ÇOKLU FOTON SÜREÇLERİNİ TEK ELEKTRON YAKLAŞIMIYLA DÜŞÜK FREKANS PERSPEKTİFİNDEN İNCELEME

HANİFE TEKEŞ

TEMMUZ 2023

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOKLU FOTON SÜREÇLERİNİ TEK ELEKTRON YAKLAŞIMIYLA DÜŞÜK FREKANS PERSPEKTİFİNDEN İNCELEME

HANİFE TEKEŞ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
FİZİK ANA BİLİM DALINDA
DOKTORA TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

TEMMUZ 2023

DİYARBAKIR

ÇOKLU FOTON SÜREÇLERİNİ TEK ELEKTRON YAKLAŞIMIYLA DÜŞÜK FREKANS PERSPEKTİFİNDEN İNCELEME

Hanife TEKEŞ tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Fizik Ana Bilim Dalı**'nda **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ _____
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Doç. Dr. Nurettin PİRİNÇÇİOĞLU _____
Danışman, **Fizik Bölümü,**
Dicle Üniversitesi

Sınav Jürisi:

Prof. Dr. Sedat İLHAN (*) _____
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Doç. Dr. Nurettin PİRİNÇÇİOĞLU (**) _____
Fizik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Doç. Dr. F. Figen BİNBAY _____
Fizik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Doç. Dr. Mustafa SALTI _____
Fizik Bölümü, Mersin Üniversitesi

Doç. Dr. Murat KORUNUR _____
Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü,
MunzurÜniversitesi

ONAY

Savunma Tarhi: 12/07/2023

(*) Sınav Jürisi kısmının birinci satırına Jüri Başkanının bilgilerini yazınız.
(**) Sınav Jürisi kısmının ikinci satırına Tez Danışmanının bilgilerini yazınız.

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında bulunan bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılayıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Adı, Soyadı: Hanife TEKEŞ

İmza: …….……

TEŞEKKÜR

Öncelikle danışmanım Doç. Dr. Nurettin PİRİNÇÇİOĞLU'na ve mevcut tez konuma danışmanlığı ile başlamış olduğum ve tezimi teslim edene kadar geçen sürede bana her konuda her zaman sabırla destek olan ve yardımlarıyla yol gösteren Prof. Dr. Emine MEŞE'ye tezimin fikir aşamasından, tez çalışmalarına, tez yazım sürecine, tez taslağındaki düzeltmeler konularına kadar göstermiş oldukları sabır ve desteklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez sınav jüri üyeleri, Prof. Dr. Sedat İLHAN, Doç. Dr. F. Figen BİNBAY, Doç. Dr. Mustafa SALTI ve Doç. Dr. Murat KORUNUR'a tezim ile ilgili yapmış oldukları düzeltme ve önerileriyle sunmuş oldukları katkılarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Uzun, yorucu ve çoğu zaman umutsuzluğa düştüğüm bu süreçte beni motive eden ve en önemlisi bana yürekten inanıp destekleyen varlığı ve desteğiyle güç ve inanç kaynağım olan babama minnettarım. Bu zorlu süreç boyunca her anlamda bana desteğiyle güç veren başta annem ve babam olmak üzere tüm aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR v

İÇİNDEKİLER vi

ŞEKİLLER LİSTESİ viii

TABLOLAR LİSTESİ x

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ xi

ÖZET xiii

ABSTRACT xv

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1 Atomik Birimler 3

2.2 Hidrojen Atomu 8

2.2.1. Bir elektronlu atomik sistemlerde elektronun bağıl hareketinin incelenmesi 8

2.2.2. Küresel polar koordinatlarda schrödinger denklemi ve çözümü 9

2.3 Çoklu Foton Süreçleri 11

2.3.1. İki fotonlu süreçler 14

2.3.2. Harmonik üretimi 18

2.3.3. Harmonik üretimi deneylerine genel bir bakış 18

2.3.4. Homojen olmayan diferansiyel denklem yöntemi 19

3. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI 21

4. MATERYAL VE METOT 24

4.1 Floquet Metodu 24

4.2. Pertürbasyon Teorisi 27

4.2.1. Dejenere olmayan durumlar için zamandan bağımsız pertürbasyon teorisi 28

4.2.2. Çift pertürbasyon teorisi 30

5. METODUN UYGULANMASI VE BULGULAR 53
5.1 Hidrojen atomunda radyal çözümler 54
6. TARTIŞMA VE SONUÇ 81
KAYNAKLAR 83
ÖZGEÇMİŞ 87

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1 Tablo 2.1'de verilen lineer polarizasyon için, AC yarı-klasik enerjinin ω^2'nin katları cinsinden genişlemesinin ilk katsayısının gerçek ve sanal kısımlarını Mathematica 12.3 programını kullanarak atomik birimlere dönüştürme aşaması……5

Şekil 2.2 Tablo 2.1'de verilen lineer polarizasyon için, AC yarı-klasik enerjinin ω^2'nin katları cinsinden genişlemesinin ilk katsayısının gerçek ve sanal kısımlarını Mathematica 12.3 programını kullanarak atomik birimlere dönüştürme aşaması……6

Şekil 2.3 H - atomunun bağıl hareketinin incelenmesinde kullanılan küresel polar koordinat sistemi.……10

Şekil 2.4 Temel atom – elektromanyetik alan etkileşim süreçleri: a) Soğurma, b) Kendiliğinde ışıma ile yayma c) Uyarılmış ışıma ile yayma. Burada, enerji seviyeleri yatay çizgiler, elektron geçişleri düz çizgi oklar, fotonlar kesikli çizgi-okları ve elektronlar da içi dolu daireler ile gösterilmiştir (Çelik ve Kılıç, 2006).....12

Şekil 2.5 Ana iki foton süreçleri. Burada (a) İki foton soğurulması, (b) Kendiliğinden iki foton yayması ve (c) Uyarılarak iki foton yayma süreci. (c) Uyarılarak iki foton yayma. Burada, içi dolgulu daireler elektronları, kesikli çizgiden oluşan oklar fotonları, düz çizgiden oluşan oklar elektron geçişlerini ve yatay çizgiler de enerji seviyelerini gösterir.
…….15

Şekil 2.6 Farklı cins çift fotonlu soğurma süreci: Burada yatay çizgiler enerji seviyelerini, noktalı çizgiler sanal seviyeleri ve oklar enerji seviyeleri arasındaki geçişleri gösterir. a) Adımlı bir foton uyarma b) Eşzamanlı iki foton uyarma……...16

Şekil 2.7 Tek renkli ikinci harmonik üretiminin gösterimi. Bu kesikli seviyeler sanal veya gerçek olabilir ve iyonizasyon eşiğinin altında veya üstünde yer alır……18

Şekil 3.1 390 nm dalga boyuna sahip lazer alanında Helyum'un *m*=o durumları için yarı-klasik enerji spektrumu. Giydirilmiş taban durumlar (a), (b), (c), (d) ve (e) ile gösterilmiştir ve kesikli çizgiler Krammer Henneberger (KH) durumlarıdır (Vucic ve ark., 2010)……...22

Şekil 3.2 800 nm dalga boyuna sahip lazer alanında bulunan He atomu spektrumu. Giydirilmiş taban durumları (a), (b) ve (c) ile gösterilmektedir ve Kesikli çizgiler de en düşük dört KH durumunu göstermektedir. Yeşil noktalar da aynı alanda Hidrojen atomu spektrumunu göstermektedir (Vucic, ve ark., 2010)……..…….23

Şekil 5.1 Mathematica 12.3 programını kullanarak yaptığımız hesaplamalardan bir görsel……...63

Şekil 5.2 Mathematica 12.3 programıyla β değerlerinden β_2^0 değerinin hesaplanması……...69

Şekil 5.3 Mathematica 12.3 programını kullanarak yaptığımız $\mathrm{Re}(E_{ac})$ hesaplamamız……..78

Şekil 5.4 Mathematica 12.3 programını kullanarak yaptığımız $\mathrm{Re}(E_{ac})$ hesaplamalarımız……79

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 2.1 Lineer polarizasyon için, AC yarı-klasik enerjinin ω^2'nin katları cinsinden genişlemesinin ilk katsayısının gerçek ve sanal kısımları. Birimler, $10^{13}\ W/cm^2$ cinsinden verilen şiddet I dışında atomik birimlerdir. Bu sonuçları hesaplamak için indirgenmiş Hidrojen kütlesi kullanıldı. Parantez içindeki sayılar 10'un katlarını temsil etmektedir (Pont ve ark.,1992).……4

Tablo 2.2 Tablo-2.1'de yer alan Reel Enerji (Re$E^{(0)}(F)$) değerlerinin atomik birimden eV birimine, şiddet (I) verilerinin ise W/cm^2 biriminden atomik birime dönüştürülmüş biçimi (Pont ve ark.,1992).……....7

Tablo 5.1 Alçak frekans bölgesinde alan kuvveti F^{2n}'in $n = 0,1$ ve ω^{2m} frekansının $m = 0,1,2,3,4$ değerleri için $\beta_{2n}^{(2m)}$ katsayılarında Re(E_{ac}) değeri……..…….80

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
m_e	Elektronun kütlesi
e	Temel yük
$\hbar$	Planck sabiti
a_0	Bohr yarıçapı
μ	İndirgenmiş kütle
$\vec{A}$	Vektör potansiyeli
q	Coulomb sabiti
P	Momentum
I	Şiddet (Intensity)
ω	Açısal Frekans
ν	Elektromanyetik ışınım frekansı
λ	Dalga boyu
N_0	Temel seviyedeki atom sayısı
N_1	Uyarılmış seviyede bulunan atom sayısı
N	Foton sayısı
ε_i	Yarı-Klasik Enerji (Quasienerji)
U	Hidrojen için Coulomb potansiyeli
Γ_i	İyonizasyon oranı
ψ	Dalga fonksiyonu
$Y(\theta, \varphi)$	Küresel harmonik
$\rho_{01}(\nu)$	ν_{01} frekansındaki radyasyonun enerji yoğunluğu
A_{10}	Einstein kendiliğinden salma katsayısı
B_{01}	Einstein soğurma katsayısı
ε_0	Serbest uzayın geçirgenliği
V_+	Soğurma operatörü
V_-	Yayma operatörü

τ	Faz
t	Zaman
B	Manyetik alan
H	Hamiltoniyen
$\hat{O}$	Elektrik Dipol Geçiş Operatörü
F_0	Elektrik Alan Genliği
ψ_n	Flouqet Harmoniği
H_1	Pertürbasyon Fonksiyonu/Hamiltoniyen
E_n^0	Pertürbe olmamış özdeğer
ϕ_n	Pertürbe olmamış öz fonksiyon
γ	Keldysh Parametresi

Kısaltma	**Açıklama**
ATI	İyonlaşma
MPI	Çoklu foton İyonlaşması
MPT	Çoklu Foton Tomografisi
MPM	Çoklu Foton Mikroskobu
SEMPAI	Kendi Kendini Geliştiren Yapay Zeka
CPU	Merkezi İşlem Birimi (Central Process Unit)
AC	Alternatif Akım
DC	Doğru Akım
SPA	Bir Foton Soğurma
TPA	İki Foton Soğurma
UV	Mor Ötesi
IR	Kızıl Ötesi

ÖZET

ÇOKLU FOTON SÜREÇLERİNİ TEK ELEKTRON YAKLAŞIMIYLA DÜŞÜK FREKANS PERSPEKTİFİNDEN İNCELEME

Tekeş, Hanife
Doktora, Fizik Bölümü
Danışman: Doç. Dr. Nurettin Pirinççioğlu
Temmuz 2023, 104 sayfa

Bu çalışmada temel olarak bir lazer alanı ile atomun etkileşmesi incelenmiştir. Flouqet metodu ile Pont ve ark. tarafından türetilen çift pertürbasyon yöntemi kullanılarak bir elektronlu bir atomik sistemin en basiti olan Hidrojen atomu için enerji seviyeleri elde edilmiştir. Bu yöntem ile Pont ve ark. düşük ω frekanslı kuvvetli bir alan tarafından ışınlanan bir atom için alternatif akım (AC) yarı-klasik enerji (quasienergy), ω^2 kuvvetlerine ve alan şiddeti F'ye bağlı katsayıları hesapladılar ve enerji özdeğerlerini bu katsayılar cinsinden ifade ettiler. Bu katsayılar $\beta_{2n}^{(2m)}$ şeklinde gösterilen reel ve atomik Hidrojen durumunda kesin olarak hesaplanabilen rasyonel sayılardır. Bu çalışma kapsamında bahsi geçen katsayıların analitik hesabı ayrıntılı olarak tekrarlanmış ve aşağıda tanımlanan parametreler kullanılarak bir elektromanyetik alan varlığında taban durumdaki atomik Hidrojen için ilgili katsayılar hesaplanmıştır.

Pont ve arkadaşlarının ilgili çalışmasında alçak frekans bölgesinde F^{2n}'in $n = 1$ ve ω^{2m} frekansının $m = 1$ değeri için $\beta_{2n}^{(2m)}$ katsayılarında $\mathrm{Re}(E_{ac})$ değeri ile ilgili hesaplamalar $E_{ac}(F,\omega) = \Sigma_m \Sigma_n \beta_{2n}^{(2m)} F^{2n} \omega^{2m}$ ifadesi kullanılarak seriye açılmıştır. Kullanılan alan şiddetinin I (intensity) değeri $10^{13}\ W/cm^2$ ve dalga boyu $616\ nm$ dir. Bu alan için β değerlerini hesapladık. $616\ nm$ dalga boyuna karşılık gelen $\omega = 0.074\ a.b$ frekans ve hesaplanan β değerlerini açtığımız seride Mathematica 12.3 yazılımı kullanılarak Pont ve ark. tarafından elde edilen $\mathrm{Re}(E_{ac}) = -0.502776$ değeri yeniden elde edilmiştir. Ek olarak aynı frekans ve yoğunluk bölgesinde F^{2n}'in bu defa $n = 0$ ve $n = 1$ değerleri dikkate alınmış ve

ω^{2m} frekansının üssünde yer alan m çarpanının değerleri 0'dan 4'e kadar değiştirilmiştir. $\beta_{2n}^{(2m)}$ katsayılarında E_{ac} değerlerini aynı işlem basamaklarını tekrarlayarak kullandığımızda m'yi 0'dan 4'e doğru arttırdıkça Re(E_{ac}) değerinde daha büyük kayma gözlenmiştir. Ancak $m \geq 4$ değerlerinin yarı-klasik enerjide oluşan kaymanın ihmal edilecek kadar küçük olduğunu anlaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hidrojen Atomu, Flouqet, Yarı-Klasik Enerji, Çoklu Foton Süreçleri, Alçak Frekans, Çift Pertürbasyon.

ABSTRACT

INVESTIGATING MULTI-PHOTON PROCESSES VIA SINGLE ELECTRON APPROACH FROM THE LOW FREQUENCY PERSPECTIVE

Tekeş, Hanife
PhD of Science in Department of Physics
Supervisor: Doc. Dr. Nurettin Pirinççioğlu
July 2023, 104 pages

In this study, we basically studied the interaction between a laser field and an atom. Making use of the Floquet double perturbation approach introduced by Pont et al., we computed energy levels for the Hydrogen atom, which is simplest atomic system that includes one electron. With the help of this method, Pont et al. calculated the coefficients depending on the Alternating Current (AC) quasienergy, ω^2 forces and the field strength F for an atom irradiated by a strong field with a low ω frequency, and expressed the energy eigenvalues in terms of these coefficients. The aforementioned coefficients are represented by $\beta_{2n}^{(2m)}$ and rational numbers that can be obtained precisely in the case of real and atomic hydrogen. In this investigation, we repeated the analytical calculation of these coefficients in detail and calculated the coefficients for the ground state atomic hydrogen in an electromagnetic field by using the parameters described below. Pont *et al*. in their study, in the low frequency region F^{2n}'s calculations related to the $\mathrm{Re}(E_{ac})$ value in the $\beta_{2n}^{(2m)}$coefficients for the $n = 1$ and the $m = 1$ value of the ω frequency, in the equation $E_{ac}(F,\omega) = \Sigma_m \Sigma_n \beta_{2n}^{(2m)} F^{2n} \omega^{2m}$ to open the series. The I (intensity) value of the field strength used is $10^{13}\ W/cm^2$ and the wavelength is $616\ nm$. $\omega = 0.074\ a.u$ frequency corresponding to a wavelength of $616\ nm$ and the β in the series in which we opened. We re-obtained the result $\mathrm{Re}(E_{ac}) = -0.502776$ obtained by Pont, M et al. by writing the frequency values in their places and using the Mathematica 12.3 software. In addition, we changed the values of m, which takes places in the power of the ω^{2m} frequency, from 0 to 4 while taking into account the $n = 0$ as well as $n = 1$ values of F^{2n} in the same frequency and intensity region. When we consider the E_{ac} values in the $\beta_{2n}^{(2m)}$ coefficients by repeating the same steps, we observed a larger shift in the value of $\mathrm{Re}(E_{ac})$ as we increase m from 0 to 4. However, we

achieved that the shift in the quasienergy for $m \geq 4$ values is small enough to be neglected.

Keywords: Hydrogen Atom, Flouqet, Quasienergy, Multiple Photon Processes, Low Frequency, Double Perturbation.

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı yüksek şiddetli düşük frekanslı bir elektromanyetik alanda bulunan bir elektronlu bir atomik sistemin elektromanyetik ışıma ile etkileşim süreçlerini anlayabilmek ve alanın sistemin enerjisinde oluşturduğu kayma miktarını kompleks hesaplara girmeden çift pertürbasyon yöntemi ile hesaplamaktır.

Tek fotonlu çalışmalar elektromanyetik alan-atom etkileşimi hakkında gerekli olan yeterli bilgiyi verememektedir. Bu yetersizlik, araştırmacıları çok fotonlu süreçler ile ilgili yeni araştırmalar yapmaya yönlendirmiştir. Çok fotonlu süreçler ile ilgili yapılan araştırmalar, atomik ve moleküler sistemlerin elektronik yapıları ve diğer fiziksel özellikleri hakkında detaylı bilgi edinilmesini sağlamaktadır. 1931 yılında Goepper-Mayer adlı Alman fizikçi çok fotonlu süreçler üzerine ilk teorik araştırmayı yapmıştır (Çelik ve Kılıç, 2006). Yeterli özelliklere sahip monokromatik bir ışık kaynağının o yıllarda olmamasından dolayı bu konuda yeterli hassasiyete sahip deneysel verilere rastlanmamaktadır. 1960'larda lazerlerin bulunması ile beraber çoklu foton süreçleri kullanılarak atomik yapının araştırılması başlamıştır (Meşe, 1997). 1960'larda gözlenen çoklu foton iyonlaşması, 1970'de Saclay ve Kanada'da ışınımın şiddetine bağlı iyonlaşma oranı, daha sonraki yıllarda bulunan eşik üzeri iyonlaşma ve yüksek dereceli harmonik üretimi gibi süreçler büyük ilgi ile bu alanda yapılan araştırmaların odağı haline gelmiştir. Son yıllarda, bu konu kapsamında ihtiyaç duyulan sermayeyi sağlayan kuruluşların maddi katkıları ve bu alanda çalışan bilim insanlarının emeği sayesinde hızlı gelişmeler görülmektedir. Çok fotonlu süreçlerle ilgili çalışmalar sonucu gerçekleşen lazer ve uygulamaları, daha yoğun ışık demeti üretilmesini ve kullanılmasını olası kılmıştır. Aynı zamanda lazer yardımı ile yarı kararlı bir ara seviye üzerinden tek fotona yasak olan geçişler simetri özelliğinin değişmesi nedeniyle çiftli foton soğurulması sonucu gözlenmiştir (Hurst ve ark., 1975). Her geçen gün daha güçlü lazerlerin geliştirilmesi ile birlikte birçok araştırmacı tarafından lazer-atom etkileşimiyle ilgili yoğun temel deneysel ölçümler ve teorik hesaplamaların yapılmasının yanı sıra günümüzde lazer teknolojisi, bilimsel ve endüstriyel çalışmalarda geniş ve önemli uygulama alanlarının oluşmasını sağlamıştır.

Literatürde çok fotonlu süreçler ile ilgili deneysel çalışmalar ve tesir kesitleriyle ilgili araştırmalar mevcuttur. Atomik floresan şiddetini tanımlayabilmek için soğurma tesir kesitlerinin hesaplanmasını içeren çalışmalar da bulunmaktadır. Lambropoulos, çok fotonlu geçiş tekniklerinde tesir kesitlerini hesaplamak için çeşitli yöntemler geliştirmiştir

(Lambropoulos, 1976). Ara seviyeler üzerinden sınırlandırılmış toplam yöntemi ve Green fonksiyonu yöntemi, tesir kesiti hesaplamalarında çok sık kullanılan yöntemler arasındadır (Robinson ve Geltman, 1967; Chang ve Poe, 1977; Pindzola, 1978; Omidvar, 1980; Çelik ve Kılıç, 2006)

Ayrıca, literatürde pertürbatif ve pertürbatif olmayan Floquet metodu kullanılarak bu süreçlerin çalışılması ile bir elektronlu atomik sistemlerin atomik yapısının araştırılması yapılmıştır (Pont ve ark.,1992; Meşe, 1997).

Biz çalışmamızda bir elektronlu atomik sistemlerin en basit hali olan Hidrojen atomunun bir lazer alanı ile etkileşmesini temel olarak inceleyeceğiz. Karmaşık hesaplamalara girmeden Flouqet metodu ile çift pertürbasyon yaklaşımını uygulayarak lazer alanı tarafından enerji seviyelerinde oluşan kaymayı hesaplayacağız.

Pont ve arkadaşları yaptıkları ve referans aldığımız çalışmalarında, düşük frekanslı güçlü alan şiddetine maruz kalan bir atomun AC yarı-klasik enerji seviyelerini hesaplamak için çift pertürbasyon yöntemini kullandılar (Pont ve ark., 1992). Bu yöntem ile düşük ω frekanslı kuvvetli bir alan tarafından ışınlanan bir atom için Alternatif Akım (AC) yarı-klasik enerji (quasienergy), ω^2'ye ve alan kuvveti F'ye bağlı katsayıları hesapladılar.

Bu tez çalışmasında sunulan araştırma kapsamında bu katsayıların ayrıntılı hesabını tekrar ederek farklı parametreler için bir elektromanyetik alanda taban durumdaki atomik Hidrojen için katsayıları hesaplayacağız.

F'ye bağlı katsayılar F^2'nin kuvvetlerine genişletilirse, çift seriler,

$$E_{ac}(F,\omega) = \Sigma_m \Sigma_n \beta_{2n}^{(2m)} F^{2n} \omega^{2m} \qquad (1.1)$$

biçiminde betimlenir. $\beta_{2n}^{(2m)}$ sabit katsayıları reel ve (atomik Hidrojen durumunda) kesin olarak hesaplanabilen rasyonel sayılardır. $m = 1$ için ve doğrusal ya da dairesel kutuplanmış ışık için büyük-n limitinde $\beta_{2n}^{(2m)}$ nin Bender-Wu tipinin bir asimptotik formülünü sağladığını söyleyebiliriz (Pont ve ark.,1992).

Pont ve arkadaşları çalışmalarında, F^2'ye kadar terimler ω frekansının üssü olan $m = 1$ için hesaplamalar yapmıştır (Pont, M. ve ark.,1992). Biz çalışmamızda yine F^2'yi dikkate alarak ω frekansının üssü olan m'yi 0'dan 4'e kadar değiştirerek alçak enerji bölgesinde enerjinin frekansa olan bağlılığını inceledik.

Bu problemden elde edilecek sonuç ile ileride başka bir çalışma olarak harmonik üretimi hesabı için bu yöntemin kullanılabileceği önerisinde bulunabiliriz. Bir valans elektronlu atomik sistemlerde enerji seviyelerinin hesaplanmasında bu yöntemle bilgisayarda yer, hafıza ve CPU frekans açısından çok alan kaplamadan Mathematica programı kullanılarak çözüme ulaşılabileceğini göstereceğiz.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Atomik Birimler

Atom fiziğinde yaygın olarak atomik birimler kullanılmaktadır ve bu birim terminolojide a.u. veya dilimizde a.b. şeklinde gösterilmektedir. Atom fiziğinde kullanılan temel fiziksel sabitlerin atomik birim değerleri aşağıda verildiği gibidir:

- Elektronun kütlesi: $m_e = 9{,}1094.10^{-31}$kg= 1 a.b.
- Temel yük: $e = 1{,}6022.10^{-19}$ C= 1 a.b.
- Sadeleştirilmiş Planck sabiti: $\hbar = 1{,}0546.10^{-34}$ Js = 1 a.b.
- Bohr yarıçapı: $a_0 = 0{,}52918.10^{-10}$m = 1 a.b.
- Frekans: $v_0/a_0 = 4{,}13.10^{16}$ s^{-1}= 1 a.b.
- Elektrik alan: $e/a_0^2 = 5{,}14.10^{9}$ V/cm = 1 a.b.

Atom fiziğinde a_0'ın uzunluk birimi olarak alındığı, atomik birimler olarak anılan birimlerin kullanılması son derece kolaylık sağlamaktadır. Buna uygun biçimde elektronun kütlesi kütle birimi ve $\hbar$ ise açısal momentum birimi olarak kullanılır. Sistemi tamamlamak için yük birimi olarak, elektronun yükünün e mutlak büyüklüğü alınır. Serbest uzayın ε_0 geçirgenliği $1/4\pi$ dir. Atomik birimlerde ($m= \hbar=e=1,\ 4\pi\varepsilon_0=1$)

$$E_n = -\frac{1}{2}Z^2/n^2 \text{ a.b.} \qquad (2.1)$$

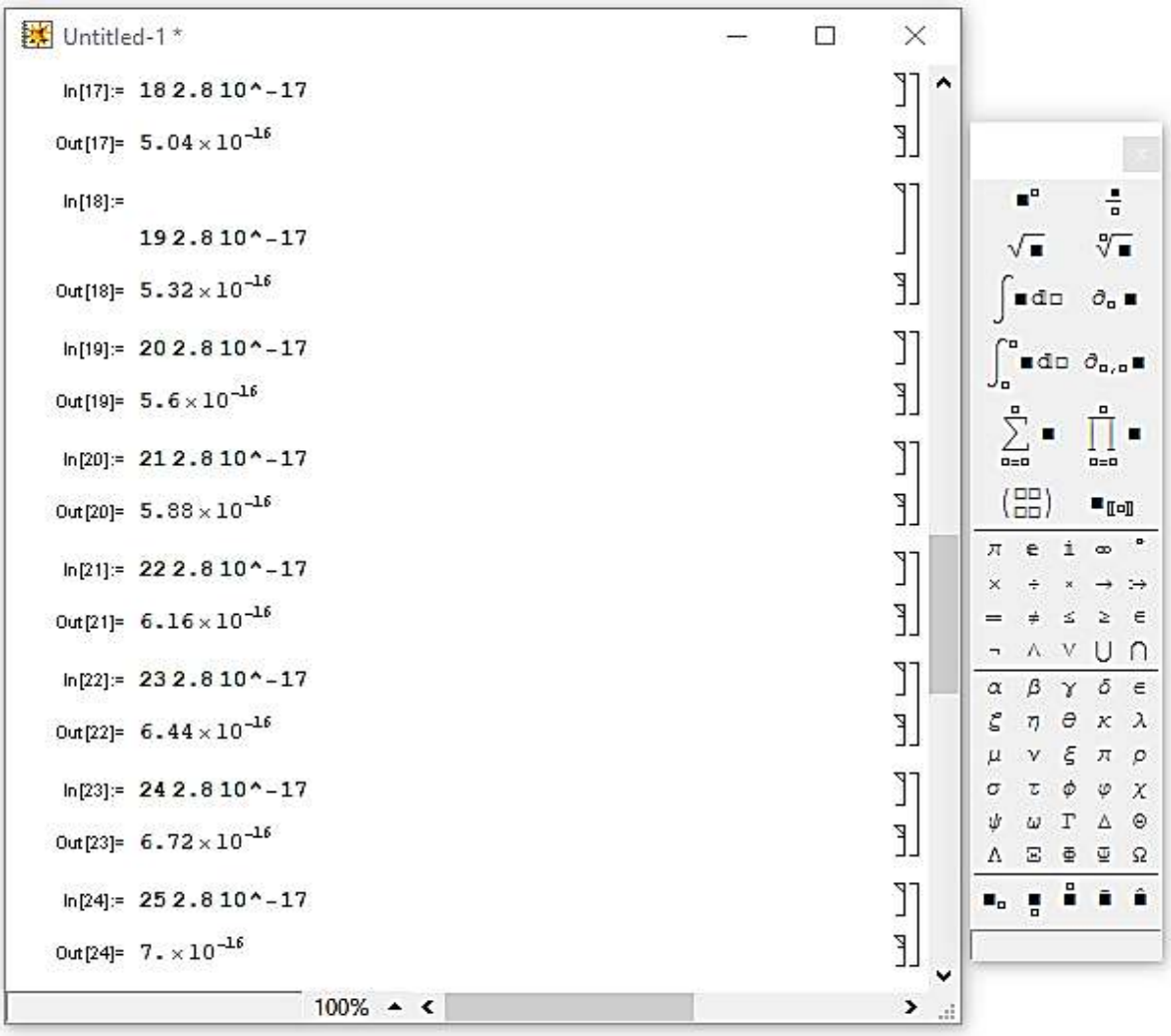
yazılır. Hidrojenin $(Z=1,\ n=1)$ taban durumu enerjisi -0,5 a.b. dir ve buradan 1 a.b. enerjinin atomik biriminin 27,2 eV olduğunu görmekteyiz.

Verilerinden faydalandığımız çalışmada, aşağıda verilen tabloda Reel Enerji ($\mathrm{Re}E^{(0)}(F)$) değerleri atomik birimden eV birimine, Intensity (Şiddet) (I) değerleri ise W/cm^2 biriminden atomik birime Mathematica 12.3 programı kullanılarak dönüştürülmüştür;

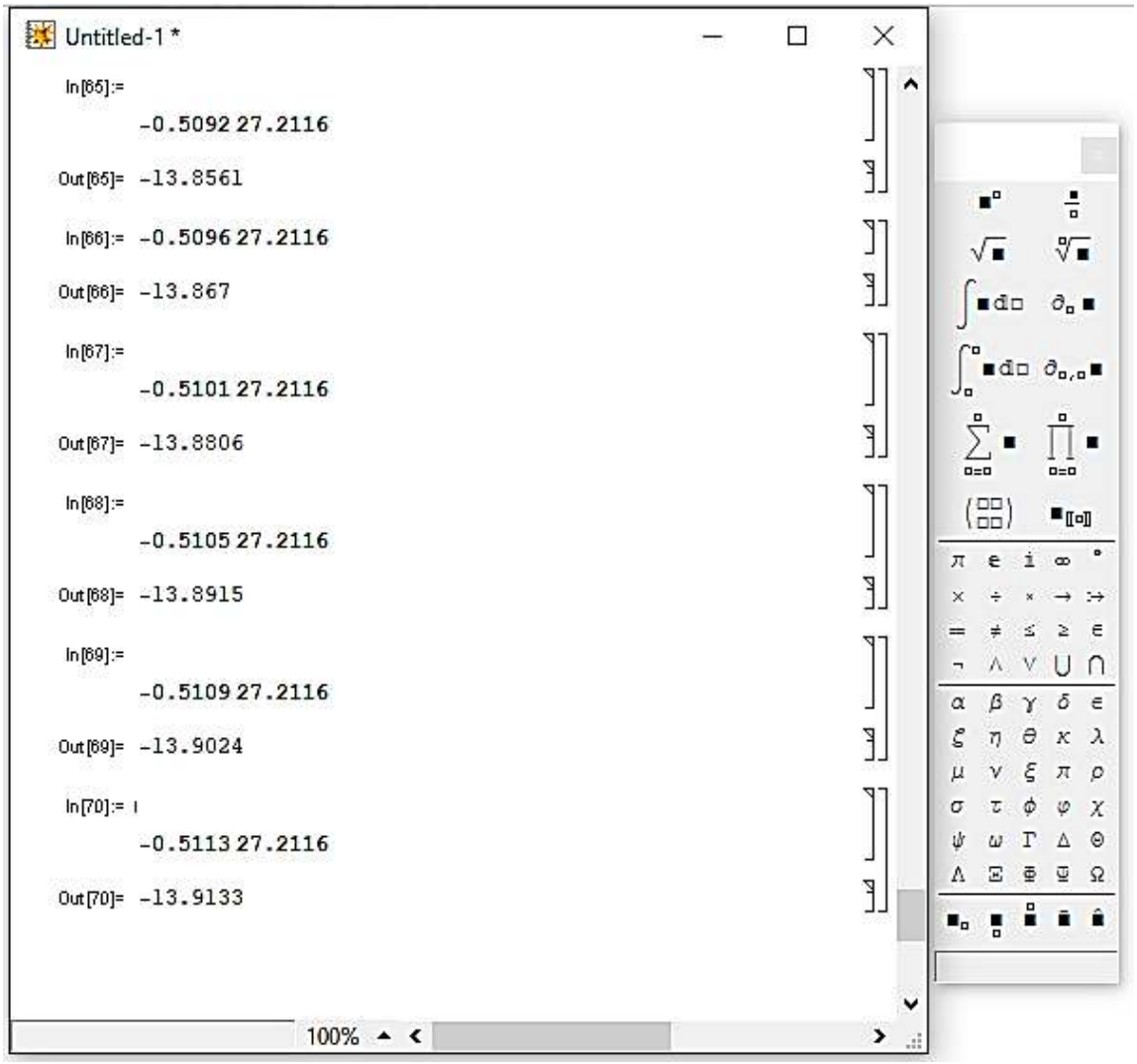
I (W/cm^2)	**Re$E^{(0)}(F)$(eV)**	**Im$E^{0}(F)$(a.b.)**
2	-5.004[-1]	-7.75[-12]
3	-5.007[-1]	-1.109[-9]
4	-5.010[-1]	-2.085[-8]
5	-5.014[-1]	-1.517[-7]
6	-5.017[-1]	-6.482[-7]
7	-5.021[-1]	-1.984[-6]
8	-5.024[-1]	-4.849[-6]
9	-5.028[-1]	-1.009[-5]
10	-5.032[-1]	-1.865[-5]
11	-5.035[-1]	-3.146[-5]
12	-5.039[-1]	-4.940[-5]
13	-5.043[-1]	-7.327[-5]
14	-5.047[-1]	-1.037[-4]
15	-5.051[-1]	-1.412[-4]
16	-5.055[-1]	-1.862[-4]
17	-5.059[-1]	-2.389[-4]
18	-5.063[-1]	-2.995[-4]
19	-5.068[-1]	-3.681[-4]
20	-5.072[-1]	-4.445[-4]
21	-5.076[-1]	-5.287[-4]
22	-5.080[-1]	-6.206[-4]
23	-5.084[-1]	-7.199[-4]
24	-5.088[-1]	-8.265[-4]
25	-5.092[-1]	-9.402[-4]
26	-5.096[-1]	-1.061[-3]
27	-5.101[-1]	-1.187[-3]
28	-5.105[-1]	-1.321[-3]
29	-5.109[-1]	-1.460[-3]
30	-5.113[-1]	-1.604[-3]

Tablo 2.1: Lineer polarizasyon için, AC yarı-klasik enerjinin ω^2'nin katları cinsinden genişlemesinin ilk katsayısının gerçek ve sanal kısımları. Birimler, $10^{13}\,W/cm^2$ cinsinden verilen şiddet I dışında atomik birimlerdir. Bu sonuçları hesaplamak için indirgenmiş Hidrojen kütlesi kullanıldı. Parantez içindeki sayılar 10'un katlarını temsil etmektedir (Pont ve ark.,1992).

Mathematica 12.3 Yazılımı ile gerçekleştirilen hesaplamalar;



Şekil 2.1: Tablo 2.1'de verilen lineer polarizasyon için, AC yarı-klasik enerjinin ω^2'nin katları cinsinden genişlemesinin ilk katsayısının gerçek ve sanal kısımlarını Mathematica 12.3 programını kullanarak atomik birimlere dönüştürme aşaması.



Şekil 2.2: Tablo 2.1'de verilen lineer polarizasyon için, AC yarı-klasik enerjinin ω^2'nin katları cinsinden genişlemesinin ilk katsayısının gerçek ve sanal kısımlarını Mathematica 12.3 programını kullanarak atomik birimlere dönüştürme aşaması.

I (W/cm^2)	I(a.b.)	ReE$^{(0)}$(F)(a.b)	ReE$^{(0)}$(F)(eV)	ImE$^{(0)}$(F)(a.b)	ImE$^{(0)}$(F)(eV)
2	5.60[-17]	-5.004[-1]	-13.6167	-7.75[-12]	-2.1089[-10]
3	8.40[-17]	-5.007[-1]	-13.6248	-1.109[-9]	-3.01777[-8]
4	1.12[-16]	-5.010[-1]	-13.633	-2.085[-8]	-5.67362[-7]
5	1.40[-16]	-5.014[-1]	-13.6439	-1.517[-7]	-4.128[-6]
6	1.68[-16]	-5.017[-1]	-13.6521	-6.482[-7]	-0.176386[-4]
7	1.96[-16]	-5.021[-1]	-13.6629	-1.984[-6]	-0.539878[-4]
8	2.24[-16]	-5.024[-1]	-13.6711	-4.849[-6]	-0.131949[-3]
9	2.52[-16]	-5.028[-1]	-13.682	-1.009[-5]	-0.274565[-3]
10	2.80[-16]	-5.032[-1]	-13.6929	-1.865[-5]	-0.507496[-3]
11	3.08[-16]	-5.035[-1]	-13.701	-3.146[-5]	-0.856077[-3]
12	3.36[-16]	-5.039[-1]	-13.7119	-4.940[-5]	-0.134425[-2]
13	3.64[-16]	-5.043[-1]	-13.7228	-7.327[-5]	-0.199379[-2]
14	3.92[-16]	-5.047[-1]	-13.7337	-1.037[-4]	-0.282184[-2]
15	4.20[-16]	-5.051[-1]	-13.7446	-1.412[-4]	-0.384228[-2]
16	4.48[-16]	-5.055[-1]	-13.7555	-1.862[-4]	-0.50668[-2]
17	4.76[-16]	-5.059[-1]	-13.7663	-2.389[-4]	-0.650085[-2]
18	5.04[-16]	-5.063[-1]	-13.7772	-2.995[-4]	-0.814987[-2]
19	5.32[-16]	-5.068[-1]	-13.7908	-3.681[-4]	-1.00166[-2]
20	5.60[-16]	-5.072[-1]	-13.8017	-4.445[-4]	-1.20956[-2]
21	5.88[-16]	-5.076[-1]	-13.8126	-5.287[-4]	-1.43868[-2]
22	6.16[-16]	-5.080[-1]	-13.8235	-6.206[-4]	-1.68875[-2]
23	6.44[-16]	-5.084[-1]	-13.8344	-7.199[-4]	-1.95896 [-2]
24	6.72[-16]	-5.088[-1]	-13.8453	-8.265[-4]	-2.24904[2]
25	7.00[-16]	-5.092[-1]	-13.8561	-9.402[-4]	-2.55843[-2]
26	7.28[-16]	-5.096[-1]	-13.867	-1.061[-3]	-2.88715[-2]
27	7.56[-16]	-5.101[-1]	-13.8806	-1.187[-3]	-3.23002[-2]
28	7.84[-16]	-5.105[-1]	-13.8915	-1.321[-3]	-3.59465[-2]
29	8.12[-16]	-5.109[-1]	-13.9024	-1.460[-3]	-3.97289[-2]
30	8.40[-16]	-5.113[-1]	-13.9133	-1.604[-3]	-4.36474[-2]

Tablo 2.2: Tablo-2.1'de yer alan Reel Enerji (Re$E^{(0)}(F)$) değerlerinin atomik birimden eV birimine, şiddet (I) verilerinin ise W/cm^2 biriminden atomik birime dönüştürülmüş biçimi (Pont ve ark.,1992).

2.2 Hidrojen Atomu

Bir proton ve bir elektrondan oluşan basit yapısı ile Hidrojen atomu kompleks atomların yapısını araştırırken önemli rol üstlenir. Matris elemanlarının hesaplanmasında bazen elektromanyetik alan klasik olarak incelense de her durumda Hidrojen atomu kuantum mekaniksel bir sistem olarak ele alınır ve teorik hesaplamalardan elde edilen sonuçların deneysel ölçümlerden elde edilen sonuçlar ile detaylı bir şekilde karşılaştırılmaları mümkündür. İyi bilinen Hidrojen atomu dalga fonksiyonunu, daha kompleks atomlar için kullanılabilecek farklı yaklaşım ve hesaplamaları kontrol etmede kullanmak olasıdır (Karule ve Moine, 2003). Bir yüzyılı aşkın zaman süreci boyunca kuantum teorisinin gelişiminde Hidrojen atomunun önemi tartışılamaz (Li, 1994; Koval, 2004). Teorik çalışmalarda Hidrojen atomunun basit yapısı, elektron açısal dağılımı ve toplam tesir kesiti gibi niceliklerin hesaplanmasını kolaylaştırmaktadır. Zernik 1964'te ilk olarak iki foton iyonlaşmasını Hidrojen atomunu kullanarak yapmıştır. Aynı zamanda iki foton iyonlaşması için tesir kesiti hesabı yapmıştır (Zernik, 1964; Çelik ve Kılıç, 2006). Akabinde 1965 yılında geçiş genlikleri Zernik ile Klopfenstein tarafından hesaplanmıştır ve bu hesaplamalar birinci dereceden diferansiyel denklem çözümünü içermektedir (Zernik ve Klopfenstein, 1965). 1969'da yaklaşımı Chan ve Tang da kullandı (Chan ve Tang, 1969). Bu kapsamda yapılan benzer çalışmalar Coulomb Green fonksiyonu integral metodu kullanılarak da yapıldı (Rapoport, Zon, ve Manakov, 1969; Klarsfeld, 1970; Teague ve Lambropoulos, 1976). Karule, Coulomb Green fonksiyonu ve Sturmian bazında seriye açma yönteminden yararlanmıştır (Karule ve Moine, 2003).

Taban durumdaki Hidrojen atomunun lazer alanı ile etkileşmesi sonucu oluşan çoklu foton iyonlaşması üzerine ilk çalışmalar 1966'da Bebb ve Gold 1968'de Gontier ve Trahin, ve 1969 Rapoport tarafından gerçekleştirildi. Bu çalışmalar sayısal olarak güvenlikli hesapları içermektedir ve çoklu foton tesir kesiti rezonanslarını anlamaya yardımcı olmuştur (Bebb ve Gold, 1966; Gontier ve Trahin, 1968; Rapop, 1969).

2.2.1 Bir elektronlu atomik sistemde elektronun bağıl hareketinin incelenmesi

Bir valans elektronlu atomik sistemler incelenirken en basit atom olan Hidrojen atomunun incelenmesi gelenekselleşmiştir. Aynı zamanda elektronun hareketi incelenirken elektronun bağıl hareketinin düşünülmesi bir zorunluluktur. Hidrojen atomu gibi ikili bir kuantum

mekaniksel sistemlerde büyük cisim etrafındaki küçük cismin bağıl hareketi Schrödinger denklemi ile

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi_{bağ} + U(r)\Psi_{bağ} = E\Psi_{bağ} \tag{2.2}$$

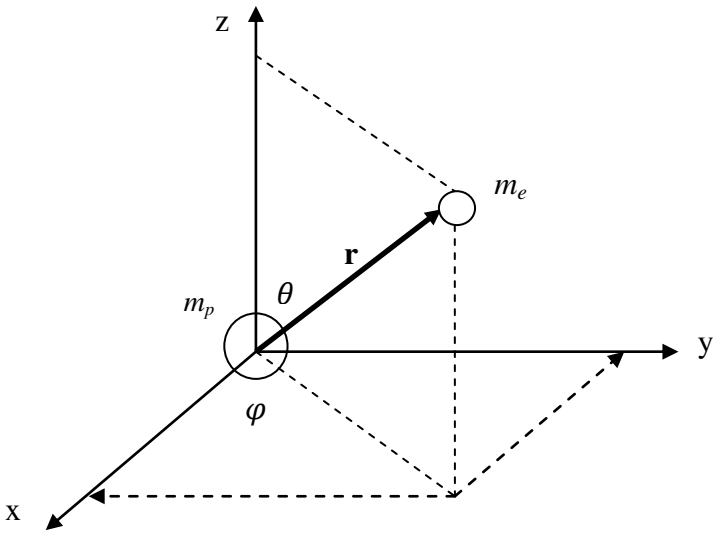
olarak ifade edilir. Buradaki ∇^2 bağıl koordinatlar üzerine işlem yapan laplasyen veya nabla operatörüdür. Çoğunlukla $E_{BAĞ} \gg E_{LAB}(KM)$ olduğu için laboratuar koordinat sistemi içinde kütle merkezinin enerjisi ve momentumu ihmal edilebilir. Dolayısıyla tek elektronlu bir atomik sistemde merkezcil alan probleminin çözümü, elektronun bağıl hareketiye ilgili Schrödinger denkleminin çözümünü gerektirir. Bu çözümü gerçekleştirmek için küresel koordinatları tercih etmek kolaylık sağlar. Çünkü bu sistemlerde kartezyen koordinatlarda çözüm zor ve sıkıcı matematik işlemi gerektirmektedir. Bu nedenle dönüşüm bağıntıları kullanılarak kartezyen koordinatlardan küresel polar koordinatlara geçiş yapılır ve ∇^2 laplasyen operatörünün küresel polar koordinatlardaki ifadesini kullanmak gerekir (Aygün ve Zengin, 1998).

2.2.2 Küresel polar koordinatlarda Schrödinger denklemi ve çözümü

Bağıl hareket için kartezyen koordinat sisteminde Schrödinger dalga denklemi

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi + U(r)\psi = E\psi \tag{2.3}$$

biçiminde yazılır. Burada $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $U(r)$ Coulomb potansiyeli ve μ indirgenmiş kütledir ve kartezyen koordinat sistemindeki gösterimi Şekil 2.3' de verildiği gibidir. Küresel koordinatlar aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.3: H - atomunun bağıl hareketinin incelenmesinde kullanılan küresel polar koordinat sistemi.

$(x, y, z) \leftrightarrow (r, \theta, \varphi)$ geçişi kullanılarak elde edilen ∇^2'nin küresel koordinatlarda ifadesi kullanılarak Hamiltoniyen yazıldığında

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right]+U(r)\psi=E\psi \quad (2.4)$$

elde edilir. Burada

$$U(r)=-\frac{Ze^2}{r} \quad (2.5)$$

Coulomb potansiyelidir ve sadece radyal değişken olan r'ye bağlıdır. θ ve φ açılarından bağımsızdır ve dolayısıyla potansiyel küresel simetrik bir yapıya sahiptir. Potansiyel enerji küresel simetriye sahip olduğu için denklem bu koordinat sisteminde değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak çözülebilir. Bu yöntemde elektronun bağıl hareketini temsil eden dalga fonksiyonu $\psi(r, \theta, \varphi)$, radyal ve açısal olmak üzere iki ayrı fonksiyonun çarpımı şeklinde ifade edilebilir:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi) \quad (2.6)$$

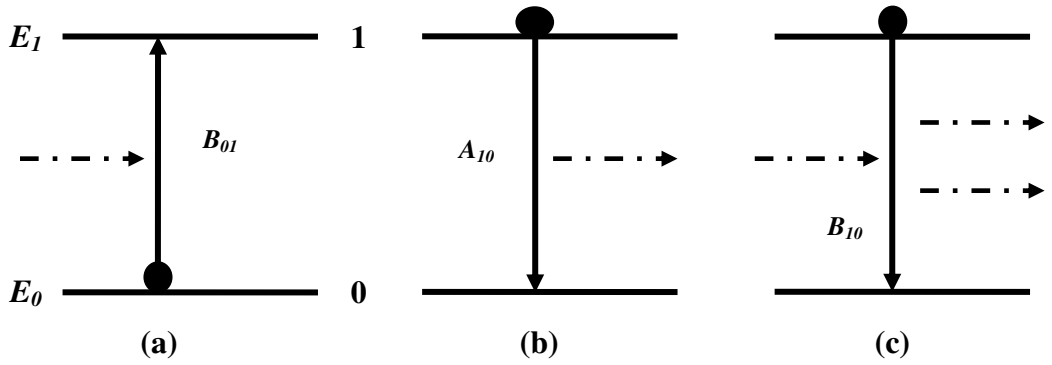
Denklem (2.6), denklem (2.4)'te yerine yazılarak elde edilen ifadede matematiksel düzenleme yapılır. Elde edilen denklem $R(r)Y(\theta, \varphi)$ ile bölünüp r^2 ile çarpılınca elektronun bağıl hareketinin küresel koordinatlarda diferansiyel denklemi

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}(E-U)=-\frac{1}{Y}[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}] \quad (2.7)$$

şeklinde yazılır. Denklem (2.7)'nin sol tarafı sadece radyal değişken olan olan *r'* ye bağlı ve sağ tarafı da (θ,φ) açısal değişkenlerini içermektedir. Eşitliğin iki tarafı farklı iki değişkene sahip olması bir paradokstur. Bu paradoksun çözümü denklemin bağımsız değişkenleri olan (r,θ,φ)'nin, değişim sınırları içinde her değer için doğrulanabilmesi, sadece denklemin sağ ve sol tarafını aynı sabite eşitlemek ile mümkün olur. Bu sabite, değişkenlerine ayırma sabiti denir. Denklemin iki tarafının aynı sabite eşitlenerek çözüme gidilir. Burada $R(r)$, radyal kısmın çözümleri ve küresel harmonikler olarak adlandırılan $Y(\theta,\varphi)$ de açısal kısmın çözümleridir. Potansiyel sadece r'ye bağlı olduğu sürece, denklemin küresel harmonik kısmının çözümleri aynı kalır. Kullanılacak potansiyel için denklemin radyal kısmının çözümleri sadece potansiyelden etkilenir.

2.3 Çoklu Foton Süreçleri

Elektromanyetik alan-atom etkileşim süreçlerinde tek foton süreçlerine ek olarak çoklu foton süreçleri olarak adlandırılan süreçler 1976'da Lambropoulos ve diğer bilim insanlarının ilgi alanını oluşturmuştur (Lambropoulos, 1976). Çok fotonlu süreçleri anlayabilmek için tek foton süreçlerinin öncelikle bilinmesi gerekir. Elektromanyetik dalga atomla etkileştiğinde; soğurma, kendiliğinden salma/yayma ve uyarılmış salma/yayma olmak üzere üç temel fiziksel olay meydana gelir. Bu üç temel fiziksel olayın nasıl gerçekleştiği, her üç durum için enerji seviyeleri arasındaki geçişlerin nasıl olduğunu Einstein incelemiştir. Aynı zamanda bu olayların gerçekleşme oranları arasında zaman açısından bir ilişki olduğunu da göstermiştir. Bu üç temel olay Şekil 2.4'te şematik olarak verilmektedir.



Şekil 2.4: Temel atom – elektromanyetik alan etkileşim süreçleri: a) Soğurma, b) Kendiliğinden ışıma ile yayma c) Uyarılmış ışıma ile yayma. Burada, enerji seviyeleri yatay çizgiler, elektron geçişleri düz çizgi oklar, fotonlar kesikli çizgi-okları ve elektronlar da içi dolu daireler ile gösterilmiştir (Çelik ve Kılıç, 2006).

Atom-elektromanyetik etkileşmesi incelenirken Einstein tarafından kullanılan iki seviyeli atom modeli kullanmak süreçleri anlamak açısından iyi bir yaklaşım oluşturmaktadır. Bunu şematik olarak Şekil 2.4'te olduğu gibi gösterebiliriz. Bu şekilde, 0 temel durumu gösteren enerji seviyesini ve 1 uyarılmış durumu gösteren enerji seviyesini temsil etmektedir. E_0 enerjili temel durumdaki atom, elektromanyetik alandan $\nu_{01} = \frac{E_1 - E_0}{h}$ büyüklüğünde frekansa sahip bir foton soğurarak 1 ile gösterilen uyarılmış duruma geçiş yapar. Bu olaya atom fiziğinde soğurma denir. dt zaman aralığında taban durumdan uyarılmış duruma geçen atom sayısının değişimi

$$\frac{dN_0}{dt} = B_{01} N_0 \rho_{01}(\nu) \tag{2.8}$$

ile verilir. Burada N_0 temel seviyedeki atom sayısı, $\rho_{01}(\nu)$, ν_{01} frekansına sahip ışınımın enerji yoğunluğu B_{01} Einstein soğurma katsayısı olarak bilinmektedir (Çelik ve Kılıç, 2006). Uyarılmış durumda bulunan bir atom, her zaman bir foton yayarak kendiliğinden temel duruma geri dönme eğilimi gösterir. Bu olay kendiliğinden ışıma ile yayma olarak adlandırılır ve kendiliğinden ışıma ile yayma oranı

$$\frac{dN_1}{dt} = -A_{10} N_1 \tag{2.9}$$

biçiminde betimlenir. N_1 uyarılmış seviyede bulunan atom sayısını verirken A_{10} Einstein kendiliğinden ışıma ile yayma katsayısıdır. Son olarak etkilemeli ışıma ile yayma sürecinde, uyarılmış seviyede bulunan bir atomun iki seviye arasındaki geçiş enerjisine eşit bir enerjiye sahip bir fotonla etkileşerek atomun taban duruma geri gelmesine ve bunu yaparken etkileştiği

fotona özdeş başka bir foton daha yaymasına sebebiyet verir. Uyarılarak ışıma ile yayma oranı da

$$\frac{dN_1}{dt} = -B_{10}N_1\rho_{10}(\nu) \tag{2.10}$$

ile verilir. Burada B_{10} Einstein uyarılarak salma katsayısıdır. Bu atomik süreçlerin üçünde iki elektronik enerji seviyeleri arasındaki değişim fotonların enerjisini ifade etmektedir. Işıma enerji yoğunluğu, Planck kanunu olan

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3(e^{h\nu/kT} - 1)} \tag{2.11}$$

ifadesiyle betimlenmektedir. Maxwell-Boltzman yasalarına göre farklı kuantum durumlarında bulunan atomların sayısı da

$$\frac{N_1}{N_0} = e^{-(E_1 - E_0)/kT} = e^{-h\nu_{10}/kT} \tag{2.12}$$

ile verilir.

Termal dengede olan bir sistem için 0 temel durumundan 1 uyarılmış durumuna geçiş için soğurma oranının, 1 uyarılmış durumdan 0 temel durumuna kendiliğinden ve uyarılarak ışıma ile yayma oranlarının toplamına eşit olmalıdır. Bu durumda;

$$B_{01}N_0\rho_{01}(\nu_{01}) = A_{10}N_1 + B_{10}N_1\rho_{10}(\nu_{10}) \tag{2.13}$$

yazılabilir (Çelik ve Kılıç, 2006). Burada, soğurma miktarı ile yayma miktarı eşittir. Denk. (2.11) ve (2.13) kullanılınca ve termal denge durumunda $B = B_{01} = B_{10}$ koşulu ile birlikte $\rho = \rho_{01} = \rho_{10}$ göz önüne alındığında

$$\rho(\nu) = \frac{A_{10}}{B_{10}e^{h\nu_{10}/kT} - B_{10}} \tag{2.14}$$

bulunur. Buradan her iki geçiş katsayısı arasında aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$A = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}B \tag{2.15}$$

Bu denklem sayesinde Einstein katsayılarının birbirleri arasındaki ilişkileri daha kolay anlaşılmış olur. Einstein tarafından da ifade edildiği üzere bu teori ile uyarılarak ışıma ile yayma, Planck yasasının bir sonucudur.

Tek fotonlu geçişler kapsamında geçerliliği olan bu fikirler iki ya da daha fazla foton içeren çoklu foton süreçlerine genişletilmiştir (Brown, 1999; Çelik ve Kılıç, 2006). İki enerji seviyesi arasındaki geçiş sürecinde geçişi sağlayacak fotonun enerjisi atomun iki durumuna ait enerji seviyesi arasındaki farka eşit değilse başka bir değişle geçişi sağlamak için yeterli enerjiye sahip değilse simetri ilkelerine uyarak birden fazla foton kullanılarak geçiş gerçekleşebilir.

Benzer bir durum kendiliğinden ya da uyarılarak ışıma süreçlerinde de söz konusudur. Yani uyarılmış durumda bulunan bir atomik sistem kendiliğinden veya uyarılarak ışıma yolu ile birden fazla foton yayarak taban duruma geçiş yapabilir. Bu süreçler, çoklu foton süreçleri olarak adlandırılır.

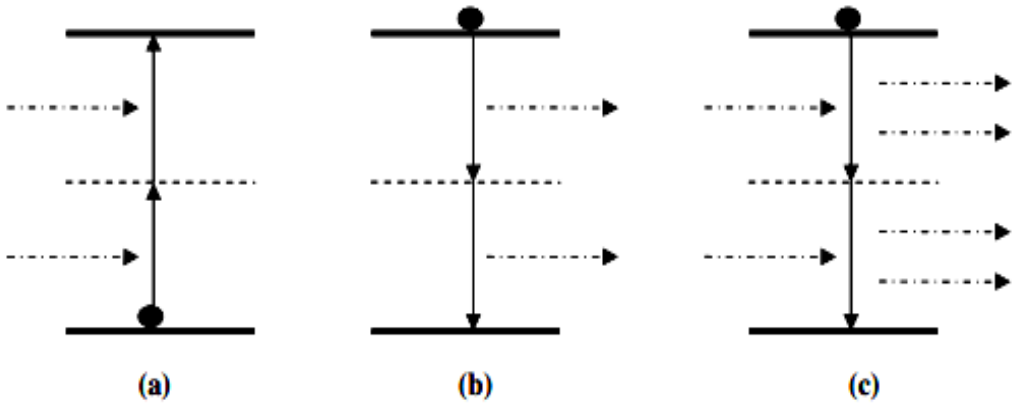
Çoklu foton iyonlaşması, eşik üzeri iyonlaşma ve harmonik üretimi olayları çoklu foton süreçlerine örnek süreçlerdendir. Bu süreçlerin gözlenebilmesi yüksek yoğunluklu ve/veya yüksek frekanslı ışık kullanımını gerektirmektedir ancak lazerlerin bulunması ve gelişimi bu süreçlerin gözlenmesini ve ayrıntılı incelenmesini sağlamıştır.

2.3.1 İki fotonlu süreçler

Bu süreçler atomların ara enerji seviyeleri, ince yapı sabiti, Lamb kayması ve Bell eşitsizliği gibi atomik olayların çalışmasında yardımcı olmaktadır (Bassi ve Baluja, 2000). Ek olarak bu mekanizmalar yardımıyla maddenin yapı taşı olan atomik sistemin araştırılmasının yanı sıra ışığın koherens özelliklerini araştırmak da mümkün olabilmektedir (Bredikhin ve ark., 1973).

Aslında tek fotonlu ve iki fotonlu süreçler birbirlerine benzemektedirler. Bu süreçte bir elektron aynı zamanda iki foton soğurarak fotonların enerjileriyle aynı olan bir üst seviyeye geçer (Çelik ve Kılıç, 2006).

İki fotonlu üç temel süreç aşağıda verilmiştir (Brown, 1999).



Şekil 2.5: Ana iki foton süreçleri. Burada (a) İki foton soğurulması, (b) Kendiliğinden iki foton yayması ve (c) Uyarılarak iki foton yayma süreci. (c) Uyarılarak iki foton yayma. Burada, içi dolgulu daireler elektronları, kesikli çizgiden oluşan oklar fotonları, düz çizgiden oluşan oklar elektron geçişlerini ve yatay çizgiler de enerji seviyelerini gösterir.

Şekil 2.5 (a) ile verilen iki foton soğurulmasında ana seviyede yer alan atom ışıma bölgesinden iki foton soğurarak elektronun bir enerji seviyesine çıkması sağlanır. Şekil 2.5 (b) ile verilen kendiliğinden iki foton yayma sürecinde bulunan elektron uyarılmış seviyenin altında bir enerji seviyesine geçerek bu durumda atom iki foton yaymış olur. Şekil 2.5 (c) ile belirtilen uyarılmış iki fotonlu yayma sürecinde bu kez atom iki foton soğurup geçiş yapmak zorunda kalır. Böylece iki foton daha fazla yaymış olur.

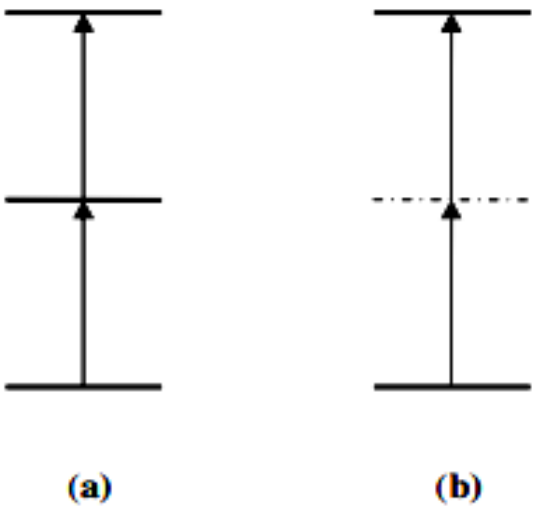
Uyarma işleminin gerçekleşme olasılığı atoma gönderilen ışık şiddetine bağlıdır ve atomu uyarmak için gerekli olan enerji gönderilen fotonun enerjisine karşılık gelir. Birden fazla foton enerjisinin birleşimi ile bir molekülü uyarmak için gereken enerji karşılanabilir. Dalga boyları λ_{TFS} ve $\lambda_{ÇFS}$ olan fotonlar sırasıyla tek foton ve çift foton soğurma süreçlerini gerçekleştirmiş olsun. Enerjinin korunumu her iki fotonun dalga boyları arasında $\lambda_{ÇFS} = 2\lambda_{TFS}$ ilişkisinin olmasını gerektirmektedir. Bir başka değişle çift foton soğurma sürecini gerçekleştiren fotonun dalga boyu tek foton soğurma sürecini sağlayan fotonun dalga boyunun iki katına eşittir.

Örneğin 700 nm dalga boylu iki foton birlikte bir atomik ya da moleküler sistemi eş-zamanlı olarak uyarabilir. Sistemin soğurduğu enerji 350 nm dalga boyuna sahip bir fotonun enerjisine eşittir. Bu da elektromanyetik spektrumun mor ötesi (UV), kızıl ötesi (IR), görünür (visible), v.s. gibi değişik bölgelerinde frekanslara sahip ışıklar ile güçlü atomik/moleküler sistem soğurmaların oluşturulması gerçekleştirilebilmektedir. Bu süreçler için geçiş olasılıkları ve olasılık yoğunlukları güçlü teorik hesaplamalar gerektirir. Konuyla ilgili ayrıntılı bilgilere çeşitli lineer olmayan optik konusunu ele alan kitaplardan ulaşmak olasıdır (Aymar ve Crance, 1981; Çelik ve Kılıç, 2006).

İki fotonlu soğurma süreçleri

İki fotonlu soğurma süreçleri üzerine ilk çalışmayı Maria Goeppert Mayer yapmıştır. Mayer yapmış olduğu hesaplamalarını kuantum mekaniksel bir yaklaşım olan ikinci dereceden zamana bağlı pertürbasyon teorisini kullanarak gerçekleştirmiştir (Mayer, 1931). İki fotonlu soğurma süreci işlemlerinde gözlemlenebilen deneysel sonuçlardan ilki Hughes ve Grabner tarafından 1950'ler de yayınlandı (Hughes ve Grabner, 1950). Tüm bunlara rağmen çift foton soğurma süreçleri 1960'larda lazerlerin bulunması ve geliştirilinceye kadar deneysel olarak ispatlanamadı. Ancak lazerler ile ilgili yaşanan bu gelişmeler sonucunda bu sürecin tam olarak ispatlanması ve çoklu foton süreçlerinin gözlenmesi gerçekleştirilmiştir. Bu gelişmelerin ardından özellikle Hidrojen başta olmak üzere bir elektronlu atomik sistemler kullanılarak iki fotonlu ve temel durumdan bütün uyarılmış durumlara geçişler için çift foton soğurma katsayılarını ölçmek gibi çalışmalar daha dikkat çekici bir hal almıştır (Quattropani ve ark., 1982; Kassaee ve ark., 1988).

Farklı iki tür iki fotonlu soğurma süreci aşağıdaki gibi şematize edilebilir.



Şekil 2.6: Farklı cins çift fotonlu soğurma süreci: Burada yatay çizgiler enerji seviyelerini, noktalı çizgiler sanal seviyeleri ve oklar enerji seviyeleri arasındaki geçişleri gösterir. a) Adımlı bir foton uyarma b) Eşzamanlı iki foton uyarma.

Adımlı bir foton uyarılması

Bir fotonun soğrulması sayesinde atom veya molekül temel durumdan daha yüksek enerjili bir üst duruma uyarılabilir. Atom veya molekül bir foton soğurup bir ara seviyeye uyarıldığında, bulunduğu seviyeden geri dönmeden ikinci bir foton daha soğurarak üstteki gerçek seviyeye uyarılabilir. Bu işleme iki adımda bir foton soğurma/uyarma adı verilir (Şekil 2.7 (a)). İkiden fazla ardışık foton soğurularak buna benzer süreçlerin gerçekleştirilmesi de mümkündür (Çelik ve Kılıç, 2006).

Eş zamanlı çoklu foton soğurma

Bu durum iki gerçek atomik veya moleküler seviye arasında bulunan enerji farkına sahip iki veya daha çok foton aynı anda soğrulduğunda gözlenebilir (Şekil 2.7 (b)). Burada soğurma olayının gerçek seviyeler arasındaki, ömürleri Heizenberg belirsizlik ilkesi ile sınırlı sanal seviyeler sayesinde gerçekleştiğini düşünebiliriz. Şayet çok kısa zaman periyodunda inceleme yapıldıysa gerçeğe yakın enerji seviyesi net bir şekilde belirtilemez. Sanal seviye ömrü tahminen 10^{-15} s civarındadır ve bu süre önemli ölçüde dikkate alınmaktadır. Birden fazla net hesaplamalar gerçekleştirilip güçlü lazerlerle yüksek atımlı fotonlar kullanılarak bir atom veya molekül tarafından ekstra bir fotonun 10^{-15} s içersinde soğurulması gerektiği gösterilir. Sanal seviyenin 10^{-15} s basamağında oldukça düşük yaşam süresine sahip olması çift fotonlu soğurma süreci tesir kesiti oranının çok küçük olmasına neden olmaktadır (Karlsson and Nilsson, 2001).

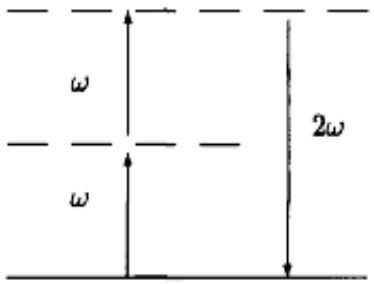
Çift fotonlu uyarma sürecinin farklı seçim kuralları tek fotonlu uyarma süreci ile karşılaştırıldığında soğurma spektrumunun farklı olduğu görülmektedir. Çift foton ile soğurma süreci, tek foton soğurma süreci ile elde edilen spektruma göre daha geniş spektruma sahiptir. Çift fotonun soğrulma sürecinde geçiş olasılığı fotonların polarizasyonuna bağlılık göstermektedir (Çelik ve Kılıç, 2006).

2.3.2 Harmonik üretimi

Çoklu foton iyonlaşması (MPI) veya eşik üzeri iyonlaşmada (ATI) olduğu gibi elektron kaçmak yerine salınan lazer alanının etkisiyle çekirdeğe yaklaşabilir ve temel frekansın tam sayı katı olan frekansta bir foton yayabilir. Bu yüzden bahsi geçen fotonlara harmonik denir (Meşe, 1997). Yöntemin genel ifadesi şöyledir:

$$N\gamma(\omega) + X \rightarrow \gamma'(N\omega) + X \qquad (2.16)$$

Burada ω temel frekansı, $N\omega$ ise harmoniğin enerjisidir. $N = 2$ için bu sürecin enerji seviyesi diyagramı Şekil 2.8'de şematik olarak verilmektedir.



Şekil 2.7: Tek renkli ikinci harmonik üretiminin gösterimi. Bu kesikli seviyeler sanal veya gerçek olabilir ve iyonizasyon eşiğinin altında veya üstünde yer alır.

2.3.3 Harmonik üretimi deneylerine genel bir bakış

Harmonik üretimi ilk olarak Franken ve arkadaşları tarafından çalışılmıştır (Franken ve ark,1961). Kristal kuvars örneğinde ikinci harmonik oluşumu gösterilmiştir. Maker ve arkadaşları kristallerde, camlarda ve sıvılarda ikinci harmonik oluşumunun bir gösterisini bildirdi (Maker ve ark.,1963). New ve Ward ilk önce bir gazda harmonik üretim fikrini ortaya attılar (New ve Ward, 1969). Gazlar, teorik hesaplamalar için büyük bir basitleştirme sunan homojen ve izotropik maddelerdir. Gazlı ortam kullanmanın avantajı, geniş frekans aralıklarında şeffaf olmaları, radyasyon hasarına karşı yüksek dirençleri ve bozulmadan kurtulmaları ve bileşimlerini ve konsantrasyonlarını sürekli olarak değiştirme olasılıklarında yatmaktadır. Daha yüksek dereceli harmonikler üretebilme yeteneği, gazları kullanmanın bir başka nedeniydi; New ve Ward, gazlardaki üçüncü harmoniği yapan ilk araştırmacılardır.

Kullanılan gazlar, kimyasal reaksiyonları sınırlamak için çoğunlukla nadir bulunan gazlardı. New ve Ward'ın incelediği gazlar helyum, neon, argon, ksenon, kripton, moleküler Hidrojen, karbon dioksit, nitrojen, oksijen, etilen, klor ve havaydı.

Yukarıda özetlenen nedenlerden dolayı, gazlarda harmonik oluşumu, aktif araştırmacılar arasında çok hızlı bir şekilde popüler bir konu haline geldi. Birkaç yıl sonra birkaç laboratuarda beşinci ve daha yüksek dereceli harmonik üretimi gözlemlendi. Reintjes ve arkadaşları, helyum atomundan beşinci ve yedinci harmonik üretiminin ilk gözlemini bildirdi (Reintjes ve ark., 1976-1977). Wildenauer tarafından ortaya konan 1315 nm iyot lazerin 11. harmoniğinin ardından geldi, o tarihte neondan en yüksek harmonik (17.) McPherson ve diğerleri tarafından düşük harmoniklere ek olarak bildirildi (Wildenauer ve Apple, 1987). 1989'da Li ve arkadaşları argondan Nd-YAG'ın 33. harmoniği üretti (Li ve ark, 1989).

Çok yakın bir zamanda birkaç grup, 100. mertebeden ve daha yüksek harmoniklerin oluşumunu gözlemledikleri deneyler gerçekleştirdi. Şimdiye kadar gözlemlenen en yüksek harmonikler, her ikisi de neon olan 806 nm Ti-safir lazerin 109'uncu ve 1053 nm Nd-cam lazerin 135'incisidir (Becker ve ark., 1994).

2.3.4. Homojen olmayan diferansiyel denklem yöntemi

Kapalı toplama yönteminden yararlanarak Schwartz ve Tieman Lamb kayması hesabında yeni bir yöntem geliştirdiler (Schwartz ve Tieman, 1959). Bu yönteme homojen olmayan diferansiyel denklem yöntemi denir. Zernik, bu yöntemi Hidrojenin 2s seviyesinden iki foton kullanılarak elde edilen iyonlaşma probleminde kullandı (Zernik, 1964). Bu yöntem sonraki süreçlerde iki farklı grup tarafından çoklu foton kullanılarak elde edilen iyonlaşma süreçlerini içeren hesaplarda kullanıldığını görmekteyiz (Gontier ve Trahin, 1968; Karule, 1978; Koval, 2004). Yöntemin hesaplama süreci ve sayısal hassasiyet açısından avantajları vardır. Bu arada bununla beraber yöntemin açık uygulamalarının sınırlı sayıda durumda başarılı olduğu söylenebilir. Bu sınırlamaların temelde iki sayısal sebebi vardır. Birincisi, yakın rezonans bölgesinde fotonun enerjisi ve sistemin rezonans enerjisine yaklaştığı zaman homojen olmayan diferansiyel denklemin sayısal çözümü hassasiyetten uzaklaşır. İkinci neden ise çoklu foton iyonlaşma spektrumunda belirgin rezonans yapısı beklendiği için sistemin sahip olduğu özelliklerini yererince tanımlayabilmek amacıyla ilgili diferansiyel denklem çok daha fazla sayıda foton enerjisi için çözülmelidir (Aymar ve Crance, 1981).

Söz edilen yöntemi kullanarak ikinci dereceden genliği bulmak için bir ara seviye kullanmak gerekir. Bu ara seviyenin enerjisi E olsun. Bu ara seviyeyi kullanarak atomik geçişi temsil eden bir fonksiyon tanımlamak yerinde olacaktır (Koval, 2004).

$$F_E = \sum_{\nu} \frac{|\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu|\hat{O}|\psi_i\rangle}{E_0 - E} \tag{2.17}$$

$F_E(r)$ fonksiyonu kullanılarak ikinci-dereceden M_2^{fi} genliği, birinci-dereceden matris elemanı M_1^{fi} 'e benzer bir formda yeniden yazılabilmektedir.

$$M_2^{fi} = \langle\psi_f|\hat{O}|F_{E_i+E_\nu}\rangle \tag{2.18}$$

Burada önemli olan ara geçiş fonksiyonu $F_E(r)$'ı direkt olarak (2.17) bağıntısı ile hesaplamaktansa çözümlerini ikincil genlik olan M_2^{fi} 'nin hesaplanmasında kullanacağımız söz konusu fonksiyonun ait olabileceği bir denklem arayışına girmektir.

Böylesi çözümü $F_E(r)$ fonksiyonu olabilecek bir diferansiyel denklem elde etmek için pertürbasyona uğramamış bir atomu temsil eden bir Hamiltonyen kullanmak gerekir. Pertürbe edilmemiş bu Hamiltoniyeni $\hat{H}_0$ ile gösterelim:

$$\hat{H}_0\psi_\nu = E_\nu\psi_\nu \tag{2.19}$$

Bağıntısını kullanarak $(\hat{H}_0 - E)$ operatörünü $F_E(r)$ fonksiyonuna uyguladığımızda

$$(\hat{H}_0 - E)F_E = \sum_{\nu} \frac{|\hat{H}_0 - E|\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu|\hat{O}|\psi_i\rangle}{E_\nu - E} = \sum_{\nu} |\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu|\hat{O}|\psi_i\rangle \tag{2.20}$$

ifadesi elde edilir. Buradan bir kapanma bağıntısı kullanarak

$$\sum_{\nu} |\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu| = \delta(r - r') \tag{2.21}$$

aranan diferansiyel denklem bulunur.

$$(\hat{H}_0 - E)F_E = \hat{O}|\psi_i\rangle \tag{2.22}$$

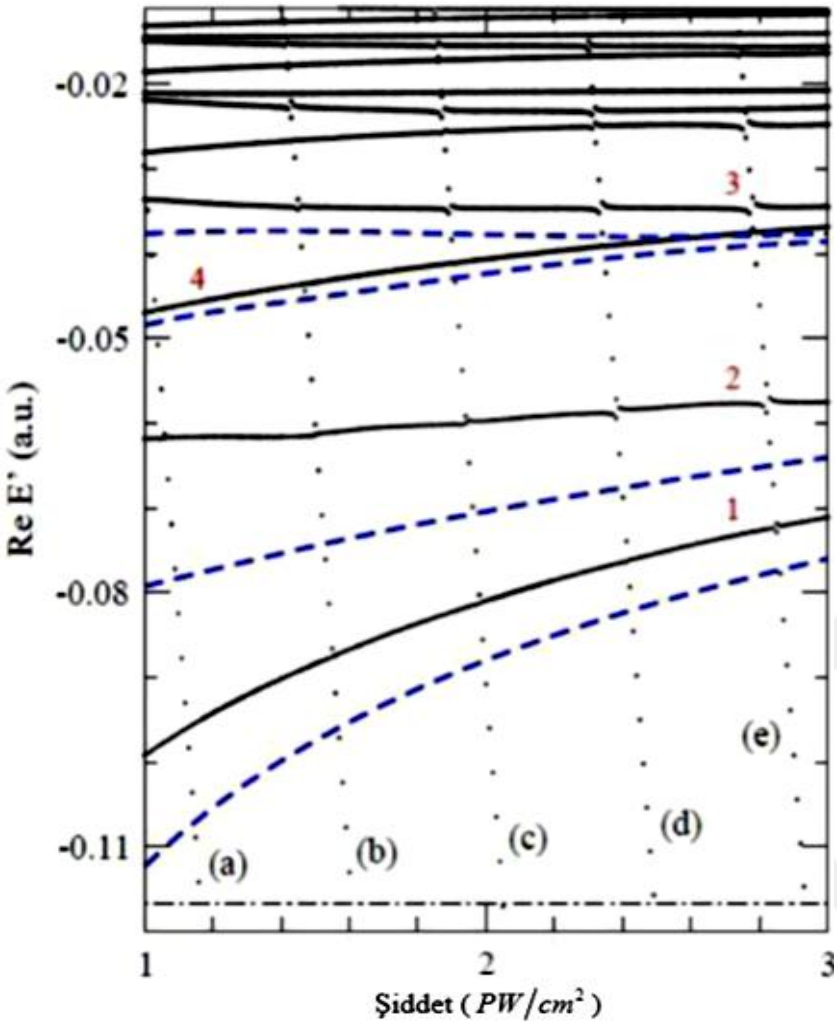
Burada $\widehat{\boldsymbol{O}} = \varepsilon r$ **e**, elektriksel geçişi sağlayan dipol operatörü olarak alınabilir. Bu durumda Hidrojen atomu için Hamiltoniyen de kullanılarak analitik bir çözüme ulaşılabilinir (Zernik, 1964; Koval, 2004).

3 LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Pont ve arkadaşları, düşük frekanslı güçlü alan şiddetine maruz kalan bir atomun AC yarı-klasik enerji seviyelerini hesaplamak için çift pertürbasyon yöntemini ele almışlardır. Bu yöntem ile düşük ω frekanslı kuvvetli bir alan tarafından ışınlanan bir atom için AC yarı-klasik enerji, ω^2 ve alan kuvveti F'ye bağlı katsayıları hesaplamışlar (Pont ve ark., 1992).

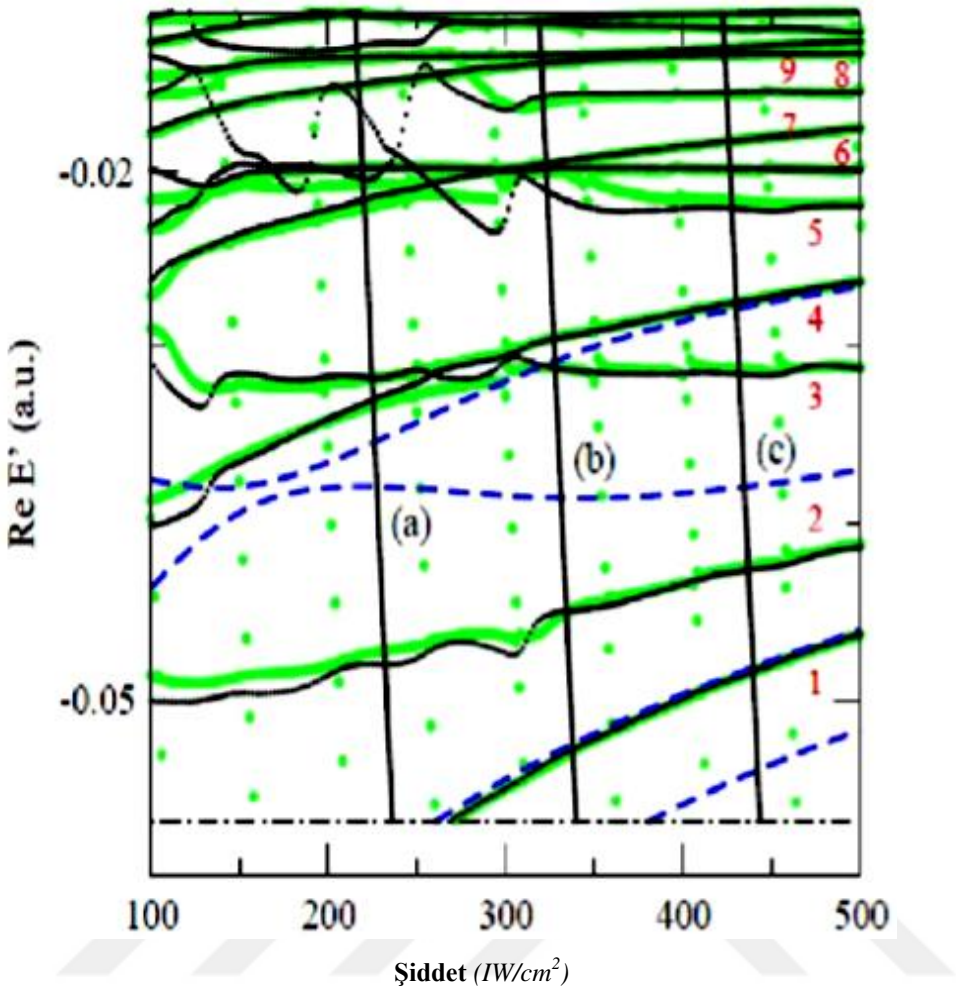
Çelik ve Kılıç, Hidrojen atomunda $1s^2S_{1/2}$ ve $2s^2S_{1/2}$ durumları arasındaki geçişler için çift foton soğurma tesir kesitini oran denklemlerini kullanarak incelemişlerdir. Oran denklemlerini üç seviyeye sahip bir atomik sistem için analitik olarak çözdüler. Çalışmalarında iki fotonlu soğurma tesir kesitinin hesaplanması için sınırlandırılmış toplama yöntemini kullanmışlar. Ek olarak ardışık 10 ara seviyeyi de hesaplamalarına dahil etmişlerdir. Çift fotonlu soğurma tesir kesitinin belirlenmesi için matris elemanının radyal kısmının çözümünde gama fonksiyonlarından ve açısal kısmın çözümünde Racah yöntemi gibi yöntemlerden yararlandılar. Çalışmalarında elde ettikleri iki fotonlu soğurma tesir kesitinin daha önce yapılmış olan deneysel sonuçlarla son derece uyumlu olduğu sonucuna varılmıştır (Çelik ve Kılıç, 2006).

Vucic ve arkadaşları, Flouqet yöntemini kullanarak, 390 nm dalga boyu ve $3x10^{15}$ W/cm^2 şiddetine kadar yüksek yoğunluklara giderek tek renk lazer alanında alan şiddetine karşılık Helyum spektrumunu elde ettiler. Bu hesaplamalarını çift pariteye sahip $m = 0$ durumu için yaptılar. Elde ettikleri spektrum Şekil 3.1'de gösterilmektedir (Vucic ve ark., 2010).



Şekil 3.1: 390 nm dalga boyuna sahip lazer alanında Helyum'un *m*=o durumları için yarı-klasik enerji spektrumu. Giydirilmiş taban durumlar (a), (b), (c), (d) ve (e) ile gösterilmiştir ve Kesikli çizgiler Krammer Henneberger (KH) durumlarıdır (Vucic ve ark., 2010).

Vucic ve çalışma arkadaşları aynı çalışmayı 800 nm dalga boyuna sahip bir lazer ile etkileşen He ve H atomları için ayrı yaptılar. Sonuçlar Şekil 3.2'de verilmektedir. Vucic ve çalışma arkadaşları 800 nm dalga boyuna sahip lazer alanında He ve Hidrojen spektrumlarının yüksek alan şiddetlerinde benzer olduğunu göstererek yüksek alan şiddetlerinde spektrumun türden bağımsız olduğunu kanıtlamışlardır (Vucic ve ark., 2010).



Şekil 3.2: 800 nm dalga boyuna sahip lazer alanında bulunan He atomu spektrumu. Giydirilmiş taban durumları (a), (b) ve (c) ile gösterilmektedir ve kesikli çizgiler de en düşük dört KH durumunu göstermektedir. Yeşil noktalar da aynı alanda Hidrojen atomu spektrumunu göstermektedir (Vucic ve ark., 2010).

4 MATERYAL VE METOT

4.1. Floquet Metodu

Potvliege ve Shakeshaft ile Dorr ve ark. çoklu foton süreçlerini tanımlamak için Floquet tekniğini başarıyla kullandı. Özellikle karmaşık atomlar söz konusu olduğunda, birleşik bir R-matrix-Floquet yöntemi kullanılarak çoklu foton işlemlerinin işlenmesine de artan bir ilgi vardır. Bu işlem aynı zamanda tamamen pertürbatif olmayan bir işlemdir. R-matris yönteminde konfigürasyon uzayı iç ve dış bölgeye ayrılmıştır. Bu, her bölgede lazer-atomik sistem etkileşimi Hamiltoniyen'in en uygun formunun, dalga fonksiyonu üzerinde birleştirici dönüşümler gerçekleştirerek fiziksel olarak doğal bir şekilde seçilebileceği anlamına gelir. R-matrix-Floquet yönteminin kullanıldığı çalışmalardan bazıları referanslarında bildirilmiştir (Burke ve ark., 1991; Dorr ve ark., 1992; Dorr ve ark., 1993; Dorr ve ark., 1995; Joachain,1997).

Floquet metodu kullanılarak elde edilen tek renk Floquet spektrumları literatürde geniş yer almaktadır. Bu metotla uzaysal olarak homojen olan monokromatik bir lazer alanında Hidrojen atomu düşünüldü. Alan klasik olarak ifade edilerek dipol yaklaşımında aşağıda verilen vektör potansiyeli kullanıldı:

$$A(t) = (F_0/\omega)\, sin(\omega t) \tag{4.1}$$

burada F_0, elektrik alan genliği ve ω açısal frekanstır. Schrödinger denklemi,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)>= [H_{at} + V(t)]|\psi(t)\rangle \tag{4.2}$$

dir. Burada H_{at} alanın yokluğundaki atomik Hamiltoniyendir ve etkileşme potansiyeli $V(t)$ de hız ayarında

$$V(t) = -\left(\frac{e}{\mu c}\right) \mathbf{A}(t).\mathbf{p} \tag{4.3}$$

ile verilmektedir. Burada e, μ, $\mathbf{p}$ sırasıyla elektronun yükü, kütlesi ve momentumudur. Etkileşme potansiyeli V(t) de uzunluk ayarında

$$\mathrm{V(t)} = -\mathrm{e}\mathbf{E}(t).\mathbf{r} \tag{4.4}$$

ile verilmektedir.

$$V(t) = V_{+}\exp(-i\omega t) + V_{-}\exp(i\omega t) \tag{4.5}$$

Floquet Ansatz'ı yapılarak ψ_N Flooquet harmonikleri için çiftlenimli zamandan bağımsız denklem sistemi elde edilir:

$$(\varepsilon + N\omega - H_{at})|\psi_N\rangle = V_{+}|\psi_{N-1}\rangle + V_{-}|\psi_{N+1}\rangle \tag{4.6}$$

Bu denklem Floquet denklemi olarak adlandırılır. ε yarı-klasik enerji özdeğerlerini, V_{+} ve V_{-} sırasıyla soğurma ve yayma işlemcilerini gösterir. Yarı-klasik enerji özdeğerleri ve ona bağlı olarak iyonlaşma oranı bu denklemin çözümünden hesaplanır. (4.6) denklemini ve yarı-klasik enerjiyi açık olarak türetelim;

$$H(r,t) = \frac{1}{2\mu}\left(p + \frac{e}{c}A(r,t)\right)^2 - e\emptyset(r,t) \tag{4.7}$$

$$\mathrm{i\hbar}\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t} \geq [H_a + V(t)]|\psi(t)\rangle \tag{4.8}$$

Flouqet ansantz yaparsak;

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\varepsilon_i t}{\hbar}\right)|\psi_i(\tau)\rangle \tag{4.9}$$

$-\mathrm{i}\varepsilon_i t$, atomun yarı-klasik enerji değerini temsil ediyor.

$$\tau = \omega t \tag{4.10}$$

$|\psi_i(\tau)\rangle$, periyodik ve 2π,

$$|\psi_i(\tau)\rangle = \sum_n \exp(-iN\tau)|\psi_{iN}\rangle \tag{4.11}$$

(4.8) denkleminin türevi alınarak;

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial(t)}\left[\exp\left(-\frac{i\varepsilon_i t}{\hbar}\right)|\psi_i(\tau)\rangle\right] \tag{4.12}$$
$$= H_0 + V(t)exp\left(-\frac{i\varepsilon t}{\hbar}\right) + i\hbar(-i\varepsilon_i)\exp\left(-\frac{i\varepsilon_i t}{\hbar}\right)|\psi_i(\tau)\rangle$$
$$+ i\hbar\exp\left(-\frac{i\varepsilon_i t}{\hbar}\right)\frac{\partial}{\partial(t)}|\psi_i(\tau)\rangle$$

$$\varepsilon_i\int_N^\infty|\psi_{iN}\rangle + \int_N^\infty|\psi_{iN}\rangle \tag{4.13}$$

$$H_a|\psi_{iN}\rangle = V(t)|\psi_{iN}\rangle \tag{4.14}$$

$$\int_{N=0}^{\infty}(\varepsilon_i + N\hbar - H_a)|\psi_{iN}\rangle = \int_n^\infty V(t)|\psi_{iN}\rangle \tag{4.15}$$

$$\mathrm{V(t)} = \mathrm{A}_0 sin\omega t = i(\frac{e\hbar A_0}{\mu c})\mathrm{Im}(\hat{\mathbf{e}}_\mathrm{i}.\boldsymbol{\nabla}\exp(-i\omega t)) \tag{4.16}$$
$$= V_+\exp(-i\omega t) + V_-\exp\,(i\omega t)$$

Burada V_+ soğurma operatörü, V_- ise yayma operatörü, "soğurma ve yayma" (veya iki operatör) operatörleri birbirlerine

$$V_+ = V_-^\dagger \tag{4.17}$$

ile bağlıdır. Yani, biri diğerinin hermityen eşleniğine eşittir.

$$\int_{N=0}^{\infty} (\varepsilon_i + N\hbar - H_a) \exp(-iN\omega t)|\psi_{iN}\rangle \tag{4.18}$$

$$= \int_{N=0}^{\infty} (V_+ \exp(-i\omega t) + V_- \exp(i\omega t) \exp(-iN\omega t)|\psi_{iN}\rangle$$

$$= \int_{N=0}^{\infty} (V_+ \exp(-i(N+1)\omega t) + V_- \exp(-i(N-1)\omega t)$$

(4.18) denkleminin sağ tarafının ilk teriminde $N + 1 \to m$, $N = m - 1$ limitinde,

$$\int_{N=0}^{\infty} V_+ \exp(-im\omega t)\,|\psi_{iN}\rangle \tag{4.19}$$

$$(\varepsilon_i + N\omega t - H_a)|\psi_{iN}\rangle \tag{4.20}$$

$$V_+ \left|\psi_{i,(m-1)}\right\rangle + V_- \left|\psi_{i,(m+1)}\right\rangle \tag{4.21}$$

$$\varepsilon_i = E_i + \Delta_i - i\,\Gamma_i/2 \tag{4.22}$$

$E_i + \Delta_i$ enerji seviyelerini verir. Γ_i iyonizasyon oranını, $\Gamma_i/2$ iyonlaşma oranını verir.

Ayrıca, dalga fonksiyonunun alandaki bağlı durumu temsil etmesi ve foto iyonlaşmayı temsil edebilmesi için dalga fonksiyonunun çekirdekte düzenli olmasını ve asimptotik uzaklıklarda kanalın açık olduğu durumda dışa yönelen, tersi durumdaysa sönümlü dalgalardan oluşması gerektiği vurgulanmalıdır (Mese, 1997).

4.2 Pertürbasyon Teorisi

Genellikle Schrödinger denkleminin tam olarak çözülebildiği $V(r)$ potansiyelli Hamiltoniyenleri çözmek zordur. Dolayısıyla fiziksel sistemi temsil eden Hamiltoniyenin tam çözümlerini bulmak için bir takım yaklaşım teknikleri kullanılır. Bunlardan bir tanesi de Pertürbasyon teorisidir.

4.2.1 Dejenere olmayan durumlar için zamandan bağımsız pertürbasyon teorisi

Zamandan bağımsız (kararlı) pertürbasyon teorisi sistemin toplam Hamiltoniyeni fiziksel öneme sahip olduğunda uygulanan bir yöntemdir. Toplam Hamiltoniyen,

$$H = H_0 + \lambda H_1 \tag{4.23}$$

şeklinde yazılır. Burada H_0, pertürbe olmamış Hamiltoniyen, λ küçüklük parametresi ve H_1 ise pertürbasyon fonksiyonu veya Hamiltoniyenidir.

Bir sistemin ana Hamiltoniyeni H_0'ın normalleştirilmiş özfonksiyonlarının ve özdeğerlerinin bilindiğini kabul edelim. Bu durumda özdeğer özfonksiyon denklemi

$$H_0\phi_n = E_n^{(0)}\phi_n \tag{4.24}$$

şeklinde yazılsın. Burada $E_n^{(0)}$ pertürbe olmamış özdeğer ve ϕ_n ise pertürbe olmamış özfonksiyondur. Bu durumda Hamiltoniyenin kalan kısmı H_1 zamandan bağımsız pertürbasyon olarak adlandırılsın. Böylece sistemin toplam Hamiltoniyen şeklinde olduğu kabul edilir. Toplam sistemin özdeğer öz fonksiyon denklemi

$$(H_0 + \lambda H_1)\psi_n = E_n\psi_n \tag{4.25}$$

olarak ifade edilir. Toplam Hamiltoniyenin özdeğer ve öz fonksiyonlarının çözümünde elde edilmesi beklenen nicelikler λ'ya bağlı kuvvet serisi olarak ifade edilmelidir. Serinin yakınsak olmadığı gösterilebilse dahi λ'nın ilk birkaç kuvveti fiziksel sistemi ifade eder. $\lambda \to 0$ olurken $E_n \to E_n^{(0)}$ ve $\psi_n \to \phi_n$ olduğunu varsayalım.

ϕ_i bir tam küme olduğundan ψ_n tüm ϕ_i'leri içeren bir seri içerisinde açılabilir. Yani

$$\psi_n = N(\lambda)\{\phi_n + \sum_{k\neq n} C_{nk}(\lambda)\phi_k\} \tag{4.26}$$

yazılabilir.

$N(\lambda)$ çarpanı ψ_n'i normalize etmeyi sağlar. ψ_n'in fazı istenildiği gibi seçilebilir. ψ_n'in fazının

$$C_{nk} = \langle\phi_k|\psi_n\rangle \tag{4.27}$$

olduğunu varsayalım (Liboff, 1998). Elde edilen ifade reel ve pozitiftir. λ →0 olduğunda $\psi_n \rightarrow \phi_n$ olması gerektiği için

$$N(0) = 1$$

$$C_{nk}(0) = 0$$

yazılır. Daha genel ifadeyle

$$C_{nk}(\lambda) = \lambda C_{nk}^{1} + \lambda^2 C_{nk}^{2} + \ \ldots\ldots \tag{4.28}$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \ \ldots\ldots \tag{4.29}$$

yazılabilir. Böylece (4.25) denklemi

$$\begin{aligned}(H_0 + \lambda H_1)\{\phi_n + \sum_{k\neq n} \lambda C_{nk}^{(1)}\phi_k + \sum_{k\neq n} \lambda^2 C_{nk}^{(2)}\phi_k + \ \ldots\ldots \\ = \left(E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \ \ldots\right)\{\phi_n + \sum_{k\neq n} \lambda C_{nk}^{(1)}\phi_k \\ + \sum_{k\neq n} \lambda^2 C_{nk}^{(2)}\phi_k + \ \ldots\}\end{aligned} \tag{4.30}$$

olur. Lineer olan bu denklemde yer alan $N(\lambda)$ normalizasyon çarpanı görünmez. Denklemin iki kısmında da yer alan eşit λ çarpanına sahip olan terimler birbiriyle aynı değerde olmalıdır. Böylece çeşitli pertürbasyon düzeltmelerinin derecesini veren bir denklem serisi elde edilmiş olunur. λ'nın 1. kuvveti için 1. dereceden pertürbasyon içerdiği eşitlik

$$H_0 \sum_{k\neq n} \lambda C_{nk}^{(1)}\phi_k + H_1\phi_n = E_n^{(0)} \sum_{k\neq n} \lambda C_{nk}^{(1)}\phi_k + E_n^{(1)}\phi_n \tag{4.31}$$

şeklinde elde edilir.

$$H_0\phi_k = E_k^{(0)}\phi_k \tag{4.32}$$

denklemi (4.31) denkleminde kullanılırsa

$$E_n^{(1)}\phi_n = H_1\phi_n + \sum_{k\neq n} (E_k^{(0)} - E_n^{(0)})\, C_{nk}^{(1)}\phi_k \tag{4.33}$$

sonucu bulunur. Bu denklem $\langle\phi_n|$ ile çarpılırsa

$$\langle\phi_k|\phi_l\rangle = \delta_{kl} \tag{4.34}$$

ortanormallik şartı kullanıldığında

$$\lambda E_n^{(1)} = \langle\phi_n|\lambda H_1|\phi_n\rangle \tag{4.35}$$

elde edilir. Bu denklem, verilen bir durumdaki 1. dereceden enerji kaymasının, o durumun pertürbe potansiyelinin yalnızca beklenilen ifadesini verdiğini gösteren önemli bir eşitliktir. Potansiyelin değişiminin işareti tam olursa enerji kayması da aynı işarete sahip olur.

4.2.2 Çift Pertürbasyon Teorisi

ω^2 ve F^2 nin güçlerinde yarı-klasik enerjinin ikili açılımını incelersek;

$$\Sigma_m \Sigma_n \beta_{2n}^{(2m)} F^{2n} \omega^{2m} \tag{4.36}$$

ω^2'nin sabit güçlerinde *F*'nin açılımı asimptotik seridir. ω^2 açılımının biçimsel gelişimi ve uygulaması bir sonraki bölümde sunulacaktır.

Yarı-klasik enerjinin hem ω^2 hem de F^2 kuvvetlerinin çifte genişlemesini araştırıyoruz:

$$E_{ac}(F,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2n}^{(2m)} \omega^{2m} F^{2n} \tag{4.37}$$

Biz burada ara işlemleri yaparak tekrar türettik. Atomik Hidrojen durumunda her $\beta_{2n}^{(2m)}$ bir rasyonel sayıdır ve tam olarak üretilebilir. $\beta_{2n}^{(2m)}$ katsayıları gerçektir ve bu nedenle (sadeleştirilmiş) çift dizinin doğrudan toplamı her zaman kaybolan bir boyut verir. Bununla birlikte $\beta_{2n}^{(2m)}$ boyut hakkında bilgi içerir. Bunu ikinci dereceden (F cinsinden) boyut için gösteriyoruz ve dikkat çekici derecede geniş bir frekans aralığında ikinci dereceden kaymayı ve genişliği doğru bir şekilde vermek için yalnızca makul sayıda $\beta_{2n}^{(2m)}$ katsayısının gerekli olduğunu gösteriyoruz.

ω^2 cinsinden seriye açma

Salınımlı elektrik alanını

$$\mathbf{F}(\tau) = F[\cos(\tau)\,.\,\vec{z} + \tan\left(\frac{\zeta}{2}\right)\sin(\tau)\,.\,\vec{\mathrm{x}}] \tag{4.38}$$

olarak ifade ediyoruz, burada $\tau \equiv \omega t$ faz, t zaman, burada $\vec{x}$ ve $\vec{z}$, bir Kartezyen sistemin x ve z eksenleri boyunca birim vektörler ve ζ, ışığın eliptiklik parametresidir($-\frac{\pi}{2} \leq \zeta \leq \frac{\pi}{2}$). $|\mathbf{F}(\tau)|$'nun maksimum değeri F'dir, ortalama karekök değeri $F_{rms} = F \sec(\frac{\zeta}{2})\sqrt{2}$ 'dir ve yoğunluk $I = (\frac{cF_{rms}^2}{4\pi})$. Poderomotiv enerjisi (alanda salınan serbest bir elektronun ortalama titreme enerjisi)

$$P \equiv \left(\frac{e^2F^2}{4\mu\omega^2}\right) sec^2(\frac{\zeta}{2}) \tag{4.39}$$

ve Keldysh parametresi $\gamma \equiv \sqrt{|E_0|/2P}$'dir.

Dipol yaklaşımını yapıyoruz ve uzunluk ölçüsü üzerinde çalışıyoruz. AC elektrik alanındaki $F(\tau)$ bir elektron atomunun durum vektörü $|\psi_{ac}(F,\omega,\tau)\rangle$, zamana bağlı Schrödinger denklemini

$$[H_a - eF(\tau).\vec{x} + \omega\vartheta_\tau]|\psi_{ac}(F,\omega,t)\rangle = 0 \tag{4.40}$$

karşılar; burada H_a, açıktaki atomun Hamiltoniyenidir ve burada

$$\vartheta_\tau = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau} \tag{4.41}$$

ω'in güçlerine bir açılım formüle etmeyi amaçladığımız için, önce denklem (4.40)'ın $\omega \to 0$ limitinde çözümlerini düşünmek faydalı olacaktır. $F(\tau)$ anlık alanına eşit bir DC elektrik alanındaki atomun Hamiltoniyeni $H_{dc}\,(F,\tau)$ ile gösterelim, τ artık sadece bir alanın gücünü ve yönünü yöneten bir parametre olarak hareket eder:

$$H_{dc}\,(F,\tau) = H_a + V_{dc}(F,\tau) \tag{4.42}$$

ile

$$V_{dc}(F,\tau) = -eF(\tau).\vec{x} \tag{4.43}$$

$$H_{dc}\,(F,\tau) = \; H_a - eF(\tau).\vec{x} \tag{4.44}$$

DC yarı-klasik enerji özdeğeri $E_{dc}(F,\tau)$ aşağıdaki eşitlikten belirlenebilir,

$$H_{dc}(F,\tau)|\phi_{dc}(F,\tau)\rangle = E_{dc}(F,\tau)|\phi_{dc}(F,\tau)\rangle \tag{4.45}$$

DC durum vektörü $|\phi_{dc}(F,\tau)\rangle$ için giden dalga sınır koşullarına tabidir. Sonsuz küçük fakat kaybolmayan frekansın adyabatik limitinde, (4.40) denkleminde yerine koyarsak,

$$[H_a - eF(\tau).\vec{x}]|\psi_{ac}(F,\omega,\tau)\rangle = \omega\vartheta_\tau|\psi_{ac}(F,\omega,\tau)\rangle$$

$$E_{dc}(F,\tau)|\psi_{ac}(F,\tau)\rangle = -i\hbar\omega\frac{\partial}{\partial\tau}|\psi_{ac}(F,\omega,\tau)\rangle$$

$$E_{dc}(F,\tau)d\tau = d\frac{|\psi_{ac}(F,\omega,\tau)\rangle}{|\psi_{ac}(F,\tau)\rangle}$$

$$|\psi_{ac}(F,\omega,\tau)\rangle\sim\exp\,(-\frac{i}{\hbar\omega}\int^{\tau}d\tau' E_{dc}(F,\tau^1).\vec{x}|\phi_{dc}(F,\tau)\rangle\;, \qquad \omega\sim 0 \tag{4.46}$$

Bu, atomun anlık DC alanını takip ettiği gerçeğini ifade eder. Bununla birlikte denklem (4.46)'nın sağ tarafındaki üstel faktörün $\omega = 0$'da temel bir tekilliğe sahip olduğuna (eğer τ'yu bağımsız bir değişken olarak tutarsak) ve bu dinamik faz faktörünün, gerçek eksen boyunca ω sıfıra yaklaştıkça sınırsız salınım yaptığına dikkat edin. Bu tekillik, τ fazındaki ve dolayısıyla $\omega = 0$'daki alanın büyüklüğündeki belirsizliğin bir sonucudur. Ayrıca, $|\phi_{dc}(F,\tau)\rangle$ için uygun bir normalleştirmeyle denklem (4.46)'nın sağ tarafına dinamik olmayan bir faz faktörünü dâhil etmemize gerek yoktur.

$$|\psi_{ac}(F,\omega,\tau)\rangle = \exp\,(-\frac{i}{\hbar\omega}\int^{\tau}d\tau' E(F,\omega,\tau^1).\vec{x})|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle \tag{4.47}$$

Buna karşılık, monokromatik bir alanda durağan bozunmayı tanımlayan Floquet hesaplaması,

$$|\psi_{ac}(F,\omega,\tau)\rangle = \exp\,[-iE_{ac}(F,\omega)\frac{\tau}{\hbar\omega}]|\mathcal{F}(F,\omega,\tau)\rangle \tag{4.48}$$

Floquet durum vektörü $|\mathcal{F}(F,\omega,\tau)\rangle$, τ'de periyodik olduğu yerde,

$$|\mathcal{F}(F,\omega,\tau)\rangle = |F(F,\omega,\tau+2\pi)\rangle \tag{4.49}$$

$E(F,\omega,\tau)$ ve $|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle$'nin periyodik olduğunu kabul edersek, Floquet formuna sahip olmak için denklem (4.47)'nin sağ tarafını kullanırsak;

$$E(F,\omega,\tau) = E(F,\omega,\tau+2\pi) \tag{4.50}$$

$$|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle = |\tilde{\psi}(F,\omega,\tau+2\pi)\rangle \tag{4.51}$$

Böylece aşağıdaki tanımlamayı yapabiliriz;

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar\omega}\int^{\tau} d\tau' E(F,\omega,\tau')|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle\right. \\ = \exp\left[-iE_{ac}(F,\omega)\frac{\tau}{\hbar\omega}\right]|\mathcal{F}(F,\omega,\tau)\rangle \tag{4.52}$$

denklem (4.46)'nın her iki boyutunda τ'yu 2π arttırmak ve denklem (4.49), denklem (4.50) ve denklem (4.51)'i kullanmak bize aşağıdaki ifadeyi verir

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar\omega}\int^{\tau+2\pi} d\tau' E(F,\omega,\tau')|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle\right. \\ = \exp\left[-iE_{ac}(F,\omega)\frac{(\tau+2\pi)}{\hbar\omega}\right]|\mathcal{F}(F,\omega,\tau)\rangle$$

$$-\frac{i}{\hbar\omega}\int^{\tau+2\pi} d\tau' E(F,\omega,\tau') = -i\frac{E_{ac}(F,\omega)}{\hbar\omega}(\tau+2\pi)$$

$$E_{ac}(F,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\tau\, E(F,\omega,\tau) \tag{4.53}$$

Yani yarı-klasik enerji basitçe $E(F,\omega,\tau)$'nin döngü ortalamasıdır. Deklem (4.39), $|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle$ denkleminin bir çözümü olduğunu ifade eder

$$[H_a - eF(\tau)\vec{x} + \omega\vartheta_\tau]|\psi_{ac}(F,\omega,\tau)\rangle = 0 \tag{4.54}$$

$$V_{dc}(F,\tau) = -e\vec{F}(\tau).\vec{x} \tag{4.55}$$

$$H_{dc}(F,\tau) = H_a + V_{dc}(F,\tau) \tag{4.56}$$

$$H_a = H_{dc}(F,\tau) - V_{dc}(F,\tau) \tag{4.57}$$

$$[H_{dc}(F,\tau) - V_{dc}(F,\tau) + V_{dc}(F,\tau) + \omega\vartheta_\tau]|\psi_{ac}(F,\omega,\tau)\rangle = 0 \tag{4.58}$$

$$[H_{dc}(F,\tau) + \omega\vartheta_\tau]|\psi_{ac}(F,\omega,\tau)\rangle = 0 \tag{4.59}$$

$$\vartheta_\tau = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau} \tag{4.60}$$

$$[H_{dc}(F,\tau) - i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}]|\psi_{ac}(F,\omega,\tau)\rangle = 0 \tag{4.61}$$

$$\tilde{\psi} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar\omega}\int^{\tau} d\tau' \tilde{E}(F,\omega,\tau')\right)|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle \tag{4.62}$$

$$(H_{dc} + \omega\vartheta_{\tau})exp[-\frac{i}{\hbar\omega}\int^{\tau} d\tau' \tilde{E}(F,\omega,\tau'))|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle = 0 \tag{4.63}$$

$$H_{dc}exp[-\frac{i}{\hbar\omega}\int^{\tau} d\tau' \tilde{E}(F,\omega,\tau')]|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau')\rangle \tag{4.64}$$

$$+ \omega\vartheta_{\tau}\, exp[-\frac{i}{\hbar\omega}\int^{\tau} d\tau' \tilde{E}(F,\omega,\tau')]|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau')\rangle$$

$$H_{dc}exp[-\frac{i}{\hbar\omega}\int^{\tau} d\tau' \tilde{E}(F,\omega,\tau')]|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau')\rangle \tag{4.65}$$

$$+ \omega(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau})[\, exp[-\frac{i}{\hbar\omega}\int^{\tau} d\tau' \tilde{E}(F,\omega,\tau')]|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau')\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\{exp\left[-\frac{i}{\hbar\omega}\int^{\tau} d\tau' \tilde{E}(F,\omega,\tau')]|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau')\rangle\right\} = A \tag{4.66}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}e^{-iu} = -\frac{i}{\hbar\omega}u'e^{-iu} = -i\frac{e^{-iu}}{\hbar\omega}\{\frac{\partial}{\partial\tau}\int^{\tau} d\tau' \tilde{E}(F,\omega,\tau')\} \tag{4.67}$$

$$G(F,\omega,\tau) \to \tilde{E}(F,\omega,\tau) \tag{4.68}$$

$$A = \tilde{E}(F,\omega,\tau)(-\frac{i}{\hbar\omega}e^{-iu})|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle + e^{-iu}\frac{\partial}{\partial\tau}|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle \tag{4.69}$$

$$H_{dc}e^{-iu}|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle + \omega\left(-\frac{i\hbar}{\hbar\omega}\right)\left(e^{-iu}\right)\tilde{E}(F,\omega,\tau)|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle \tag{4.70}$$

$$+ \omega(-i\hbar)e^{-iu}\frac{\partial}{\partial\tau}|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle = 0$$

$$H_{dc}|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle + \tilde{E}(F,\omega,\tau)|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle + \omega(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial\tau}|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle = 0 \tag{4.71}$$

$$(H_{dc} + \omega\vartheta_\tau)|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle = \tilde{E}(F,\omega,\tau)|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle \tag{4.72}$$

Şimdi bu aşamada yakınsama sorusuna değinmeden, ω'da bir kuvvet serisi formuna sahip olan denklem (4.53)'ün bir çözümünü arıyoruz. $\omega\vartheta_\tau$ operatörünü, küçük fakat sıfır olmayan ω için kullanışlı olmasını beklediğimiz bir "pertürbasyon" olarak ele alarak, pertürbasyon serisinden ω'nın kuvvetlerinde açılımlar üretiriz:

$$\tilde{E}(F,\omega,\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{E}^{(m)}(F,\tau)\omega^m \tag{4.73}$$

$$|\tilde{\psi}(F,\omega,\tau)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \omega^m|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle \tag{4.74}$$

burada $\tilde{E}^{(m)}(F,\tau)$ ve $|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle$ r'de periyodiktir. Bu serilerin önde gelen (m=0) katsayıları basitçe

$$\tilde{E}^{(m)}(F,\tau) = E_{dc}(F,\tau) \tag{4.75}$$

$$|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle = |\phi_{dc}(F,\tau)\rangle \tag{4.76}$$

ve $m > 0$ katsayıları, denklemin tekrar tekrar çözülmesiyle elde edilebilir

$$(H_{dc}(F,\tau) + \omega\vartheta_\tau)\sum_{m=0}^{\infty} \omega^m|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle = \sum_{m'=0}^{\infty} \tilde{E}^{(m')}(F,\tau)\omega^{m'}\sum_{m=0}^{\infty} \omega^m\,|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle \tag{4.77}$$

$$(H_{dc}(F,\tau)+\omega\vartheta_\tau)\{\omega^0|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle+\sum_{m=1}^{\infty}\omega^m|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle\} \tag{4.78}$$
$$=[\tilde{E}^{(0)}(F,\tau)\omega^0+\sum_{m'=1}^{\infty}\tilde{E}^{(m')}(F,\tau)\omega^{m'}][\,\omega^0|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle+\sum_{m=1}^{\infty}\omega^m|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle]$$

$$H_{dc}(F,\tau)|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle+\ \omega\vartheta_\tau|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle \tag{4.79}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}(H_{dc}(F,\tau)+\omega\vartheta_\tau)\omega^m|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle$$
$$=\tilde{E}^{(0)}(F,\tau)|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle+\tilde{E}^{(0)}(F,\tau)\sum_{m=1}^{\infty}\omega^m|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle$$
$$+\sum_{m'=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{E}^{(m')}(F,\tau)\omega^{m'}\omega^m|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle$$
$$+\sum_{m'=1}^{\infty}\tilde{E}^{(m')}(F,\tau)|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle$$

$$|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle=|\phi_{dc}(F,\tau)\rangle \tag{4.80}$$

$$\tilde{E}^{(0)}(F,\tau)|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle=\ E_{dc}(F,\tau)|\phi_{dc}(F,\tau)\rangle \tag{4.81}$$

$$H_{dc}(F,\tau)|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle=H_{dc}(F,\tau)|\phi_{dc}(F,\tau)\rangle \tag{4.82}$$

$$\{\tilde{E}^{(0)}(F,\tau)|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle=\ E_{dc}(F,\tau)|\phi_{dc}(F,\tau)\rangle\} \tag{4.83}$$
$$=\{H_{dc}(F,\tau)|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle=H_{dc}(F,\tau)|\phi_{dc}(F,\tau)\rangle$$

Denklemde kullanmak bize aşağıdakileri verecektir

$$\omega\vartheta_\tau|\phi_{dc}(F,\tau)\rangle \tag{4.84}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}[H_{dc}(F,\tau)+\omega\vartheta_\tau]\omega^m|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle$$
$$=E_{dc}(F,\tau)\sum_{m=1}^{\infty}\omega^m|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle$$
$$+\sum_{m'=1}^{\infty}\omega^{m'}\tilde{E}^{(m')}(F,\tau)|\phi_{dc}(F,\tau)\rangle$$
$$+\sum_{m'=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{E}^{(m')}(F,\tau)\omega^{m+m'}|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}(H_{dc}(F,\tau)-\tilde{E}^{(0)}(F,\tau))\omega^m|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle \tag{4.85}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}-\vartheta_\tau\omega^{m+1}|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle$$
$$+\sum_{m'=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{E}^{(m')}(F,\tau)\omega^{m'}\omega^m|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}(H_{dc}(F,\tau)-\tilde{E}^{(0)}(F,\tau))\omega^m|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle \tag{4.86}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}-\vartheta_\tau\omega^{m+1}|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle \tag{4.87}$$

$$\sum_{m'=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{E}^{(m')}(F,\tau)\omega^{m'}\omega^m|\tilde{\psi}^m(F,\tau)\rangle \tag{4.88}$$

Denklem (4.87)'de; $m=0\rightarrow s=1\,, m+1=s\ \rightarrow m=s-1$

$$-\sum_{s=1}^{\infty}\vartheta_\tau\omega^s|\tilde{\psi}^{s-1}(F,\tau)\rangle \tag{4.89}$$

Denklem (4.88)'de;

$$m + m' = n \tag{4.90}$$

$$m = 0 \rightarrow n = m' \tag{4.91}$$

$$m = 1 \rightarrow n = m' + 1 \tag{4.92}$$

$$m = 2 \rightarrow n = m' + 2 \tag{4.93}$$

$$m = \infty \rightarrow n = \infty \tag{4.94}$$

$$m = 0 \rightarrow n = 1,2, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \infty \tag{4.95}$$

$$m = 1 \rightarrow n = 2,3, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \infty \tag{4.96}$$

$$m = 1 \rightarrow n = 2,3, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \infty \tag{4.97}$$

$$m = 3 \rightarrow n = 3,4, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \infty \tag{4.98}$$

$$\sum_{m'=1}^{\infty} \tilde{E}^{(m')}(F,\tau)\omega^{m'} \sum_{m=0}^{\infty} \omega^{m} |\tilde{\psi}^{m}(F,\tau)\rangle \tag{4.99}$$

$$= \sum_{m'=1}^{\infty} \tilde{E}^{(m')}(F,\tau)\omega^{m'} \{\omega^{0}|\tilde{\psi}^{0}(F,\tau)\rangle + \omega^{1}|\tilde{\psi}^{1}(F,\tau)\rangle$$

$$+ \cdots \ldots . \}$$

$$
\begin{aligned}
&\{\tilde{E}^{(1)}(F,\tau)\omega + \tilde{E}^{(2)}(F,\tau)\omega^2 + \tilde{E}^{(3)}(F,\tau)\omega^3 + \cdots\}\{\omega^0|\tilde{\psi}^{(0)}(F,\tau)\rangle \\
&\quad + \omega^1|\tilde{\psi}^{(1)}(F,\tau)\rangle + \omega^2|\tilde{\psi}^{(2)}(F,\tau)\rangle + \cdots\} \\
&\quad = \omega^1\{\tilde{E}^{(1)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle + \omega^2\tilde{E}^{(1)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^1(F,\tau)\rangle \\
&\quad + \tilde{E}^{(2)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle\} + \omega^3\{\tilde{E}^{(3)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle \\
&\quad + \tilde{E}^{(2)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^1(F,\tau)\rangle + \tilde{E}^{(1)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^2(F,\tau)\rangle\} \\
&\quad + \omega^4\{\tilde{E}^{(4)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle + \tilde{E}^{(3)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^1(F,\tau)\rangle \\
&\quad + \tilde{E}^{(2)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^2(F,\tau)\rangle + \tilde{E}^{(1)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^3(F,\tau)\rangle\} \\
&\quad + \omega^5\{\tilde{E}^{(5)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle + \tilde{E}^{(4)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^1(F,\tau)\rangle \\
&\quad + \tilde{E}^{(3)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^2(F,\tau)\rangle + \tilde{E}^{(2)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^3(F,\tau)\rangle \\
&\quad + \tilde{E}^{(1)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^4(F,\tau)\rangle\big\} \\
&\quad + \omega^6\{\tilde{E}^{(6)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^0(F,\tau)\rangle + \tilde{E}^{(5)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^1(F,\tau)\rangle \\
&\quad + \tilde{E}^{(4)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^2(F,\tau)\rangle + \tilde{E}^{(3)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^3(F,\tau)\rangle \\
&\quad + \tilde{E}^{(2)}(F,\tau)\big|\tilde{\psi}^4(F,\tau)\rangle + \tilde{E}^{(1)}(F,\tau)|\tilde{\psi}^5(F,\tau)\rangle\big\} + \cdots \\
&\quad = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{m-1}\tilde{E}^{(m-n)}(F,\tau)\omega^m|\tilde{\psi}^n(F,\tau)\rangle
\end{aligned}
\tag{4.100}
$$

Floquet metoduna çift pertürbasyon teorisinin uygulanması

$\mathbf{F}(\tau+\pi) = -\mathbf{F}(\tau)$ olduğundan ve yarı-klasik enerji $E_{ac}(-F,\omega)$ zamanın kökenine bağlı olmadığından, $E(F,\omega) = E(-F,\omega)$ olmalıdır. Bu nedenle, $E^{(2m)}(F)$ katsayılarını F'nin kuvvetleri cinsinden genişletirsek, yalnızca çift kuvvetlerdeki terimler sıfır değildir:

$$
E^{(2m)}(F) = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_{2n}^{(2m)}F^{2n} \tag{4.101}
$$

$E^{(2m)}(F)$'nin bu açılımını, ω^2 genişleme ve toplamların sırasını değiştirmek, yarı-klasik enerji için olağan Rayleigh-Schrödinger pertürbasyon serisini verir:

$$E_{ac}(F,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}(\omega) F^{2n} \tag{4.102}$$

burada $E_{2n}(\omega)$, frekansta bir kuvvet serisi olarak ifade edilir:

$$E_{2n}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n}^{(2m)} \omega^{2m} \tag{4.103}$$

Standart pertürbasyon teorisinden iyi bilindiği gibi, $E_{2n}(\omega)$ katsayısı, n fotonun yaymasından ve n fotonun eşzamanlı soğurmasından (tüm zaman sıralamalarında toplanır) kaynaklanan AC yarı-klasik enerjiye katkıdır. $E_{2n}(\omega)$'nin ω^2 açılımı, yani denklem (4.103)'ün sağ tarafı, $n\hbar\omega$'nın n foton tarafından optik olarak bağlanabilen en yakın bozulmamış enerji seviyesinden E_0'ın ayrılmasından daha küçük olması koşuluyla yakınsar (Optik olarak birleştirilebilecek başka sınır durum seviyeleri yoksa genişleme $n\hbar\omega < |E_0|$ için yakınsar, çünkü E_0 başlangıç seviyesinin bozulmamış süreklilik eşiğinden ayrılmasıdır). $n\hbar\omega < |E_0|$, n foton atomu iyonize etmek için yetersiz olduğunda ve dolayısıyla $E_{2n}(\omega)$ ve dolayısıyla $\beta_{2n}^{(2m)}$ katsayıları gerçektir. n arttıkça, $E_{2n}(\omega)$'nin ω^2 genişlemesinin yakınsama yarıçapı sıfıra doğru küçülür.

Sistemimizi temsil eden zamana bağlı Schrödinger denklemi,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = [H_a + V(t)] |\psi(t)\rangle \tag{4.104}$$

Kullanarak Floquet Ansantz yapmak için aşağıdaki işlemler yapılır,

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-i\frac{E_{ac}t}{\hbar}\right) |\mathcal{F}(F,\omega,\tau)\rangle \tag{4.105}$$

$|\psi(t)\rangle$'yi denklem (4.104)'te yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} i\hbar\left(-i\frac{E_{ac}}{\hbar}\right).\exp\left(-i\frac{E_{ac}t}{\hbar}\right)\Big|\mathcal{F}(F,\omega.t)\rangle \\ + i\hbar\exp\left(-i\frac{E_{ac}t}{\hbar}\right)\frac{d}{dt}|\mathcal{F}(F,\omega,t)\rangle \\ = [H_a + V(t)]exp\left(-i\frac{E_{ac}t}{\hbar}\right)|\mathcal{F}(F,\omega,t)\rangle \end{aligned} \tag{4.106}$$

Buradan,

$$E_{ac}|\mathcal{F}(F,\omega,t)\rangle + i\hbar\frac{d}{dt}|\mathcal{F}(F,\omega,t)\rangle = [H_a + V(t)]|\mathcal{F}(F,\omega,t)\rangle \tag{4.107}$$

elde edilir.

$$|\mathcal{F}(F,\omega,t)\rangle = \sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{-iN\tau}\,|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle \tag{4.108}$$

denklem (107)'de yerine yazarsak,

$$E_{ac}\sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{-iN\tau}\,|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle + i\hbar\frac{d}{dt}\{\sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{-iN\tau}\,|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle = [H_a + V(t)]\sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{-iN\tau}|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle \tag{4.109}$$

elde ederiz ve elde ettiğimiz bu denklemi biraz düzenlersek,

$$E_{ac}\sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{-iN\tau}\,|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle + i\hbar\sum_{N=-\infty}^{\infty}(-iN)e^{-iN\tau}\,|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle = [H_a + V(t)]\sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{-iN\tau}|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle \tag{4.110}$$

sonra,

$$E_{ac}\sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{-iN\tau}\,|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle + \sum_{N=-\infty}^{\infty} N\hbar e^{-iN\tau}\,|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle = [H_a + V(t)]\sum_{N=-\infty}^{\infty} e^{-iN\tau}|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle \tag{4.111}$$

H_a'yı içeren terimi eşitliğin sol tarafına alalım, sonra da ortak toplam işaretini kullanalım.

$$\sum_{N=-\infty}^{\infty}(E_{ac} + N\hbar - H_a)e^{-iN\tau}\,|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle = \sum_{N=-\infty}^{\infty} V(t).\,e^{-iN\tau}|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle \tag{4.112}$$

şimdi $V(t)$'yi yerine yazalım,

$$V(t) = -e\vec{F}(\tau).\vec{\mathrm{x}} \equiv F\bar{V}_{+}e^{-i\tau} + F\bar{V}_{-}e^{-i\tau} \tag{4.113}$$

Denklem (112)'de yerine yazarsak,

$$\sum_{N=-\infty}^{\infty}(E_{ac} + N\hbar - H_a)e^{-iN\tau}\,|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle \tag{4.114}$$
$$= \sum_{N=-\infty}^{\infty}(F\bar{V}_{+}e^{-i\tau} + F\bar{V}_{-}e^{-i\tau})e^{-iN\tau}|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle$$

sonra,

$$\sum_{N=-\infty}^{\infty}(E_{ac} + N\hbar - H_a)e^{-iN\tau}\,|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle \tag{4.115}$$
$$= \sum_{N=-\infty}^{\infty} F\bar{V}_{+}e^{-i(N+1)\tau}|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle$$
$$+ F\bar{V}_{-}e^{-i(N-1)\tau}|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle$$

Denklem (115)'te sağ taraftaki ilk toplam içinde $N + 1 = m$ değişken değişimi yaparsak bu ifade;

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} F\bar{V}_{+}e^{-im\tau}|\mathcal{F}_{m-1}(F,\omega)\rangle \tag{4.116}$$

elde edilir. Benzer şekilde denklem (115)'in sağ tarafındaki ikinci toplama ifadesinde $N - 1 = m'$ değişken değişimini yaparsak, bu ifade

$$\sum_{m'=-\infty}^{\infty} F\bar{V}_{-}e^{-im'\tau}|\mathcal{F}_{m'+1}(F,\omega)\rangle \tag{4.117}$$

elde edilir. Bu iki terimi denklem (115)'te yerine yazarsak,

$$\sum_{N=-\infty}^{\infty}(E_{ac} + N\hbar - H_a)e^{-iN\tau}\,|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle \tag{4.118}$$
$$= \sum_{N=-\infty}^{\infty} F\bar{V}_{+}e^{-i(N+1)\tau}|\mathcal{F}_{N-1}(F,\omega)\rangle$$
$$+ F\bar{V}_{-}e^{-iN\tau}|\mathcal{F}_{N+1}(F,\omega)\rangle$$

elde edilir. Toplama işaretini şimdi kaldırabiliriz. Böylece çiftlenimli Floquet denklemi olan,

$$(E_{ac} + N\hbar - H_a)|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle = F\bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1}(F,\omega)\rangle + F\bar{V}_-|\mathcal{F}_{N+1}(F,\omega)\rangle \quad (4.119)$$

denklemini elde ederiz. Burada $\bar{V}_+$ ve $\bar{V}_-$ operatörleri ne τ ne de F'e bağlıdır ve şu şekilde tanımlanır

$$[E_{ac} + N\hbar\omega - H_a] = F\bar{V}_+e^{-i\tau} + F\bar{V}_-e^{i\tau} \quad (4.120)$$

$|\mathcal{F}(F,\omega)\rangle$ harmonik bileşenlerinin Floquet durum vektöründeki açılımı;

$$|\mathcal{F}(F,\omega)\rangle = \frac{F|N|}{\omega^{[|N|/2]}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{\infty}\omega^m F^{2n}|F_N^{(m)},_{2n}\rangle \quad (4.121)$$

Burada $[|N|/2]$ bir tamsayıdır, N çift ise $(|N|/2)$'ye ve, N tek ise $(|N|-1)/2$'ye eşittir. Bu açılım şekli bazı yorumlar gerektiriyor. $|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle$'nin seri açılımında F'in en küçük gücü N'dir, çünkü $|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle$ net soğurmayı (veya N negatifse net yaymayı) temsil ettiğinde N'dir.

$$E_{ac}(F,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\beta_{2n}^{(2m)}\omega^{2m}F^{2n} \quad (4.122)$$

Floquet sisteminde son olarak, $N \geq 1$ için aşağıdaki ifadeleri verir,

$$[E_{ac} + N\hbar\omega - H_a]|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle = [FV_+e^{-i\tau} + FV_-e^{i\tau}]|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle \quad (4.123)$$

$$[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\beta_{2n}^{(2m)}\omega^{2m}F^{2n} + N\hbar\omega - H_a]\frac{F^{|N|}}{\omega^{\frac{|N|}{2}}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{\infty}\omega^m F^{2n}|\mathcal{F}_{N,2n}^{(m)}\rangle \quad (4.124)$$

$$= FV_+\frac{F^{|N-1|}}{\omega^{\frac{|N-1|}{2}}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{\infty}\omega^m F^{2n}|\mathcal{F}_{N-1,2n}^{(m)}\rangle + FV_-\frac{F^{|N+1|}}{\omega^{\frac{|N+1|}{2}}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{\infty}\omega^m F^{2n}|\mathcal{F}_{N+1,2n}^{(m)}\rangle$$

N çift sayı ise;

$$N \to \frac{|N|}{2} = \frac{|N|}{2}, \frac{|N-1|}{2} = \frac{|N-1|-1}{2}, \frac{|N+1|}{2} = \frac{|N+1|-1}{2} \quad (4.125)$$

N tek sayı ise;

$$N \to \frac{|N|}{2} = \frac{|N-1|}{2}, \frac{|N-1|}{2} = \frac{|N-1|}{2}, \frac{|N+1|}{2} = \frac{|N+1|}{2} \tag{4.126}$$

$$N = 4 \to \frac{|4|}{2} = 2, \frac{|4-1|}{2} \cong 1, \frac{|4+1|}{2} \cong 2 \tag{4.127}$$

$$N = 3 \to \frac{|3|}{2} = 1, \frac{|3-1|}{2} = 1, \frac{|3+1|}{2} = 2 \tag{4.128}$$

$$m - \frac{1+1}{2} = m - 1 \tag{4.129}$$

$$\omega^{(m-|N|/2)} \tag{4.130}$$

$$\omega^{(m-|N-1|/2)} \tag{4.131}$$

$$\omega^{(m-|N+1|/2)} \tag{4.132}$$

N çift sayı ise;

$$N \to V_{+}F^{(m-1)} + V_F^{(m)} \tag{4.133}$$

N tek sayı ise;

$$N \to V_{+}F^{(m)} + V_F^{(m+1)} \tag{4.134}$$

N çift sayı ise;

$$m - \frac{|N|}{2} = m - \frac{|N-1|-1}{2} + m - \frac{|N+1|-1}{2} \tag{4.135}$$

$$m' = m - \frac{|N|}{2} \to m - \frac{|N|}{2} + 1 + m - \frac{|N|}{2} \tag{4.136}$$

N tek sayı ise;

$$m - \frac{(|N|-1)}{2} \to m - \frac{|N-1|}{2} + m - \frac{|N+1|}{2} \tag{4.137}$$

$$m - \frac{|N|}{2} \tag{4.138}$$

$$\frac{|N|}{2} \to \frac{|N-1|}{2} + \frac{1}{2} \tag{4.139}$$

$$m - \frac{|N|}{2} = m - \frac{|N-1|}{2} - \frac{1}{2} \tag{4.140}$$

$$m - \frac{|N+1|}{2} = m - \frac{|N-1|}{2} - 1 \tag{4.141}$$

$$m - 1 = m' \tag{4.142}$$

$$m = m' + 1 \tag{4.143}$$

$$\omega^{m-\frac{|N-1|}{2}} . \omega^{\frac{-1}{2}} = V_+ \omega^{m-\frac{|N-1|}{2}} + V_- \omega^{m-\frac{|N-1|}{2}-1} \tag{4.144}$$

$$\omega^{(m-\frac{1}{2})} \omega^{-\frac{|N-1|}{2}} = V_+ \omega^m . \omega^{-\frac{|N-1|}{2}} + V_- \omega^{(m-1)} . \omega^{-\frac{|N-1|}{2}} \tag{4.145}$$

$$m' = m - \frac{1}{2} \rightarrow m = m' + \frac{1}{2} \tag{4.146}$$

$$m = -n \rightarrow m' = -n - \frac{1}{2} \tag{4.147}$$

$$\omega^{m'} F_{N,2n}^{(m'+\frac{1}{2})} = V_+ \omega^m F^{(m)} + V_- \omega^m F^{(m'+1)} \tag{4.148}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n\prime=0}^{\infty} \sum_{m\prime=-n}^{\infty} [\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} & \beta_{2n}^{(2m)} \omega^{2m} \frac{F^{2n} \omega^{m'} F^{2n'} F^{|N|}}{\omega^{\left\lceil \frac{|N|}{2} \right\rceil}} |\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle \\ & + N\hbar\omega \frac{\omega^{m'} F^{2n'} F^{|N|}}{\omega^{\left\lceil \frac{|N|}{2} \right\rceil}} |\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle \\ & + H_a \frac{\omega^{m'} F^{2n'} F^{|N|}}{\omega^{\left\lceil \frac{|N|}{2} \right\rceil}} |\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle] \end{aligned} \tag{4.149}$$

$$\begin{aligned} = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n}^{\infty} [& V_+ \frac{F \omega^{m'} F^{2n'} F^{|N-1|}}{\omega^{\left\lceil \frac{|N-1|}{2} \right\rceil}} |\mathcal{F}_{N-1,2n'}^{(m')}\rangle \\ & + V_- \frac{F \omega^{m'} F^{2n'} F^{|N+1|}}{\omega^{\left\lceil \frac{|N+1|}{2} \right\rceil}} |\mathcal{F}_{N+1,2n'}^{(m')}\rangle] \end{aligned}$$

$$m' = 2m + k \rightarrow m = \frac{m' - k}{2} \tag{4.150}$$

$$2n' = 2n + 2l \;\rightarrow n = n' - l \tag{4.151}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n\prime=0}^{\infty}\sum_{m\prime=-n}^{\infty}[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{\infty}\beta_{2(n'-l)}^{2(m'-k)/2}\omega^{(m'-k)}\frac{F^{2(n'-l)}\omega^{m'}F^{2n'}F^{|N|}}{\omega^{\left[\frac{|N|}{2}\right]}}|\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle \\ + N\hbar\frac{\omega^{(m'+1)}F^{2n'}F^{|N|}}{\omega^{\left[\frac{|N|}{2}\right]}}|\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle \\ - H_a\frac{\omega^{m'}F^{2n'}F^{|N|}}{\omega^{\left[\frac{|N|}{2}\right]}}|\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle] \\ = \sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n}^{\infty}[V_+\frac{F\omega^{m'}F^{2n'}F^{|N-1|}}{\omega^{\left[\frac{|N-1|}{2}\right]}}|\mathcal{F}_{N-1,2n'}^{(m')}\rangle \\ + V_-\frac{F\omega^{m'}F^{2n'}F^{|N+1|}}{\omega^{\left[\frac{|N+1|}{2}\right]}}|\mathcal{F}_{N+1,2n'}^{(m')}\rangle\end{aligned} \tag{4.152}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n\prime=0}^{\infty}\sum_{m\prime=-n}^{\infty}[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{\infty}\beta_{2(n'-l)}^{2(m'-k)}\omega^{2m'-k-[|N|/2]}F^{4n'-2l+|N|}|\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle \\ + N\hbar\omega^{m'+1-[|N|/2]}F^{2n\prime+|N|}|\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle \\ - -H_aF^{2n'+|N|}\omega^{m'-\left[\frac{|N|}{2}\right]}|\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle] \\ = \sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n}^{\infty}[V_+\,\omega^{m'-[|N-1|/2]}F^{2n'+1+|N-1|}\,|\mathcal{F}_{N-1,2n'}^{(m')}\rangle \\ + V_-\omega^{m'-[|N+1|/2]}F^{2n'+1+|N+1|}\,|\mathcal{F}_{N+1,2n'}^{(m')}\rangle]\end{aligned} \tag{4.153}$$

N çift ise;

$$\frac{|N|}{2} = \frac{|N|}{2} \tag{4.154}$$

$$\frac{|N-1|}{2} = \frac{|N-1|-1}{2} = \frac{|N|-2}{2} = \frac{|N|}{2} - 1 \tag{4.155}$$

$$\frac{|N+1|}{2} = \frac{|N+1|-1}{2} = \frac{|N|}{2} \tag{4.156}$$

N tek ise;

$$\frac{|N|}{2} = \frac{|N|-1}{2} \tag{4.157}$$

$$\frac{|N-1|}{2} = \frac{|N-1|}{2} = \frac{|N|}{2} \tag{4.158}$$

$$\frac{|N+1|}{2} = \frac{|N+1|}{2} = \frac{|N|+1}{2} \tag{4.159}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\prime=0}^{\infty}\sum_{m\prime=-n}^{\infty}[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{\infty}\beta_{2(n'-l)}^{2(m'-k)}\omega^{m'-k}\omega^{m'-[|N|/2]}\,F^{4n'-2l+|N|}\,|\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle \\
&\quad + N\hbar\omega^{m'+1-[|N|/2]}F^{2n\prime+|N|}|\,\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle \\
&\quad > -H_aF^{2n'+|N|}\omega^{m'-\left[\frac{|N|}{2}\right]}|\,\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle] \\
&\quad = \sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n}^{\infty}[V_+\,\omega^{m'-\left[\frac{|N|}{2}\right]+1}F^{2n'+1+|N-1|}\,|\mathcal{F}_{N-1,2n'}^{(m')}\rangle \\
&\quad + V_-\omega^{m'-[|N|/2]}F^{2n'+1+|N+1|}\,|\mathcal{F}_{N+1,2n'}^{(m')}\rangle]
\end{aligned} \tag{4.160}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\prime=0}^{\infty}\sum_{m\prime=-n}^{\infty}[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{\infty}\beta_{2(n'-l)}^{2(m'-k)}\omega^{m'-k}\omega^{m'}\,F^{4n'-2l+|N|}\,|\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle \\
&\quad + N\hbar\omega^{m'+1}F^{2n\prime+|N|}|\,\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle - H_aF^{2n'+|N|}\omega^{m'}|\,\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle] \\
&\quad = \sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=-n}^{\infty}[V_+\,\omega^{m'+1}F^{2n'+1+|N-1|}\,|\mathcal{F}_{N-1,2n'}^{(m')}\rangle \\
&\quad + V_-\omega^{m'}F^{2n'+1+|N+1|}\,|\mathcal{F}_{N+1,2n'}^{(m')}\rangle]
\end{aligned} \tag{4.161}$$

$$m' + 1 = m_1 \tag{4.162}$$

$$m' = 0 \;\rightarrow\; m_1 = 1 \tag{4.163}$$

$$m' = m_1 - 1 \tag{4.164}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{\infty}\sum_{n\prime=0}^{\infty}\sum_{m\prime=1}^{\infty}\beta_{2(n'-l)}^{2(m'-k)}\omega^{m'-k}\omega^{m'}F^{4n'-2l+|N|}\,|\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle \tag{4.165}$$

$$+\sum_{n\prime=0}^{\infty}\sum_{m\prime=1}^{\infty}N\hbar\omega^{m'}F^{2n\prime+|N|}\,|\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle$$

$$-\sum_{n\prime=0}^{\infty}\sum_{m\prime=1}^{\infty}H_aF^{2n'+|N|}\omega^{m'}\,|\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle]$$

$$=\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=1}^{\infty}V_+\,\omega^{m'}F^{2n'+1+|N-1|}\,|\mathcal{F}_{N-1,2n'}^{(m'-1)}\rangle$$

$$+\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=1}^{\infty}V_-\,\omega^{m'}F^{2n'+1+|N+1|}\,|\mathcal{F}_{N+1,2n'}^{(m')}\rangle$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{\infty}\beta_{2(n'-1)}^{(m'-k)}\omega^{m'-k}F^{4m'-2l+|N|}|\,\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle \tag{4.166}$$

$$+N\hbar F^{2n\prime+|N|}\left|\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m'-1)}\right\rangle-H_aF^{2n'+|N|}\left|\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\right\rangle$$

$$=V_+F^{2n'+1+|N-1|}\,|\mathcal{F}_{N-1,2n'}^{(m'-1)}\rangle$$

$$+V_-F^{2n'+1+|N+1|}\,|\mathcal{F}_{N+1,2n'}^{(m')}\rangle$$

burada $s(N)=[1+(-1)^N]/2$ ve $(m\,—\,m')$ tek ise $\beta_{2(n-n')}^{(m-m')}$sıfırdır.

$$\sum_{n'=0}^{n}\sum_{m'=-n'}^{m}\beta_{2(n-n')}^{(m-m')}|\,\mathcal{F}_{N,2n'}^{(m')}\rangle+N\hbar\left|\mathcal{F}_{N,2n}^{(m-1)}\right\rangle-H_a\left|\mathcal{F}_{N,2n}^{(m)}\right\rangle \tag{4.167}$$

$$=\bar{V}_+\,|\mathcal{F}_{N-1,2n'}^{(m-s(N))}\rangle+\bar{V}_-\,|\mathcal{F}_{N+1,2n-2}^{(m-s(N)+1)}\rangle$$

$$\sum_{m'=-0}^{m=0}\beta_{0-0}^{m-m\prime}|\,\mathcal{F}_{N,0}^{(m')}\rangle+N\hbar\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(m-1)}\right\rangle-H_a\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(m)}\right\rangle \tag{4.168}$$

$$=\bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1,0}^{(m-s(N))}\rangle+\bar{V}_-\,|\mathcal{F}_{N+1,-2}^{(m-s(N)+1)}\rangle$$

$n = 0$ ve $m = 0$ için;

$$\sum_{m'=-0}^{m=0} \beta_{0-0}^{m-m'} |\mathcal{F}_{N,0}^{(m')}\rangle + N\hbar\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(m-1)}\right\rangle - H_a\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(m)}\right\rangle = \bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1,0}^{(m-s(N))}\rangle + \bar{V}_-|\mathcal{F}_{N+1,-2}^{(m-s(N)+1)}\rangle \tag{4.169}$$

$$\beta_0^0|\mathcal{F}_{N,0}^{(0)}\rangle + N\hbar\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(-1)}\right\rangle - H_a\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(0)}\right\rangle = \bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1,0}^{(-s(N))}\rangle + \bar{V}_-|\mathcal{F}_{N+1,-2}^{(-s(N)+1)}\rangle \tag{4.170}$$

$$s(N) = [1 + (-1)^N]/2$$

$$\beta_0^0|\mathcal{F}_{N,0}^{(0)}\rangle + N\hbar\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(-1)}\right\rangle - H_a\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(0)}\right\rangle = \bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1,0}^{[-1-(-1)^N]/2}\rangle + \bar{V}_-|\mathcal{F}_{N+1,-2}^{[1-(-1)^N]/2}\rangle \tag{4.171}$$

$n = 1$ için denklem (4.167);

$$\sum_{m'=-0}^{m} \beta_2^{(m-m')} |\mathcal{F}_{N,0}^{(m')}\rangle + \sum_{m'=-1}^{m} \beta_0^{(m-m')} |\mathcal{F}_{N,2}^{(m')}\rangle + N\hbar\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(m-1)}\right\rangle - H_a\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(m)}\right\rangle = \bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1,2}^{(m-s(N))}\rangle + \bar{V}_-|\mathcal{F}_{N+1,0}^{(m-s(N)+1)}\rangle \tag{4.172}$$

$n = 1$ ve $m = 0$ için;

$$\sum_{n'=0}^{1} \sum_{m'=-n'}^{0} \beta_{2(1-n')}^{(0-m')} |\mathcal{F}_{N,0}^{(m')}\rangle + N\hbar\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(-1)}\right\rangle - H_a\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(0)}\right\rangle = \bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1,2}^{(-s(N))}\rangle + \bar{V}_-|\mathcal{F}_{N+1,0}^{(1-s(N))}\rangle \tag{4.173}$$

$$\sum_{m'=-0}^{0} \beta_{2(1-0)}^{(0-m')} |\mathcal{F}_{N,0}^{(m')}\rangle + \sum_{m'=-1}^{0} \beta_{2(1-1)}^{(0-m')} |\mathcal{F}_{N,2}^{(m')}\rangle + N\hbar\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(m-1)}\right\rangle - H_a\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(0)}\right\rangle = \bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1,2}^{(-s(N))}\rangle + \bar{V}_-|\mathcal{F}_{N+1,0}^{(1-s(N))}\rangle \tag{4.174}$$

$$\beta_2^0\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(0)}\right\rangle+\beta_0^1\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(-1)}\right\rangle+\beta_0^0|\mathcal{F}_{N,2}^{(0)}\rangle+N\hbar\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(-1)}\right\rangle-H_a\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(0)}\right\rangle \tag{4.175}$$
$$=\bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1,2}^{(-s(N))}\rangle+\bar{V}_-|\mathcal{F}_{N+1,0}^{(1-s(N))}\rangle$$

$$s(N)=[1+(-1)^N]/2 \tag{4.176}$$

$$\beta_2^0\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(0)}\right\rangle+\beta_0^1\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(-1)}\right\rangle+\beta_0^0|\mathcal{F}_{N,2}^{(0)}\rangle+N\hbar\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(-1)}\right\rangle-H_a\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(0)}\right\rangle \tag{4.177}$$
$$=\bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1,2}^{[-1-(-1)^N]/2}\rangle+\bar{V}_-|\mathcal{F}_{N+1,0}^{[1-(-1)^N]/2}\rangle$$

$n=1$ ve $m=1$ için;

$$\sum_{m'=-0}^{1}\beta_2^{(1-m')}|\mathcal{F}_{N,0}^{(m')}\rangle+\sum_{m'=-1}^{1}\beta_0^{(1-m')}|\mathcal{F}_{N,2}^{(m')}\rangle \tag{4.178}$$
$$+N\hbar\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(0)}\right\rangle-H_a\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(1)}\right\rangle$$
$$=\bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1,2}^{(1-s(N))}\rangle+\bar{V}_-|\mathcal{F}_{N+1,0}^{(1-s(N)+1)}\rangle$$

$$\beta_2^1\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(0)}\right\rangle+\beta_2^0\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(1)}\right\rangle+\beta_0^2\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(-1)}\right\rangle+\beta_0^1\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(0)}\right\rangle+\beta_0^0|\mathcal{F}_{N,2}^{(1)}\rangle \tag{4.179}$$
$$+N\hbar\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(0)}\right\rangle-H_a\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(1)}\right\rangle$$
$$=\bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1,2}^{(1-s(N))}\rangle+\bar{V}_-|\mathcal{F}_{N+1,0}^{(1-s(N)+1)}\rangle$$

$$s(N)=[1+(-1)^N]/2 \tag{4.180}$$

$$\beta_2^1\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(0)}\right\rangle+\beta_2^0\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(1)}\right\rangle+\beta_0^2\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(-1)}\right\rangle+\beta_0^1\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(0)}\right\rangle+\beta_0^0|\mathcal{F}_{N,2}^{(1)}\rangle \tag{4.181}$$
$$+N\hbar\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(0)}\right\rangle-H_a\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(1)}\right\rangle$$
$$=\bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1,2}^{[1-(-1)^N]/2}\rangle+\bar{V}_-|\mathcal{F}_{N+1,0}^{[3-(-1)^N]/2}\rangle$$

$n=2$ için denklem (4.167);

$$\sum_{m'=-0}^{m} \beta_4^{(m-m')} |\mathcal{F}_{N,0}^{(m')}\rangle + \sum_{m'=-1}^{m} \beta_2^{(m-m')} |\mathcal{F}_{N,2}^{(m')}\rangle + \sum_{m'=-1}^{m} \beta_0^{(m-m')} |\mathcal{F}_{N,4}^{(m')}\rangle + N\hbar \left|\mathcal{F}_{N,4}^{(m-1)}\right\rangle - H_a \left|\mathcal{F}_{N,4}^{(m)}\right\rangle = \bar{V}_+ |\mathcal{F}_{N-1,4}^{[m-s(N)]}\rangle + \bar{V}_- |\mathcal{F}_{N+1,2}^{[m-s(N)+1]}\rangle \quad (4.182)$$

$n = 2$ ve $m = 0$ için;

$$\sum_{m'=-0}^{0} \beta_4^{(0-m')} |\mathcal{F}_{N,0}^{(m')}\rangle + \sum_{m'=-1}^{0} \beta_2^{(0-m')} |\mathcal{F}_{N,2}^{(m')}\rangle + \sum_{m'=-1}^{0} \beta_0^{(0-m')} |\mathcal{F}_{N,4}^{(m')}\rangle + N\hbar \left|\mathcal{F}_{N,4}^{(-1)}\right\rangle - H_a \left|\mathcal{F}_{N,4}^{(0)}\right\rangle = \bar{V}_+ |\mathcal{F}_{N-1,4}^{[0-s(N)]}\rangle + \bar{V}_- |\mathcal{F}_{N+1,2}^{[0-s(N)+1]}\rangle \quad (4.183)$$

$$\beta_4^0 \left|\mathcal{F}_{N,0}^{(0)}\right\rangle + \beta_2^1 \left|\mathcal{F}_{N,2}^{(-1)}\right\rangle + \beta_2^0 \left|\mathcal{F}_{N,2}^{(0)}\right\rangle + \beta_0^1 \left|\mathcal{F}_{N,4}^{(-1)}\right\rangle + \beta_0^0 \left|\mathcal{F}_{N,4}^{(0)}\right\rangle + N\hbar \left|\mathcal{F}_{N,4}^{(-1)}\right\rangle - H_a \left|\mathcal{F}_{N,4}^{(0)}\right\rangle = \bar{V}_+ |\mathcal{F}_{N-1,4}^{[-1-(-1)^N]/2}\rangle + \bar{V}_- |\mathcal{F}_{N+1,2}^{[1-(-1)^N]/2}\rangle \quad (4.184)$$

$n = 2$ ve $m = 1$ için;

$$\sum_{m'=-0}^{1} \beta_4^{(1-m')} |\mathcal{F}_{N,0}^{(m')}\rangle + \sum_{m'=-1}^{1} \beta_2^{(1-m')} |\mathcal{F}_{N,2}^{(m')}\rangle + \sum_{m'=-1}^{1} \beta_0^{(1-m')} |\mathcal{F}_{N,4}^{(m')}\rangle + N\hbar \left|\mathcal{F}_{N,4}^{(1-1)}\right\rangle - H_a \left|\mathcal{F}_{N,4}^{(1)}\right\rangle = \bar{V}_+ |\mathcal{F}_{N-1,4}^{[1-s(N)]}\rangle + \bar{V}_- |\mathcal{F}_{N+1,2}^{[1-s(N)+1]}\rangle \quad (4.185)$$

$$\beta_4^1\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(0)}\right\rangle+\beta_4^0\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(1)}\right\rangle+\beta_2^2\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(-1)}\right\rangle+\beta_2^1\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(0)}\right\rangle+\beta_2^0\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(1)}\right\rangle \tag{4.186}$$
$$+\beta_0^2\left|\mathcal{F}_{N,4}^{(-1)}\right\rangle+\beta_0^1\left|\mathcal{F}_{N,4}^{(0)}\right\rangle+\beta_0^0|\mathcal{F}_{N,4}^{(1)}\rangle$$
$$+N\hbar\left|\mathcal{F}_{N,4}^{(0)}\right\rangle-H_a\left|\mathcal{F}_{N,4}^{(1)}\right\rangle$$
$$=\bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1,4}^{[1-(-1)^N]/2}\rangle+\bar{V}_-|\mathcal{F}_{N+1,2}^{[3-(-1)^N]/2}\rangle$$

$n=2$ ve $m=2$ için;

$$\sum_{m'=-0}^{2}\beta_4^{(2-m')}|\mathcal{F}_{N,0}^{(m')}\rangle+\sum_{m'=-1}^{2}\beta_2^{(2-m')}|\mathcal{F}_{N,2}^{(m')}\rangle \tag{4.187}$$
$$+\sum_{m'=-1}^{2}\beta_0^{(2-m')}|\mathcal{F}_{N,4}^{(m')}\rangle+N\hbar\left|\mathcal{F}_{N,4}^{(2-1)}\right\rangle-H_a\left|\mathcal{F}_{N,4}^{(2)}\right\rangle$$
$$=\bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1,4}^{[2-s(N)]}\rangle+\bar{V}_-|\mathcal{F}_{N+1,2}^{[2-s(N)+1]}\rangle$$

$$\beta_4^2\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(0)}\right\rangle+\beta_4^1\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(1)}\right\rangle+\beta_4^0\left|\mathcal{F}_{N,0}^{(2)}\right\rangle+\beta_2^3\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(-1)}\right\rangle+\beta_2^2\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(0)}\right\rangle \tag{4.188}$$
$$+\beta_2^1\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(1)}\right\rangle+\beta_2^0\left|\mathcal{F}_{N,2}^{(2)}\right\rangle+\beta_0^3\left|\mathcal{F}_{N,4}^{(-1)}\right\rangle+\beta_0^2\left|\mathcal{F}_{N,4}^{(0)}\right\rangle$$
$$+\beta_0^1|\mathcal{F}_{N,4}^{(1)}\rangle+\beta_0^0|\mathcal{F}_{N,4}^{(2)}\rangle N\hbar\left|\mathcal{F}_{N,4}^{(1)}\right\rangle-H_a\left|\mathcal{F}_{N,4}^{(2)}\right\rangle$$
$$=\bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1,4}^{[3-(-1)^N]/2}\rangle+\bar{V}_-|\mathcal{F}_{N+1,2}^{[5-(-1)^N]/2}\rangle$$

5 METODUN UYGULANMASI VE BULGULAR

Hesaplamalar öncelikle aşağıdaki denklemi çözmeyi içerir,

$$\left(E^{(0)} - \widehat{H}\right)|\psi\rangle = \hat{V}_{dc}\left|\psi^{(0)}\right\rangle \tag{5.1}$$

Denklemde H atomik Hidrojenin pertürbe edilmemiş Hamiltoniyeni, $\left|\psi^{(0)}\right\rangle$ pertürbe edilmemiş taban durumu, $E^{(0)}$ pertürbe edilmemiş taban durum enerjisi, V_{dc} statik bir kuvvet alanı ε için elektrik dipol operatörüdür. Konum temsilinde çalışacağımızdan dolayı $\left|\psi^{(0)}\right\rangle$ ve $|\psi\rangle$ sırasıyla $\psi^{(0)}(r)$ ve $\psi(r)$ dalga fonksiyonları ile ve ket vektörleri üzerinde $\widehat{H}$ ve $\hat{V}_{dc}$ operatörleri ile dalga fonksiyonları üzerinde hareket eden H ve $V_{dc}(r)$ operatörleriyle temsil edilecektir.

$$\left(E^{(0)} - H\right)\psi(r) = V_{dc}(r)\psi^{0}(r) \tag{5.2}$$

Bu notlarda kullanılan atomik birimlerde,

$$H \equiv -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\mathrm{L}^2}{r^2}\right] - \frac{1}{r} \tag{5.3}$$

Burada L yörünge açısal momentum operatörüdür ve z-doğrultusunda yönlendirilmiş bir elektrik alan için

$$V_{dc}(r) = \mathcal{E}z \tag{5.4}$$

olur, ayrıca

$$E^{(0)} = -\frac{1}{2} \tag{5.5}$$

ve

$$\psi^{0}(r) = R_{1s}(r)Y_{00}(\theta,\phi) \tag{5.6}$$

$Y_{00}(\theta,\phi)$ küresel harmonik ve $Y_{lm}(\theta,\phi)$ için $l = m = 0$

5.1 Hidrojen Atomunda Radyal Çözümler;

Ze yüklü atom çekirdeği olan, $-e$ yüklü bir elektron ve

$$U_{et}(r) = -\frac{Ze^2}{(4\pi\varepsilon_0)r} \tag{5.7}$$

Coulomb potansiyeliyle etkileşen, Hidrojen atomunu ele alalım. Burada r, iki parçacık arası mesafedir. Elektronun kütlesini m, çekirdeğin kütlesini de M ile ifade edelim. **p**'nin kütle merkezinin hareketine eşlik eden toplam momentum ve **p**'nin de bağıl momentum olduğunu göz önünde bulundurarak atomun toplam enerjisini iki bölüme ayırabiliriz. Birincisi kütle merkezi hareketini ifade eden $P^2/2(M+m)$ kinetik enerjisi, diğeri

$$H = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{Ze^2}{(4\pi\varepsilon_0)r} \tag{5.8}$$

Hamiltoniyeni ile ifade edilen bağıl hareketin enerjisidir. Bu

$$\mu = \frac{mM}{m+M} \tag{5.9}$$

parçacıkların indirgenmiş kütlesinin ifadesidir. Bu sayede kütle merkezi sisteminde (burada $p = 0$'dır) ve konum temsilinde

$$\left[\frac{\hbar}{2\mu}\nabla^2 - \frac{Ze^2}{(4\pi\varepsilon_0)r}\right]\psi(r) = E\psi(r) \tag{5.10}$$

bir cisim için zamandan bağımsız Schrödinger denklemini çözmeliyiz.

Etkileşme potansiyelini ifade eden denklem (5.7) merkezcil bir potansiyel olduğu için denklem (5.10) dalga denklemi, küresel kutupsal koordinatlarda ayrılabilir. Böylece bu denklemin özel çözümü,

$$\psi_{E,l,m}(r,\theta,\phi) = R_{E,l}(r)Y_{l,m}(\theta,\phi) \tag{5.11}$$

Şeklinde ifade edilebilir. Burada $Y_{l,m}(\theta,\phi)$, l yörüngesel açısal momentum kuantum sayısı ile ($m = -l, l+1, \ldots, +l$ olan) m manyetik kuantum sayısını ifade eden bir küresel harmoniktir. $R_{E,l}(r)$ fonksiyonu, (5.7)'de verilen Coulomb potansiyelini kullanarak elde ettiğimiz aşağıda verilen Radyal Schrödinger denklemini sağlar;

$$\left\{\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]-\frac{Ze^2}{(4\pi\varepsilon_0)r}\right\}R_{E,l}(r)=ER_{E,l}(r) \tag{5.12}$$

Burada birinci kısım radyal kinetik enerji ile, diğer terimlerse E dışında, etkin potansiyel ile ilgili olduğu için bu denklemi basitleştirmek amacıyla

$$U_{E,l}(r)=rR_{E,l}(r) \tag{5.13}$$

şeklinde değişken değişimi yapıldığında,

$$[\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}+U(r)]U_{E,l}(r)=EU_{E,l}(r) \tag{5.14}$$

elde edilir. Bu denklemdeki Coulomb potansiyeli ve r yarıçaplı yörüngede dönme kaynaklı ve verilen açısal momentumun karesi ile orantılı potansiyel enerji ifadelerinin birleşimi etkin potansiyel olarak ifade edilir. Bu durumda,

$$U_{et}(r)=U(r)+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}=-\frac{Ze^2}{(4\pi\mathcal{E}_0)r}+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \tag{5.15}$$

Coulomb potansiyel enerjisi kullanılırsa ve

$$b=\frac{2}{\hbar}\sqrt{-2\mu E_{n,l}} \tag{5.16}$$

yer değiştirmesi yapılıp b^2 ile bölünürse (not: n alt indisi temel kuantum sayısıdır, E enerji özdeğerleri alt indisi yerine kullanılmıştır);

$$\left[\frac{d^2}{d(br)^2}+\frac{2}{(br)}\frac{d}{d(br)}+\frac{2\mu}{\hbar^2b^2}E+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\frac{1}{(4\pi\mathcal{E}_0)}\frac{Ze^2}{b(br)}\right)-\frac{l(l+1)}{(br)^2}\right]R_{n,l}(r)=0 \tag{5.17}$$

olur. (5.17) denkleminde $\rho=br$ yerine yazıldığında ve boyutsuz bir sabit olan

$$\frac{2\mu Ze^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2b}=\gamma=n \tag{5.18}$$

ifadesiyle verildiğinde denklem çözülmüş olur. Yukarıda tanımlanan ifadeler (5.17)'te yerine yazıldığında bağımsız değişken ρ ve boyutsuz sabit γ cinsinden (5.19) denklemi elde edilir:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho}-\frac{1}{4}+\frac{\gamma}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R_{nl}(\rho)=0 \tag{5.19}$$

Bu boyutsuz sabit baş kuantum sayısı olarak ifade edilir:

$$\gamma = n$$

$E > 0$ için sürekli spektrum elde edilir. Bu çözümler bağlı olmayan durumları göstermektedir. İyonlardan elektroların saçılması analizinde önemli rol oynar. Ancak atomik süreçlerde önem taşımamaktadır. Bu nedenle burada $E < 0$ durumuna karşılık gelen bir elektronlu atomik sistemlerin bağlı durumlarıyla ilgileneceğiz. Bu bağlı durumlar kesikli durumlardır. Dolayısıyla $E = E_{nl} < 0$ olarak gösterilir.

Sınır Koşullarının Sağlanması;

$\rho \to \infty$ limitinde:

Burada elektron, atomik boyutlar açısından değerlendirildiğinde Hidrojen atomundan çok uzakta bulunmaktadır. Dolayısıyla bu limitte (5.19) denklemi

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{1}{4}\right)R_{n,l}(\rho)=0 \tag{5.20}$$

indirgenir. (5.20) denkleminin çözümleri $e^{(\pm\frac{\rho}{2})}$'dir. $R_{n,l}(\rho)$ fonksiyonu bağlı durum çözümleridir. Exponansiyel olarak artan çözüm $\rho \to \infty$ limitinde bağlı durum oluşturmadığından fiziksel olarak anlamsız çözümlerdir. Bu nedenle sadece üstel olarak azalan fonksiyonu çözüm olarak alırız. Böylece

$$R_{nl}(\rho \to \infty) = (Sbt)e^{-\rho/2} \tag{5.21}$$

olarak bulunur. Başlangıç koşulları dikkate alınarak sabit 1'e eşitlenebilir. Dolayısıyla

$$R_{nl}(\rho \to \infty) = e^{-\rho/2} \tag{5.22}$$

elde edilir.

$\rho \to 0$ limitinde:

Bu limitte $R_{nl}(0) = 0$ veren çözümler aramalıyız. Denklem (5.22) ile verilen R_{nl} çözümleri $\rho = 0$ limitinde bu koşulu sağlamamaktadır:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{1}{4} + \frac{\gamma}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right] R_{nl}(\rho) = 0 \tag{5.23}$$

Denklemini incelersek yarıçapın çok küçük olduğu çekirdeğe yakın olan bu bölgede (5.23) denklemindeki $1/\rho^2$ basamağında olan terimler çok daha hızlı büyüdüğünden $\frac{1}{4}$ ve $\frac{\gamma}{\rho}$ değerleri bu bölgede ihmal edilebilir. Böylece denklemin son durumu

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right] R_{nl}(\rho) = 0 \tag{5.24}$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2}\big(\rho R_{nl}(\rho)\big) - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\big(\rho R_{nl}(\rho)\big) = 0 \tag{5.25}$$

olur. Bu diferansiyel denklemin çözümü ise

$$R_{nl}(\rho \to 0) = \rho^l \tag{5.26}$$

olur.

Bu limitlerdeki çözümler de dikkate alınarak $0 \leq r \leq \infty$ aralığında ρ 'nun her değeri için

$$R_{nl}(\rho) = e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^l f_{nl}(\rho) \tag{5.27}$$

eşitliğini yazabiliriz. $f_{nl}(\rho)$ fonksiyonunun seçiminde yukarıda incelediğimiz limitler olan $\rho \to \infty$ ve $\rho \to 0$ değerlerinde $f_{nl}(\rho)$, $R_{nl}(\rho)$ fonksiyonunun taşıması gereken sonlu olma özelliğini yitirmemesi sağlanmalıdır.

Ara Bölgede ($f_{nl}(\rho)$)'nun İncelenmesi;

$$R_{nl}(\rho) = e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^l f_{nl}(\rho) \tag{5.28}$$

denkleminde yerine konulduğunda

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{1}{4} + \frac{\gamma}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right] e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^l f_{nl}(\rho) = 0 \tag{5.29}$$

elde edilir. Bu denklemde verilen operatörler, $e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^{l}$'ye etki ettirildiğinde aşağıdaki ifadeye dönüşür:

$$\{\rho\frac{d^2}{d\rho^2}+[2(l+1)-\rho]\frac{d}{d\rho}+[\gamma-(l+1)]\}f_{nl}(\rho)=0 \tag{5.30}$$

Burada parantezin dışında yanlıca bulunacak olan $f_{nl}(\rho)$ ara bölge fonksiyonu bulunuyor. Elde ettiğimiz diferansiyel denklemin kuantum sayılarında aşağıdaki dönüşümler yapılarak denklem standart bir diferansiyel denklem haline getirilebilir. Bu amaçla

$$j=2l+1$$

$$q=\gamma+1=n+l$$

$$f_{nl}(\rho)\rightarrow L_{qj}(\rho)$$

gibi kuantum sayılarında değişim yapılırsa denklem

$$[\rho\frac{d^2}{d\rho^2}+(j+1-\rho)\frac{d}{d\rho}+(q-j)]L_{qj}(\rho)=0 \tag{5.31}$$

olur. Elde ettiğimiz eşitlik birleşik Laguerre diferansiyel denklemidir. Yukarıdaki eşitliğin çözümünü veren $L_{qj}(\rho)$ fonksiyonlarına birleşik Laguerre polinomları adı verilir. Bu durumda denklemde $j=0$ alınarak;

$$[\rho\frac{d^2}{d\rho^2}+(1-\rho)\frac{d}{d\rho}+q]L_{q}(\rho)=0 \tag{5.32}$$

elde edilir. Denklemde Laguerre diferansiyel denklemi ile bu denklemin çözümünü veren $L_q(\rho)$ fonksiyonları normal Laguerre polinomları olarak ifade edilir. Normal Laguerre polinomları

$$L_q(\rho)=e^{\rho}\frac{d^q}{d\rho^q}(\rho^q e^{-\rho}) \tag{5.33}$$

Rodrigues formülü kullanılarak elde edilir. Burada q, bir kuantum sayısıdır. Bu durumda $q=0,1,2,3,\ldots$ için yukarıdaki denklem kullanılarak Laguerre polinomları tablosu oluşturulabilir.

Kuantum sayısı $j\neq 0$ iken;

$$[\rho\frac{d^2}{d\rho^2}+(j+1-\rho)\frac{d}{d\rho}+(q-j)]L_{qj}(\rho)=0 \tag{5.34}$$

denkleminden elde edilebilir. Bu eşitliğin çözümlerine ise birleşik Laguerre polinomları adı verilir. Birleşik Laguerre polinomları, normal Laguerre polinomlarından,

$$L_{qj}(\rho) = \frac{d^j}{dq^j} L_q(\rho) \tag{5.35}$$

formülü yardımı ile türetilir. Böylece

$$\{\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + [2(l+1) - \rho] \frac{d}{d\rho} + [\gamma - (l+1)]\} f_{nl}(\rho) = 0 \tag{5.36}$$

denkleminin çözümü olarak, $f_{nl}(\rho)$ yerine $L_{qj}(\rho)$, birleşik Laguerre polinomları belirlenmektedir. Fakat θ'ya bağlı olan bölümü çözünce Legendre polinomlarındaki gibi, burada da $\rho = b\,r$ kullanılarak yarıçapa bağlı elde edilen Laguerre polinomları da normalize değildir. Literatürde Laguerre polinomlarına ait normalizasyon katsayısı n ve l kuantum sayılarına bağlı ve

$$N_{nl} = -\{b^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}\}^{1/2} \tag{5.37}$$

ile verilir. Burada b,

$$b = \frac{2}{\hbar} \sqrt{-2\mu E_{n,l}} \tag{5.38}$$

olup

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{1}{4} + \frac{\gamma}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right] R_{nl}(\rho) = 0 \tag{5.39}$$

denkleminden yararlanarak

$$b = \frac{2Z}{na_0} \tag{5.40}$$

bulunur. Bu durumda ara değişken ρ ise,

$$\rho = \left(\frac{2Z}{na_0}\right) r \tag{5.41}$$

olur, öyle ki a_0,

$$a_0 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} \tag{5.42}$$

şeklinde verilen Bohr yarıçapıdır (Eisberg ve Resnick 1974, Cowan 1981).

Elde edilen sonuçlara göre, Hidrojen atomunun dalga fonksiyonunun yarıçapa bağlı bölümünün, yarıçapın üst ve alt limitler arasında yer alan bölgesini temsil eden $f_{nl}(\rho)$ fonksiyonunun normalize biçimi, normalize edilmiş birleşik Laguerre polinomlarına eşit ve,

$$f_{nl}(\rho) = N_{nl} L_{qj}(\rho) \tag{5.43}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda genel çözüm fonksiyonunun yarıçapa bağlı olan bölümünün açık ifadesi

$$R_{nl}(\rho) = -\left\{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+1)!]^3}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^l L_{qj}(\rho) \tag{5.44}$$

olur. Burada, $q = n + l$ ve $j = 2l + 1$ dir.

Kuantum mekaniksel teoride bir kuantum sisteminin Schrödinger denklemini çözmek, sistemde yer alabilecek olasılıkları ifade eden dalga fonksiyonları ile bu durumlara denk gelen enerjiler için ifadeler türetip bulmaktır. Hidrojen atomunda merkezcil alan (Coulomb potansiyeli ile) probleminin çözümü için de benzer sonuçlar elde edilmelidir. Çünkü konu, bağıl ve küresel koordinatlarda, SI birim sistemini kullanarak Hidrojen atomunda merkezcil alan probleminin çözümü şeklinde ele alınmıştır. Bunun için Hamiltoniyen operatörünün kinetik enerjiyle ilgili olan teriminin operatörünün küresel koordinatlardaki eşitliği kullanılarak zamandan bağımsız Schrödinger eşitliği değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Bulunan çözümde Hidrojen atomunun durağan enerji seviyelerinin dalga fonksiyonları, bulunmuştur. Hidrojen atomu elektronunun zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin, farklı bir ifadeyle Hidrojen atomu elektronunun enerjisinin toplamını ifade eden, zamandan bağımsız Hamiltoniyen operatörünün (koordinata bağlı operatörün) özfonksiyonları

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi) \tag{5.45}$$

den yararlanarak ve kuantum sayıları ile indisleyerek

$$R_{1s}(r) = 2(\frac{Z}{a_0})^{3/2} e^{-Zr/a_0} \tag{5.46}$$

$Z = 1$ ve $a_0 = 1$ alınır ve buradan,

$$R_{1s}(r) = 2\exp(-r) \tag{5.47}$$

elde edilir. Ayrıca şu tanımlamalar söz konusudur:

$$Y_{00}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \tag{5.48}$$

ve

$$Y_{10}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}cos\theta \tag{5.49}$$

böylece

$$\psi^0(r) = \exp(-r)/\sqrt{\pi} \tag{5.50}$$

ve

$$z = rcos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}rY_{10}(\theta,\phi) \tag{5.51}$$

öte yandan,

$$\mathbf{L^2}Y_{lm}(\theta,\phi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{5.52}$$

ve

$$\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, Y^*_{lm}(\theta,\phi)Y_{l'm'}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{5.53}$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} R_{lm}(r)Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{5.54}$$

$$H\psi_{\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] - \frac{1}{r}\right\}R_{lm}(r)Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{5.55}$$

$l = 1, m = 0$ için ve

$$\left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{2}{r^2}\right] + \frac{1}{r}\right\}R_{10}(r) = \sqrt{\frac{4}{3}}rexp(-r) \tag{5.56}$$

$$\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r^2}(2r\frac{d}{dr}+\left(r^2\frac{d^2}{dr^2}\right))-\frac{2}{r^2}\right]+\frac{1}{r}\right\}R_{10}(r)=\sqrt{\frac{4}{3}}rexp(-r) \tag{5.57}$$

Her iki taraf 2 ile çarpılırsa,

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{2}{r^2}+\frac{2}{r}-1\right\}R_{10}(r)=2\sqrt{\frac{4}{3}}rexp(-r) \tag{5.58}$$

elde ederiz.

$l\neq 1, m\neq 0$ için,

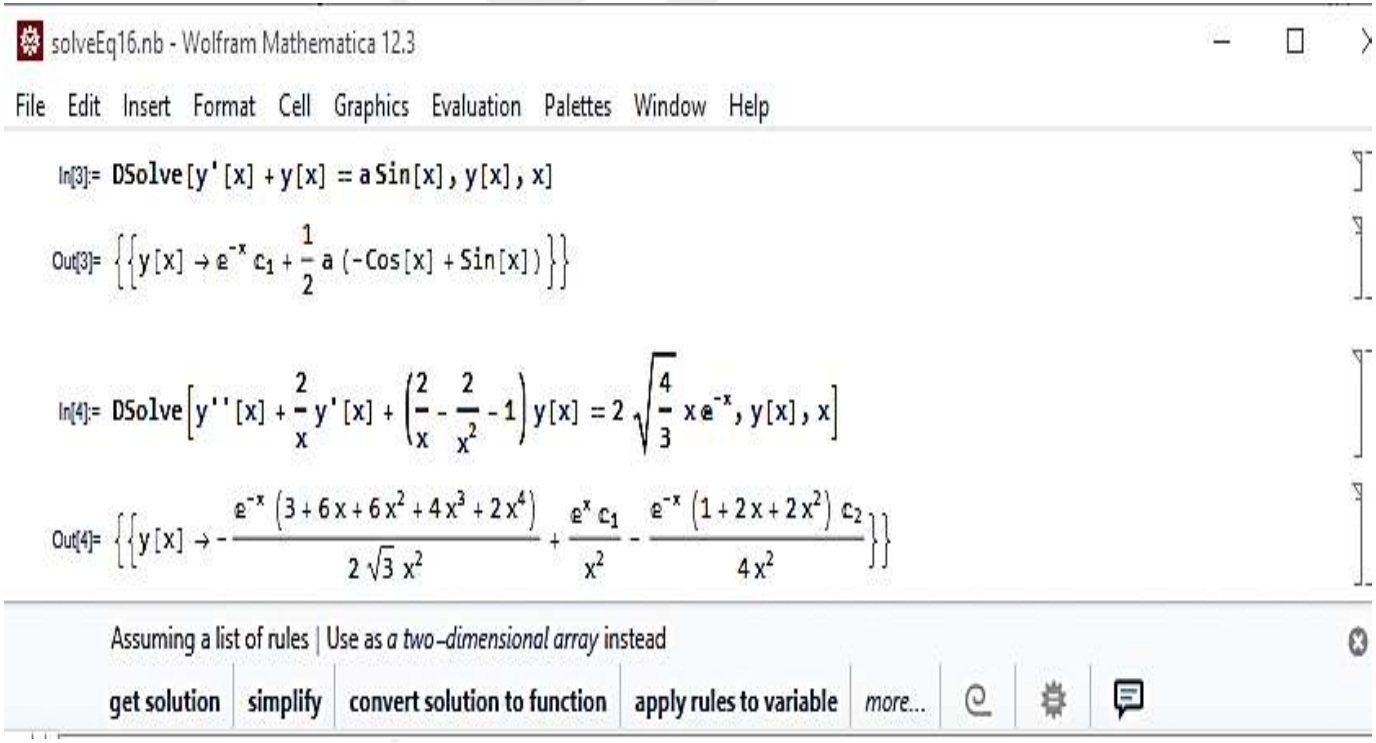
$$\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]+\frac{1}{r}\right\}R_{lm}(r)=0 \tag{5.59}$$

olur. Denklem (5.59) bize

$$R_{lm}(r)\equiv 0 \tag{5.60}$$

sonucunu verir.

Mathematica 12.3 yazılımında r yerine x yazarak yaptığımız işlemler sonrasında bize verdiği sonuç aşağıdaki gibidir,



Şekil 5.1. Mathematica 12.3 programını kullanarak yaptığımız hesaplamalardan bir görsel.

$$\text{DSolve}[y''[x] + (2/x)y'[x] + (2/x - 2/x^2 - 1)y[x] == 2\sqrt{\frac{4}{3}}xe^{-x}, y[x], x] \tag{5.61}$$

$$\{\{y[x] \to -((e^{-x}(3 + 6x + 6x^2 + 4x^3 + 2x^4))/(2\sqrt{3x^2})) + (e^x c_1)/x^2 - (e^{-x}(1 + 2x + 2x^2)c_2)/(4x^2)\}\} \tag{5.62}$$

Sınır Koşulları;

$\frac{e^x c_1}{x^2}$, $x \to 0$'a giderken $\frac{e^x}{x^2}$, ∞'a gider. O yüzden $c_1 = 0$ olur.

$$-\frac{e^{-x}}{x^2}\left(\frac{2c_2 x}{4} + \frac{6x}{2\sqrt{3}}\right) \tag{5.63}$$

$x \to 0$'a giderken $\frac{1}{x^2} \to \infty$

$$\frac{2c_2 x}{4} + \frac{6x}{2\sqrt{3}} = 0 \tag{5.64}$$

$$c_2 = -\frac{6}{\sqrt{3}} \tag{5.65}$$

Her katsayı için hesaplanır ve her durumda c_2 için aynı değer elde edilir.

$$y(x) = -\frac{e^{-x}}{2\sqrt{3}x^2}(4x^3 + 2x^4) \tag{5.66}$$

$$y(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{3}}(2x + x^2) \tag{5.67}$$

x yerine yeniden r yazdığımızda

$$R_{10}(r) = -\sqrt{\frac{1}{3}}(r^2 + 2r)\exp(-r) \tag{5.68}$$

elde etmiş oluruz.

Yarı-klasik enerjiyi ve harmonik bileşenleri tanımlayan denklemler

$$[E_{ac}(F,\omega)+N\hbar\omega-H_a]|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle = F\bar{V}_+|\mathcal{F}_{N-1}(F,\omega)\rangle + F\bar{V}_-|\mathcal{F}_{N+1}(F,\omega)\rangle \tag{5.69}$$

Şimdi çift serideki harmonik bileşenleri genişletiyoruz;

$$|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle = \frac{F^{|N|}}{\omega^{[|N|/2]}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{\infty}\omega^m F^{2n}\left|\mathcal{F}_{N,2n}^{(m)}\right\rangle \tag{5.70}$$

Burada $[|N|/2]$ bir tamsayıdır ve N çift sayı ise $(|N|/2)$, N tek sayı ise $(|N-1|/2)$ alınır. $N=1$ ve $n=0$ için;

$$|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle = \frac{F^{|N|}}{\omega^{[|N-1|/2]}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{\infty}\omega^m F^{2n}\left|\mathcal{F}_{N,2n}^{(m)}\right\rangle \tag{5.71}$$

$$|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle = \frac{F^{|1|}}{\omega^{[|1-1|/2]}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{\infty}\omega^m F^{0}\left|\mathcal{F}_{1,0}^{(m)}\right\rangle = \left|\mathcal{F}_{\pm1,0}\right\rangle \tag{5.72}$$

$$[E_{ac}(F,\omega)+N\hbar\omega-H_a]|\mathcal{F}_N(F,\omega)\rangle = (E_0\pm\hbar\omega-H_a)\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}\right\rangle = \bar{V}_\pm\left|\mathcal{F}_{0,0}\right\rangle \tag{5.73}$$

$N=2$ ve $n=0$ için;

$$E_2\left|\mathcal{F}_{0,0}\right\rangle + E_0\left|\mathcal{F}_{0,2}\right\rangle = \bar{V}_+\left|\mathcal{F}_{-1,0}\right\rangle + \bar{V}_-\left|\mathcal{F}_{+1,0}\right\rangle \tag{5.74}$$

$$(E_0\pm2\hbar\omega-H_a)\left|\mathcal{F}_{\pm2,0}\right\rangle = \bar{V}_\pm\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}\right\rangle \tag{5.75}$$

$$\left|\mathcal{F}_{0,0}\right\rangle = |\Phi_0\rangle \tag{5.76}$$

$$\langle\Phi_0|\Phi_0\rangle = 1 \tag{5.77}$$

$$\left\langle\Phi_0\right|(E_0-H_a)\left|\mathcal{F}_{0,2}\right\rangle = 0 \tag{5.78}$$

$$E_2 = \left\langle\Phi_0\right|\bar{V}_+\left|\mathcal{F}_{-1,0}\right\rangle + \left\langle\Phi_0\right|\bar{V}_-\left|\mathcal{F}_{+1,0}\right\rangle \tag{5.79}$$

$$\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}\right\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\omega^m\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(m)}\right\rangle \tag{5.80}$$

$$E_2 = \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_+ \middle| \sum_{m=0}^{\infty} \omega^m \left| \mathcal{F}_{\pm 1,0}^{(m)} \right\rangle + \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_- \middle| \sum_{m=0}^{\infty} \omega^m \left| \mathcal{F}_{\pm 1,0}^{(m)} \right\rangle \right. \tag{5.81}$$

$$= \left(\left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_+ \middle| \omega^0 \middle| \mathcal{F}_{-1,0}^{(0)} \right\rangle + \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_+ \middle| \omega^1 \middle| \mathcal{F}_{-1,0}^{(1)} \right\rangle \right.$$

$$+ \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_+ \middle| \omega^2 \middle| \mathcal{F}_{-1,0}^{(2)} \right\rangle + \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_+ \middle| \omega^3 \middle| \mathcal{F}_{-1,0}^{(3)} \right\rangle$$

$$\left. + \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_+ \middle| \omega^4 \middle| \mathcal{F}_{-1,0}^{(4)} \right\rangle + \cdots \right) + \left(\left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_- \middle| \omega^0 \middle| \mathcal{F}_{+1,0}^{(0)} \right\rangle \right.$$

$$+ \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_- \middle| \omega^1 \middle| \mathcal{F}_{+1,0}^{(1)} \right\rangle + \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_- \middle| \omega^2 \middle| \mathcal{F}_{+1,0}^{(2)} \right\rangle$$

$$\left. + \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_- \middle| \omega^3 \middle| \mathcal{F}_{+1,0}^{(3)} \right\rangle + \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_- \middle| \omega^4 \middle| \mathcal{F}_{+1,0}^{(4)} \right\rangle + \cdots \right)$$

m'in tek sayı değerleri için; $\bar{V}_+ = \bar{V}_-$ ve $\left| \mathcal{F}_{-1,0}^{(1)} \right\rangle = - \left| \mathcal{F}_{+1,0}^{(1)} \right\rangle$

Bu durumda;

$$\beta_2^0 = \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_+ \middle| \omega^0 \middle| \mathcal{F}_{-1,0}^{(0)} \right\rangle + \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_- \middle| \omega^0 \middle| \mathcal{F}_{+1,0}^{(0)} \right\rangle \tag{5.82}$$

$$\omega \beta_2^1 = \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_+ \middle| \omega^1 \middle| \mathcal{F}_{-1,0}^{(1)} \right\rangle + \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_- \middle| \omega^1 \middle| \mathcal{F}_{+1,0}^{(1)} \right\rangle = 0 \tag{5.83}$$

$$\omega^2 \beta_2^2 = \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_+ \middle| \omega^2 \middle| \mathcal{F}_{-1,0}^{(2)} \right\rangle + \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_- \middle| \omega^2 \middle| \mathcal{F}_{+1,0}^{(2)} \right\rangle \tag{5.84}$$

$$\omega^3 \beta_2^3 = \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_+ \middle| \omega^3 \middle| \mathcal{F}_{-1,0}^{(3)} \right\rangle + \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_- \middle| \omega^3 \middle| \mathcal{F}_{+1,0}^{(3)} \right\rangle = 0 \tag{5.85}$$

$$\omega^4 \beta_2^4 = \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_+ \middle| \omega^4 \middle| \mathcal{F}_{-1,0}^{(4)} \right\rangle + \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_- \middle| \omega^4 \middle| \mathcal{F}_{+1,0}^{(4)} \right\rangle \tag{5.86}$$

$$\omega^5 \beta_2^5 = \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_+ \middle| \omega^5 \middle| \mathcal{F}_{-1,0}^{(5)} \right\rangle + \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_- \middle| \omega^5 \middle| \mathcal{F}_{+1,0}^{(5)} \right\rangle = 0 \tag{5.87}$$

$$\omega^6 \beta_2^6 = \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_+ \middle| \omega^6 \middle| \mathcal{F}_{-1,0}^{(6)} \right\rangle + \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_- \middle| \omega^6 \middle| \mathcal{F}_{+1,0}^{(6)} \right\rangle \tag{5.88}$$

$$\omega^7 \beta_2^7 = \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_+ \middle| \omega^7 \middle| \mathcal{F}_{-1,0}^{(7)} \right\rangle + \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_- \middle| \omega^7 \middle| \mathcal{F}_{+1,0}^{(7)} \right\rangle = 0 \tag{5.89}$$

$$\omega^8\beta_2^8 = \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_+ \middle| \omega^8 \middle| \mathcal{F}_{-1,0}^{(8)} \right\rangle + \left\langle \Phi_0 \middle| \bar{V}_- \middle| \omega^8 \middle| \mathcal{F}_{+1,0}^{(8)} \right\rangle \tag{5.90}$$

şeklinde β değerleri hesaplanarak E_2 hesaplanır. Biz bunun için β'nın β_2^8 değerine kadar hesaplama yaptık;

$$E_2 = \beta_2^0 + \omega^2\beta_2^2 + \omega^4\beta_2^4 + \omega^6\beta_2^6 + \omega^8\beta_2^8 \tag{5.91}$$

Bu hesaplamaları yapabilmek için;

$$(E_0 - H_a)\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(0)}\right\rangle = \bar{V}_\pm|\Phi_0\rangle \tag{5.92}$$

$$\bar{V}_\pm = \varepsilon z \tag{5.93}$$

ilgili çalışmadan $\varepsilon = 0{,}022$ atomik birim aldık (Burada kullandığımız ε yarı-klasik enerji değil alan şiddetidir). Alan şiddeti değeri $I = 10^{13}\ W/cm^2$ olarak kullanılmıştır.

$$z = rcos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} rY_{10}(\theta,\phi) \tag{5.94}$$

$$\psi^0(r) = \exp(-r)/\sqrt{\pi} \tag{5.95}$$

$$Y_{00}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \tag{5.96}$$

$$(E_0 - H_a)\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(0)}\right\rangle = \bar{V}_\pm|\Phi_0\rangle \tag{5.97}$$

$$[y"[r] + \frac{2}{x}y'[r] + (\frac{2}{r} - \frac{2}{r^2} - 1)y[r] = 0{,}044\sqrt{\frac{4}{3}}re^{-r} \tag{5.98}$$

Denklemini Mathematica 12.3 programında program dilini kullanarak ve r yerine x yazarak çözdüğümüzde

$$\text{DSolve}[y"[x] + (2/x)y'[x] + (2/x - 2/x^2 - 1)y[x] = \\ = (44/1000)\sqrt{(4/3)}xe^{-x}, y[x], x] \tag{5.99}$$

$$\{\{y[x] \to -((11e^{-x}(3 + 6x + 6x^2 + 4x^3 + 2x^4))/(1000\sqrt{3x^2})) \\ + (e^x c_1)/x^2 - (e^{-x}(1 + 2x + 2x^2)c_2)/(4x^2)\}\} \tag{5.100}$$

elde ederiz ve buradan $\boldsymbol{c_1}$ve $\boldsymbol{c_2}$ katsayılarını hesaplarız.

Sınır Koşulları;

$\frac{e^x c_1}{x^2}$, $x \to 0$'a giderken $\frac{e^x}{x^2}$, ∞'a gider. O yüzden $c_1 = 0$ olur.

$$\frac{e^{-x}}{x^2}\left(\frac{2c_2 x}{4} + \frac{6x}{1000\sqrt{3}}\right) \tag{5.101}$$

$x \to 0$'a giderken $\frac{1}{x^2} \to \infty$

Yapılan işlemler sonucunda

$$c_2 = -\frac{33}{250\sqrt{3}} \tag{5.102}$$

bulunur ve buradan da,

$$y(x) = -\frac{11e^{-x}(4x^3 + 2x^4)}{1000\sqrt{3}x^2} \tag{5.103}$$

elde ederiz ve elde ettiğimiz bu değeri

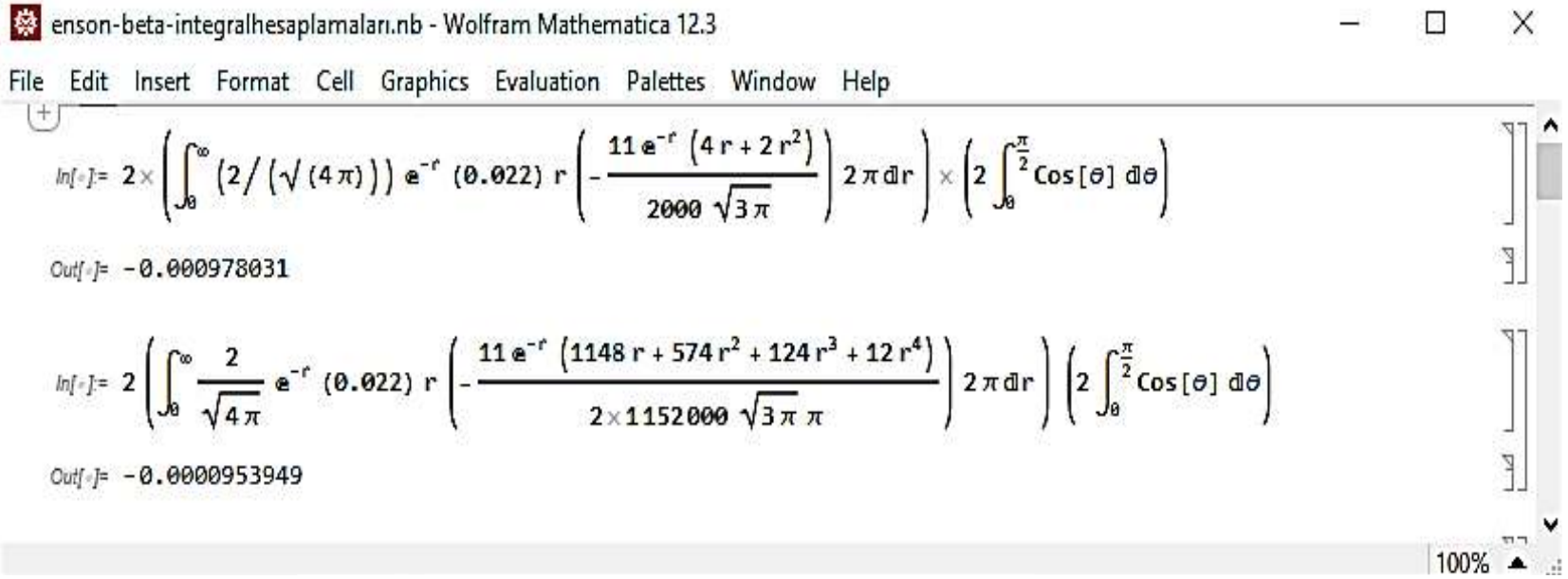
$$Y_{00}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \tag{5.104}$$

ile çarpıp x yerine yeniden r yazarsak,

$$\left|\mathcal{F}^{(0)}_{\pm 1,0}\right\rangle = -\frac{11e^{-x}(4x + 2x^2)}{2000\sqrt{3\pi}} \tag{5.105}$$

elde ederiz.

β_2^0 değerini bulmak için (5.82) denklemini Mathematica 12.3 programında,



Şekil 5.2. Mathematica 12.3 programıyla β değerlerinden β_2^0 değerinin hesaplanması.

$$2\left(\int_0^{\infty}(2/(\sqrt{(4\pi)}))e^{-r}(0.022)r\left(-\frac{11e^{-r}(4r+2r^2)}{2000\sqrt{3\pi}}\right)2\pi\,dr\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Cos}[\theta]\,d\theta\right) \tag{5.106}$$

denklemini çözdüğümüzde,

$$\beta_2^0 = -0.000978031 \tag{5.107}$$

elde ederiz.

Aynı işlem basamaklarını $\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(1)}\right\rangle$'yi hesaplamak için yaparsak,

$$(E_0 - H_a)\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(1)}\right\rangle = \pm\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(0)}\right\rangle \tag{5.108}$$

$$y''[r] + \frac{2}{r}y'[r] + \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r^2} - 1\right)y[r] = -\frac{11e^{-r}(4r+2r^2)}{2000\sqrt{3\pi}} \tag{5.109}$$

Mathematica 12.3 programında r yerine x yazarak işlem yaptığımızda,

$$\mathrm{DSolve}[y''[x] + \frac{2}{x}y'[x] + \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} - 1\right)y[x] = \\ = -\frac{11e^{-x}(4x+2x^2)}{2000\sqrt{3\pi}}, y[x], x] \tag{5.110}$$

$$\{\{y[x] \to \frac{11e^{-x}(33+66x+66x^2+44x^3+22x^4+4x^5)}{24000\sqrt{3\pi}x^2} + \frac{e^x c_1}{x^2} \\ -\frac{e^{-x}(1+2x+2x^2)c_2}{4x^2}\}\} \tag{5.111}$$

elde ederiz ve buradan $\boldsymbol{c_1}$ve $\boldsymbol{c_2}$ katsayılarını hesaplarız.

Sınır Koşulları;

$\frac{e^x c_1}{x^2}$, $x \to 0$'a giderken $\frac{e^x}{x^2}$, ∞'a gider. O yüzden $c_1 = 0$ olur.

$$\frac{e^{-x}}{x^2}\left(\frac{2c_2 x}{4} + \frac{66x.11}{24000\sqrt{3\pi}}\right) \tag{5.112}$$

$x \to 0$'a giderken $\frac{1}{x^2} \to \infty$

Yapılan işlemler sonucunda

$$c_2 = -\frac{121}{2000\sqrt{3}} \tag{5.113}$$

bulunur ve buradan da

$$y(x) = \frac{11e^{-x}(44x^3 + 22x^4 + 4x^5)}{24000\sqrt{3\pi}x^2} \tag{5.114}$$

elde ederiz ve elde ettiğimiz bu değeri

$$Y_{00}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \tag{5.115}$$

ile çarpıp x yerine yeniden r yazarsak

$$\left|\mathcal{F}^{(1)}_{\pm 1,0}\right\rangle = \frac{11e^{-r}(44r + 22r^2 + 4r^3)}{48000\sqrt{3}\pi} \tag{5.116}$$

elde ederiz.

Denklem (5.83), 0'a eşit olduğundan dolayı

$$\beta_2^1 = 0 \tag{5.117}$$

olur.

Aynı işlem basamaklarını $\left|\mathcal{F}^{(2)}_{\pm 1,0}\right\rangle$'yi hesaplamak için yaparsak

$$(E_0 - H_a)\left|\mathcal{F}^{(2)}_{\pm 1,0}\right\rangle = \pm\left|\mathcal{F}^{(1)}_{\pm 1,0}\right\rangle \tag{5.118}$$

$$y"[r] + \frac{2}{r}y'[r] + (\frac{2}{r} - \frac{2}{r^2} - 1)y[r] = \frac{11e^{-r}(44r + 22r^2 + 4r^3)}{48000\sqrt{3}\pi} \tag{5.119}$$

Mathematica 12.3 programında r yerine x yazarak aynı işlem basamaklarını yaptığımızda

$$\left|\mathcal{F}^{(2)}_{\pm 1,0}\right\rangle = -\frac{11e^{-r}(1148r + 574r^2 + 124r^3 + 12r^4)}{21152000\sqrt{3\pi}\pi} \tag{5.120}$$

elde ederiz.

β_2^2 değerini bulmak için denklem (5.84)'i Mathematica 12.3 programını kullanarak

$$2(\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{4\pi}}e^{-r}(0.022)r(-\frac{11e^{-r}(1148r + 574r^2 + 124r^3 + 12r^4)}{2304000\sqrt{3\pi}\pi})2\pi\, dr)(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Cos}[\theta]\, d\theta \tag{5.121}$$

denklemini çözdüğümüzde

$$\beta_2^2 = -0.0000953949 \tag{5.122}$$

elde ederiz.

Aynı işlem basamaklarını $\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(3)}\right\rangle$'yi hesaplamak için yaparsak

$$(E_0 - H_a)\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(3)}\right\rangle = \pm\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(2)}\right\rangle \tag{5.123}$$

$$y''[r] + \frac{2}{r}y'[r] + (\frac{2}{r} - \frac{2}{r^2} - 1)y[r] \tag{5.124}$$
$$= -\frac{11e^{-r}(1148r + 574r^2 + 124r^3 + 12r^4)}{2304000\sqrt{3\pi}\pi}$$

Mathematica 12.3 programında r yerine x yazarak aynı işlem basamaklarını yaptığımızda

$$\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(3)}\right\rangle \tag{5.125}$$
$$= \frac{11e^{-r}(161740r + 80870r^2 + 18572r^3 + 2364r^4 + 144r^5)}{2\,.\,276480000\sqrt{3}\pi^2}$$

elde ederiz.

Denklem (5.85), 0'a eşit olduğundan dolayı

$$\beta_2^3 = 0 \tag{5.126}$$

olur.

Aynı işlem basamaklarını $\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(4)}\right\rangle$'yi hesaplamak için yaparsak

$$(E_0 - H_a)\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(4)}\right\rangle = \pm\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(3)}\right\rangle \tag{5.127}$$

$$y''[r] + \frac{2}{r}y'[r] + (\frac{2}{r} - \frac{2}{r^2} - 1)y[r] \tag{5.128}$$
$$= \frac{11e^{-r}(161740r + 80870r^2 + 18572r^3 + 2364r^4 + 144r^5)}{2\,.\,276480000\sqrt{3}\pi^2}$$

Mathematica 12.3 programında r yerine x yazarak aynı işlem basamaklarını yaptığımızda

$$\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(4)}\right\rangle = -\frac{1}{2\,.\,66355200000\sqrt{3\pi}\pi^2}11e^{-r}(23761820r + 11880910r^2 + 2811484r^3 + 398028r^4 + 34128r^5 + 1440r^6) \tag{5.129}$$

elde ederiz.

Denklem (5.86) değerini bulmak için Mathematica 12.3 programında

$$2(\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{4\pi}}e^{-r}(0.022)r(-\frac{1}{2\,.\,66355200000\sqrt{3\pi}\pi^2}11e^{-r}(23761820r + 11880910r^2 + 2811484r^3 + 398028r^4 + 34128r^5 + 1440r^6))2\pi\,dr)(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Cos}[\theta]\,d\theta) \tag{5.130}$$

denklemini çözdüğümüzde

$$\beta_2^4 = -0.0000114958 \tag{5.131}$$

buluruz.

Aynı işlem basamaklarını $\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(5)}\right\rangle$'i hesaplamak için yaparsak

$$(E_0 - H_a)\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(5)}\right\rangle = \pm\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(4)}\right\rangle \tag{5.132}$$

$$y''[r] + \frac{2}{r}y'[r] + (\frac{2}{r} - \frac{2}{r^2} - 1)y[r] = -\frac{1}{2\,.\,66355200000\sqrt{3\pi}\pi^2}11e^{-r}(23761820r + 11880910r^2 + 2811484r^3 + 398028r^4 + 34128r^5 + 1440r^6) \tag{5.133}$$

Mathematica 12.3 programında r yerine x yazarak aynı işlem basamaklarını yaptığımızda

$$\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(5)}\right\rangle = \frac{11e^{-r}}{2\,.111476736000000\sqrt{3}\pi^3}(25063321780r + 12531660890r^2 + 3016671476r^3 + 451114692r^4 + 44545392r^5 + 2777760r^6 + 86400r^7) \tag{5.134}$$

elde ederiz.

Denklem (5.86) 0'a eşit olduğundan dolayı

$$\beta_2^5 = 0 \tag{5.135}$$

olur.

Aynı işlem basamaklarını $\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(6)}\right\rangle$'yı hesaplamak için yaparsak

$$(E_0 - H_a)\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(6)}\right\rangle = \pm\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(5)}\right\rangle \tag{5.136}$$

$$y"[r] + \frac{2}{r}y'[r] + (\frac{2}{r} - \frac{2}{r^2} - 1)y[r] = \frac{11e^{-r}}{2\,.111476736000000\sqrt{3}\pi^3}(25063321780r + 12531660890r^2 + 3016671476r^3 + 451114692r^4 + 44545392r^5 + 2777760r^6 + 86400r^7) \tag{5.137}$$

Mathematica 12.3 programında r yerine x yazarak aynı işlem basamaklarını yaptığımızda

$$\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(6)}\right\rangle = -\frac{1}{2\,.187280916480000000\sqrt{3\pi}\pi^3}11e^{-r}(26873179991420r + 13436589995710r^2 + 3269316968764r^3 + 504961481388r^4 + 53774564688r^5 + 3970232640r^6 + 189345600r^7 + 4536000r^8) \tag{5.138}$$

elde ederiz.

Denklem (5.87)'ten β_2^6 değerini bulmak için Mathematica 12.3 programında

$$2\left(\int_0^{\infty}\frac{2}{\sqrt{4\pi}}e^{-r}(0.022)r\left(-\frac{1}{2\,.187280916480000000\sqrt{3\pi}\pi^3}11e^{-r}(26873179991420r\right.\right. \tag{5.139}$$
$$+13436589995710r^2+3269316968764r^3+504961481388r^4+53774564688r^5$$
$$\left.\left.+3970232640r^6+189345600r^7+4536000r^8)\right)2\pi\,dr\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Cos}[\theta]\,d\theta\right)$$

denklemini çözdüğümüzde

$$\beta_2^6=-0.00000149687 \tag{5.140}$$

buluruz.

Aynı işlem basamaklarını $\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(7)}\right\rangle$'yi hesaplamak için yaparsak

$$(E_0-H_a)\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(7)}\right\rangle=\pm\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(6)}\right\rangle \tag{5.141}$$

$$y"[r]+\frac{2}{r}y'[r]+(\frac{2}{r}-\frac{2}{r^2}-1)y[r] \tag{5.142}$$
$$=-\frac{1}{2\,.187280916480000000\sqrt{3\pi}\pi^3}11e^{-r}(26873179991420r$$
$$+13436589995710r^2+3269316968764r^3+504961481388r^4$$
$$+53774564688r^5+3970232640r^6+189345600r^7$$
$$+4536000r^8)$$

Mathematica 12.3 programında r yerine x yazarak aynı işlem basamaklarını yaptığımızda

$$\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(7)}\right\rangle \tag{5.143}$$
$$=\frac{1}{2\,.3146319396864000000\sqrt{3}\pi^4}11e^{-r}(29136471820619380r$$
$$+14568235910309690r^2+3569947244844596r^3$$
$$+562941548481732r^4+62760933360432r^5$$
$$+5086042230960r^6+293738378400r^7+11104884000r^8$$
$$+211680000r^9)$$

elde ederiz.

Denklem (5.88) 0'a eşit olduğundan

$$\beta_2^7 = 0 \tag{5.144}$$

olur.

Aynı işlem basamaklarını $\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(8)}\right\rangle$'yi hesaplamak için yaparsak

$$(E_0 - H_a)\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(8)}\right\rangle = \pm\left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(7)}\right\rangle \tag{5.145}$$

$$\begin{aligned} & y"[r] + \frac{2}{r}y'[r] + (\frac{2}{r} - \frac{2}{r^2} - 1)y[r] \\ &= \frac{1}{2\,.3146319396864000000000\sqrt{3}\pi^4}11e^{-r}(29136471820619380r \\ &+ 14568235910309690r^2 + 3569947244844596r^3 \\ &+ 562941548481732r^4 + 62760933360432r^5 \\ &+ 5086042230960r^6 + 293738378400r^7 + 11104884000r^8 \\ &+ 211680000r^9) \end{aligned} \tag{5.146}$$

Mathematica 12.3 programında r yerine x yazarak aynı işlem basamaklarını yaptığımızda

$$\begin{aligned} & \left|\mathcal{F}_{\pm1,0}^{(8)}\right\rangle \\ &= \frac{1}{2\,.52858165867315200000000000\sqrt{3\pi}\pi^4}11e^{-r}(31839005941336231820r \\ &+ 15919502970668115910r^2 + 3920337555335218444r^3 \\ &+ 626928175963953948r^4 + 72023918644363248r^5 \\ &+ 6184207142974440r^6 + 397987068387600r^7 + 18564906906000r^8 \\ &+ 571571280000r^9 + 8890560000r^{10}) \end{aligned} \tag{5.147}$$

elde ederiz.

β_2^8 değerini bulmak denklem (5.89)'ü Mathematica 12.3 programında çözersek

$$2\left(\int_0^{\infty}\frac{2}{\sqrt{4\pi}}e^{-r}(0.022)r\left(\frac{1}{2.528581658673152000000000\sqrt{3\pi}\pi^4}11e^{-r}(3183900594133r\right.\right. \tag{5.148}$$

$$+ 15919502970668115910r^2 + 3920337555335218444r^3 + 626928175963953948r^4$$

$$+ 72023918644363248r^5 + 6184207142974440r^6 + 397987068387600r^7$$

$$\left.\left. + 18564906906000r^8 + 571571280000r^9 + 8890560000r^{10})\right)2\pi\, dr\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{Cos}[\theta]\, d\theta\right)$$

denklemini çözdüğümüzde

$$\beta_2^8 = -2.02012 \times 10^{-7} \tag{5.149}$$

buluruz. Bulduğumuz β değerlerini ve $\omega = 0{,}074$ değerini yerlerine yazarsak

$$E_2 = \beta_2^0 + \omega^2\beta_2^2 + \omega^4\beta_2^4 + \omega^6\beta_2^6 + \omega^8\beta_2^8 \tag{5.150}$$

$$E_2 = -0{,}000978554 \tag{5.151}$$

elde edilmiştir.

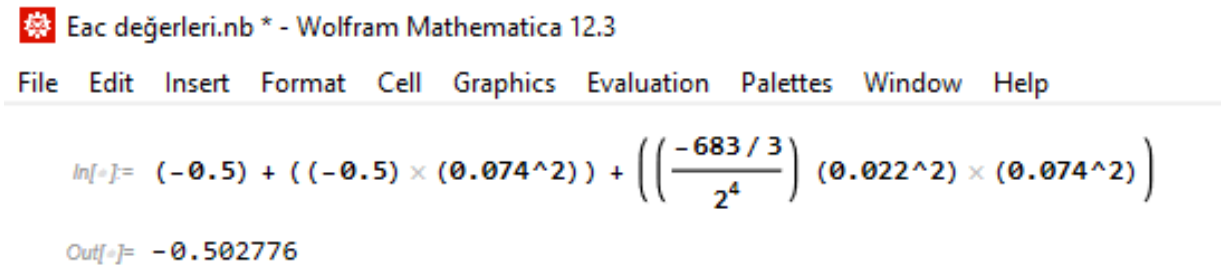
Pont ve arkadaşlarının incelemiş olduğumuz çalışmasında alçak frekans bölgesinde F^{2n}'in $n = 1$ ve ω^{2m} frekansının $m = 1$ değeri için $\beta_{2n}^{(2m)}$ katsayılarında $\mathrm{Re}(E_{ac})$ değeri ile ilgili hesaplamalarını denklem (4.37)'yi kullanarak;

$$E_{ac}(F,\omega) = \sum_{n=0}^{1}\sum_{m=0}^{1}\beta_{2n}^{(2m)}\omega^{2m}F^{2n} \tag{5.152}$$

denklemini seriye açarsak;

$$E_{ac}(F,\omega) = \beta_0^0\omega^0F^0 + \beta_2^0\omega^0F^2 + \beta_0^0\omega^2F^0 + \beta_2^{(2)}\omega^2F^2 \tag{5.153}$$

Denklemini elde ederiz. Bu denklemde yer alan ve daha önce hesapladığımız β'ların değerlerini ve $\omega = 616\, nm = 0.074\, a.b.$ frekans değerlerini yerlerine yazıp Mathematica 12.3 programını kullanarak tekrar elde ettiğimizde;



Şekil 5.3: Mathematica 12.3 programını kullanarak yaptığımız $\mathrm{Re}(E_{ac})$ hesaplamamız.

Bu veriler neticesinde $\mathrm{Re}(E_{ac}) = -0.502776$ olarak elde ettik.

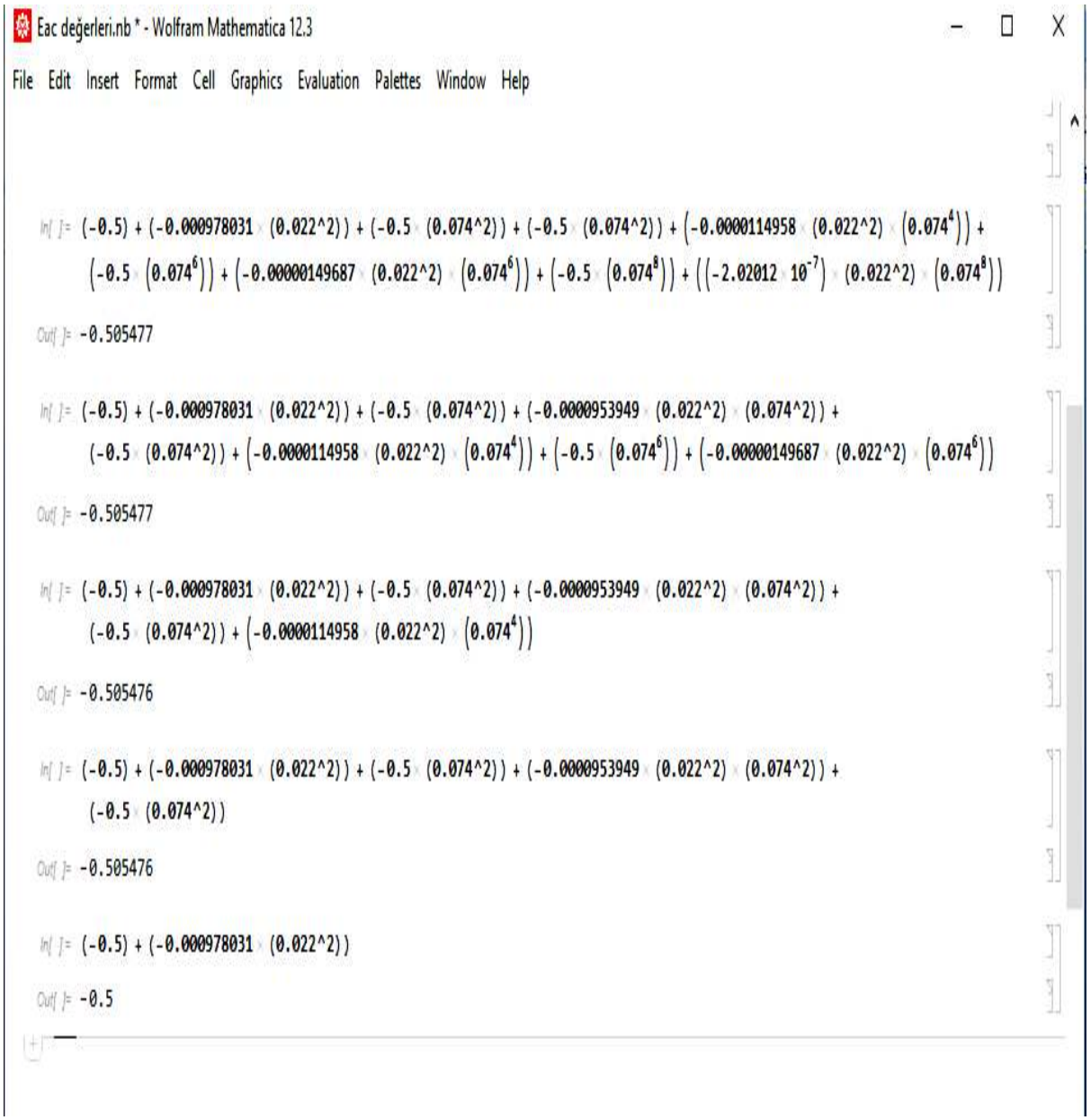
Biz ise yapmış olduğumuz bu çalışmada yine alçak frekans bölgesinde F^{2n}'in bu defa $n = 0$ ve $n = 1$ değerlerini dikkate alarak ve ω^{2m} frekansının üssü olan m'yi 0'dan 4'e kadar değiştirerek $\beta_{2n}^{(2m)}$ katsayılarında E_{ac} değerlerini;

$$E_{ac}(F,\omega) = \sum_{n=0}^{1}\sum_{m=0}^{4} \beta_{2n}^{(2m)}\omega^{2m}F^{2n} \tag{5.154}$$

Denklemini seriye açarsak;

$$\begin{aligned} E_{ac}(F,\omega) = {} & \beta_0^0\omega^0F^0 + \beta_2^0\omega^0F^2 + \beta_0^0\omega^2F^0 + \beta_2^{(2)}\omega^2F^2 + \beta_0^0\omega^4F^0 \\ & + \beta_2^4\omega^4F^2 + \beta_0^0\omega^6F^0 + \beta_2^6\omega^6F^2 + \beta_0^0\omega^8F^0 \\ & + \beta_2^8\omega^8F^2 \end{aligned} \tag{5.155}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemde yer alan ve daha önce hesapladığımız β'ların değerlerini ve $\omega = 616\,nm = 0.074\,a.b.$ frekans değerlerini yerlerine yazıp Mathematica 12.3 programını çözdüğümüzde;



Şekil 5.4: Mathematica 12.3 programını kullanarak yaptığımız Re(E_{ac}) hesaplamalarımız.

Mathematica 12.3 yazılımını kullanarak Şekil 5.4'te elde ettiğimiz veriler neticesinde Tablo 5.1'i oluşturduk.

$\boldsymbol{m}$	$\mathbf{Re}(\boldsymbol{E_{ac}})$
0	-0,5
1	-0,505476
2	-0,505476
3	-0,505477
4	-0,505477

Tablo 5.1: Alçak frekans bölgesinde alan kuvveti F^{2n}'in $n = 0{,}1$ ve ω^{2m} frekansının $m = 0{,}1{,}2{,}3{,}4$ değerleri için $\beta_{2n}^{(2m)}$ katsayılarında $\mathrm{Re}(E_{ac})$ değeri.

Yaptığımız hesaplamalarda m'yi 0'dan 4'e doğru arttırdıkça $\mathrm{Re}(E_{ac})$ değerinde de büyüme gözlenmiştir. Fakat m'nin büyüyen değerlerinde yani $m = 3$'ten sonra elde ettiğimiz katkının azalmasından dolayı hesaplamalarımızı $m = 4$'ten sonra durdurduk.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada bir lazer alanı ile bir elektronlu bir atomik sistemin en basiti olan Hidrojen atomunun etkileşmesi incelenmiştir. Flouqet metodu ve çift pertürbasyon yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem ile Pont ve ark. düşük ω frekanslı kuvvetli bir alan tarafından ışınlanan bir atom için alternatif akım (AC) yarı-klasik enerji (quasienergy), ω^2 kuvvetlerine ve alan şiddeti F'ye bağlı katsayıları hesapladılar ve enerji özdeğerlerini bu katsayılar cinsinden ifade ettiler (Pont ve ark., 1992). Bu çalışma kapsamında bahsi geçen katsayıların analitik hesabı ayrıntılı olarak tekrarlanmış ve bir elektromanyetik alan varlığında taban durumdaki atomik Hidrojen için ilgili katsayılar hesaplanmıştır.

Pont ve arkadaşlarının ilgili çalışmasında alçak frekans bölgesinde F^{2n}'in $n = 1$ ve ω^{2m} frekansının $m = 1$ değeri için $\beta_{2n}^{(2m)}$ katsayılarında $\mathrm{Re}(E_{ac})$ değeri ile ilgili hesaplamalar $E_{ac}(F,\omega) = \Sigma_m \Sigma_n \beta_{2n}^{(2m)} F^{2n} \omega^{2m}$ ifadesi kullanılarak seriye açılmıştır. Kullanılan alan şiddetinin I (intensity) değeri $10^{13}\ W/cm^2$ ve dalga boyu $616\ nm$ dir. Bu alan için β değerlerini hesapladık. $616\ nm$ dalga boyuna karşılık gelen $\omega = 0.074\ a.b$ frekans ve hesaplanan β değerlerini açtığımız seride Mathematica 12.3 yazılımı kullanılarak Pont ve ark. tarafından elde edilen $\mathrm{Re}(E_{ac}) = -0.502776$ değeri yeniden elde edilmiştir.

Ek olarak araştırmamızda Pont ve arkadaşlarının yaptıkları çalışmadan farklı olarak aynı frekans ve yoğunluk bölgesinde F^{2n}'in bu defa $n = 0$ ve $n = 1$ değerleri dikkate alınmış ve ω^{2m} frekansının üssünde yer alan m çarpanının değerleri 0'dan 4'e kadar değiştirilmiştir. $\beta_{2n}^{(2m)}$ katsayılarında E_{ac} değerlerini aynı işlem basamaklarını tekrarlayarak kullandığımızda m'yi 0'dan 4'e doğru arttırdıkça $\mathrm{Re}(E_{ac})$ değerinde daha büyük kayma gözlenmiştir. Ancak $m \geq 4$ değerlerinin yarı-klasik enerjide oluşan kaymanın ihmal edilecek kadar küçük olduğunu bulduk. Araştırmamızda alçak frekans bölgesinde pertürbatif yaklaşımda çalıştığımız için enerji seviyesindeki değişimde büyük katkı olmaması çoklu foton süreçlerinde çok katkı olmadığını göstermektedir. m katsayısını her arttırdığımızda yaptığımız hesaplamaların sonuçları bize $\mathrm{Re}(E_{ac})$ değerine daha fazla ve büyük katkı veremediği için hesaplamalarımıza $m = 4$ değerinden sonra devam edilmemiştir.

Sonuç olarak çift pertürbasyon ile yaptığımız hesaplar alan kuvvetinin F^2 açılımları için frekans ω^{2m} açılımının $m \geq 4$ değerlerinin yarı-klasik enerjide oluşturduğu değişiklik ihmal edilecek kadar küçük olduğu anlaşılmıştır. Yarı-klasik enerjide değişim olmaması bu

limitte iyonlaşma oranına da katkı sunmayacağını gösterir. Çoklu foton süreçleri olarak, çoklu foton iyonlaşma oranı ve harmonik üretimine katkı ileri bir çalışma konusu olarak önerilebilir.

Çoklu foton süreçlerinin; çoklu foton tomografisi (MPT) ve çoklu foton mikroskobu (MPM) gibi araçlarla yapay zekânın birleştirilmesi sayesinde sağlık gibi birçok uygulama alanında birçok önemli işleve sahip olduğu literatürde görülmektedir (Kistenev ve ark., 2019; Guimarães ve ark., 2020; Mühlberg ve ark., 2022). Bu alanda yapılan bazı çalışmalara değinecek olursak; çoklu foton tomografisi (MPT) ve yapay zekânın birleştirilmesi ile ilgili yapılan araştırmalar sonucunda sağlık alanında atopik dermatit gibi cilt bozukluklarının başarıyla teşhisi sağlanmıştır. Ek olarak, biyolojik dokuların yapısını incelemek için çoklu foton mikroskobu (MPM) yaygın olarak kullanılmaktadır. Çoklu foton mikroskobu ile kendi kendini geliştiren çoklu fotonlu yapay zekânın (SEMPAI), son teknoloji biyo-belirteçlerden daha iyi performans gösterdiği de bilinmektedir (Kistenev ve ark., 2019; Guimarães ve ark., 2020; Mühlberg ve ark., 2022).

KAYNAKLAR

Aygün, E.ve Zengin, M. 1998, "*Atom ve Molekül Fiziği"* A. Ü. Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.

Aymar, M. ve Crance, M. 1981 "*Multiphoton Ionization Probabilitie sof Multiple Continuain Alkali Atoms"* J. Phys. B: At., Mol. And Optical Physics 14, 3585.

Bassi, M. ve Baluja, K. L. 2000 "*Transition Probabilities for Two-Photon H(1s-2s) and He*(1^1s–2^1s*) Transitions: A Partial-Closure Approach"* Journal of Physics 4, 377-384.

Bebb, H. B. ve Gold, A. 1966 *"Multiphoton Ionization of Hydrogen and Rare-Gas Atoms "*Phys. Rev. 143, 1-24.

Becker W., Long S., ve Mclver J. K., Phys. Rev. 50 1540 (1994).

Biredikhin, V. I., Galanin, M. D. ve Genkin, V. N. 1973 "*Two-Photon Absorptional Spectroscopy"* Sov. Phys. Usp. 16, 299-321.

Bransden, B. H. Ve Joachain, C. J. 1999 *"Atom ve Molekül Fiziği"* Bilim Yayıncılık, Ankara.

Brown, W. J. 1999 *"Experimental Realization of a Two-Photon Raman Laser"* Doc. Thesis Department of Physics Duke University.

Burke P. G., Franken P. ve Joachain C. J., Phys J.. B 24 761 (1991).

Chan, F. T. ve Tang, C. L. 1969 "*Multiphoton Ionization of Atomic Hydrogen"* Phys. Rev. 185, 42-44.

Chang, T. N. ve Poe, R. T. 1977 "*Two-and Three-Photon Ionization of Hydrogen and Lithium "*Phys. Rev. A16, 606-612.

Çelik, G., E. Akın ve H.Ş. Kılıç 2005*"Azot Atomunda Geçiş Olasılıklarının Hesaplanması"* S. Ü. Fen Ed. Fak. Fen Derg. 25, 113-118.

Çelik, E. ve ve H.Ş. Kılıç 2006. *Multifoton Süreçler İçin Oran Denklemleri Üzerine Bir Çalışma,* SelçukÜniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Dorr M., Terao-Dunseath M., Noble C.J., Burke P.G. ve Joachain C.J., Phys J., B.25 809 (1992).

Dorr M., Purvis J., Terao-Dunseath M., Burke P.G., Joachain C.J. and. Noble C.J, Phys. B. 28 4481 (1995).

Franken P. A., Hill A.E., Peters C.W., ve Weinreich G., Phys. Rev. Lett. 7 118 (1961).

Gebarowski R., Burke P.G., Taylor K.T., Dorr M., Bensaid M., Joachain C.J. ve Noble C.J. in Electron and Photon Interactions with atoms, ions and molecules, EC HCM Network, Paris, September 1-2 1995.

Gontier, Y. ve Trahin. M. 1968 "*Multiphoton Ionization of Atomic Hydrogen in the Ground State"* Phys. Rev. 172, 83-87.

Guimarães, P., Batista, A., Zieger, M., Kaatz, M., & Koenig, K. (2020). Artificial intelligence in multiphoton tomography: atopic dermatitis diagnosis. *Scientific reports*, *10*(1), 7968.

Hughes, V. ve Grabner, L.1950 *"The Radio frequency Spectrum of Rb 85 Fand Rb 87 F by the Electric Resonance Method "*Phys. Rev. 79, 314-322.

Hurst, G. S., Payne, M. G., Nayfeh, M. H., Judish, J. P. ve Wagner, E. B. 1975 "*Saturated Two-Photon Resonance Ionization of He(2^1S)"* Phys. Rev. Lett. 35, 82.

Joachain C. J., Multiphoton Processes, edited by P. Lambropoulos ve H. Walther (Published by Institute of Physics, by Galliard Ltd, 1997), pp. 46-56.

Karlsson, D. ve Nilsson, H. 2001 *"A Study of Two-photon Excitation in Turbid Media–Possibilities in Photodynamic Therapy "*Master's Thesis Lund Reports on Atomic Physics, LRAP-277.

Karule,E.1978 "*Two-Photon Ionization of Atomic Hydrogen Simultaneously with One-Photon Ionisation"* J. Phys. B: At. Mol. Phys. 11, 441-447.

Karule, E. ve Moine, B. 2003 "*The General Expression for the Transition Amplitude of Two-Photon Ionization of Atomic Hydrogen"* J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 36, 1963-1969.

Kassaee, A., Rutsgi, M.L. ve Long, S.A.T. 1988 "*Two-Photon Ionization of Atomic Hydrogen with Elliptically Polarized Light "*Phys. Rev. A37, 999-1002.

Kistenev, Y. V., Vrazhnov, D. A., Nikolaev, V. V., Sandykova, E. A., & Krivova, N. A. (2019). Analysis of collagen spatial structure using multiphoton microscopy and machine learning methods. *Biochemistry (Moscow)*, *84*, 108-123.

Klarsfeld, S. 1970 "*Two-Photon Ionization of Atomic Hydrogen in The Ground State "*Lett. Nuovo Cimento 3, 395.

Koval, P. 2004 *"Two-Photon Ionization of Atomic Inner-Shells"* Doc. Thesis Fachbereich Naturwissenschaftender Universitat Kassel, Russland.

Lambropoulos, P. 1976 "*Topicson Multiphoton Processesin Atoms" Advances in Atomic and Molecular Physics* Vol. 12 Acedemic Press New York.

Lambropoulos, P. ve Teague, M. R. 1976 "*Two-Photon Ionization with Spin-Orbit Coupling"* J. Phys. B. 9, 587.

Latinne O., Kylstra N. J., Dorr M., Purvis J., Terao-Dunseath M., Joachain C.J., Burke P.G. ve Noble C.J., Phys. Rev. Lett. 74 46 (1995).

Li, X. F. 1994 *"Measurement of 1S-2S Two-Photon Rabi Frequency of Atomic Hydrogen"* Doc. Thesis, Texas A&M University.

Li X. F., L'Huillier A., Ferray M., Lompre L. A., ve Mainfray G., Phys. Rev. A. 39 5751 (1989).

Liboff, R. L. (1998) Introductory Quantum Mechanics. Addison-Wesley Longman, Inc., Reading.

Maker P. D., Terhune R.W., ve Savage C. M. Proceedings of the Third International Conference on Quantum Electronics, Paris, 1963, edited by Grivet P.ve Bloembergen N. (Colombia University Press, Newyork, 1964), p.1559; Maker P.D. ve Terhune R.W., Phys. Rev. 137, A801 (1965).

Mayer, M. G. 1931, Über Elementaraktemitzwei Quantensprüngen, Annalender Physik **9**, 273-294 German.

Meşe, E., *Floquet calculations of rates of frequency conversion and multiphoton ionisation in intense laser field*, University of Durham (1997).

Mühlberg, A., Ritter, P., Langer, S., Goossens, C., Nübler, S., Schneidereit, D., Taubmann, O., Denzinger, F., Nörenberg, D., Haug, M., Goldmann, W.H., Maier, A.K., Friedrich, O., & Kreiss, L. (2022). *SEMPAI: a Self-Enhancing Multi-Photon Artificial Intelligence for prior-informed assessment of muscle function and pathology. bioRxiv*.

New G. H. C. ve Ward J. F., Phys. Rev. 185, 57 (1969).

Omidvar, K. 1980 "*Two-Photon Excitation Cross Sectionin Light and Intermediate Atoms in Frozen-Core LS-Coupling Approximation"* Phys. Rev. A22, 4, 1576.

Pherson A. Mc, Gibson G., Jara H., Johann U., Luk T. S., lntyre Mc I. A., Boyer K., and Rhodes C. K., J. Opt. Soc. Am. B. 4 595 (1987).

Purvis J., Dorr M., Terao-Dunseath M., Joachain C.J., Burke P.G. ve Noble C.J., Phys. Rev. Lett. 71 3943 (1993).

Pindzola, M. S. 1978 "*Two-Photon Excitation of Atomic Oxygen"* Phys. Rev. A17, 1021.

Pont M., Potvliege R. M., Shakeshaft R., ve Teng Z., *Low-frequency theory of multiphoton ionization. II. General formulation and further results for ionization of H(1s)*, Phys. Rev. A 45, 8235, 1992.

Vucic S., Meşe E. ve Potvliege R. M., *Multiphoton İonization and multiphoton resonances in the tunneling regime*, Phys. Rev. A., 053402 81, (2010)

Quattropani, A., Bassani, F. Ve Carillo, S. 1982 "*Two-Photon Transitions to Excited States in Atomic Hydrogen"* Phys. Rev. A25, 3079-3089.

Rapoport, L. P., Zon, B. A. ve Manakov, L. P. 1969 *"Two-Photon Ionization of the Hydrogen Atom"* Soviet Physics Jetp 29, 220.

Reintjes J., She C. Y., Eckardt R. C., Karangelen N. E., Andrews R. A., ve Elton R. C., Phys. Rev. Lett. 37, 1540 (1976).

Reintjes J., She C. Y., Eckardt R. C., Karangelen N. E., Andrews R. A., ve Elton R. C., Appl. Phys. Lett. 30, 480 (1977).

Robinson, E. J. ve Geltman, S. 1967 *"Single-and Double-Quantum Photodetachment of Negative Ions "*Physical Review 153, 4.

Schwartz, C. ve Tiemann, T. J. 1959 "*New Calculation of The Numerical Value of The Lamb Shift"* Ann. Phys. (N.Y.) 6, 178.

Teague, M. R. ve Lambropoulos, P. 1976 "*Theoretical Values for Measured Ratios of Multiphoton Ionization Rates for Circularand Linear Polarization"* Phys.Letter A56285-286.

Wildenaur J., Appl J.. Phys. 62 41 (1987).

Zernik, W. 1964, "*Two-Photon Ionization of Atomic Hydrogen"* Phys. Rev. 135, A51-A57.

Zernik, W. ve Klopfenstein, R. W. 1965, "*Two-Photon Ionization of Atomic Hydrogen II*" Journal of Mathematical Physics 6, 262-270.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad	Tekeş, Hanife
Web sayfası (Research Gate, Academia, vs.)	Academia

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	2011
Lisans	Yüzüncü Yıl Üniversitesi	2008
Lise	Diyarbakır Anadolu Öğretmen Lisesi	2003

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2008-2009	Diyarbakır Kültür Dershanesi	Öğretmen
2009-2010	Eğil Alparslan Lisesi	Öğretmen
2010-2011	Diyarbakır Mezopotamya Koleji	Öğretmen
2011-2014	Diyarbakır Final Okulu	Öğretmen
2015-Halen	TED Diyarbakır Koleji	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Tekeş, H. "V-Diagramlarının 10. Sınıf Öğrencilerinin "Mekanik Dalgalar" Konusundaki Başarılarına Etkisi". Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (Aralık 2011) / Yüksek Lisans Tezi

2. Hanife TEKEŞ & Selahattin GÖNEN (2012). Influence of V-diagrams on 10th grade Turkish students' achievement in the subject of mechanical waves. Science Education International, 23(3), 268-285.

Özel İlgiler

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Hanife Tekeş		
Öğrenci No	12802505		
Ana Bilim Dalı	Fizik		
Program Türü	Proje ☐	Yüksek Lisans ☐	Doktora **X**
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Doç. Dr. Nurettin Pirinççioğlu		
Tez Başlığı	ÇOKLU FOTON SÜREÇLERİNİ TEK ELEKTRON YAKLAŞIMIYLA DÜŞÜK FREKANS PERSPEKTİFİNDEN İNCELEME		
RAPOR BİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	104		
Raporlama Tarihi	19/06/2023		
Benzerlik Oranı (%)	%18		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 104 sayfalık kısmına ilişkin, 19/06/2023 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 18 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

☐Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç

☐Kaynaklar hariç

☐Alıntılar hariç/dâhil

X Diğer (Her şey dâhil %18)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Benzerlik oranım üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrencinin Adı, Soyadı: Hanife, TEKEŞ
Tarih: 19/06/2023
İmza:

Danışman

Adı, Soyadı: Doç. Dr. Nurettin PİRİNÇÇİOĞLU İmza:

Tarih: 19/06/2023

Ana Bilim Dalı Başkanı İmza:

Adı, Soyadı: Prof. Dr. M. Zafer KÖYLÜ

Tarih: 19/06/2023