

138889

ÇOK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERİN
HARMONİK DİFERANSİYEL QUADRATURE (HDQ)
METODU İLE LİNEER VE LİNEER OLMAYAN
DİNAMİK ANALİZİ



Ömer CİVALEK

Aralık, 2003

İZMİR

**ÇOK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERİN
HARMONİK DİFERANSİYEL QUADRATURE (HDQ)
METODU İLE LİNEER VE LİNEER OLMAYAN
DİNAMİK ANALİZİ**

**Dokuz Eylül Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora Tezi
İnşaat Mühendisliği Bölümü, Yapı Anabilim Dalı**

Ömer CİVALEK

**Aralık, 2003
İZMİR**

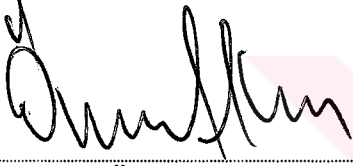
Doktora Tezi Sınav Sonuç Formu

Ömer CİVALEK tarafından Prof. Dr. Hikmet Hüseyin ÇATAL yönetiminde hazırlanan “Çok Serbestlik Dereceli Sistemlerin Harmonik Diferansiyel Quadrature (HDQ) Metodu İle Lineer ve Lineer Olmayan Dinamik Analizi” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir doktora tezi olarak kabul edilmiştir.



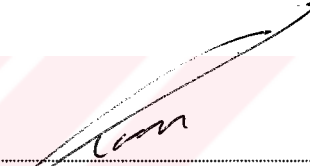
Prof. Dr. Hikmet Hüseyin ÇATAL

Danışman



Prof. Dr. Ömer Zafer ALKU

Jüri Üyesi



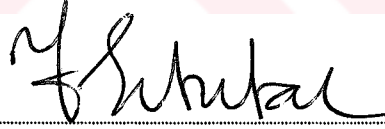
Prof. Dr. Ramazan KARAKUZU

Jüri Üyesi



Prof. Dr. Melike ALTAN

Jüri Üyesi



Prof. Dr. Yıldırım ERTUTAR

Jüri Üyesi



Prof. Dr. Cahit Helvacı

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEŞEKKÜR

Uzun ve yorucu bir süreci kapsayan doktora eğitimi sadece belirli derslerin alınıp, bir tezin hazırlanmasından ibaret değildir, bilhassa disiplinli bir yaşam biçimidir. Bu süreç içinde pek çok kişiden pozitif yönde katkılar görülmüştür. Bu amaçla, yardımları olmasaydı çalışmanın tamamlanmasının mümkün olmayacağını düşündüğüm ve bu hislerimi bildirmek istediğim kişilere aşağıda sırasıyla teşekkür etmek isterim.

Gerek doktora ders aşamasında ve gerekse bu tezin hazırlanması süresince, bana bilimsel çalışma yöntemlerini öğreten, yönlendirme ve yardımlarıyla çalışmanın sonuçlandırılmasını temin eden, öngörülmeven olumsuzlukları ve aksamaları engin bilgisi ve hoşgörüsüyle sönümleyen danışman hocam sayın Prof. Dr. Hikmet Hüseyin ÇATAL Bey'e, tez izleme jürimde bulunan ve bu süreç içinde ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Ömer Zafer ALKU Bey'e, bazı matematiksel işlemlerde bilgisine başvurduğum Yrd. Doç Dr. Seval ÇATAL Hanımefendi'ye, yakın ilgisi nedeniyle bölüm elemanlarından arkadaşım Arş. Görv. Oktay DEMİRDAĞ'a, sayısal işlemler için gerekli bazı alt programların ve grafik ara yüzün yazımındaki değerli katkılarından dolayı İnş. Müh. A.K. BALTACIOĞLU'na, sürekli ve yorucu bir süreci içeren gerek bu dört yıllık süre boyunca ve gerekse bundan önceki çalışmalarım sırasında gösterdikleri sabır ve dayanım nedeniyle Eşime ve Oğlum'a içten teşekkürlerimi sunarım.

Ömer CİVALEK



*Bu çalışmadaki emek, payımı, eğitim yaşamım boyunca
beni maddi ve manevi olarak sabırla destekleyen Anne
ve Babama ithaf ederim.*

ÖZET

Gerçek fiziksel sistemler yada mühendislik problemleri yaygın olarak lineer veya lineer olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklem ile ifade edilirler ve bunların kapalı matematiksel çözümlerini elde etmek bazen zordur. Sonuç olarak bu kısmi türevli denklemlerin sayısal çözümü hemen hemen bütün mühendislik alanında kullanılmaktadır. Bu tarz kapalı matematik çözümün olmadığı uygulamalarda çok yaygın olarak kullanılan sonlu farklar ve sınır elemanlar olup, pek çok mühendislik problemi bu yöntemler ile yeterli sayıda düğüm noktası alındığında kabul edilebilir sonuçlar vermektedir. Bununla birlikte fiziksel manada ancak özel birkaç noktada yeter doğrulukta sonuçların istendiği problemlerde sonlu farklar yine de yüksek sayıda düğüm noktasına ve büyük kapasitede hesaplayıcıya ihtiyaç duyduğundan uygun olmamakta ve özellikle lineer olmayan problemlerde yüksek sayıda iterasyonlar kaçınılmaz olmaktadır. Sonuç olarak hem çözüm için gereken hesap süresi ve hem de bilgisayar bellek ihtiyacı artmaktadır.

Modern bilgisayar teknolojisi ile, kısmi veya adi diferansiyel denklemler şeklinde tanımlanan pek çok mühendislik ve bilim problemini çözecek birkaç sayısal hesap yöntemi geliştirilmiş olup yaygın olarak kullanılmaktadır.

Daha az düğüm noktası kullanarak daha hassas sonuçlar elde edebilecek sayısal yöntemlerin araştırılması sırasında diferansiyel quadrature yöntemi bulunmuştur. Diferansiyel quadrature yöntemi; koordinat doğrultusuna göre bir fonksiyonun türevi, çepeçevre saran bir çözüm bölgesindeki yüksek dereceden bir polinom yardımıyla yaklaşım kurabilen sürekli bir fonksiyon ve o doğrultu boyunca bütün ağ noktalarındaki fonksiyon değerlerinin tümünün lineer toplamı olarak ifade edilebileceği prensibine dayanır. Sonlu elemanlar ve sonlu farklar gibi diğer sayısal yöntemlerde olduğu gibi diferansiyel quadrature yöntemi de verilen diferansiyel

denklemleri, çözüm bölgesi için önceden seçilen düğüm noktalarında bilinmeyen fonksiyon değerlerine bağlı bir lineer denklem takımına indirger.

Bu tezde tek ve çok serbestlik dereceli sistemlerin serbest ve zorlanmış titreşimleri harmonik diferansiyel quadrature metoduyla incelenmiştir. İlk önerilen diferansiyel quadrature (DQ) yöntemi ve daha sonra ortaya çıkan genelleştirilmiş diferansiyel quadrature (GDQ) yöntemlerinde kullanılan polinomal formda fonksiyonlar yerine, harmonik diferansiyel quadrature (HDQ) metodunda test fonksiyonu olarak sinüs veya kosinüs gibi trigonometrik fonksiyonlar kullanılır. Bu nedenle metod harmonik diferansiyel quadrature olarak adlandırılır. Hesaplarda hem lineer hem de lineer olmayan davranış göz önüne alınmıştır. Metodun doğruluğu, yeterliliği ve verimliliği sayısal örnekler ile gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar, mevcut diğer sayısal analiz yöntemleriyle ve analitik çözüm ile elde edilen değerler ile karşılaştırılmıştır. Metod tek ve çok serbestlik dereceli sistemlerin lineer ve lineer olmayan analizi amacıyla yeter doğrulukta sonuçları kısmen daha kısa süreli bilgisayar zamanı ve daha az düğüm noktası için vermiştir.

Anahtar Kelimeler : Harmonik diferansiyel quadrature; Lineer olmayan dinamik analiz; Tek serbestlik dereceli sistemler, Çok serbestlik dereceli sistemler, Yapı dinamiği.

ABSTRACT

Real physical systems or engineering problems are often described by partial differential equations, either linear or nonlinear and in most cases, their closed form solutions are extremely difficult to establish. As a result, approximate numerical methods have been widely used to solve partial differential equations which arise in almost all engineering disciplines. The most commonly used numerical methods for such applications are the finite difference and boundary element methods, and most engineering problems can be solved by these methods to satisfactory accuracy if a proper and sufficient number of grid points are used. However, in a large number of practical applications where only reasonably accurate solutions at few specified physical coordinates are of interest, the finite difference method becomes inappropriate since they still require a large number of grid points and so large a computer capacity, especially in the cases of nonlinear problems where iteration becomes inevitable. Consequently, both CPU time and storage requirements are often considerable for the standard methods.

With the modern computer technology, various numerical methods were well developed and widely used to solve various kinds of engineering and science problems, which are described by the partial or ordinary differential equations.

In seeking a more efficient numerical method which requires fewer grid points yet achieves acceptable accuracy, the method of differential quadrature (DQ) was introduced. The basic idea of the differential quadrature method is that the derivative of a function, with respect to a space variable at a given sampling point, is approximated as a weighted linear sum of the sampling points in the domain of that variable. As with other numerical analysis techniques, such as finite element or finite

difference methods, the DQM also transforms the given differential equation into a set of analogous algebraic equations in terms of the unknown function values at the reselected sampling points in the field domain.

In this thesis, free and forced vibration analysis of a single and multi degree of freedom systems are made by the harmonic differential quadrature (HDQ) method. Unlike the differential quadrature and generalized differential quadrature that use the polynomial functions, harmonic differential quadrature uses trigonometric functions as the test functions. As the name of the test function suggested, this method is called the HDQ method. Both the linear and the nonlinear behavior are taken into consideration in the numerical applications. The accuracy, efficiency and convenience of HDQ are demonstrated throughout the numerical examples. The obtained results are compared with existing solutions available from other numerical methods and analytical results. The method presented gives efficient accurate results in a gradually little CPU time and grid points for the linear and nonlinear dynamic analysis of the single and multi degree of freedom systems.

Key Words: Harmonic differential quadrature; Non-linear dynamic analysis; Single-degree-of-freedom systems, Multi degree-of-freedom systems, Structural dynamic.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
Tez Sonuç formu.....	II
Teşekkür.....	III
Özet.....	IV
Abstract.....	VI
İçindekiler.....	VIII
Tablo Listesi.....	XII
Şekil Listesi.....	XIII

Bölüm Bir **GİRİŞ**

1.1 Giriş.....	1
----------------	---

Bölüm İki **AMAÇ VE KAPSAM**

2. Amaç ve Kapsam.....	4
2.1 Amaç.....	4
2.2 Kapsam.....	5
2.3 Daha Önce Yapılan Çalışmalar.....	9
2.4 Yapılan Kabuller.....	11

Bölüm Üç

YAPILARIN LİNEER OLMAYAN ANALİZİ

3. Yapıların Lineer Olmayan Analizi.....	12
3.1 Lineer olmayan davranış nedenleri.....	13
3.2 Sınır Koşullarının Lineer Olmaması.....	15
3.3 Malzeme Davranışının Lineer Olmayan Analiz(Elasto-Plastik Analiz).....	15
3.4 Büyük Geometri Değişimi (İkinci Mertebe Analiz).....	19
3.5 Geometri ve Malzeme Nonlineeritesinin Birlikte Bulunması.....	19

Bölüm Dört

YAPILARIN DİNAMİK ANALİZİ

4. Yapıların Dinamik Analizi.....	22
4.1 Temel Kavramlar.....	22
4.2 Serbestlik Derecesi Kavramı.....	23
4.3 Matematik Modelleme.....	24
4.4 Tek Serbestlik Dereceli Sistemler.....	25
4.5 Çok Serbestlik Dereceli Sistemler.....	27
4.6 Lineer Olmayan Dinamik Analiz.....	31

Bölüm Beş

DİFERANSİYEL QUADRATURE YÖNTEMİ

5. Diferansiyel Quadrature Yöntemi.....	38
5.1 Diferansiyel Quadrature Yönteminde Düğüm Noktaları Sayısı ve Seçimi.....	47
5.2 Diferansiyel Quadrature Yönteminde Lagrange Polinomları ile Ağırlık Katsayı Matrislerinin hesabı.....	52
5.3 Harmonik Diferansiyel Quadrature Yöntemi.....	55

5.4 Dinamik Analiz İçin Harmonik Diferansiyel Quadrature Yönteminin geliştirilmesi.....	60
5.5 Çok Serbestlik Dereceli Sistemler İçin HDQ Yöntemi.....	73

Bölüm Altı

SAYISAL UYGULAMALAR

6. Sayısal Uygulamalar.....	80
6.1 Tek Serbestlik Dereceli (TSD)Sistemler.....	80
6.1.1 Lineer TSD Sistemler.....	80
Örnek 1.....	80
Örnek 2.....	83
Örnek 3.....	91
Örnek 4.....	96
Örnek 5.....	99
Örnek 6.....	101
6.1.2 Lineer Olmayan TSD Sistemler.....	104
Örnek 7.....	104
Örnek 8.....	108
Örnek 9.....	111
Örnek 10.....	114
6.2 Çok Serbestlik Dereceli Sistemler.....	118
6.2.1 Lineer ÇSD Sistemler.....	118
Örnek 11.....	118
Örnek 12.....	123
Örnek 13.....	126

6.2.2 Lineer Olmayan ÇSD Örnekler.....	130
Örnek 14.....	130
Örnek 15.....	134

Bölüm Yedi

SONUÇ

7. Sonuç.....	137
---------------	-----

KAYNAKLAR

Kaynaklar.....	140
----------------	-----

EKLER

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 6.1 TSD Sistem İçin HDQ Metodu İle Elde Edilen Sonuçların Karşılaştırılması.....	81
Tablo 6.2 TSD Sistemin Lineer Serbest Titremine ait Karşılaştırmalı Sayısal Sonuçlar.....	84
Tablo 6.3 TSD Sistemin Lineer Serbest Titremine ait Karşılaştırmalı Sayısal Sonuçlar.....	85
Tablo 6.4 TSD Bir Sitemin Nonlineer Zorlanmış Titreşimine Ait Karşılaştırmalı Sonuçlar ($\Delta t = 0.1$).....	106
Tablo 6.5 TSD Bir Sitemin Nonlineer Zorlanmış Titreşimine Ait Karşılaştırmalı Sonuçlar ($\Delta t = 0.1$).....	109

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1 Tek serbestlik dereceli bir sistem ve serbest cisim diyagramı.....	26
Şekil 4.2. Çok serbestlik dereceli örnek bir sistem ve kütle-yay- sönüm elemanı olarak matematik modeli.....	28
Şekil 4.3 Serbest cisim diyagramında kuvvetlerin gösterimi.....	29
Şekil 4.4 Tek serbestlik dereceli bir sisteme ait lineer olmayan sönüm.....	33
Şekil 4.5 Tek serbestlik dereceli bir sisteme ait lineer olmayan rijitlik.....	34
Şekil 4.6 Tek serbestlik dereceli bir sisteme ait tatbik edilen yük.....	34
Şekil 4.7 Gerçek plastik davranış.....	36
Şekil 4.8 Elasto-Plastik yükleme boşaltma diyagramı modeli.....	36
Şekil 5.1 Bir boyutlu sistemler için düğüm noktaları.....	39
Şekil 5.2 Bir boyutlu sistemler için düğüm noktaları.....	42
Şekil 5.3 İki boyutlu bölge için düğüm noktaları.....	45
Şekil 5.4 Bir boyutlu δ bitişik noktalı quadrature düğüm noktaları.....	50
Şekil 6.1 $\Delta t=0.025$ için değişik yöntemler kullanılarak elde edilen deplasmanların karşılaştırılması.....	82
Şekil 6.2 Deplasman için çeşitli yöntemler ile elde edilen değerlerin HDQ ile karşılaştırılması.....	86
Şekil 6.3 Hız için çeşitli sayısal yöntemler elde edilen değerlerin HDQ ile karşılaştırılması.....	87
Şekil 6.4 Çeşitli Yöntemler ile hesaplanan ivme değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması.....	88
Şekil 6.5 DQ ve HDQ metotlarında farklı zaman aralıkları (Δt) için hesaplanan hata değerleri (a) Eşit aralıklı düğüm noktası dağılımı (b) Eşit olmayan aralıklı düğüm noktası dağılımı.....	89

Şekil 6.6 HDQ ve sonlu farklar metotlarında farklı zaman aralıkları (Δt) için hesaplanan hata değerleri (a) Eşit aralıklı düğüm noktası dağılımı (b) Eşit olmayan aralıklı düğüm noktası dağılımı.....	90
Şekil 6.7 TSD sistem ve etki eden sabit dış yük fonksiyonu.....	91
Şekil 6.8 Çeşitli yöntemler ile hesaplanan deplasman değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması.....	92
Şekil 6.9 Çeşitli yöntemler ile hesaplanan ivme değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması.....	93
Şekil 6.10 Çeşitli yöntemler ile hesaplanan deplasman değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması ($\Delta t = 0.2$).....	94
Şekil 6.11 HDQ ile diğer metotların farklı zaman aralıkları (Δt) ve eşit olmayan düğüm noktası dağılımı için hesaplanan hata.....	95
Şekil 6.12 Tek serbestlik dereceli sönümlü zorlanmış sistem.....	96
Şekil 6.13 Dış yük fonksiyonu.....	97
Şekil 6.14 Farklı yöntemler ile hesaplanan deplasman değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması.....	98
Şekil 6.15 TSD olarak modellenen bir su kulesi ve etki eden zorlama kuvveti.....	99
Şekil 6.16 Çeşitli yöntemler ile hesaplanan deplasman değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması	100
Şekil 6.17 (a) Tek katlı çerçeve, (b) etki eden zorlama kuvveti.....	101
Şekil 6.18 Çeşitli yöntemler ile deplasman değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması.....	102
Şekil 6.19 Çeşitli yöntemler ile ivme değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması.....	103
Şekil 6.20 Sisteme etkiyen yük fonksiyonu ve her bir zaman için yük değerleri...	104
Şekil 6.21 Sisteme etkiyen elasto-plastik yük fonksiyonu.....	105
Şekil 6.22 Farklı yöntemler ile hesaplanan deplasman değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması.....	107
Şekil 6.23 (a) TSD sistem; (b) Yük fonksiyonu; (c) Nonlineer yük-deplasman eğrisi.....	108
Şekil 6.24 Deplasman değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması.....	110

Şekil 6.25 (a) TSD sistem ve yük fonksiyonu (b) Elasto-plastik yük-deplasman eğrisi.....	111
Şekil 6.26 Çeşitli yöntemler ile hesaplanan deplasman değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması.....	112
Şekil 6.27 HDQ ile Newmark metotlarında farklı zaman aralıkları (Δt) için elde edilen (Eşit olmayan düğüm nokta dağılımı için) hata değerleri.....	113
Şekil 6.28 (a) Bi-lineer TSD bir sistem; (b) Kuvvet-deplasman ilişkisi.....	115
Şekil 6.29 İkili non-lineeriteye sahip örnek için elde edilen sonuçlar ($\Delta t = 0.05$).....	116
Şekil 6.30 HDQ ile Newmark metotlarında farklı zaman aralıkları (Δt) için elde edilen hata değerleri, (a) eşit düğüm nokta dağılımı için hesaplanan hata (b) eşit olmayan düğüm noktası dağılımı için hesaplanan hata.....	117
Şekil 6.31 İki serbestlik dereceli sönümsüz zorlanmış sistem.....	119
Şekil 6.32 İki serbestlik derecesine sahip sistem için elde edilen sonuçlar ($\Delta t = 0.28$).....	120
Şekil 6.33 İki serbestlik derecesine sahip sistem için elde edilen sonuçlar ($\Delta t = 0.28$).....	121
Şekil 6.34 HDQ ile farklı zaman aralıkları (Δt) ve eşit olmayan düğüm noktası dağılımı için elde edilen hata değerleri.....	122
Şekil 6.35 İki serbestlik dereceli kütle-yay sistemi.....	123
Şekil 6.36 İki serbestlik derecesine sahip sistem ait serbest sönümsüz titreşim için elde edilen sonuçlar (1. kütleye ait deplasman).....	124
Şekil 6.37 İki serbestlik derecesine sahip sistem ait serbest sönümsüz titreşim için elde edilen sonuçlar (2. kütleye ait deplasman).....	125
Şekil 6.38 (a) Üç katlı çerçeve sistem; (b) Kat seviyesinde topaklanmış kütle modeli.....	127
Şekil 6.39 Üç serbestlik dereceli sistemin serbest sönümsüz titreşim için elde edilen deplasman değerleri ($\Delta t = 0.2$).....	128
Şekil 6.40 Üç serbestlik dereceli sistemin serbest sönümsüz titreşim durumunda elde edilen hız sonuçları ($\Delta t = 0.2$).....	129
Şekil 6.41 (a) İki katlı gergili çerçeve; (b) Nonlineer gerilme-şekil değiştirme eğrisi.....	130

Şekil 6.42 İki katlı gergili çerçevenin sistemin sönümlü lineer olmayan serbest titreşimi 1 ve 2.kat hizasındaki deplasmanları.....	133
Şekil 6.43 İki serbestlik dereceli kütle-yay sisteminin lineer olmayan titreşimine ait 1. kütle deplasmanı.....	135
Şekil 6.44 İki serbestlik dereceli kütle-yay sisteminin lineer olmayan titreşimine ait 2. kütle deplasmanı.....	136



BÖLÜM BİR

GİRİŞ

1.1 Giriş

Büyük bir çoğunluğu deprem riski altında olan ülkemizde yapılacak her türlü mühendislik yapısının, çağdaş deprem mühendisliği ilkeleri altında inşası gerekmektedir. Çağdaş deprem mühendisliği; standartlarda sınırları belirtilen küçük veya orta büyüklükte depremlerde yapıların elastik, daha yüksek şiddetli depremlerde ise elasto-plastik sınırlar içinde şekil değiştirmeler yapmasını öngörür. Bir başka ifadeyle, yapının orta şiddette depremlerde herhangi bir ekonomik kayba neden olmadan yani hasar oluşmayacak şekilde karşı koyması, bundan daha şiddetli depremlerde ise yapıda geçici veya kalıcı çeşitli şekil değiştirmeler oluşsa bile taşıyıcı sistemde kısmi veya toptan göçme olmaması istenir. Geçmişte belki ideal durum olarak kabul edilecek yapının bu davranışı 21. yüzyıl yapım ve malzeme tekniklerinin gelmiş olduğu nokta açısından pek de ideal durum olarak kabul edilemez. Bu amaçlara ulaşmak; yapının tasarlanması, analizi ve gerçekleştirilmesi süresince pek çok faktöre bağlıdır. Ancak, yapı sistemlerinin analizi kapsamında her zaman; daha hassas sonuçlara daha kısa zaman kullanarak ulaşmak esastır. Yani elde edilecek çözümün ekonomik olması istenir.

Fiziksel bir sistemin matematik modelinin elde edilmesi, mühendislik uygulamalarındaki ilk aşamadır. Bu matematik modelin sürekli ve ayrık kabul edilmesine göre çözüm, kısmi veya adi türevli bir diferansiyel, bir integral veya nadir olarak bir lineer denklem sistemi olarak elde edilir. Gerek mühendisliğin; akışkanlar ve katı cisimler mekaniği, sürekli ortamlar mekaniği gibi uygulamalı alanlarında ve gerekse fizik, kimya ve biyoloji gibi temel bilimlerde karşılaşılan denklemler genelde lineer yada nonlinear türde bir kısmi diferansiyel denklem olmakta ve problem neticede bir sınır değer veya başlangıç değer probleminin çözümüne indirgenmektedir.

Günümüzde, sonlu farklar ve sonlu elemanlar daha hassas sonuçlar vermekte ancak hala yüksek sayıda uygun eleman seçilmesi gerekmektedir. Bu ise çözüm için gerekli hesaplayıcı kapasitesi ihtiyacını ve analiz süresini artırmaktadır. Daha az düğüm noktası kullanarak daha kısa sürede sonuca ulaşma çabaları neticesinde 1970'li yılların ilk yarısında Belman(1971) tarafından diferansiyel quadrature (DQ) yöntemi önerilmiştir. Bununla birlikte yöntem; ağırlık katsayılarının hesaplanmasındaki güçlüklerin giderilmesi ve kullanılan yaklaşım fonksiyonlarının bulunmasından sonra yaygınlaşmış ve ancak 1988 yılından sonra yapı mekaniği ve akışkanlar mekaniği problemlerine başarıyla uygulanmıştır. Günümüze kadar son on yıl içinde plak, kabuk ve kirişlerin statik, dinamik ve stabilite hesabında başarıyla kullanılmış olup, DQ elemanlar yöntemi, 1992 yılında genelleştirilmiş diferansiyel quadrature (GDQ) ve 1995 yılında harmonik diferansiyel quadrature(HDQ) yöntemi gibi iki farklı çözüm önerilmiş olup bu durumda ağırlık katsayılarının hesaplanması ve seçilen polinom fonksiyonu açısından orijinal diferansiyel quadrature'dan farklılık gösterir. Günümüzde artık diferansiyel quadrature yönteminin çözeceği problem sınıfı bir hayli kısıtlı olup bu yöntem pek fazla kullanılmamaktadır. Bunun yerine genelleştirilmiş ve HDQ türleri veya daha fazla sayıda ve üniform olmayan düğüm noktaları gerektiğinde (akışkanlar mekaniği ve ısı iletim problemlerinde) harmonik quadrature elemanlar yöntemi araştırmacılar tarafından tercih edilmektedir.

Çalışmanın dikkate aldığı problem; yapı dinamiği kapsamında göz önüne alınan bir başlangıç değer problemi (zamana bağlı ikinci mertebeden bir adi diferansiyel denklem) olup, zamana bağlı bir türev denkleminin harmonik diferansiyel quadrature yöntemiyle sayısal çözümünü amaçlamaktadır. Çalışmanın esas amacı tek serbestlik dereceli ve çok serbestlik dereceli sistemlerin dinamik mukabelelerini hesaplamak yani dinamik analizini idare eden matematik modelleri uygun sınır veya başlangıç koşulları ile birlikte HDQ yöntemi ile çözmek ve yer değiştirme, hız ve ivme değerlerini göz önüne alınan zaman aralığı için hesaplamaktır. Çalışmada göz önüne alınacak problemler; genel mühendislik analizi kapsamında karşılaşılabilecek sistemler olup; tek serbestlik dereceli, çok serbestlik dereceli veya sürekli ortam kabulüne göre modellenmiş problemler olmakla birlikte daha çok yapı analizi kapsamında karşılaşılabilecek gerçek fiziksel sistemler dikkate alınmıştır. Çünkü plak veya kabuk

gibi elemanların HDQ yöntemi ile çözümleri olmamasına karşın diferansiyel quadrature yöntemi ile çözümü hakkında literatürde yapılmış çalışma bulmak mümkündür.

Çalışma temel olarak yedi ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde yapılacak çalışma ve kapsamı hakkında ön bilgiler verilmekte, ve çalışmanın bölümlerinden bahsedilmektedir. İkinci bölümde çalışmanın amacı ve kapsamı açıklanmıştır. Bu bölümde mühendislik sistemlerinin analizi, matematik modelleme ve sayısal analiz yöntemlerinden bahsedilmekte, konu ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalar özetlenerek diferansiyel quadrature yönteminin avantajları vurgulanmaktadır. Üçüncü bölümde yapı mühendisliği kapsamında lineer olmayan analizden bahsedilmiş, lineer olmayan analize hangi durumlarda ihtiyaç duyulduğu, lineer olmayan analiz yöntemlerinin tanıtılması ve bu tez kapsamında kullanılacak lineer olmayan analiz kapsamındaki kavramlar verilmiştir. Dördüncü bölümde yapı dinamiğinin temel prensipleri ve dinamik analizin argümanları verilmiş, herhangi bir sistemin dinamik analizinde izlenecek temel adımlar, tek ve çok serbestlik dereceli sistemlerin tanıtılması, hareket denkleminin elde edilmesi, lineer olmayan dinamik analiz kavramı verilmiştir. Beşinci bölümde diferansiyel quadrature yöntemi ana hatlarıyla ve detaylı olarak tanıtılmıştır. Bu bölümde çalışmada kullanılan harmonik diferansiyel quadrature yönteminin neden kullanıldığı gerekçeleriyle sunulmuş ve kullanılan bu yöntemin esas formülasyonları verilmiştir. Kullanılan yöntemin mevcut hareket denklemine uygulanması ve ağırlık katsayı matrislerinin hesaplanması açıklanmıştır. Altıncı bölümde yöntem tek ve çok serbestlik dereceli sistemlere uygulanmıştır. Bu bölümde seçilen sayısal uygulamalar geliştirilen yöntemler ile çözülmüş ve sonuçları grafik ve tablolar halinde verilmiştir. Yedinci bölüm sonuç ve tartışma bölümü olup elde edilen sonuçlar diğer sayısal analiz yöntemleriyle bulunan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Ekler kısmında; hazırlanan bilgisayar program için akış diyagramı ve programdan bazı çıktılar sunulmuştur.

BÖLÜM İKİ

AMAÇ VE KAPSAM

2.1 Amaç

Mühendislik uygulamalarında temel amaç; insan yaşamını kolaylaştıracak sistemler ortaya koymaktır. Bu sistemlerin geliştirilmesindeki temel etken insan ihtiyaçlarının karşılanmasıdır. Uygarlaşma yönündeki olumlu gelişmeler ve teknolojinin günümüzde geldiği nokta ihtiyaçların farklılaşmasına neden olmuştur. Değişen bu ihtiyaçlara cevap vermek için teorik ve pratik çalışmalar yapan mühendisler de farklı teknikler üzerinde yoğunlaşmışlardır. Mühendislik sistemlerinin analizi en genel anlamda iki aşamayı içermektedir. Mevcut bir fiziksel sistemi ifade eden matematik modelin kurulması ve elde edilen matematik denklemin analitik olarak veya çeşitli yaklaşık sayısal yöntemler kullanılarak çözülmesidir. Bu iki aşamadan birincisi tecrübe, sezgi ve iyi bir matematik alt yapı; ikincisi ise modellemede kullanılan sezgi ve bilgiye ilaveten hızlı ve kapsamlı bir hesaplayıcıyı gerektirir.

Yapılan modellemenin gerçek modeli yansıtır yansıtmaması, gerçek fiziksel olay ile uyumluluk derecesiyle ölçülür. Bu modellerin büyük bir çoğunluğu, sınır değer formundaki diferansiyel denklemlerdir. Bu matematik denklemlerin fiziksel modele en yakın sunuş biçimi ise varyasyonel problemlerdir. Giriş verileri üzerine konulan süreklilik ve türevlenebilirlik koşulları açısından, varyasyonel problem kendi özdeşi olan sınır değer problemiyle karşılaştırıldığında, uygulama alanı daha geniş olan problemler sınıfına hitap eder. Matematik modelleme işleminin, modelin varyasyonel problem olarak ifade edilmesinden sonraki aşaması, hesaplayıcıya tanıtımı, uygun olan ayrık modelin oluşturulmasıdır. Günümüzde, diferansiyel denklemlerle ilgili matematik modellerin ayrık benzeşiklerinin oluşturulması ve elde edilen ayrık problemin bilgisayarda çözümlenmesi açısından en kapsamlı ve bilinen

yöntem sonlu elemanlar yöntemidir. Bu yöntemin klasik sonlu farklar yönteminden başlıca ayırt edici özelliği, sonlu elemanlar yöntemi sınır değer problemini değil varyasyonel problemi temel almasıdır.

2.2 Kapsam

Genel anlamda, mühendislik problemleri, süreksiz ve sürekli ortam problemleri olmak üzere iki sınıfa ayrılır. Serbestlik derecesi sonsuz büyük olan sürekli ortam problemlerinin çözümü bir diferansiyel denklem, bir integral denklem veya denklem sisteminin çözümünü gerektirdiği halde, serbestlik derecesi sonlu olan süreksiz ortam problemlerinin çözümü lineer denklem takımının çözümüyle elde edilebilmektedir. Sonsuz serbestlik dereceli sistemlerinin çözümünde çeşitli matematik güçlükler ortaya çıkmakta buna karşın süreksiz ortam problemlerinin çözümünde gerekli olan hesaplayıcı kapasitesi ve hesap süresi artmaktadır.

Bunlardan başka mühendislik problemlerini evrensel bir yaklaşımla; kararlı durum problemlerini içeren denge problemleri, kararlı durum problemlerindeki bazı parametrelerin kritik değerlerinin bulunmasını gerektiren özdeğer problemleri ve başlangıç değer formundaki problemleri içeren propagasyon problemleri olarak üç temel gruba da ayırmak mümkündür (Crandall,1968). Bu tarz bir sınıflandırmada da elde edilen denklem; kapalı yada açık sınır ve/veya başlangıç değerine sahip kısmi veya adi türevli bir diferansiyel denklem yada lineer bir denklem takımı olarak elde edilir.

Denge problemlerinde sistemin durumu zamanla değişmez. Sabit kararlı durum problemleri olarak da bilinir. Örnek olarak; Katı ve sıvılarda kararlı sıcaklık dağılımı, sürekli akış problemleri ve kararlı ses altı hızında akışkanların akışı, gerilme analizleri, elektrostatik alanlar, doğru akım, alternatif akım problemleri.

Özdeğer problemleri denge problemlerinin bir uzantısıdır. Gerçekte her ikisi de sınır değer problemidir. Bazı parametrelerin kritik değerlerinin bulunması ile ilgilidir. Özdeğer problemlerinin karşımıza çıktığı durumlar; yapıların stabilitesi ve

titreşimleri, lineer vizkoelastik sönümlleme, burkulma, liman ve denizlerdeki dalgaların serbest titreşimi, rijit veya esnek olan kaplarda akışkanların çalkalanması, elektrik devreleri, akustik ve rezonans problemleridir.

Yayılma problemleri ise zamana bağlı problemlerdir. Sistemin ardışık durumları başlangıç şartlarına bağlı olarak belirlenir.

Lineer bir diferansiyel denklem takımını sağlayan fonksiyonların bir bölgedeki değerleri tayin edilirken, bazı matematik güçlüklerle karşılaşılır. Bunun için bu hallerde, önce bu fonksiyonların verilen bölgenin sonlu uzunluktaki bazı noktalarına ait değerleri aranır. Daha sonra, bu değerler kullanılarak diğer bilinmeyen noktalardaki değerler elde edilir. Bu şekilde sürekli bir ortam yerine, cebirsel bir denklem takımının çözümünü gerektiren ayrık bir ortam alınmış olur. Hızlı ve yüksek kapasiteli hesaplayıcıların gelişmesi, ve kullanımının yaygınlaşması nedeniyle sürekli ortam yerine süreksiz ortam modeli üzerinden işlem yapmaya elverişli yöntemler artmıştır. Bu yöntemler içinde sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sınır elemanlar günümüzde yaygın olarak kullanılabilmektedir. Karakteristik büyüklüklerin ortam içinde değişmesini ifade edebilmesi ve karmaşık sınır şartlarının çözüme katılabilmesine olanak vermesi bakımından sonlu elemanlar daha yaygındır.

Kurulan matematik model çoğunlukla sistemi ifade eden ya bir integral denklem yada kısmi veya adi türevli bir diferansiyel denklemdir. Sınır koşullarının karmaşıklığı nedeniyle elde edilen diferansiyel denklemin analitik çözümü çoğu durumda mümkün olmaz. Bu nedenle sayısal analiz tekniklerine başvurulur. Bilgisayar tekniğindeki gelişmeler ve denklemlerin matris formda ifade edilebilmesi sayısal analiz metotlarında büyük bir gelişmeye neden olmuştur. Bu yöntemler içinde; sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır elemanlar, varyasyonel(değişim)hesap, Rayleigh-Ritz gibi yaklaşık yöntemler günümüze kadar etkin olarak kullanılmıştır. Çoğu sayısal hesap yönteminde sürekli denge problemi sonlu sayıda serbestlik dereceli bir sisteme indirgenerek çözüme ulaşılır(Altan, 1981).

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için; sonlu elemanlar, sonlu farklar, sınır elemanlar gibi birkaç sayısal çözüm yöntemi mevcut olup, bu metotlar günümüze kadar mühendislikte ve fizikte uygulama alanı olan titreşim, stabilite, akışkanlar mekaniği, sürekli ortam mekaniği, sıvı veya termal etkilere maruz yapıların analizi gibi pek çok probleme başarıyla uygulanmıştır.

Gerek sonlu elemanlar ve gerekse sonlu farklar yönteminde düğüm noktası sayısı arttıkça elde edilen çözümlerin hassasiyetinin arttığı bilinmektedir. Bununla birlikte, daha hassas sonuçlar elde etmek için düğüm noktası sayısının artırılması, gerekli olan bilgisayar kapasitesi ve hesap süresi de aynı oranda arttırmaktadır. Ancak pek çok problemde gerçek değere yakın hassas sonuçlar fiziksel anlamda ancak birkaç özel noktada gerekmektedir.

Bilgisayar tekniğindeki gelişmelere paralel olarak denklemlerin matris formda ifade edilmesi ve bilgisayar ortamına aktarılmasındaki kolaylıklar neticesinde hesap yöntemleri sayısal analiz lehine gelişmeler göstermiştir. Hesap tekniklerindeki bu gelişmeler nedeniyle lineer kabul yerine parça parça lineerleştirerek adım adım hesaplama, ardışık yaklaşım veya bu tür sistemlerde süperpozisyon yöntemi geçerli olmadığından ardışık yük artım metotları gibi lineer olmayan sayısal analiz yöntemleri çok yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır (Zienkiewicz, 1976).

Bu metotlar içinde sonlu elemanlar ve sonlu farklar metotları kullanım alanı diğerlerine göre daha fazla olan iki analiz tekniğidir. Sonlu elemanlar yönteminde çözüm için yaklaşık bir fonksiyon seçilerek çözüme başlanır. Ancak sonlu elemanlar yönteminde seçilen enterpolasyon fonksiyonları lokal düzeyde olup elemanlar için geçerlidir (Civalek, 1996). Sonlu elemanlar yönteminde çözüm bölgesi çok fazla elemana ayrılarak yeter hassasiyette sonuçlar elde etmek mümkündür. Özellikle plak veya kabuk elemanların hassas çözümleri ancak yüksek sayıda elemana bölünerek sağlanır (Civalek, 1998). Elemanın çok fazla bölgeye ayrılarak çözüme ulaşılması durumunda ise gerekli olan hesaplayıcı kapasitesi ve zaman artacaktır. Bununla birlikte yeter yaklaşıktaki sonuçlar yani gerçek değere çok yakın sonuçlar mühendislik uygulamalarında çoğunlukla bir veya birkaç spesifik noktada istenir.

Daha az düğüm nokta sayısı kullanılarak yeter hassasiyette sonuçlar verebilecek bir yöntem olan Diferansiyel Quadrature(DQ), Richard Bellman tarafından geliştirilerek (Belman ve diğ.,1971) lineer ve lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümüne uygulanmıştır. Diferansiyel quadrature yöntemi; koordinat doğrultusuna göre bir fonksiyonun türevi, çepeçevre saran bir çözüm bölgesindeki yüksek dereceden bir polinom yardımıyla yaklaşım kurabilen sürekli bir fonksiyon ve o doğrultu boyunca bütün ağ noktalarındaki fonksiyon değerlerinin tümünün lineer toplamı olarak ifade edilebileceği prensibine dayanır.

Diferansiyel quadrature yöntemi ile sonlu elemanlar yöntemi arasında gerek yaklaşım ve gerekse uygulama açısından çeşitli farklılıklar mevcuttur. Diferansiyel quadrature yöntemi genel çerçeveli yani global bir yaklaşım yöntemi olup yüksek dereceden polinomlar kullanılmakta iken sonlu elemanlar yönteminde seçilen fonksiyonlar düşük dereceden olup sadece eleman bazında yani lokal düzeydedir. Diferansiyel quadrature yöntemi herhangi bir noktadaki fonksiyonun türevine direkt bir yaklaşım getirir, oysa sonlu elemanlar yönteminde yaklaşım lokal elemanlar üzerinde olup, türev ifadeler yaklaşım yönteminden elde edilir. Diferansiyel quadrature yöntemi daha çok sonlu farklar ile benzerlik gösterir. Ancak sonlu farklar yöntemi da düşük dereceden polinom yaklaşımları üzerine kurulan lokal bir yaklaşım yöntemidir. Kaldi ki sonlu farklar metodu seri yaklaşımlar ile çözüme ulaşırken DQ yönteminde polinom fonksiyonlar kullanılır.

Bununla birlikte diferansiyel quadrature yönteminde elde edilen matrisler band matris olup simetrik değildir. Benzer sayısal yaklaşım yöntemlerinde olduğu gibi, DQ yöntemi de mevcut türev denklemleri, çözüm bölgesinde önceden seçilen düğüm noktalarındaki bilinmeyen fonksiyon değerleri cinsinden, lineer denklem takımına dönüştürür. Bu denklemlere ilaveten sınır şartları da DQ yöntemi uygun formda yazılır. Sınır şartlarının Dirichlet ve/veya Neuman yada karışık olması herhangi bir güçlük doğurmaz.

2.3 Daha Önce Yapılan Çalışmalar

Yapıların lineer ve lineer olmayan dinamik analizi konusunda çeşitli sayısal yaklaşım metotları literatürde mevcuttur. Bunlardan önemli olanlar aşağıda özetlenmiştir.

Wu zorlanmış ve serbest titreşim analizi için varyasyonel yönteme dayalı bir formülasyon önermiştir ve tek serbestlik dereceli sistemlere ait çeşitli uygulamalar sunmuştur (Wu, 1977).

Kujawski ve Gallagher yaptıkları çalışmada genel bir en küçük kareler formülasyonu geliştirmişlerdir (Kujawski ve Gallagher, 1989).

Monkar ve diğerleri (Monkar ve Powell, 1977) ilk defa olmasa da en genel anlamda çeşitli tip yapıların lineer olmayan statik ve dinamik analizi için genel bir sonlu elemanlar yaklaşımı önermişlerdir. Göz önüne aldıkları sistemleri sürekli model kabulü ile çözmüşlerdir.

Yapı dinamiği kapsamında genel olarak çözülmeye çalışılan mevcut zamana bağlı adi diferansiyel denklemin Lagrange polinomlarına dayalı çözümü Liu tarafından geliştirilmiş ve tek serbestlik dereceli şekilde modellenen sistemlere uygulanmıştır (Liu, 2001).

Warburton ise Rayleigh- Ritz yöntemi ile dinamik analiz problemini çözmüştür (Warburton, 1979).

Yine Wilson ve diğ. Tarafından yapılan çalışmada Ritz vektörlerinin direkt süperpozisyonuna dayalı yöntem önermişlerdir. Yöntemleri çok serbestlik dereceli sistemlere ait uygulamalarda hayli başarılı sonuçlar vermiştir (Wilson, ve diğ, 1982).

Nickell ise lineer olmayan sistemlere uygulanması mümkün olmayan süperpozisyon ilkesinden hareket ederek modların süperpozisyonu ile yapıların nonlinear dinamik analizinin yapılabileceğini göstermiştir (Nickell, 1976).

Bu konudaki çalışmaların bir açıdan başlangıcı sayılabilecek yani yapıların dinamik davranışlarının sayısal yaklaşım yöntemleriyle yapılabileceğinin gösteren ilk çalışmalardan olan Newmark'ın çalışması da literatürde iyi bilinen bir yöntem önermektedir (Newmar,1959). Bunlardan başka Zienkiewicz (1977), Meirovitch (1986) ve Bathe (1982) nin pek çok makalesinde ve literatürde yukarıda bahsedilen yöntemler genel dinamik analiz kapsamında detaylı olarak incelenmiş ve uygulamalar sunulmuştur.

Yapı dinamiği perspektifinden ise Hurty ve Rubinstein(1964), Chopra (1995), Paz (1997), Craig (1981), Irvine (1986) ve Rao (1995) nun kitapları ve konu ile ilgili makalelerinde yeterli uygulama ve detay bulmak mümkündür.

Kullanılan bu sayısal yöntemlerin detayları ve matematik temelleri ise Crandall (1956), Hamming (1973) ve Wood (1990)un kitabında mevcuttur. Özellikle Wood'un kitabında her bir yöntem; denklemlerin stabilitesi, yaklaşım, hata analizi, çözülen denklem sayısı, yakınsama gibi açılardan incelenmiştir.

Ülkemizde de bu konuda yazılmış kitaplar ve makaleler mevcuttur. Bunlardan üzerinde durulması gerekenler; Tezcan (1967), Çakıroğlu ve diğ. (1974) ve Çatal (2002) verilebilir.

Literatürde ne DQ yöntemiyle ne de HDQ yöntemi ile yapı dinamiği kapsamında tek ve çok serbestlik dereceli sistemlerin lineer veya lineer olamayan dinamik analizi ile ilgili herhangi bir çalışma yoktur. DQ ve benzeri yöntemlerin (GDQ, QEM,HDQ) yapı dinamiği uygulamaları ile ilgili çalışmalar büyük bir çoğunlukta Oklahoma Üniversitesi uçak-uzay fakültesinden Bert ve ekibi tarafından yapıldığından daha çok tabakalı ve kompozit plakların statik ve dinamik analizleri (serbest titreşim frekans hesabı) ile ilgilidir. Singapur kökenli ve gemi mühendisliği (Shu ve Richards,1992)

alanında akademik çalışmalar yapan bir diğer ekibin çalışmaları da benzer olup bazı akışkanlar mekaniği uygulamaları ve plak ve kirişlerin burkulması ve eğilmesi ile ilgilidir.

Son zamanlarda yapılan bazı çalışmalarda (Fung, 2001) ısı iletimi, akışkanlar mekaniği gibi bazı alanlarda karşılaşılan başlangıç değer problemlerinde diferansiyel quadrature yönteminin uygulama prensipleri vurgulanmıştır.

2.4 Yapılan Kabuller

Bu çalışmada çözülecek problem; bir başlangıç değer problemidir. Denklem harmonik diferansiyel quadrature yöntemiyle sayısal olarak çözülecektir. Çalışmada yapı analizinde büyük bir uygulama alanı olan hesaplamalı yapı dinamiği disiplini için yapıların lineer ve lineer olmayan davranışları elde edilerek daha önce literatürde sadece bazı sınır değer problemlerine uygulanan yeni bir yöntem önerilmektedir. Göz önüne alınacak sistemler; tek serbestlik dereceli ve çok serbestlik dereceli sistemlerdir. Çalışmada yapılan bazı kabuller aşağıdadır:

1. Sönüm katsayısı sabittir.
2. Geometrik bakımdan lineer olmayan davranışın göz önüne alındığı durumda yay için yük-yer değiştirme eğrisi doğrusal değildir. Hooke yasası geçerli olmaz.
3. Malzeme davranışının lineer olmadığı durumda gerilme-şekil değiştirme eğrisi elastoplastiktir.
4. Çerçeve tipi yapıların çözümünde, kat seviyelerinde toplanmış kütle modeli dikkate alınmıştır.

BÖLÜM ÜÇ

YAPILARIN LİNEER OLMAYAN ANALİZİ

Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları orantı sınırı adı verilen bir sınır gerilmenin altında lineer-elastik kabul edilen ve yer değiştirmeleri, küçük yer değiştirmeler teorisinin uygulanabileceği kadar küçük olan sistemlere lineer sistemler denilmektedir. Hesabı, lineer bir denklem takımının kurulmasını ve çözümünü gerektiren lineer sistemlerde, süperpozisyon prensibi geçerlidir.

Yüksek dayanımlı malzemelerin kullanılması ile narinleşen yapılarda yer değiştirmeler çok kere yeter derecede küçük değildir. Diğer taraftan, gerilmelerin orantı sınırına erişmesi yapının taşıma kapasitesinin sona erdiğini ifade etmez. Nitekim, yapı orantı sınırına karşılık gelen yükten daha fazla miktarda yük taşıyabilir. Yükler artarak, göçme yükü olarak adlandırılan bir değere ulaşınca, sistem göçer, yani işlevliğini yitirir. Göçme; yapının burkulması, göçmesi veya büyük yer değiştirme ve/veya büyük şekil değiştirmelerin (betonarme elemanlarda büyük çatlakların) oluşması şeklinde tanımlanır.

Herhangi bir sistemde dış etkilere meydana gelen iç kuvvet, yer değiştirme ve şekil değiştirmelerin çözüm olabilmesi için; denge denklemleri, iç Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları, geometrik uygunluk şartları sağlanmalıdır.

Malzemenin orantı sınırından sonraki davranışı göz önüne alınarak yapılan hesapta yani malzeme davranışının lineer olmadığı sistemlerde; iç kuvvet – yer değiştirme bağıntıları lineer değildir. Geometri değişimlerinin küçük olmadığı geometrik bakımdan lineer olmayan sistemlerde; denge denklemleri ve geometrik uygunluk şartları lineer değildir. Malzeme ve geometri değişimi bakımından lineer olmayan sistemlerde iç kuvvet – yer değiştirme denge denklemleri ve geometrik uygunluk şartları lineer değildir.

Yapı sistemlerinin lineer olmayan teoriye göre hesabı ve boyutlandırılması alanında meydana gelen gelişmeler, yapıların ve yapı elemanlarının dış etkiler altındaki gerçek davranışlarını daha yakından izleyen hesap ve boyutlandırma yöntemlerinin geliştirilmesine ve pratik uygulamalara olanak sağlamaktadır. Başlangıçta teorisyenler lineer kabule dayanarak hesap yöntemlerini geliştirmişlerdir. Sistemlerinin lineer davranıştan uzaklaştıkça lineer kabulün hesap sonuçlarına getireceği hata oranı da artmaktadır. Lineer olmayan analiz türü lineer analize göre daha zor ve uzun, aynı zamanda ekonomik olarak daha külfetlidir. Lineer olmayan sistemlerde süperpozisyon yapılamayacağından dış etkiler çeşitli noktalardaki değerlerinin arasındaki oranlar sabit kalarak artar ve analiz böylece iteratif olarak devam eder. Dolayısıyla çözüme birkaç adım neticesinde ulaşılır.

Bu bölümde yapı mühendisliğindeki analiz kapsamında lineer olmayan analiz kısaca tanıtılacaktır.

3.1 Lineer Olmayan Davranış Nedenleri

Bilindiği gibi malzemenin lineer olmayan davranışının göz önüne alındığı teoriye elasto-plastik teori, denge denklemlerinin şekil değiştirmiş durum üzerinden yazıldığı teoriye ikinci mertebe teorisi, lineerliği bozan her iki etkinin birlikte dikkate alındığı teoriye ise ikinci mertebe elasto-plastik teori denilmektedir.

İkinci mertebe teorisine göre hesapta, geometri değişimlerinin denge denklemlerine etkisi nedeniyle, artan yük parametresine daha hızlı artan yerdeğiştirmeler karşı gelmektedir. Yük parametresi artarak P_{cr} sınır değerine eşit olunca yerdeğiştirmeler sonsuza erişir ve sistem burkulur. Bu yüke elastik burkulma yükü denir.

Lineer olmayan malzemenin yapılmış sistemlerde, artan yüklerle birlikte iç kuvvetler de artarak bazı kesitlerde lineer-elastik sınırı aşmakta ve bu kesitler civarında plastik şekil değiştirmeler meydana gelmektedir. Yapı çeliği ve bazı koşullar altında betonarme gibi, kopma sırasındaki toplam şekil değiştirmelerin

lineer şekil değiştirmelere oranının büyük olduğu sünek malzemeden yapılan sistemlerde plastik şekil değiştirmelerin plastik kesit adı verilen belirli kesitlerde toplandığı, bunların dışındaki bölgelerde ise sistemin lineer- elastik davrandığı varsayılabilir.

Bu hipotezin uygulandığı bir yapı sisteminin I. mertebe teorisine göre hesabında oluşan plastik kesitler nedeniyle sistemin tümü veya bir bölümü mekanizma durumuna gelir ve taşıma gücü sona erer. Bu duruma karşı gelen yüke birinci mertebe limit yük adı verilir.

Lineerliği bozan her iki etkinin birlikte göz önüne alınması halinde ise kullanılan teori II. mertebe elasto-plastik teori adını alır. Oluşan plastik şekil değiştirmeler nedeniyle yer değiştirmeler hızla artmaktadır. Yükler artarak belirli bir sınır değerine eşit olunca, oluşan plastik kesitler sonucunda rijitliği azalan sistemin burkulma yükü dış yük parametresinin altına düşer; Yani $P-\Delta$ diyagramında artan yer değiştirmelere azalan yük parametreleri karşı gelir. Yapının stabilite yetersizliği nedeniyle göçmesine sebep olan bu yük parametresine ikinci mertebe limit yük denilmektedir.

Bazı hallerde, dış yükler ikinci mertebe limit yüke erişmeden önce, meydana gelen büyük yer değiştirmeler, büyük plastik şekil değiştirmeler ve betonarme sistemlerde büyük çatlaklar yapının göçmesine neden olabilmektedir. En genel anlamda yapı sistemlerinin analizinde lineer olmayan davranışı şu hallerde rastlanır:

- 1- Sınır Koşullarının Lineer Olmaması.
- 2- Malzeme Davranışının Lineer Olmaması (Elasto-Plastik Analiz).
- 3- Büyük Geometri Değişimi (İkinci Mertebe Analiz).
- 4- Geometri Ve Malzeme Nonlineerliklerinin Birlikte Bulunması (İkinci Mertebe Elasto-Plastik Analiz).

Bu durumlar aşağıda sırasıyla kısaca anlatılmıştır.

3.2 Sınır Koşullarının Lineer Olmaması

Bazı mühendislik problemlerinin çözümü, hesabın başlangıcında öngörülen sınır koşullarının sistem davranışına bağımlı olmak üzere, hesap sırasında değiştirilmesini gerektirmektedir. Sınır koşullarının hesap sırasında değişiyor olması; çözüme bir aşamada ulaşmayı imkansız kılar ve sonuç ardışık yaklaşımlarla elde edilir.

Temas problemlerinde olduğu gibi, hesabın başlangıcında öngörülen sınır koşullarının sistem davranışına bağımlı olup hesap sırasında değiştirilmesi gereken durum olan sınır koşullarının lineer olmamasıdır. Bu duruma örnek olarak; elastik zemine oturan bir yada iki boyutlu temellerin belirsiz bir bölümünün bazı yük durumlarında zeminden ayrılması, çevresiyle temas halinde olması öngörülen tünel kaplamalarının bölgesel olarak boşluğa doğru zeminden uzaklaşması, yatay itki alan kazıklarda bazı bölgelerin zemine değmemesi, su altına döşenen boruların zemin topografyasına bağımlı olarak gömülmesi, eğilme momenti ve/veya eksenel kuvvet ile kesme kuvveti aktaran bulonlu birleşimlerde çekme ve basınç bölgelerinin belirlenmesi, dokunma yüzeyinin genişliği yüke bağlı problemler ve benzer diğer zemin-yapı, sıvı- yapı problemleridir.

3.3 Malzeme Davranışının Lineer Olmaması (Elasto-Plastik Analiz)

Malzemenin orantı sınırından sonraki taşıma kapasitesinin göz önüne alınması yani elasto-plastik hesap yöntemlerinin kullanıldığı analiz türü malzeme non-lineeritesi olarak bilinir. Malzeme nonlineeritesinde malzemenin gerçek gerilme-şekil değiştirme eğrisi dikkate alınır. Bu tür analizde; malzemenin davranışı basite indirgenerek analiz yapılır. Bu yönde yapılan basitleştirmede genelde nonlineer bağıntı üç doğruya veya bazı çalışmalarda olduğu gibi şekil değiştirme pekleşmesi(strain hardening) gösteren iki değişik eğimli doğruya dönüştürme uygulanabilir.

Bundan başka kullanılan yaygın bir basitleştirme de lineer elastik tam plastik davranışı dönüştürmedir. Bu malzeme davranışı, bir eğimli doğru ile yatay bir

doğrudan oluşmaktadır. Bu davranış sünek metallerin davranışına oldukça yakın düşmektedir. Beton gibi gevrek ve yüksek dereceden nonlinearlik gösteren malzemelere uygun değildir. Ancak betonarmede çelik ve beton özellikleri birleşmekte olup literatürde lineer elastik tam plastik davranışın kullanıldığı durumlara sık rastlanır.

Bundan daha basit ve lineer elastik dışında kalan malzeme davranışı rijit plastik davranış olup bu davranış nonlinear sayılmaz. Ancak verilen yüklere göre yinede lineer malzeme kadar kolay çözüm vermez. Bu tarz analizde plastik mafsal oluşan kesitte pekleşmeden akma olacağı varsayımı ile ve lineer şekil değiştirmelerin ihmal edilebileceği farklı mekanizmalar araştırılarak çözüme ulaşılır. Bu yöntem limit analiz denir. Bu yöntemde belirli gerilme düzeyinde malzemenin akma yapacağına göre hesap yapılır ancak daha önceki tüm şekil değiştirmeler ihmal edilir.

Eğilme durumu gibi gerilmenin malzeme içinde noktadan noktaya sürekli olarak değiştiği durumlarda yapı elemanının her kesitinde gerilmenin değerine göre akma olduğu ve olmadığı yerleri ayırarak yapılacak bir analiz yine çok fazla hesabı gerektireceğinden yapı sistemlerinde kritik kesitler diye bilinen ve yakın bölgesine göre daha büyük moment alan kesitler saptanır. Bu kesitlerin tam plastik duruma geçince mafsalların taşıyabilecekleri moment değerleri hesaplanır. Kritik kesitlere yakın kesitlerde en çok gerilme alan noktalardan başlayarak yayılan akma da göz ardı edilir.

Bu şekilde yapılan analizde malzeme davranışı için elastisite modülü, Poisson oranı ve akma gerilmesinin bilinmesi yeterlidir. Beton gibi yüksek dereceden nonlinearlik gösteren malzemeler için moment-dönme bağıntısı olarak üç doğru parçasından oluşan bir eğri kullanılabilir.

Bu tür kompozit malzeme nonlinearliği olan çalışmalarda kritik kesitler olarak alınan kesitler dışında malzeme davranışı lineer elastik kabul edilir. Kritik kesitler dışında sistem elemanlarının şekil değiştirmelere karşı dayanımı belirleyen rijitlik matrisi çözüm boyunca sabit kalır. Yalnız kritik kesitlerde mafsallar oluştuğu rijitlik

matrisinde gerekli değişiklikler yapılır. Ancak kafes çubuklar gibi tümüyle belirli bir gerilme altında olan yapı elemanlarında elastisite modülü için sürekli değişen bir ifade kullanılabilir ki, bu da yüklemeyi adım adım yaparak gerçekleştirilebilir. Her adımda, her bir çubuk için gerilme düzeyine karşı gelen elastisite modülü değeri kullanılır.

İç kuvvet-yer değiştirme bağıntıları lineer olmayan fakat iç kuvvet ve şekil değiştirme arasında bire bir karşılık bulunan malzemeden yapılmış sistemlere lineer olmayan elastik sistemler denilir. Geometri değişimlerinin ve normal kuvvetin küçük olduğu bu tür lineer olmayan elastik sistemlerin birinci mertebe hesabı için, lineer olmayan şekil değiştirmeleri, sıcaklık değişmelerinden meydana gelen şekil değiştirmeler gibi düşünmek suretiyle, bir ardışık yaklaşık hesap yöntemi uygulanabilir. Ardışık yaklaşımın her adımında lineer olmayan şekil değiştirmelerin tahmin edildiği bu yöntem de, tahmin edilen ve bulunan şekil değiştirmelerin eşit olması çözümün elde edildiğini gösterir.

Bir diğer hipotezde; lineer olmayan şekil değiştirmelerin plastik mafsalları verilen noktalarda toplandığı ve bunların dışındaki noktalarda iç kuvvet- yer değiştirme bağıntılarının lineer- elastik olduğu kabulü ile hesap yapılır. Özellikle düktil malzemeden yapılmış sistemlere uygulanabilen bu teoriye plastik mafsalları teorisi denir.

Plastik mafsalları teorisine göre hesapta iç kuvvetlerin akma şartı denilen bir sınıra değere vardığı noktalarda plastik mafsallar meydana geldiği ve yükün artan değerleri için bu noktaların serbestçe dönebildiği kabul edilmiştir. Yükün limit yük adı verilen bir değere ulaşması halinde sistem, meydana gelen plastik mafsallar nedeniyle mekanizma durumuna geçerek kullanılmaz hale gelir. Malzemenin doğrusal davranış sergilemediği bu durum için sistemin temel denklemi

$$[K_e + K_m]\{U\} = \{F\} \quad (3.1)$$

$$[K_t]\{U\} = \{F\} \quad (3.2)$$

şeklindedir. Burada;

$\{U\}$ = Yer değiştirme vektörü

$\{F\}$ = Kuvvet vektörü

$[K_t]$ = Toplam rijitlik matrisi

$[K_e]$ = Eleman elastik rijitlik matrisi

$[K_m]$ = Plastik indirgeme matrisi olup inelastik davranış nedeniyle sistemin rijitlik değişimlerinin etkisini içerir.

Bu durumda yapının dinamik analizi en genel halde

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K_t]\{U\} = F(t) \quad (3.3)$$

şeklindedir. Yine bu denklemdaki değişkenler;

$[M]$ = Kütle matrisi

$[C]$ = Sönüm matrisi

$\{\dot{U}\}$ = Hız vektörü

$\{\ddot{U}\}$ = İvme vektörü

olarak tanımlanır.

Böylece gerek statik ve gerekse dinamik analizde malzeme değişiminin etkisi rijitlik matrisinde tanımlanmış olunca sistem bilinen forma indirgenir ve bu denklemler ardışık iterasyon, adım adım integrasyon, Newton-Raphson vb. yöntemlerin biriyle çözülür.

3.4 Büyük Geometri Değişimi (İkinci Mertebe Analiz)

Yüksek dayanımlı malzemelerin kullanılmasıyla narinleşen yapılarda artan yer değiştirmeler nedeniyle geometri değişimlerinin denge denklemlerine etkisinin önem kazandığı ve küçük yer değiştirmeler teorisinin geçerli olmadığı sistemler geometri non-lineeritesi'ne örnek sistemlerdir. Yani denge denklemleri yapının şekil değiştirmiş durumundan elde edilir. Bir boyutlu narin yapı elemanlarındaki aksenal kuvvetler ve iki boyutlu ince yapı elemanlarındaki düzlem içi kuvvetler, belirli bir değerin altında kaldıkları sürece sistemin davranışı lineerdir.

Ancak, malzemenin elastisite modülü ile yapı elemanlarının mesnetlenme şekli ve atalet momentine bağlı olarak yük belirli bir düzeyi aşınca düzlem içi kuvvetler yapı elemanının rijitliğine etki ederek analizin non-lineer olmasına neden olurlar. Bu non-lineerlik yapı elemanlarının ve sonuçta yapının rijitlik matrisinin yük düzeyine bağlı olarak değişmesinden kaynaklanır. Yapının bilinen elastik rijitlik matrisine gelen katkıya geometrik rijitlik matrisi ve elde edilen bu iki matrisin toplamına da toplam rijitlik matrisi denilir. Geometri bakımından lineer olmayan sistemlerin analizinde yani ikinci mertebe analizde yapının rijitlik matrisi her yük adımında yeniden oluşturulur.

Bu tür sistemlerin analizinde kullanılan bir diğer yöntem ise; her adımda lineer bir sistemin hesabına indirgenen ardışık yaklaşım yöntemidir. Ardışık yaklaşımın her adımında sistemdeki normal kuvvet yayılışının tahmin edilmesi esasına dayanan bu yöntemde, bulunan normal kuvvetlerin tahmin edilen değerlere yeterince eşit olması çözümün elde edildiğini ifade eder. Normal kuvvet yayılışının belirli olduğu sistemlerde yöntem kesindir; yani birinci adımda kesin sonuç elde edilir. Diğer durumlarda ise birkaç adımda kesin çözüme yakın sonuçlar elde edilir.

3.5 Geometri ve Malzeme Nonlineeritesinin Birlikte Bulunması

Malzemenin orantı sınırından sonraki taşıma kapasitesinin göz önüne alan elasto-plastik hesap ve boyutlandırma yöntemlerinden yararlanarak yapıların daha narin

olarak boyutlandırılması ve malzeme giderlerinin azaltılması mümkün olmaktadır. Buna karşılık, narinleşen yapılarda artan yerdeğiştirmeler nedeniyle geometri değişimlerinin denge denklemlerine etkisi önem kazanmakta ve çok kere bu etkinin de hesaba katılması gerekmektedir.

Bu nedenle, gerek malzemenin gerekse geometri değişimlerinin lineer olmayan etkilerini birlikte göz önüne alan hesap ve boyutlandırma yöntemlerine gereksinim artmaktadır. Bu tür hesap tarzına II. mertebe elasto-plastik analiz denilmektedir.

Lineer olmayan elastik sistemlerin ikinci mertebe hesabında plastik mafsallı teorisinin uygulanmasında; yük parametresi sıfırdan itibaren arttırılmak suretiyle uygulanır. İç kuvvetlerin artarak akma şartı denilen bir sınır değere vardığı noktalarda plastik mafsallı meydana gelir. Geometri değişimlerinin denge denklemlerine etkisinin hesapta göz önüne alınması sebebiyle süperpozisyon yapılamayacağından, plastik mafsallı meydana gelmesine sebep olan yük parametresinin hesabı ardışık yaklaşımı gerektirir. Her plastik mafsallı oluşmasından sonra, bu noktalara mafsallı koymak ve plastik mafsaldaki iç kuvvetleri dış yük olarak etkimek suretiyle elde edilen yeni sistem esas alınarak hesaba devam edilir. Yüklerin göçme yükü adı verilen bir değere ulaşması halinde sistem işletme dışı kalır, yani göçer. Göçme, sistemin geometrik özellikleri ve yükleme şekline bağlı olarak şu şekilde meydana gelir. Sistem, ya; meydana gelen plastik mafsallı nedeniyle mekanizma durumuna geçer, veya plastik mafsalların yerine mafsallı koymak suretiyle elde edilen sisteme ait Euler kritik yükü sisteme etkileyen yükün altına düşer. Sistemin kararsız denge konumunda olduğunu ifade eden bu durumda yük parametresi en büyük değerini almakta ve yük-yer değiştirme bağıntısının bundan sonraki kısmında artan yer değiştirmelere azalan yük parametreleri karşılık gelmektedir.

Lineer olmayan şekil değiştirmelerin, iç kuvvet – şekil değiştirme bağıntılarına ve sistemdeki iç kuvvet dağılımına bağlı olarak sistem üzerinde sürekli yayıldığı kabulü ile yapılan analizde sistemin; yüklere küçük artımlar verilerek hesaplanması teklif edilmiştir.

Her adımda lineer bir sistemin hesabını gerektiren bu yöntemde, her yük artımı için denge denklemleri bir önceki adımda elde edilen şekil değiştirmiş eksen üzerinde yazılmakta, iç kuvvet – şekil değiştirme bağıntıları ait oldukları iç kuvvet durumu civarında lineerleştirilmektedir.



BÖLÜM DÖRT

YAPILARIN DİNAMİK ANALİZİ

Bu bölümde yapı dinamiğinde geçen serbestlik derecesi, bağımlı ve bağımsız koordinatlar gibi temel kavramlar, fiziksel bir sistemin matematik modelinin kurulması ve bu modellemenin dış kuvvet, kütle, sönüm ve yay gibi temel kavramlarının tanıtılması verilecektir. Daha sonraki bölümlerde kullanılacak bağıntıların alt yapısı oluşturulacaktır. Yapıların ne tür dinamik etkilere maruz kaldığı ve dinamik analiz de kullanılan önemli bazı yöntemler kısaca tanıtılacaktır.

4.1 Temel Kavramlar

Bir fiziksel olayı tanımlamak için gerekli ve yeterli sayıdaki değişkenlere bağımsız veya serbest değişken bunlara bağlı olan diğer değişkenlere bağımlı değişken denir. Mevcut bilinen sınır şartları serbest değişkenlerin sayısını azaltır. Zaman dışında kalan değişkenlere sistemin genel koordinatları denir. Fiziksel bir sistemde bağımsız genel koordinatların sayısı “sistemin serbestlik derecesi” olarak bilinir.

Dinamik yükler etkisindeki yapıların analizi ve boyutlandırılması zamana bağlı değişen kuvvetlerin dikkate alınmasını gerektirir. Kuvvetler zamana bağlı olup, yapının karakteristikleri ve davranışı önemlidir. Rüzgar, deprem, darbe, patlama kuvvetleri, endüstriyel yapılarda makine ve motorların oluşturduğu titreşim kuvvetleri, fabrika kreynlerinde oluşan titreşimlerin yapıya etkileri veya uçak-uzay sanayinde kullanılan gövde ve kanat gibi elemanların maruz olduğu aero-dinamik yüklerin oluşturduğu etkiler örnek olarak verilebilir. Etkiyen kuvvetlerin sabit bir değeri yoktur. Yani yükler zamanın bir fonksiyonu şeklinde ifade edilirler. Kuvvetin zamanla değişmesi nedeni ile yapı kütlelerine etkiyen kuvvetlerde zamanla değişeceğinden yapının davranışının değişmesine neden olacaktır.

Statik çözümlemede tek bir çözüm bulunduğu halde, dinamik analiz neticesinde elde edilen çözüm zamana bağlı bir fonksiyon şeklinde olup, bir çözüm kümesi şeklindedir. Bu çözüm kümesinin veya fonksiyonun ekstrem değerleri çözüm olarak alınır. Bunlardan başka ve en önemlisi, statik çözümlemede yer değiştirmelere karşılık dinamik analizde atalet kuvvetleri oluşur. Yani, yapı dinamiği; karakteristikleri bilinen bir yapının dinamik zorlamalar altında davranışının incelenmesidir.

Mühendislik yapılarının büyük bir çoğunluğu kullanım süreleri boyunca bir veya daha fazla herhangi bir tip dinamik yüklemeyle maruz kalırlar. Yapıya etki eden kuvvetler en genel manada; periyodik ve periyodik olmayan kuvvetler veya deterministik ve keyfi (random) kuvvetler olarak dört farklı gruba sınıflandırılabilir.

Ayrıca belirtmelidir ki titreşim hareketi; en genel manada herhangi bir fiziksel sistemin veya herhangi bir yapının enerji yutma kapasitesinin olup olmamasına göre; sönümlü veya sönümsüz titreşim ve yapıya etki eden bir dış kuvvetin varlığına göre de serbest ve zorlanmış titreşim olarak sınıflandırılır.

Yapının malzemesinin gerilme-şekil değiştirme ilişkileri, dinamik yüklerin şekli veya eksenel kuvvetin varlığı, şekil değiştirmelerin büyüklüğüne göre yani elastik ötesi bölgede şekil değiştirmelerin olup olmamasına göre lineer ve lineer olmayan sistemler kavramları kullanılır.

4.2 Serbestlik Derecesi Kavramı

Herhangi bir sistemin konumu veya hareketini herhangi bir zamanda tanımlayabilmek için gerekli bağımsız koordinatların sayısı yapı dinamiği kapsamında serbestlik derecesi olarak bilinir.

Bir başka tanımlamada; etkin atalet kuvvetlerini temsil etmek için göz önüne alınması gereken bağımsız yer değiştirme bileşenlerinin sayısı dinamik serbestlik derecesi olarak adlandırılır.

Taşıyıcı sistemlerin elemanlarında kütle sürekli dağıldığından, atalet kuvvetleri ancak her noktanın ivme ve bundan hareket ederek yer değiştirmelerinin bilinmesiyle tanımlanır. Sistemin her noktasının yer değiştirmesinin hesabı ise hesap süresini uzatır ve daha kapsamlı hesaplayıcı gerektirir. Sistemin tüm yer değiştirmelerini bazı seçilmiş noktaların yer değiştirmesiyle ifade etmekle hesap hacmi ve süresi kabul edilebilir bir büyüklüğe düşürülebilir. Dolayısıyla, herhangi bir yapıya ait gerçek çözüm ile aynı yapının basitleştirilmiş bir modelinin çözümü arasındaki fark mühendislik hesaplarını etkilemez ise, basitleştirme, çözüm kolaylığı açısından, serbestlik derecesi sayısı veya hareket denklem sayısını azaltmak bakımından yapılmalıdır (Erdik ve Yüzügüllü, 1980).

Bu tür çözümlerden birinde, sistemin kütlesi söz konusu seçilen noktalarda toplanmış kabul edildiğinden, uygulanan hesap yöntemine toplanmış kütle yaklaşımı, sistemin yer değiştirmesi uygun fonksiyonların süperpozisyonu olarak kabul edilerek bu fonksiyonların koordinat fonksiyonları olarak adlandırıldığı çok serbestlik dereceli sistemlerin genelleştirilmiş koordinat yaklaşımı olarak bilinir.

4.3 Matematik Modelleme

Çoğu durumda mühendislik problemlerinin kapalı matematik çözümü yani analitik çözümü bilinen bazı basit durumlar dışında mümkün değildir. Bu nedenle karmaşık sınır koşulları, yük ve malzeme davranışının doğrusal olmadığı böylesi gerçek fiziksel sistemler bazı kabuller ve idealleştirmeler yapılarak, daha az bilgisayar kapasitesi ve çözüm için daha az bir süre gerektirecek bilinen ve matematiksel olarak uygun ve kullanışlı bir forma indirgenir. Daha öncede belirtildiği gibi en az problemin çözümü kadar önemli olan bu modelleme uygun yapılmazsa elde edilen sonuçlar amaca uygun veya yeter hassasiyette olmayabilir.

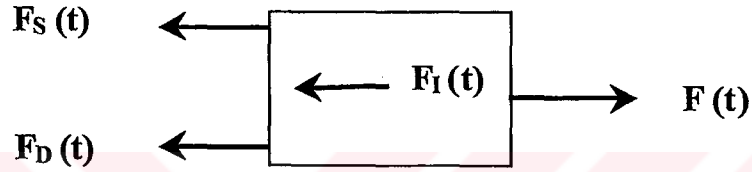
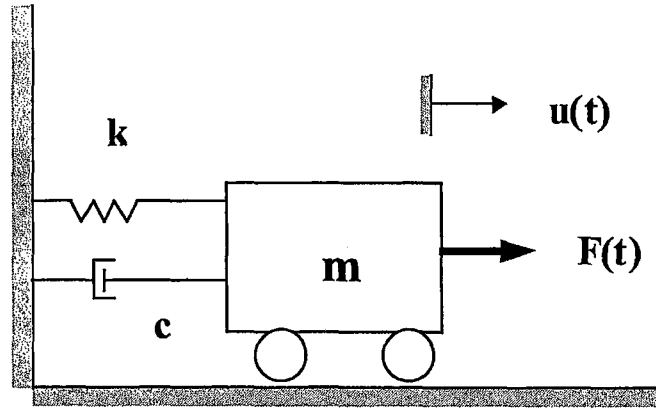
4.4 Tek Serbestlik Dereceli Sistemler

Bir sistemin hareket halinde bulunduğu konum, tek bir parametrenin verilmesiyle belirlenebiliyorsa, sistem tek serbestlik derecelidir denir. Böyle bir sistem ve serbest cisim diyagramı Şekil 4.1' de verilmiştir.

Tek katlı bir çerçeve, elastik bir kiriş, bir su deposu matematik model olarak eğer tek serbestlik dereceli olarak modellenecek olursa bu model geleneksel ve yaygın şekliyle bu formda olur. Böylesi tek serbestlik dereceli ve en genel haliyle verilmiş olan bu model çeşitli elemanlara sahiptir. Yani bu matematik model fiziksel sistemi karşılayacak şekilde; kütle, sönüm, yay ve kütleyle etki eden dış kuvvet ile karakterize edilir.

Kütle elemanı, m , yapının iç karakteristiklerini tanımlar. Sistemdeki kinetik enerjinin toplandığı bir ortam olup sistem içindeki dağılımına göre toplu/ayrık veya sürekli olarak modellendirilir. Yay elemana karşılık gelen k , sistemin veya yapının potansiyel enerji kapasitesini ve elastik olarak geri kazanılan kuvvete karşılık gelir. Yaylar, kendi kuvvet-şekil değiştirme özelliklerine göre sistemin; dinamik sistem, rijit veya sünek sistem, lineer yada lineer olmayan sistem olmasını belirler. Fiziksel sistemde c parametresi yapının enerji sönümleme ve sürtünme karakteristiklerine karşılık gelir.

Sönüm kuvveti genel olarak harekete zıt ve hareketin hızı ile orantılı bir kuvvet olarak kabul edilir. Titreşimin genliğini azaltıcı yönde etki yaratırlar. Bu tip sönüm genel olarak viskoz sönüm olarak bilinir. Sistem eğer zorlanmış bir titreşim etkisinde ise bu dış kuvvet zamana bağlı olarak $F(t)$ ile tanımlanır.



Şekil 4.1 Tek serbestlik dereceli bir sistem ve serbest cisim diyagramı

Serbest cisim diyagramı üzerinde gösterilen kuvvetlerin dengesinden;

$$\sum F = 0 \Rightarrow F_s(t) + F_D(t) + F_I(t) - F(t) = 0 \quad (4.1)$$

$$F_I(t) + F_D(t) + F_s(t) = F(t) \quad (4.2)$$

olarak yazılır. Bu denklemde $F_I(t)$ kütle ve ivme ile orantılı eylemsizlik kuvvetini, $F_D(t)$ hız ve sönüm katsayısı ile orantılı sönüm kuvvetini, $F_s(t)$ yer değiştirme ve yay katsayısı ile orantılı elastik yay kuvvetini, $F(t)$ ise dış zorlamayı göstermektedir. Denklem (4.2) deki kuvvetlerin değerleri yerlerine yazılır ise

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = F(t) \quad (4.3)$$

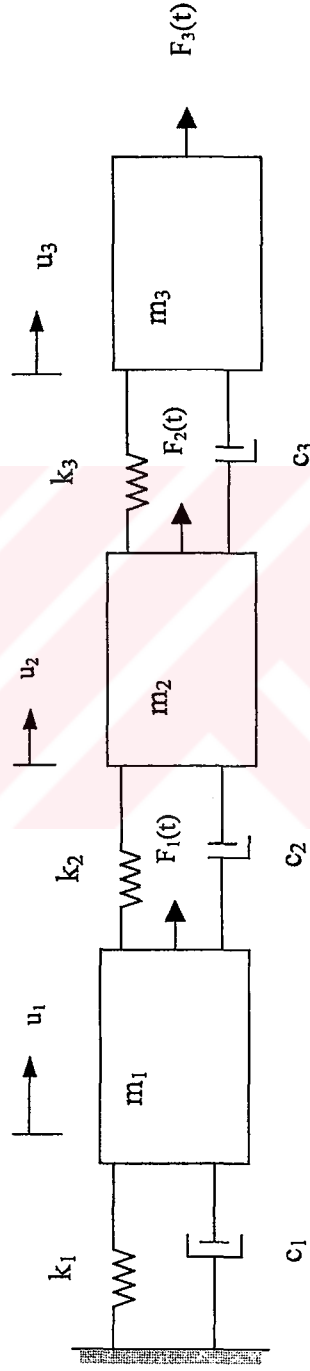
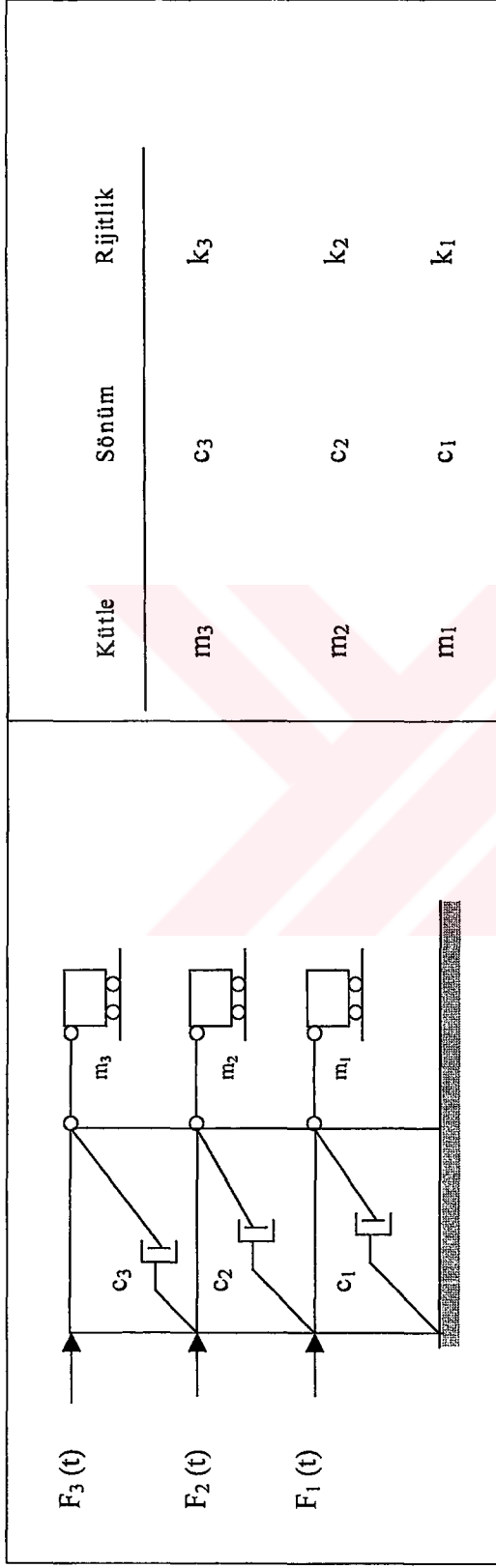
ifadesi elde edilir. Bu denklem daha genel olarak bilinen

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t) \quad (4.4)$$

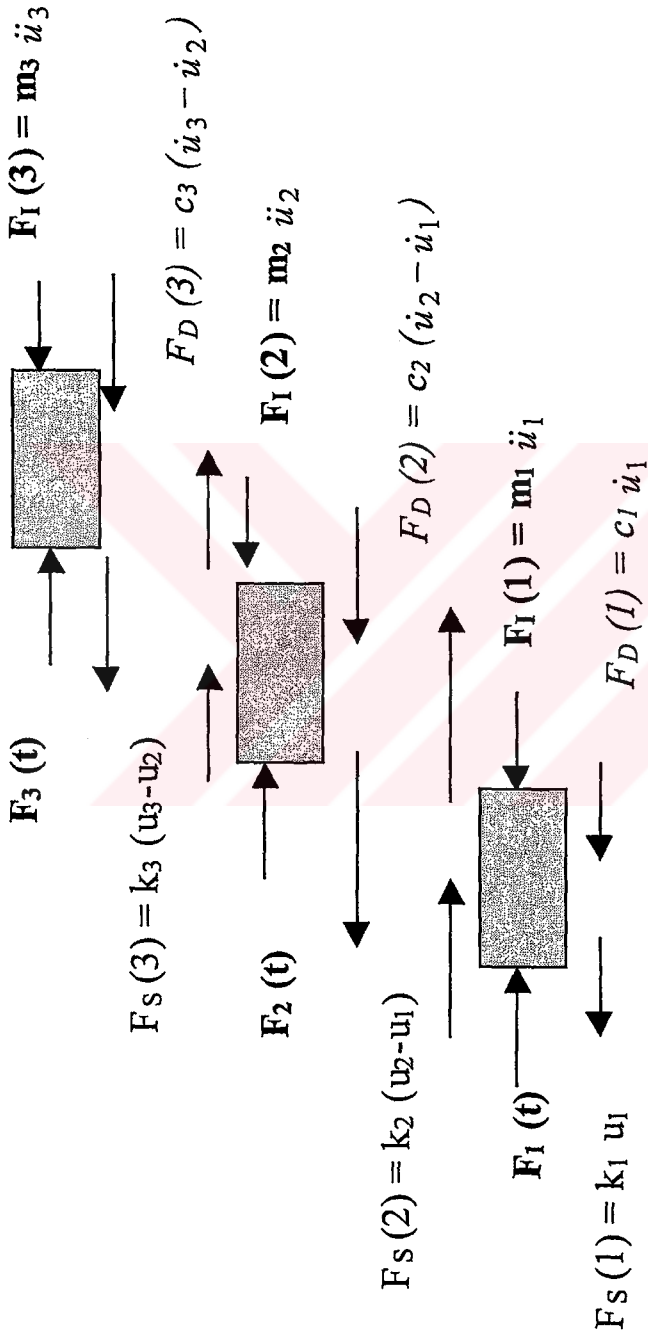
formda yazılır. Denklem en genel durum için verilmiş olup sistemin sönümlü ($c \neq 0$) yada sönümsüz ($c=0$) titreşim, serbest, $F(t) = 0$ yada zorlanmış titreşim $F(t) \neq 0$ gibi farklı kombinasyonları vardır.

4.5 Çok Serbestlik Dereceli Sistemler

Tek serbestlik dereceli bir sistemde kütlenin tek bir noktada toplandığı kabulü ile matematik modelleme yapılabilmektedir. Çoğu mühendislik sisteminde bu yaklaşım mühendislik analizi açısından yeter hassasiyette sayısal sonuçlar verir. Ancak bazı durumlarda, örneğin bir kesme çerçevesinde veya deprem etkisindeki bir yapıda her kata gelen kuvvetlerin, her katın rölatif yer değiştirmeleri veya titreşim frekanslarının bulunması gerekebilir. Bu gibi durumlarda sistem uygun bir şekilde ve yeter sayıda ayrı sistemlere ayrılarak analiz yoluna gidilir. Böylece, sistemin hareketi sadece bir tek koordinat doğrultusu ile ifade edilemez. Sonuç olarak sistem; kütle, sönüm, rijitlik terimleri açısından yer değiştirmeler sayısı dikkate alınarak matris formda yazılır ve çok serbestlik dereceli sistem elde edilir. Bu amaçla Şekil 4.2’de görülen çerçeveyi dikkate alınsın. Sistem üç serbestlik dereceli bir sönümlü sistem olup etkiyen kuvvetlerin gösterildiği ayrı sistem diyagramı Şekil 4.3’de verilmiştir.



Şekil 4.2 Çok serbestlik dereceli örnek bir sistem ve kütle-yay- sönüm elemanı olarak matematik modeli



Şekil 4.3 Serbest cisim diyagramında kuvvetlerin gösterimi

Her bir kütle için denge denkleminde

$$m_1 \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 = F_1(t)$$

$$m_2 \ddot{u}_2 - c_2 \dot{u}_1 + (c_2 + c_3) \dot{u}_2 - c_3 \dot{u}_3 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3) u_2 - k_3 u_3 = F_2(t)$$

$$m_3 \ddot{u}_3 - c_3 \dot{u}_2 + c_3 \dot{u}_3 - k_3 u_2 + k_3 u_3 = F_3(t)$$

elde edilir. Bu denklemler kapalı matris formda

$$[M_{ij}] \{\ddot{U}_j\} + [C_{ij}] \{\dot{U}_j\} + [K_{ij}] \{U_j\} = \{F(t)_i\} \quad (4.5)$$

olarak yazılır. Burada;

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \text{ şeklinde tanımlı kütle matrisini}$$

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \text{ olarak sönüm matrisini}$$

ve

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \text{ sistemin rijitlik matrisini}$$

göstermektedir. Ayrıca yer değiştirme, hız, ivme ve kuvvet vektörleri sırasıyla

$$\langle U_{ij} \rangle^T = \langle U_1 \ U_2 \ U_3 \rangle, \quad \langle \dot{U}_{ij} \rangle^T = \langle \dot{U}_1 \ \dot{U}_2 \ \dot{U}_3 \rangle, \quad \langle \ddot{U}_{ij} \rangle^T = \langle \ddot{U}_1 \ \ddot{U}_2 \ \ddot{U}_3 \rangle \text{ ve}$$

$$\langle F(t)_i \rangle^T = \langle F(t)_1 \quad F(t)_2 \quad F(t)_3 \rangle$$

şeklinde verilir.

4.6 Lineer Olmayan Dinamik Analiz

Herhangi bir sistemde, malzemenin elastik yük-şekil değiştirme eğrisi tek değerli ve daha önce oluşan hareketten etkilenmiyorsa esnek davranış, tersi duruma ise elastik olmayan davranış denilir. Bununla birlikte yapının esnek olması aynı zamanda yapının doğrusal davranmasını gerektirmez. Esneklik sınırları üzerinde şekil değişimine uğrayan bir çok yapı elemanı doğrusal olmayan davranış gösterebilir ve iç sürtünmeler, plastik kaymalar nedeni ile sahip olduğu mekanik enerjinin bir kısmını kaybeder. Bu olaya histeresis, bu gibi elemanlardan oluşan esnek olmayan sistemlere ise histeretik sistemler denir. Betonarme ve çelik yapı elemanlarının çoğunda şekil değiştirmeler belirli bir değeri aşınca doğrusal olmayan histeretik davranış oluşur.

Dinamik sistemlerin lineer analizinde; yay eleman ile kazanılan yük, yer değiştirme ile, viskoz sönümleme mekanizması vasıtasıyla sönümlenen enerjinin, hız ile orantılı olduğu kabul edilmiş idi. Bu modelde kütle zaman ile değişmez özelliktedir. Böylece sistemin hareket denklemi ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklem olur.

Bununla birlikte; yapının dinamik karakteristiklerinin lineer durumda olduğu gibi hemen ifade edilmesi mümkün olmayan bazı fiziksel durumlarda vardır. Böyle sistemlerin analizi; yay kuvvetinin yer değiştirme veya sönüm kuvvetinin hız ile orantılı olarak değişmediği bir model ile tanımlanır. Sonuç olarak hareket denklemi lineer olmayan bir denklem olur ve çözümü biraz daha karmaşık olup bazı sayısal işlemler ve yöntemler ile yapılır. Bu yöntemler arasında en fazla bilinen adım adım integrasyon veya iterasyon yöntemleridir. Bu yöntemler içinde bilinen ve en fazla kullanılanlar; matris iterasyonuna dayalı Stodola-Vianello, transfer matrisi olarak da bilinen Holzer, Rayleigh, Newmark- β , Wilson- θ , Adams-Stormer yöntemi, Hilber- α

yöntemi, merkezi farklar, sonlu elemanlar, Houbolt, sayısal integrasyona dayalı; trapez kuralı, sabit ivme ve ortalama ivme yöntemleri verilebilir. Bu yöntemler ile ilgili detaylı bilgiler ilgili literatürde bulunabilir (Clough and Penzien, 1975; Chopra,1995; Bathe,1992; Paz, 1998; Zienkiewicz, 1992). Bu yöntemlerin pek çoğunda sistem davranışını etkilemeyecek bazı kabuller yapılarak çözüme ulaşılır.

Örneğin adım adım integrasyon yöntemlerinde; ivmenin lineer olarak değiştiği ve sönüm ile rijitlik özelliklerinin zaman adımları boyunca sabit kaldığı kabul edilir. Genel manada bu kabuller tam olarak doğru olmamakla beraber, zaman adımları küçük seçilince oluşan hatalar önemsiz mertebelerde kalmaktadır.

Diğer sayısal integrasyon işlemlerinde olduğu gibi adım adım yöntemlerin doğruluğu zaman artımı Δt ' nin uzunluğuna bağlıdır. Bu zaman aralığının seçimini şu faktörler etkiler: tatbik edilen dış yük, doğrusal olmayan sönüm ve rijitlik özelliklerinin (Şekil 4.4, Şekil 4.5 ve Şekil 4.6) karmaşıklık derecesi ve yapının titreşim periyodu. İlgili şekiller Clough ve Penzien'in (Clough ve Penzien, 1975) yapı dinamiği kitabından alınmıştır. Detaylı bilgi bahsedilen bu referanstan bulunabilir. Eğer elasto-plastik bir yayın akmasında olduğu gibi önemli bir ani değişim bölgesi yoksa genel olarak malzeme özelliklerinin değişimi kritik bir faktör olmaz. Lineer olmayan analizde sistemin rijitliği ve/veya sönüm oranı sabit olmaz. Bu değerler (Clough ve Penzien, 1975);

$$c(t) = \left(\frac{dF_D}{d\dot{u}} \right)_t, \quad k(t) = \left(\frac{dF_S}{du} \right)_t \quad (4.6)$$

şeklinde sönüm kuvveti-hız ve yay kuvveti-yer değiştirme eğrinin eğiminden bulunur. Yukarıda verilen (4.4) denklemi t zamanı için artımı için

$$m \ddot{u}(t) + c(t) \dot{u}(t) + k(t)u(t) = F(t) \quad (4.7)$$

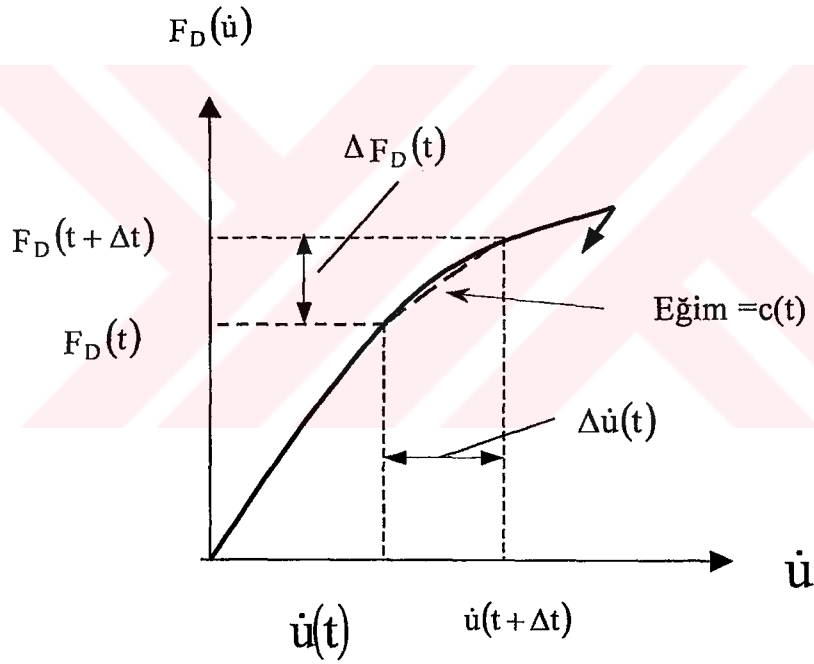
ve $t+1$ sonraki zaman için hareket denklemi

$$m \ddot{u}(t+1) + c(t) \dot{u}(t+1) + k(t)u(t+1) = F(t+1) \quad (4.8)$$

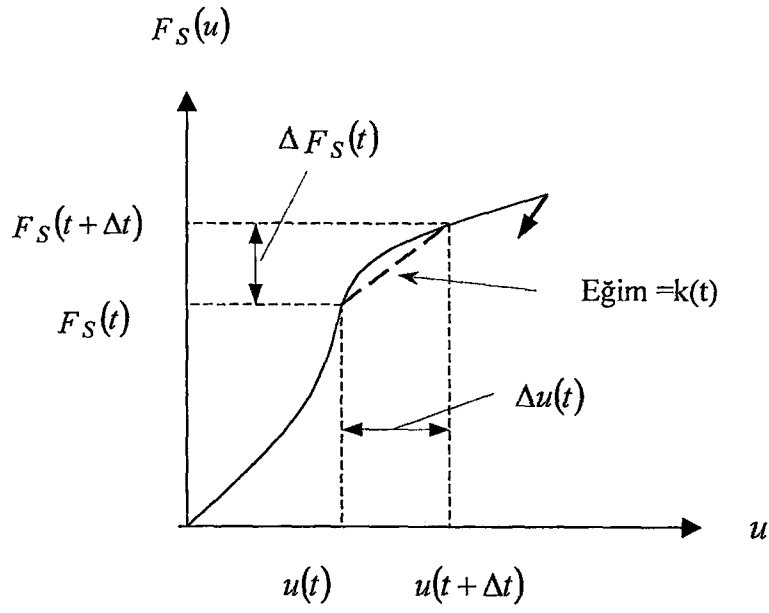
olarak elde edilir. Bu denklemlerden (4.8) denklemi (4.7) den çıkartılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$m \Delta \ddot{u}(t) + c(t) \Delta \dot{u}(t) + k(t) \Delta u(t) = \Delta F(t) \quad (4.9)$$

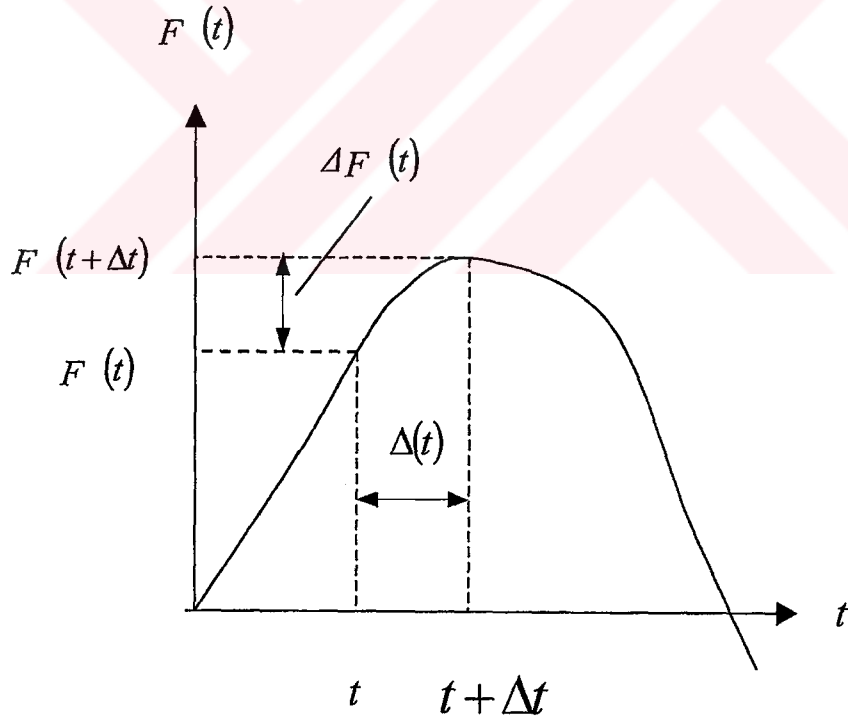
Daha öncede belirtildiği gibi bu denklemin çözümü için birkaç bilinen yöntem olup bunlar arasında lineer ivme ve ortalama ivme yöntemleri en yaygın olanlarıdır.



Şekil 4.4 Tek serbestlik dereceli bir sisteme ait lineer olmayan sönüm



Şekil 4.5 Tek serbestlik dereceli bir sisteme ait lineer olmayan rijitlik

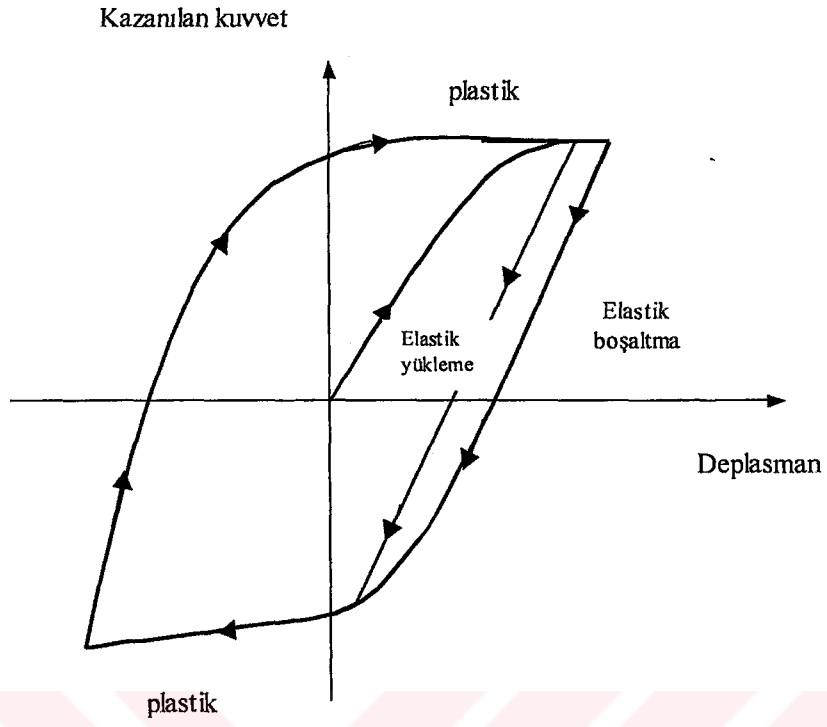


Şekil 4.6 Tek serbestlik dereceli bir sisteme ait tatbik edilen yük

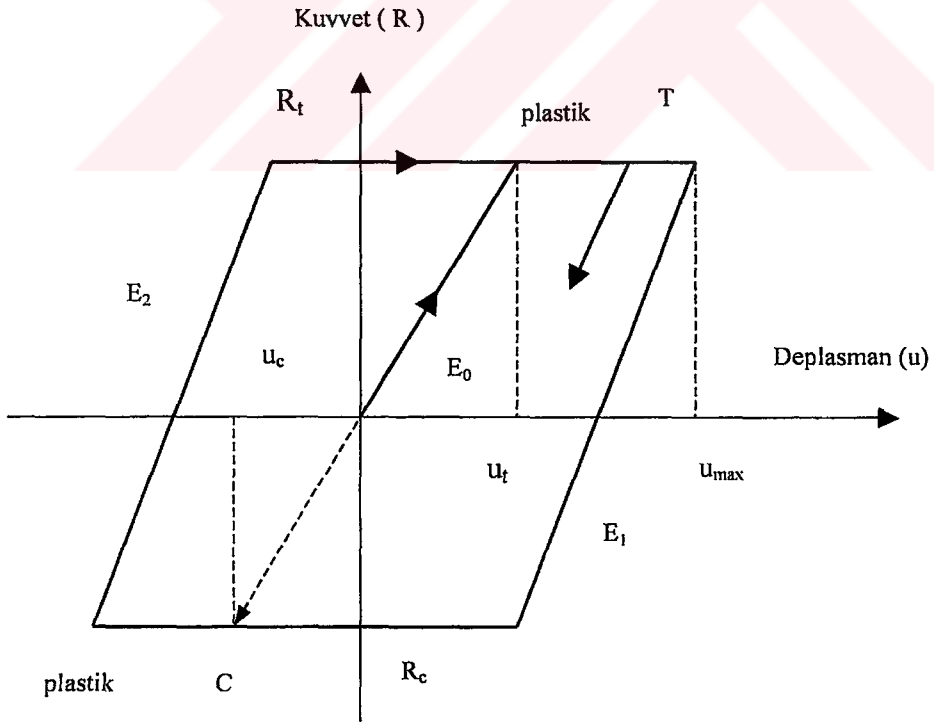
Denklem (4.8) ve (4.9) da verilen k katsayısı kuvvet-yer değiştirme fonksiyonunun tanjant eğimi olarak dikkate alınan ve birim yer değiştirme oluşturan kuvvetin göz önüne alınan noktadaki değeridir.

Hareketin lineer olmayan denkleminin mümkün bir zmi için pek çok yöntem vardır. Bunlar arasında en etkili olan yöntem adım adım integrasyondur. Bu yöntemde, davranış Δt gibi bir zaman artımıyla ve genellikle eşit aralıklı olarak elde edilir. Her bir aralık başında dinamik denge şartı kurulur. Sonra Δt zaman artımı için mukabele yaklaşık olarak elde edilir. Ancak bu işlem süresince k ve c değerlerinin Δt aralığı süresince sabit kaldığı kabul edilir. Bu katsayıların lineer değişmemesi nedeniyle her bir zaman artımının başında yeniden oluşturularak işleme devam edilir. Böylece mukabele, her bir zaman aralığı sonunda hesaplanan yer değiştirme ve hız değerlerinin bir sonraki adım için başlangıç koşulu olarak alınması ile elde edilir. Rijitlik katsayısı ve sönüm katsayısı değerleri ilk adımda hesaplanır ve bir sonraki zaman artımına kadar sabit kaldığı kabul edilir. Böylece lineer olmayan bir sistem ardışık lineer sistemlerin davranışına indirgenir.

Herhangi bir yapı sistemde plastik akmaya yani plastik bölgede şekil değiştirmeye müsaade edilirse tekrar kazanılan kuvvet şekil 4.7 de gösterildiği gibi olur (Paz, 1998). Bu eğride lineer elastik davranışın olduğu bir bölge ve daha büyük şekil değiştirmeler için plastik akma bölgesi oluşur. Yapı yüklenmediği zaman, ilave ters yüklemenin oluşturduğu basınç, plastik akma oluşuncaya kadar davranış tekrar elastik olur. Bu duruma karşı gelen kuvvet –yer değiştirme eğrisi şekil 4.8’de (Paz, 1998) verilmiştir. Bu şekilde R_t ve R_c çekme ve basındaki kuvveti, u_t ve u_c ise bunlara karşılık gelen yer değiştirmeleri gösterir (Paz, 1998).



Şekil 4.7 Gerçek plastik davranış



Şekil 4.8 Elasto-Plastik yükleme boşaltma diyagramı modeli

Malzeme ve/veya geometrik bakımdan lineer olmayan bir sistemin davranışı eşdeğer bir doğrusal yani davranışı lineer olan sistemden şu bakımlardan farklıdır. Doğrusal olmayan bir sistem doğrusal sisteme göre daha yumuşaktır ve bu nedenle görünür frekansı daha düşüktür. Yine doğrusal olmayan sistemde histeresis varsa sistemin titreşim enerjisinin bir kısmını bu histeresis nedeniyle kaybeder.

Yukarıda anlatılan nedenlerle doğrusal davranış göstermeyen sistemler doğrusal davranışa sahip sistemlere uygulanan mod süperpozisyonu ile çözülemezler. Doğrusal olmayan tek yada çok serbestlik dereceli sistemlerin davranışını belirlemede en kesin ve geçerli yol bilindiği üzere hareket denkleminin zaman tanım alanında sayısal integrasyonudur.

Bu çalışmada lineer veya lineer olmayan davranışa sahip bu sistemlerin analizinde harmonik diferansiyel quadrature yöntemi kullanılacaktır. Mevcut fiziksel sistemin türevsel formda elde edilmiş hareket denklemi başlangıç koşulları ile birlikte dikkate alınarak quadrature yöntemi ile çözülecektir. Yöntem için gereken türev ağırlık katsayılarının hesaplanmasında test fonksiyonu olarak harmonik fonksiyonlar kullanıldığından yöntem Harmonik Diferansiyel Quadrature (HDQ) olarak bilinmektedir. Bundan sonraki bölümde diferansiyel ve harmonik diferansiyel quadrature yöntemleri sunulacaktır. Yöntemin probleme uygulanması ile ilgili bağıntılar çıkartılacaktır. Daha sonra uygulama bölümünde sırasıyla tek serbestlik dereceli ve çok serbestlik dereceli sistemlere ait sayısal örnekler sunulacaktır.

BÖLÜM BEŞ

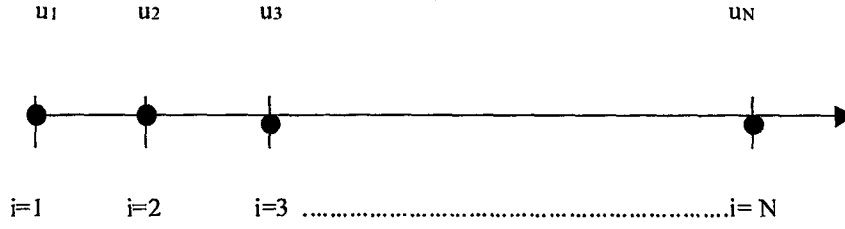
DİFERANSİYEL QUADRATURE YÖNTEMİ

Mühendislik sistemlerinin analizinde analitik çözüme ulaşmak çoğu durumda farklı malzeme davranışı ve karmaşık sınır şartları gibi nedenlerle mümkün olmaz. Bu amaçla yeter yaklaşıklıkta çözümler elde etmek için günümüze kadar pek çok sayısal analiz yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin her birinin; gerektirdikleri bilgisayar kapasiteleri, zaman ve hassasiyet açısından biri birine göre avantajları ve dezavantajları mevcuttur.

Daha hassas sonuçların daha az sayıda düğüm noktası kullanılarak elde edilebilmesi ve böylelikle daha az bilgisayar kullanımı ihtiyacı, sonuçların daha kısa sürede elde edilebilmesi yani daha ekonomik çözümler elde edilebilme imkanının araştırılması çalışmaları yeni yöntemlerin geliştirilmesine yol açmıştır. Bu yöntemler içinde, Richard Bellman tarafından geliştirilen ve ilk defa “Differential Quadrature” terimi ile tanıtılan bu yöntem herhangi bir sistemin diferansiyel formda elde edilmiş yönetici denklemlerini mevcut sınır/başlangıç koşullarını da denklemlere dahil ederek çözümünü önerir. İlk çalışmasında Bellman (Bellman, 1971) önerdiği bu yöntemle dair uygulamaları ikinci çalışmasında vermiştir (Bellman ve diğ.,1972).

Diferansiyel quadrature yöntemi; bir fonksiyonun verilen bir ayrık noktadaki bir uzay değişkenine göre kısmi türevi, o değişken bölgesinin bütün ayrık noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlıklı bir lineer toplamı ile ifade edilir, şeklinde tanımlanan düşünceye dayanır. Yeter yaklaşıklıkta sonuçlar elde etmek için daha az sayıda düğüm kullanan diferansiyel quadrature yöntemi; fizik ve mühendislikte karşılaşılan başlangıç değer ve sınır değer problemleri için farklı bir yaklaşım ortaya koymuştur. Bu amaçla tek boyutlu (Şekil 5.1) bir $u(x)$ fonksiyonun birinci türevini

$x_i (i=1,2,...,N)$ noktalarında N ayrık nokta için göz önüne alırsak i .nci ayrık nokta için birinci türev



Şekil 5.1 Bir boyutlu sistemler için düğüm noktaları

$$u_x(x_i) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} u(x_j); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.1)$$

olacaktır. Burada x_j değişken bölgesindeki ayrık noktaları, $u(x_j)$ bu noktalardaki fonksiyon değerlerini, ve A_{ij} birinci dereceden türev için bu değerleri fonksiyon değerlerine bağlayan ağırlık katsayılarını ifade eder. Ağırlık katsayılarının hesabı, karşılık gelen koordinat yönlerinde fonksiyonel yaklaşımlar ile gerçekleştirilir. Test fonksiyonu yada yaklaşım fonksiyonu olarak bilinen bu fonksiyonların seçiminde süreklilik şartına dikkat edilmelidir. Benzer zorunluluk sonlu elamanlar yöntemindeki enterpolasyon fonksiyonlarının seçiminde de vardır. Ancak diferansiyel quadrature yönteminde, seçilen fonksiyonlarının Ritz yönteminde olduğu gibi sınır şartını sağlaması zorunluluğu yoktur. Yaklaşım fonksiyonları, alan değişkenlerinin olası kararlı yani üniform durumlarını tanımlayabilmeli ve diferansiyel denklemdeki yada sınır şartlarındaki mevcut en yüksek dereceli diferansiyele kadar türevinin alınabilmesi gerekir. Yani süreklilik şartı için, bir koordinat yönündeki düğüm sayısı, diferansiyel denklemdeki karşılık gelen bağımsız değişkene göre en yüksek dereceli türevin bir fazlasına eşit olmalıdır. Belmann ve arkadaşları ağırlık katsayılarının hesabı için iki farklı yöntem önermişlerdir. Bunlardan birincisinde (5.1) denklemi tam olarak alındığında, test fonksiyonu olarak $(N-1)$ veya daha küçük dereceden seçilen polinom fonksiyonu için;

$$u_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.2)$$

verilen denklem (5.1)'de yerine yazılırsa aşağıda belirtildiği formda bir lineer denklem takımı verir

$$(k-1)x_i^{k-2} = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j^{k-1} \quad (5.3)$$

$i = 1, 2, \dots, N$ ve $k = 1, 2, \dots, N$.

Ancak bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı Vandermonde formunda olduğundan tekil bir çözüme sahiptir. Denklem ağırlık katsayıları için analitik olarak Hamming'in önerdiği yöntemle (Hamming, 1973) yada Vandermonde denklemleri için Bjorck ve Pareyra'nın önerdiği gibi bilinen bazı özel algoritmalar ile sayısal olarak çözülebilir (Bjorck ve Pareyra, 1970). Bu tekilliği gidermek için, ağırlık katsayıları, değişik düğüm nokta sayıları ile (5.3) denklemi eşit düğüm değerleri için hesaplanmalıdır. Denklem (5.3) aşağıdaki matris formda da verilebilir.

$$\{ \partial u(x) / \partial x \}_i = [A_{ij}] \{ u(x) \}_j \quad (5.4)$$

veya

$$\begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdot & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdot & A_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdot & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

Benzer işlemler iki ve daha fazla derecen türev ifadeleri için de yazılabilir. Böylece, her bir dereceden türev için ağırlık ifadeleri birinci dereceden türev ifadesinden farklı olmaktadır. İkinci dereceden türev için yöntem

$$u_{xx}(x_i) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N B_{ij} u(x_j); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.6)$$

olarak verilir. Burada B_{ij} ikinci dereceden türev için ağırlık katsayısıdır. Denklem (5.6) birinci dereceden ağırlık katsayıları cinsinden

$$u_{xx}(x_i) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{jk} u(x_k); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.7)$$

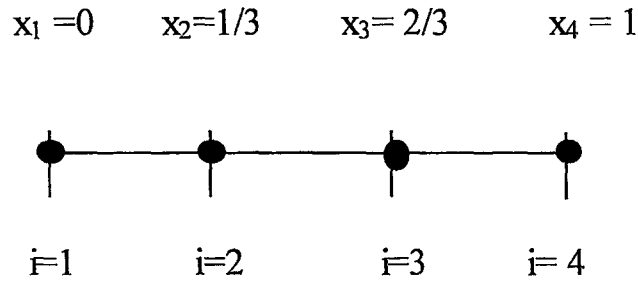
olarak yazılır. Bu denklemde matris formda

$$\begin{Bmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x''_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdot & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & \cdot & B_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{N1} & B_{N2} & \cdot & B_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

olur. Denklem (5.2) ile verilen polinom fonksiyon uygulanırsa ikinci dereceden türev ifadesi

$$(k-1)(k-2)x_i^{k-3} = \sum_{j=1}^N B_{ij} x_j^{k-1} \quad (5.9)$$

olmaktadır. Bu denklem yukarıda verilen (5.3) denklemine benzer yaklaşımla çözülür. Örnek olarak Şekil 5.2’de görüldüğü şekilde eşit aralıklı dört nokta ($N=4$) seçilsin.



Şekil 5.2 Bir boyutlu sistemler için düğüm noktaları

Bu durumda (5.9) denklemi açık formda

$$B_{11}x_1^0 + B_{12}x_2^0 + B_{13}x_3^0 + B_{14}x_4^0 = 0 \cdot (-1) \cdot x_1^{-2}$$

$$B_{21}x_1^1 + B_{22}x_2^1 + B_{23}x_3^1 + B_{24}x_4^1 = 1 \cdot 0 \cdot x_2^{-1}$$

$$B_{31}x_1^2 + B_{32}x_2^2 + B_{33}x_3^2 + B_{34}x_4^2 = 2 \cdot 1 \cdot x_3^0$$

$$B_{41}x_1^3 + B_{42}x_2^3 + B_{43}x_3^3 + B_{44}x_4^3 = 3 \cdot 2 \cdot x_4^1$$

şeklinde yazılır. Bu denklem açık matris notasyonu ile

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6x_4 \end{Bmatrix}$$

şeklinde olur. Şekil 5.2'de seçilen 4 nokta için x değerleri yerine yazılırsa ağırlık katsayı matrisi

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} 18 & -45 & 36 & -9 \\ 9 & -18 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & -18 & 9 \\ -9 & 36 & -45 & 18 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Daha hassas sonuç elde edilmek istenirse daha büyük sayıda aralığa bölünerek hesap yapılır. Ancak bir boyutlu problemlerde; örneğin kirişlerin eğilme, burkulma ve titreşim hesabı gibi, $N = 7$ için, plak ve kabukların stabilite ve titreşim hesabı gibi iki boyutlu problemlerde ise $N = 9$ için yeter yaklaşıklıkta sonuçlar elde edilmiştir (Bert ve diğ., 1992; Striz ve diğ., 1992; Liew, 1998; Civalet, 2001). Eğer spesifik yani özel olarak hesap yapılmak istenen bir nokta var ise bu noktaya göre düzenlenmiş eşit olmayan aralıklı düğüm nokta seçimi de benzer olarak yapılır.

Bununla birlikte N düğüm sayısı 22 den büyük olunca elde edilen yukarıdaki denklemde x in kuvvetlerinden oluşan matris bir Vandermonde matrisi olup sistemin çözümü tek olur ve matrisin tersini almak bir hayli güçleşir. Denklem ağırlık katsayıları için analitik olarak Hamming'in önerdiği yöntemle (Hamming, 1972) yada Vandermonde denklemleri için Björck ve Pereyra'nın önerdiği gibi bilinen bazı özel algoritmalar ile sayısal olarak çözülebilir (Björck ve Pereyra, 1970). İşte bu tekilliği gidermek ve ağırlık katsayılarının hesabında daha kullanışlı bir formülasyon elde edebilmek için bazı araştırmacılar (Quan ve Chang, 1989; Shu ve Richards, 1992) ağırlık katsayıları için analitik ifadeler elde etmişlerdir.

İkinci, üçüncü ve dördüncü dereceden ağırlık katsayıları B_{ij} , C_{ij} , D_{ij} , aşağıdaki formda hesaplanır

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} A_{kj} \quad (5.10)$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} B_{kj} \quad (5.11)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} C_{kj} \quad (5.12)$$

Bellman ve arkadaşları tarafından ağırlık katsayılarının hesaplanması için önerilen ikinci yöntemde birinciye benzer olup farklı bir test fonksiyonu seçilir. Denklem (5.1)'i sağlayacak şekilde x_k ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri olarak

$$u_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_k)L_N^{(1)}(x_k)}; \quad k=1,2,\dots,N \quad (5.13)$$

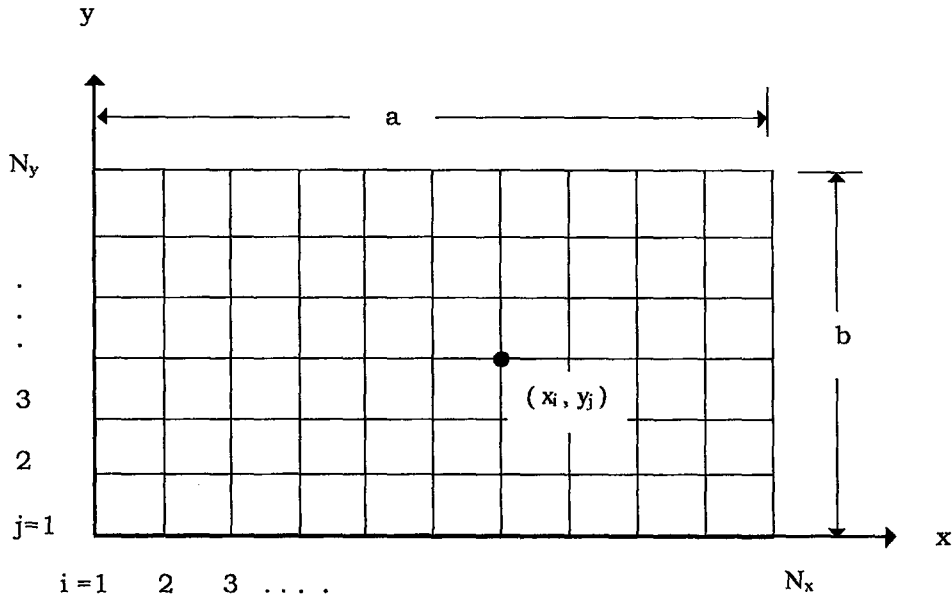
fonksiyonu seçilir. Burada N düğüm nokta sayısı, $L_N(x)$ N . Dereceden legendre polinomu, $L_N^{(1)}(x)$ ise bu polinomun birinci türevidir. Denklemdaki x_k ötelenmiş legendre polinomunun kökleri olarak seçilip (5.13) ile verilen polinom fonksiyon (5.1) denkleminde yazılırsa ağırlık katsayıları

$$A_{ij} = \frac{L'_N(x_i)}{(x_i - x_j)L'_N(x_j)} \quad i \neq j \text{ için} \quad (5.14a)$$

$$A_{ii} = \frac{1 - 2x_i}{2x_i(x_i - 1)} \quad i=j \text{ için} \quad (5.14b)$$

$i, j= 1,2,\dots,N$

Bu ikinci yaklaşımda, (5.14a) ve (5.14b) ile tanımlanan ağırlık katsayıları birincide olduğu gibi herhangi bir tekillik problemi oluşmadan ve lineer denklem takımı çözmeden elde edilir. Bir boyutlu problemlere benzer olarak iki boyutlu problemler içinde diferansiyel quadrature yöntemi geliştirilebilir. Şekil 5.3'de görülen dikdörtgen düzlem için, N_x x -doğrultusundaki düğüm ve N_y y -doğrultusundaki düğüm sayısı olmak üzere türev ifadeleri yazılabilir.



Şekil 5.3 İki boyutlu bölge için düğüm noktaları

Bu amaçla $u(x,y)$ fonksiyonunun r -inci mertebeden x 'e göre, s -inci mertebeden y 'e göre ve $(r+s)$ -nci- mertebeden x ve y değişkenlerine göre (x_i, y_j) ayırık noktaları için türev ifadeleri;

$$\left. \frac{\partial^r u}{\partial x^r} \right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)} u(x_k, y_j); \quad r=1,2,\dots,N_x-1 \quad (5.15)$$

$$\left. \frac{\partial^s u}{\partial y^s} \right|_{y=y_j} = \sum_{k=1}^{N_x} B_{jk}^{(s)} u(x_i, y_k); \quad s=1,2,\dots,N_y-1 \quad (5.16)$$

$$\left. \frac{\partial^{(r+s)} u}{\partial x^r \partial y^s} \right|_{x_i y_j} = \frac{\partial^r}{\partial x^r} \left(\frac{\partial^s u}{\partial y^s} \right)_{x_i y_j} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)} \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm}^{(s)} u(x_k, y_m) \quad (5.17)$$

$i=1,2,\dots,N_x$, ve $j=1,2,\dots,N_y$

olarak verilir.

Bir başka yaklaşımda Bert (Bert ve diğ, 1996) iki boyutlu problemler için x ve y yönünde fonksiyonlar seçerek çözümün bir çarpım polinom şeklinde yazılabileceğini önermiştir. Böylece

$$u(x, y) = F(x) \cdot G(y) \quad (5.18)$$

alınarak

$$F(x) = x^{\alpha-1} ; \quad \alpha = 1, 2, \dots, N_x \quad (5.19a)$$

$$G(y) = y^{\beta-1} ; \quad \beta = 1, 2, \dots, N_y \quad (5.19b)$$

şeklinde kuvvet polinomları için sırasıyla x ve y yönündeki türevler

$$\sum_{k=1}^{N_x} (x_k^{\alpha-1}) A_{ik}^{(r)} = \frac{\partial^r}{\partial x^r} (x^{\alpha-1}) ; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad \text{ve} \quad \alpha = 1, 2, \dots, N_x \quad (5.20)$$

$$\sum_{l=1}^{N_y} (y_l^{\beta-1}) B_{jl}^{(s)} = \frac{\partial^s}{\partial y^s} (y^{\beta-1}) ; \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad \text{ve} \quad \beta = 1, 2, \dots, N_y \quad (5.21)$$

olur. $A_{ij}^{(r)}$ ve $B_{ij}^{(s)}$ $u(x, y)$ fonksiyonunun sırasıyla x 'e ve y 'ye göre r inci ve s inci mertebeden x_i ve y_j ayrık noktaları için yazılan türev ağırlık katsayılarıdır. Bu katsayılar ilk olarak Shu ve Richards tarafından geliştirilmiştir (Shu ve Richards, 1992). Bu ağırlık katsayıları;

$$A_{ij}^{(r)} = r \left[A_{ij}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j} \right] ; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x, \quad j \neq i ; \quad \text{ve} \quad r = 2, 3, \dots, N_x - 1 \quad (5.22)$$

$$B_{ij}^{(s)} = s \left[B_{ii}^{(s-1)} B_{ij}^{(1)} - \frac{B_{ij}^{(s-1)}}{y_i - y_j} \right]; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_y, \quad j \neq i; \quad \text{ve } s = 2, 3, \dots, N_y - 1 \quad (5.23)$$

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_x} A_{ij}^{(r)}; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad \text{ve } r = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (5.24)$$

$$B_{ii}^{(s)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_y} B_{ij}^{(s)}; \quad i = 1, 2, \dots, N_y \quad \text{ve } r = 1, 2, \dots, N_y - 1 \quad (5.25)$$

olmaktadır.

5.1 Diferansiyel Quadrature Yönteminde Düğüm Noktaları Sayısı ve Seçimi

Diferansiyel quadrature yönteminde çözümün hassasiyeti bazı problem türlerinde sınır koşullarına bağlı olsa da (sınır değer problemlerinde) genelde bu hassasiyet düğüm noktalarının seçimine ve sayısına bağlıdır. Düğüm noktaları sonlu farklar yönteminde teşkil edilen şebeke seçimi, veya sonlu elemanlar yönteminde seçilen sonlu eleman ağ tipi ile hemen hemen benzerdir. Bu benzerlik yapısal bir benzerlik olmayıp fiziksel sistemi temsil eden matematik model için çözümün bulunacağı temel noktalar bazındadır. Daha önce yapılan çalışmalar göstermiştir ki; lineer türden denklemler ve homojen sınır koşullarına sahip problemlerde eşit aralıklı seçilen düğüm noktaları çözüm hassasiyeti açısından yeterlidir.

Bununla birlikte titreşim problemlerinde daha çok bir diğer tür (Chebyshev-Gauss-Lobatto) düğüm nokta seçiminin daha uygun olduğu gösterilmiştir. Zamana bağlı denklemlerde ve başlangıç değer problemlerinde ise eşit aralıklı olmayan türden düğüm nokta seçimi en uygun çözümleri türetmiştir. Sonuç olarak, her tür problem için en etkili seçimin bilinmesi analiz süresini kısıltacaktır.

Bazı durumlarda ise örnek noktaların sayısı verilen bağıntıların performansında yani ağırlık katsayılarının hesabında etkili değildir. Hesap performansını geliştirmek

açısından önemlidir. Bundan başka, bazı durumlarda bu noktalar çözümün doğruluğunu etkileyebilmektedir. Örneğin eşit aralıklı noktalar ile işlem kısmen daha kolay ve uygulaması daha basittir, ancak eşit olmayan nokta aralığı için az da olsa sonuçların hassaslığı bazı tür problemlerde azalır bazılarında artar. Düğüm noktalarının seçimi ile ilgili ayrıntılı bilgi Shu ve arkadaşları (Shu ve diğ,2001) ve Bert ve Malik (Bert ve Malik, 1996)in çalışmalarında bulunabilir. Düğüm noktalarının seçiminde sıkça kullanılan ve önerilen yöntemler bu kısımda sırasıyla açıklanacaktır.

a) Her iki doğrultuda yani her bir koordinat yönünde (tek boyutlu problemler için bir yönde) eşit aralıklı seçilen

$$x_i = \frac{i-1}{N_x-1}; \quad i = 1,2,\dots,N_x \quad (5.26)$$

$$y_j = \frac{j-1}{N_y-1}; \quad j = 1,2,\dots,N_y \quad (5.27)$$

olarak verilir.

b) Bazı durumlarda eşit aralıklı olmayan noktaların seçiminin daha iyi sonuç verdiği bilinmektedir. Yine iki boyutlu problemler için eşit olmayan düğüm noktaları Chebyshev-Gauss-Lobatto noktaları için:

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{N_x-1} \pi \right) \right]; \quad i = 1,2,\dots,N_x \quad (5.28)$$

$$y_j = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{j-1}{N_y-1} \pi \right) \right]; \quad j = 1,2,\dots,N_y \quad (5.29)$$

şeklinde seçilir.

c) Legendre polinomunun köklerinden elde edilen normalize düğüm noktaları

$$x_i = \frac{r_i - r_1}{r_N - r_1}; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (5.30)$$

$$y_j = \frac{r_j - r_1}{r_N - r_1}; \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (5.31)$$

burada

$$r_i = \cos \frac{4i-1}{4N_x+2} \pi \left(1 - \frac{1}{8N_x^2} + \frac{1}{8N_x^3} \right)$$

ve

$$r_j = \cos \frac{4j-1}{4N_y+2} \pi \left(1 - \frac{1}{8N_y^2} + \frac{1}{8N_y^3} \right)$$

şeklinde tanımlıdır.

d) Bir başka düğüm nokta seçiminde Shu ve Chew (Shu ve Chew ,1998) sınıra yakın bölgelerde örneğin mesnetlerde seçilen nokta sayısını arttıracak ve azaltacak şekilde

$$x_i = [(1-\alpha)(3\xi_i^2 - 2\xi_i^3) + \alpha\xi_i]a \quad (5.32)$$

$$y_j = [(1-\beta)(3\eta_j^2 - 2\eta_j^3) + \beta\eta_j]b \quad (5.33)$$

önermişlerdir. Bu denklemde

$$\xi_i = \frac{1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right)}{2}; \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\eta_j = \frac{1 - \cos\left(\frac{j-1}{M-1}\pi\right)}{2}; \quad j = 1, 2, \dots, M$$

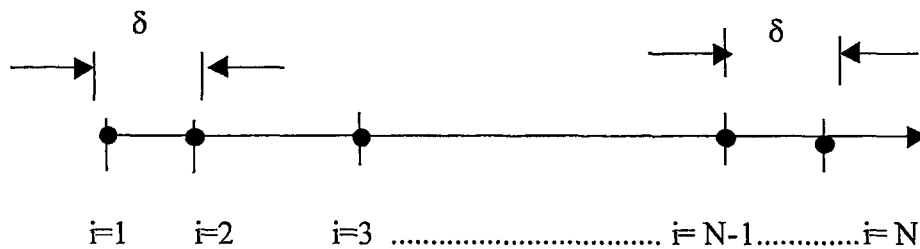
şeklinde tanımlanan Chebyshec-Lobatto kollokasyon nokta dağılımıdır. Bunlar diğer denklemlerde a ve b sırasıyla x ve y yönündeki boyutlar; N ve M yine x ve y yönündeki düğüm nokta sayısı; α ve β ise düğüm nokta dağılımını kontrol eden sabitlerdir. Yani;

Eğer $\alpha < 1$ ve $\beta < 1$ ise sınır yakınında veya civarında daha sık nokta seçimi

Eğer $\alpha > 1$ ve $\beta > 1$ ise sınır yakınında veya civarında daha seyrek nokta seçimi

uygulanır.

e) Sınıra yakın noktalar için yani bitişik noktalar için bilinen çok küçük değerler atanarak işlem yapılabilir. Örneğin eşit ve eşit olmayan aralıklı δ bitişik noktalı örnekleme modeli aşağıda tanımlanmıştır (Şekil 5.4).



Şekil 5.4 Bir boyutlu δ bitişik noktalı quadrature düğüm noktaları

i) Eşit aralıklı örnekleme veya düğüm nokta dağılımı

$$\xi_1=0, \quad \xi_2=\delta, \quad \xi_{N-1}=1-\delta \quad \text{ve} \quad \xi_N=1 \quad (5.34)$$

olmak üzere diğer noktalar için yani sınıra yakın olmayan noktalar için

$$\xi_i = \frac{i-1}{N-3}; \quad i = 3, 4, \dots, (N-2) \quad (5.35)$$

şeklinde olur.

ii) Eşit olmayan aralıklı örnekleme veya düğüm nokta dağılımı

$$\xi_1=0, \quad \xi_2=\delta, \quad \xi_{N-1}=1-\delta \quad \text{ve} \quad \xi_N=1 \quad (5.36)$$

şeklinde sınıra bitişik noktalar için ve diğer noktalar yani sınıra yakın olmayan noktalar için ise

$$\xi_i = \frac{1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-3}\pi\right)}{2}; \quad i = 3, 4, \dots, (N-2) \quad (5.37)$$

olur. Burada δ değeri çok küçük bir değer olup sınırın hemen bitişik komşuluğunda yani matematiksel ifadeyle bir epsilon komşuluğundadır. Pek çok uygulamada genel olarak $\delta \approx 10^{-5}$ alınır. Yani her bir mesnette iki sınır koşulu olup toplam dört denklem elde edilir. Bu sınır koşullarının esas yönetici denklem ile dikkate alınması sırasında önerilen bu δ tekniği uygundur.

Bununla birlikte diferansiyel quadrature çözümlerinde farklı koordinat yönlerindeki düğüm noktaları sayısı ve tipi bakımından farklı seçilebileceği gibi, farklı koordinat yönlerinde farklı test fonksiyonları da seçilebilir. Bu çalışmada hem eşit hem de eşit olmayan noktalama düğüm seçimi kullanılmıştır.

5.2 Diferansiyel Quadrature Yönteminde Lagrange Polinomları ile Ağırlık Katsayı Matrislerinin Hesabı

Ağırlık katsayılarının hesaplanmasında yukarıda anlatılan kuvvet polinomları ve Legendre polinomlarının kullanılması bilinen ilk yöntemdir ve $N \leq 20$ olduğu durumda kuvvet polinomları uygun olup diğer durumlarda Legendre polinomları kullanılır. Benzer olarak Lagrange polinomları kullanılarak bu ağırlık katsayılarını elde edelim. Bağımlı u değişkeni

$$u(\bar{x}) = c_0 + c_1 \bar{x} + c_2 \bar{x}^2 + \dots + c_{n+2} \bar{x}^{n+2} \quad (5.38)$$

olsun. Burada x değişkeninin $\bar{x}$ ile ifade edilmesinin nedeni $[-1,1]$ aralığında lokal koordinatlarda işlem yapılmasıdır. Global koordinatlardan lokal koordinatlara dönüşüm

$$\bar{x} = \frac{2}{(x_j - x_i)}(x - x_i) - 1$$

ile gerçekleştirilir. Burada x_i ve x_j global koordinat sisteminin uç noktalarıdır. Böylece (5.38) denklemi

$$u(\bar{x}) = [b]\{c\} \quad (5.39)$$

olarak yazılır. Burada

$$[b] = [1 \quad \bar{x} \quad \bar{x}^2 \quad \dots, \bar{x}^{n+1} \quad \bar{x}^{n+2}]$$

$$\{c\} = \left\{ c_0 \ c_1 \ c_2, \dots, c_n \ c_{n+1} \ c_{n+2} \right\}^T$$

ile tanımlıdır. Bu durumda bağımlı değişken u

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u'_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \\ u'_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_0 & \bar{x}_0^2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_0^n & \bar{x}_0^{n+1} & \bar{x}_0^{n+2} \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_0 & \cdot & \cdot & n\bar{x}_0^{n-1} & (n+1)\bar{x}_0^n & (n+2)\bar{x}_0^{n+1} \\ 1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1^2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_1^n & \bar{x}_1^{n+1} & \bar{x}_1^{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \bar{x}_{n-1} & \bar{x}_{n-1}^2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_{n-1}^n & \bar{x}_{n-1}^{n+1} & \bar{x}_{n-1}^{n+2} \\ 1 & \bar{x}_n & \bar{x}_n^2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_n^n & \bar{x}_n^{n+1} & \bar{x}_n^{n+2} \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_n & \cdot & \cdot & n\bar{x}_n^{n-1} & (n+1)\bar{x}_n^n & (n+2)\bar{x}_n^{n+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \\ c_{n+1} \\ c_{n+2} \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

veya

$$\{u\} = [N_0]\{c\} \quad (5.41)$$

olarak yazılır. Denklem (5.39) benzer olarak (Chen ve diğ., 1997):

$$\{\bar{u}\} = [N]\{c\} \quad (5.42)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde

$$\{\bar{u}\} = \left\{ u(\bar{x}) \ u'(\bar{x}) \ , \dots, u(\bar{x}), \dots, u(\bar{x}) \ u'(\bar{x}) \right\}^T \quad (5.43a)$$

ve

$$[N]^T = \left\{ [b] \ [b'] \dots [b] \ [b'] \right\} \quad (5.43b)$$

ile ifade edilir. Denklem (5.41) den hareket ederek

$$\{c\} = [N_0]^{-1} \{u\} \quad (5.44)$$

yazabiliriz. Bu denklemdeki c değerleri (5.38) polinomundaki sabitlerdir. Denklem (5.42) ve (5.44) den

$$\frac{d}{d\bar{x}} \{\bar{u}\} = \left(\frac{d}{d\bar{x}} [N] \right) [N_0]^{-1} \{u\} + \underbrace{[N] \frac{d}{d\bar{x}} \left([N_0]^{-1} \{u\} \right)}_{=0} \quad (5.45a)$$

$$= \left(\frac{d}{d\bar{x}} [N] \right) [N_0]^{-1} \{u\} \quad (5.45b)$$

yazılabilir. Böylece 1'den n ' e kadar belirli ayırık noktalar için

$$\frac{d}{d\bar{x}} \{u\} = [A] \{u\} \quad (5.46a)$$

yazılır. Bu denklemde

$$[A] = [N'_0] [N_0]^{-1} \quad (5.46b)$$

ile tanımlı olup N_0 matrisinin türevi

$$[N'_0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\bar{x}_0 & . & . & n\bar{x}_0^{n-1} & (n+1)\bar{x}_0^n & (n+2)\bar{x}_0^{n+1} \\ 0 & 0 & 2 & . & . & n(n-1)\bar{x}_0^{n-2} & (n+1)n\bar{x}_0^{n-1} & (n+2)(n+1)\bar{x}_0^n \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_1 & . & . & n\bar{x}_1^{n-1} & (n+1)\bar{x}_1^n & (n+2)\bar{x}_1^{n+1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_n & . & . & n\bar{x}_n^{n-1} & (n+1)\bar{x}_n^n & (n+2)\bar{x}_n^{n+1} \\ 0 & 0 & 2 & . & . & n(n-1)\bar{x}_n^{n-2} & (n+1)n\bar{x}_n^{n-1} & (n+2)(n+1)\bar{x}_n^n \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

olarak hesaplanır. Bu matriste

$$x_i = \frac{2i - n}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

formülüyle verilir. Böylece Lagrange polinomları kullanılarak elde edilen ağırlık katsayı matrisi birinci dereceden türev için

$$[A] \equiv \left[\frac{d}{dx} \right] \quad (5.48)$$

olur. İkinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevler için ağırlık matrisleri

$$[B] \equiv \left[\frac{d^2}{dx^2} \right] = \left[\frac{d}{dx} \right] \left[\frac{d}{dx} \right] = [A][A] \quad (5.49)$$

$$[C] \equiv \left[\frac{d^3}{dx^3} \right] = \left[\frac{d}{dx} \right] \left[\frac{d}{dx} \right] \left[\frac{d}{dx} \right] = [A][A][A] \equiv [B][A] \quad (5.50)$$

$$[D] \equiv \left[\frac{d^4}{dx^4} \right] = [B][B] \equiv [C][A] \quad (5.51)$$

şeklinde hesaplanır.

5.3 Harmonik Diferansiyel Quadrature (HDQ) Yöntemi

Yukarıda temel prensipleri verilen DQ yaklaşımında ağırlık katsayılarının hesaplanmasında çeşitli güçlükler ortaya çıkmaktadır. Birinci yöntemde elde edilen denklemin katsayılar matrisi Vandermonde sistemi olduğundan determinantının hesabında güçlük çıkar ve denklemin çözümü tekildir. Özellikle düğüm sayısı arttıkça sonuçların hassasiyeti azalabilmektedir. N düğüm sayısı 20 den büyük olduğu durumlarda sonuçların güvenilirliği azalmaktadır. Bunlara ilaveten, her bir

işlem adımında $N \times N$ denklem takımını çözme zorunluluğu vardır. İkinci yaklaşımda ise farklı sınır şartları ve geometri için yöntemin uygulanabilirliği azalmaktadır. Yani; gerek, daha az sayıda düğüm noktası seçilerek her işlem adımında bir lineer denklem takımına indirgenen birinci yöntemde, gerekse düğüm noktalarının dağılımını kısıtlayan Legendre yaklaşımında, yöntemin uygulanabilirliği açısından çeşitli güçlükler vardır. Dolayısıyla; hem bu güçlükleri gidermek açısından hem de yöntemin kullanım alanı ve uygulanabilirliğini kolaylaştırmaya yönelik çabalar sonucunda iki ayrı grup tarafından bağımsız olarak yöntem geliştirilerek ağırlık katsayılarının hesabı farklı düğüm noktaları ve yüksek dereceden türevler için uygun bir formda elde edilebilmiş ve genelleştirilmiş diferansiyel quadrature yöntemi ortaya çıkmıştır. Shu ve Richards ağırlık katsayıları için herhangi bir tekilliğe neden olmayan ve büyük sayıda lineer denklem takımı çözümü gerektirmeyen analitik ifadeler önermişlerdir(Shu ve Richards,1992).

Harmonik diferansiyel quadrature yönteminde ağırlık katsayılarının hesaplanması için önerilen test fonksiyonu trigonometrik yada harmonik formda olduğundan yöntem harmonik diferansiyel quadrature olarak önerilmiştir (Shu ve Xue,1997). Bu fonksiyon

$$h_k(x) = \frac{\sin \frac{(x-x_0)\pi}{2} \dots \sin \frac{(x-x_{k-1})\pi}{2} \sin \frac{(x-x_{k+1})\pi}{2} \dots \sin \frac{(x-x_N)\pi}{2}}{\sin \frac{(x_k-x_0)\pi}{2} \dots \sin \frac{(x_k-x_{k-1})\pi}{2} \sin \frac{(x_k-x_{k+1})\pi}{2} \dots \sin \frac{(x_k-x_N)\pi}{2}}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (5.46)$$

olarak verilmektedir. Bu denklem daha kısa ve kapalı bir ifadeyle

$$h_k(x) = \frac{\prod_{i=0}^N \sin \left(\frac{x-x_i}{2} \pi \right)}{\prod_{i=0, i \neq k}^N \sin \left(\frac{x_k-x_i}{2} \pi \right)} \quad (5.47)$$

olarak yazabiliriz. Ağırlık katsayılarını tanımlamak için

$$F(x) = \prod_{k=0}^N \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\pi\right) = F(x, x_k) \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\pi\right) \quad (5.48)$$

yazılırsa bu denklemde

$$F(x_i, x_i) = \prod_{i \neq k, k=0}^N \sin\left(\frac{x_i-x_k}{2}\pi\right) = P(x_i) \quad (5.49a)$$

$$F(x_i, x_j) = F(x_i, x_i) \delta_{ij} \quad (5.49b)$$

olmak üzere (5.47) denklemi

$$h_k(x) = \frac{F(x, x_k)}{P(x_k)} \quad (5.50a)$$

şekline indirgenir. Buradan birinci ve ikinci mertebeden ağırlık katsayıları

$$A_{ij} = \frac{F^{(1)}(x_i, x_j)}{P(x_j)} \quad (5.50b)$$

$$B_{ij} = \frac{F^{(2)}(x_i, x_j)}{P(x_j)} \quad (5.50c)$$

olur. Bu denklemlerdeki $F^{(1)}(x_i, x_j)$ ve $F^{(2)}(x_i, x_j)$ ifadeleri $F(x_i, x_j)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden türevleridir. Bu türevler (5.48) denkleminde türev olarak

$$E^{(1)}(x) = F^{(1)}(x, x_k) \sin\left(\frac{x - x_k}{2} \pi\right) + \frac{\pi}{2} F(x, x_k) \cos\left(\frac{x - x_k}{2} \pi\right) \quad (5.51a)$$

$$E^{(2)}(x) = F^{(2)}(x, x_k) \sin\left(\frac{x - x_k}{2} \pi\right) + \pi F^{(1)}(x, x_k) \cos\left(\frac{x - x_k}{2} \pi\right) \quad (5.51b)$$

$$- \frac{\pi^2}{4} F(x, x_k) \sin\left(\frac{x - x_k}{2} \pi\right)$$

olur. Yine ikinci mertebeden ağırlık katsayılarında kullanılmak üzere $F^{(3)}(x)$ ifadesi

$$E^{(3)}(x) = F^{(3)}(x, x_k) \sin\left(\frac{x - x_k}{2} \pi\right) + \frac{3}{2} \pi F^{(2)}(x, x_k) \cos\left(\frac{x - x_k}{2} \pi\right) - \frac{3\pi^2}{4} F^{(1)}(x, x_k) \sin\left(\frac{x - x_k}{2} \pi\right) - \frac{\pi^3}{8} F(x, x_k) \cos\left(\frac{x - x_k}{2} \pi\right) \quad (5.51c)$$

olarak elde edilir. Bu denklemler kullanılarak ağırlık katsayıları için gereken birinci ve ikinci mertebeden türevler sırasıyla

$$F^{(1)}(x_i, x_j) = \frac{\pi P(x_i)}{2 \sin\left[\frac{x_i - x_j}{2}\right] \pi}; \quad j \neq i \text{ için} \quad (5.52a)$$

$$F^{(1)}(x_i, x_i) = \frac{E^{(2)}(x_i)}{\pi}; \quad j = i \text{ için} \quad (5.52b)$$

$$F^{(2)}(x_i, x_j) = \frac{E^{(2)}(x_i) - \pi F^{(1)}(x_i, x_j) \cos\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right)}{\sin\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right)}; \quad j \neq i \text{ için} \quad (5.52c)$$

$$F^{(2)}(x_i, x_i) = \frac{2}{3\pi} \left[E^{(3)}(x_i) + \frac{\pi^3}{8} F(x_i, x_i) \right]; \quad j = i \text{ için} \quad (5.52d)$$

olmakta ve yukarıda (5.50b) ve (5.50c) ile tanımlanan ağırlık katsayıları ;

$$A_{ij} = \frac{\pi P(x_i)}{2 \sin\left[\frac{x_i - x_j}{2}\right] \pi}; \quad j \neq i \text{ için} \quad (5.53a)$$

şeklindedir. Burada

$$P(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \sin\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right); \quad j=1,2,\dots,N \text{ için} \quad (5.53b)$$

Eğer $j = i$ için birinci mertebeden ağırlık katsayısı hesaplanacak denklem aşağıdaki şekilde olur.

$$A_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} \quad j=1,2,\dots,N \text{ için} \quad (5.54)$$

Benzer olarak ikinci merteben ağırlık katsayıları

$$B_{ij} = A_{ij} \left[2 A_{ii} - \pi \operatorname{ctg} \frac{x_i - x_j}{2} \pi \right]; \quad j \neq i \text{ için} \quad (5.55)$$

$$B_{ii} = \frac{2}{3\pi} \left[\frac{E^{(3)}(x_i)}{P(x_i)} + \frac{\pi^3}{8} \right]; \quad j = i \text{ için} \quad (5.56)$$

Burada da $i, j = 1, 2, 3, \dots, N$ değerlerini alır. Bert ve arkadaşları tarafından (Bert ve diğ., 1993) yukarıda (5.46) formülü ile verilen fonksiyon;

$$u_k(x) = [1, \sin \pi x, \cos \pi x, \dots, \sin \frac{N-1}{2} \pi x, \cos \frac{N-1}{2} \pi x] \quad (5.57)$$

olarak seçilerek ağırlık katsayıları için ilgili formülasyonlar elde edilmiştir.

5.4 Dinamik Analiz İçin Harmonik Diferansiyel Quadrature Yönteminin Geliştirilmesi

Bundan önceki bölümde temel kavramları ve bağıntıları ile verilen tek veya çok serbestlik dereceli sistemlerin dinamik analizi için önerilen diferansiyel quadrature yönteminin, mevcut hareket denkleminin uygulanması ve çözümün elde edilmesi için temel formülasyonlar bu bölümde çıkartılacaktır. Çalışmada harmonik diferansiyel quadrature kullanılıp, tek veya çok serbestlik dereceli sistemlerin lineer ve lineer olmayan analizi sunulacaktır. Bu açıdan çalışmada elde edilecek formülasyonlar için HDQ prensipleri kullanılacak ve bu bağıntılar yapı dinamiği alanında geniş bir spektrumda uygulama alanı olan tek veya çok serbestlik dereceli sistemlerin analizi amacıyla ilk defa kullanılmış olacaktır. Çözümü yapılacak olan temel denklem daha önce verilmiş olan

$$[M]\frac{d^2\{u\}}{dt^2} + [C]\frac{d\{u\}}{dt} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (5.58)$$

şeklinde tanımlı ikinci mertebeden diferansiyel denklemdir. Başlangıç koşulları

$$\{u(t=0)\} = \{u_0\} \quad \text{ve} \quad \left. \frac{d\{u\}}{dt} \right|_{t=0} = \{\dot{u}_0\} \quad (5.59)$$

olarak tanımlanır. Tek serbestlik dereceli bir sistem için bu denklem, başlangıç koşulları ile birlikte aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\xi\omega \frac{du}{dt} + \omega^2 u = F(t) \quad (5.60)$$

$$u(t) = u_0 \quad \text{ve} \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = v_0 = \dot{u}_0 \quad (5.61)$$

Bu denklem boyutsuz olarak

$$\frac{1}{(T)^2} \frac{d^2 u}{d\tau^2} + 2\xi\omega \frac{1}{T} \frac{du}{d\tau} + \omega^2 u = F(\tau T) \quad (5.62)$$

olup denklem düzenlenirse

$$\ddot{u} + 2\xi\omega(T)\dot{u} + \omega^2 T^2 u = F(\tau T) T^2 \quad (5.63)$$

elde edilir. Bu denklemde $\tau = t / T$ boyutsuz zaman değişkeni, ξ sönüm oranı, ω açısal frekansı, T süreyi göstermektedir. Hız ile yer değiştirme arasındaki bağıntı

$$v = \frac{du}{dt} = \frac{1}{T} \frac{du}{d\tau} = \frac{1}{T} \dot{u} \quad (5.64a)$$

ve başlangıç koşulları

$$u(\tau = 0) = u_0 \quad \text{ve} \quad \dot{u}(\tau = 0) = v_0 T \quad (5.64b)$$

olur. Başlangıç koşulları DQ yönteminde uygun test fonksiyonlarının kullanılması ile doğrudan denklemlere dahil edilir. Fung (2001) (5.65) denkleminin çözümünün

$$u(\tau) = u_0 R_u^n(\tau) + v_0 \Delta t R_v^n(\tau) + u_1 R_1^n(\tau) + \dots + u_n R_n^n(\tau) \quad (5.65)$$

olarak verilebileceğini göstermiştir. Denklemdaki $R_u^n(\tau)$, $R_v^n(\tau)$, $R_1^n(\tau)$, ..., $R_n^n(\tau)$ fonksiyonları

$$R_u^n(\tau_0) = 1, \quad \dot{R}_u^n(\tau_0) = 0, \quad R_v^n(\tau_0) = 0, \quad \dot{R}_v^n(\tau_0) = 0 \quad (5.66a)$$

$$R_u^n(\tau_i) = R_v^n(\tau_i) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.66b)$$

$$R_k^n(\tau_i) = \delta_{ik} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{ve} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.66c)$$

$$\dot{R}_k^n(\tau_0) = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.66d)$$

olarak tanımlanır. Burada δ_{ik} yaygın olarak bilinen ve kullanılan kronoker delta operatörü olup

$$\delta_{ik} = 1 \quad i = k \quad \text{için}$$

$$\delta_{ik} = 0 \quad \text{diğer durumlarda}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer $R_u^n(\tau)$, $R_v^n(\tau)$, $R_k^n(\tau)$ fonksiyonları $n+1$ inci dereceden polinomlardan oluşturulursa

$$R_u^n(\tau) = [1 - \dot{L}_0^n(\tau_0)(\tau - \tau_0)] L_u^n(\tau) \quad (5.67)$$

$$R_v^n(\tau) = (\tau - \tau_0) L_u^n(\tau) \quad (5.68)$$

$$R_k^n(\tau) = \frac{(\tau - \tau_0)}{(\tau_k - \tau_0)} L_k^n(\tau); \quad k=1, 2, \dots, n \quad \text{için} \quad (5.69)$$

Burada $L_k^n(\tau)$ ifadesi n . ci dereceden Lagrange polinomu olup

$$L_k^n(\tau) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{(\tau - \tau_j)}{(\tau_k - \tau_j)} \quad (5.70)$$

ifadesi ile tanımlıdır. Böylece daha önce verilen diferansiyel quadrature formülasyonu için gerekli ağırlık katsayıları

$$A_{ij}^{(r)} = \frac{d^r}{d\tau^r} L_j^n(\tau) \Big|_{\tau=\tau_i} \quad (5.71)$$

$$B_{iu}^{(r)} = \frac{d^r}{d\tau^r} R_u^n(\tau) \Big|_{\tau=\tau_i} \quad (5.72)$$

$$B_{iv}^{(r)} = \frac{d^r}{d\tau^r} R_v^n(\tau) \Big|_{\tau=\tau_i} \quad (5.73)$$

ve

$$B_{ij}^{(r)} = \frac{d^r}{d\tau^r} R_j^n(\tau) \Big|_{\tau=\tau_i} \quad (5.74)$$

olarak elde edilir. Denklem (5.72), (5.73) ve (5.74) böylelikle daha açık olarak

$$B_{iu}^{(r)} = [1 - (\tau_i - \tau_0) A_{00}^{(1)}] A_{i0}^{(r)} - r A_{00}^{(1)} A_{i0}^{(r-1)} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.75)$$

$$B_{iv}^{(r)} = (\tau_i - \tau_0) A_{i0}^{(r)} + r A_{i0}^{(r-1)} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.76)$$

$$B_{ij}^{(r)} = \frac{\tau_i - \tau_0}{\tau_j - \tau_0} A_{ij}^{(r)} + \frac{r}{\tau_j - \tau_0} A_{ij}^{(r-1)} ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (5.77)$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak hareket denkleminde birinci ve ikinci mertebeden türevler mevcut olduğundan bunların her biri için diferansiyel quadrature formunda ilgili ifadeler

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_{1u}^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{nu}^{(1)} \end{Bmatrix} u_0 + \begin{Bmatrix} B_{1v}^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{nv}^{(1)} \end{Bmatrix} v_0 T + \begin{bmatrix} B_{11}^{(1)} & B_{12}^{(1)} & \dots & B_{1n}^{(1)} \\ B_{21}^{(1)} & B_{22}^{(1)} & \dots & B_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ B_{n1}^{(1)} & B_{n2}^{(1)} & \dots & B_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (5.78)$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_{1u}^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{nu}^{(2)} \end{Bmatrix} u_0 + \begin{Bmatrix} B_{1v}^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{nv}^{(2)} \end{Bmatrix} v_0 T + \begin{bmatrix} B_{11}^{(2)} & B_{12}^{(2)} & \dots & B_{1n}^{(2)} \\ B_{21}^{(2)} & B_{22}^{(2)} & \dots & B_{2n}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ B_{n1}^{(2)} & B_{n2}^{(2)} & \dots & B_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (5.79)$$

olarak yazılır. Böylece (5.63) denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix} + 2\xi\omega T \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix} + \omega^2 (T)^2 \begin{Bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(\tau_1 \Delta t) \\ \cdot \\ \cdot \\ F(\tau_n \Delta t) \end{Bmatrix} (T)^2 \quad (5.80)$$

Ancak bilinen başlangıç koşulları çözüme dahil edilerek denklemler düzenlenmelidir. Tek veya çok serbestlik dereceli sistemlerin analizinde birinci mertebe ve ikinci mertebeden türevler gerektiğinden bu ifadeler sırasıyla

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{u}_1 \\ \cdot \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00}^{(1)} & A_{01}^{(1)} & \dots & A_{0n}^{(1)} \\ A_{10}^{(1)} & A_{11}^{(1)} & \dots & A_{1n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{n0}^{(1)} & A_{n1}^{(1)} & \dots & A_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (5.81)$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{u}_0 \\ \ddot{u}_1 \\ \cdot \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00}^{(2)} & A_{01}^{(2)} & \dots & A_{0n}^{(2)} \\ A_{10}^{(2)} & A_{11}^{(2)} & \dots & A_{1n}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{n0}^{(2)} & A_{n1}^{(2)} & \dots & A_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (5.82)$$

şeklinde yazılır. Yukarıda verilen denklemlerde başlangıç koşulları ; $\dot{u}_0 = v_0 T$

ifadesi

$$\dot{u}_0 = v_0 T = \sum_{j=0}^n A_{0j}^{(1)} u_j \quad (5.83)$$

olarak yazılır. Bu denklemden hareket ederek

$$u_1 = \frac{1}{A_{01}^{(1)}} \left[-A_{00}^{(1)} u_0 + v_0 T - \sum_{j=2}^n A_{0j}^{(1)} u_j \right] \quad (5.84)$$

yazılır. Böylece bilinen bu değerler dikkate alınarak (5.80) denklemini tekrar yazılırsa

$$\begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix} + 2\xi\omega T \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix} + \omega^2 (T)^2 \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(\tau_2 T) \\ F(\tau_3 T) \\ \vdots \\ F(\tau_n T) \end{Bmatrix} (T)^2 \quad (5.85)$$

ifadesi bulunur. Mevcut denklemler (5.84) ve (5.85) kullanılarak n adet $u_1, u_2, \dots, u_n$ bilinmeyenleri bulunur. Bu değerler bulunduktan sonra $\dot{u}_0, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_n$ değerleri (5.81) denklemini kullanılarak hesaplanır. Yer değiştirme ve hız için

$$u(\tau) = \sum_{k=0}^n L_k^n(\tau) u_k \quad (5.86)$$

$$v(\tau) = \dot{u}(\tau) T = T \sum_{k=0}^n L_k^n(\tau) \dot{u}_k \quad (5.87)$$

ifadeleri elde edilir. Diferansiyel quadrature yöntemiyle $0 \leq t \leq T$ zaman aralığı üzerinden ($0 \leq \tau \leq 1$) yaklaşık çözüm bulunur. Fung (Fung,2001) yukarıda (5.58) denklemini ile verilen ikinci mertebeden diferansiyel denklemini

$$\frac{d}{dt}\{y\} + [B]\{y\} = \{f(t)\} \quad (5.88)$$

olarak yazıp birinci mertebeye dönüştürmüş ve bu denklem için çözümler önermiştir. Bu dönüşüme göre başlangıç koşulları

$$\{y(t=0)\} = \{y_0\} \quad (5.89)$$

ile verilir. Bu denklemlerdeki yeni değişkenler

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ M^{-1}K & M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (5.90a)$$

$$\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1}F(t) \end{Bmatrix} \text{ ve } \{y_0\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} \quad (5.90b)$$

olur. Birinci mertebeden türev için verilen (5.81) denklemi

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{10}^{(1)} \\ A_{20}^{(1)} \\ \vdots \\ A_{n0}^{(1)} \end{Bmatrix} u_0 + \begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & \dots & A_{1n}^{(1)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} & \dots & A_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1}^{(1)} & A_{n2}^{(1)} & \dots & A_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (5.91a)$$

yada

$$\{\dot{u}_j\} = [A_0]u_0 + [A]\{u_j\} \quad (5.91b)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & \tau_1 & \dots & \tau_1^{n-1} \\ 1 & \tau_2 & \dots & \tau_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \tau_n & \dots & \tau_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \quad 2 \quad \dots \quad n \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_1^2 & \dots & \tau_1^n \\ \tau_2 & \tau_2^2 & \dots & \tau_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_n & \tau_n^2 & \dots & \tau_n^n \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.92a)$$

$$[A_0] = -[A] \begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.92b)$$

göstermektedir. Böylece (5.91a) denkleminde başlangıç koşulları kolayca çözüme dahil edilir. Sistem diferansiyel denklemini, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ örnek düğüm noktalarında tanımlı n adet analog denkleme dönüştür ve kapalı formda

$$y(\tau) = \sum_{k=0}^n L_k^n(\tau) y_k \quad (5.93)$$

olur. Bu ifade n . ci dereceden artan bir polinom şeklinde ifade edilirse

$$y(\tau) = y_0 + Y_1 \tau + Y_2 \tau^2 + \dots + Y_n \tau^n \quad (5.94)$$

yazılır. Burada $Y_1, \dots, Y_n$ polinom katsayıları olup (Fung, 2001a)

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = y_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_1^2 & \dots & \tau_1^n \\ \tau_2 & \tau_2^2 & \dots & \tau_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_n & \tau_n^2 & \dots & \tau_n^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{Bmatrix} \quad (5.95)$$

olur.

Benzer olarak dönüştürülmüş kuvvet ifadesi $f(\tau T)T$ ifadesi $F_0, F_1, \dots, F_n$ cinsinden ifade edilerek

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = F_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_1^2 & \dots & \tau_1^n \\ \tau_2 & \tau_2^2 & \dots & \tau_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_n & \tau_n^2 & \dots & \tau_n^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (5.96)$$

olur. Yada bu denklem

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau_1 & \dots & \tau_1^n \\ 1 & \tau_2 & \dots & \tau_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \tau_n & \dots & \tau_n^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (5.97)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece daha önce verilen birinci mertebeden ağırlık katsayıları

$$A_{ij} = \frac{L'_N(x_i)}{(x_i - x_j)L'_N(x_j)} \quad i \neq j, \quad 0 \leq i \text{ ve } j \leq N \quad \text{için} \quad (5.98)$$

$$A_{ii} = \frac{L''(x_i)}{2L'(x_i)} \quad i=j \text{ için} \quad (5.99)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N$$

olup buradaki türev ifadeleri

$$L(\tau) = \tau^{n+1} - Z_1 \tau - Z_2 \tau^2 - Z_3 \tau^3 - \dots - Z_n \tau^n$$

$$L'(\tau) = (n+1)\tau^{n+1} - Z_1 - 2Z_2\tau - 3Z_3\tau^2 \dots - nZ_n\tau^{n-1}$$

$$L''(\tau) = n(n+1)\tau^{n-1} - 2Z_2 - 6Z_3\tau - \dots - n(n-1)Z_n\tau^{n-2}$$

olmaktadır. Bu polinomsal ifadede de bulunan Z değerleri $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ile ilgili olup aralarında

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau_1 & \dots & \tau_1^n \\ 1 & \tau_2 & \dots & \tau_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \tau_n & \dots & \tau_n^n \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \tau_1^n \\ \tau_2^n \\ \vdots \\ \tau_n^n \end{Bmatrix} \quad (5.100)$$

şeklinde bir matematiksel ilişki vardır. Yani $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ değerleri alternatif olarak aşağıda tanımlı polinomun kökleri olarak ta düşünülebilir.

$$\tau^n - Z_1 - Z_2\tau - Z_3\tau^2 - \dots - Z_n\tau^{n-1} = 0 \quad (5.101)$$

Böylece yukarıdaki (5.94) denkleminin çözümü (5.100) de dikkate alınarak

$$Z_k = \frac{(-1)^{n-k} n! n! (n+k-2)!}{(k-1)!(k-1)!(n+1-k)!(2n)(n+k-2)!} \frac{2(n+\mu(k-1))}{1+\mu} \quad (5.102)$$

şeklinde elde edilir. Örnek olarak

$n=1$ için (5.101) denklemi $\tau - 1/(1+\mu) = 0$ şekline indirgenir. Buradan $\tau_1 = 1/(1+\mu) = 0$ elde edilir.

$n=2$ için ise

$$\tau_1 = \frac{2+\mu-\sqrt{1+\mu+\mu^2}}{3(1+\mu)} \quad \text{ve} \quad \tau_2 = \frac{2+\mu+\sqrt{1+\mu+\mu^2}}{3(1+\mu)} \quad (5.103)$$

olup (5.91) ve (5.92) denklemleri ile verilen ağırlık katsayı matrisleri

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{2\mu^2 - \mu - 1}{\sqrt{1+\mu+\mu^2}} + 4 + 2\mu \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{-2\mu^2 - 5\mu - 5}{\sqrt{1+\mu+\mu^2}} + 4 + 2\mu \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{2\mu^2 + 5\mu + 5}{\sqrt{1+\mu+\mu^2}} + 4 + 2\mu \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{-2\mu^2 + \mu + 1}{\sqrt{1+\mu+\mu^2}} + 4 + 2\mu \right) \end{bmatrix} \quad (5.104)$$

ve

$$\{A_0\} = 2\sqrt{1+\mu+\mu^2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.105)$$

Böylece (5.86) ve (5.87) denklemlerinin çözümü

$$u(\tau) = u_0 + \frac{-(1+\mu)\omega^2(T)^2 u_0 + (1+\mu)^2 v_0 T}{(1+\mu)^2 + 2(1+\mu)\xi\omega T + \omega^2(\Delta t)^2} \tau \quad (5.106)$$

$$v(\tau) = v_0 + \frac{-[(1+\mu)\omega T + 2(1+\mu)^2 \xi]\omega T v_0 - (1+\mu)^2 u_0 \omega^2 T}{(1+\mu)^2 + 2(1+\mu)\xi\omega T + \omega^2(T)^2} \tau \quad (5.107)$$

olarak yazılır. Dikkat edilmelidir ki $u(\tau)$ ve $v(\tau)$ ifadeleri τ 'nin lineer fonksiyonlarıdır.

İkinci mertebe türev ifadeleri yukarıdaki dönüşümle birinci mertebeye indirgenince yeni denklemler bu yeni değişken y cinsinden

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{y}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{10}^{(1)} \\ A_{20}^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{n0}^{(1)} \end{Bmatrix} y_0 + \begin{Bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & \dots & A_{1n}^{(1)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} & \dots & A_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{n1}^{(1)} & A_{n2}^{(1)} & \dots & A_{nn}^{(1)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{Bmatrix} \quad (5.108)$$

yada kapalı matris formda

$$\{\dot{y}\} = [A_0]u_0 + [A]\{u\} \quad (5.109)$$

olur. İkinci mertebeden türev ifadesi ise

$$\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix} = \{A_0\}v_0 T + [A] \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix} \quad (5.110)$$

olur. Bu ifade açılarak ve bazı matris işlemlerden sonra denklem (Fung,2001);

$$\{\ddot{y}\} = \{A_0\}v_0 T + [A]\{A_0\}u_0 + [A]^2\{u\} \quad (5.111)$$

formunda ifade edilir. Bu şekilde ayrıntılı işlem yapmaktan amaç, diferansiyel quadrature çözümlerinin en zor kısmını teşkil eden ağırlık katsayılarının hesabı ve başlangıç koşullarının çözüme dahil edilmesini işlemlerinin basit ve bilinen formlara indirgemektir. Yukarıdaki (5.65) denkleminin kesin çözümü aşağıda sunulmuştur (Clough ve Penzien, 1993).

$$\bar{u}(\tau) = u_0 e^{-\xi\omega\tau T} \left[\cos(\omega_d \tau T) + \frac{\xi\omega}{\omega_d} \sin(\omega_d \tau T) \right] + v_0 e^{-\xi\omega\tau T} \left[\frac{1}{\omega_d} \sin(\omega_d \tau T) \right] \quad (5.112)$$

$$\bar{v}(\tau) = \frac{1}{T} \frac{d\bar{u}}{d\tau} \quad (5.113)$$

Burada ω_d , sönümlü açısal frekansı göstermekte olup aşağıdaki gibi yazılır:

$$\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \omega \quad (5.114)$$



5.5 Çok Serbestlik Dereceli Sistemler İçin HDQ Yöntemi

Çok serbestlik dereceli bir sistem için genel hareket denklemi

$$[M]_{N \times N} \left\{ \left\{ \ddot{U}_i(t_j) \right\}_{R \times I} \right\}_{N \times 1} + [C]_{N \times N} \left\{ \left\{ \dot{U}_i(t_j) \right\}_{R \times I} \right\}_{N \times 1} + [K]_{N \times N} \left\{ \left\{ U_i(t_j) \right\}_{R \times I} \right\}_{N \times 1} = \left\{ F_i(t_j) \right\}_{N \times 1}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.115)$$

şeklinde yazılabilir. Burada; $[M]$, $[C]$, $[K]$ sırasıyla kütle, sönüm ve rijitlik olup $\{U\}$, $\{\dot{U}\}$, $\{\ddot{U}\}$ ve $\{F\}$ ile tanımlanan vektörler sırasıyla, yer değiştirme, hız, ivme ve dış yük vektörleridir.

$$[M]_{N \times N} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_N \end{bmatrix} \quad (5.116)$$

$$[C]_{N \times N} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & -c_{N-1} & c_{N-1} + c_N & -c_N \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & -c_N & c_N \end{bmatrix} \quad (5.117)$$

$$[K]_{N \times N} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & -k_{N-1} & k_{N-1} + k_N & -k_N \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & -k_N & k_N \end{bmatrix} \quad (5.118)$$

$$\{U_i(t_j)\}_{R \times 1} = \begin{Bmatrix} \{U_1(t_j)\}_{R \times 1} \\ \{U_2(t_j)\}_{R \times 1} \\ . \\ . \\ \{U_N(t_j)\}_{R \times 1} \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{U}_i(t_j)\}_{R \times 1} = \begin{Bmatrix} \{\dot{U}_1(t_j)\}_{R \times 1} \\ \{\dot{U}_2(t_j)\}_{R \times 1} \\ . \\ . \\ \{\dot{U}_N(t_j)\}_{R \times 1} \end{Bmatrix} \quad (5.119)$$

$$\{\ddot{U}_i(t_j)\}_{R \times 1} = \begin{Bmatrix} \{\ddot{U}_1(t_j)\}_{R \times 1} \\ \{\ddot{U}_2(t_j)\}_{R \times 1} \\ . \\ . \\ \{\ddot{U}_N(t_j)\}_{R \times 1} \end{Bmatrix}, \quad \{F_i(t_j)\}_{R \times 1} = \begin{Bmatrix} \{F_1(t_j)\}_{R \times 1} \\ \{F_2(t_j)\}_{R \times 1} \\ . \\ . \\ \{F_N(t_j)\}_{R \times 1} \end{Bmatrix} \quad (5.120)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, N$ sistem serbestlik derecesi için, $j = 1, 2, 3, \dots, R$ ise hesap süresi için gerekli iteratif indislerdir.

Bu denklemlerdeki birinci ve ikinci mertebeden türevlerin DQ formu $\tau = t/T$ için zaman değişkeninin boyutsuzlaştırılması ile

$$\{\dot{U}_i(t_j)\} = \frac{dU}{dt} \Big|_{t=t_j} = \{\dot{U}_i(\tau_j T)\} = \frac{1}{T} \frac{dU}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_j} = \sum_{j=1}^R A_{kj} U_i(\tau_j T) \quad (5.121a)$$

$$\{\dot{U}_i(t_j)\} = \left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=t_j} = T \sum_{j=1}^R A_{kj} U_i(\tau_j T) \quad (5.121b)$$

ve benzer olarak

$$\{\ddot{U}_i(t_j)\} = \left. \frac{d^2 U}{dt^2} \right|_{t=t_j} = \{\ddot{U}_i(\tau_j T)\} = \frac{1}{T^2} \left. \frac{d^2 U}{d\tau^2} \right|_{\tau=\tau_j} = \sum_{j=1}^R B_{kj} U_i(\tau_j T) \quad (5.122a)$$

$$\{\ddot{U}_i(t_j)\} = \left. \frac{d^2 U}{dt^2} \right|_{t=t_j} = T^2 \sum_{j=1}^R B_{kj} U_i(\tau_j T) \quad (5.122b)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad j = 1, 2, 3, \dots, R, \quad k = 1, 2, 3, \dots, R$$

elde edilir. Böylece hareket denklemi matris formda

$$[M]_{N \times N} \left\{ \left\{ \ddot{U}_i(\tau_j T) \right\}_{R \times 1} \right\}_{N \times 1} + [C]_{N \times N} \left\{ \left\{ \dot{U}_i(\tau_j T) \right\}_{R \times 1} \right\}_{N \times 1} + [K]_{N \times N} \left\{ \left\{ U_i(\tau_j T) \right\}_{R \times 1} \right\}_{N \times 1} = \left\{ F_i(\tau_j T) \right\}_{N \times 1}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.123)$$

olarak elde edilir. Bu denklem açık olarak

$$\begin{aligned}
[M]_{N \times N} \begin{Bmatrix} \{\ddot{U}_1(\tau_1 T)\} \\ \{\ddot{U}_1(\tau_2 T)\} \\ \vdots \\ \{\ddot{U}_1(\tau_R T)\} \\ \{\ddot{U}_2(\tau_1 T)\} \\ \{\ddot{U}_2(\tau_2 T)\} \\ \vdots \\ \{\ddot{U}_2(\tau_R T)\} \\ \vdots \\ \{\ddot{U}_N(\tau_1 T)\} \\ \{\ddot{U}_N(\tau_2 T)\} \\ \vdots \\ \{\ddot{U}_N(\tau_R T)\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} + [C]_{N \times N} \begin{Bmatrix} \{\dot{U}_1(\tau_1 T)\} \\ \{\dot{U}_1(\tau_2 T)\} \\ \vdots \\ \{\dot{U}_1(\tau_R T)\} \\ \{\dot{U}_2(\tau_1 T)\} \\ \{\dot{U}_2(\tau_2 T)\} \\ \vdots \\ \{\dot{U}_2(\tau_R T)\} \\ \vdots \\ \{\dot{U}_N(\tau_1 T)\} \\ \{\dot{U}_N(\tau_2 T)\} \\ \vdots \\ \{\dot{U}_N(\tau_R T)\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} + [K]_{N \times N} \begin{Bmatrix} \{U_1(\tau_1 T)\} \\ \{U_1(\tau_2 T)\} \\ \vdots \\ \{U_1(\tau_R T)\} \\ \{U_2(\tau_1 T)\} \\ \{U_2(\tau_2 T)\} \\ \vdots \\ \{U_2(\tau_R T)\} \\ \vdots \\ \{U_N(\tau_1 T)\} \\ \{U_N(\tau_2 T)\} \\ \vdots \\ \{U_N(\tau_R T)\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} =
\end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \{F_1(\tau_1 T)\} \\ \{F_1(\tau_2 T)\} \\ \vdots \\ \{F_1(\tau_R T)\} \\ \{F_2(\tau_1 T)\} \\ \{F_2(\tau_2 T)\} \\ \vdots \\ \{F_2(\tau_R T)\} \\ \vdots \\ \{F_N(\tau_1 T)\} \\ \{F_N(\tau_2 T)\} \\ \vdots \\ \{F_N(\tau_R T)\} \end{Bmatrix}_{N \times 1}$$

(5.124)

$i = 1, 2, 3, \dots, N$

şeklinde yazılır.

Örnek olarak birinci kütle için ($i=1$) bu türevler

$$\{\dot{U}_1(t_j)\} = \left. \frac{dU}{dt} \right|_{t=t_j} = \{\dot{U}_1(\tau_j T)\} = \frac{1}{T} \left. \frac{dU}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_j} = T \sum_{j=1}^R A_{ij} U_1(\tau_j T) \quad (5.125)$$

$$\{\ddot{U}_1(t_j)\} = \left. \frac{d^2 U}{dt^2} \right|_{t=t_j} = \{\ddot{U}_1(\tau_j T)\} = \frac{1}{T^2} \left. \frac{d^2 U}{d\tau^2} \right|_{\tau=\tau_j} = T^2 \sum_{j=1}^R B_{ij} U_1(\tau_j T) \quad (5.126)$$

böylece birinci ve ikinci mertebeden türev ifadeleri örneğin i . Nci serbestlik derecesi için

$$\{\dot{U}_i(t_j)\}_{R \times 1} = T [A_{jk}]_{R \times R} \{U_i(t_j)\}_{R \times 1} \quad (5.127)$$

$$\{\ddot{U}_i(t_j)\}_{R \times 1} = T^2 [B_{jk}]_{R \times R} \{U_i(t_j)\}_{R \times 1} \quad (5.128)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N$$

olur. Bu ifadeler ilgili denklemlerde yazılırsa

$$T^2 [M]_{N \times N} \{ [B_{jk}]_{R \times R} \{U_i(\tau_j T)\}_{R \times 1} \}_{N \times 1} + T [C]_{N \times N} \{ [A_{jk}]_{R \times R} \{U_i(\tau_j T)\}_{R \times 1} \}_{N \times 1} +$$

$$[K]_{N \times N} \{ \{U_i(\tau_j T)\}_{R \times 1} \}_{N \times 1} = \{ \{F_i(\tau_j T)\}_{R \times 1} \}_{N \times 1}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.129)$$

elde edilir. Bu denklemdeki $[M]$, $[C]$, $[K]$, $[A]$, $[B]$ ve $[F]$ matrislerinin her bir elemanı bilinen bir sabit değer olduğundan her bir serbestlik derecesi doğrultusundaki U değerleri göz önüne alınan hesap süresinin (T) her bir adımı için ($\tau_j t$) bulunur. Başka bir ifadeyle

$$\begin{aligned}
[M]_{N \times N} \begin{Bmatrix} [B_{jk}] \{U_1(\tau_j T)\} \\ [B_{jk}] \{U_2(\tau_j T)\} \\ \vdots \\ [B_{jk}] \{U_N(\tau_j T)\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} + [C]_{N \times N} \begin{Bmatrix} [A_{jk}] \{U_1(\tau_j T)\} \\ [A_{jk}] \{U_2(\tau_j T)\} \\ \vdots \\ [A_{jk}] \{U_N(\tau_j T)\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} + [K]_{N \times N} \begin{Bmatrix} \{U_1(\tau_j T)\} \\ \{U_2(\tau_j T)\} \\ \vdots \\ \{U_N(\tau_j T)\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} = \\
\begin{Bmatrix} \{F_1(\tau_j T)\} \\ \{F_2(\tau_j T)\} \\ \vdots \\ \{F_N(\tau_j T)\} \end{Bmatrix}_{N \times 1}
\end{aligned} \quad (5.130)$$

işlemleri yapılır. Daha genel olarak $[M]$, $[C]$ ve $[K]$ matrislerine ait elemanların yanlarındaki vektörler ile çarpılmasıyla

$$\begin{aligned}
T^2 \begin{Bmatrix} m_1 [B_{jk}] \{U_1(\tau_j T)\} \\ m_2 [B_{jk}] \{U_2(\tau_j T)\} \\ \vdots \\ m_N [B_{jk}] \{U_N(\tau_j T)\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} + T \begin{Bmatrix} (c_1 + c_2) [A_{jk}] \{U_1(\tau_j T)\} - c_2 [A_{jk}] \{U_2(\tau_j T)\} \\ -c_2 [A_{jk}] \{U_1(\tau_j T)\} + (c_2 + c_3) [A_{jk}] \{U_2(\tau_j T)\} - c_3 [A_{jk}] \{U_3(\tau_j T)\} \\ \vdots \\ -c_N [A_{jk}] \{U_{(N-1)}(\tau_j T)\} + c_N [A_{jk}] \{U_N(\tau_j T)\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} + \\
\begin{Bmatrix} (k_1 + k_2) \{U_1(\tau_j T)\} - k_2 \{U_2(\tau_j T)\} \\ -k_2 \{U_1(\tau_j T)\} + (k_2 + k_3) \{U_2(\tau_j T)\} - k_3 \{U_3(\tau_j T)\} \\ \vdots \\ -k_N \{U_{(N-1)}(\tau_j T)\} + k_N \{U_N(\tau_j T)\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} = \begin{Bmatrix} \{F_1(\tau_j T)\} \\ \{F_2(\tau_j T)\} \\ \vdots \\ \{F_N(\tau_j T)\} \end{Bmatrix}_{N \times 1}
\end{aligned}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.131)$$

şeklinde sadece ilgili zaman adımları için bilinmeyen yer değiştirmeler, $U_i(\tau_j T)$ ifadeleri elde edilir. Daha sonra hız değerleri

$$\{\ddot{U}_i(t_j)\}_{R \times 1} = T [A_{jk}]_{R \times R} \{U_i(t_j)\}_{R \times 1} \text{ olarak}$$

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{U}_1(\tau_j T)\} \\ \{\dot{U}_2(\tau_j T)\} \\ \vdots \\ \{\dot{U}_N(\tau_j T)\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} = T \begin{Bmatrix} [A_{jk}] \{U_1(\tau_j T)\} \\ [A_{jk}] \{U_2(\tau_j T)\} \\ \vdots \\ [A_{jk}] \{U_N(\tau_j T)\} \end{Bmatrix}_{N \times 1}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N \text{ ve } j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.132)$$

ve benzer şekilde ivme,

$$\{\ddot{U}_i(t_j)\}_{R \times 1} = T^2 [B_{jk}]_{R \times R} \{U_i(t_j)\}_{R \times 1} \text{ ifadesi ile}$$

$$\begin{Bmatrix} \{\ddot{U}_1(\tau_j T)\} \\ \{\ddot{U}_2(\tau_j T)\} \\ \vdots \\ \{\ddot{U}_N(\tau_j T)\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} = T^2 \begin{Bmatrix} [B_{jk}] \{U_1(\tau_j T)\} \\ [B_{jk}] \{U_2(\tau_j T)\} \\ \vdots \\ [B_{jk}] \{U_N(\tau_j T)\} \end{Bmatrix}_{N \times 1} \quad (5.133)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N \text{ ve } j = 1, 2, 3, \dots, N$$

şeklinde hesaplanır.

BÖLÜM ALTI

SAYISAL UYGULAMALAR

Önceki bölümlerde anlatılan yöntem kullanılarak sayısal örnekler verilmiştir. Tek ve çok serbestlik dereceli olarak göz önüne alınan sistemlere ait örnekler, literatürde verilen örneklerden seçilmiştir. Karşılaştırma amacıyla ele alınan örnekler adım adım integrasyon, Wilson, sonlu farklar, trapez, ortalama ivme ve lineer ivme gibi metotların biri veya birkaçı kullanılarak da hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar geliştirilen bilgisayar programı kullanılarak üretilen çizelge ve grafik şeklinde verilmiştir. Bazı problemler için karşılaştırmanın daha kolay yapılabilmesi açısından sonuçlar hem grafik ve hem de çizelge halinde sunulmuştur. Önce tek serbestlik dereceli sistemlere ait lineer ve lineer olmayan analiz örnekleri verilmiş takip eden alt bölümde ise çok serbestlik dereceli sistemler çözülmüştür.

6.1 Tek Serbestlik Dereceli (TSD) Sistemler

6.1.1. Lineer TSD Sistemler

Örnek 1 : Sönümlü tek serbestlik dereceli bir sistemin serbest titreşiminin hesabı göz önüne alınsın. Sistemin hareket denklemi ve başlangıç koşulları aşağıdaki gibi alınmıştır:

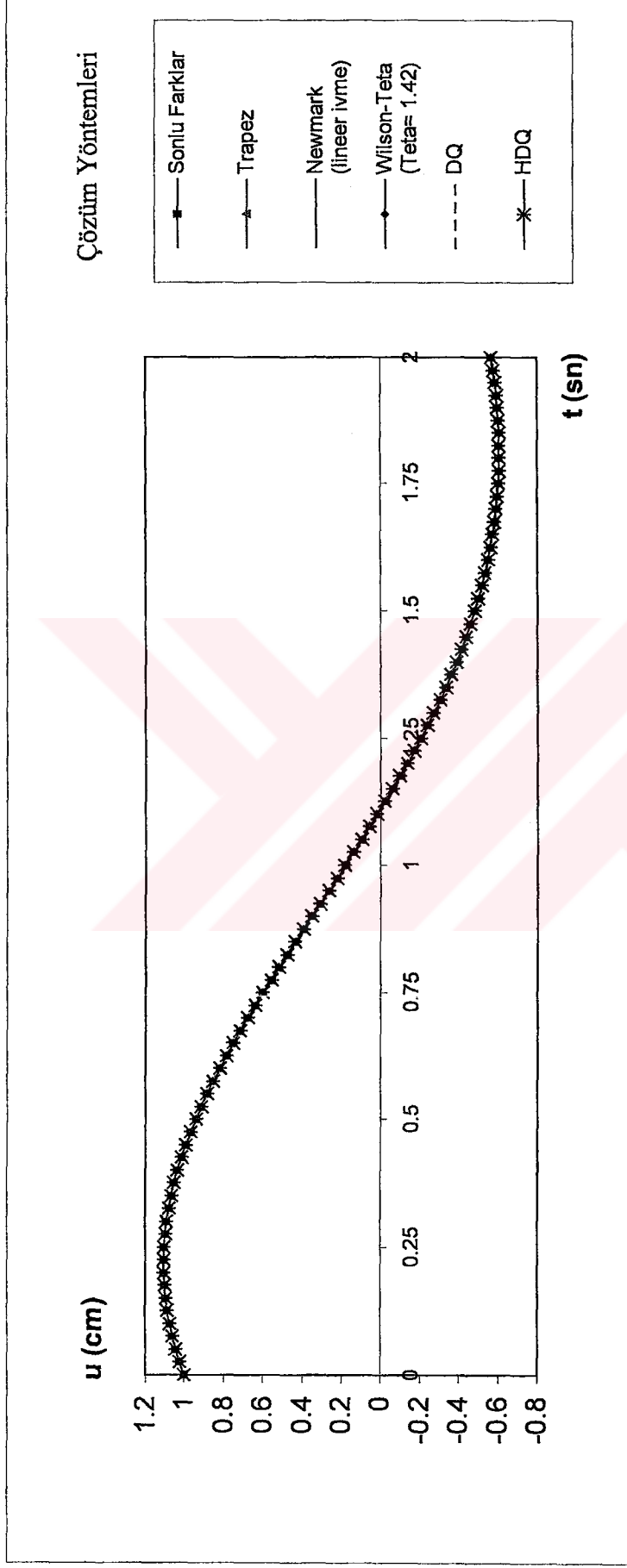
$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = 0$$

$$u(0) = 1 \text{ cm} \quad \text{ve} \quad \dot{u}(0) = 1 \text{ cm/sn.}$$

Sistemin kütlesi; $m = 4 \text{ kg.sn}^2 / \text{cm}$; sönüm katsayısı $c = 3 \text{ kg.sn/cm}$, ve yay rijitliği $k = 16 \text{ kg/cm}$. Hesap zaman aralığı $\Delta t = 0.1 \text{ sn}$ olarak seçilip ilk 2 saniye için HDQ ile hesaplanan yer değiştirme, hız ve ivme değerleri Wilson-Teta ve DQ ile hesaplanan değerler ile kıyaslamalı olarak Tablo 6.1’de ve $\Delta t = 0.025 \text{ sn}$ hesap zaman aralığı ve ilk 2 saniye hesaplanan yer değiştirme değerleri sonlu farklar, Wilson, trapez, Newmark ve DQ ile kıyaslamalı olarak Şekil 6.1 ’de gösterilmiştir.

Tablo 6.1 TSD Sistem İçin HDQ Metodu İle Elde Edilen Sonuçların Karşılaştırılması

Wilson-Teta (Teta= 1.42)				DQ				HDQ			
t (sn)	u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)	t (sn)	u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)	t (sn)	u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)
0	1	1	-4.75	0	1	1	-4.75	0	1	1	-4.75
0.1	1.076392	0.529273	-4.70252	0.1	1.076386	0.529065	-4.70234	0.1	1.076338	0.527547	-4.70101
0.2	1.106236	0.071889	-4.47886	0.2	1.106197	0.071333	-4.47829	0.2	1.105994	0.069155	-4.47584
0.3	1.091709	-0.35564	-4.10011	0.3	1.091601	-0.35663	-4.09893	0.3	1.091216	-0.35867	-4.09586
0.4	1.03653	-0.73911	-3.59179	0.4	1.036308	-0.74058	-3.58979	0.4	1.035787	-0.74179	-3.58681
0.5	0.945702	-1.06702	-2.98254	0.5	0.94532	-1.06897	-2.97956	0.5	0.944773	-1.06878	-2.97751
0.6	0.825236	-1.33081	-2.30283	0.6	0.824651	-1.33317	-2.29873	0.6	0.824232	-1.33123	-2.29851
0.7	0.681844	-1.52498	-1.58364	0.7	0.68102	-1.52765	-1.57834	0.7	0.680911	-1.52376	-1.58083
0.8	0.522637	-1.64708	-0.85524	0.8	0.521549	-1.64992	-0.84875	0.8	0.521941	-1.64408	-0.8547
0.9	0.35482	-1.69758	-0.1461	0.9	0.353458	-1.70043	-0.13851	0.9	0.354532	-1.69283	-0.14851
1	0.185417	-1.67965	0.518069	1	0.183787	-1.68235	0.526615	1	0.185698	-1.67332	0.512199
1.1	0.021008	-1.59886	1.115111	1.1	0.019133	-1.60123	1.12439	1.1	0.021997	-1.59125	1.105453
1.2	-0.13248	-1.46278	1.627013	1.2	-0.13456	-1.46466	1.636744	1.2	-0.13069	-1.45429	1.61346
1.3	-0.26997	-1.28053	2.040296	1.3	-0.2722	-1.28178	2.050153	1.3	-0.26731	-1.27165	2.022973
1.4	-0.38736	-1.06238	2.346208	1.4	-0.38967	-1.06288	2.355836	1.4	-0.38381	-1.05362	2.325472
1.5	-0.48158	-0.81921	2.540722	1.5	-0.4839	-0.81888	2.549752	1.5	-0.4772	-0.81111	2.517144
1.6	-0.55069	-0.5621	2.624349	1.6	-0.55294	-0.5609	2.632423	1.6	-0.54558	-0.55516	2.598691
1.7	-0.59385	-0.30184	2.6018	1.7	-0.59594	-0.29979	2.608584	1.7	-0.58815	-0.29652	2.574974
1.8	-0.61126	-0.04861	2.481506	1.8	-0.6131	-0.04575	2.486708	1.8	-0.60514	-0.04529	2.454525
1.9	-0.60409	0.188421	2.275028	1.9	-0.6056	0.192005	2.278413	1.9	-0.59777	0.189478	2.24896
2	-0.57435	0.401365	1.996392	2	-0.57549	0.405541	1.997798	2	-0.56807	0.399987	1.972303



Şekil 6.1 $\Delta t=0.025\text{sn}$ için değişik yöntemler kullanılarak elde edilen deplasmanların karşılaştırılması

Örnek 2: Tek serbestlik dereceli sönümlü lineer sistem bir sistemin serbest titreşim hesabı yapılmıştır. Bu sistemin hareket denklemi

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$

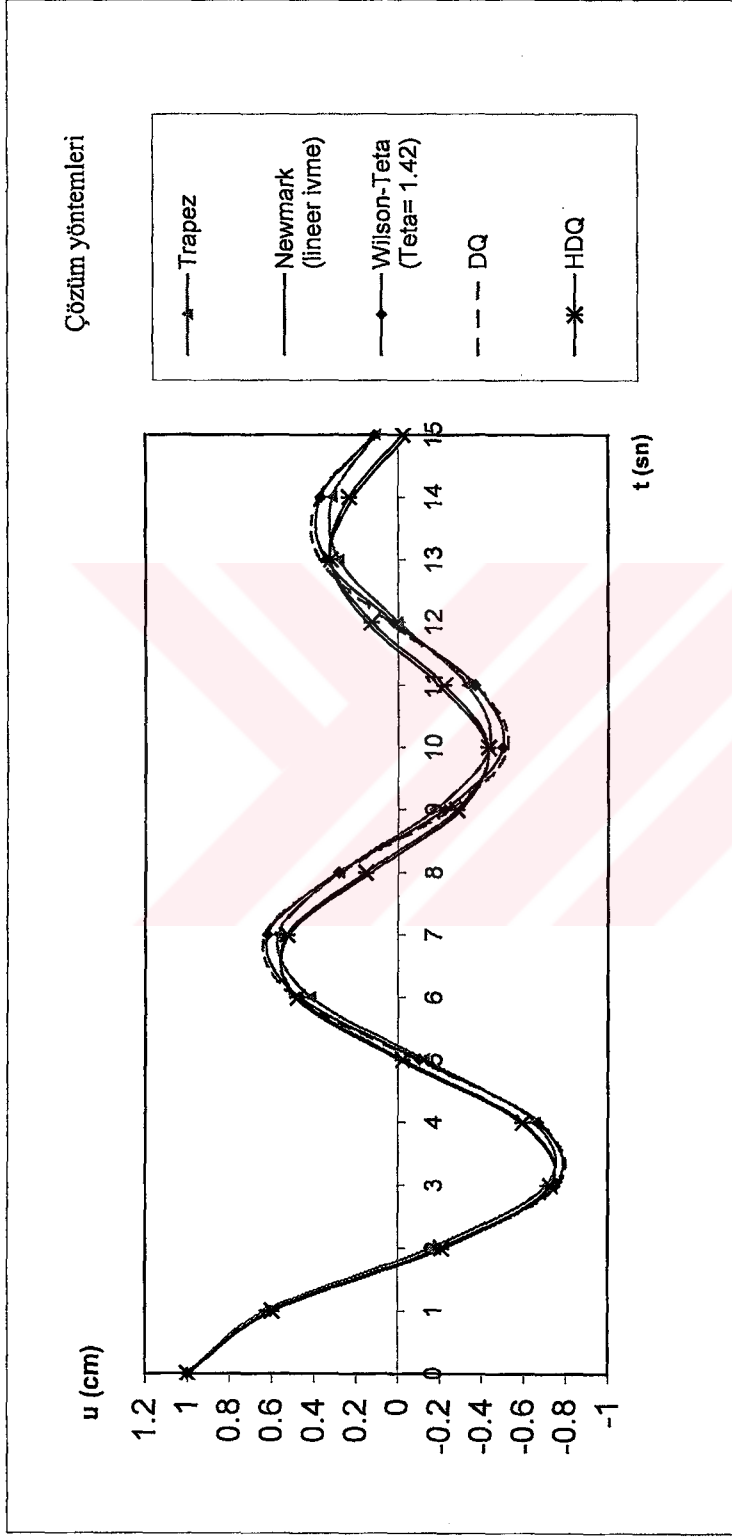
ve başlangıç koşulları $u(0) = 1$ cm ve $\dot{u}(0) = 0$ şeklindedir. Sistem parametrelerine ait sayısal değerler; $m = 1$ kg.sn²/cm, $c = 0.2$ kg.sn/cm, $k = 1$ kg/cm olarak seçilmiştir. Sayısal çözüm ilk 15 sn için yapılacaktır. İşlemlerde zaman adımı $\Delta t = 0.75$ sn alınmıştır. Yöntemlere göre hesaplanan yer değiştirme, hız ve ivme değerleri Tablo 6.2 ve Tablo 6.3 ile Şekil 6.2, 6.3 ve 6.4 'da karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Bu örnek de DQ ve HDQ metotlarının performansını karşılaştırmak amacıyla hata analizi yapılmıştır. Bu amaçla çözüm hassasiyeti üzerinde büyük etkisi olan zaman aralığı (Δt) farklı değerlerde alınarak çözüm yapılmıştır. Hesaplanan hata değerleri Şekil 6.5 ve 6.6'da sunulmuştur. Bilindiği gibi sayısal integrasyon yöntemlerinde çözüm hassasiyetini etkileyen en önemli parametre hesap için dikkate alınan zaman adımı veya zaman aralığıdır (Δt). Hesap yapılan süre boyunca daha küçük aralıklarda sonuca gidilmesi daha doğru sonuçlar vermekte, ancak daha fazla düğüm kullanıldığından hesap süresi artmaktadır. Örnek olarak bu uygulamada $\Delta t = 0.75$ sn için ilk 15 sn işlem yapılmış yani 0-15 sn için 21 adet düğüm noktası kullanılmıştır. Hesap adım aralığı $\Delta t = 0.75$ sn için HDQ metodu Newmark yöntemi referans alınırsa çok yüksek doğrulukta sonuçlar vermiştir. Ancak DQ metodu ile bulunan değerlerde büyük sapmalar görülmüştür. Hesap aralığı ancak $\Delta t = 0.5$ sn olarak alınınca DQ yöntemiyle yeter doğrulukta sonuçlar elde edilmiştir. Bu durumda ise çözüm için gerekli denklem sayısı ve dolayısı ile çözüm süresi artmaktadır. Eşit olmayan düğüm noktası için denklem 5.28 kullanılarak hesaplanan değerler, eşit aralıklı denklem 5.26 kullanılarak hesaplanan değerlerden daha hassas olduğu Şekil 6.5 ve Şekil 6.6' da açıkça görülmektedir. Benzer bulgular sonlu farklar için yapılan karşılaştırmada da görülmüştür. Sonlu farklar için DQ ve özellikle HDQ metotları ile karşılaştırılınca daha büyük hata değerleri hesaplanmıştır. Eşit olmayan düğüm noktası dağılımının dinamik problemlerde daha iyi sonuç verdiği diğer araştırmacılar tarafından giriş ve plakların titreşim analizi ile ilgili çalışmalarda da vurgulanmıştır (Fung,2001; Bert and Malik, 1996; Du ve diğ., 1995).

Tablo 6.2 TSD Sistemin Lineer Serbest Titremine ait Karşılaştırmalı Sayısal Sonuçlar

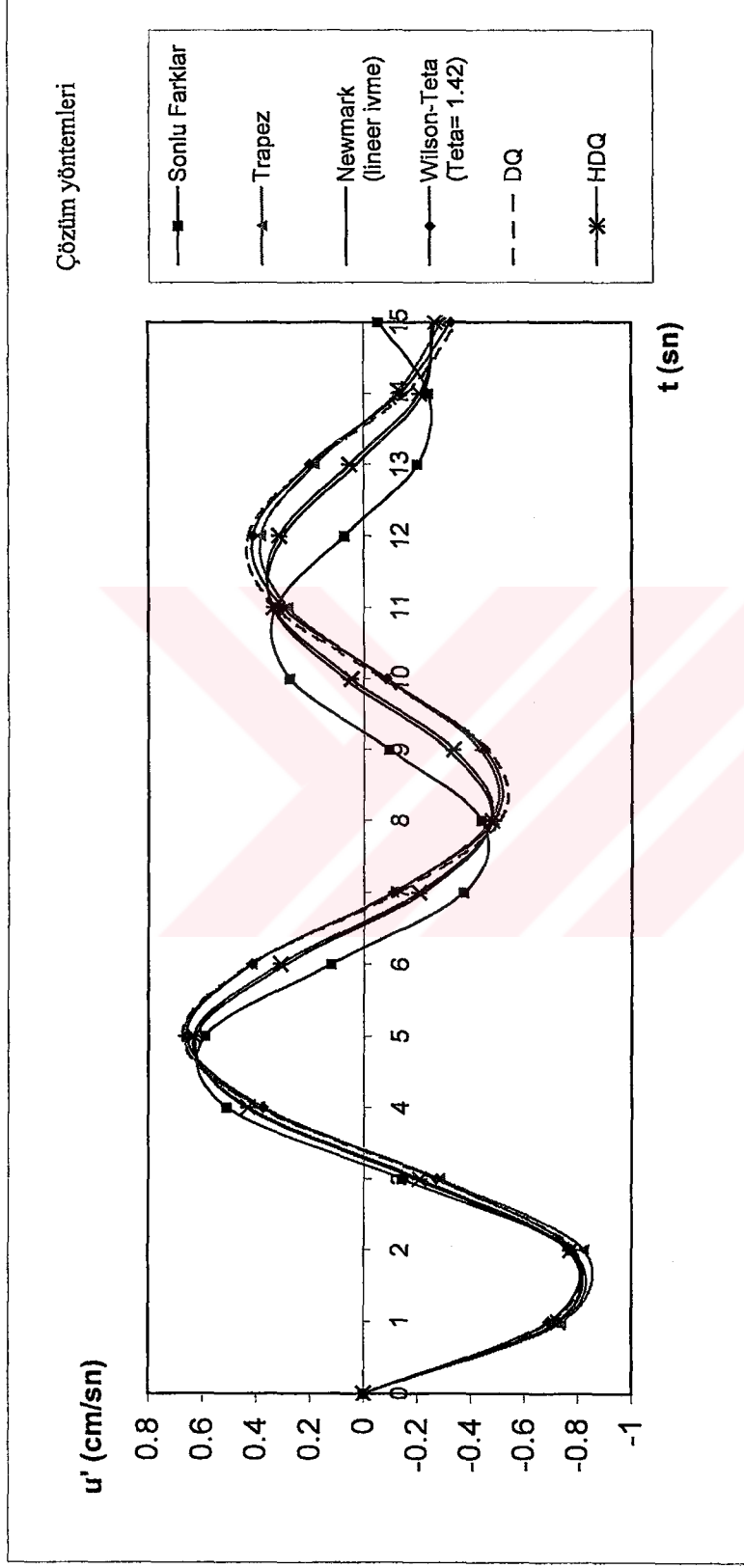
Sonlu Farklar				Trapez				Newmark (ortalama ivme)			
t (sn)	u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)	t (sn)	u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)	t (sn)	u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)
0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1
1	0.5	-0.74074	-0.48148	1	0.62963	-0.74074	-0.48148	1	0.62963	-0.74074	-0.48148
2	-0.36364	-0.77503	0.412894	2	-0.15226	-0.82305	0.316872	2	-0.15226	-0.82305	0.316872
3	-0.73967	-0.14297	0.851233	3	-0.70553	-0.28349	0.762231	3	-0.70553	-0.28349	0.762231
4	-0.37491	0.509795	0.454298	4	-0.65422	0.38612	0.576995	4	-0.65422	0.38612	0.576995
5	0.26436	0.590332	-0.29322	5	-0.1259	0.670517	-0.0082	5	-0.1259	0.670517	-0.0082
6	0.547069	0.12145	-0.64454	6	0.417408	0.416101	-0.50063	6	0.417408	0.416101	-0.50063
7	0.281041	-0.37387	-0.34609	7	0.571036	-0.10885	-0.54927	7	0.571036	-0.10885	-0.54927
8	-0.19211	-0.43997	0.213873	8	0.278914	-0.4754	-0.18384	8	0.278914	-0.4754	-0.18384
9	-0.40459	-0.09407	0.477942	9	-0.17653	-0.4355	0.263633	9	-0.17653	-0.4355	0.263633
10	-0.21063	0.274605	0.259397	10	-0.43374	-0.07892	0.449525	10	-0.43374	-0.07892	0.449525
11	0.139548	0.326641	-0.15532	11	-0.33155	0.283292	0.274897	11	-0.33155	0.283292	0.274897
12	0.299193	0.072255	-0.35345	12	0.001089	0.381996	-0.07749	12	0.001089	0.381996	-0.07749
13	0.157817	-0.20158	-0.19422	13	0.283646	0.183117	-0.32027	13	0.283646	0.183117	-0.32027
14	-0.10132	-0.24237	0.11263	14	0.314234	-0.12194	-0.28985	14	0.314234	-0.12194	-0.28985
15	-0.22124	-0.05541	0.261294	15	0.107525	-0.29148	-0.04923	15	0.107525	-0.29148	-0.04923

Tablo 6.3 TSD Sistemin Lineer Serbest Titreşimine ait Karşılaştırmalı Sayısal Sonuçlar

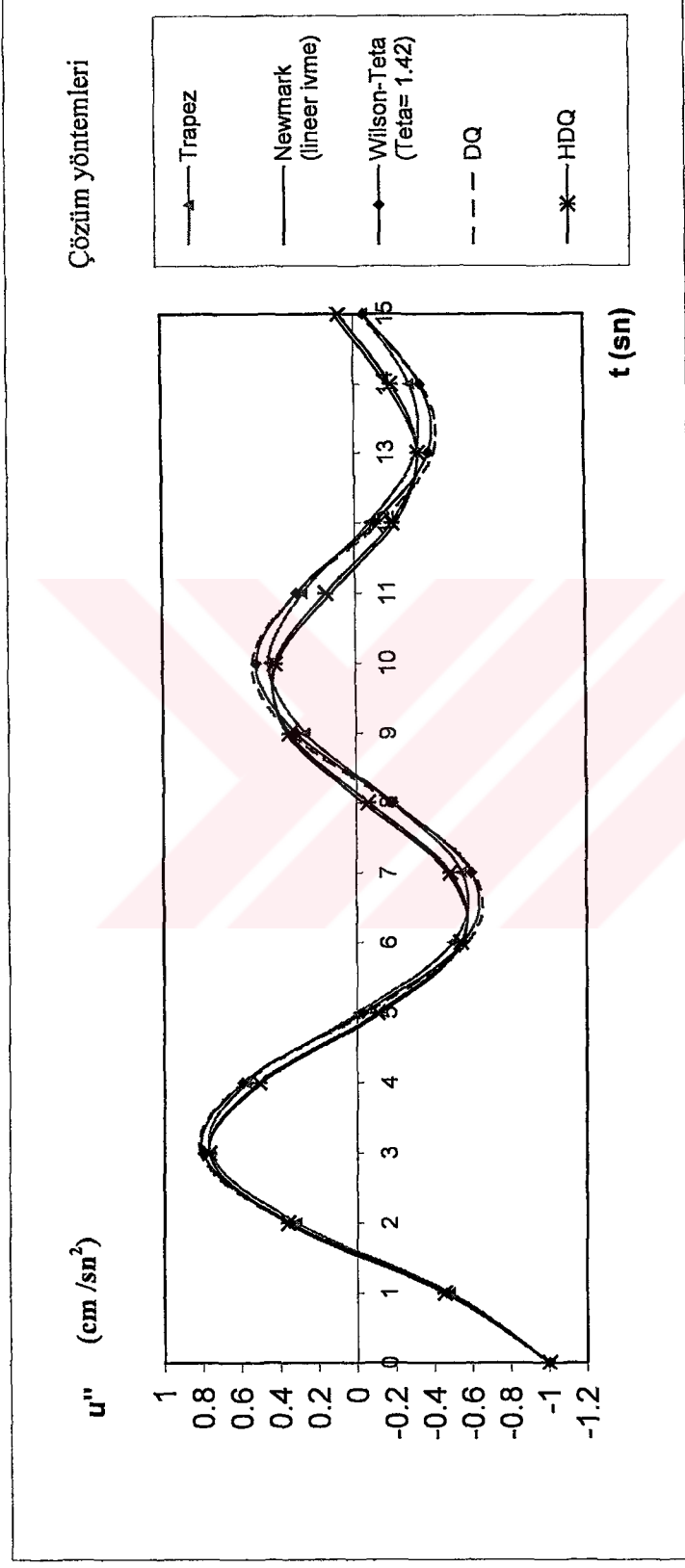
Newmark (lineer ivme)					Wilson-Teta (Teta= 1.42)					DQ					HDQ				
t (sn)	u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)		u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)			u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)			u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)		
0	1	0	-1		1	0	-1			1	0	-1			1	0	-1		
1	0.592105	-0.72368	-0.44737		0.602612	-0.69217	-0.46418			0.60003	-0.64991	-0.46005			0.598592	-0.72663	-0.45327		
2	-0.21884	-0.76177	0.371191		-0.19596	-0.77931	0.351826			-0.2057	-0.78736	0.363174			-0.20764	-0.77222	0.362087		
3	-0.72897	-0.19245	0.767459		-0.74759	-0.27216	0.802019			-0.79985	-0.26932	0.813714			-0.72576	-0.20755	0.767265		
4	-0.58305	0.438916	0.495269		-0.67035	0.375035	0.59534			-0.67362	0.39046	0.59553			-0.59608	0.431026	0.509878		
5	0.000129	0.624078	-0.12494		-0.10102	0.660241	-0.03103			-0.08858	0.676431	-0.0467			-0.0211	0.633193	-0.10554		
6	0.491128	0.287311	-0.54859		0.472443	0.415418	-0.55553			0.493608	0.417065	-0.57702			0.48055	0.309225	-0.54239		
7	0.516868	-0.22311	-0.47225		0.620258	-0.10963	-0.59833			0.633295	-0.12656	-0.60798			0.5285	-0.20566	-0.48737		
8	0.13049	-0.4768	-0.03513		0.285224	-0.48669	-0.18789			0.277697	-0.52968	-0.17576			0.156175	-0.47948	-0.06028		
9	-0.2979	-0.31401	0.360701		-0.22125	-0.4521	0.311868			-0.24535	-0.4619	0.337731			-0.27997	-0.33603	0.347176		
10	-0.42346	0.070975	0.409269		-0.49852	-0.08344	0.515203			-0.52057	-0.07073	0.534719			-0.42931	0.047466	0.41982		
11	-0.19489	0.33914	0.127062		-0.36781	0.301394	0.30753			-0.36953	0.327226	0.304087			-0.22001	0.333985	0.153216		
12	0.151455	0.297221	-0.2109		0.021809	0.4123	-0.10427			0.042768	0.440403	-0.12885			0.128434	0.314887	-0.19141		
13	0.323543	0.027273	-0.329		0.346182	0.200656	-0.38631			0.383558	0.295989	-0.41276			0.322137	0.05283	-0.3327		
14	0.213031	-0.22158	-0.16871		0.370696	-0.13461	-0.34377			0.382564	-0.15858	-0.35085			0.233976	-0.20955	-0.19207		
15	-0.04821	-0.25621	0.099457		0.114649	-0.32703	-0.04924			0.100369	-0.351	-0.03117			-0.02316	-0.26728	0.076615		



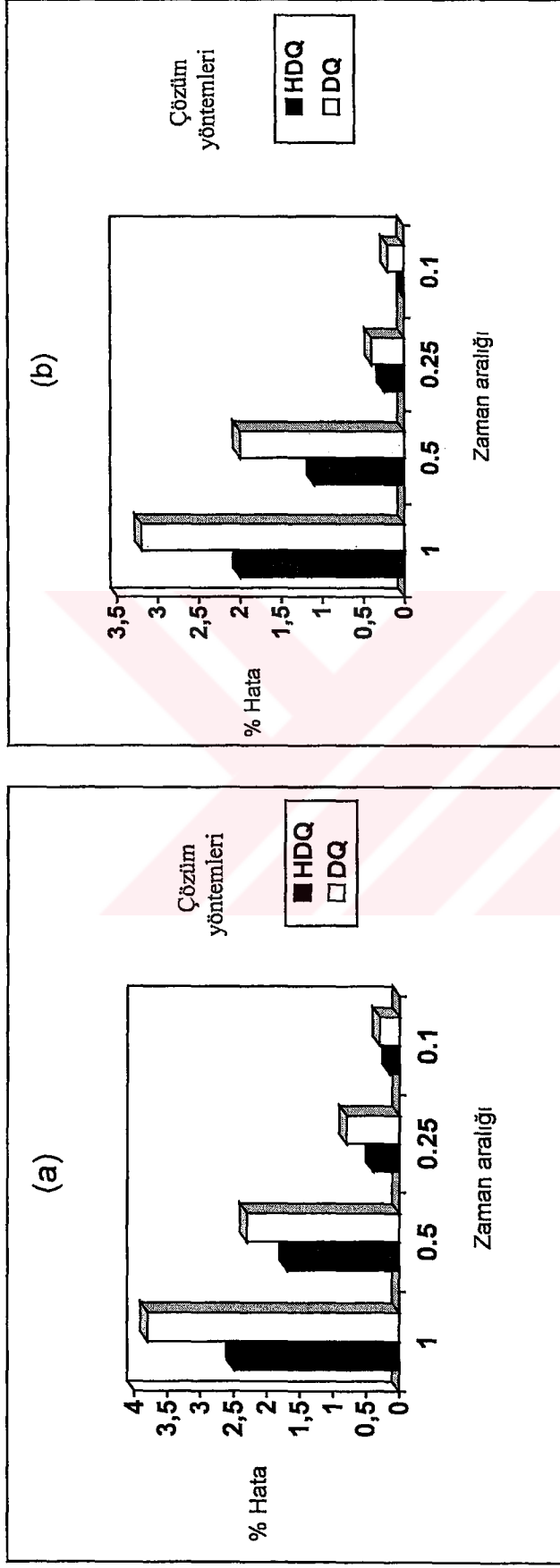
Şekil 6.2 Deplasman için çeşitli yöntemler ile elde edilen değerlerin HDQ ile karşılaştırılması ($\Delta t=0.75\text{sn}$)



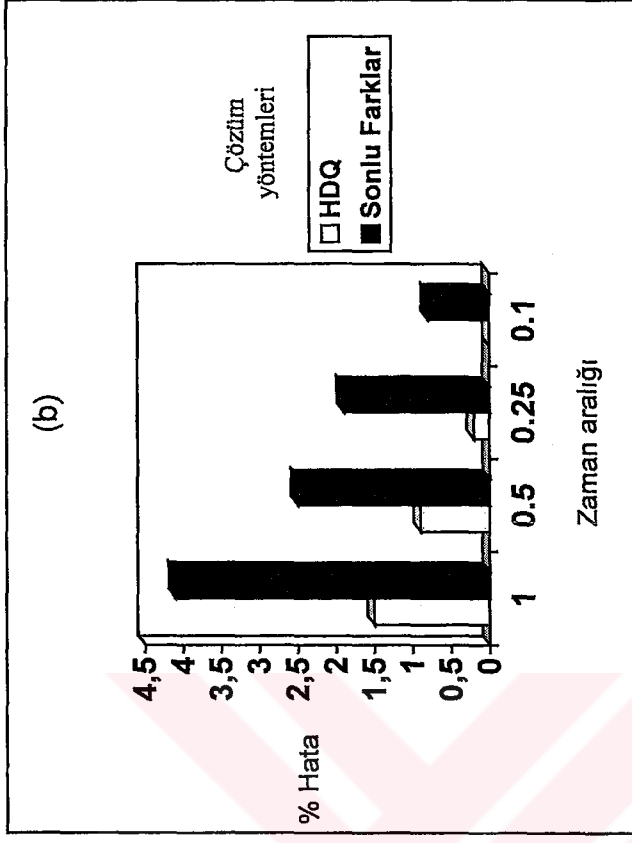
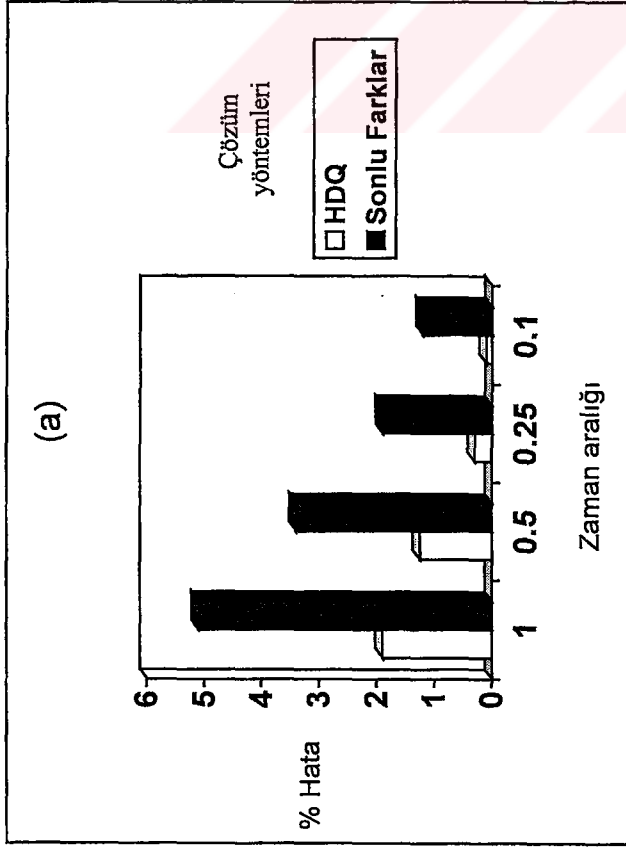
Şekil 6.3 Hız için çeşitli sayısal yöntemler elde edilen değerlerin HDQ ile karşılaştırılması ($\Delta t=0.75\text{sn}$)



Şekil 6.4 Çeşitli yöntemler ile hesaplanan ivme değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması ($\Delta t=0.75\text{sn}$)

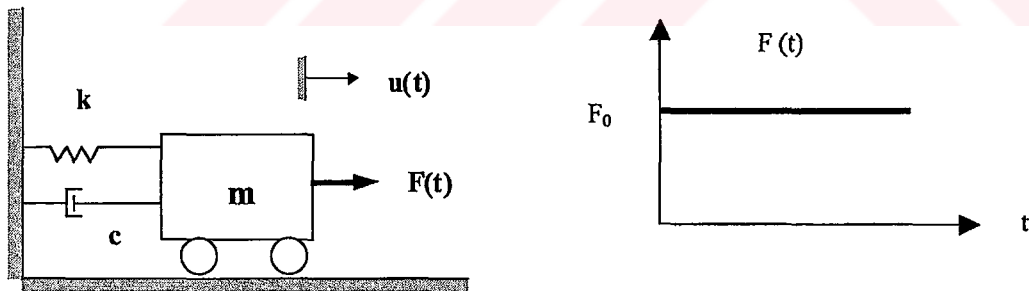


Şekil 6.5 DQ ve HDQ metotlarında farklı zaman aralıkları (Δt) için hesaplanan hata değerleri (a) Eşit aralıklı düğüm noktası dağılımı (b) Eşit olmayan aralıklı düğüm noktası dağılımı



Şekil 6.6 HDQ ve sonlu farklar metotlarında farklı zaman aralıkları (Δt) için hesaplanan hata değerleri (a) Eşit aralıklı düğüm noktası dağılımı (b) Eşit olmayan aralıklı düğüm noktası dağılımı

Örnek 3 : Yük fonksiyonu Şekil 6.7’de verilmiş olan tek serbestlik dereceli bir sisteme ait kütle $m = 2 \text{ kg.sn}^2 / \text{cm}$, sönüm katsayısı $c=0$ (sönümsüz), yay rijitliği $k=16 \text{ kg/cm}$, $F_0 = 5 \text{ kg}$, sisteme ait başlangıç koşulları $u(0) = 0$ ve $\dot{u}(0) = 0$ olarak verilmiştir. Hesap zaman adımı $\Delta t = 0.25 \text{ sn}$ olarak seçilip $0 \leq t \leq 4 \text{ sn}$ alınarak ilk 4 saniye için işlem yapılmıştır. Yer değiştirme ve ivme için Trapez, Newmark, Wilson-Teta, DQ ve HDQ yöntemleri kullanılarak bulunan sonuçlar Şekil 6.8 ve Şekil 6.9’da verilmiştir. Sonuçlardan görüleceği üzere özellikle Trapez yöntemi ile elde edilen sonuçlar diğer yöntemlere göre büyük sapma göstermiştir. Yine $\Delta t = 0.2 \text{ sn}$ zaman adımı için ortalama ivme, lineer ivme, Wilson-Teta, HDQ ile elde edilen yer değiştirme değerleri karşılaştırmalı olarak Şekil 6.10’da görülmektedir. Şekil 6.10’dan görüleceği üzere zaman aralığı küçüldükçe HDQ ile elde edilen sonuçlar analitik sonuçlar ile aynıdır. Şekil 6.14’de çeşitli zaman aralıkları için HDQ, DQ, Newmark ve Wilson metotları ile hesaplanan en büyük hata değerleri görülmektedir. Zaman adımı 0.25 sn için HDQ ile hesaplanan hata %2’nin altına düşmüştür. Zaman adımı 0.2 sn için HDQ ile bulunan sonuç analitik sonuçtan %0.9 mertebesinde farklılık göstermektedir. Yeterli hassas sonuçlar HDQ metodu ile zaman adımının 0.2 sn ($\Delta t = 0.2 \text{ sn}$) olması durumunda elde edilirken Newmark için zaman aralığının 0.15 sn , Wilson metodu için ise 0.1 sn alınması gerekmektedir.

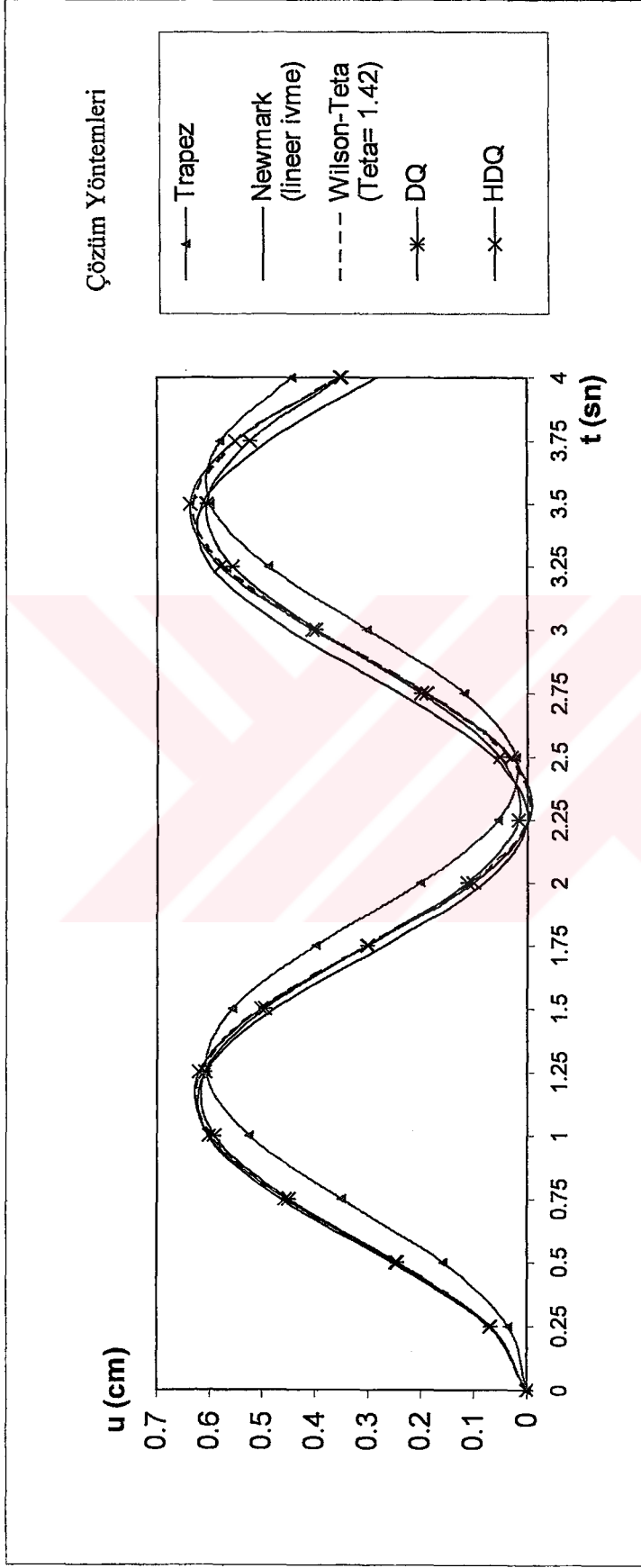


Şekil 6.7 TSD sistem ve etki eden sabit dış yük fonksiyonu

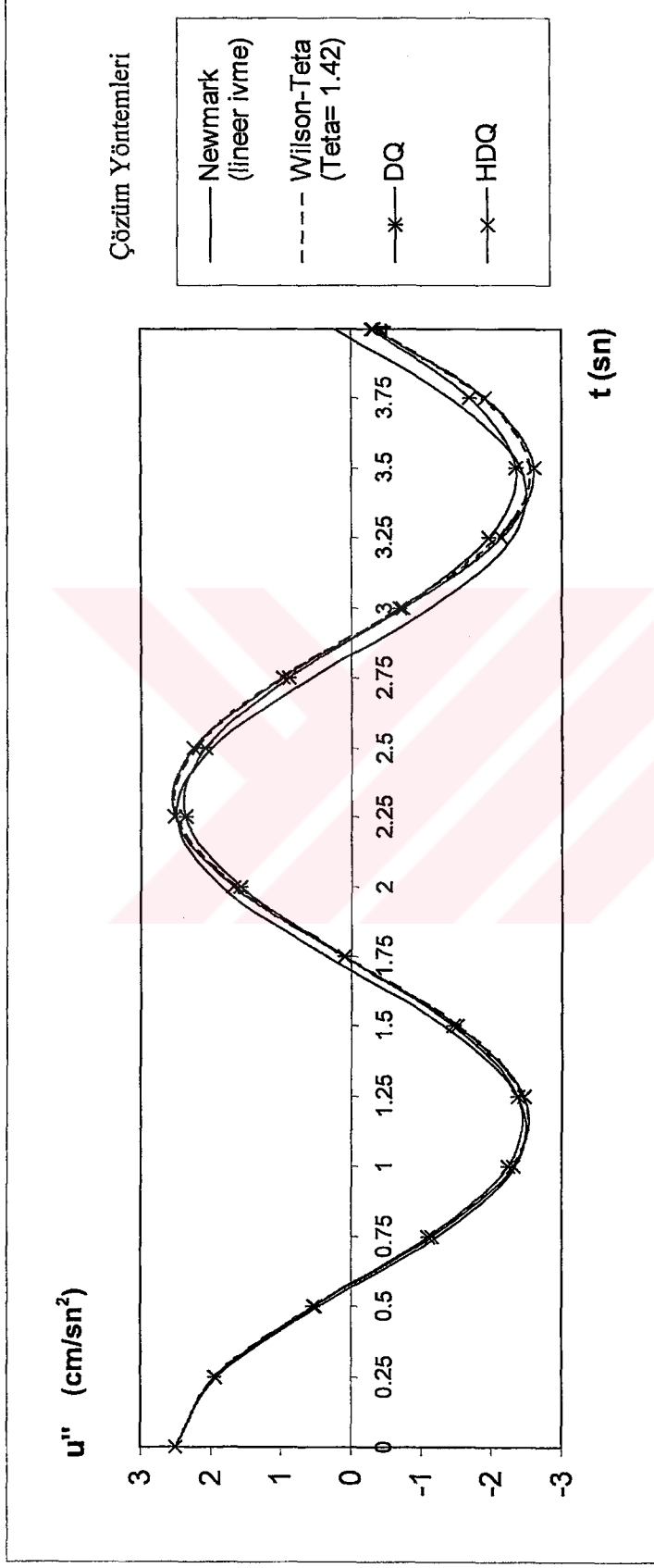
Bu probleme ait; yer değiştirme, hız ve ivme için analitik sonuçlar (Paz, 1998) sırasıyla

$$u(t) = \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega t), \quad \dot{u}(t) = \omega \frac{F_0}{k}(\sin \omega t), \quad \ddot{u}(t) = \omega^2 \frac{F_0}{k}(\cos \omega t)$$

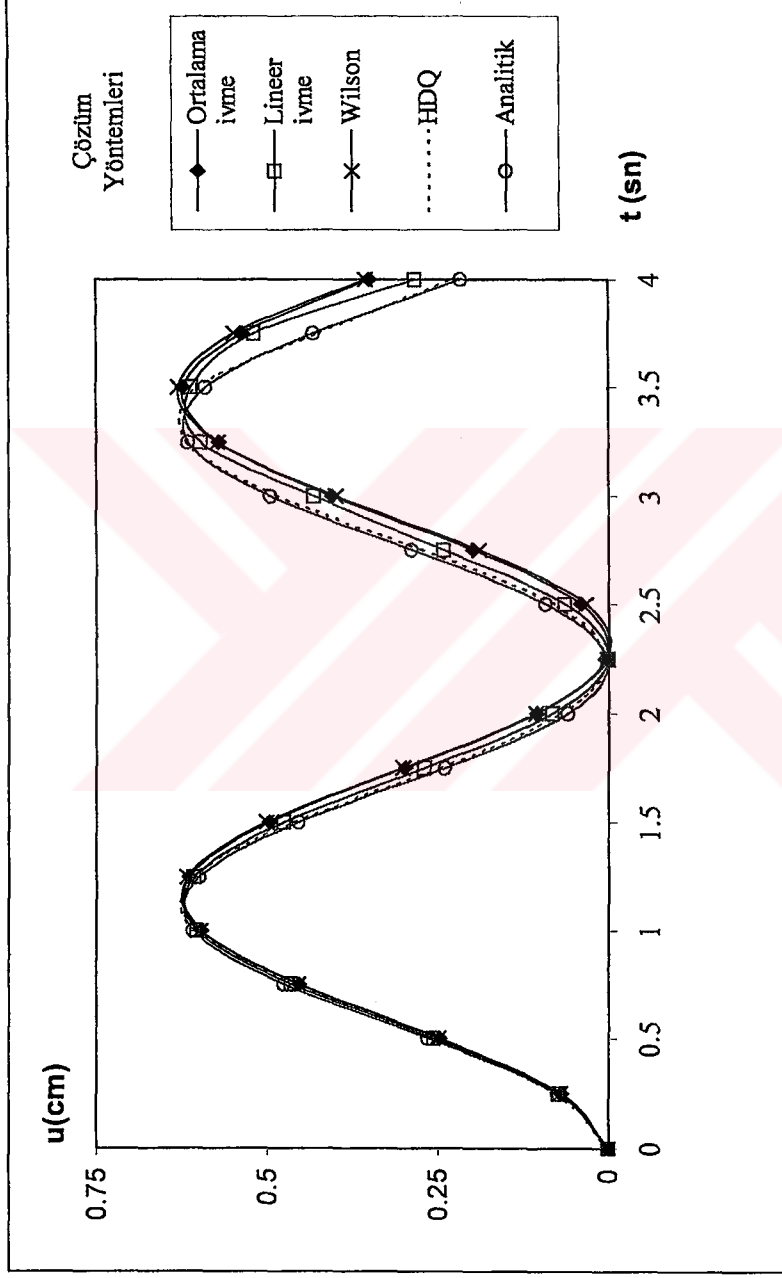
olarak tanımlıdır.



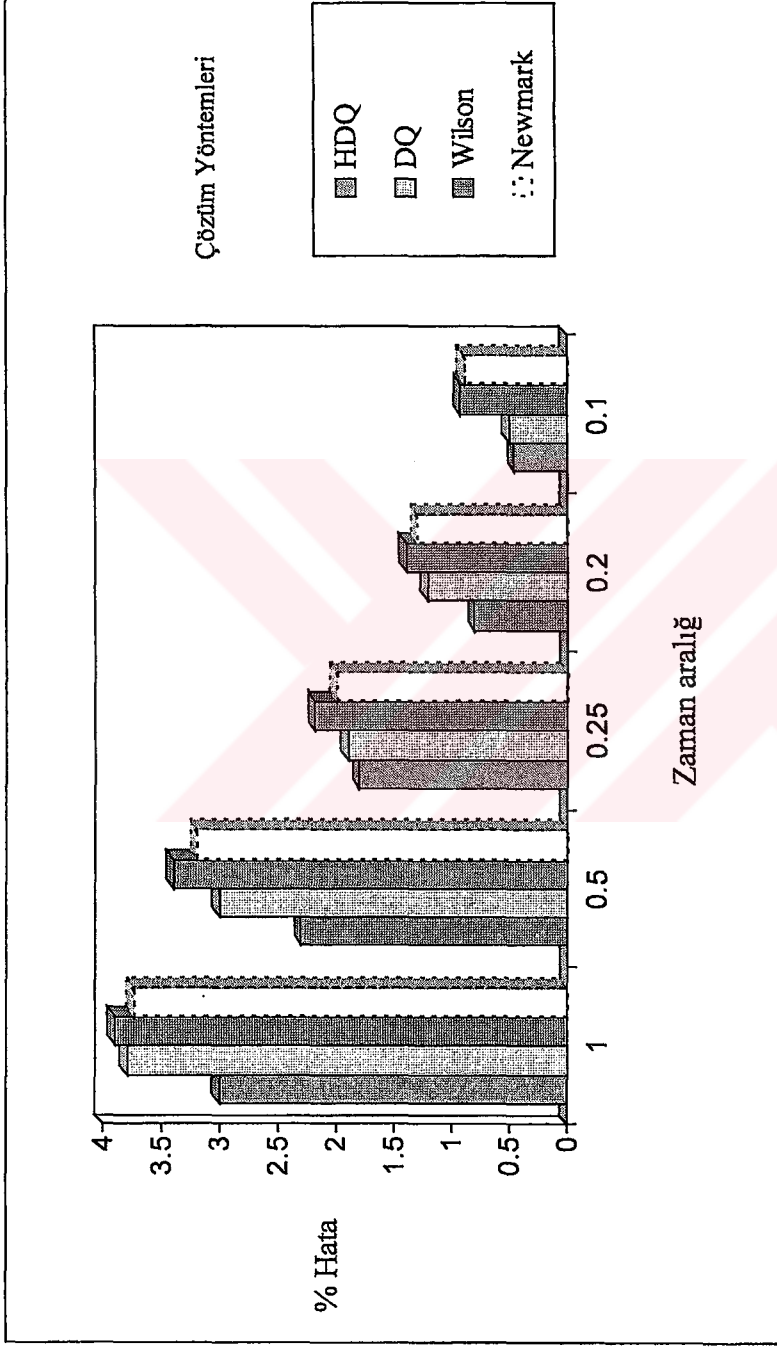
Şekil 6. 8 Çeşitli yöntemler ile hesaplanan deplasman değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması ($\Delta t = 0.2$ sn)



Şekil 6.9 Çeşitli yöntemler ile hesaplanan ivme değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması ($\Delta t = 0.2$ sn)



Şekil 6.10 Çeşitli yöntemler ile hesaplanan deplasman değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması ($\Delta t = 0.2$ sn)

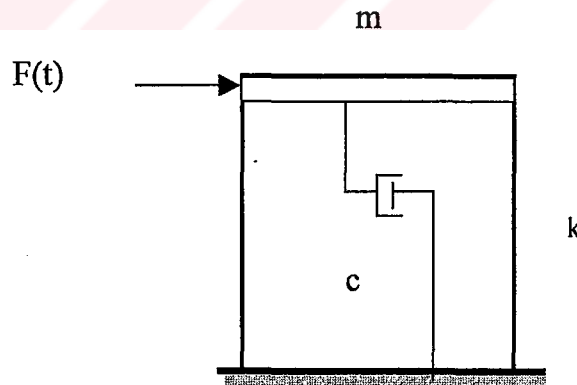


Şekil 6.11 HDQ ile diğer metotların farklı zaman aralıkları (Δt) ve eşit olmayan düğüm noktası dağılımı için hesaplanan hata değerleri

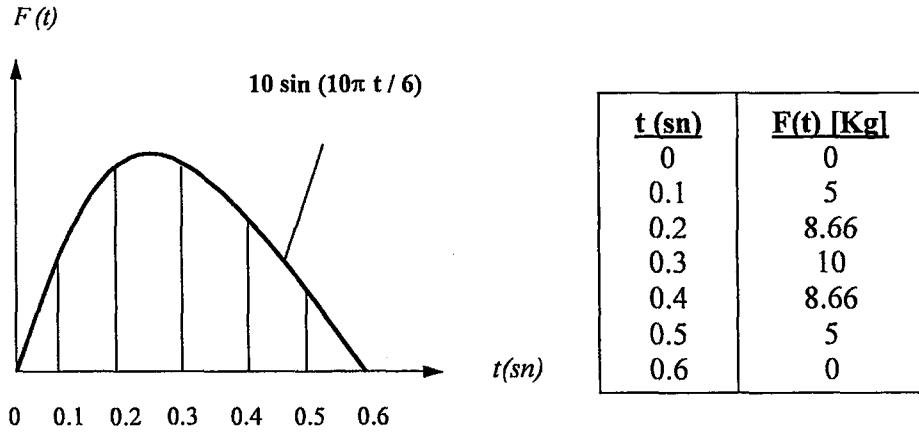
Örnek 4: Şekil 6.12’de sunulan tek serbestlik dereceli sistem aşağıda tanımlanan yük fonksiyonu ile zorlanmaktadır.

$$F(t) = F_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{0.6}\right)$$

Burada $F_0 = 10$ kg olarak verilmiştir. Yük fonksiyonunun zamana göre değişimi Şekil 6.13’de sunulmuştur. Kütle, $m = 0.2533$ kg.sn² /cm, sönüm katsayısı, $c = 0.1592$ kg.sn/cm, yay katsayısı, $k = 10$ kg/cm olarak verilmiştir. Chopra (Chopra,1995) tarafından verilen bu sistemde $0 \leq t \leq 1$ zaman aralığı boyunca ve $\Delta t = 0.1$ sn zaman adımı için deplasmanlar, başlangıç koşulları $u(0) = 0$ ve $\dot{u}(0) = 0$ alınarak trapez, Newmark, Wilson-Teta, DQ ve HDQ yöntemleri kullanılarak hesaplanmış ve sonuçlar Şekil 6.14’de sunulmuştur. Elde edilen değerler Newmark ve Wilson yöntemleri ile hesaplanan değerler ile çakışmıştır. HDQ ve Newmark yöntemleri için zaman adımı $\Delta t = 0.1$ sn, Wilson ve Trapez yöntemleri için $\Delta t = 0.05$ sn seçilmiştir. HDQ yöntemi ile hesaplanan değerler, zaman adımı daha büyük seçildiği halde Newmark yöntemi ile hesaplanan değerler ile uyum içindedir.



Şekil 6.12 Tek serbestlik dereceli sönümlü zorlanmış sistem

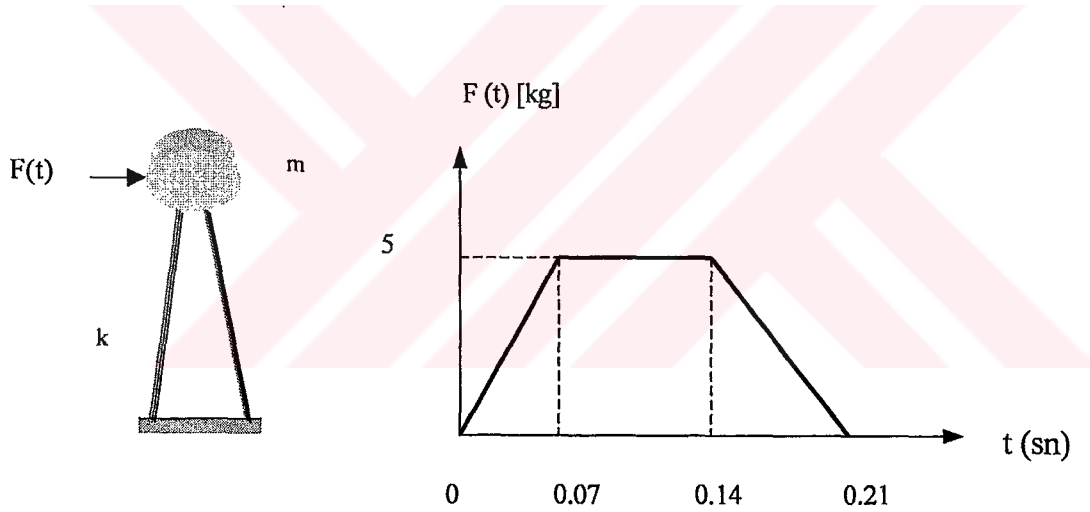


Şekil 6.13 Dış yük fonksiyonu

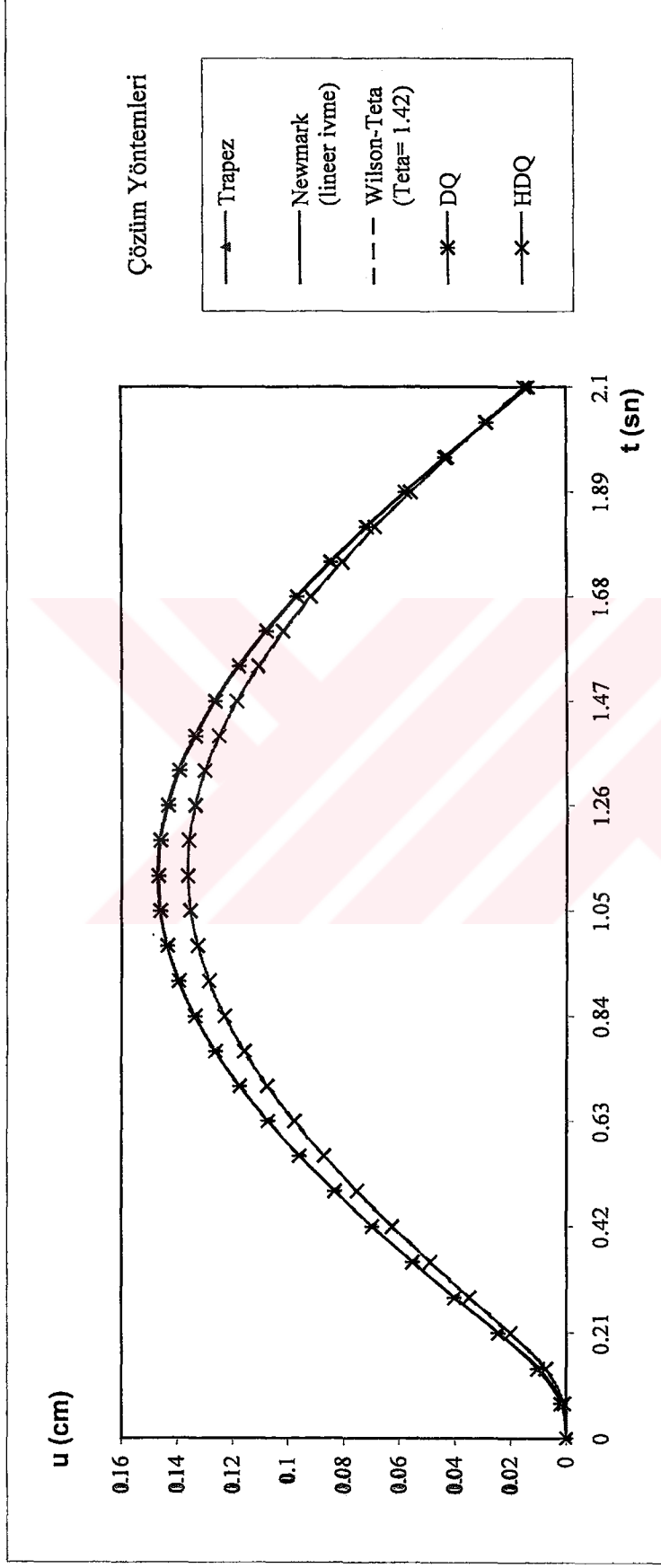


Şekil 6.14 Farklı yöntemler ile hesaplanan deplasman değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması ($\Delta t = 0.1 \text{ sn}$)

Örnek 5: Şekil 6.15’de verilen su kulesi trapez şeklinde zorlamaya maruzdur. Toplam rijitlik $k = 7 \text{ kg / cm}$, kütle, $m = 3 \text{ kg.sn}^2 / \text{cm}$ ve sönüm katsayısı, $c = 0.2 \text{ kg.sn / cm}$ dir. $0 \leq t \leq 2.1 \text{ sn}$ ve $\Delta t = 0.07 \text{ sn}$ zaman aralığı için hesap yapılmıştır. Sistem $u(0) = 0$ ve $\dot{u}(0) = 0$ ile verilen başlangıç koşullarına sahiptir. Harmonik diferansiyel quadrature, diferansiyel quadrature, Newmark, Wilson metotları ile hesaplanan deplasman değerlerinin zaman ile değişimi ise Şekil 6.16’da grafik olarak verilmiştir. Şekil 6.16’dan görüleceği üzere HDQ yöntemiyle hesaplanan yer değiştirme değerleri Newmark ve Wilson yöntemleri ile hesaplanan değerleri ile çakışmıştır. DQ yöntemi ile hesaplanan değerler ise Newmark, Wilson ve HDQ ile hesaplanan değerlerden uzaklaşmıştır. HDQ yöntemi DQ yöntemine göre daha doğru sonuçlar vermiştir.

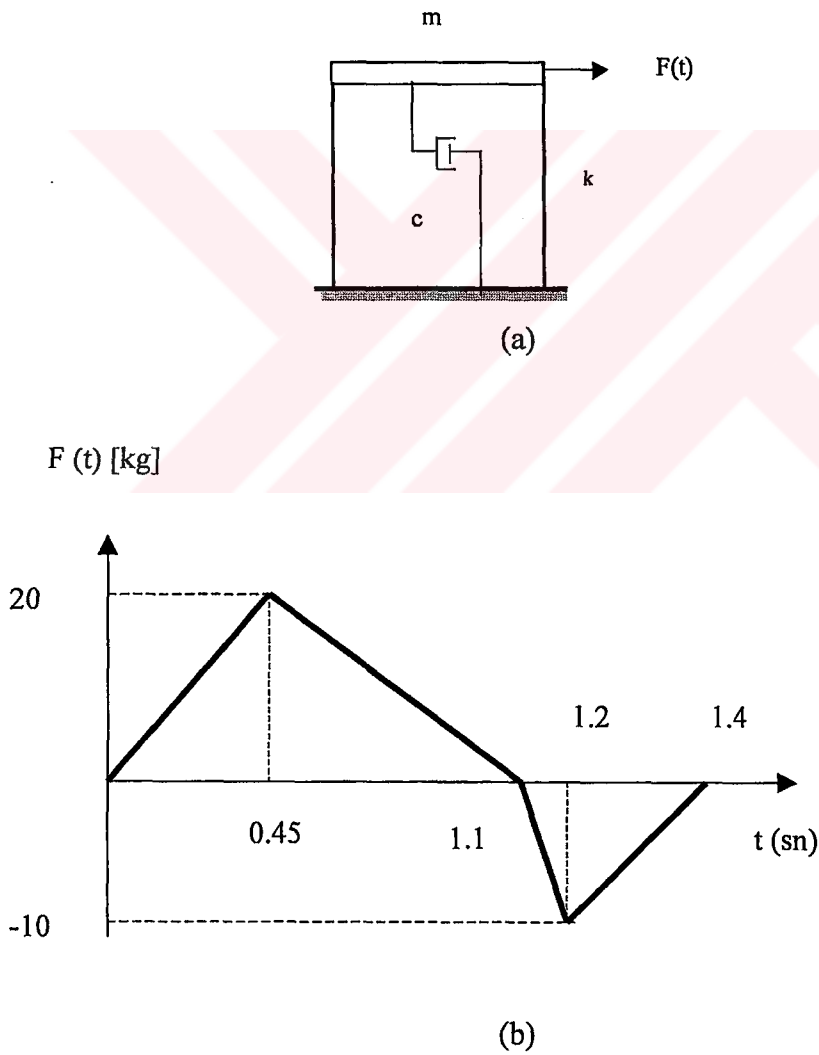


Şekil 6.15 TSD olarak modellenen bir su kulesi ve etki eden zorlama kuvveti

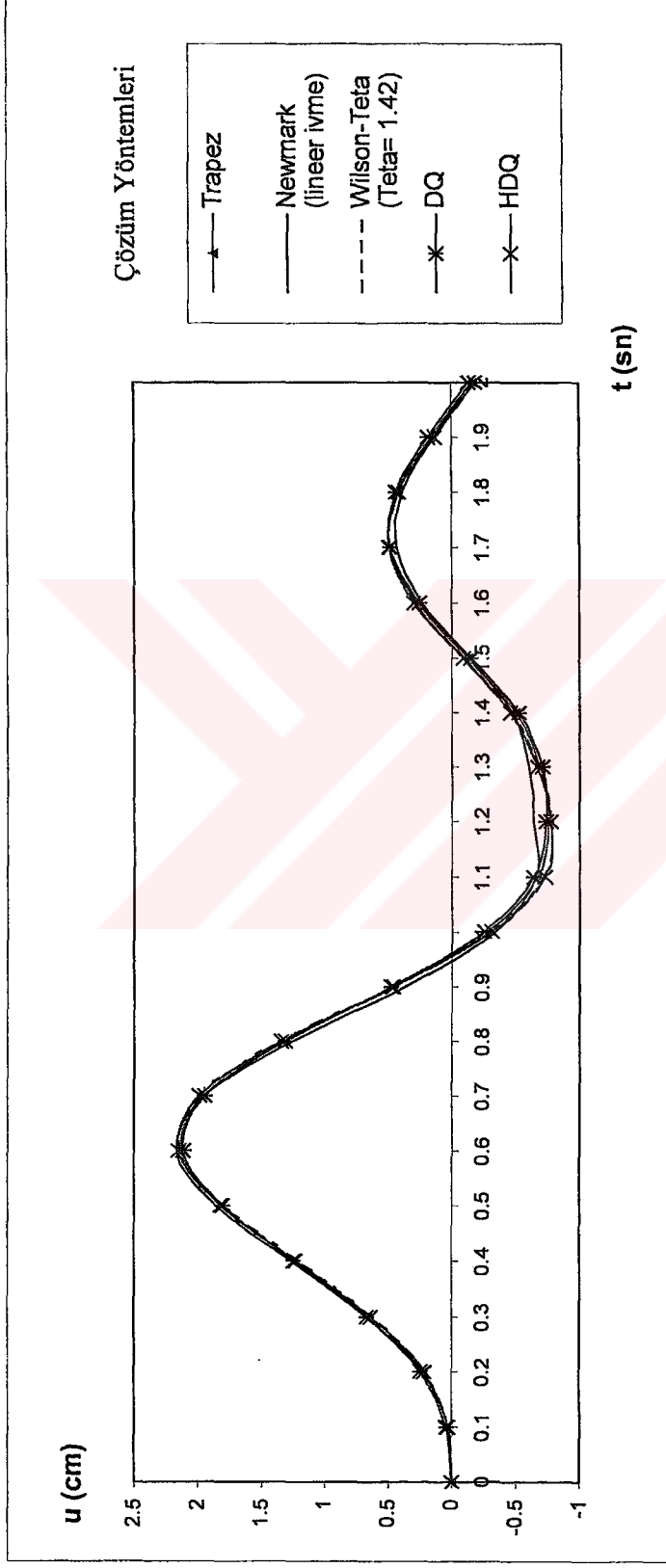


Şekil 6.16 Çeşitli yöntemler ile hesaplanan deplasman değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması ($\Delta t = 0.07 \text{ sn}$)

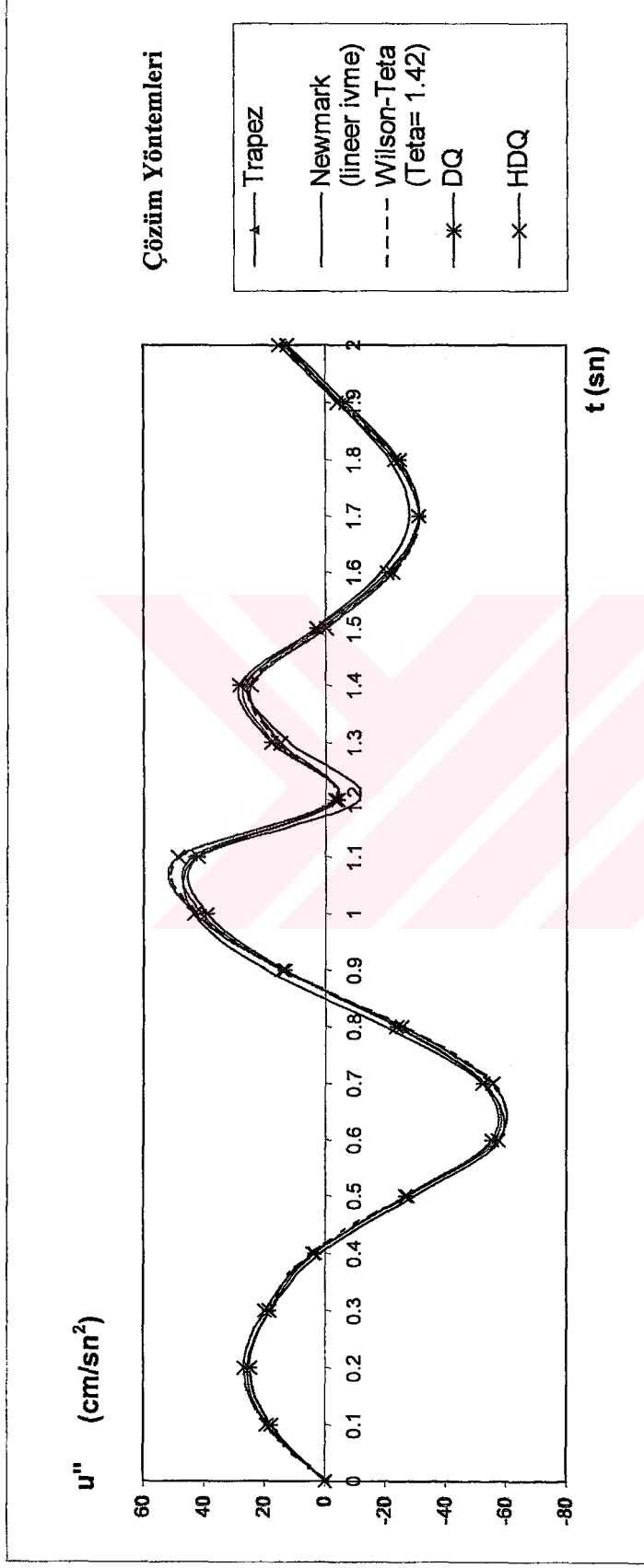
Örnek 6: Tek katlı, tek açıklıklı Şekil 6.17’de sunulan kayma çerçevesinin kütlesinin kat seviyesinde topraklandığı kabul edilmiştir (Paz, 1998). Tek serbestlik dereceli sistemin kütlesi $m = 0.2 \text{ kg.sn}^2 / \text{cm}$; sönüm katsayısı $c = 0.274 \text{ kg.sn} / \text{cm}$; elastik yay katsayısı $k = 12.35 \text{ kg} / \text{cm}$; $\Delta t = 0.1 \text{ sn}$ olarak alınmış $u(0) = 0$ ve $\dot{u}(0) = 0$ başlangıç koşulları altında sistemin yer değiştirme ve ivmeleri Newmark, Wilson, DQ ve HDQ kullanılarak hesaplanmış ve yer değiştirmeler Şekil 6.18’de ivmeler Şekil 6.19’da sunulmuştur. Bulunan yer değiştirme ve ivme değerlerinden görüleceği üzere HDQ yöntemi ile hesaplanan değerler diğer yöntemler ile hesaplanan değerler ile çakışmaktadır.



Şekil 6.17 (a) Tek katlı çerçeve, (b) etki eden zorlama kuvveti



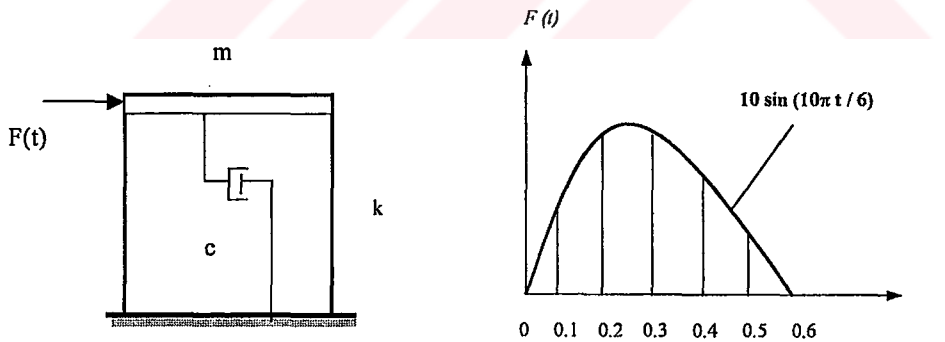
Şekil 6.18 Çeşitli yöntemler ile deplasman değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması ($\Delta t = 0.1 \text{ sn}$)



Şekil 6.19 Çeşitli yöntemler ile ivme değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması ($\Delta t = 0.1 \text{ sn}$)

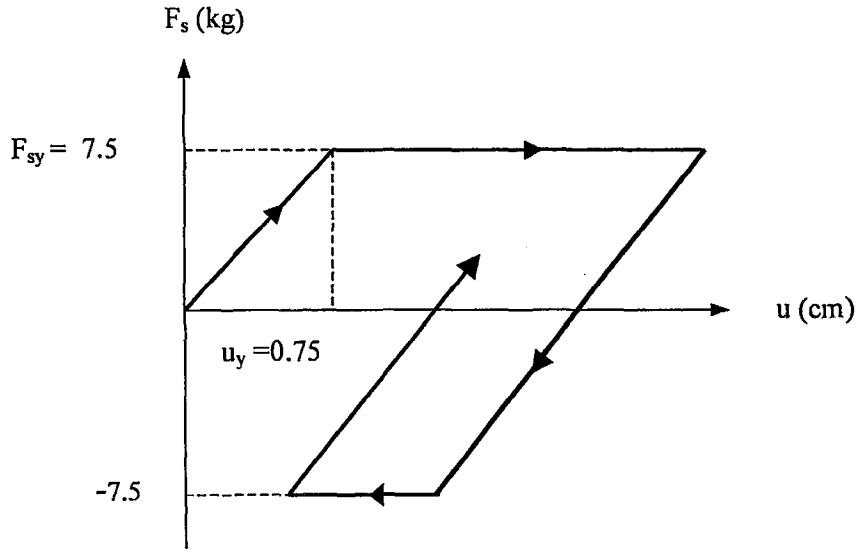
6.1.2 Lineer Olmayan TSD Sistemler

Örnek 7 : Örnek 4’de lineer davranış için çözülen (Chopra,1995) tek serbestlik dereceli sistemin bu kez lineer olmayan zorlanmış titreşim davranışı dikkate alınarak ivme ve yer değiştirmeler hesaplanmıştır. Sisteme etkiyen yük Şekil 6.20’de verilmiştir. Tek serbestlik dereceli sistemin kütlesi $m= 0.2533 \text{ kg.sn}^2 / \text{cm}$, yay katsayısı $k = 10 \text{ kg / cm}$ ve sönüm katsayısı $c=0.1592 \text{ kg.sn/cm}$ olarak verilmektedir. Sistemin doğrusal olmayan yük-yer değiştirme ilişkisi Şekil 6.21’de görülmektedir. Şekil 6.21’de u_y akmanın başladığı andaki yer değiştirme ve F_{sy} akma kuvvetini göstermektedir. Sayısal uygulamalarda zaman adımları $\Delta t= 0.1 \text{ sn}$ şeklinde alınmış ve hesap ilk 1 sn için yapılmıştır. Elde edilen yer değiştirme, hız ve ivme değerleri DQ, HDQ, adım adım integrasyon ve Newmark’ın ortalama ivme yöntemleri ile karşılaştırmalı olarak Tablo 6.4’de ve yer değiştirme değerlerinin zamana göre değişimi Şekil 6.22’de sunulmuştur. $\Delta t= 0.1 \text{ sn}$ için HDQ yöntemi ile elde edilen değerler, $\Delta t= 0.05 \text{ sn}$ için Newmark yöntemi ile elde edilen değerler ile uyum içindedir. HDQ için zaman adımı ($\Delta t= 0.1 \text{ sn}$) Newmark yönteminde kullanılan ($\Delta t= 0.05 \text{ sn}$) zaman adımının iki katı daha büyük seçildiği halde elde edilen değerler yeter doğruluktadır.



$t \text{ (sn)}$	$F(t) \text{ [kg]}$
0	0
0.1	5
0.2	8.66
0.3	10
0.4	8.66
0.5	5
0.6	0

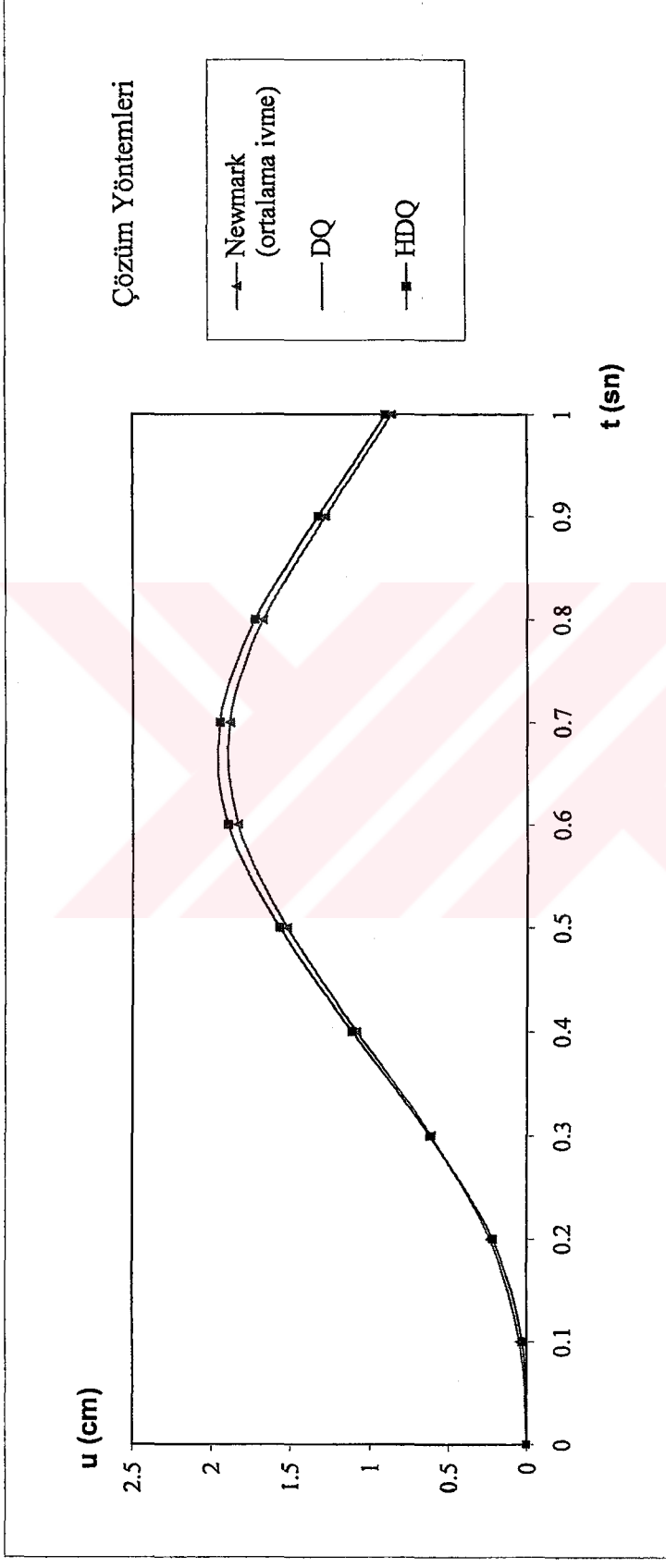
Şekil 6.20 Sisteme etkiyen yük fonksiyonu ve her bir zaman için yük değerleri



Şekil 6.21 Sisteme etkiyen elasto-plastik yük fonksiyonu

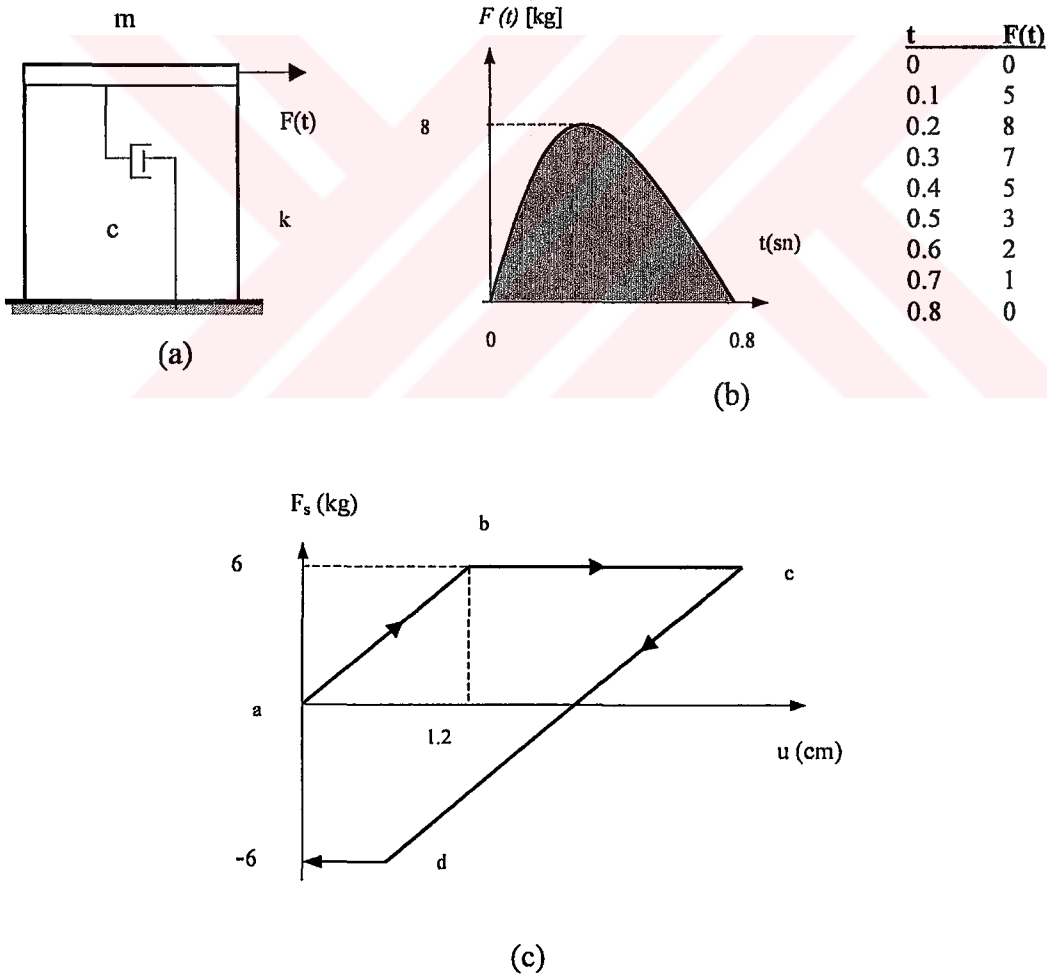
Tablo 6.4 TSD Bir Sitemin Non-linear Zorlanmış Titreşimine Ait Karşılaştırmalı Sonuçlar ($\Delta t = 0.1 \text{ sn}$)

Newmark (ortalama ivme)					DQ					Adım Adım İntegrasyon					HDQ				
t (sn)	u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)		u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)			u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)			u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)		
0	0	0	0		0	0	0			0	0	0			0	0	0		
0,1	0,043667	0,873332	17,46664		0,029983	0,899496	17,9904			0,029984	0,899518	17,99036			0,029984	0,899512	17,99037		
0,2	0,232616	2,905657	23,17986		0,219324	2,981708	23,65682			0,219331	2,981858	23,65645			0,219329	2,981821	23,65654		
0,3	0,612061	4,683247	12,37195		0,616571	4,771167	12,13864			0,6166	4,771543	12,13725			0,616593	4,771449	12,1376		
0,4	1,082523	4,725985	1,610435		1,112925	4,741352	1,600777			1,112995	4,741896	1,600435			1,112978	4,74176	1,600521		
0,5	1,527903	4,181613	-12,4979		1,57154	4,195692	-12,5067			1,571674	4,196554	-12,5073			1,571641	4,196338	-12,5071		
0,6	1,837634	2,013002	-30,8743		1,89794	2,025973	-30,8825			1,898167	2,027033	-30,8832			1,89811	2,026768	-30,883		
0,7	1,889265	-0,98036	-28,993		1,94926	-0,96822	-29,0006			1,949591	-0,96719	-29,0013			1,949508	-0,96745	-29,0011		
0,8	1,671517	-3,3746	-18,8917		1,724711	-3,35001	-18,6387			1,72513	-3,34938	-18,6426			1,725025	-3,34954	-18,6416		
0,9	1,279946	-4,45683	-2,75276		1,323983	-4,38987	-2,16486			1,324434	-4,38999	-2,16954			1,324321	-4,38996	-2,16837		
1	0,861007	-3,92195	13,4503		0,901363	-3,79063	14,1431			0,90177	-3,79144	14,14054			0,901668	-3,79124	14,14118		



Şekil 6.22 Farklı yöntemler ile hesaplanan deplasman değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması ($\Delta t = 0.1$ sn)

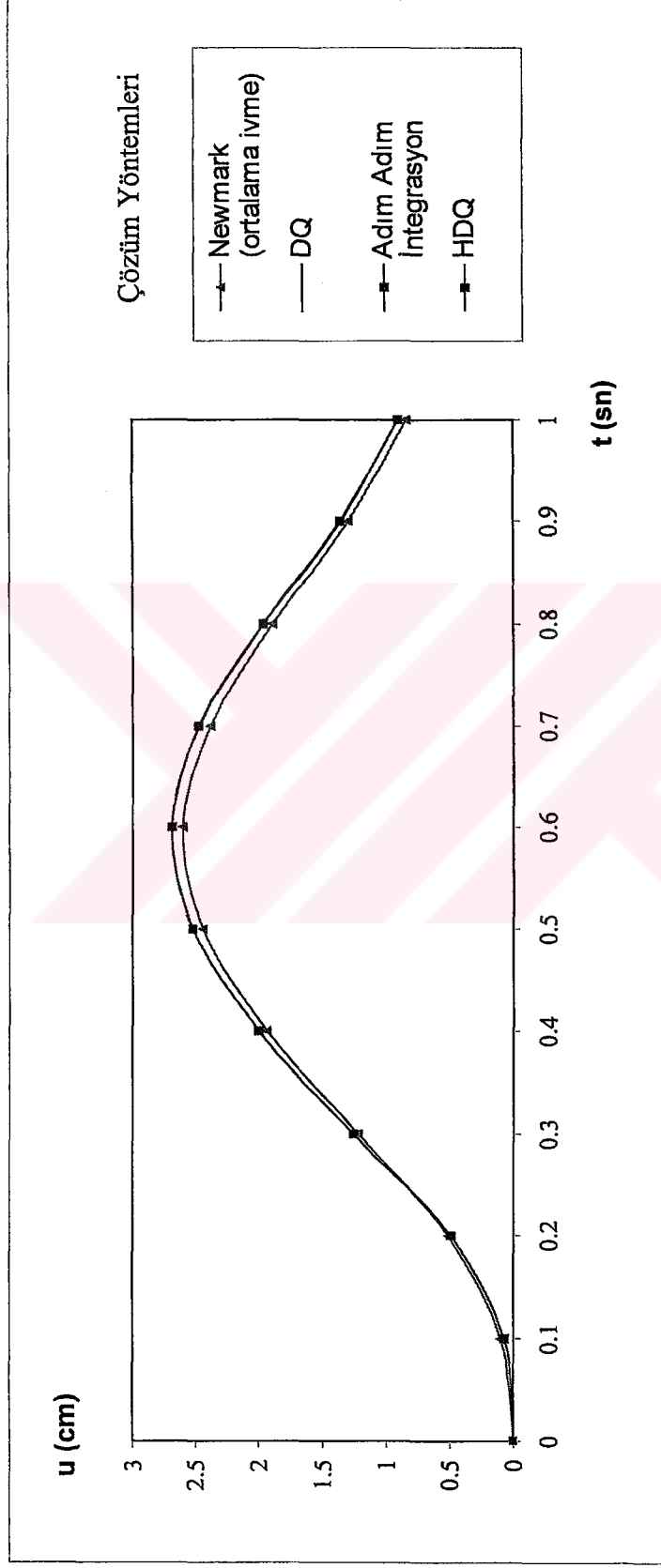
Örnek 8 : Bir kayma çerçevesinin yük geçmişi ve elasto-plastik yay rijitliği Şekil 6.23'de sunulmuştur (Clough ve Penzien, 1992). Çerçevenin topaklanmış kütlesi $m = 0.1 \text{ kg.sn}^2 / \text{cm}$, sönüm katsayısı, $c = 0.2 \text{ kg.sn/cm}$ ve yay katsayısı $k = 5 \text{ kg/cm}$ dir. Başlangıç koşulları $u(0) = 0$ ve $\dot{u}(0) = 0$ olarak verilmiştir. Sayısal çözüm, $\Delta t = 0.1 \text{ sn}$ hesap adımı ve ilk 1 sn için yapılacaktır. Yer değiştirme, hız ve ivme değerlerinin çalışmada kullanılan HDQ yöntemi ve diğer yöntemler ile hesaplanan değerleri Tablo 6.5'de yer değiştirme değerleri ise karşılaştırmalı olarak Şekil 6.24'de sunulmuştur. Tablo 6.5'de ve Şekil 6.24'den görüleceği üzere HDQ yöntemi ile elde edilen değerler adım adım integrasyon sonuçları ile hemen hemen çakışmaktadır. Newmark için bulunan değerler ise kabul edilebilir olmakla birlikte HDQ yöntemi kadar hassas değildir.



Şekil 6.23 (a) TSD sistem; (b) Yük fonksiyonu; (c) Nonlineer yük-deplasman eğrisi

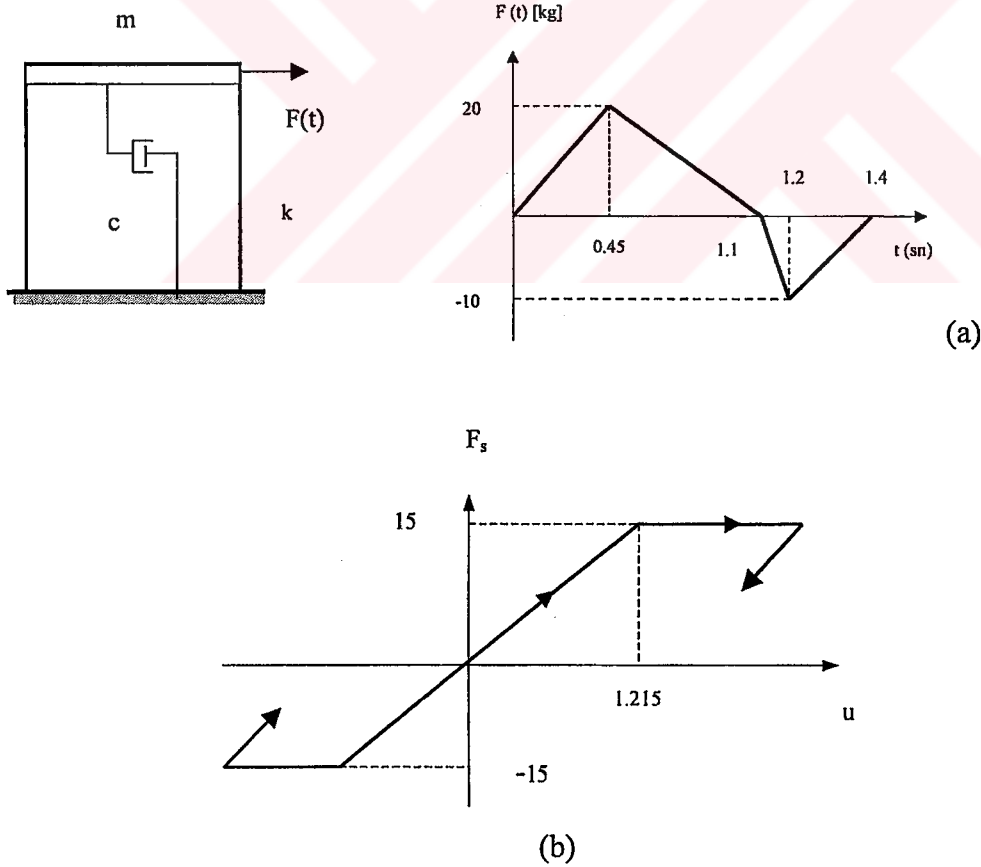
Tablo 6.5 TSD Bir Sitemin Non-linear Zorlanmış Titreşimine Ait Karşılaştırmalı Sonuçlar ($\Delta t = 0.1 \text{ sn}$)

Newmark (ortalama ivme)						DQ						Adım Adım İntegrasyon						HDQ					
t (sn)	u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)	t (sn)	u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)	t (sn)	u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)	t (sn)	u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)	t (sn)	u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)	t (sn)	u (cm)	u' (cm/sn)	u'' (cm/sn ²)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,102041	2,040816	40,81633	0,1	0,071410	2,112557	42,25396	0,1	0,070423	2,112676	42,25352	0,1	0,070422	2,112646	42,25363	0,1	0,070422	2,112646	42,25363	0,1	0,070422	2,112646	42,25363
0,2	0,51312	6,180758	41,98251	0,2	0,483216	6,355108	42,61399	0,2	0,493553	6,355882	42,61059	0,2	0,493544	6,355688	42,61144	0,2	0,493544	6,355688	42,61144	0,2	0,493544	6,355688	42,61144
0,3	1,219075	7,938359	-5,87672	0,3	1,256206	8,039788	-6,07958	0,3	1,256343	8,041413	-6,08283	0,3	1,256309	8,041006	-6,08201	0,3	1,256309	8,041006	-6,08201	0,3	1,256309	8,041006	-6,08201
0,4	1,940744	6,495021	-22,99	0,4	2,101281	6,576654	-23,1533	0,4	2,00161	6,579338	-23,1587	0,4	2,001528	6,578667	-23,1573	0,4	2,001528	6,578667	-23,1573	0,4	2,001528	6,578667	-23,1573
0,5	2,440292	3,495926	-36,9919	0,5	2,549862	3,561774	-37,1235	0,5	2,520466	3,564913	-37,1298	0,5	2,520315	3,564128	-37,1283	0,5	2,520315	3,564128	-37,1283	0,5	2,520315	3,564128	-37,1283
0,6	2,599012	-0,32151	-39,357	0,6	2,686509	-0,26794	-39,4641	0,6	2,687408	-0,26507	-39,4699	0,6	2,687183	-0,26579	-39,4684	0,6	2,687183	-0,26579	-39,4684	0,6	2,687183	-0,26579	-39,4684
0,7	2,389093	-3,87688	-31,7503	0,7	2,485221	-3,82955	-31,7765	0,7	2,476349	-3,82811	-31,7909	0,7	2,476067	-3,82847	-31,7873	0,7	2,476067	-3,82847	-31,7873	0,7	2,476067	-3,82847	-31,7873
0,8	1,890964	-6,0857	-12,4262	0,8	1,956437	-6,01561	-11,9651	0,8	1,967607	-6,0165	-11,977	0,8	1,967315	-6,01628	-11,974	0,8	1,967315	-6,01628	-11,974	0,8	1,967315	-6,01628	-11,974
0,9	1,293774	-5,8581	16,97813	0,9	1,345031	-5,71268	17,99929	0,9	1,356033	-5,71538	17,99948	0,9	1,355782	-5,7147	17,99943	0,9	1,355782	-5,7147	17,99943	0,9	1,355782	-5,7147	17,99943
1	0,837039	-3,2766	66,5532	1	0,912607	-3,04733	66,09465	1	0,903334	-3,0502	66,1004	1	0,903152	-3,04948	66,09896	1	0,903152	-3,04948	66,09896	1	0,903152	-3,04948	66,09896

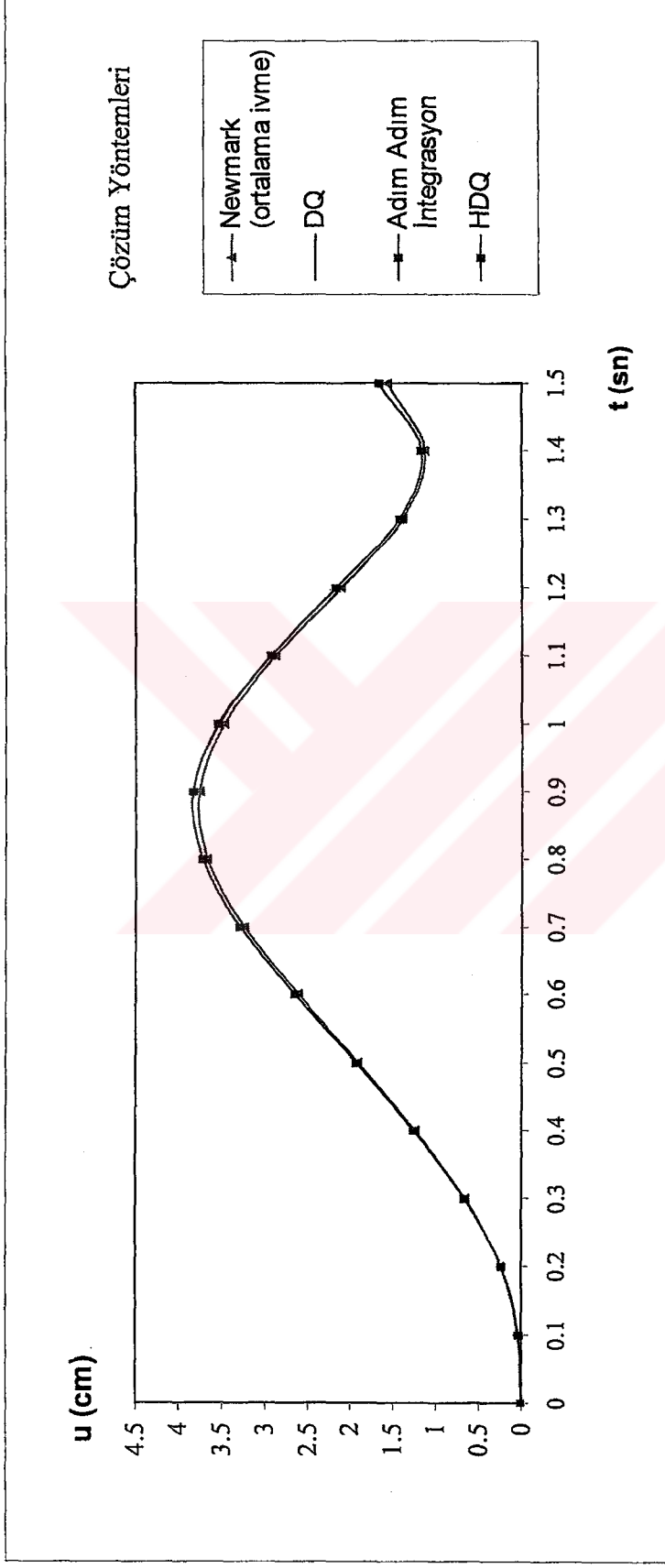


Şekil 6.24 Deplasman değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması ($\Delta t = 0.1 \text{ sn}$)

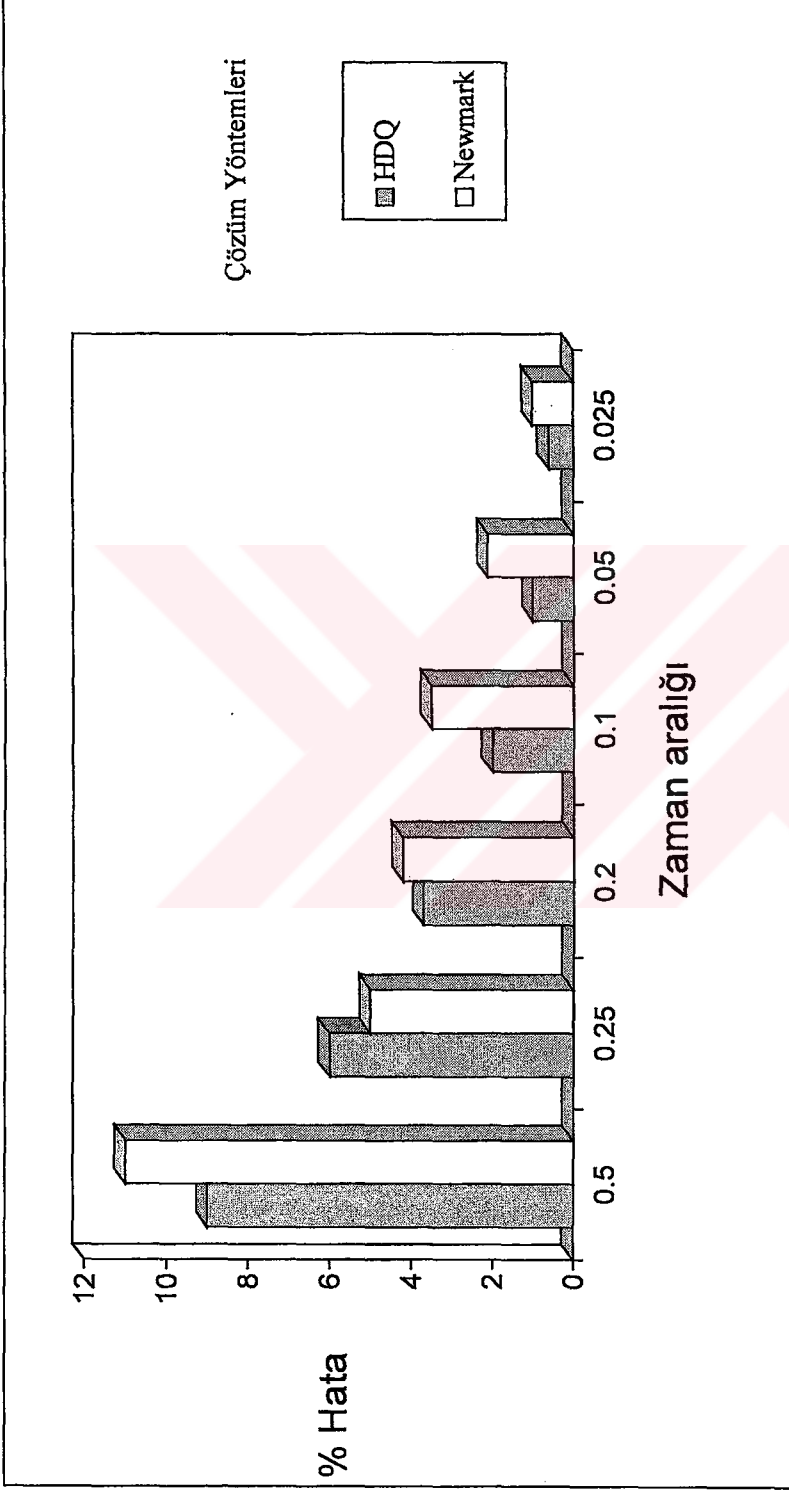
Örnek 9: Tek serbestlik dereceli bir sistemin doğrusal olmayan dinamik hesabına ait bu uygulamada Paz tarafından (Paz, 1998) verilen sayısal örnek dikkate alınmıştır. Mevcut sistem, etki eden yük fonksiyonu ve Elasto-plastik yük-yer değiştirme davranışı Şekil 6.25a ve Şekil 6.25b'de verilmiştir. Kat seviyesinde toplanmış kütle $m = 0.2 \text{ kg.sn}^2/\text{cm}$, sönüm katsayısı $c = 0.274 \text{ kg.sn/cm}$, yay rijitliği $k = 12.35 \text{ kg/cm}$. Bu sisteme ait lineer dinamik analiz Örnek 6'da sunulmuştur. Başlangıç koşulları $u(0) = 0$ ve $\dot{u}(0) = 0$ hesap süresi $0 \leq t \leq 1.5 \text{ sn}$ ve hesap aralığı $\Delta t = 0.1 \text{ sn}$ olarak alınmıştır. HDQ, DQ, Newmark ve Adım adım integrasyon yöntemleri ile hesaplanan deplasman değerlerinin zamana göre değişimi Şekil 6.26'da sunulmuştur. Şekil 6.27'de ise HDQ ile Newmark metotlarında farklı zaman aralıkları (Δt) için elde edilen hata değerleri gösterilmiştir. $\Delta t = 0.05 \text{ sn}$ için hesaplanan hata değeri HDQ metodu için % 1'den daha azdır. Bu durumda Newmark ile hesaplanan hata değeri %2 dir . HDQ ile daha büyük zaman adımı için daha hassas sonuçlar elde edilmiştir.



Şekil 6.25 (a) TSD sistem ve yük fonksiyonu
(b) Elasto-plastik yük-deplasman eğrisi

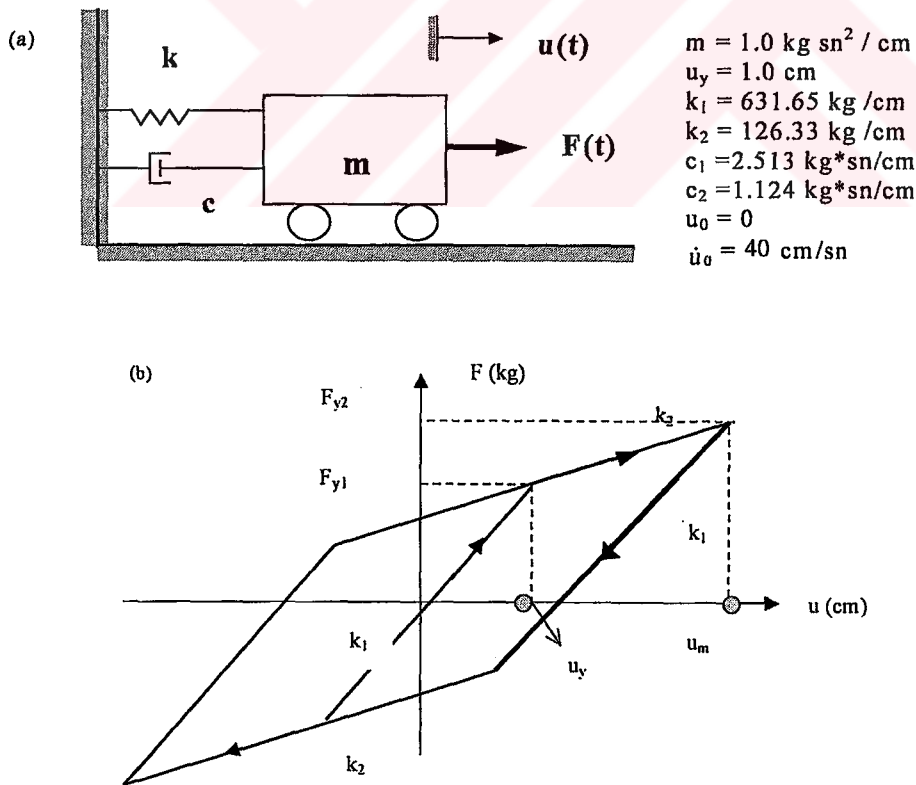


Şekil 6.26 Çeşitli yöntemler ile hesaplanan deplasman değerlerinin HDQ ile karşılaştırılması ($\Delta t=0.1\text{sn}$)



Şekil 6.27 HDQ ile Newmark metotlarında farklı zaman aralıkları (Δt) için elde edilen (Eşit olmayan düğüm nokta dağılımı için) hata değerleri

Örnek 10: Aşağıda verilen Tek Serbestlik Dereceli sistemin sönümlü serbest titreşim analizi sistemin kuvvet-yer değiştirme ilişkisinin bi-lineer olması için hesaplanacaktır (Şekil 6.28). Sistem parametreleri aşağıda verilmiştir. Bu örnek Newmark'ın sabit ivme yöntemi kullanılarak $\Delta t = 0.025$ sn zaman adımı için Hart ve Wong tarafından (Hart ve Wong, 2000) çözülmüştür. Sistem parametreleri Şekil 6.28a' da verilmiştir (Hart ve Wong, 2000). HDQ metodu ile elde edilen sonuçlar $\Delta t = 0.05$ sn için ve eşit olmayan düğüm nokta dağılımı denklem 5.28 kullanılarak elde edilmiştir. Daha büyük zaman aralığı ile daha az düğüm kullanılmış ve çözüm süresi kısalmıştır. İki katı zaman adımı için bulunan sonuçlar yeter hassasiyete sahiptir. Deplasman için hesaplanan sonuçlar karşılaştırmalı olarak Şekil 6.29'da verilmiştir. Zaman aralığının çeşitli değerleri için elde edilen hata değerleri şekil 6.30a ve Şekil 6.30b'de görülmektedir. Bu karşılaştırma $\Delta t = 0.001$ sn için Newmark ile hesaplanan değer esas alınarak yapılmıştır. Görüleceği üzere HDQ metodunda çözüm hassasiyeti düğüm nokta tipi seçimi ve sayısına bağlıdır. Eşit olmayan düğüm nokta dağılımı her zaman daha hassas sonuçlar vermektedir.



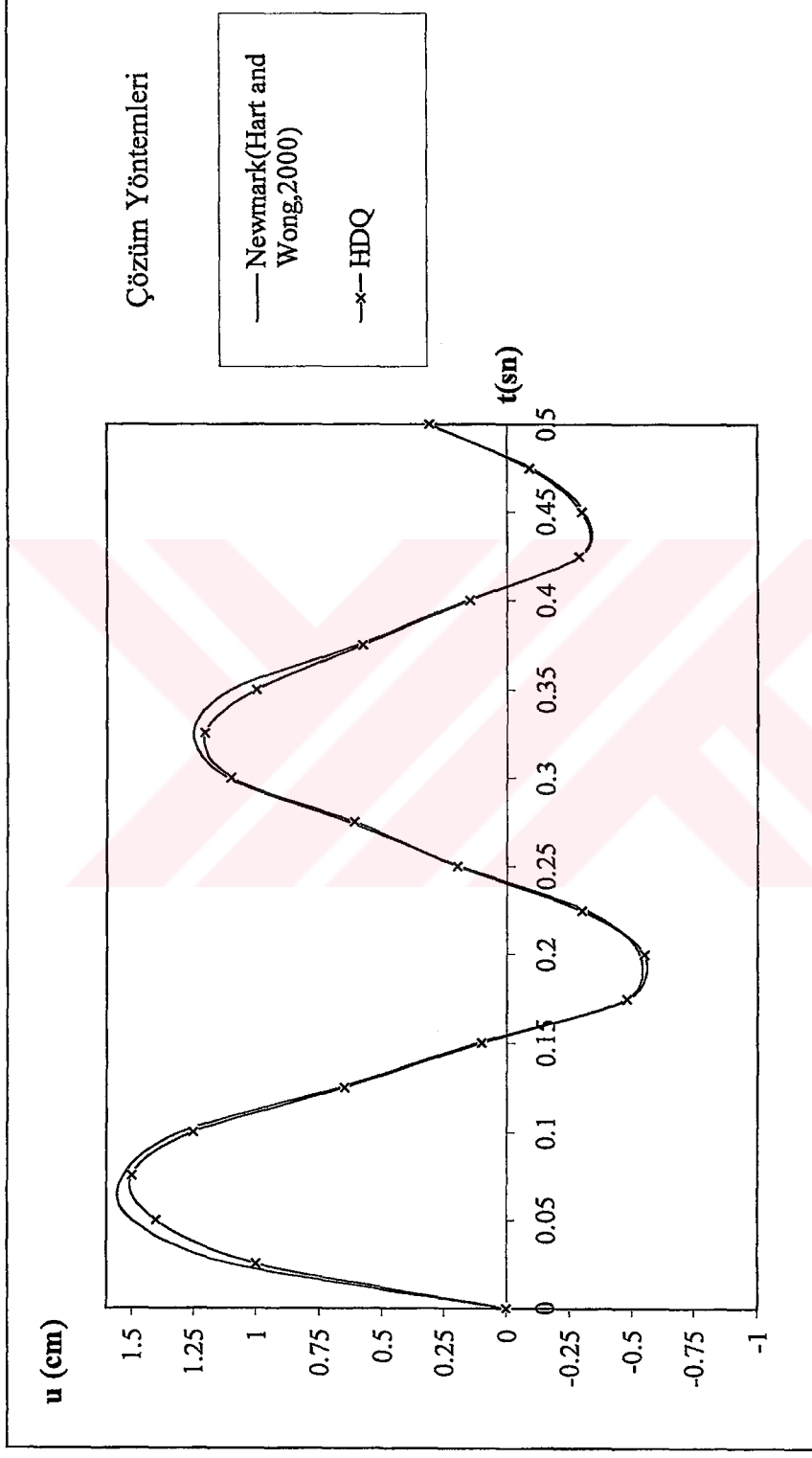
Şekil 6.28 (a) Bi-lineer TSD bir sistem; (b) Kuvvet-deplasman ilişkisi

Sistem bi-lineer kuvvet-yer değiştirme eğrisine sahip olduğundan her bir bölgedeki kuvvet, sönüm ve yay katsayısı farklıdır. Şekil 6.28’ de F_{y1} ilk bölge için akma kuvvetini, F_{y2} ikinci bölge için akma kuvvetini, c_1 birinci bölgedeki sönüm, c_2 ikinci bölgedeki sönüm katsayısını, u_y akma yer değiştirmesini, u_m maksimum yer değiştirme değerini belirtmektedir. Yani hesaplanan yer değiştirme u_y den büyük olunca sistem ikinci bölgeye geğmiş olur. Her bir bölgedeki rijitlik k_1 ve k_2 olarak tanımlanır. Her bir bölge için kuvvet ifadeleri (Hart ve Wong, 2000)

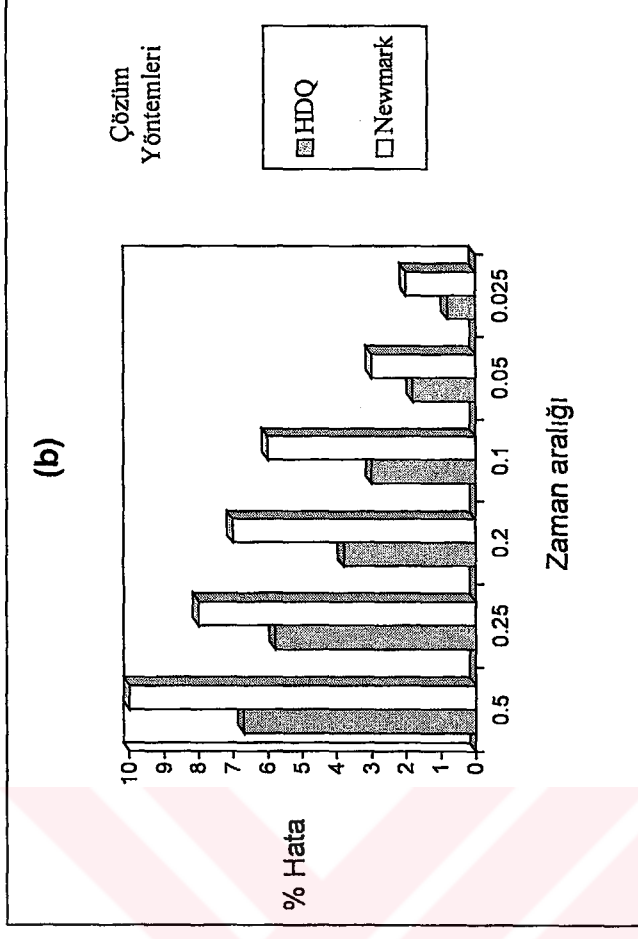
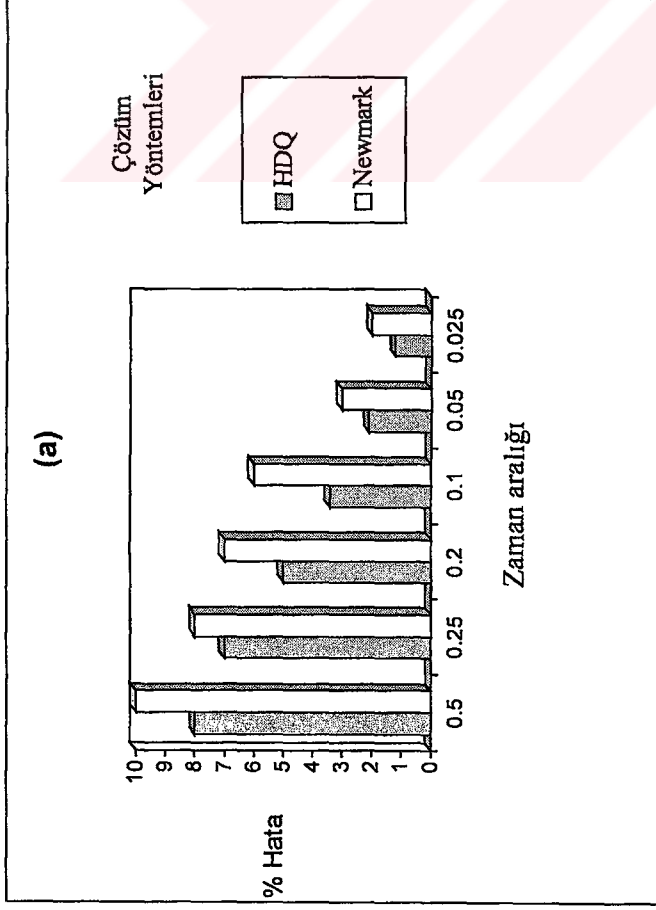
$$F_{y1} = k_1 \times u_y \quad \text{ve} \quad F_{y2} = k_1 \times u_y + k_2 \times (u_m - u_y)$$

olarak verilmiştir.





Şekil 6.29 İkili non-lineeriteye sahip örnek için elde edilen sonuçlar ($\Delta t = 0.05$ sn)



Şekil 6.30 HDQ ile Newmark metotlarında farklı zaman aralıkları (Δt) için elde edilen hata değerleri, (a) eşit düğüm nokta dağılımı için hesaplanan hata (b) eşit olmayan düğüm noktası dağılımı için hesaplanan hata

6.2 Çok Serbestlik Dereceli (ÇSD) Sistemler

6.2.1 Lineer ÇSD Sistemler

Örnek 11 : Şekil 6.31'de verilen iki serbestlik dereceli sistemin zorlanmış titreşim altında yer değiştirmeleri hesaplanacaktır. Kütleler $m_1 = 2 \text{ kg.sn}^2/\text{cm}$, $m_2=1 \text{ kg.sn}^2/\text{cm}$; yay kuvvetleri $k_1=2 \text{ kg/cm}$; $k_2=4 \text{ kg/cm}$, dış zorlamalar $F_1(t) = 0$, $F_2(t) = 10 \text{ kg}$ olarak verilmiştir. Başlangıç şartları; $u_1(0) = u_2(0) = 0$ ve $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = 0$ şeklindedir. Böylece sisteme ait hareket denklemi

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}$$

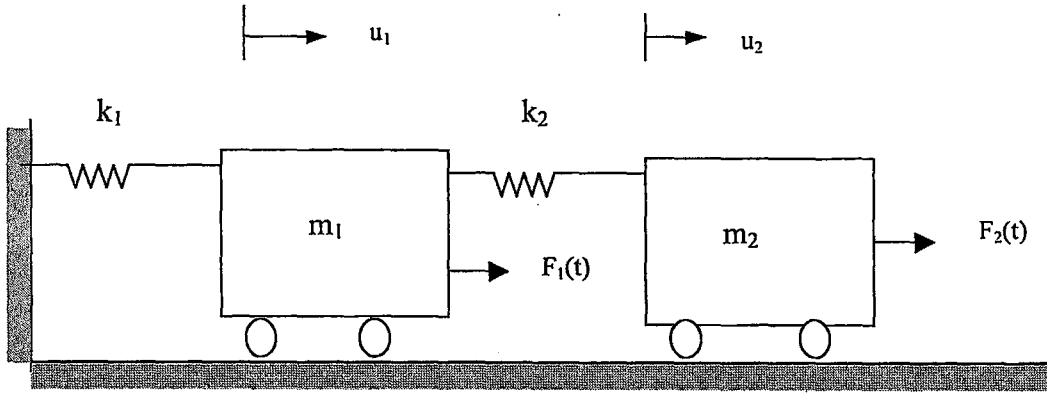
olarak yazılır. Burada

$$[M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} \text{ kg}$$

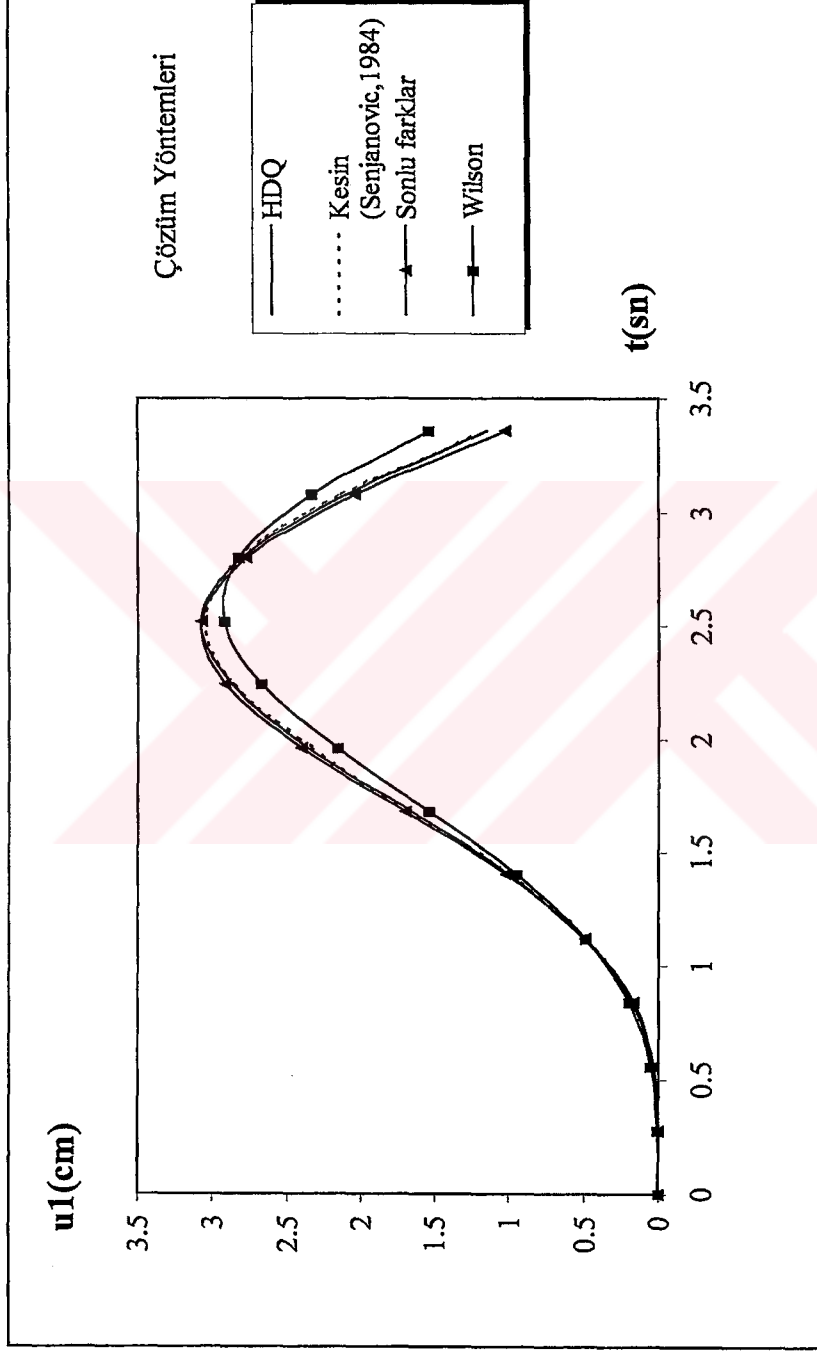
olmak üzere başlangıç koşulları

$$\{u\}_0 = 0 \quad \text{ve} \quad \{\dot{u}\}_0 = 0$$

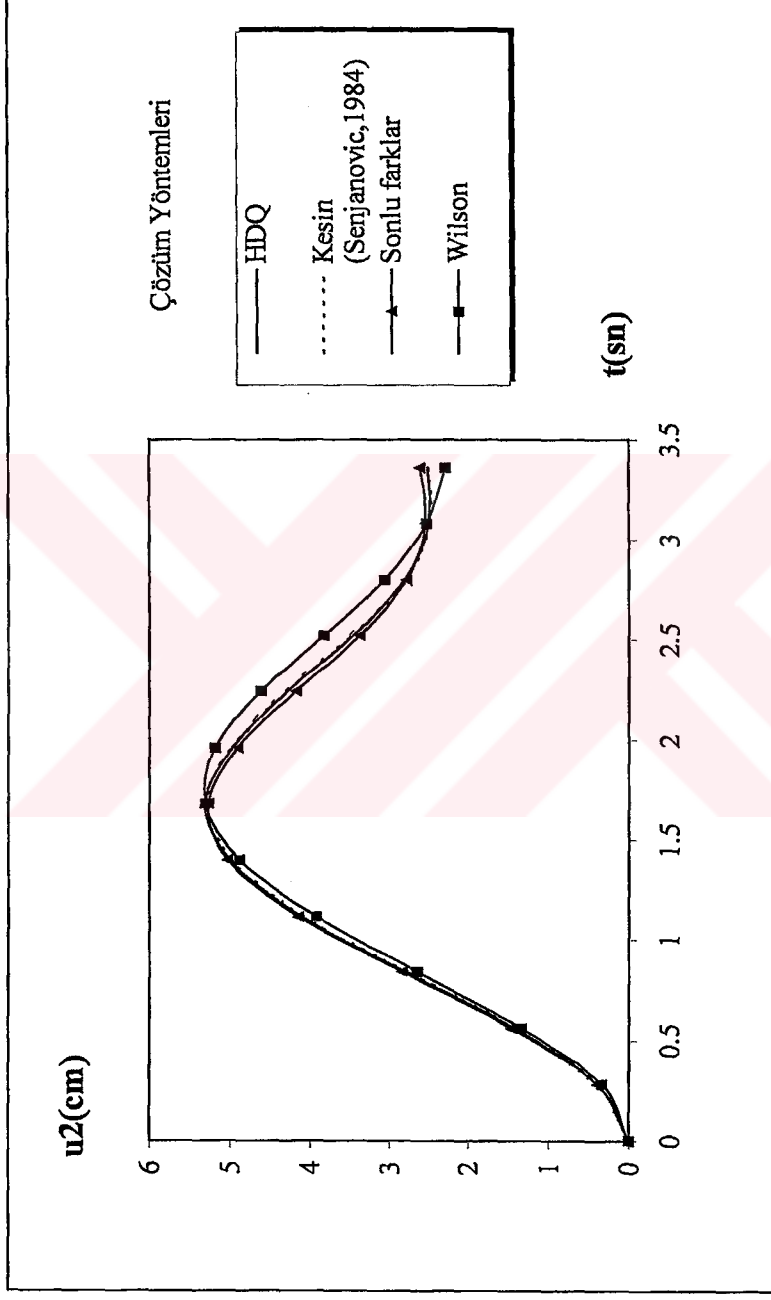
şeklinde tanımlıdır. Her bir kütle için HDQ metodu ile eşit olmayan düğüm nokta dağılımı için elde edilen yer değiştirmeler diğer yöntemler ile hesaplanan değerler ile karşılaştırmalı olarak Şekil 6.32 ve 6.33'de verilmiştir. Sonuçlardan görüleceği üzere HDQ ile bulunan sonuçlar kesin değer (Senjanovic, 1984) ile büyük uyum içindedir. Sonlu farklar ile hesaplanan değerler (Senjanovic, 1984) diğer yöntemlere göre kesin değerlerden daha çok sapma göstermiştir. Farklı zaman adımları için HDQ yöntemi ile elde edilen 1. kütle yer değiştirme değerleri (u-1) ile kesin sonuçlar arasındaki hata değerleri Şekil 6.34'de görülmektedir. Şekil 6.34'den görüleceği üzere HDQ yöntemi ile $\Delta t = 0.28 \text{ sn}$ için Senjanovic tarafından verilen kesin değerler dikkate alınarak elde edilen hata %0.9 mertebesine düşmüştür. Bu durumda sonlu farklar ile hesaplanan maksimum hata yaklaşık % 3 mertebesindedir. Wilson yöntemi ise yaklaşık %1.9 hata vermektedir. $\Delta t = 0.1 \text{ sn}$ için HDQ ile elde edilen değerler ile kesin değerler arasındaki hata %0.02 mertebesindedir.



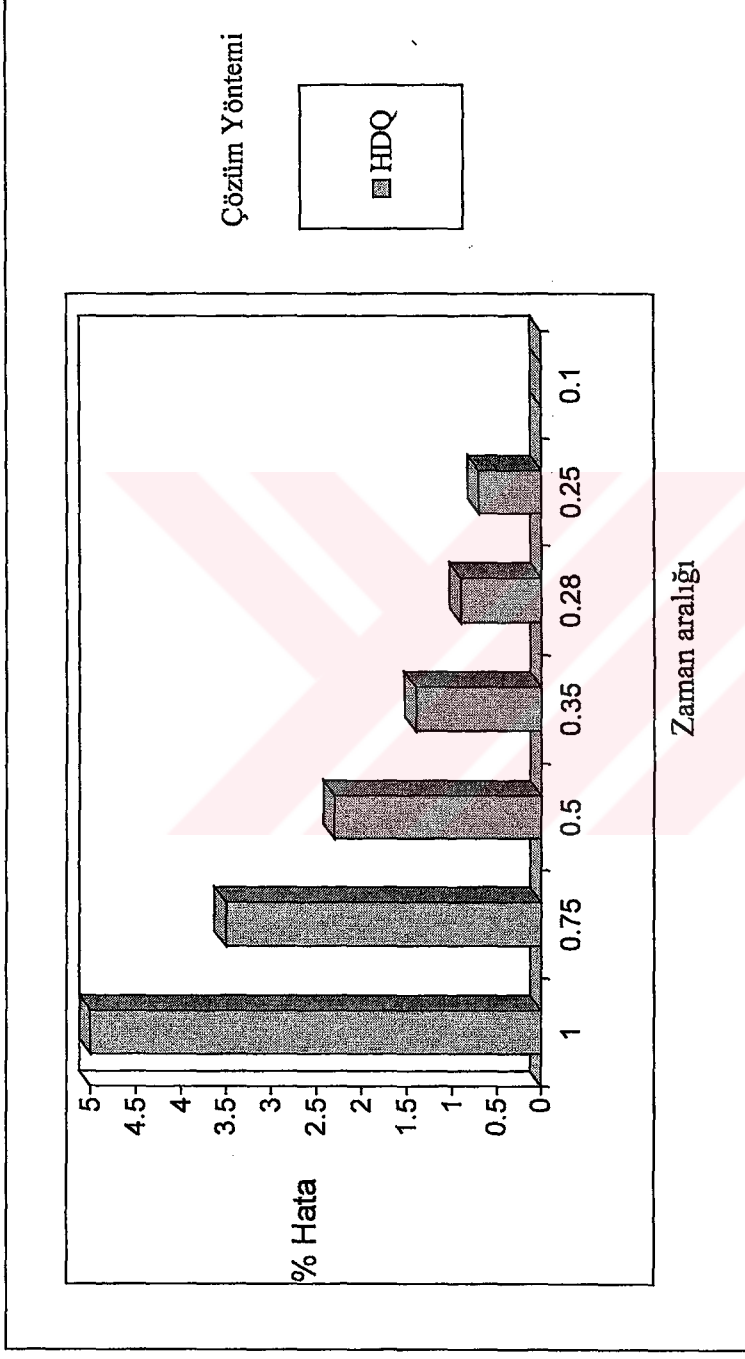
Şekil 6.31 İki serbestlik dereceli sönümsüz zorlanmış sistem



Şekil 6.32 İki serbestlik derecesine sahip sistem için elde edilen sonuçlar ($\Delta t = 0.28 \text{ sn}$)



Şekil 6.33 İki serbestlik derecesine sahip sistem için elde edilen sonuçlar ($\Delta t = 0.28 \text{ sn}$)

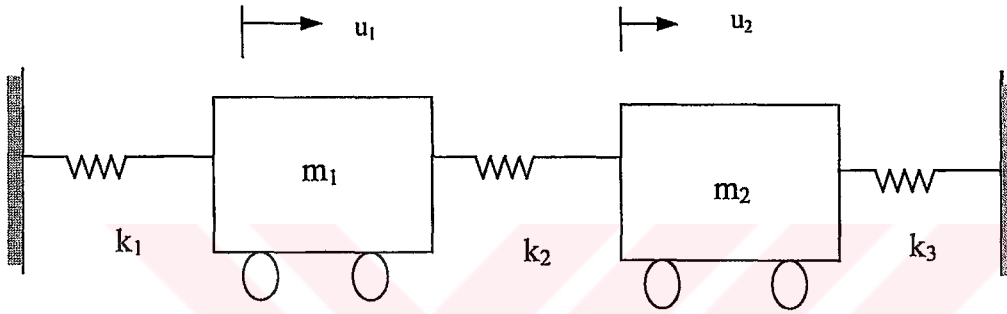


Şekil 6.34 HDQ ile farklı zaman aralıkları (Δt) ve eşit olmayan düğüm noktası dağılımı için elde edilen hata değerleri

Örnek 12: İki serbestlik dereceli kütle-yay sisteminin (Şekil 6.35) verilen başlangıç koşulları altında serbest titreşim hesabı yapılmıştır. Başlangıç koşulları

$$u_1(0) = 0 \text{ ve } \dot{u}_1(0) = 0, \quad \dot{u}_2(0) = 0 \text{ ve } u_2(0) = 1 \text{ cm}$$

olarak verilmiştir. Sistem kütle ve rijitlik değerleri; $m_1 = 4090 \text{ kg.sn}^2/\text{cm}$; $m_2 = 1024 \text{ kg.sn}^2/\text{cm}$; $k_1 = 102.4 \text{ kg /cm}$, $k_2 = 20.48 \text{ kg /cm}$, $k_3 = 51.2 \text{ kg /cm}$ şeklinde tanımlıdır.

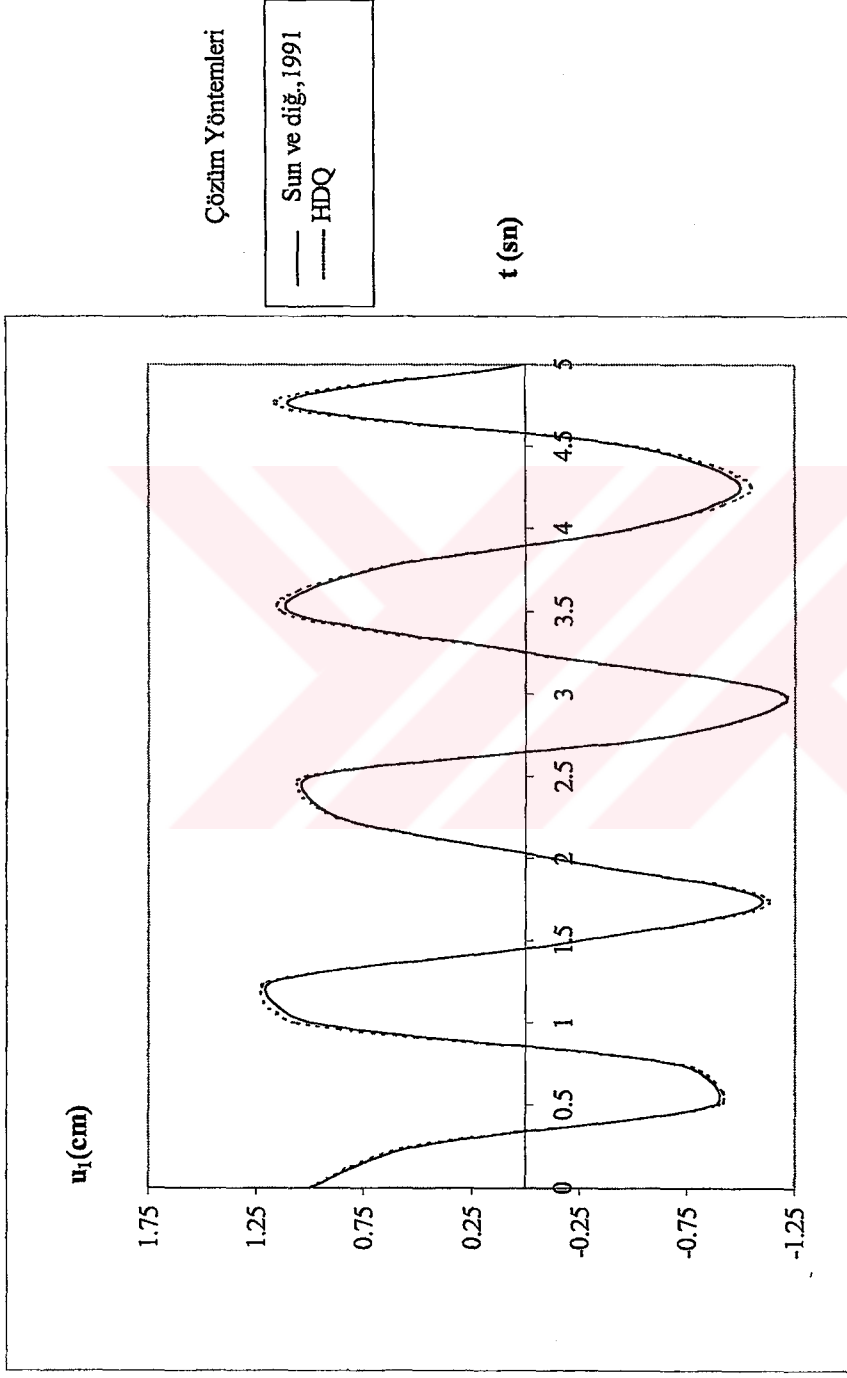


Şekil 6.35 İki serbestlik dereceli kütle-yay sistemi

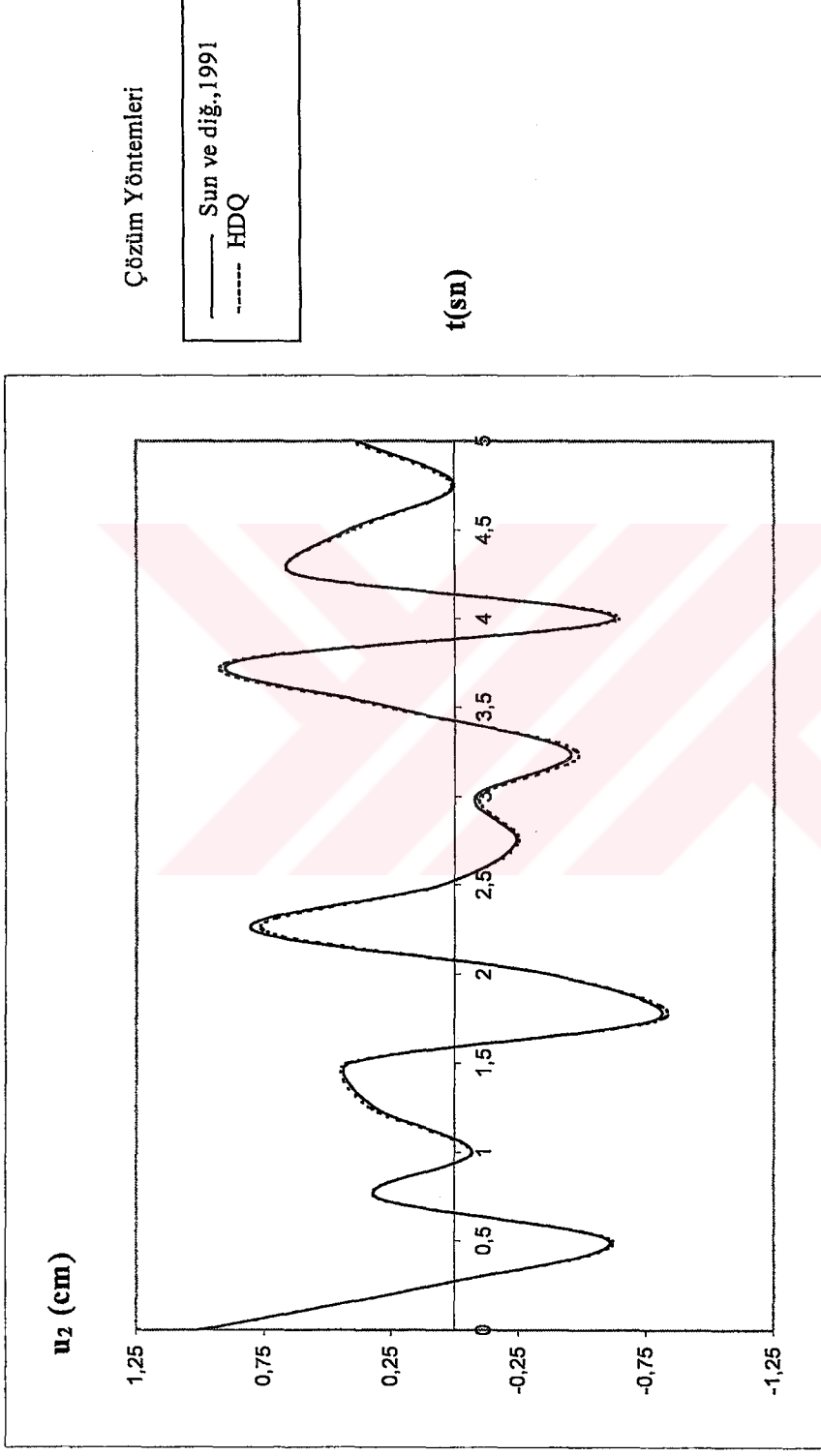
Sistem için kütle ve rijitlik matrisleri ve yük vektörü Bölüm 5’de verilen denklem (5.116), denklem (5.117) ve denklem (5.120) kullanılarak

$$[M] = \begin{bmatrix} 4090 & 0 \\ 0 & 1024 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} 102.4 & -20.48 \\ -20.48 & 71.68 \end{bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

olarak hesaplanır. HDQ ile elde edilen her bir kütleye ait deplasmanlar Sun tarafından (Sun ve diğ., 1991) verilen kesin sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak Şekil 6.36 ve Şekil 6.37’de sunulmuştur. Bu problemin HDQ ile çözümü için zaman adımı $\Delta t = 0.25 \text{ sn}$ alınmıştır. Problemin literatürde mevcut çözümleri $\Delta t = 0.20 \text{ sn}$ için yapılmıştır. İlk 5 saniye için elde edilen değerler çakışmaktadır. HDQ ile daha büyük zaman adımı seçilmesi daha az bilgisayar işlemi gerektirmektedir.

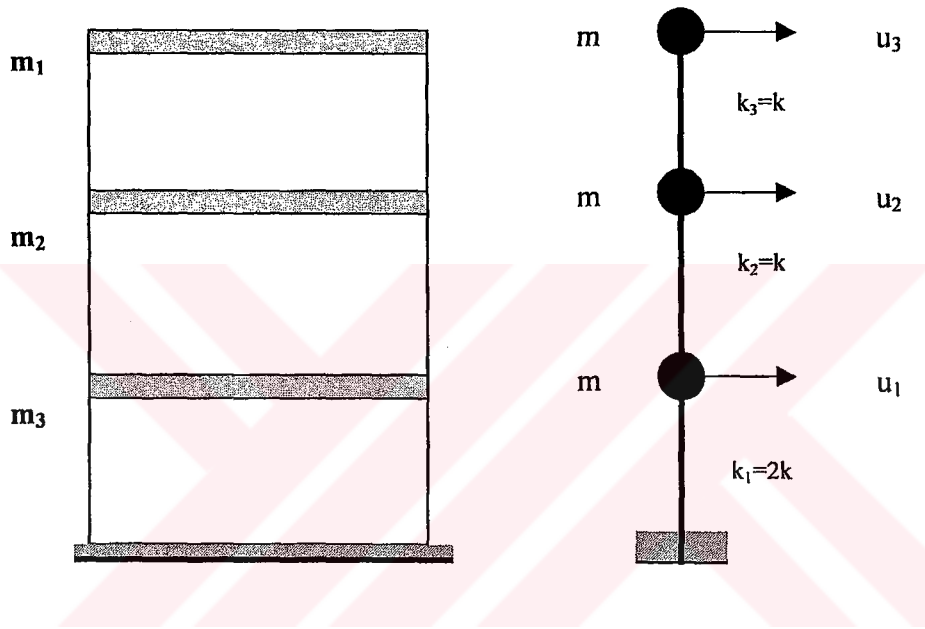


Şekil 6.36 İki serbestlik dereceli sönümsüz sistemin m_1 kütleline ait deplasmanlarının zaman geçmişi



Şekil 6.37 İki serbestlik dereceli sönümsüz sistemin m_2 kütleğine ait deplasmanlarının zaman geçmişi

Örnek 13: Şekil 6.38'de verilen tek açıklıklı ve üç katlı kayma çerçevesinin serbest titreşim hesabı yapılacaktır. İşlemler süresince $\Delta t = 0.2$ alınıp işlem ilk 2.2 sn için yapılacaktır. Bu örnek ait analitik sonuç Hart ve Wong'ın (Hart ve Wong,2000) kitabında verilmiştir. Karşılaştırma amacıyla verilen sistem parametreleri; $m_1 = m_2 = m_3 = m = 1$; $k = 1$ olarak Hart ve Wong tarafından verildiği gibi birimsiz alınmıştır. Fiziksel sistem olarak kat çerçevesi ve matematik model için kat hizalarında toplanmış kütle modeli Şekil 6.38a ve Şekil 38b'de sunulmuştur.



Şekil 6.38 (a) Üç katlı çerçeve sistem; (b) Kat seviyesinde toplanmış kütle modeli

Sistem rijitlik ve kütle matrisleri aşağıda sunulmuştur.

$$K = \begin{bmatrix} 3k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

Başlangıç koşulları aşağıdaki gibi verilmiştir

$$\begin{Bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_3(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(0) \\ \dot{u}_2(0) \\ \dot{u}_3(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

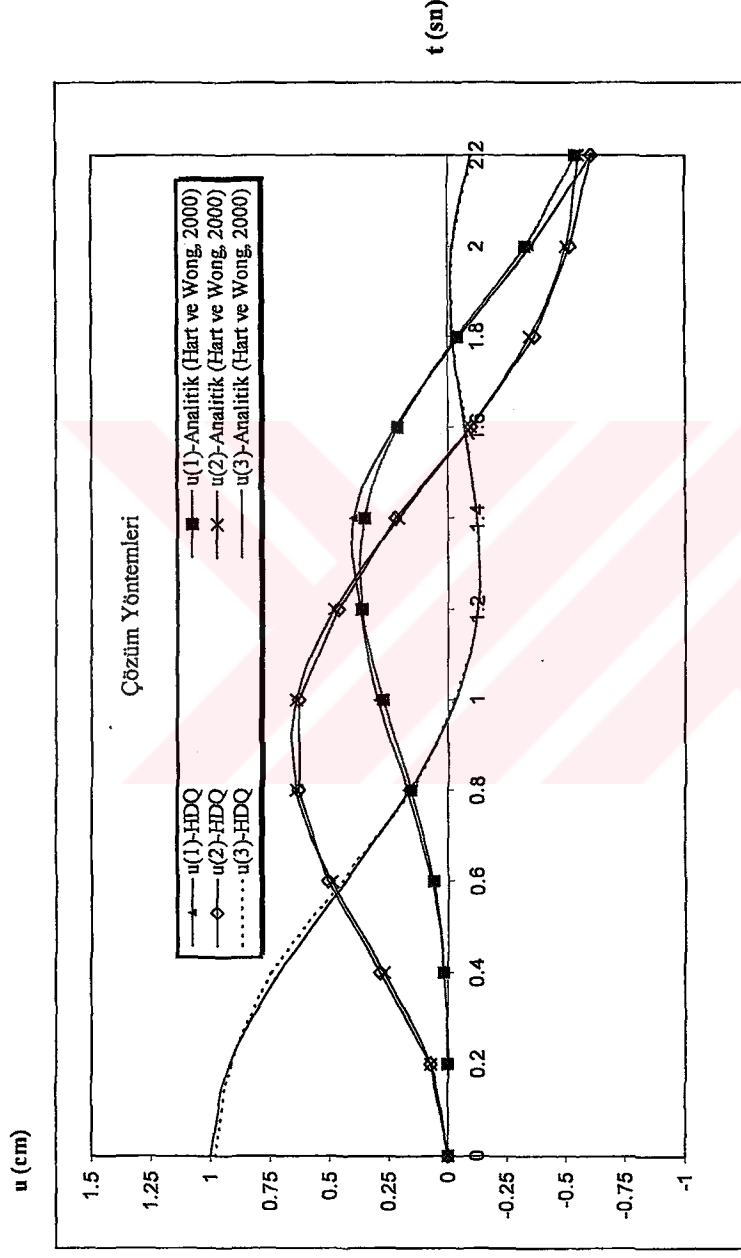
Sistemin 1. 2. ve 3. açısal frekansları $|K - \omega^2 M| = 0$ denkleminin çözümünden aşağıdaki gibi elde edilmiştir (Hart ve Wong, 2000)

$$\omega_1^2 = (2 - \sqrt{3}) \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_1 = 1.034$$

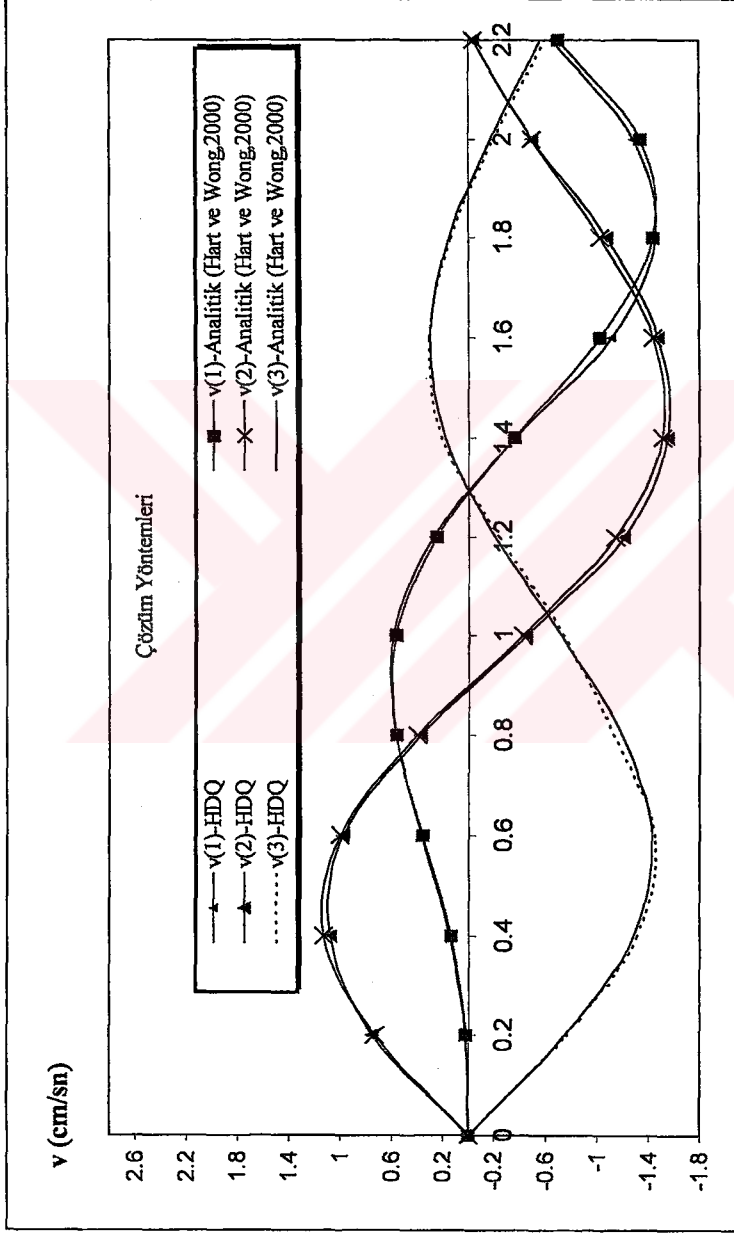
$$\omega_2^2 = (2) \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_2 = 2.828$$

$$\omega_3^2 = (2 + \sqrt{3}) \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_3 = 3.864$$

Çerçevenin HDQ yöntemi kullanılarak hesaplanan yer değiştirme ve hız değerleri Hart ve Wong (Hart ve Wong, 2000) tarafından verilen sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak Şekil 6.39 ve Şekil 6.40'de sunulmuştur. Şekillerden görüleceği üzere HDQ yöntemi kullanılarak hesaplanan değerler Hart ve Wong (Hart ve Wong, 2000) tarafından elde edilen analitik sonuçlara yeter derecede yakındır. Bu örneğe ait sonuçlardan görüleceği üzere çok serbestlik dereceli sistemler için de HDQ metodu yeter doğrulukta sonuçlar vermektedir.



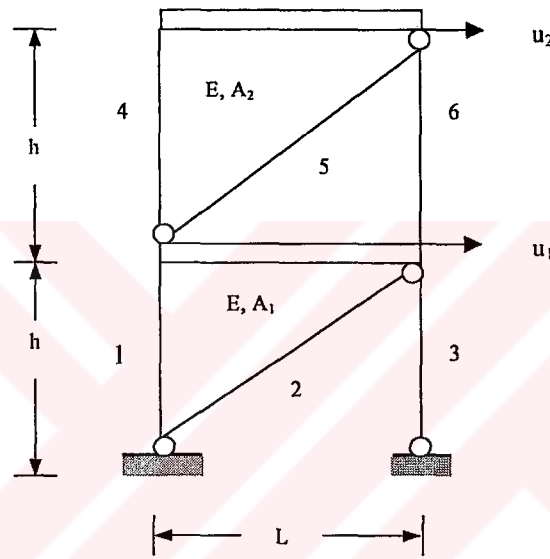
Şekil 6.39 Üç serbestlik dereceli sistemin sönümsüz titreşim için elde edilen deplasman değerleri ($\Delta t = 0.2 \text{ sn}$)



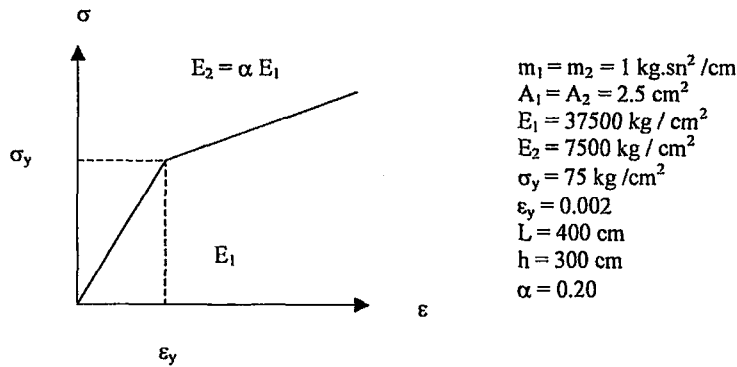
Şekil 6.40 Üç serbestlik dereceli sistemin sönümsüz titreşim durumunda elde edilen hız sonuçları ($\Delta t = 0.2 \text{ sn}$)

6.2.1 Lineer Olmayan ÇSD Örnekler

Örnek 14: Şekil 6.41'de verilen gergili sistemin gergilerine ait malzeme gerilme-şekil değiştirme bağıntısı nonlineerdir. Gergili sistem özellikleri ve malzeme davranışı Şekil 6.41b'de verilmiştir. Hart ve Wong (Hart ve Wong,2000) u_1 ve u_2 yer değiştirmelerini ortalama ivme yöntemi ile çözülmüştür. HDQ yöntemi kullanılarak aynı örneğin u_1 ve u_2 deplasmanları $\Delta t = 0.25$ sn zaman adımı ve $0 \leq t \leq 3.0$ sn için hesaplanacaktır.



(a)



(b)

Şekil 6.41 (a) İki katlı gergili çerçeve; (b) Nonlineer gerilme-şekil değiştirme eğrisi

Sistem kütle, rijitlik ve sönüm matrisleri ile başlangıç koşulları aşağıda özetlenmiştir.

Kütle matrisi Bölüm 5’de verilen denklem (5.116) kullanılarak

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Rijitlik matrisleri ise gergili sisteme ait rijitlik matrisleri olduğundan problemin alındığı referanstan direkt olarak alınmıştır (Hart ve Wong, 2000). Bu matrislerin çıkartılması bu çalışma kapsamı dışında olup yapı analizi kitaplarında bulunmaktadır. Başlangıç rijitlik matrisi (Hart ve Wong, 2000):

$$K = \begin{bmatrix} 2\frac{AE}{L}\cos^2\theta & -\frac{AE}{L}\cos^2\theta \\ -\frac{AE}{L}\cos^2\theta & \frac{AE}{L}\cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}$$

2 numaralı gergide akma başlayınca K_1

$$K_1 = \begin{bmatrix} (1+\alpha)\frac{AE}{L}\cos^2\theta & -\frac{AE}{L}\cos^2\theta \\ -\frac{AE}{L}\cos^2\theta & \frac{AE}{L}\cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}$$

5 numaralı gergide akma başlayınca K_2

$$K_2 = \begin{bmatrix} (1+\alpha)\frac{AE}{L}\cos^2\theta & -\alpha\frac{AE}{L}\cos^2\theta \\ -\alpha\frac{AE}{L}\cos^2\theta & \alpha\frac{AE}{L}\cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix}$$

2 ve 5 numaralı gergilerde akma başlayınca K_{12}

$$K_{12} = \begin{bmatrix} 2\alpha \frac{AE}{L} \cos^2 \theta & -\alpha \frac{AE}{L} \cos^2 \theta \\ -\alpha \frac{AE}{L} \cos^2 \theta & \alpha \frac{AE}{L} \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix}$$

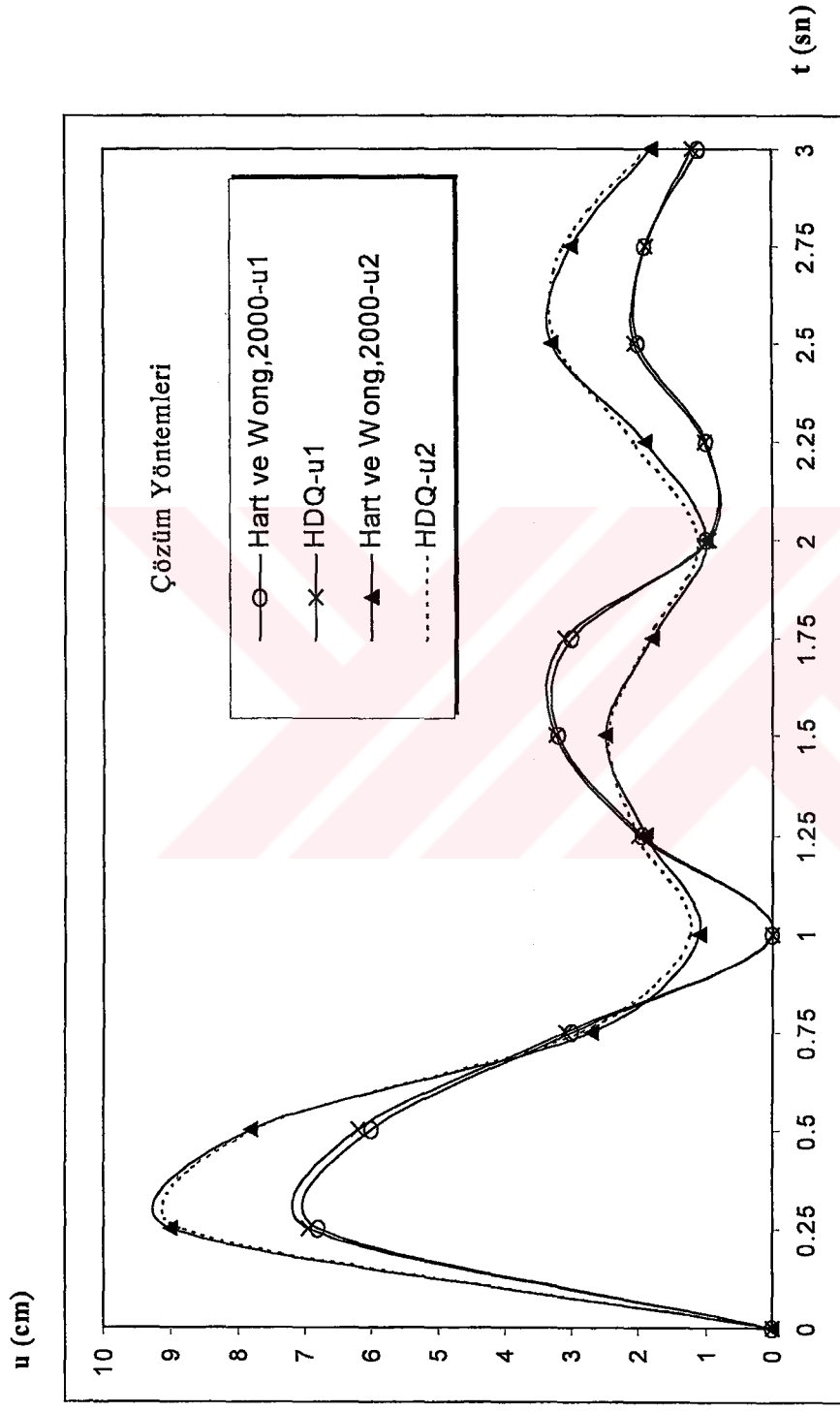
Sönüm matrisi

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Başlangıç koşulları

$$\begin{Bmatrix} u_{10}(0) \\ u_{20}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{Bmatrix} \dot{u}_{10}(0) \\ \dot{u}_{20}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 \\ 50 \end{Bmatrix} \text{ cm/sn}$$

olarak verilmektedir. HDQ yöntemi kullanılarak hesaplanan kat yer değiştirmeleri değerleri ile Hart ve Wong tarafından (Hart ve Wong, 2000) ortalama ivme yöntemi kullanılarak hesaplanmış kat deplasmanları değerlerinin zamana göre değişimleri Şekil 6.42'de sunulmuştur. Lineer olmayan dinamik analizin yapıldığı bu örnekte HDQ yöntemi için zaman adımı $\Delta t = 0.25 \text{ sn}$ alınmıştır. Hart ve Wong tarafından (Hart ve Wong, 2000) ortalama ivme yöntemi için verilen sonuçlar yeter doğruluktadır. Zaman adımı eğer daha küçük alınırsa doğal olarak sonuçlar daha hassas olacaktır. Ancak $\Delta t = 0.25 \text{ sn}$ için bile sonuçlar literatürdeki değerler ile çakışmaktadır.



Şekil 6.42 İki katlı gergili çerçevenin sistemin sönümlü lineer olmayan titreşimine ait 1 ve 2.kat seviyelerindeki deplasmanlarının zamana göre değişimi

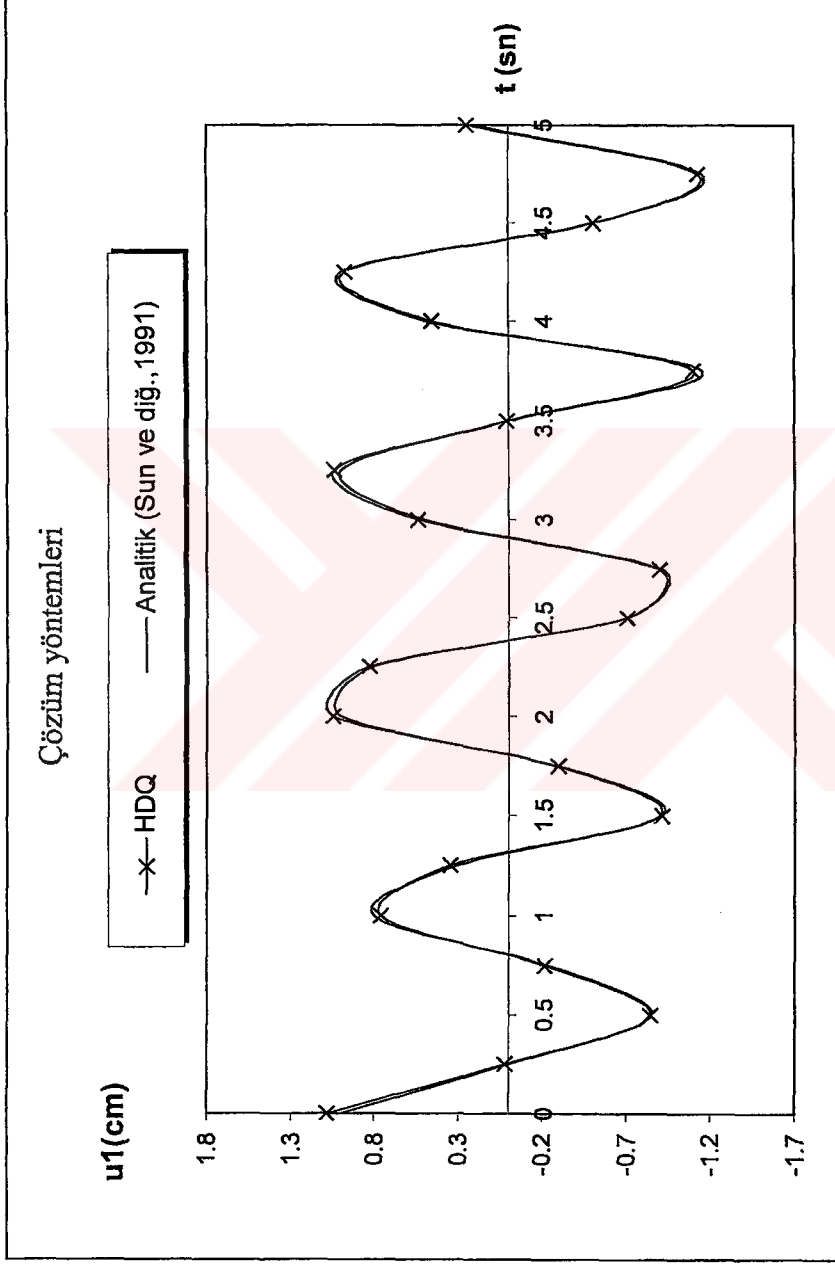
Örnek 15: İki serbestlik dereceli bir sistemin lineer olmayan titreşimine ait hareket denklemi

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \varepsilon (u_1 - u_2)^3 = \begin{Bmatrix} F \cos(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

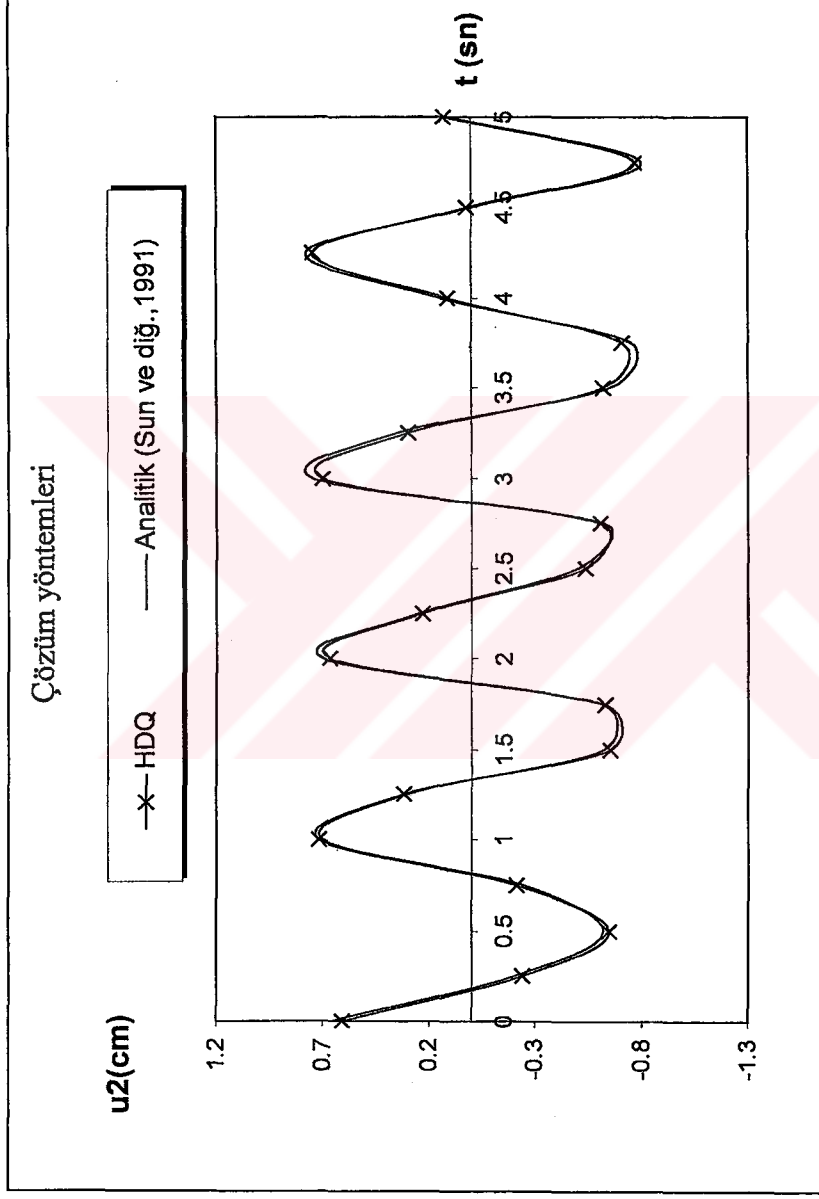
olarak verilmiştir (Sun ve diğ., 1991). Başlangıç koşulları aşağıdaki gibi alınmıştır.

$$\begin{Bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6667 \end{Bmatrix} \text{cm} \quad \text{ve} \quad \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(0) \\ \dot{u}_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{cm/sn}$$

Kütleler $m_1=8 \text{ kg.sn}^2/\text{cm}$, $m_2 = 24 \text{ kg.sn}^2/\text{cm}$, yay rijitlikleri $k_1=1.224 \text{ kg/cm}$, $k_2=1.836 \text{ kg/cm}$, $\varepsilon = 800$, $F=34.01 \text{ kg}$, $\omega = 6.01 \text{ rad/sn}$. Birinci ve ikinci kütle için HDQ metodu ile $\Delta t= 0.05\text{sn}$ için hesaplanan yer değiştirme değerleri, düzeltilmiş sayısal integrasyon (Sun ve diğ., 1991) yöntemi ile $\Delta t= 0.03 \text{ sn}$ için elde edilen sonuçlar ile birlikte Şekil 6.43 ve Şekil 6.44'de verilmiştir. HDQ metodunda daha büyük zaman aralığı ($\Delta t= 0.05\text{sn}$) kullanıldığı halde sonuçlar Sun tarafından (Sun ve diğ., 1991) verilen ($\Delta t= 0.03\text{sn}$) değerler ile uyum içindedir. Lineer olmayan dinamik analiz içinde HDQ yöntemi daha büyük zaman adımı için yeter doğrulukta sonuçlar vermektedir.



Şekil 6.43 İki serbestlik dereceli kütle-yay sisteminin lineer olmayan titreşimine ait 1. kütle deplasmanı



Şekil 6.44 İki serbestlik dereceli kütle-yay sisteminin lineer olmayan titreşimine ait 2. kütle deplasmanı

BÖLÜM YEDİ SONUÇ

Mühendislik problemleri genel bir yaklaşımla süreksiz ve sürekli ortam problemleri olmak üzere iki sınıfa ayrılır. Bu tarz bir sınıflandırma genel olduğu kadar neredeyse bütün gerçek fiziksel sistemleri kapsayacak kadar geniş bir evrensel problem kümesine sahiptir. Serbestlik derecesi sonsuz büyük olan sürekli ortam problemlerinin çözümü bir diferansiyel denklem, integral denklem veya denklem sisteminin çözümünü gerektirdiği halde, serbestlik derecesi sonlu olan süreksiz ortam problemlerinin çözümü lineer denklem takımının çözümüyle elde edilebilmektedir. Sonsuz serbestlik dereceli sistemlerinin çözümünde çeşitli matematik güçlükler ortaya çıkmakta buna karşın süreksiz ortam problemlerinin çözümünde gerekli olan hesaplayıcı kapasitesi ve hesap süresi artmaktadır.

Yapıların lineer olmayan analizi son yirmi yıldır üzerinden pek çok araştırmacının çalıştığı bir konu olmuştur. Yeni malzeme tekniklerinin bulunuşu, artan ihtiyaçları karşılamak amacıyla tasarlanan sistemlerin karmaşıklığı, ekonomik kısıtlamalar altında yapı elemanlarının limit durumlarına göre boyutlandırılmaları nedeniyle büyük yer değiştirmelere müsaade edilmesi ve farklı bünye veya davranışa sahip sıvı-yapı yada sıvı-zemin-yapı gibi etkileşimler lineer olmayan analizi zorunlu kılmaktadır. Bahsedilen bu etkilerden ilki malzeme davranışının lineer olmaması, ikincisi geometrik nonlinearite ve sonuncusu da temas problemlerinde ortaya çıkan sınır koşullarının lineer olmamasıdır.

Günümüze kadar lineer olmayan statik ve dinamik analiz amacıyla çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemler; Sonlu elemanlar, sonlu farklar, en küçük kareler, Newton-Raphson, Wilson, Newmark, Houbolt, Runge-Kutta, lineer ivme veya ortalama ivme gibi iteratif yöntemler olup ardışık yaklaşımlarla çözüme ulaşmaktadır. Bunlardan başka sonlu elemanlar ve özellikle temas problemlerinde sınır koşullarının lineer olmamasını dikkate alan sınır elemanlar yöntemi gibi daha kapsamlı yöntemler de mevcuttur. Ancak bahsedilen bu yöntemlerin ilk grubunda

denklemlerin çözümü bakımından çeşitli stabilite ve yaklaşım sorunları ortaya çıkmakta ve çok büyük sayıda iterasyona ihtiyaç duyulmaktadır. Diğer grup yöntemlerde ise yüksek sayıda düğüm noktası kullanılması ile yeter doğrulukta sonuçlar elde edilebilmektedir. Bu ise gerek bilgisayarın hafıza kapasitesini ve gerekse çözüm için gereken süreyi bazı durumlarda tahmin edilmeyecek miktarlarda arttırmaktadır.

Yukarıda bahsedilen bu olumsuzlukları ortadan kaldırdığı pek çok çalışma ile ortaya konulmuş olan diferansiyel quadrature yöntemi son on yıldır yapı mekaniği problemlerinde kullanılmaktadır. Bu yöntemin; bilinmeyen ağırlık katsayılarının hesaplanması için önerilen test fonksiyonlarının veya polinom fonksiyonlarının cinsine göre genelleştirilmiş diferansiyel quadrature ve 1995 yılında önerilen (Striz ve diğ., 1995) ve aslında ağırlık katsayılarının verilmesiyle tam anlamıyla literatüre 1997 yılında tanıtılan (Shu and Xue,1997) harmonik diferansiyel quadrature olarak iki farklı türü mevcuttur. Harmonik diferansiyel quadrature yöntemi ile tek ve çok serbestlik dereceli sistemlerin dinamik analizinin yapıldığı bu çalışmada göz önüne alınan yapıların kuvvet-yer değiştirme ilişkilerinin elastik ve elasto-plastik olmaları şeklinde dikkate alınmıştır. Yani, hem doğrusal veya lineer hem de doğrusal olmayan(non-lineer) sistemler çalışma kapsamı dahilindedir. Önerilen yöntem tek serbestlik dereceli ve çok serbestlik dereceli sistemlere uygulanmıştır. Yöntemin etkinliğini vurgulamak açısından geniş bir spektrumda yayılmış birkaç çeşit problem seçilmiştir. Farklı düğüm nokta sayıları için yapılan çözümler yine bu çalışma kapsamında literatürde yaygın olarak bilinen sonlu farklar, Wilson, Newmark, Houbolt, Taylor, ve diğ. benzeri yöntemler ile karşılaştırmak amacıyla çözülmüştür. Bu yöntemlerin her biri için bir alt program yazılmış ve problem türüne ve mevcut veri yani problem için bilinen başlangıç değerleri dikkate alınarak en uygun olanı ile çözülmüştür. Elde edilen sonuçların hassasiyetini vurgulamak açısından, ağırlık katsayılarının hesaplanmasında kuvvet polinomlarını veya Legendre polinomlarını kullanan diferansiyel quadrature yöntemi kullanılarak da bulunmuştur. Elde edilen sonuçlardan görülmüştür ki, harmonik diferansiyel quadrature (HDQ) yöntemi ile daha az sayıda düğüm noktası kullanılarak diferansiyel quadrature (DQ) yönteminden daha hassas sonuçlar elde edilmiştir. Eşit sayıda düğüm noktası

kullanılınca harmonik diferansiyel quadrature (HDQ) yöntemi, ile bulunan sonuç analitik sonuçlardan en fazla %1 mertebesinde uzaklaşırken, diferansiyel quadrature (DQ) yöntemi ile %3 mertebesine varan sapmalar görülmüştür. Yine harmonik diferansiyel quadrature (HDQ) yöntemi ile bulunan sonuçlar pek çok durumda sonlu farklar ve Wilson yöntemlerinden daha hassas sonuçlar vermiş, Newmark'ın ortalama ivme yöntemiyle ise hemen hemen aynı olup çok az da olsa daha kısa sürede sonuca ulaşılmıştır. Ancak bu süre açısından değerlendirme doğal olarak daha büyük çaplı ve komplike problemlerde ve çok daha küçük zaman adımları dikkate alınınca kendisini gösterir. Eşit olmayan düğüm nokta dağılımı için elde edilen sonuçlar eşit düğüm nokta dağılımı için hesaplanan değerlerden daha da hassastır.

Sonuç olarak söylenebilir ki; Harmonik Diferansiyel Quadrature (HDQ) yöntemi statik yükler altındaki sistemlerin yapısal analizinde olduğu gibi yapı dinamiği problemlerinde de etkin bir yöntem olup daha az bilgisayar kapasitesi ve işlem sayısı, kısmen daha az hesap süresi ve problemi çözüme hazırlamak için daha az ön işlem gerektirmektedir. Daha önce hiçbir çalışmada burada kullanılan Harmonik Diferansiyel Quadrature(HDQ), Diferansiyel Quadrature(DQ) veya bu çalışma kapsamında olmayan Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature(GDQ) yöntemlerinin hiç biri ile yapılmamış olan tek ve çok serbestlik dereceli yapı sistemlerinin lineer ve lineer olmayan dinamik analizi büyük bir doğrulukta başarılmıştır. Bu amaçla Microsoft dahili Visual Basic 6.0 derleyicisi ve Excell ile geliştirilen program benzer veya farklı özellikteki problemleri bazı küçük düzenlemeler ile çözebilecek kapasitededir. Visual Basic programlama dili ile hazırlanan programın akış diyagramı ve programa ait veri girişi vb. sayfalardan bazı örnekler Ek-1 ve Ek-2' de sunulmuştur. Bu çalışma kapsamında geliştirilen program bazı küçük düzenlemelerden sonra; deprem riskine maruz çeşitli yapıların frekans kısıtlayıcısı altında optimum boyutlandırılması ve ön-dizaynlarını yapmak amacıyla da kullanılabilir. Yer değiştirme değerleri bulunduktan sonra yapı analizi kapsamında gerekli diğer iç kuvvetlerin bulunması mümkündür.

KAYNAKLAR

- Abrate, S., & Sun, C.T.(1984). Dynamic analysis of geometrically nonlinear truss structures, Computers and Structures, 17(4), 491-497.
- Altan, M., (1981), Kalın Silindirik Kabukların Çözümü için Üç Boyutlu Bir Sonlu Eleman ve Uygulamaları, Doktora Tezi, İ.T.Ü. İnşaat Fak.
- Bathe K.J.(1982). Finite element procedures in engineering analysis. Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall.
- Bellman, R.& Casti, J.(1971). Differential quadrature and long-term integration., Journal of Mathematical Analysis And Applications, 34, 235-238.
- Bellman, R., Kashef, B.G.& Casti, J.(1972). Differential quadrature : A Technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equation. Journal Of Computational Physics, 10, 40-52.
- Bert, C.W., & Malik M. (1996). The differential quadrature method for irregular domains and application to plate vibration. Int. J. Mech. Sci.,38(6), 589-606.
- Bert, C.W., and Stricklin, J.D., (1988). Comparative Evaluation of Six Different Numerical Methods For Nonlinear Dynamic Systems, Journal of Sound and Vibration, 127(2), 221-229.
- Bert, C.W., Jang, S. K., & Striz, A.,G.(1987). Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components. AIAA Journal ,26 (5), 612-618.
- Bert, C.W., Wang, Z.& Striz, A.,G.(1993). Differential quadrature for static and free vibration analysis of anisotropic plates. International Journal of Solids And Structures, 30(13), 1737-1744.
- Bert, C.W. & Malik, M.(1996). Free vibration analysis of tapered rectangular plates by differential quadrature method: a semi- analytical approach. J. of Sound &Vib., 190(1), 41-63.

- Björck, A., & Pereyra, V.(1970). Solution of vandermonde system of equations. Math. Comput. 24, 893-903.
- Celep, Z.,& Kumbasar, N.(1992). Örneklerle yapı dinamiği ve deprem mühendisliğine giriş. İstanbul, Sema matbacılık.
- Celia, M .A. & Gray, W.G.(1992). Numerical methods for differential equations, fundamental concepts for scientific and engineering applications. New Jersey: Prentice Hall.
- Chen, W., Striz, A.G., Bert, C.W.(1997). A new approach to the differential quadrature method for fourth-order equations, Int. J. for Num. Meth. Eng., 40, 1941-1956.
- Chopra A.K. (1995). Dynamics of structures, theory and applications to earthquake engineering. New Jersey: Prentice- Hall.
- Civalek, Ö.(1996). Düzlem kafes ve çerçeve elemanların sonlu elemanlar metoduyla Analizi. Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ.
- Civalek, Ö.(1998). Plak ve kabukların sonlu elemanlar metoduyla analizi. Yüksek lisans Semineri. Fırat Üniversitesi,Elazığ.
- Civalek, Ö. (2001). Diferansiyel quadrature metodu ile elastik çubukların statik, dinamik ve burkulma analizi. XVI Mühendislik Teknik Kongresi, Kasım, ODTU, Ankara.
- Civalek, Ö.,& Çatal,H.H. (2002). Bir ve iki boyutlu yapıların genelleştirilmiş diferansiyel quadrature yöntemiyle dinamik analizi. Türkiye İnşaat Mühendisleri Odası, Mühendislik Haberleri, 417, 39-46.
- Civalek, Ö., Çatal, H.H.,(2003) Diktörtgen ve Kare Plakların Diferansiyel Quadrature Metodu ile Statik Hesabı., Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi, (baskıda).
- Civalek, Ö., Çatal, H.H., (2003), Plakların Diferansiyel Quadrature Metodu ile Stabilitate ve Titreşim Analizi, IMO Teknik Dergi, Cilt 14, Sayı 1, 2835-2852.

Civalek, Ö., Çatal, H.H., (2003), Diferansiyel Quadrature Yöntemleriyle Yapıların Karşılaştırmalı Dinamik Analizi, Beşinci Ulusal Deprem Mühendisliği Konferansı, 26-30 Mayıs, Bildiri no : AT-033, İ.T.Ü., İstanbul.

Civalek, Ö., Çatal, H.H.,(2003), Diktörtgen ve Kare Plakların Diferansiyel Quadrature Metodu ile Statik Hesabı., Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi,(Baskıda).

Civalek, Ö., Çatal, H.H., (2003), Linear Static And Vibration Analysis Of Circular And Annular Plates By The Harmonic Differential Quadrature (HDQ) Method, Osmangazi Üniversitesi, Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Dergisi, Vol.16(1),45-76.

Craig, Jr.R.R.,(1981). Structural dynamics, an introduction to computer methods. Canada: John Wiley.

Çakıroğlu, A., Özmen, G., & Özden, E.,(1974) Yapı Sistemlerinin Hesabı İçin Matris Metotları Ve Elektronik Hesap Makinası Programları, Cilt I, İstanbul: Matbaa Teknisyenleri Basımevi.

Çatal, H.H, Ö.(2002), Yapı ve Deprem Mühendisliğinde Matris Yöntemler, Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Yayınları., Yayın no:294, İzmir.

Çatal, H.H.& Civalek, Ö.(2003). Geometri değişimi bakımından lineer olmayan çerçeve yapıların statik analizi, Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi, (baskıda).

Çatal, H.H.,& Civalek, Ö.(2003). Düzlem kafes sistemlerin malzeme ve geometri değişimi bakımından lineer olmayan analizi, Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi.,(baskıda).

Civan, F.,& Sliepcevich, C.M.(1984). Differential quadrature for multi dimensional problems., Journal Of Mathematical Analysis And Applications, 101, 423-443.

Civan, F., & Sliepcevich, C.M.(1983). Solution of the poisson equation by differential quadrature., International Journal For Numerical Methods In Engineering, 19, 711-724.

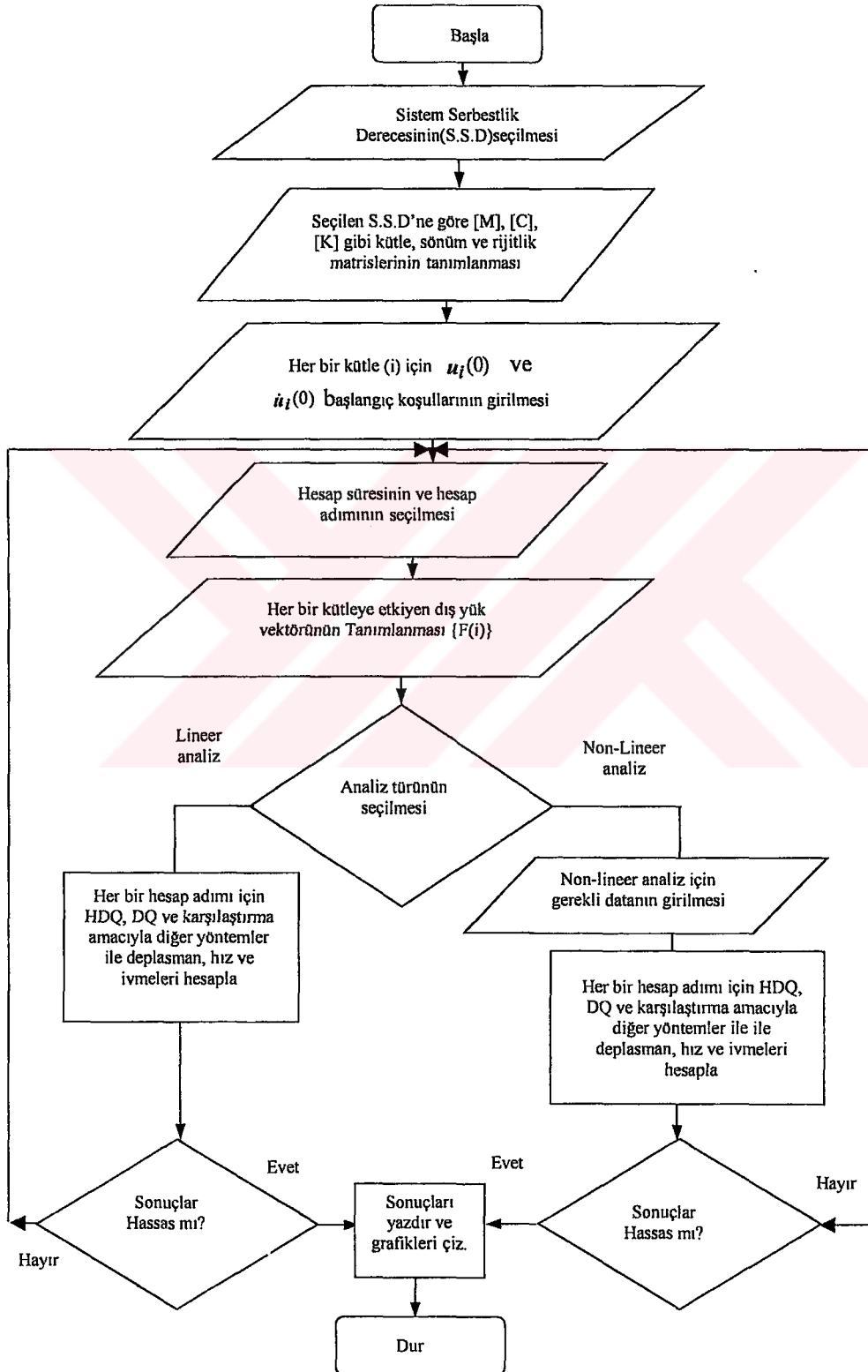
- Du, H., Liew, K.M., & Lim, M.K. (1996). Generalized differential quadrature method for buckling analysis., Journal Of Eng. Mech.,ASCE,122(2),95-100.
- Du H, Lim M.K, Lin R.M. (1995). Application of generalized differential quadrature method to vibration analysis., Journal of Sound and Vibration ,181(2),279-293.
- Fung, T.C.(2001). Solving initial value problems by differential quadrature method-part 1: first-order equations, Int. Journal For Numerical Methods In Eng., 50, 1411-1427.
- Hamming, R.W.(1973). Numerical methods for scientists and engineers, New York: McGraw-Hill.
- Hart, G.C., Wong, K., (2000). Structural Dynamics for Structural Engineers, John Wiley & Sons, New York.
- Hildebrand, F.B.(1965). Methods of applied mathematics, Prentice-Hall.
- Hsiao, K.M,& Jang, J.Y.(1989). Nonlinear dynamic analysis of elastic frames, Computers and Structures.33(4), 1057-1063.
- Hughes T.J.R., & Belytschko T.A.(1983). Precise of developments in computational methods for transient analysis. J. Appl. Mech. ASME ,50,1033-1041.
- Hurty W.C, & Rubinstein M.F.(1964). Dynamics of structures, Englewood Cliffs, NJ :Prentice-Hall.
- Irvine,M.(1986). Structural dynamics for the practising engineer. London. Allen & Unvin Ltd.
- Kujawski J. and Gallagher, R.H.,(1989). A generalized least-squares family of algorithms for transient dynamic analysis, Earthquake eng. & structural dynamics, 18, 539-550
- Liew, K.M., Teo, T. M. & Han, J.B. (1999). Comparative accuracy of dq and hdq methods for three- dimensional vibration analysis of rectangular plates. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 45, 1831-1848.

- Liew., K.M., Han, J.B., Xiao, Z.M., & Du, H.,(1996). Differential quadrature for mindlin plates on winkler foundations. Int. J. Mech. Science., 38(4),405-421.
- Liu,J.L.,(2001). Solution of dynamic response of SDOF system using piecewise Lagrange polynomial, Earthquake eng. & structural dynamics,30, 613-619.
- Meirovitch L.(1986).Elements of vibration analysis., Singapore: McGraw-Hill.
- Malik, M., & Bert, C.W.(1998). Three- dimensional elasticity solutions for free vibrations of rectangular plates by the differential quadrature method. International Journal Of Solids And Structures, 35(3-4), 299-318.
- Mitchell, A. R.(1976). Computational methods in partial differential equations, John Wiley.
- Mondkar, D.P.,& Powell, G.H.(1977). Finite element analysis of non-linear static and dynamic response, International Journal For Numerical Methods In Eng.,11, 499-520.
- Newmark, N.M.(1959). A method of computation for structural dynamics, Trans. ASCE, 127, 1406-1435.
- Nickell, R.E.(1976). Nonlinear dynamics by mode superpositions, Computer methods in applied mechanics and engineering, 7, 107-129.
- Paz, M.,(1997). Structural dynamics, theory and computation, Champman & Hall.
- Rao S.S.(1995). Mechanical Vibrations, Third Ed., Addison-Wesley Comp.
- Senjanovic, I.(1984). Harmonic acceleration method for dynamic structural analysis, Computers and Structures,18(1), 71-80.
- Shahrzuz, S.M, Lords, T.R.C, (1999). Upper Bounds on Responses of Linear Systems Under Transient Loads, J.of Sound and Vibration, 227(4), 886-894.
- Sherbourne, A.N., & Pandey, M. D.(1991). Differential quadrature method in the buckling analysis of beams and composite plates. Computers & Structures, 40(4), 903-913.

- Shu, C., & Richards, B.E. (1992). Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, International Journal For Numerical Methods In Fluids, 15, 791-798.
- Shu, C., Chen, W., Xue, H., & Du, H. (2001). Numerical study of grid distribution effect on accuracy of DQ analysis of beams and plates by error estimation of derivative approximation, Int. Journal For Num. In Eng., 51, 159-179.
- Shu, C., & Xue, H. (1997). Explicit computations of weighting coefficients in the harmonic differential quadrature. Journal Of Sound And Vibration, 204(3), 549-555.
- Striz, A.G., Chen, W., & Bert, C.W. (1994). Static analysis of structures by the quadrature element method., International Journal Of Solids And Structures, 31(20), 2807-2818.
- Sun, K., & Pires, J.A. and Tao, J.R. (1991). A Post-Correction Integration Algorithm for Non-linear dynamic analysis of structures. Earthquake Eng. and Structural Dynamics, 20, 1083-1097.
- Warburton, G.B. (1979). Response using the Rayleigh-Ritz Method, Earthquake eng. & Structural Dynamics, 7, 327-334.
- Wiberg, N.E., Li, X., (1999) Adaptive Finite Element Procedures For Linear and Nonlinear Dynamics, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, 46, 1781-1802.
- Wilson, E.L., Yuan, M.W., Dickens, J.M. (1982). Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors, Earthquake eng. & Structural Dynamics, 10, 813-821.
- Wu, T.Y. (2001). The generalized differential quadrature rule for fourth-order differential equations, International Journal For Numerical Methods In Eng., 50, 1907-1929.
- Wu, J.J. (1977). Solutions to initial value problems by use of finite elements-unconstrained variational formulations, J. of sound and vibration, 53-3, 341-356.
- Zienkiewicz O.C. (1977). The finite element method in engineering science. (3rd ed.). London: McGraw-Hill.

EK : Bu kısımda çalışma kapsamında geliştirilen **Non-SAP-HDQ** adlı programın akış diyagramı ve program editör sayfalarından bazı görünüm verilecektir.

Ek-1 : AKIŞ DİYAGRAMI



Ek-2 : PROGRAM MENÜLERİNDEN GÖRÜNÜŞLER

Tek serbestlik dereceli sistemin lineer serbest titreşim analizi için veri giriş sayfası.

ÇSD ve TSD Sistemlerin HDQ ile Non-Linear Dinamik Analizi (HDQ-NON-5WP)

Sistem Özellikleri ve Analiz Yöntemi

Serbestlik Derecesi: 1

☒ Linear Analiz ☒ Serbest Titreşim

☐ Non-Linear Analiz ☐ Zorlanmış Titreşim

☐ Özel Durum

Veri Girişi

Başlangıç Koşulları

u_0

$\dot{u}_0$

$\ddot{u}_0$

m_1

c_1

k_1

Δt

Hesap Süresi (t-son)

Hesapla

[illegible]

Çok serbestlik dereceli sistemin analizi için her bir kütleyle ait yük ve başlangıç koşullarının girildiği opsiyondan görünüm. Yükler kayıt edildikten sonra bu mönünün sağ altındaki **Yükleri Kaydet** tuşuna basılır.

ÇSDS Zorlanmış Titreşim										X
1. kütleyle etkileyen yük		2. kütleyle etkileyen yük		3. kütleyle etkileyen yük		4. kütleyle etkileyen yük		5. kütleyle etkileyen yük		
☐ Sabit Yük ☐ Değişken Yük		☐ Sabit Yük ☐ Değişken Yük		☐ Sabit Yük ☐ Değişken Yük		☐ Sabit Yük ☐ Değişken Yük		☐ Sabit Yük ☐ Değişken Yük		
Başlangıç Koşulları		Başlangıç Koşulları		Başlangıç Koşulları		Başlangıç Koşulları		Başlangıç Koşulları		
1. kütle		2. kütle		3. kütle		4. kütle		5. kütle		
u_0		u_0		u_0		u_0		u_0		
$\dot{u}_0$		$\dot{u}_0$		$\dot{u}_0$		$\dot{u}_0$		$\dot{u}_0$		
Yükleri Kaydet										

Gergili çerçeve için gerekli datanın girildiği sayfa.

Gergili Çerçeve Verileri				
1. Halatta Akma Durumundaki Rijitlikler	k1		k2	
2. Halatta Akma Durumundaki Rijitlikler	k1		k2	
Her İki Halatta Akma Durumundaki Rijitlikler	k1		k2	
Birinci Halatın Elastisite Modülü - E1				
İkinci Halatın Elastisite Modülü - E2				
Akma Gerilmesi				
Akma Uzunluğu				
Teta (°)				
L				
h				
Kaydet ve Çık				

Çok serbestlik dereceli sistemin lineer analizi için veri giriş sayfası. Yükler için sağ alttaki **ÇSDS için yük tanımlama** tuşuna basılır.

CSD ve TSD Sistemlerin HDQ ile Non-Linear Dinamik Analizi (HDQ-NLN-SAP) x

Sistem Özellikleri ve Analiz Yöntemi

Serbestlik Derecesi: ☐ Linear Analiz ☐ Serbest Titreşim
☐ Non-Linear Analiz ☐ Zorlanmış Titreşim

Veri Girişi

Başlangıç Koşulları

u_0		m_1		m_2		m_3		m_4		m_5	
$\dot{u}_0$		c_1		c_2		c_3		c_4		c_5	
$\ddot{u}_0$		k_1		k_2		k_3		k_4		k_5	

Δt

Hesap Süresi (t-son)

Tek serbestlik dereceli sistemin lineer olmayan zorlanmış dinamik analizi opsiyonu seçili iken program sayfası görünümü.

[illegible]

Tek serbestlik dereceli sistemin bi-lineer zorlanmış dinamik analizi opsiyonu seçili iken program sayfası görünümü.

[illegible]

Çok serbestlik dereceli sistemin lineer serbest dinamik hesabı için veri giriş sayfası.

ÇSD ve TSD Sistemlerin HDQ ile Non-Linear Dinamik Analizi (HDQ-NON-SAR)

Sistem Özellikleri ve Analiz Yöntemi

Serbestlik Derecesi: 3

☒ Lineer Analiz ☐ Serbest Titreşim

☐ Non-Linear Analiz ☒ Zorlanmış Titreşim

☐ Özel Durum

Veri Girişi

Başlangıç Koşulları

u_0	m_1	m_2	m_3
$\dot{u}_0$	c_1	c_2	c_3
$\ddot{u}_0$	k_1	k_2	k_3

Δt

Hesap Süresi (t-son)

Hesapla

ÇSDS için yük tanımlama

Çok serbestlik dereceli sistemin bi-lineer zorlanmış dinamik analizi opsiyonu seçili iken program sayfası görünümü.

ÇSD ve TSD Sistemlerin HDQ ile Non-Linear Dinamik Analizi (HDQ-NON-GAP)

Sistem Özellikleri ve Analiz Yöntemi

Serbestlik Derecesi: 3

☐ Linear Analiz ☒ Non-Linear Analiz

☐ Serbest Titreşim ☒ Zorlanmış Titreşim

☒ Bi-lineer ☐ Özel Durum

Veri Girişi

Başlangıç Koşulları

u_0 $\dot{u}_0$ $\ddot{u}_0$

m_1 c_1 k_1 m_2 c_2 k_2 m_3 c_3 k_3

Non-Linear Analiz Data

$f(s)$ k_2

Δt

Hesap Süresi (t-son)

Hesapla

ÇSDS için yük tanımlama