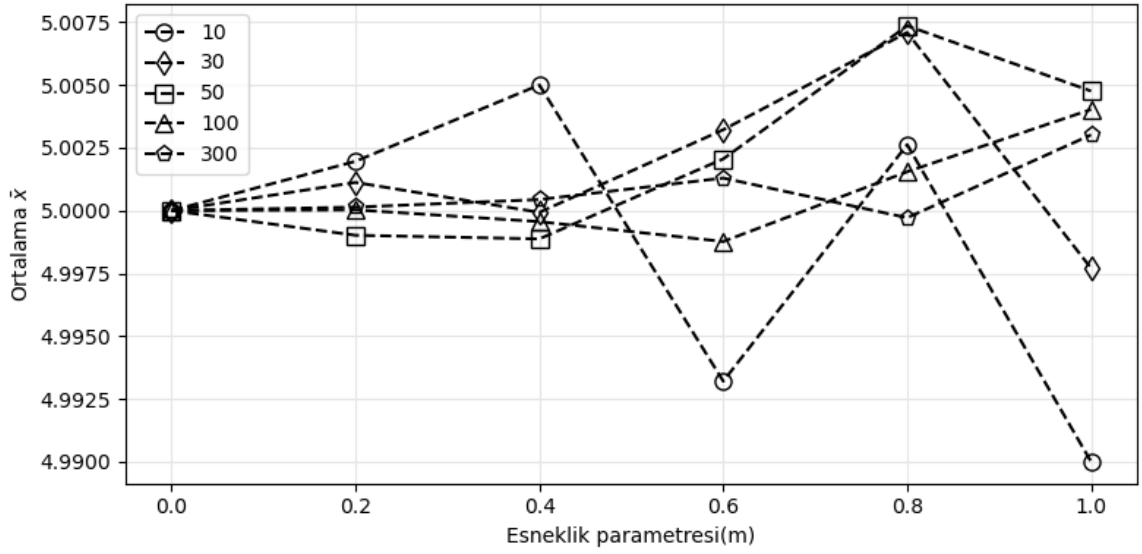


Şekil 54 Üstel dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testinin kabul yüzdesi

3.1.4. Normal Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Simülasyonları

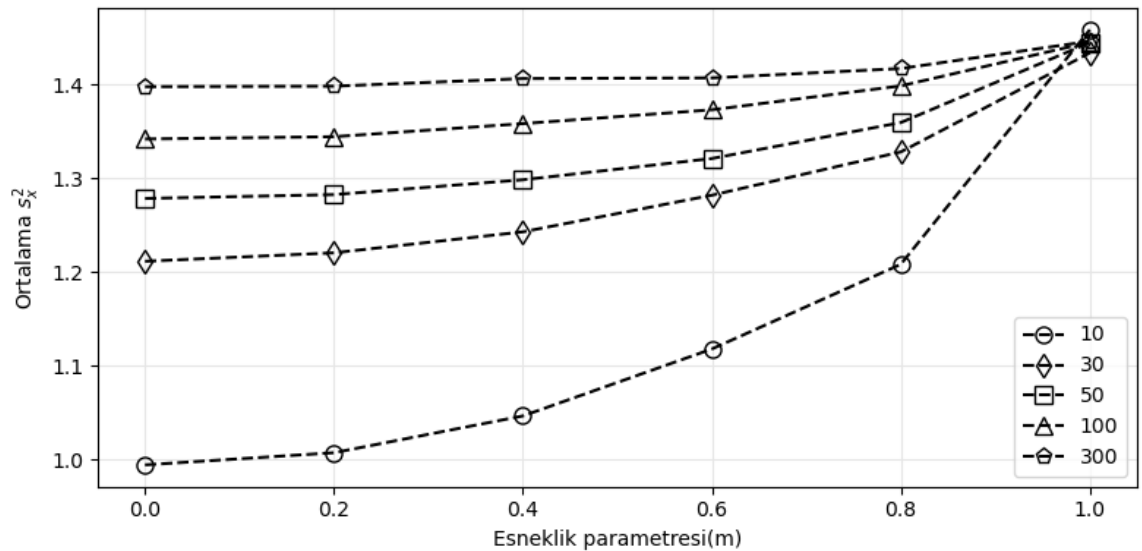
Normal dağılımdan parametreleri ($\mu = 5, \sigma = 1.2$) olacak şekilde üretilen esnek rastgele sayılar kümesinin grafikleri aşağıda verilmiştir.

Şekil 55'te düzgün dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalamasının ortalama değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 0$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalamanın 5 olduğu m değeri artıkça ortalamanın 5 civarında salınım gösterdiği görülmektedir. Öte yandan m değeri artıkça ortalamaadaki saçılmaların artışı gözlenmektedir.



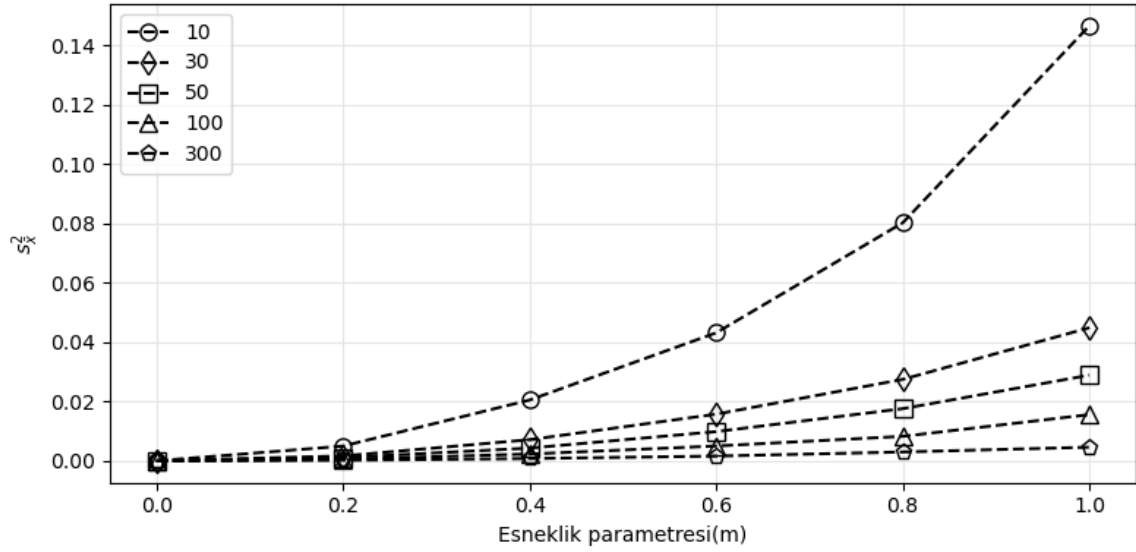
Şekil 55 Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaları

Şekil 56'da normal dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalama varyans değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 1$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalama varyans ~ 1.44 olduğu m değeri azaldıkça ortalama varyansın örneklem büyüklüğüne göre değişim gösterdiği 1.0 – 1.4 arasında bir değişim göstermektedir.



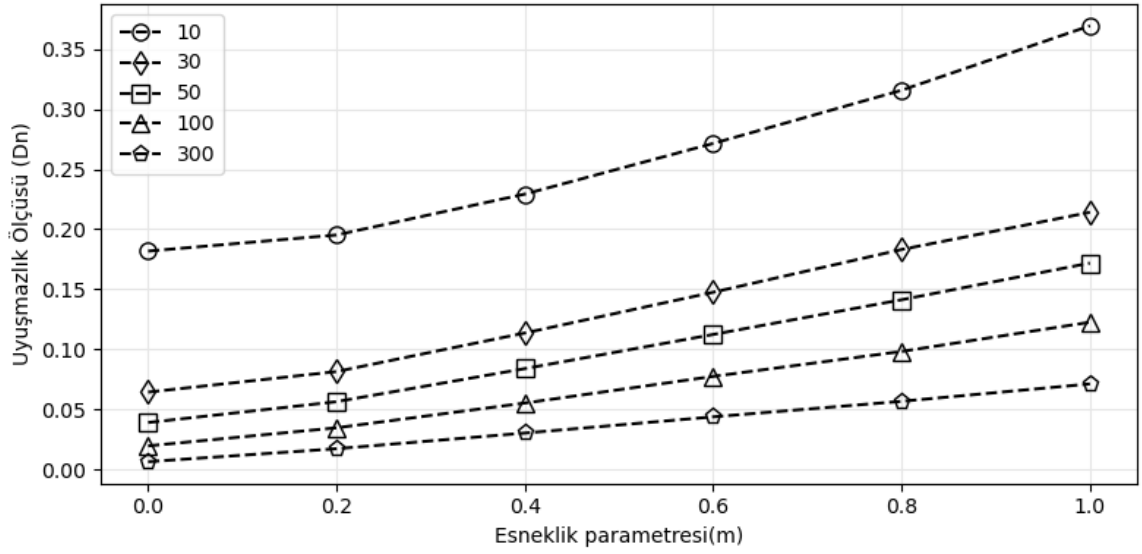
Şekil 56 Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki varyanslarının ortalamaları

Şekil 57’de normal dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalamasının varyans değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 0$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalamanın varyansının 0 olduğu ve m değeri arttıkça ortalama varyansın 0 ile 0.15 arasında bir değişim gösterdiği gözlenmektedir.



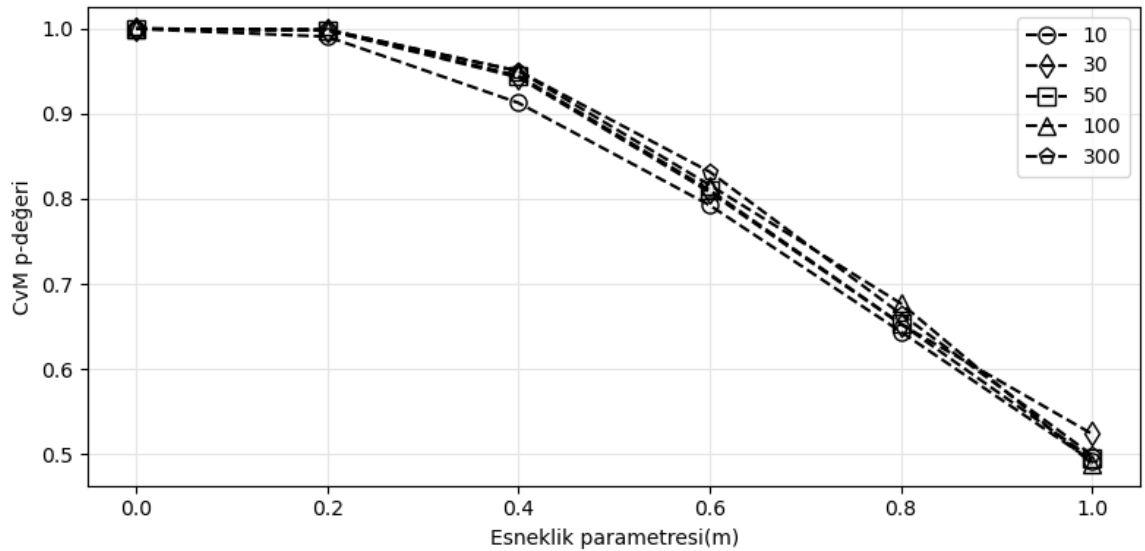
Şekil 57 Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaların varyansı

Şekil 58’de normal dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin uyumsuzluk ölçüleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. Esnek rastgele sayıların uyumsuzluk ölçüleri esneklik parametresiyle yaklaşık doğrusal ilişkiye sahip olduğu görülmektedir. Tüm örneklem boyutları için uyumsuzluk ölçüsü m değeri arttıkça artmaktadır. Veri sayısı arttıkça uyumsuzluğun azaldığı görülmektedir.

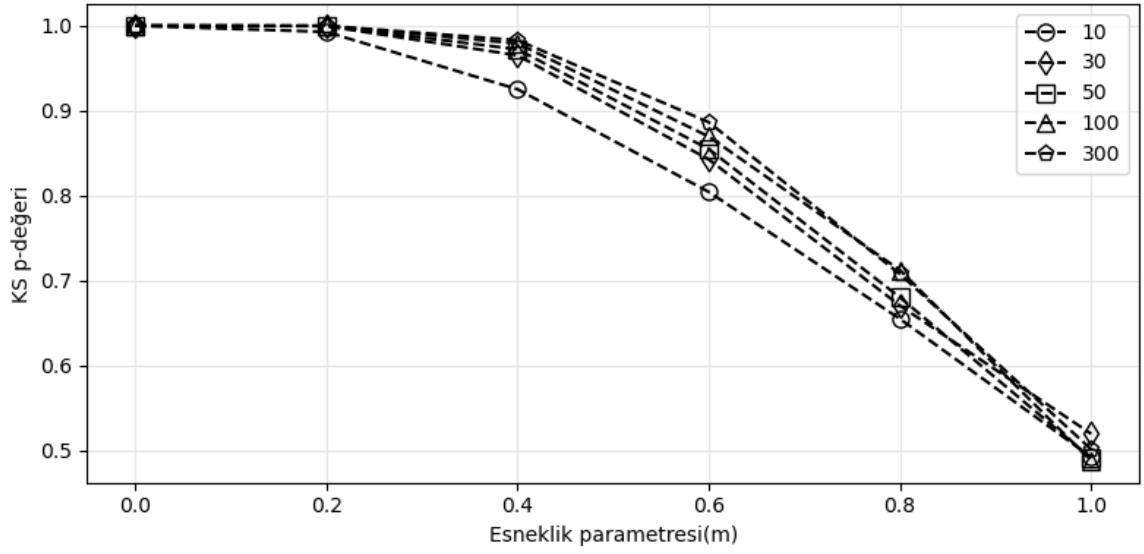


Şekil 58 Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki uyumsuzluk ölçüleri

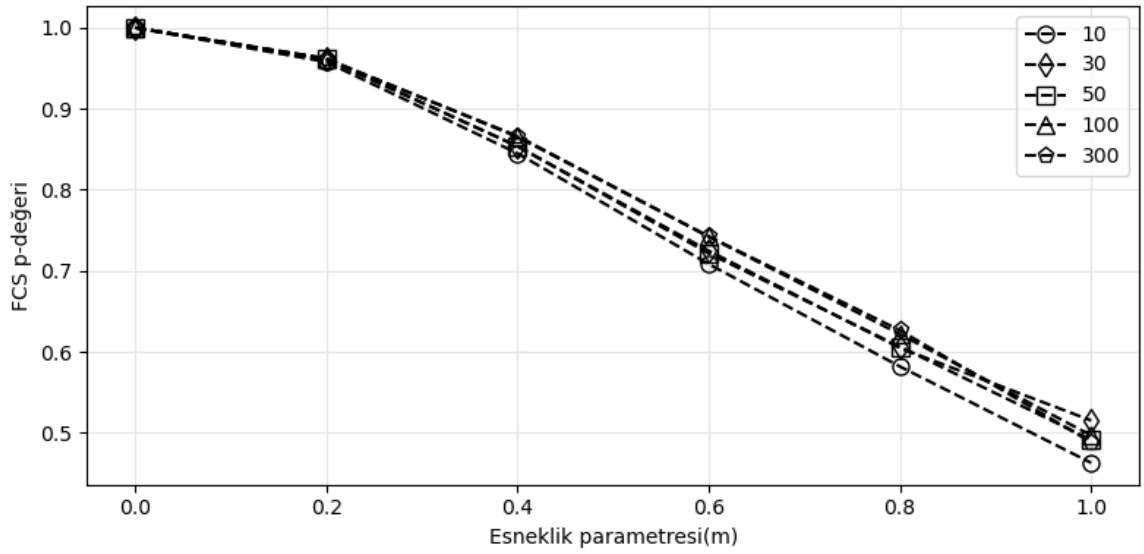
Şekil 59-Şekil 61’de normal dağılımdan üretilmiş esnek rastgele sayılar için üç farklı uyum iyiliği testleri için ortalama p-değerlerinin esneklik parametresine göre değişimi verilmiştir. Değişimler incelendiğinde her test için $m = 0$ olduğunda ortalama p-değerinin 1 olduğu m değeri arttıkça ortalama p-değerinin azalım gösterdiği görülmektedir. $m = 1$ olduğunda ortalama p-değeri 0.5 civarında olduğu görülmektedir.



Şekil 59 Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testine göre ortalama p-değerleri



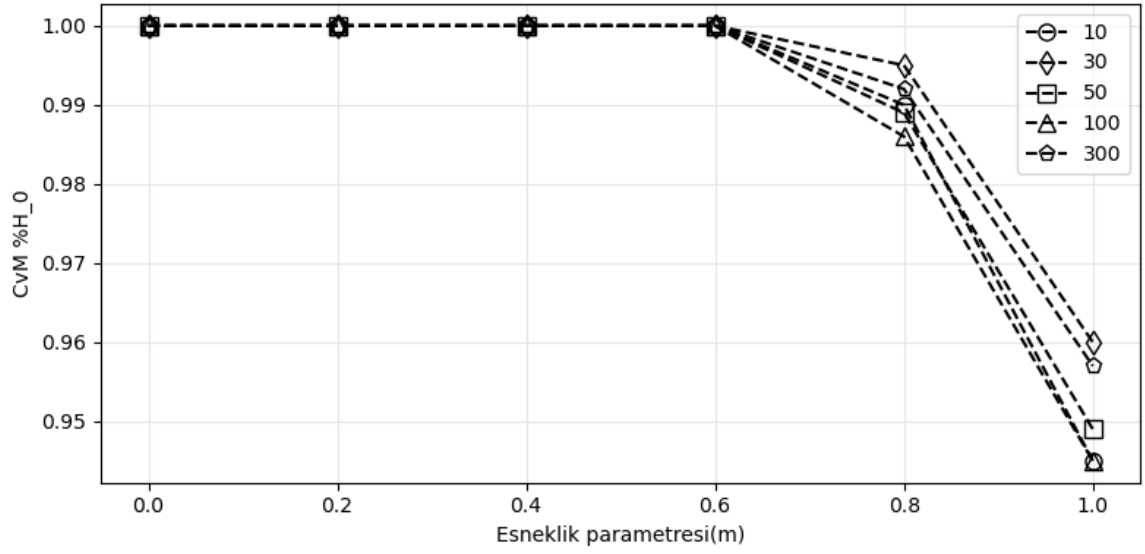
Şekil 60 Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testine göre ortalama p-değerleri



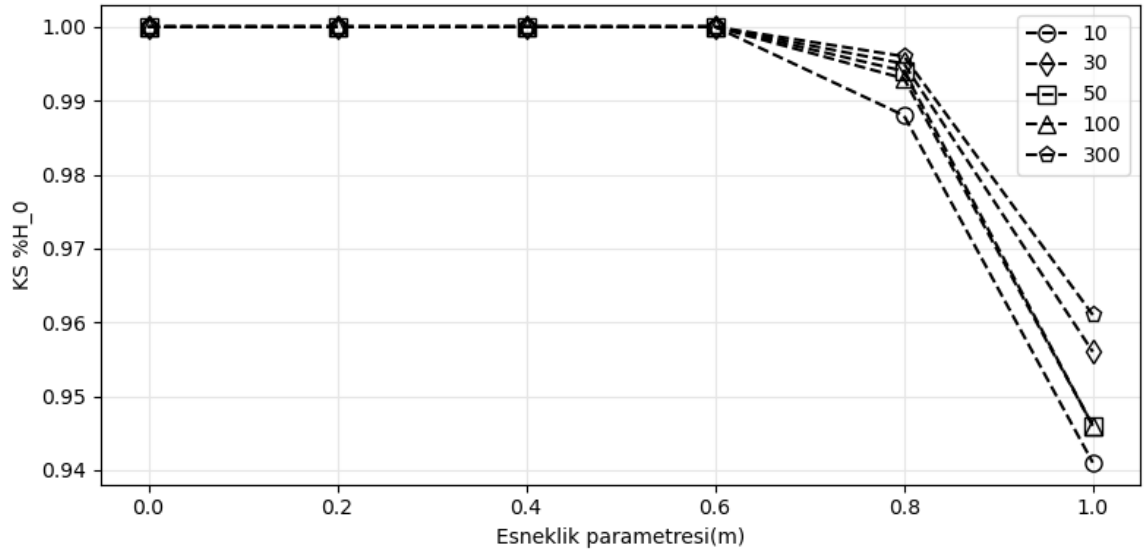
Şekil 61 Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testine göre ortalama p-değerleri

Şekil 62-Şekil 64'te normal dağılımdan üretilmiş esnek rastgele sayılar için üç farklı uyum iyiliği testleri için kabul oranı esneklik parametresine göre değişimi verilmiştir. Değişimler incelendiğinde her test için $m = 0$ olduğunda kabul oranı 1 olduğu m değeri

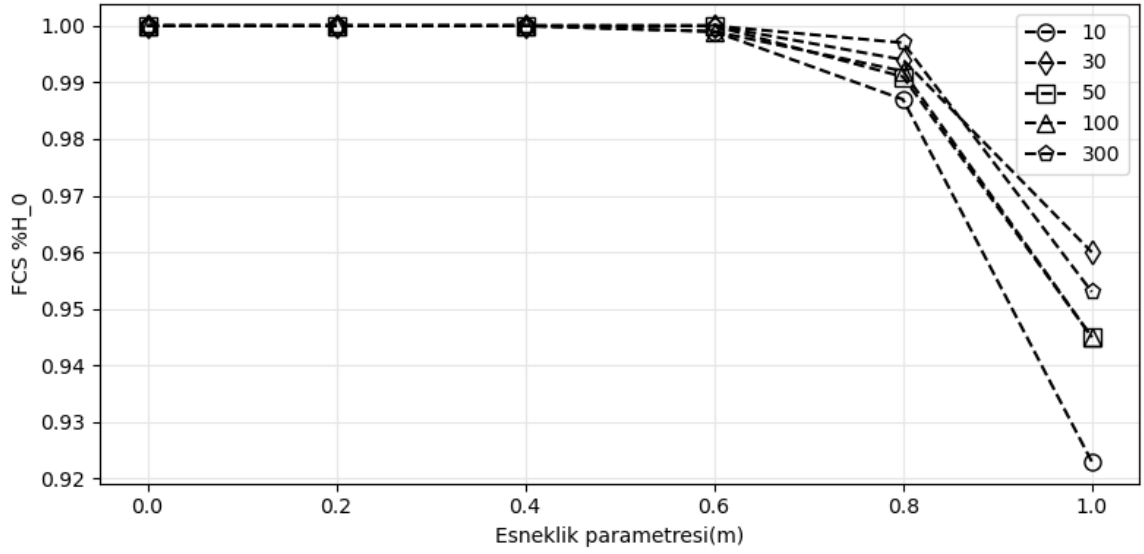
arttıkça kabul oranının azalım gösterdiği görülmektedir. $m = 1$ olduğunda kabul oranı 0.95 civarında olduğu görülmektedir.



Şekil 62 Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testinin kabul yüzdesi



Şekil 63 Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testinin kabul yüzdesi

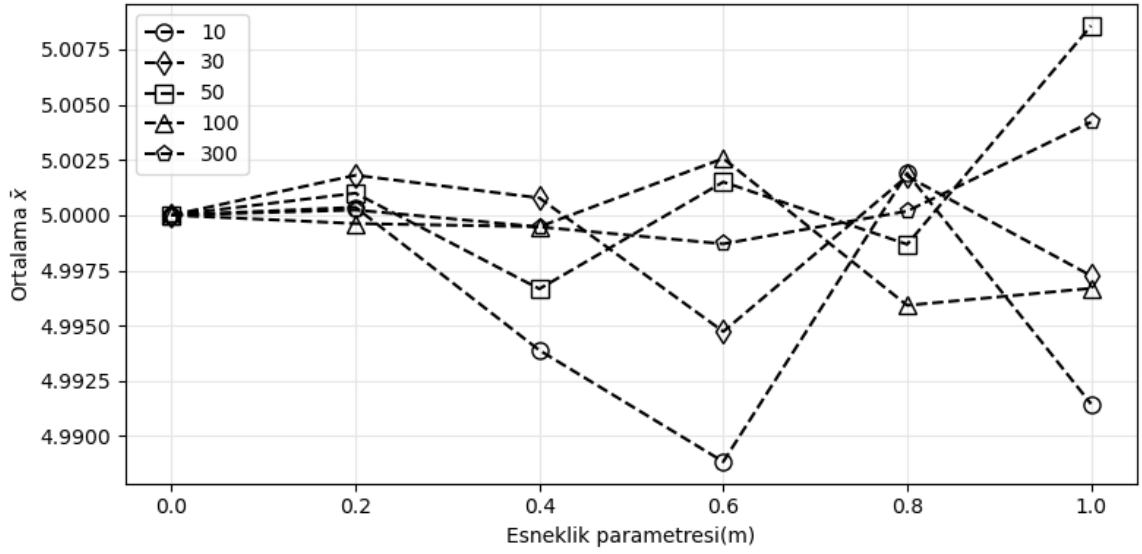


Şekil 64 Normal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testinin kabul yüzdesi

3.1.5. Laplace Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Simülasyonları

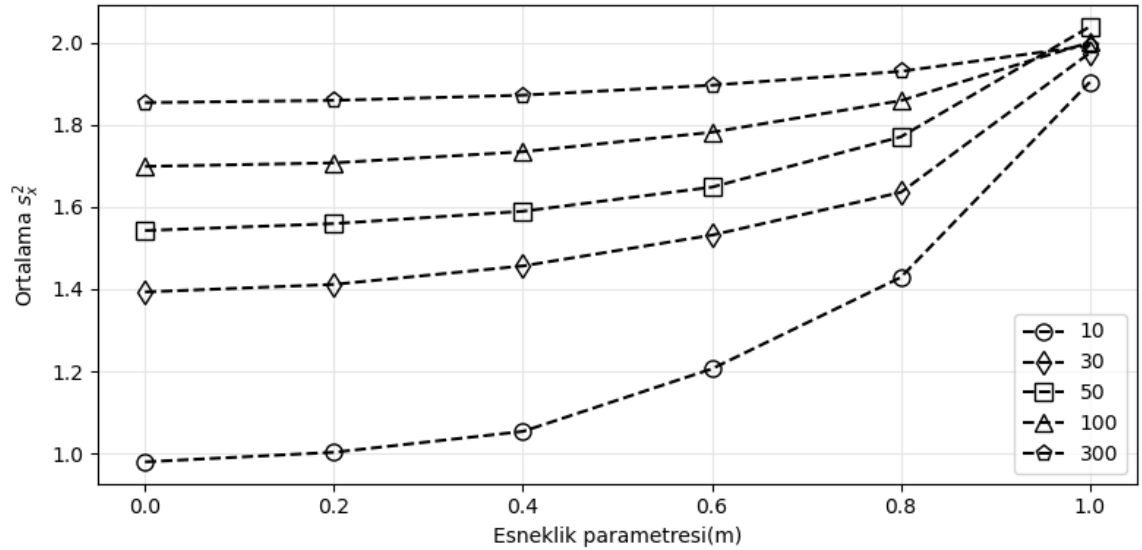
Laplace dağılımdan parametreleri ($\mu = 5, \lambda = 1$) olacak şekilde üretilen esnek rastgele sayılar kümesinin grafikleri aşağıda verilmiştir.

Şekil 65'te düzgün dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalamasının ortalama değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 0$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalamanın 5 olduğu m değeri arttıkça ortalamanın 5 civarında salınım gösterdiği görülmektedir. Öte yandan m değeri arttıkça ortalamadaki saçılmaların arttığı gözlenmektedir.



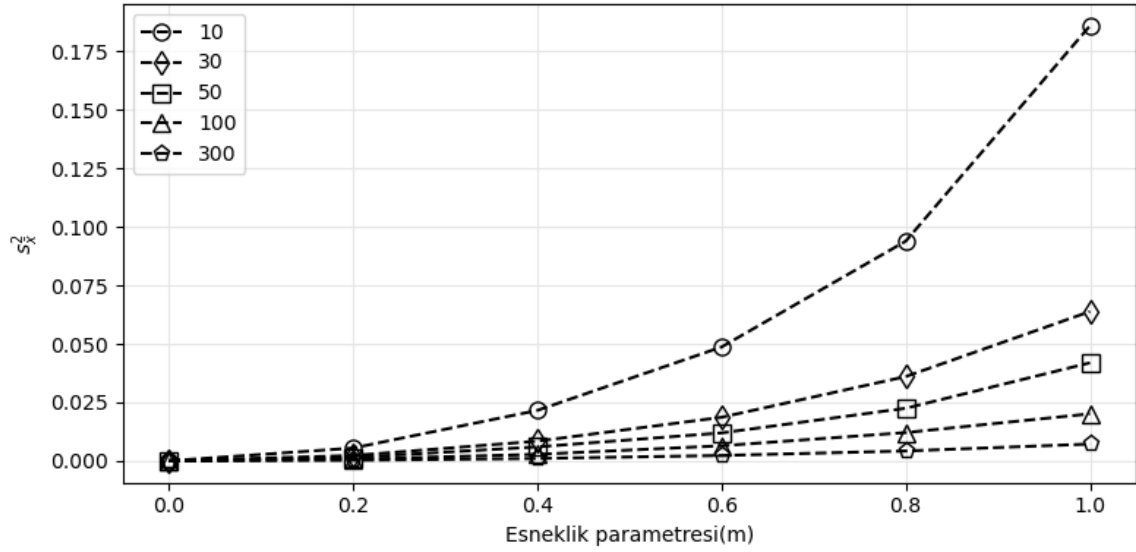
Şekil 65 Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaları

Şekil 66'da Laplace dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalama varyans değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 1$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalama varyans ~ 2.0 olduğu m değeri azaldıkça ortalama varyansın örneklem büyüklüğüne göre değişim gösterdiği 1.0 – 1.9 arasında bir değişim göstermektedir.



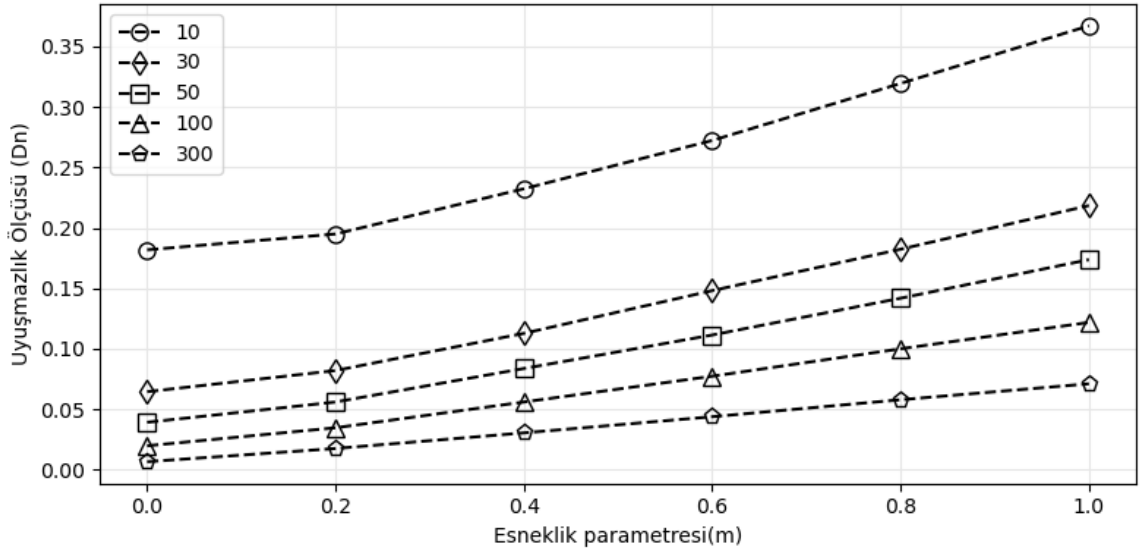
Şekil 66 Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki varyanslarının ortalamaları

Şekil 67’de Laplace dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalamasının varyans değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 0$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalamanın varyansının 0 olduğu m değeri arttıkça ortalama varyansın 0 ile 0.18 arasında bir değişim gösterdiği gözlenmektedir.



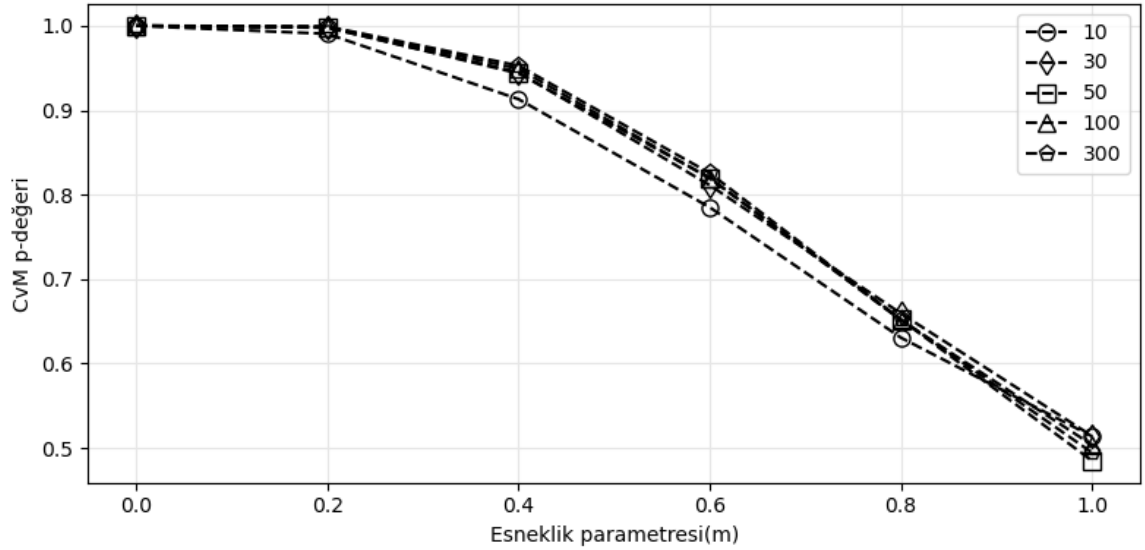
Şekil 67 Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaların varyansı

Şekil 68’de Laplace dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin uyumsuzluk ölçüleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. Esnek rastgele sayıların uyumsuzluk ölçüleri esneklik parametresiyle yaklaşık doğrusal ilişkiye sahip olduğu görülmektedir. Tüm örneklem boyutları için uyumsuzluk ölçüsü m değeri arttıkça artmaktadır. Veri sayısı arttıkça uyumsuzluğun azaldığı görülmektedir.

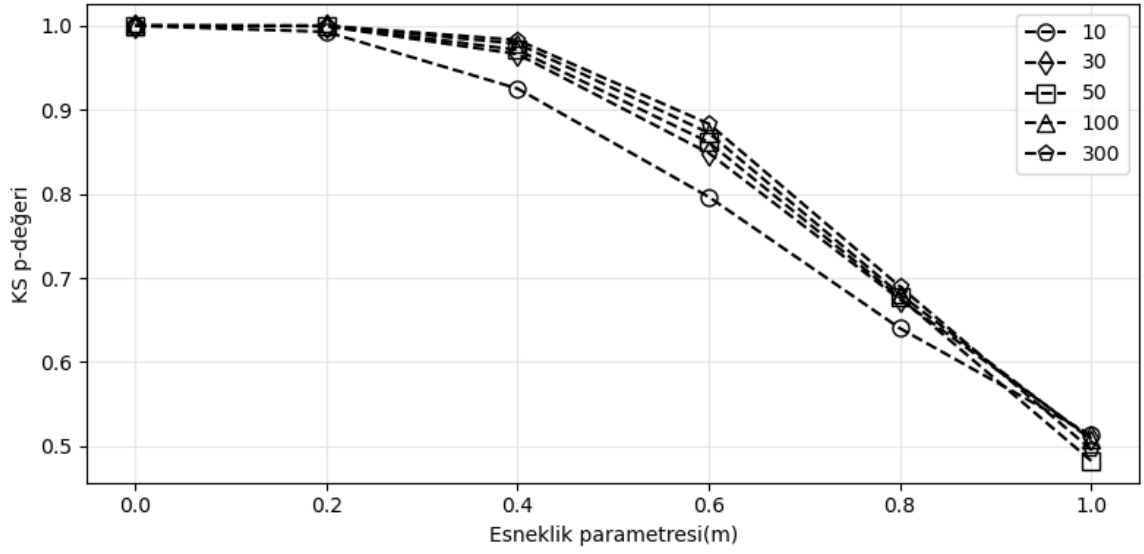


Şekil 68 Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki uyumsuzluk ölçüşü

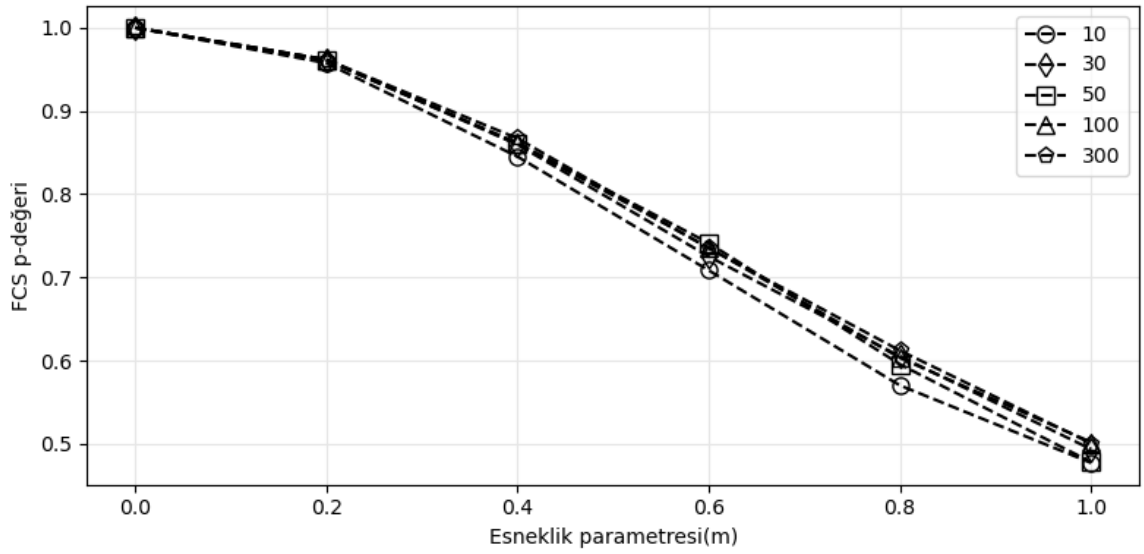
Şekil 69-Şekil 71’de Laplace dağılımdan üretilmiş esnek rastgele sayılar için üç farklı uyum iyiliği testleri için ortalama p-değerlerinin esneklik parametresine göre değişimi verilmiştir. Değişimler incelendiğinde her test için $m = 0$ olduğunda ortalama p-değerinin 1 olduğu m değeri arttıkça ortalama p-değerinin azalım gösterdiği görülmektedir. $m = 1$ olduğunda ortalama p-değeri 0.5 civarında olduğu görülmektedir.



Şekil 69 Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testine göre ortalama p-değerleri



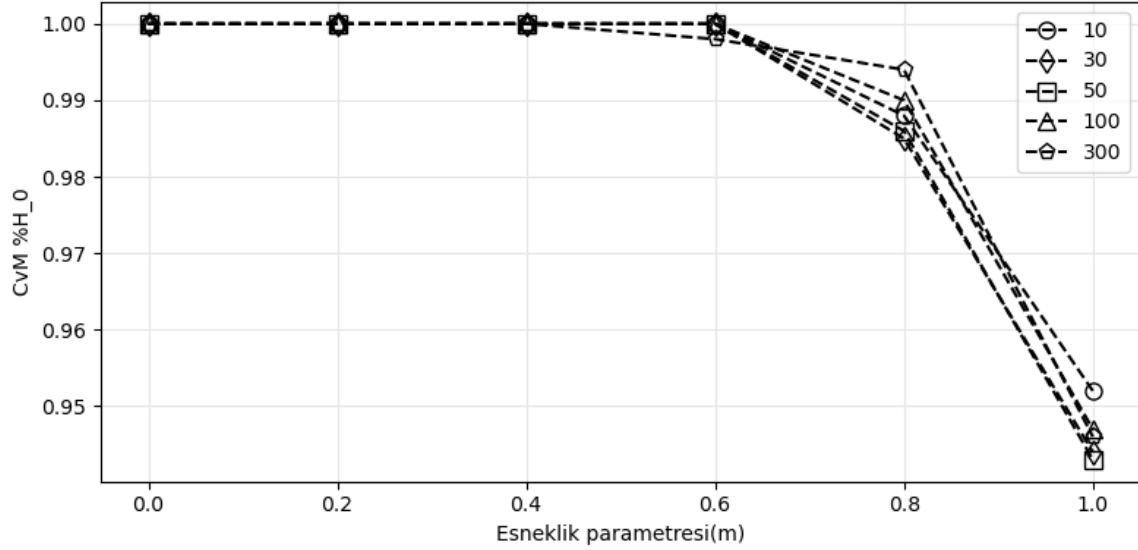
Şekil 70 Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testine göre ortalama p-değerleri



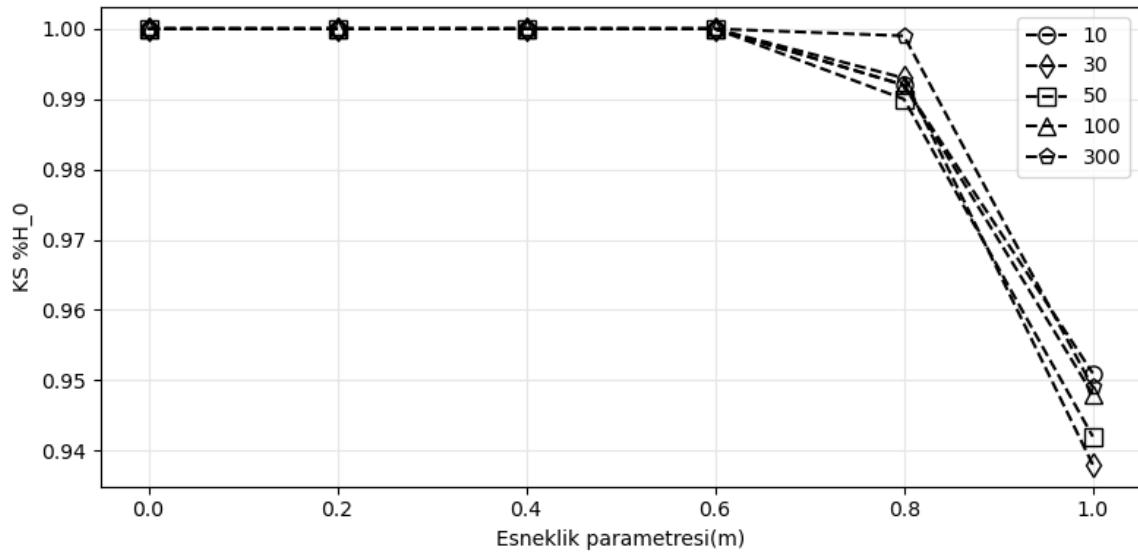
Şekil 71 Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testine göre ortalama p-değerleri

Şekil 72-Şekil 74'te Laplace dağılımdan üretilmiş esnek rastgele sayılar için üç farklı uyum iyiliği testleri için kabul oranı esneklik parametresine göre değişimi verilmiştir. Değişimler incelendiğinde her test için $m = 0$ olduğunda kabul oranı 1 olduğu m değeri

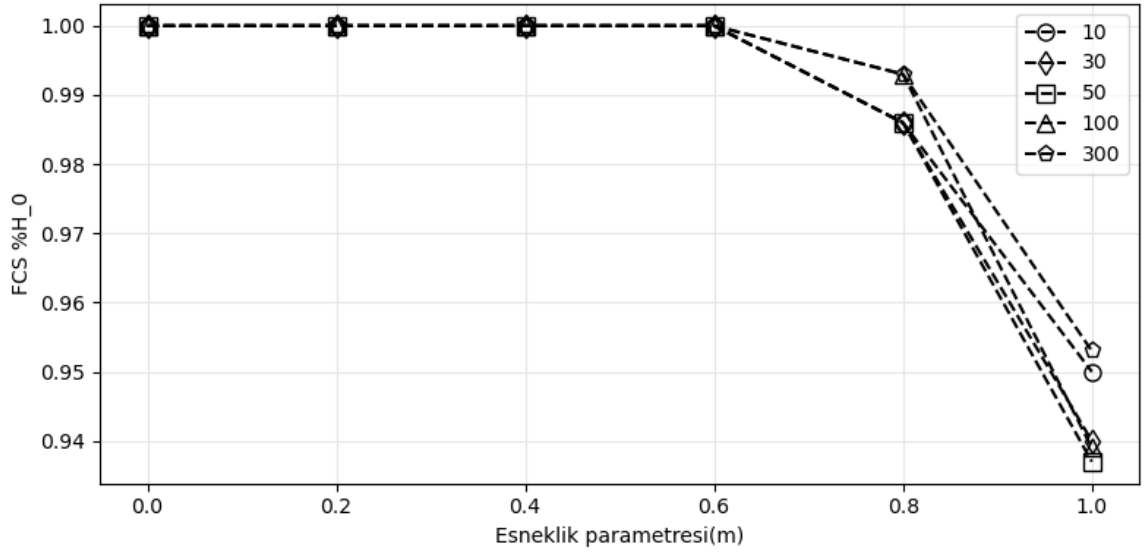
arttıkça kabul oranının azalım gösterdiği görülmektedir. $m = 1$ olduğunda kabul oranı 0.95 civarında olduğu görülmektedir.



Şekil 72 Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testinin kabul yüzdesi



Şekil 73 Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testinin kabul yüzdesi

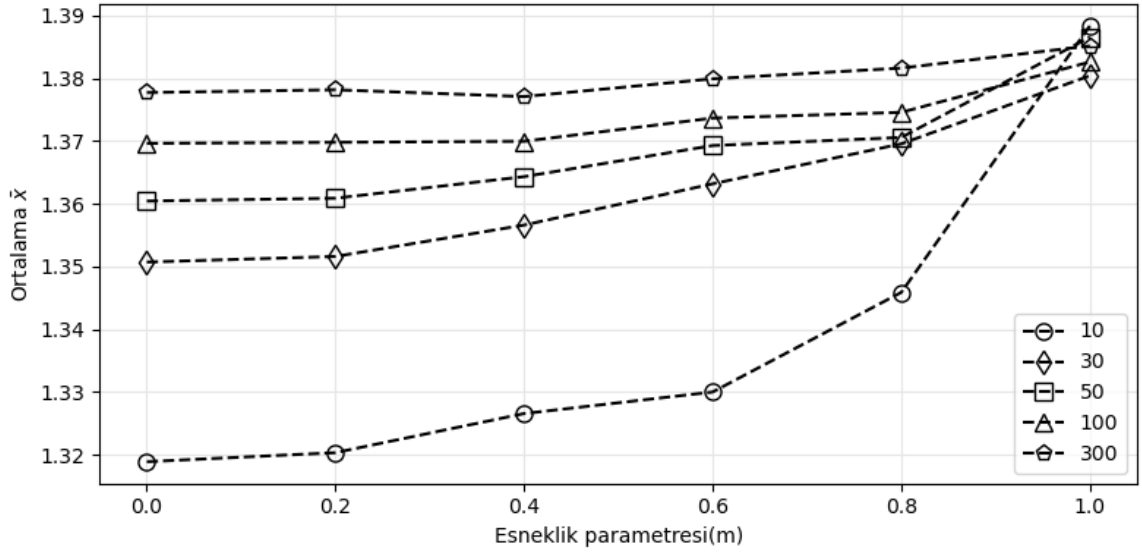


Şekil 74 Laplace dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testinin kabul yüzdesi

3.1.6. Lognormal Dağılımdan Esnek Rastgele Sayı Simülasyonları

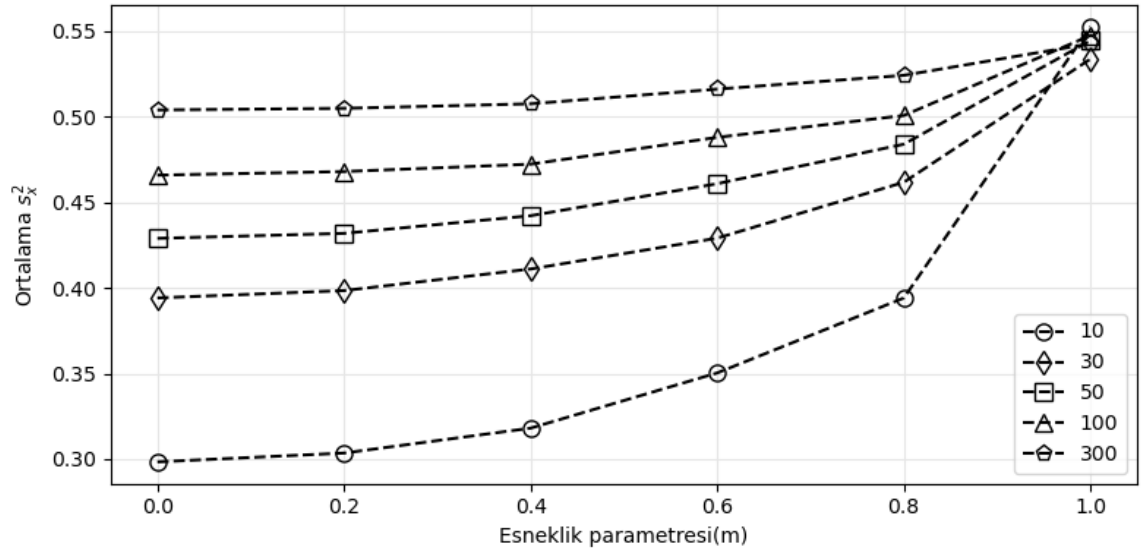
Lognormal dağılımdan parametreleri ($\mu = 0.2, \sigma = 0.5$) olacak şekilde üretilen esnek rastgele sayılar kümesinin grafikleri aşağıda verilmiştir.

Şekil 75'te lognormal dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalamasının ortalama değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 0$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalamasının 1.32 ile 1.38 arasında olduğu m değeri arttıkça ortalamasının 1.384 civarına yaklaştığı görülmektedir. Öte yandan m değeri arttıkça ortalamasının parabolik olarak arttığı gözlenmektedir. Bunun başlıca nedeni simetrik olmayan dağılımlarda ortalamasının varyansın değişimi ile yakın bir ilişki olduğu söylenebilir.



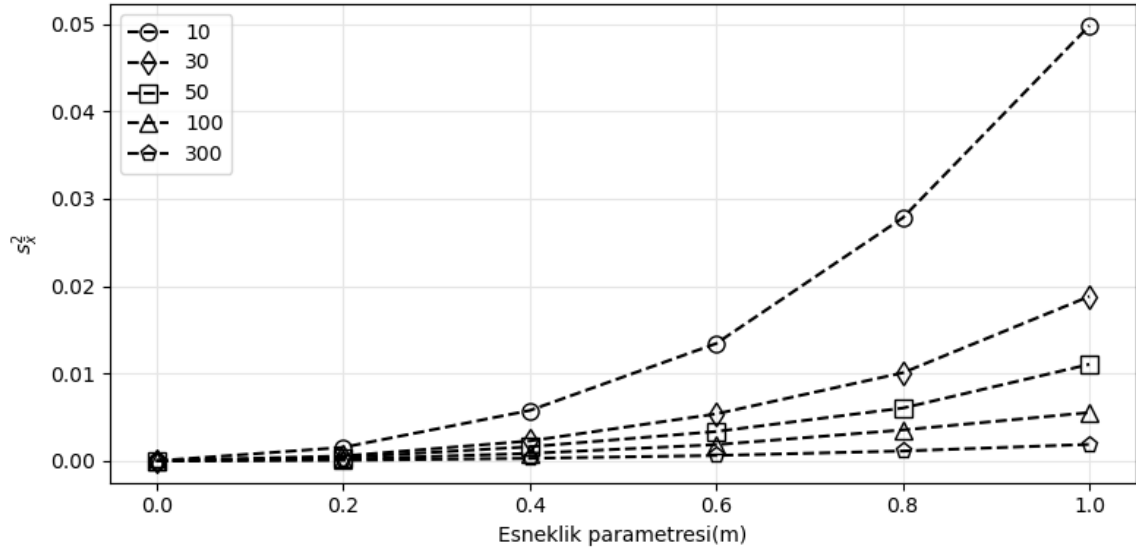
Şekil 75 Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaları

Şekil 76'da Lognormal dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalama varyans değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 1$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalama varyans ~ 0.55 olduğu m değeri azaldıkça ortalama varyansın örneklem büyüklüğüne göre değişim gösterdiği 0.3 – 0.5 arasında bir değişim göstermektedir.

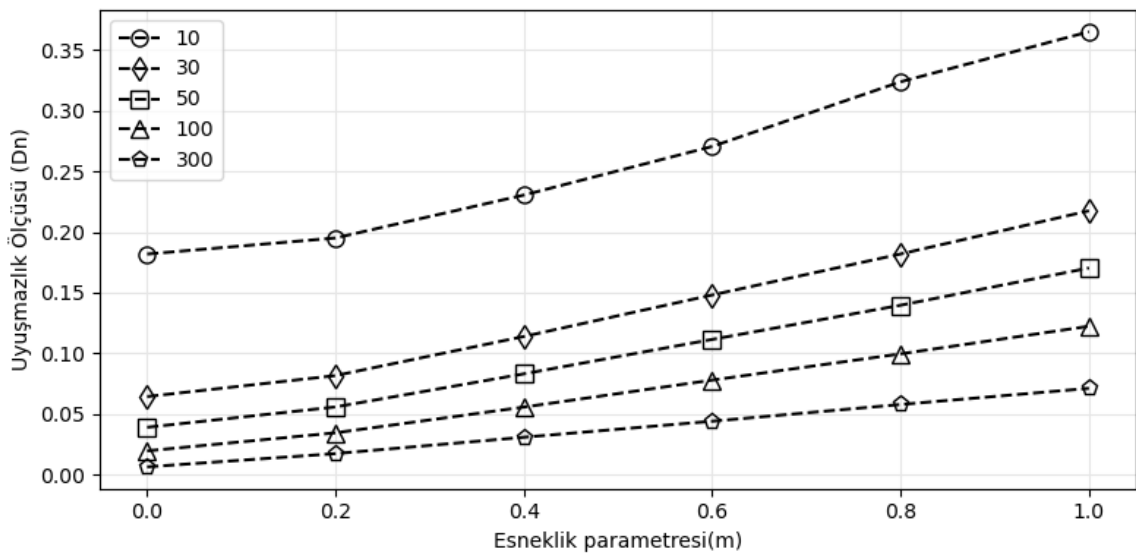


Şekil 76 Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki varyanslarının ortalamaları

Şekil 77’de Lognormal dağılımdan farklı sayıda esnek rastgele sayı kümesinin ortalamasının varyans değerleri gösterilmektedir. Bu grafikte her nokta için 1000 defa örneklem yapılmıştır. $m = 0$ esneklik parametresinde tüm örneklem boyutları için ortalamanın varyansının 0 olduğu m değeri arttıkça ortalama varyansın 0 ile 0.05 arasında bir değişim gösterdiği gözlenmektedir.

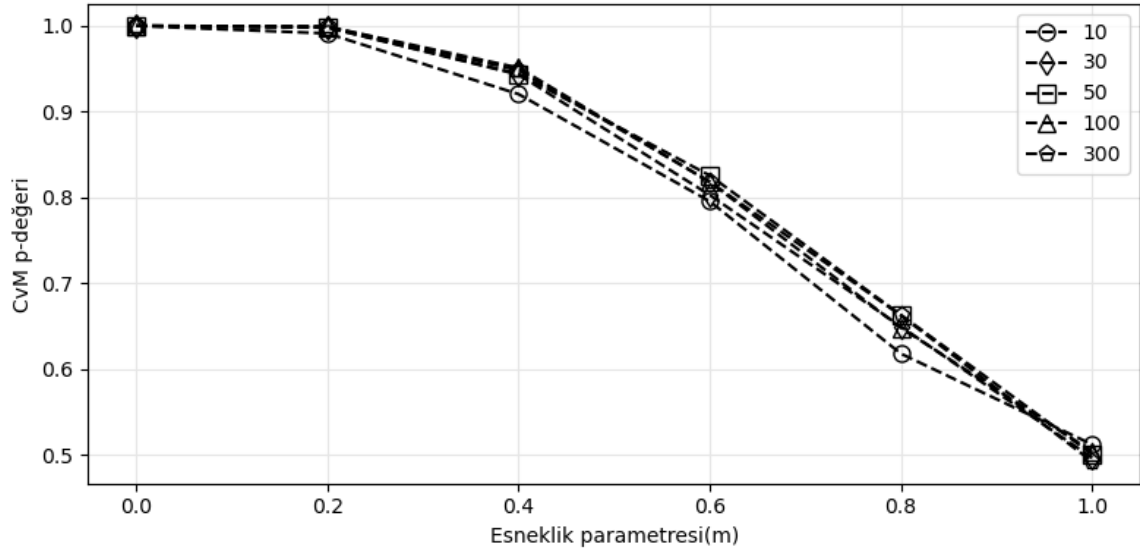


Şekil 77 Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki ortalamaların varyansı

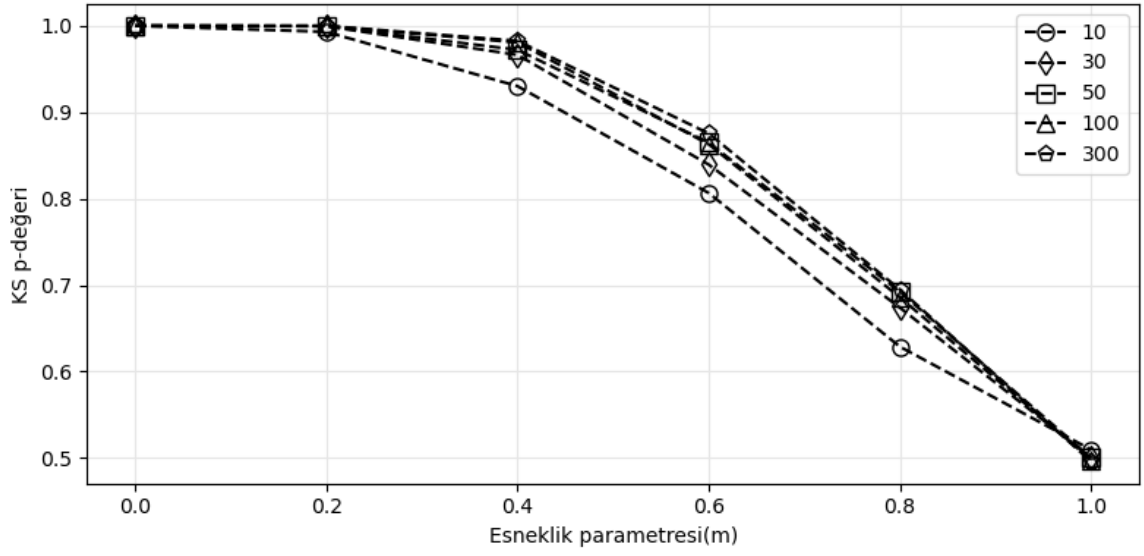


Şekil 78 Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki uyumsuzluk ölçüleri

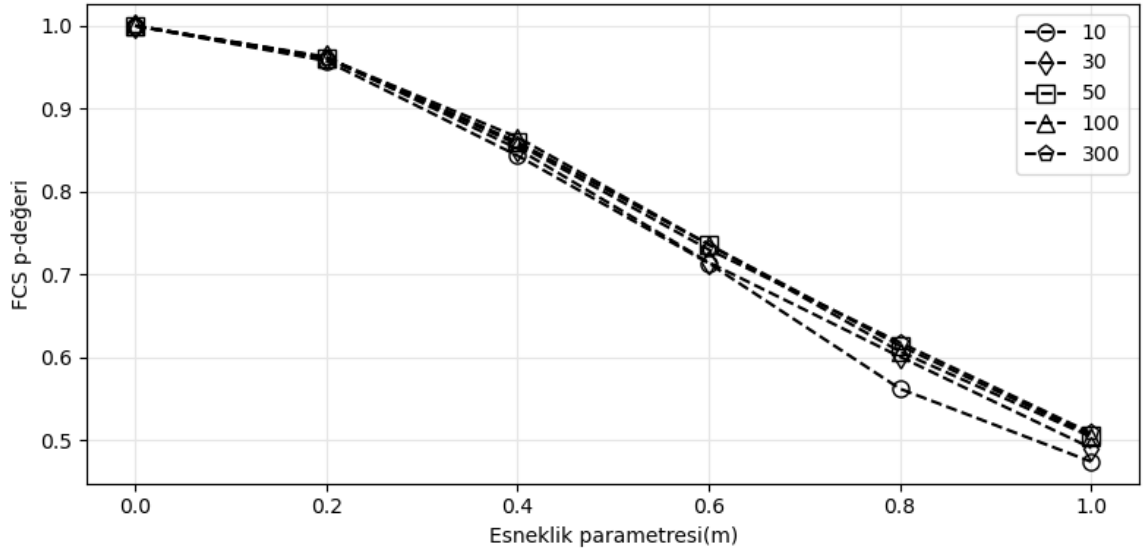
Şekil 79-Şekil 81’de üstel dağılımdan üretilmiş esnek rastgele sayılar için üç farklı uyum iyiliği testleri için ortalama p-değerlerinin esneklik parametresine göre değişimi verilmiştir. Değişimler incelendiğinde her test için $m = 0$ olduğunda ortalama p-değerinin 1 olduğu m değeri arttıkça ortalama p-değerinin azalım gösterdiği görülmektedir. $m = 1$ olduğunda ortalama p-değeri 0.5 civarında olduğu görülmektedir.



Şekil 79 Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testine göre ortalama p-değerleri

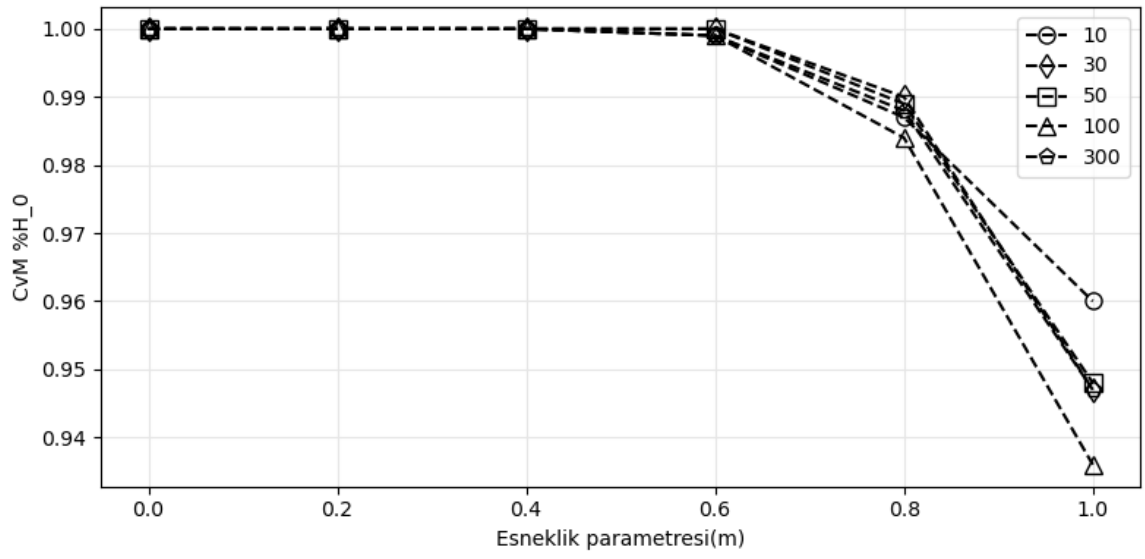


Şekil 80 Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testine göre ortalama p-değerleri

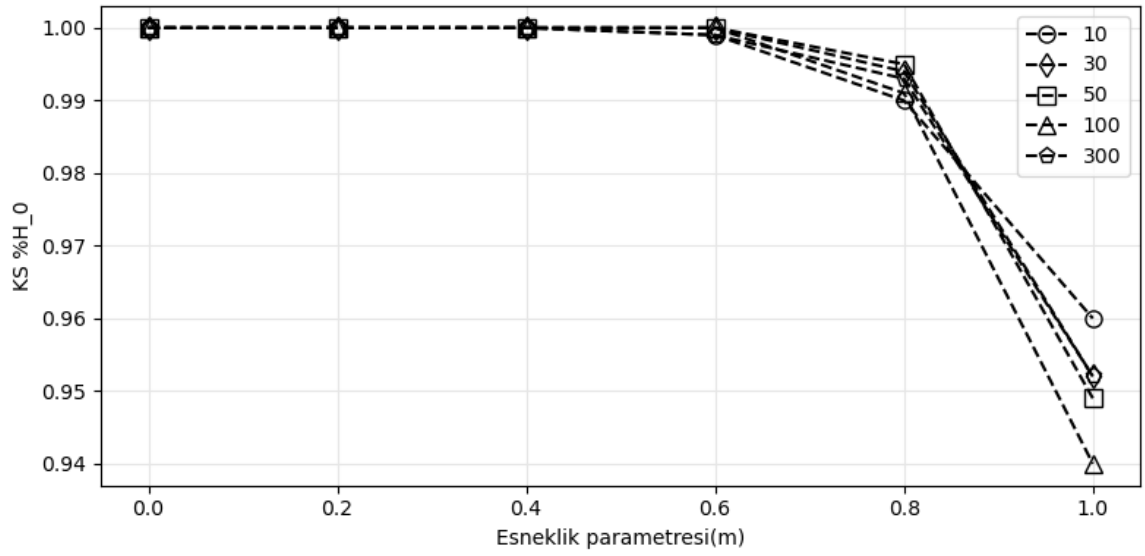


Şekil 81 Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testine göre ortalama p-değerleri

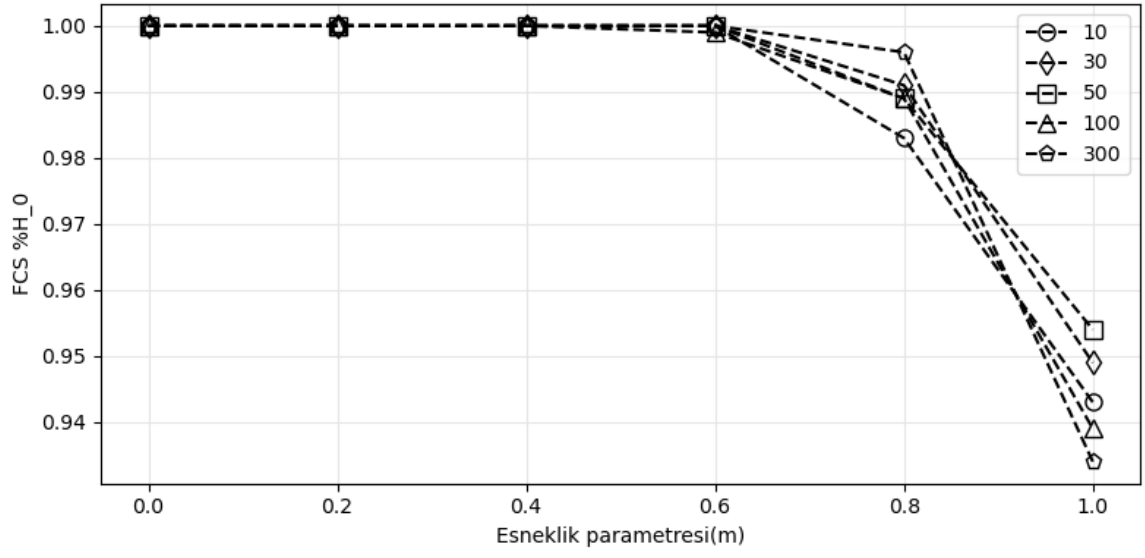
Şekil 82-Şekil 84'te Lognormal dağılımdan üretilmiş esnek rastgele sayılar için üç farklı uyum iyiliği testleri için kabul oranı esneklik parametresine göre değişimi verilmiştir. Değişimler incelendiğinde her test için $m = 0$ olduğunda kabul oranı 1 olduğu m değeri arttıkça kabul oranının azalım gösterdiği görülmektedir. $m = 1$ olduğunda kabul oranı 0.95 civarında olduğu görülmektedir.



Şekil 82 Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin CVM testinin kabul yüzdesi



Şekil 83 Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin KS testinin kabul yüzdesi



Şekil 84 Lognormal dağılıma sahip esnek rastgele değişkenin farklı örneklem büyüklüklerindeki verilerin FCS testinin kabul yüzdesi

4. SONUÇLAR

Günümüzde bilgi-iletişim teknolojilerinin gelişmesiyle akıllı cihazların sayısı hızlı bir artış göstermiştir. Bünyesinde yazılım barındıran bu akıllı cihazlar günde zeta-baytlarca veri üretmektedir. Bu yazılımların hemen hemen hepsinin bünyesinde rastgelelik veya rastgele sayılar kullanılmaktadır. Bazen sözde rastgele sayılar kullanılırken, bazen yarı rastgele sayılar tercih edilmektedir. Çoğu zaman istenen uyumsuzlukta (rastgelelikte) rastgele sayılar üretmek imkansız olduğundan mevcut yaklaşımlarla elde edilen rastgelelikteki sayılar kullanılmaktadır. Oysa bu çalışmada bu soruna çözüm üretilmektedir.

Yarı rastgele sayılar çoğu zaman rastgelelikten uzak deterministik denecek bir yapıda veri üretmesi rastgeleliğin mantığına aykırı sonuçlar üretmektedir. Öte yandan sözde rastgele sayılar deterministik bir algoritma ile üretilmesine rağmen periyodunun yüksek olması ve yüksek uyumsuzluk barındırması çoğu zaman istenen sonucun elde edilmesini sağlamaktadır. Ancak bazı durumlarda daha düşük uyumsuzluğa sahip rastgele sayılara da ihtiyaç duyulmaktadır. Dolayısıyla istenen bir uyumsuzluk seviyesinde rastgele üretilmesi gerçek hayat problemlerinde istenebilecek bir rastgele sayı üretme algoritması olabilir. Bu çalışmada geliştirilen yaklaşımla istenen uyumsuzluk seviyesini bir esneklik parametresi yardımıyla belirlenerek esnek rastgele sayılar üretilebilir.

Bu çalışmada beş farklı dağılım seçilmiştir. Bunlardan üç tanesi simetrik dağılım olurken 2 tanesi sağdan çarpık dağılım örneği olarak seçilmiştir. Bu dağılımlardan esnek rastgele sayı üretilerek bunların parametreleri incelenmiştir.

Simülasyon sonucunda simetrik dağılımların ortalamasının beklenen değeri örneklem büyüklüğünden ve esneklik parametresinden etkilenmediği görülmektedir. Öte yandan simetrik olmayan dağılımların beklenen değeri varyanstan etkilendiğinden örneklem büyüklüğünden ve esneklik parametresinden etkilendiği görülmektedir. Simülasyonla elde edilen esnek rastgele sayıların varyansı hem örneklem büyüklüğünden ($m < 1$ olduğunda) hem de esneklik parametresinden parabolik olarak etkilenmektedir. Ortalamanın varyansı ise her dağılımda örneklem büyüklüğünden ve esneklik parametresinden parabolik olarak etkilenmektedir.

Önerilen yaklaşımın teorik ispatları için hesaplama kolaylığı açısından standart düzgün dağılımın beklenen değeri, ikinci momenti ve varyansı hesaplanmıştır. Diğer momentleri ise sonraki çalışmalarda hesaplanabilir. Bu eşitlikler farklı dağılımlar için

genelleştirilebilir. Öte yandan bu çalışmada sürekli dağılımlar için seçilen örnekler kesikli dağılımlar içinde kullanılabilir. Kesikli dağılımlardan üretilen esnek rastgele sayılar yardımıyla esnek rastgele örneklemeler yapılarak birçok gerçek hayat problemlerinde kullanılabilir.

Esnek rastgele değişkenler kullanılarak elde edilecek yeni rastgele değişkenlerin parametrelerinin hesaplanmasında esneklik parametresinin etkisi daha derinlemesine araştırılabilir. Aynı zamanda farklı dağılımlara sahip rastgele değişkenlerin parametreleri de aynı şekilde esneklik parametresine göre hesaplanabilir.



5. KAYNAKLAR

- Anderson, T. (1962). *On the distribution of the two-sample Cramer-von Mises criterion*. The Annals of Mathematical Statistics, 9(1), 1148-1159.
- Cramér, H. (1928). *On the composition of elementary errors: First paper: Mathematical deductions*. Scandinavian Actuarial Journal, 1928(1), 13-74.
- D'Agostino, R. (1986). *Goodness-of-fit-techniques (Cilt 68)*. CRC press.
- Darling, D. (1957). *The kolmogorov-smirnov, cramer-von mises tests*. The Annals of Mathematical Statistics, 28(4), 823-838.
- Dekking, F., Kraaikamp, C., Lopuhaä, H., & Meester, L. (2005). *A Modern Introduction to Probability and Statistics: Understanding why and how (Cilt 488)*. Springer.
- Dick, J., & Pillichshammer, F. (2010). *Digital nets and sequences: discrepancy theory and quasi-Monte Carlo integration*. Cambridge University Press.
- Drmota, M., & Tichy, R. (2006). *Sequences, discrepancies and applications (Cilt 488)*. Springer.
- Forsyth, D. (2018). *Probability and statistics for computer science*. Springer.
- Gentle, J. (2003). *Random number generation and Monte Carlo methods (Cilt 381)*. Springer.
- Kesemen, O., Tiryaki, B. K., & Pak, A. (2019). *A Numerical Approximation of Inversion Method to Generate Non-Uniform Random Numbers*. 11. International Statistics Congress, (s. 328-335). Muğla.
- Knuth, D. (2014). *Art of computer programming, volume 2: Seminumerical algorithms (Cilt 381)*. Addison-Wesley Professional.
- Kuipers, L., & Niederreiter, H. (2012). *Uniform distribution of sequences (Cilt 488)*. Courier Corporation.
- L'ecuyer, P., & Simard, R. (2007). *TestU01: AC library for empirical testing of random number generators*. ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 33(4), 1-40.
- Niederreiter, H. (1992). *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods (Cilt 381)*. SIAM.

- Noughabi, H., & Arghami, N. (2011). Monte Carlo comparison of seven normality tests. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(8), 965-972.
- Schindler, W. (2009). *Random number generators for cryptographic applications*. Springer.
- Smirnov, N. (1939). On the estimation of the discrepancy between empirical curves of distribution for two independent samples. *Bull. Math. Univ. Moscou*, 2(2).
- Sobol, I. M. (1967). The distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 7, s. 784-802.
- Stephens, M. (1970). Use of the Kolmogorov-Smirnov, Cramér-Von Mises and related statistics without extensive tables. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 115-122.
- Tezel, Ö., Tiryaki, B. K., Özkul, E., & Kesemen, O. (2021). A New Goodness-of-Fit Test: Free Chi-Square (FCS). *Gazi University Journal of Science*, 34(3), 879-897.
- Tiryaki, B. K., & Kesemen, O. (2018). Non-Uniform Random Number Generation from Arbitrary Bivariate Distribution in Polygonal Area. *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 22(2), 443-457.

ÖZGEÇMİŞ

Tuncay ULUYURT, İlköğrenimini Güventürk İlköğretim Okulu'nda, ortaöğrenimini ise Sami YANGIN Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2004 yılında Kayseri Erciyes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümüne yerleşti ve 2008 yılında bu bölümden mezun oldu. 2010 yılında Artvin Çoruh Üniversitesi Arhavi Meslek Yüksek Okulunda öğretim görevlisi olarak göreve başlamıştır. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim dalında tezli yüksek lisans programına başladı. 2015 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim dalında tezli yüksek lisans programını başarıyla tamamladı. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim dalında Doktora programına başladı. Ulusal ve uluslararası sempozyum ve kongrelerde yayınlanmış bildirileri ve uluslararası dergilerde makaleleri bulunmaktadır.

Tuncay Uluyurt halen görevini devam ettirmekte, evli ve iki çocuk babasıdır.