

**ÇOKLU KRİTER KARAR VERME YÖNTEMLERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ
BULANIK KÜMELERİN KULLANILMASI**

Salih Berkan AYDEMİR

Doktora Tezi

Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı

Donanım Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. üyesi Sevcan YILMAZ GÜNDÜZ

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Kasım 2020

Bu tez çalışması BAP Komisyonu tarafından kabul edilen 20DRP041 no.lu proje kapsamında desteklenmiştir.

ÖZET

ÇOKLU KRİTER KARAR VERME YÖNTEMLERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ BULANIK KÜMELERİN KULLANILMASI

Salih Berkan AYDEMİR

Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı

Donanım Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Kasım 2020

Danışman: Dr. Öğr. üyesi Sevcan YILMAZ GÜNDÜZ

Çoklu kriter karar verme problemleri, sınırlı kriterler ve alternatifler arasında en uygun alternatifin seçilmesi ile tanımlanabilir. Çoklu kriter karar verme problemlerinde, kişilerin (uzmanların) görüşlerine dayalı karar matrislerinin oluşturulması nedeniyle hem yanlı hem de kriterler arasındaki ilişkiler göz ardı edilerek, bir karar mekanizması oluşturulmaktadır. Özellikle, kişilerden elde edilen veriler eksik ve açık olmayan veriler içerebilmektedir. Dolayısıyla, bu durumda bulanık kümelerin kullanılması, karar mekanizmasında daha güvenilir sonuçlar vermektedir. Diğer yandan bulanık kümelerin genelleştirilmesi ile açık olmayan verileri ifade etmek için karar vericiler açısından daha geniş bir bulanık küme oluşturulabilmektedir. Tezin kapsamında, çoklu kriter karar verme yöntemlerinde önerilen metotlar genelleştirilmiş bulanık kümeler, geleneksel metotlar ve birleştirme yöntemleri ile birleştirilmiştir. Tez kapsamında ilk olarak Fermatean bulanık kümeler, Dombi T-norm operatörü ile birleştirilmiştir. Ardından geleneksel yöntemlerden olan TOPSIS metoduna uygulanmıştır. Dombi T-norm yapısının esnek parametresi sayesinde, parametre değeri değiştikçe birleştirme yöntemi de değişmektedir. Böylece birleştirme operatörü geniş bir yelpazeyi kapsamaktadır. Tezin ikinci konusu, q-rung bulanık kümeleri ortamında öncelikli Dombi operatörünü içermektedir. Öncelik operatörü, farklı öncelikteki kriter ve karar vericilerin karar mekanizmasında değerlendirilmesinde büyük role sahiptir. Önerilen operatörün sınırlılık, monotonluk ve idempotentlik gibi bazı arzu edilen özellikleri de gösterilmektedir. Ayrıca önerilen yöntem MULTIMOORA yapısı ile melezlenmiştir. Diğer yandan, önerilen yöntem için geçerlilik testleri ve sayısal örnekler verilmektedir. Tezin üçüncü konusu yansızlık operatörünün, kuvvet operatörü ile uygulanmasını içerir. Yansızlık operatörü, karar

vericiler arasındaki yanlış karar verme durumunu olasılıksal toplam ele almaktadır. Ayrıca sezgisel bulanık kümeler için kullanılan bir skor fonksiyonu, q-rung bulanık sayıları için genelleştirilmiştir. Tezin dördüncü konusu olarak, aralıklı bulanık q-rung sayıları için öncelikli dual Muirhead mean operatörü önerilmiştir. Böylelikle dual Muirhead operatör, öncelikli operatör ile birleştirilmiştir. Tezin son konusu ise T-küresel bulanık kümelerde kuvvet Dombi operatörünün uygulanmasıdır. Önerilen bütün metotlar sayısal problemler ile test edilmiştir. Ayrıca elde edilen sıralama sonuçları, literatürde önerilen diğer yöntemler ile karşılaştırılmaktadır. Nihayetinde önerilen yöntemler, hem farklı bulanık ortamlarda önerilmiştir hem de Dombi operatörü, öncelik operatörü ve kuvvet operatörü ile melez edilip, çoklu kriter karar verme yöntemleri literatürüne katkı sağlamaktadır.

Anahtar Sözcükler: Çoklu kriter karar verme yöntemleri, birleştirme operatörleri, TOPSIS, MULTIMOORA

ABSTRACT

USING GENERALIZED FUZZY SETS IN MULTIPLE CRITERIA DECISION- MAKING METHODS

Salih Berkan AYDEMİR

Department of Computer Engineering

Programme in Hardware

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, November 2020

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Sevcin YILMAZ GÜNDÜZ

Multiple criteria decision-making problems can be defined by limited criteria and choosing the most appropriate alternative among alternatives. In multiple criteria decision-making problems, due to the creation of decision matrices based on the opinions of the individuals (experts), a decision mechanism is formed by ignoring both bias and the relationships between the criteria. In particular, data obtained from individuals may contain incomplete and unclear data. Therefore, using fuzzy sets in this case gives more reliable results in decision mechanism. On the other hand, by generalizing fuzzy sets, a larger fuzzy set can be formed for decision makers to express unclear data. In the scope of the thesis, the methods proposed in multiple criteria decision making methods are combined with generalized fuzzy sets, traditional methods and combining methods. Within the scope of the thesis, firstly, Fermatean fuzzy sets were combined with Dombi T-norm operator. Then, TOPSIS method, which is one of the traditional methods, was applied. Thanks to the flexible parameter of the Dombi T-norm structure, the aggregation method changes as the parameter value changes. Thus, the aggregation operator covers a wide range. The second issue of the thesis involves the Dombi operator primarily in the q-rung fuzzy sets environment. The priority operator has a effective role in the evaluation of different priority criteria and decision makers in the decision mechanism. Some desirable properties of the proposed operator such as limitation, monotonicity and idempotency are also shown. In addition, the proposed method is hybridized with the MULTIMOORA structure. On the other hand, validity tests and numerical examples are given for the proposed method. The third issue of the thesis involves the application of the neutral operator with the force operator. The neutrality operator handles the biased decision-making situation among decision makers in

probabilistic sum. Also, a score function used for heuristic fuzzy sets is generalized for q-rung fuzzy numbers. As the fourth issue of the thesis, a priority dual Muirhead mean operator is proposed for spaced q-rung fuzzy numbers. Thus, the dual Muirhead operator is combined with the priority operator. The last issue of the thesis is the application of the power Dombi operator in T-spherical fuzzy sets. All proposed methods have been tested with numerical problems. In addition, the ranking results obtained are compared with other methods proposed in the literature. Ultimately, the proposed methods are proposed both in different fuzzy environments and hybridize with Dombi operator, priority operator and force operator, contributing to the literature of multiple criteria decision making methods.

Keywords: Mult-criteria decision making methods, Aggregation operators, TOPSIS, MULTIMOORA.

TEŞEKKÜR

Öncelikle, tez çalışması sürecinde, deneyimlerini, bilgilerini ve desteğini en üst düzeyde hissettiğim çok iyi bir yol gösterici olduğuna inandığım danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Sevcan YILMAZ GÜNDÜZ’e katkılarından ötürü en derin teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmama oldukça katkı sağlayan tez izleme süreçleri boyunca tez izleme jürisinde yer alan hocalarım Sayın Doç. Dr. Üyesi Alper Kürşat UYSAL ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi İsmail SAN’a verdikleri öneriler, paylaştıkları bilgi birikimleri ve desteklerinden ötürü teşekkürlerimi sunarım

Tez çalışmam sürecinde benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen sevgili eşime ve her zaman yanımda olan anneme ve babama saygı, sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Salih Berkan AYDEMİR

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Salih Berkan AYDEMİR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....HATA! YER İŞARETİ TANIMLANMAMIŞ.	
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR	vi
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	viii
TABLolar DİZİNİ	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiv
1. GİRİŞ	1
2. İLGİLİ ÇALIŞMALAR.....	5
3. TEMEL BİLGİLENDİRME	11
3.1. Genelleştirilmiş Bulanık kümeler	11
3.1.1. Sezgisel bulanık kümeler	11
3.1.2. Pisagor bulanık kümeleri.....	12
3.1.3. Fermatean bulanık kümeler	12
3.1.4. Q-rung orthopair bulanık küme	13
3.1.5. Aralıklı q-rung orthopair bulanık küme.....	15
3.1.6. T-Küresel bulanık küme	15
3.2. Geleneksel Çoklu Kriter Karar Verme Yöntemleri	15
3.2.1. TOPSIS metot	17
3.2.2. MULTIMOORA metot	19
3.3. Birleştirme yöntemleri	21
3.3.1. Fermatean bulanık küme aritmetik birleştirme operatörü.....	21
3.3.2. Fermatean bulanık küme Geometrik birleştirme operatörü	22
3.3.3. Sezgisel bulanık küme sıralı birleştirme operatörü	22

3.3.4. Sezgisel bulanık küme Melez birleştirme operatörü.....	22
3.3.5. Dombi birleştirme operatörü	23
3.3.6. Öncelikli birleştirme operatörü	24
3.3.7. Q-rung bulanık küme yansız birleştirme operatörü	24
3.3.8. Kuvvet birleştirme operatörü.....	26
3.3.9. Dual Muirhed Mean operatör	27
4. FERMATEAN BULANIK DOMBİ OPERATÖLER.....	28
4.1. Fermatean bulanık Dombi aritmetik birleştirme operatörü	30
4.2. Fermatean bulanık Dombi sıralı aritmetik birleştirme operatörü.....	32
4.3. Fermatean bulanık Dombi melez aritmetik birleştirme operatörü.....	33
4.4. Fermatean bulanık Dombi geometrik birleştirme operatörü	35
4.5. Operatörlerin bazı özellikleri.....	39
4.6. Fermatean bulanık kümeler için modifiye uzaklık metodu	42
4.7. Fermatean Dombi bulanık operatörlerin Fermatean bulanık TOPSIS ile çoklu kriter karar verme yöntemlerine uygulamaları.....	45
4.7.1. Problem tanımı 1	47
4.7.1.1. Karşılaştırma analizleri ile deney sonuçları	48
4.7.2. Problem tanımı 2	51
4.7.2.1. Karşılaştırma analizleri ile deney sonuçları	52
5. Q-RUNG ORTHOPAİR BULANIK ÖNCELİKLİ DOMBİ BİRLEŞTİRME OPERATÖRLERİ.....	57
5.1. Q-rung orthopair bulanık öncelikli Dombi ağırlıklandırılmış aritmetik birleştirme operatörü.....	58
5.2. q-rung orthopair bulanık öncelikli Dombi ağırlıklandırılmış geometrik birleştirme operatörü	63
5.2.1. Önerilen birleştirme operatörleri ile çoklu nitelikli karar verme metodu için MULTIMOORA metodu.....	65
5.2.2. Problem tanımı	69
5.2.2.1. Pisagor bulanık sayıları için MULTIMOORA karar verme süreci	69
5.2.2.2. Pisagor bulanık sayıları için MULTIMOORA karar verme sürecinde k ve q parametrelerinin etkisi.....	72

5.2.2.3. <i>Q</i> -rung bulanık sayıları için MULTIMOORA karar verme sürecinde <i>k</i> ve <i>q</i> parametrelerinin etkisi.....	75
5.2.2.4. Geçerlilik testi	78
5.2.2.5. Diğer yöntemlerle karşılaştırma analizi.....	79
6. YANSIZ KUVVET OPERATÖRLERİ.....	81
6.1. Çoklu nitelikli grup karar verme yaklaşımı için <i>Q</i> -rung bulanık kümelerle dayalı yansız karar verme operatörü	82
6.2. <i>Q</i> -rung bulanık kümeler için önerilen yeni bir skor fonksiyonu.....	86
6.3. Önerilen operatörün uygulanması.....	88
6.3.1. Önerilen operatörün uygulanması.....	90
6.3.2. Geçerlilik testleri	95
6.3.3. Karşılaştırma analizleri	97
7. ÖNCELİKLİ DUAL MUIRHEAD MEAN OPERATOR	101
7.1. Önerilen metodun uygulanması.....	103
7.2. Problem tanımı	105
8. T-KÜRESEL BULANIK KÜMELERDE DOMBİ KUVVET OPERATÖRLERİN KULLANILMASI	109
8.1. Çoklu kriter karar verme problemleri için T-küresel bulanık kümeler ortamında Dombi kuvvet operatörleri	109
8.2. Önerilen operatörün uygulanması.....	114
8.3. Karşılaştırma ve parametre analizleri	117
9. SONUÇLAR	120
KAYNAKÇA.....	123
ÖZGEÇMİŞ	

TABLÖLER DİZİNİ

Sayfa

Tablo 1.1. Örnek karar matrisi	1
Tablo 2.1. MULTIMOORA yaklaşımı için farklı bulanık ortamlardaki literatür taraması	6
Tablo 2.2. TOPSIS yaklaşımı için farklı bulanık ortamlardaki literatür taraması	8
Tablo 4.1. Fermatean bulanık karar matrisi	48
Tablo 4.2. Normalize edilmiş Fermatean bulanık karar matrisi.....	48
Tablo 4.3. Var olan birleştirme operatörleri ve Dombi.....	50
Tablo 4.4. Dombi operatörlerin farklı metotlar ile karşılaştırılması	50
Tablo 4.5. İkinci problem için Fermatean bulanık karar matrisi.....	51
Tablo 4.6. İkinci problem için normalize edilmiş Fermatean bulanık karar matrisi.....	52
Tablo 4.7. Var olan birleştirme operatörleri ve Dombi.....	54
Tablo 4.8. Farklı metotların karşılaştırılması	55
Tablo 5.1. PFN için karar matrisi.....	69
Tablo 5.2. Baskınlık teorisine göre MULTIMOORA sonuçları	71
Tablo 5.3. Pisagor bulanık karar matrisinin referans noktası yaklaşımı sıralamaları.....	72
Tablo 5.4. Pisagor Bulanık karar matrisi için MULTIMOORA q-ROF üzerinde farklı parametrelerin etkisi	73
Tablo 5.5. q-ROFNs karar matrisi.....	75
Tablo 5.6. q-ROFN bulanık karar matrisinin referans noktası yaklaşımı sıralamaları.....	75
Tablo 5.7. Baskınlık teorisine göre MULTIMOORA sonuçları (Q- ROFN)	76
Tablo 5.8. Önerilen yöntem üzerinde k ve q parametresinin etkisi	76
Tablo 5.9. Pisagor karar matrisine göre diğer çalışmalarla karşılaştırma sonuçları	79
Tablo 5.10. q-ROFN karar matrisine göre diğer çalışmalarla karşılaştırma sonuçları.....	80
Tablo 6.1. Var olan bazı skor fonksiyonlarının karşılaştırılması	87
Tablo 6.2. D1 uzmanının karar matrisi	91
Tablo 6.3. D2 uzmanının karar matrisi	91
Tablo 6.4. D3 uzmanının karar matrisi	91
Tablo 6.5. Birleştirilmiş karar matrisi	93

Tablo 6.6. Farklı q değerleri için sıralama sonuçları	94
Tablo 6.7. Örnek-1 için karşılaştırmalı sıralamalar	95
Tablo 6.8. Örnek-2 için karşılaştırmalı sıralamalar	97
Tablo 6.9. Örnek-3 için karşılaştırmalı sıralamalar	98
Tablo 7.1. İlişki tabanlı bazı birleştirme operatörleri.....	102
Tablo 7.2. Karar verici-1 tarafından oluşturulan karar matrisi (R_1).....	105
Tablo 7.3. Karar verici-2 tarafından oluşturulan karar matrisi (R_2).....	105
Tablo 7.4. Karar verici-3 tarafından oluşturulan karar matrisi (R_3).....	105
Tablo 7.5. Birleştirilmiş q -ROF karar matrisi.....	106
Tablo 7.6. IV q -ROFPDMM operatörü üzerinde farklı parametre vektörleri ile sıralama sonuçları	107
Tablo 8.1. Z1 istasyonundan alınan hava kalitesi verisi	114
Tablo 8.2. Z2 istasyonundan alınan hava kalitesi verisi	114
Tablo 8.3. Z3 istasyonundan alınan hava kalitesi verisi	114
Tablo 8.4. Birleştirilmiş karar matrisi	116
Tablo 8.5. Diğer birleştirme operatörleri ile karşılaştırma sonuçları	117

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 3.1. q-rung bulanık kümelerin karşılaştırılması.....	14
Şekil 3.2. MULTIMOORA'nın genel yapısı (Brauers & Zavadskas, 2012).....	19
Şekil 3.3. PS fonksiyonun etkisi.....	25
Şekil 4.1. FFDWA (a) ve FFDWG (b) farklı beta parametreleri ile birleştirme sonuçları	49
Şekil 4.2. FFDOWA (a) ve FFDOWG (b) farklı beta parametreleri ile birleştirme sonuçları	49
Şekil 4.3. FFDHWA (a) ve FFDHWG (b) farklı beta parametreleri ile birleştirme sonuçları	49
Şekil 4.4. FFDWA (a) ve FFDWG (b) farklı beta parametreleri ile birleştirme sonuçları	53
Şekil 4.5. FFDOWA (a) ve FFDOWG (b) farklı beta parametreleri ile birleştirme sonuçları	53
Şekil 4.6. FFDHWA (a) ve FFDHWG (b) farklı beta parametreleri ile birleştirme sonuçları	53
Şekil 5.1. MULTIMOORA metot yapısı	66
Şekil 8.1. T-SFPDWA operatörünün β parametresine göre sonuçları	118
Şekil 8.2. T-SFPDWG operatörünün β parametresine göre sonuçları	119

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

MCDM	: Multi-Criteria Decision Making (Çoklu-kriter karar verme)
MADM	: Multi-Attribute Decision Making (Çoklu-nitelikli karar verme)
MAGDM	: Multi-Attribute Group Decision Making (Çoklu-nitelikli grup karar verme)
μ	: Membership degree (Üye olma derecesi)
ν	: Non-membership degree (Üye olmama derecesi)
π	: Hesitant degree (Tereddütlük derecesi)
β	: Dombi parametresi
IFS	: Intuitionistic Fuzzy Set (Sezgisel bulanık küme)
PFS	: Pythagorean Fuzzy Set (Pisagor bulanık küme)
q-ROFS	: q-rung orthopair fuzzy set (q. dereceden bulanık küme)
IVq-ROFS	: Interval q-rung orthopair fuzzy set (Aralıklı q. Dereceden bulanık küme)
TOPSIS	: Technique For Order Preference By Similarity To An Ideal Solution (İdeal Çözüme Benzerlik ile Sıra Tercihi Tekniği)
MULTIMOORA	: Multi-Objective Optimization by Ratio Analysis (Oran Analizine Göre Çok Amaçlı Optimizasyon)
Mabac	: Multi-Attributive Border Approximation area Comparison (Çok Nitelikli Sınır Yaklaşım alanı Karşılaştırması)
AO	: Aggregation operator (Birleştirme operatörü)
MSM	: Maclaurin Symmetric mean

	(Maclaurin simetrik ortalama)
BM	: Bonferroni mean (Bonferroni ortalama)
MM	: Muirhead mean (Muirhead mean)
T-norm	: Triangular norm (Üçgensel norm)
SWARA	: (Adım-Wise Weight Assessment Ratio Analysis) Adım Adım Ağırlık Değerlendirme Oran Analizi
AHP	: Analytic Hierarchy Process (Analitik Hiyerarşi Proses)
T-SFS	: T- Spherical Fuzzy Set (T-Küresel Bulanık Kümeler)
FFWG	: Fermatean Fuzzy Weighted Geometric (Fermatean bulanık ağırlıklı geometrik)
FFWA	: Fermatean Fuzzy Weighted Arithmetic (Fermatean bulanık ağırlıklı aritmetik)
IFOWA	: Intuitionistic Fuzzy Ordered Weighted Aggregation (Sezgisel bulanık düzenli ağırlıklı birleştirme)
IFHWA	: Intuitionistic Fuzzy Hybrid Weighted Aggregation (Sezgisel bulanık hibrit ağırlıklı birleştirme)
MCS	: Membership coefficient sum (üyelik katsayı toplamı)
NCS	: Non-membership coefficient sum (üye olmama katsayı toplamı)
q-ROFWNA	: q-rung orthopair fuzzy weighted neutraliry average (q. dereceden bulanık ağırlıklı yansızlık ortalaması)
PAO	: Power aggregation operator (Kuvvet birleştirme operatörü)
WPO	: Weighted power aggregation (Ağırlıklı kuvvet birleştirme)
DMM	: Dual Muirhead Mean

	(Dual Muirhead ortalaması)
FFWA	: Fermatean Fuzzy Weighted Arithmetic (Fermatean bulanık ağırlıklı aritmetik)
FFWG	: Fermatean Fuzzy Weighted Geometric (Fermatean bulanık ağırlıklı geometrik)
FFDWA	: Fermatean Fuzzy Dombi Weighted Arithmetic (Fermatean bulanık Dombi ağırlıklı aritmetik)
FFDOWA	: Fermatean Fuzzy Dombi Ordered Weighted Arithmetic (Fermatean bulanık Dombi sıralı ağırlıklı aritmetik)
FFDHWa	: Fermatean Fuzzy Dombi Hybrid Weighted Arithmetic (Fermatean bulanık Dombi hibrit ağırlıklı aritmetik)
FFDWG	: Fermatean Fuzzy Dombi Weighted Geometric (Fermatean bulanık Dombi ağırlıklı geometrik)
FFDOWG	: Fermatean Fuzzy Dombi Ordered Weighted Geometric (Fermatean bulanık Dombi sıralı ağırlıklı geometrik)
FFDHWG	: Fermatean Fuzzy Dombi Hybrid Weighted Geometric (Fermatean bulanık Dombi hibrit ağırlıklı geometrik)
IVIF	: Interval intuitionistic fuzzy (Aralıklı sezgisel bulanık)
IVIP	: Interval pythagorean fuzzy (Aralıklı pisagor bulanık)
q-ROFPDA	: q-rung orthopair fuzzy prioritized Dombi arithmetic (q.dereceden bulanık öncelikli Dombi aritmetik)
q-ROFPDWA	: q-rung orthopair fuzzy prioritized Dombi weighted arithmetic (q.dereceden bulanık öncelikli Dombi ağırlıklı aritmetik)
q-ROFPDG	: q-rung orthopair fuzzy prioritized Dombi geometric (q.dereceden bulanık öncelikli Dombi geometrik)
q-ROFPDWG	: q-rung orthopair fuzzy prioritized Dombi weighted geometric (q.dereceden bulanık öncelikli Dombi ağırlıklı geometrik)
q-ROB	: q-rung orthopair bulanık
q-ROFN	: q-rung orthopair fuzzy number (q. dereceden bulanık sayı)
IFPWA	: Intuitionistic fuzzy prioritized weighted average

	(Sezgisel bulanık öncelikli ağırlıklı ortalama)
IFPWG	: Intuitionistic fuzzy prioritized weighted geometric (Sezgisel bulanık öncelikli ağırlıklı ortalama)
ITFPWA	: Intuitionistic trapezoidal fuzzy proritized weighted average (Sezgisel yamuk bulanık öncelikli ağırlıklı ortalama)
ITFPWG	: Intuitionistic trapezoidal fuzzy proritized weighted geometric (Sezgisel yamuk bulanık öncelikli ağırlıklı geometrik)
PFHPWA	: Pythagorean fuzzy Hamacher prioritized weighted average (Pisagor bulanık Hamacher öncelikli ağırlıklı ortalama)
PFHPWG	: Pythagorean fuzzy Hamacher prioritized weighted geometric (Pisagor bulanık Hamacher öncelikli ağırlıklı geometrik)
PFWA	: Pythagorean fuzzy weighted average (Pisagor bulanık ağırlıklı ortalama)
PFWG	: Pythagorean fuzzy weighted geometric (Pisagor bulanık ağırlıklı geometrik)
SPFWA	: Symmetric Pythagorean fuzzy weighted average (Simetrik pisagor bulanık ağırlıklı ortalama)
SPFWG	: Symmetric Pythagorean fuzzy weighted geometric (Simetrik pisagor bulanık ağırlıklı geometrik)
NA	: Neutrality aggregation (Yansız birleştirme)
PA	: Power aggregation (Kuvvet operatörü)
PNA	: Power Neutrality arithmetic (Kuvvet yansız aritmetik)
PNG	: Power Neutrality geometric (Kuvvet yansız geometrik)
PS	: Probabilistic sum (Olasılıksal toplam)
q-ROFWPNA	: q-rung orthopair fuzzy weighted power neutrality averaging (q. dereceden bulanık ağırlıklı kuvvet yansız ortalama)
q-ROFWPNG	: q-rung orthopair fuzzy weighted power neutrality geometric (q. dereceden bulanık ağırlıklı kuvvet yansız geometrik)

IFWAH	: Intuitionistic fuzzy weighted Archimedian Hamacher (Sezgisel bulanık ağırlıklı Arşimedian Hamacher)
q -ROFWNA	: q-rung orthopair fuzzy weighted neutrality aggregation (q. dereceden bulanık ağırlıklı yansızlık birleştirmesi)
q -ROFOWNA	: q-rung orthopair fuzzy ordered weighted neutrality aggregation (q. dereceden bulanık sıralı ağırlıklı yansızlık birleştirmesi)
q -ROFHWNA	: q-rung orthopair fuzzy hybrid weighted neutrality aggregation (q. dereceden bulanık hibrit ağırlıklı yansızlık birleştirmesi)
PDMM	: Power dual Muirhead mean (Kuvvet dual Muirhead ortalama)
T-SFPDWA	: T-spherical fuzzy power Dombi weighted arithmetic (t. dereceden bulanık kuvvet Dombi ağırlıklı aritmetik)
T-SFPDWG	: T-spherical fuzzy power Dombi weighted geometric (t. dereceden bulanık kuvvet Dombi ağırlıklı geometrik)
T-SFN	: T-spherical fuzzy number (t. dereceden bulanık sayı)
PFWA	: Picture fuzzy weighted aggregation (Resim bulanık ağırlıklı birleştirme)
SGWA	: Spherical geometric weighted aggregation (Küresel geometrik ağırlıklı birleştirme)
PFBM	: Picture fuzzy Bonferroni mean (Resim bulanık Bonferroni ortalama)
WT-SPFPMM	: Weighted T- spherical fuzzy power Muirhead mean (Ağırlıklı T-küresel bulanık kuvvet Muirhead ortalama)
WT-SPFPDMM	: Weighted T- spherical fuzzy power dual Muirhead mean (Ağırlıklı T-küresel bulanık kuvvet dual Muirhead ortalama)

1. GİRİŞ

Çoklu kriter karar verme (MCDM) problemleri, sınırlı kriterler ve alternatifler arasından en uygun alternatifi kullanıcıya sunmak için kullanılan bir sistemdir (Triantaphyllou, 2000). MCDM problemlerinde tek bir uzmandan ziyade, bir problemin birden fazla uzman tarafından da ele alınması mümkündür. MCDM’de bir problemin ele alınması için öncelikle problem ile ilgili uzman kişi veya kişiler tarafından bir karar matrisi oluşturulur. Oluşturulan her bir karar matrisi kendi içerisinde kriterlere sahiptir. Kriterlerin ağırlıkları uzmanlar tarafından belirlenebildiği gibi aynı zamanda belli kısıtlar altında, kısıtlı optimizasyon yöntemleri ile de elde edilebilir (Athanas & Papalambros, 1996). MCDM problemleri günlük yaşamımızda da karşılaştığımız bazı durumlara örnek gösterilebilir. Örneğin, bir araba almak istiyorsunuz ve aklınızda dört farklı araba modeli olsun. Araba modellerinin X, Y, Z ve T olarak verildiğini varsayalım. Diğer yandan bu dört araba için ortak olan bazı kriterlerden bahsedelim. Araba almak isteyen bir kişinin, düşündüğü bazı kriterleri yazalım. Maliyet, kalite, büyüklük, güvence gibi kriterler bir arabayı satın almak için genellikle göz önünde bulunduracağımız kriterler arasında yer almaktadır. Amaç, uzmanları veya karar vericilerin oluşturduğu karar matrisleri ile en ideal arabayı seçmektir. MCDM yöntemleri bu kısımda devreye girmektedir. Tablo 1.1’de örnek bir karar matrisi verilmiştir.

Tablo 1.1. Örnek karar matrisi

Alternatifler	Kriterler			
	Maliyet	Kalite	Büyüklik	Güvence
X	0.1	0.1	0.5	0.2
Y	0.2	0.8	0.2	0.6
Z	0.5	0.3	0.1	0.4
T	0.3	0.4	0.9	0.8

Yukarıdaki karar matrisi uzmanlar/ karar vericiler tarafından oluşturulmaktadır. Satırlarda alternatifler, sütunlarda ise kriterler bulunmaktadır. Karar matrisinde, her bir araba modelinin her bir kriteri için verilen puanın 0 ile 1 arasında olduğunu varsayalım. 0 ile 1 arasındaki sayılarda, 0 en önemsiz 1 ise en önemli anlamına gelmektedir. Örnek vermek gerekirse, bu karar verici de X modelindeki arabanın maliyeti için 0.1 değerini vermiş olsun. Bu durumda X arabası için maliyetin çok önemli olmadığını, ya da düşük olduğunu söyleyebiliriz. Fakat bu matris uzmanlar tarafından oluşturulmak istenirse,

güvenlik faktörlerinin puanlarının daha yüksek olması beklenebilir. Dolayısıyla, karar matrisleri oluşturulurken, karar vericilerin ve uzmanların görüşleri farklılık gösterebilir.

MCDM yöntemlerinde kişilerin görüşleri büyük önem arz etmektedir. Bu yüzden, kişisel görüşlerden elde edilen verilerde eksik ve açık olmayan veriler problemin çözülmesini zorlaştırmaktadır. Bu problemten dolayı, MCDM problemlerinde bulanık kümeler kullanılmıştır (Kahraman, C., 2008). Bulanık kümeler 1965 yılında ünlü matematikçi Lotfi A. Zadeh tarafından önerilmiştir (Zadeh, 1965). Bulanık kümeler belirsiz ve yanlış verilerin incelenmesinde büyük rol oynamaktadır. Aristo mantığında düşünülen 0 veya 1 durumu, bulanık kümelerde ise 0 ile 1 arasındaki bütün değerler alabilmektedir. Her bulanık kümenin bir üyelik derecesi (μ) bulunur. Üyelik derecesi 0 ile 1 arasında değişmektedir. Ancak bulanık kümeler düşünüldüğünde üye olma derecesinin yanı sıra üye olmama derecesinin de tanımlanması gerektiği, böylece MCDM problemlerinde, uzmanların görüşleri alındığı takdirde, belirsiz verilerin daha net ifade edildiği sonucuna varıldı (T.Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, 1986). Bu tip kümelere sezgisel bulanık kümeler (IFS) denir. Sezgisel bulanık kümelerde üye olma derecesi (μ) üye olmama derecesi (ν) ve tereddütlik derecesi (π) bulunur. Üye olma derecesi, üye olmama derecesi ve tereddütlik derecelerinin toplamı 1'dir. IFS, MCDM problemlerinde başarılı bir şekilde uygulanabilmektedir (Liu & Wang, 2007). Ancak dikkatlice bakıldığında IFS'lerin dar bir kapsamda tanımlandığı görülebilir. IFS'lerde μ ve ν değerleri aynı anda en fazla 0.5 değerlerini alabilirler. Ancak, uzmanlar tarafından özniteliklere verilen oylar bu değeri aşabilir. Bu durumu çözebilmek için, Pisagor bulanık kümeleri (PFS) önerildi (Yager, R. R., 2013a). PFS'lerde $\mu^2 + \nu^2 \leq 1$ olarak daha geniş bir kümeyi kapsamaktadır. Böylece $\mu = 0.6$ ve $\nu = 0.5$ seçildiği takdirde, IFS'ler sonuç vermezken, PFS'ler sonuç üretebilir. PFS'lerin de daha geniş bir uzayı kapsamaması sebebiyle MCDM problemlerinde uygulaması yapılmıştır (Yager, R. R., 2013b). IFS'ler ve PFS'ler dikkate alındığında, en genel bulanık sezgisel uzayı temsil etmesi açısından 2016 yılında q-rung orthopair bulanık kümeler (q-ROFS) önerilmiştir. Böylece μ ve ν değerlerinin 1'e çok yakın sayılar seçilebilmesi olanaklı hale gelmiştir. q-ROFS'lerde $\mu^q + \nu^q \leq 1$ uzayı geçerlidir. Dolayısıyla, uzmanlar/karar vericiler karar matrislerini oluştururken $\mu = 0.9$ ve $\nu = 0.8$ değerlerini rahatlıkla seçebilirler. Bu değerlerin q=5 için 1'den küçük sonuçlar verdiği görülebilir. Yukarıda değinilen bütün bulanık küme çeşitleri

göz önüne alındığında, MCDM problemlerinin çözümünde, geliştirilmiş bulanık kümelerin kullanılabilirliği görülmektedir.

MCDM problemlerinin çözüm yöntemlerini araştırmak gerekirse, iki ayrı yöntemle incelemek mümkündür. İlki geleneksel yöntemlerdir. Bu yöntemlerden bazıları TOPSIS (Technique For Order Preference By Similarity To An Ideal Solution) (Behzadian, Otaghsara, Yazdani, & Ignatius, 2012), MULTIMOORA (Multi-Objective Optimization by Ratio Analysis) (Brauers, W. K.; Zavadskas, E. K., 2009), Promethee (Brans, Vincke, & Mareschal, 1986), Mabac (Multi-Attributive Border Approximation area Comparison) (Pamućar & Ćirović, 2015) metotlarıdır. Bu tip metotlarda genellikle alternatif tabanlı işlemler yapılmaktadır. Dolayısıyla direk bir sıralama sonucu bulunmamaktadır. Sıralama sonuçları her bir yöntemin kendi metotları uygulanarak birtakım işlemler sonucunda elde edilmektedir. Diğer çözüm yöntemi ise birleştirme operatörleridir. Birleştirme operatörlerinde (AO) ise yapıları itibarıyla genelde kriterler arasındaki ilişkiler yardımıyla sıralama elde edilir. Ancak bütün AO'leri direkt bir sıralama elde edebilmektedir. Birleştirme operatörlerinde bazıları şunlardır: Maclaurin symmetric mean (MSM) (Qin, J.; Liu, X., 2014), Bonferroni mean (BM) (Xu, Z.; Yager, R. R., 2010), Muirhead mean (MM) (Liu, P.; Li, D., 2017) operatörleridir. Bahsedilen birleştirme operatörleri, IFS ortamında tanımlanmış operatörlerdir.

Birleştirme operatörleri arasında iki farklı operatör ailesinden bahsetmek mümkündür. Bunlar öncelik operatörlerine ve T-norm operatörlerine dayalı birleştirme operatörleridir. Seviye temelli operatörler: sıralı birleştirici operatörde girdi verileri azalan sırada alınır ve kriterlerin ağırlıkları ile birleştirme işlemi yapılır (Yager, 1988). Diğer bir seviye temelli yöntem, güven seviyeli birleştirici operatörlerdir (Garg, H., 2017a). Son olarak öncelikli operatör de bu yöntemler arasında gösterilebilir (Yager, R. R., 2008). Diğer yandan esnek parametresi sayesinde birçok T-norm yapısı da birleştirici operatör olarak kullanılmaktadır. Bunların arasında, Dombi (Akram, Dudek, & Dar, 2019), Einstein (Garg, H., 2017b), Archimedean (Xia, Xu, & Zhu, 2012) gibi T-norm yapıları önde gelen birleştirici operatörlerdendir.

Şimdiye kadar MCDM yöntemlerinde önerilen temel metotlar göz önüne alınmıştır. Ancak her bir birleştirici metodun birbirleriyle melez edilmesi ve farklı bulanık küme ortamlarında kullanılması ile geleneksel MCDM yöntemlerinde uygulanması üzerine yaklaşımlar sunulmuştur. Tezin kalan kısmı şu şekilde organize edilmiştir. 2.

Bölümde, tezde önerilen yöntemlerin ayrıntılı bir literatür analizi yapılmıştır. 3. Bölümde önerilen yöntemler için temel bilgilere yer verilmiştir. 4. Bölümde, önerilen ilk yöntem olan Fermatean bulanık kümeler anlatılmıştır. 5. Bölümde, sunulan diğer bir yöntem olarak, q-rung orthopair bulanık öncelikli Dombi birleştirme operatörlerine değinilmiştir. 6. bölümde yansız kuvvet operatörleri ve literatürde yer alan diğer çalışmalar ile karşılaştırılması verildi. 7. Bölümde, öncelikli dual Muirhead mean operatör tanıtıldı ve bir uygulama üzerinde sonuçları yorumlandı. Son olarak 8. Bölümde ise T-küresel bulanık kümelerde kuvvet Dombi operatörler kullanılmış ve literatürde yer alan bazı çalışmalar ile karşılaştırılmıştır.



2. İLGİLİ ÇALIŞMALAR

Klasik bulanık kümeler yalnızca üyelik derecesi ile temsil edilirken, IFS'ler üyelik derecesi ve üye olmama derecesi olmak üzere iki değerle temsil edilir. IFS'ler, örüntü tanıma, tıbbi tanı, görüntü segmentasyonu, bulanık zaman serisi tahmini gibi birçok alanda etkili bir şekilde kullanılmıştır (Joshi & Kumar, 2012; Melo-Pinto, 2013; De, Biswas, & Roy, 2001; Vlachos & Sergiadis, 2007). IFS'lerde üyelik derecesi ve üyelik dışı derecenin toplamı birim aralığında tanımlanır. Benzer şekilde, her derece $[0,1]$ aralığındadır. Üye ve üye olmama derecelerinin toplamı 1'den büyük olduğunda, IFS'yi tanımlayamamaktayız. Örneğin, her iki üyelik derecesi 0,5'ten büyükse, IFS sağlanmaz. IFS konseptini genelleştirmek için, PFS Yager tarafından tanımlanmıştır (Yager, R. R., 2013a). PFS'de üye ve üye olmama dereceleri $[0,1]$ aralığındadır. Ancak, üyelik derecelerinin karelerinin toplamı, birim kapalı aralığında değişir. Bu durumda PFS, IFS'lerden daha genel bulanık kümelerdir. O zaman, PFS 'nin gerçek dünya problemlerini çözmede IFS 'den daha fazla avantaj sunduğunu söyleyebiliriz. Örneğin, örüntü tanıma, tedarikçi seçimi, endüstriyel kazalarda erken uyarı sistemi, tavsiye sistemlerinde PFS kullanılmıştır (Hatzimichailidis, Papakostas, & Kaburlasos, 2012; Li, Z.; Wei, G.; Lu, M., 2018; Reformat & Yager, 2014; Zheng, Chen, Xue, & Xue, 2017).

PFS, IFS'den daha genel bir yapıya sahiptir. Bu durum bir örnek ile gösterilebilir. Üye olma derecesinin 0.8 ve üye olmama derecesinin de 0.7 olduğunu varsayalım. IFS için, $0.8 + 0.7 > 1$ olduğu için toplamın birim aralığında olma koşulu sağlanmamıştır. Benzer şekilde, PFS için $0.8^2 + 0.7^2 > 1$. IFS ve PFS için üye olma ve üyelik olmama derecelerinin toplamı birim aralığının dışında olduğu görülmektedir. Bu nedenle, daha genel bir bulanık kümenin tanımlanmasının problemlerin çözümünde etkili olacağı düşünülmektedir. Bunun üzerinde Senapati ve Yager, Fermatean bulanık kümeyi (FFS) önermişlerdir (Senapati, T.; Yager, R. R., 2020). FFS, bulanık kümeler için daha genel bir bakış açısı sağlar. FFS'de, üye olma ve üye olmama derecelerinin küpleri toplamı birim aralıktadır. Örneğin, FFS'de $0.8^3 + 0.7^3 < 1$ koşulu sağlanmıştır.

Tez kapsamında iki geleneksel MCDM çözüm yöntemi üzerinde durulmuştur. İlki MULTIMOORA yöntemidir. MULTIMOORA üç aşamadan oluşan bir MCDM yöntemidir. Bunlar referans noktası, oran sistemi ve tam çarpımsal formdur. Her yöntem sıralama sonucunu kendi yöntemiyle edinir. Ardından üç sıralama sonucu da dominant teoriye göre birleştirilir (Brauers & Zavadskas, 2012). MULTIMOORA yöntemi birçok

farklı bulanık ortamda uygulanmaktadır. Tablo-2.1’de MULTIMOORA metodunun, kullanıldığı yerler ve uygulandığı alanlar verilmiştir. İlk olarak, belirsiz ve eksik verilerin ele alınmasında etkili rol oynayan, bulanık MULTIMOORA yaklaşımı önerildi (Baležentis, Baležentis, & Brauers, 2012). Diğer yandan üye olma değerlerinin birden fazla ifade edilebilmesi (Torra, 2010) ile tereddütlü bulanık kümelerde MULTIMOORA yöntemi ortaya çıkmıştır (Li Z. H., 2014). Bulanık kümeler genişledikçe, MULTIMOORA daha genel bir yapıya izin verir. Bu genişlemelere MULTIMOORA’nın nütrofik uzantısı nütrosofik kümeler için etkili bir MULTIMOORA yöntemi (Stanujkic, Zavadskas, Smarandache, Brauers, & Karabasevic, 2017), MULTIMOORA metodunun bipolar bulanık kümeler (Stanujkic, Karabasevic, Zavadskas, Smarandache, & Brauers, 2019) ve küresel bulanık kümeler için genelleştirilmesi (Kutlu Gündoğdu, F., 2020) örnek olarak verilebilir.

Tablo 2.1. MULTIMOORA yaklaşımı için farklı bulanık ortamlardaki literatür taraması

Referans	Yaklaşım	Uygulama
(Baležentis, Baležentis, & Brauers, 2012)	Bulanık MULTIMOORA metot	Personel seçim problemi
(Baležentis, T.; Zeng, S., 2013)	Aralıklı bulanık sayılarla MULTIMOORA metot	İnsan kaynakları yönetimi ve personel yönetimi
(Shouzen, Baležentis, & Weihua, 2013)	Tereddütlü bulanık sayılarla MULTIMOORA metot.	MCDM problemleri için örnek analizi
(Baležentis, Zeng, & Baležentis, 2014)	Sezgisel bulanık sayılarla MULTIMOORA metot	Performans yönetimi
(Li Z. H., 2014)	Tereddütlü bulanık sayılar ve kuvvet ortalaması ile MULTIMOORA metot	Yazılım seçim problemi
(Zavadskas, Antucheviciene, Razavi Hajiagha, & Hashemi, 2015)	Aralık değerli sezgisel bulanık sayılar	Mühendislikte karar verme problemleri
(Deliktas & Ustun, 2017)	Çoklu seçim hedef programlama ve bulanık MULTIMOORA metot	Ödev metodolojisi ve öğrenci seçimi

(Zhao, You, & Liu, 2017)	Aralık değerli sezgisel bulanık kümelerde altında sürekli ağırlıklılandırılmış entropy ile MULTIMOORA metot	Hata modu ve etki analizi
(Stanujkic, Zavadskas, Smarandache, Brauers, & Karabasevic, 2017)	MULTIMOORA metodun nütrosifik genişletilmesi	Mühendislikte karar verme problemleri
(Dai, Zhong, & Qi, 2018)	Olasılık teorisi ve üçgensel bulanık MULTIMOORA metot	MCDM problemleri için örnek analizi
(Fattahi & Khalilzadeh, 2018)	Bulanık MULTIMOORA metot ve AHP metot	
(Chen, Zhao, & Liang, 2018)	Dilsel değerlendirmeler ile MULTIMOORA	MCDM problemleri için örnek analizi
(Zhang, Chen, Streimikiene, & Balezentis, 2019)	Sezgisel bulanık MULTIMOORA metot	
(Liang, Darko, Xu, & Wang, 2019a)	Dual tereddütlü bulanık mantık ortamında genişletilmiş Bonferroni mean MULTIMOORA	Yenilenebilir teknoloji enerji seçimi
(Liang, D.; Darko, A. P.; Zeng, J., 2019b)	Aralıklı değerli Pisagor bulanık kuvvet ortalaması ile MULTIMOORA metot	Açık kaynak hastane EHRs sisteminin seçim problemi
(Liang, Zhao, & Hong, 2019)	Dilse nütrosifik sayılarda Heronian mean ve SWARA metodu ile MULTIMOORA	Madencilik metot seçimi
(Stanujkic, Karabasevic, Zavadskas, Smarandache, & Brauers, 2019)	MULTIMOORA metodun bipolar bulanık küme genişlemesi	MCDM problemleri için örnek analizi
(Geetha, Narayanamoorthy, Kang, & Kureethara, 2019)	Sezgisel tereddütlü bulanık MULTIMOORA	Sağlık Hizmetlerinde Atık Bertarafının Değerlendirilmesi
(Xian, Liu, Gou, & Wan, 2020)	CIA ile Aralıklı 2-tuple Pisagor bulanık dilsel MULTIMOORA	Finansal yönetim performansı

Yukarıda MULTIMOORA metot ile ilgili verilen detaylı literatür özeti düşünülürse, MULTIMOORA yönteminin Dombi öncelikli ağırlıklı birleştirme operatörleri ile ifade edilmesi daha önceden düşünülmemiş ve MCDM problemlerinde birçok açıdan katkı sağlayabilecek bir yöntemdir.

Tez kapsamında yer verilen ikinci geleneksel yöntem ise TOPSIS yöntemidir. TOPSIS yöntemi, literatürde birçok genelleştirilmiş bulanık küme ile birlikte kullanılmıştır. Tablo-2.2 de TOPSIS yönteminin çeşitli bulanık mantık ortamlarda uygulaması verilmiştir.

Tablo 2.2. TOPSIS yaklaşımı için farklı bulanık ortamlardaki literatür taraması

Referans	Yaklaşım	Uygulama
(Boran, S., M., & Akay, 2009)	Sezgisel bulanık TOPSIS	Tedarikçi seçimi
(Kahraman, Gundogdu, Onar, & Oztaysi, 2019)	Küresel bulanık TOPSIS	Hastane yeri seçimi
(Zhang & Xu, 2014)	Pisagor bulanık TOPSIS	Mühendislik uygulaması
(Biswas, Pramanik, & Giri, 2016)	Tek değerli nütrosifik TOPSIS	En uygun tablet seçimi
(Riaz, Farid, Karaaslan, & Hashmi, 2020)	q-rung bulanık TOPSIS	Nakliye problemleri
(Park, Park, Kwun, & Tan, 2011)	Aralık değerli Sezgisel bulanık TOPSIS	Mühendislik uygulaması
(Yu, Shao, Wang, & Zhang, 2019)	Aralık değerli Pisagor bulanık TOPSIS	Sürdürülebilir tedarikçi seçimi
(Gündoğdu & Kahraman, 2019)	Aralık değerli Küresel bulanık TOPSIS	3D yazıcı seçimi

TOPSIS yöntemi, çeşitli bulanık ortamlarda uygulanmıştır. Ancak Fermatean Bulanık kümelerde uygulaması bulunmamaktadır. Ayrıca tezde önerilen çalışmada Dombi t-norm fonksiyonu da dahil edilip, TOPSIS metodu modifiye edilmiştir.

MCDM problemlerin çözümünde diğer bir yöntem birleştirme operatörleridir. Bu yöntemlerde, kriter ve/veya alternatif ilişkileri temel alınarak, karar matrisi direk olarak alternatifler üzerinde değerlendirilir. Dolayısıyla, alternatif-kriter matrisi, sadece alternatiflerden oluşan bir vektöre indirgenmiş olur. En basit anlamıyla ortama işlemi de bir birleştirme operatörü olarak düşünülebilir. Ancak MCDM alanında alternatifler ve kriterler arasındaki ilişki dikkate alınırsa, birleştirme operatörlerini operasyonel ve fonksiyon yönlü olarak ikiye ayırmak mümkündür (Liu, P.; Chen, S. M.; Wang, P., 2018b). Operasyonel işlemlere dayalı olarak oluşturulan birleştirme operatörleri T-norm ve T-conorm ailesinden oluşmaktadır. Einstein (Garg, H., 2016a), Hamacher (Tang, Fu, Xu, & Yang, 2017), Dombi (Seikh & Mandal, 2019) ve Frank (Garg, H., 2016b) gibi T-norm yapıları MCDM çözüm yöntemlerinde, birleştirme operatörleri olarak kullanılmıştır. Diğer yandan fonksiyon yönlü birleştirme operatörleri, Bonferroni mean (Xu, Z.; Yager, R. R., 2010), Maclaurin symmetric mean (Wei, G.; Lu, M., 2018), Hamy mean (Li, Wei, & Lu, 2018) ve Muirhead mean (Liu, P.; Li, D., 2017) operatörleridir. Tez kapsamında önerilen yöntemlere maddeler halinde değinilmiştir.

1. Fermatean bulanık kümeler, sezgisel ve Pisagor bulanık kümelerden daha genel bir yapı sunduğundan, karar vericiler için değerlendirme uzayı Pisagor ve sezgisel bulanık kümelere göre daha geniştir. TOPSIS metot ise MCDM problemlerinin çözümünde sıkça kullanılan geleneksel bir çözüm yöntemidir. Diğer yandan, Dombi operatörü esnek parametresi sayesinde, esnek bir birleştirme operatörü sağlamaktadır. Bu yüzden ilk çalışmada, Fermatean bulanık ortamında Dombi operatörü kullanılarak, Modifiye TOPSIS metot önerilmiştir. Önerilen yöntem, Ortalama, geometrik ve melez birleştirme operatörleri gerçek hayattaki örneklerle uygulanmıştır. Ayrıca önerilen yöntem literatürde değinilen diğer çalışmalar ile karşılaştırılmıştır.
2. Q-rung bulanık kümeler, sezgisel, Pisagor ve Fermatean bulanık kümelerin q. Dereceden genelleştirilmesinden meydana gelmektedir. Bu yüzden geniş bir değerlendirme imkânı sunmaktadır. Öncelik operatörü ise karar vericilerin ve/veya uzmanların ve kriterlerin önceliklerinin farklı olduğu bir problemin daha

geniş kapsamlı ele alınmasını sağlamaktadır. Bu yüzden, q-rung bulanık küme ortamında öncelikli Dombi operatörü önerilmiştir. Ayrıca önerilen yapı, aritmetik ve geometrik operatöre uygulanmış ve MULTIMOORA yapısı ile gerçek problemler üzerinde uygulanmıştır. Ayrıca önerilen yöntem literatürde değinilen diğer çalışmalar ile karşılaştırılmıştır.

3. Karar vericilerin subjektif davrandığı veya yanlış davrandıkları durumlar için yansızlık operatörü, olasılıksal toplama işlemi sayesinde diğer birleştirme operatörlerinden daha tutarlı sonuçlar vermektedir. Diğer yandan, kuvvet operatörü de sonuç sıralamasında kriterlerin birbirleri arasındaki ilişkileri göz önüne almaktadır. Ayrıca karar matrisi üzerinde her bir değere bir ağırlık atamaktadır. Dolayısıyla, ağırlıklar subjektiflikten uzak kriter bazlı elde edilmiş olur. Bu yüzden, q rung bulanık küme ortamında yansız kuvvet operatörü önerilmiştir. Ayrıca q-rung bulanık kümeler için q'nun farklı değerlerinde stabil özelliğini koruyan bir skor fonksiyonu geliştirilmiştir. Ayrıca önerilen yöntem literatürde değinilen diğer çalışmalar ile karşılaştırılmıştır.
4. Muirhead mean operatör, herhangi sayıdaki kriterlerin birbirleri arasındaki ilişkileri hesaba katmaktadır. Örneğin, dört kriterli bir problemde ikili, üçlü ve dörtlü kriterler halinde karşılıklı ilişkilere bakılabilir. Bu çalışmada, öncelikli Muirhead mean operatörü önerilmiştir. Böylece Muirhead mean operatörün parametre vektörü ve öncelik operatörü ile gerçek hayattaki MCDM problemlerine çözümler sunulmuştur.
5. T-küresel bulanık kümeler, üç bileşen içeren, sezgisel ve Pisagor bulanık kümelerin aksine 3 boyutlu uzay ile temsil edilen, geniş bir bulanık küme uzayıdır. Dolayısıyla bileşenleri gereği birçok bulanık kümeyi kapsamaktadır. Bu çalışmada MCDM problemleri, Dombi T-norm yapısı ile kuvvet operatörü birleştirilip, T-küresel bulanık ortamda ele alınmıştır. Ayrıca önerilen yöntem literatürde değinilen diğer çalışmalar ile karşılaştırılmıştır.

3. TEMEL BİLGİLENDİRME

Tezin bu bölümünde önerilen yöntemler için bazı temel çalışmalara yer verilmiştir.

3.1. Genelleştirilmiş Bulanık kümeler

Genelleştirilmiş bulanık kümeler, karar vericilerin veya uzmanların alternatifleri değerlendirme uzayının geniş bir şekilde ele alınmasına olanak tanımaktadır. Bir alternatif üzerinde ilgili kriterin düşünülerek değerlendirilmesi sırasında kişisel yargılar da etkili olmaktadır. Bu yüzden bir karar verme mekanizmasında, genelleştirilmiş bulanık kümeler önemli rol oynamaktadır.

Bulanık kümelerin, tereddütlük derecesine göre genelleştirilmesi sonucu farklı bulanık kümeler ortaya çıkmıştır. Bu kümelerin başında IFS gelmektedir. Tereddüt derecesi, bulanık küme yapısına dahil edilerek, açık olmayan veriler daha tutarlı ele alınmaktadır. Ardından PFS ve FFS kümeleri, IFS kümelerin tanımlı olmadığı aralıklarda tanımlanmış ve IFS kümeyle göre daha genel bir değerlendirme uzayı sunmaktadır. Nihayetinde IFS kümelerin en geneli olarak, q-ROFS, q. Dereceden geniş bir kümeyi kapsamaktadır. Diğer yandan bahsedilen bulanık kümelerde, tereddüt derecesi, üye olma ve üye olmama derecelerine bağlıyken, Picture bulanık kümesinde üç derecede bağımsız olarak seçilmektedir. Üyelik derecesi, çekimserlik derecesi ve üye olmama derecesi olarak üç kısımdan oluşur. Bu durum bir meclis içerisinde belli bir konuda görüş bildiren kişilerin, kabul etmesi, kabul etmemesi ve çekimser kalması gibi düşünülebilir. Ayrıca Picture bulanık kümelerin, t. Dereceden genelleştirilmesi ile T-küresel bulanık kümeler elde edilmektedir. Bahsedilen bulanık küme çeşitlerine aşağıda detaylı olarak yer verilmiştir.

3.1.1. Sezgisel bulanık kümeler

Tanım 3.1. (T.Atanassov, 1986) A kümesi boştan farklı bir evrensel bir küme olsun. S, sezgisel bulanık kümesi A kümesi üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$S = \{ \langle x, \mu_s(x), \nu_s(x) \rangle \mid x \in A \} \quad (1)$$

Burada $\mu : A \rightarrow [0,1]$ üye olma derecesi $0 \leq \mu_s(x) \leq 1$ ve $\nu : A \rightarrow [0,1]$ üye olmama derecesi $0 \leq \nu_s(x) \leq 1$ olarak bilinmektedir. S kümesindeki her bir $x \in A$ için $0 \leq \mu_s(x) + \nu_s(x) \leq 1$ sağlanır. Ayrıca, tereddütlük derecesi $\pi_s(x) = 1 - \mu_s(x) - \nu_s(x)$ olarak tanımlanır.

3.1.2. Pisagor bulanık kümeleri

Tanım 3.2. (Yager, R. R., 2013a) A kümesi boştan farklı bir evrensel bir küme olsun. P, Pisagor bulanık kümesi A kümesi üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P = \{ \langle x, \mu_P(x), \nu_P(x) \rangle \mid x \in A \} \quad (2)$$

Burada $\mu : A \rightarrow [0,1]$ üye alma derecesi $0 \leq \mu_P^2(x) \leq 1$ ve $\nu : A \rightarrow [0,1]$ üye olmama derecesi $0 \leq \nu_P^2(x) \leq 1$ olarak bilinmektedir. P kümesindeki her bir $x \in A$ için $0 \leq \mu_P^2(x) + \nu_P^2(x) \leq 1$ sağlanır. Ayrıca, tereddütlük derecesi $\pi_P(x) = \sqrt[2]{1 - \mu_P^2(x) - \nu_P^2(x)}$ olarak tanımlanır.

3.1.3. Fermatean bulanık kümeler

Tanım 3.3. (Senapati, T.; Yager, R. R., 2020) A kümesi boştan farklı bir evrensel bir küme olsun. F, Fermatean bulanık kümesi A kümesi üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F = \{ \langle x, \mu_F(x), \nu_F(x) \rangle \mid x \in A \} \quad (3)$$

Burada $\mu : A \rightarrow [0,1]$ üye olma derecesi $0 \leq \mu_F^3(x) \leq 1$ ve $\nu : A \rightarrow [0,1]$ üye olmama derecesi $0 \leq \nu_F^3(x) \leq 1$ olarak bilinmektedir. F kümesindeki her bir $x \in A$ için $0 \leq \mu_F^3(x) + \nu_F^3(x) \leq 1$ sağlanır. Ayrıca, tereddütlük derecesi $\pi_F(x) = \sqrt[3]{1 - \mu_F^3(x) - \nu_F^3(x)}$ olarak tanımlanır.

Diğer yandan Fermatean bulanık kümeler ile ilgili temel küme ve operasyonel işlemler aşağıda verilmiştir. Gerekli kanıt ve gösterimlerde bu işlemlerden yararlanılmaktadır.

Tanım 3.4. (Senapati, T.; Yager, R. R., 2020) $F = (\mu_F, \nu_F)$, $F_1 = (\mu_{F_1}, \nu_{F_1})$ ve $F_2 = (\mu_{F_2}, \nu_{F_2})$ FFN olsun. Aşağıdaki operasyonlar FFN üzerinde sağlanır.

- (I) $F_1 \cap F_2 = (\min\{\mu_{F_1}, \mu_{F_2}\}, \max\{\nu_{F_1}, \nu_{F_2}\})$ (Kesişim)
- (II) $F_1 \cup F_2 = (\max\{\mu_{F_1}, \mu_{F_2}\}, \min\{\nu_{F_1}, \nu_{F_2}\})$ (Birleşim)
- (III) $F^c = (\nu_F, \mu_F)$. (Tamamlayıcı)
- (IV) $F_1 \geq F_2$ gerek ve yeter şart $\mu_{F_1} \geq \mu_{F_2}$ ve $\nu_{F_1} \leq \nu_{F_2}$

Tanım 3.5 (Senapati, T.; Yager, R. R., 2020) $F = (\mu_F, \nu_F)$, $F_1 = (\mu_{F_1}, \nu_{F_1})$ ve $F_2 = (\mu_{F_2}, \nu_{F_2})$ FFN sayılar olsun. $\lambda > 0$ için aşağıdaki operasyonlar FFN üzerinde sağlanır

$$(I) \quad F_1 \boxplus F_2 = (\sqrt[3]{\mu_{F_1}^3 + \mu_{F_2}^3 - \mu_{F_1}^3 \mu_{F_2}^3}, \nu_{F_1} \cdot \nu_{F_2}); \text{ (FFN üzerinde toplama)}$$

- (II) $F_1 \boxtimes F_2 = \left(\mu_{F_1} \cdot \mu_{F_2}, \sqrt[3]{v_{F_1}^3 + v_{F_2}^3 - v_{F_1}^3 v_{F_2}^3} \right)$; (FFN üzerinde çarpma)
- (III) $\lambda \cdot F = (\sqrt[3]{1 - (1 - \mu_F^3)}, v_F^\lambda)$; (FFN üzerinde skalar ile çarpma)
- (IV) $F^\lambda = (\mu_F^\lambda, \sqrt[3]{1 - (1 - v_F^3)})$. (FFN kuvveti)

Teorem 3.1 (Senapati, T.; Yager, R. R., 2020) $F = (\mu_F, v_F)$, $F_1 = (\mu_{F_1}, v_{F_1})$ ve $F_2 = (\mu_{F_2}, v_{F_2})$ Fermatean bulanık sayıları için $\lambda > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ olacak şekilde aşağıdaki öncüller sağlanır.

- (I) $F_1 \boxplus F_2 = F_2 \boxplus F_1$;
- (II) $F_1 \boxtimes F_2 = F_2 \boxtimes F_1$;
- (III) $\lambda(F_1 \boxplus F_2) = \lambda F_1 \boxplus \lambda F_2$;
- (IV) $(\lambda_1 + \lambda_2)F = \lambda_1 F \boxplus \lambda_2 F$;
- (V) $(F_1 \boxtimes F_2)^\lambda = F_1^\lambda \boxtimes F_2^\lambda$;
- (VI) $F_1^\lambda \boxtimes F_2^\lambda = F^{(\lambda_1 + \lambda_2)}$.

3.1.4. Q-rung orthopair bulanık küme

Tanım 3.6. (Yager, R. R., 2016) A kümesi boştan farklı bir evrensel bir küme olsun. I, q-rung bulanık kümesi A kümesi üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır.

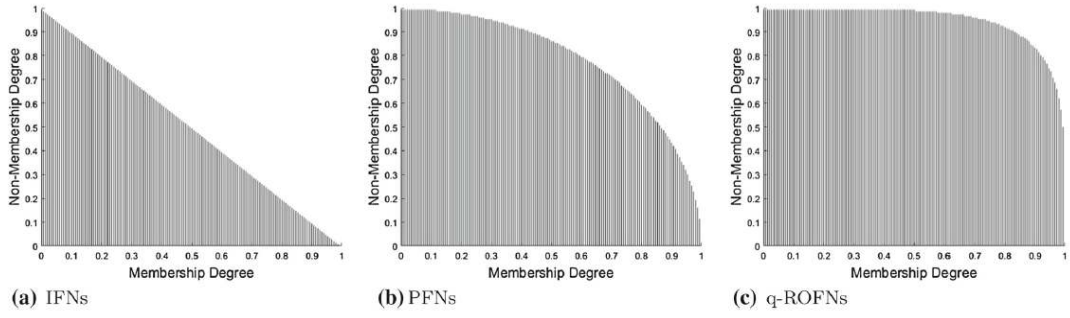
$$I = \{ \langle x, \mu_I(x), v_I(x) \rangle \mid x \in A \} \quad (4)$$

Burada $\mu : A \rightarrow [0,1]$ üye alma derecesi $0 \leq \mu_I^q(x) \leq 1$ ve $v : A \rightarrow [0,1]$ üye olmama derecesi $0 \leq v_I^q(x) \leq 1$ olarak bilinmektedir. I kümesindeki her bir $x \in A$ için $0 \leq \mu_I^q(x) + v_I^q(x) \leq 1$ sağlanır. Ayrıca, tereddütlük derecesi $\pi_I(x) = \sqrt[q]{1 - \mu_I^q(x) - v_I^q(x)}$ olarak tanımlanır.

Q-ROFS'ler için bazı durumlar aşağıda belirtilmiştir.

- q=1 için sezgisel bulanık kümeler elde edilir.
- q=2 için Pisagor bulanık kümeleri elde edilir.
- q=3 için Fermatean bulanık kümeler elde edilir.

Şekil 3.1'de sezgisel, Pisagor ve q-ROFS'ler için tanımlı oldukları alanlar verilmiştir.



Şekil 3.1. q -rung bulanık kümelerin karşılaştırılması

q değeri arttıkça, bulanık kümelerin tanımlı olduğu uzayın arttığı görülebilir. Diğer yandan q -ROFS üzerinde temel aritmetik operasyonlar aşağıdaki gibi tanımlanabilir

Tanım 3.7. (Yager, R. R., 2016) $a = (\mu, v)$, $a_1 = (\mu_1, v_1)$ ve $a_2 = (\mu_2, v_2)$ iki q -rung bulanık sayı olsun. q -rung bulanık sayılar için operasyonlar aşağıdaki gibi tanımlanır.

1. $a_1 \oplus a_2 = (\sqrt[q]{\mu_1^q + \mu_2^q - \mu_1^q \mu_2^q}, v_1 v_2)$
2. $a_1 \otimes a_2 = (\mu_1 \mu_2, \sqrt[q]{v_1^q + v_2^q - v_1^q v_2^q})$
3. $a_1 \ominus a_2 = (\sqrt[q]{\frac{\mu_1^q - \mu_2^q}{1 - \mu_2^q}}, \frac{v_1}{v_2})$, eğer $0 \leq \frac{v_1}{v_2} \leq \sqrt[q]{\frac{\mu_1^q - \mu_2^q}{1 - \mu_2^q}} \leq 1$ aksi taktirde 0.
4. $\lambda. a = (\sqrt[q]{1 - (1 - \mu^q)^\lambda}, v^\lambda)$ for $\lambda > 0$;
5. $a^\lambda = (\mu^\lambda, \sqrt[q]{1 - (1 - v^q)^\lambda})$ for $\lambda > 0$;

q -ROFS'ler için yapılacak bütün ispatlarda Tanım 3.7 kullanılmaktadır. Diğer yandan iki q -rung bulanık sayıyı karşılaştırmak için aşağıdaki tanımdan yararlanılmaktadır.

Tanım 3.8. (Wei G. G., 2018) $a = (\mu_a, v_a)$ $q > 1$ için q -rung bulanık sayı olsun. İki q -rung sayısını karşılaştırmak için kullanılan denklem aşağıdaki gibidir

$$s(a) = 1/2(1 + \mu_a^q - v_a^q) \quad s(a) \in [0,1], \quad h(a) = \mu_a^q + v_a^q \quad h(a) \in [0,1] \quad (5)$$

Eğer $s(a_1) < s(a_2)$ ise o halde $a_1 < a_2$,

Eğer $s(a_1) = s(a_2)$ ise iki durum söz konusudur.

$h(a_1) = h(a_2)$ durumunda $a_1 = a_2$ veya $h(a_1) < h(a_2)$ durumunda $a_1 < a_2$ karşılaştırması yapılır. Burada s skor fonksiyonu h ise doğruluk fonksiyonu olarak ifade edilir.

3.1.5. Aralıklı q-rung orthopair bulanık küme

Tanım 3.9. (Joshi B. P., 2018) S boştan farklı bir küme olmak üzere, aralıklı q-ROFS aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$A = \{ \langle s, ([\mu_a^L(s), \mu_a^U(s)], [v_a^L(s), v_a^U(s)]) \rangle \mid s \in S \} \quad (6)$$

Burada $[\mu_a^L(s), \mu_a^U(s)]$ ve $[v_a^L(s), v_a^U(s)]$ sırasıyla üye olma ve üye olmama derecelerinin sınırlarıdır. Ayrıca tereddütlik derecesi $[\pi_a^L, \pi_a^U] = [\sqrt[q]{1 - \mu_a^L(s)^q - v_a^L(s)^q}, \sqrt[q]{1 - \mu_a^U(s)^q - v_a^U(s)^q}]$ olarak ifade edilir. Sadelik açısından A kümesi $A = \langle [\mu^L, \mu^U], [v^L, v^U] \rangle$ olarak gösterilir. Aralıklı q-rung bulanık sayıları için skor fonksiyonları da tanımlanmaktadır.

Tanım 3.10. (Joshi B. P., 2018) $A = \langle [\mu^L, \mu^U], [v^L, v^U] \rangle$ aralık q-rung bulanık sayısı olmak üzere, skor ve doğruluk fonksiyonu,

$$s(a) = \frac{1 + (\mu^L)^q - (v^L)^q + 1 + (\mu^U)^q - (v^U)^q}{4}, \quad h(a) = \frac{(\mu^L)^q + (v^L)^q + (\mu^U)^q + (v^U)^q}{2} \quad (7)$$

olarak ifade edilir

3.1.6. T-Küresel bulanık küme

Tanım 3.11. (Mahmood, Ullah, Khan, & Jan, 2019). X herhangi bir evrensel küme olmak üzere, T-SFSs kümesi aşağıdaki formda tanımlanabilir.

$$T = \{X, s(x), i(x), d(x) \mid \forall x \in X\}$$

Burada $s, i, d: X \rightarrow [0, 1]$. s, üyelik derecesi, i, çekimsellik derecesi ve d üye olmama derecesi olarak tanımlanır. Ayrıca bazı n pozitif tam sayıları için, $0 \leq s^n(x) + i^n(x) + d^n(x) \leq 1$ eşitsizliği sağlanır. $r(x) = \sqrt[n]{1 - (s^n(x) + i^n(x) + d^n(x))}$ derecesi reddetme derecesi olarak tanımlanır. T- küresel bulanık kümeler sadelik açısından (s, i, d) üçlüsü ile gösterilir. T-küresel bulanık kümelerin özel durumları aşağıdaki gibi verilebilir.

- t=1 için resim (picture) bulanık kümeler elde edilir (Cuong & Kreinovich, 2013).
- t=2 için küresel bulanık kümeleri elde edilir (Kutlu Gündoğdu & Kahraman, 2019).

3.2. Geleneksel Çoklu Kriter Karar Verme Yöntemleri

Herhangi bir karar verme tekniğini kullanırken, alternatiflerin sayısal analizi içeren üç adım bulunur (Triantaphyllou, 2000).

1. İlgili kriterlerin ve alternatiflerin belirlenmesi,
2. Kriterlerin göreceli önemine ve alternatiflerin bu ölçütler üzerindeki etkilerine göre sayısal ölçümlerin yapılması (Karar matrisi oluşturma süreci)
3. Her bir alternatifin sırasını belirlemek için sayısal değerlerin ilgili metotlara göre işlenmesi.

MCDM problemlerinin çözümünde alternatifler ve kriterler etkili rol oynamaktadır. Kriterler arasındaki ilişkilerin belirlenmesi ise MCDM problemlerinin çözümlerini etkilemektedir.

Her bir MCDM probleminin (bireysel ve grup kararı) çözümü öncelikle karar matrisi oluşturmak ile başlamaktadır. Karar matrisleri oluşturulurken birçok farklı sayı tipi göz önünde bulundurulur. Örneğin, reel sayılar, aralıklı sayılar, bulanık sayılar gibi. Aşağıda örnek bir karar matrisi oluşturulmuştur.

	C_1	C_2	$\dots$	C_n
A_1	x_{11}^k	x_{12}^k	$\dots$	x_{1n}^k
A_2	x_{21}^k	x_{22}^k	$\dots$	x_{2n}^k
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	x_{m1}^k	x_{m2}^k	$\dots$	x_{mn}^k

Yukarıda verilen karar matrisi için alternatifler, karar vericiler (uzmanlar) ve kriterler, tanımlamak gerekirse,

K karar vericinin olduğu bir problemde, $D = \{1, 2, \dots, K\}$ karar vericilerin veya uzmanların kümesini temsil etsin. $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ karar vericilerin seçmesi gereken muhtemel alternatifler kümesi, $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ ise alternatifler arasındaki sıralamayı elde etmek için belirlenen kriter kümesi olsun. x_{ij}^k , k'nıncı karar vericinin, C_j kriteri için A_i alternatifine verilen sayısal değerlendirmedir. Bu durumda m alternatif ve n kriterin olduğu bir MCDM probleminde, k'nıncı karar vericinin, i'ninci alternatif, j'ninci kriter için verdiği sayısal değerlendirmenin karar matrisi $X^k = x_{ij}^k$ olarak temsil edilir. Burada bahsedilen sayısal değerlendirmeden kasıt, karar matrisinin farklı sayı tiplerinden oluşabilmesidir. Çoklu kriterli analiz üç tür karara odaklanmaktadır (Roszkowska, 2011). İlki, en uygun alternatifin seçilmesi, ikincisi, en iyiden en kötüye alternatiflerin tam bir sıralamasının çıkarılması ve son olarak alternatif listesinden en iyi k'nıncı alternatifin seçilmesi. Ayıca çoklu kriterli grup karar verme problemleri düşünülürse hem karar

vericilerin hem de kriterlerin ağırlıkları bulunmaktadır. Tek karar vericinin oluşturduğu karar matrislerinde ise sadece kriter ağırlıkları bulunmaktadır. Bu durumda k'nıncı karar vericinin C_j kriterine verdiği ağırlık $w_j^k \in \mathfrak{R}$ olsun. O halde k'nıncı karar verici için kriterlere verilen ağırlıklar $w_1^k + w_2^k + \dots + w_n^k = 1$ şeklinde gösterilebilir.

Tez kapsamında, geleneksel karar verme yöntemlerinden ikisi kullanılmaktadır. Bu yöntemler TOPSIS ve MULTIMOORA yöntemleridir. Geleneksel yöntemler ile önerilen birleştirme operatörlerinin melez edilmesi sonucu alternatifler arasında sıralamalar elde edilmektedir. Ardından elde edilen sıralamalar, literatürde yer alan diğer çalışmalar ile karşılaştırılmaktadır.

3.2.1. TOPSIS metot

Klasik TOPSIS yönteminde alternatiflerin derecelendirmeleri ve ağırlıklar sayısal verilerle temsil edilir ve MCDM problemi tek bir karar verici (Chen S. J., 1992) ya da grup için karar verme (Shih, Shyur, & Lee, 2007) şeklinde iki şekilde de çözülebilir. Bu kısımda bahsedilen yapı sadece tek bir karar verici olarak düşünülmüştür. Karar matrisinin oluşturulmasından, alternatifler arasında bir sıralama elde edilmesine kadar bütün adımlar sırasıyla verilmiştir.

- Adım 1: Kriterlerin ağırlıkları belirlenir ve karar matrisi oluşturulur.

$X = x_{ij}$ karar matrisi ve $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ ağırlık vektörü olsun. $\sum_{j=1}^n w_j$ olmak üzere, kriterleri fayda tipi ve maliyet tipi olarak ikiye ayırabiliriz. Fayda tipi olan kriterler, ilgili kriterin değerinin fazla olması, daha çok istenilen durum veya daha iyi olduğu anlamına gelir. Maliyet tipi olan kriter ise ilgili kriterin değerinin fazla olması daha az istenilen durum veya daha kötü olduğu anlamına gelir (Roszkowska, 2011).

- Adım 2: Normalize karar matrisi oluşturulur.

Bu adımda, ölçütler arasında karşılaştırma yapılmasını sağlayan, çeşitli nitelik boyutları boyutsuz hale getirilir. Çünkü çeşitli kriterler genellikle çeşitli birimlerde ölçülür, karar matrisindeki değerlendirmeler normalleştirilmiş bir ölçeğe dönüştürülmelidir. n_{ij} normalize edilmiş değer olmak üzere,

$$n_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ij}^2}}, n_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max_i x_{ij}} \text{ veya}$$

$$n_{ij} = \begin{cases} \frac{x_{ij} - \min_i x_{ij}}{\max_i x_{ij} - \min_i x_{ij}}, & \text{Eğer } C_i \text{ fayda tipi ise} \\ \frac{\min_i x_{ij} - x_{ij}}{\max_i x_{ij} - \min_i x_{ij}}, & \text{Eğer } C_i \text{ maliyet tipi ise} \end{cases}$$

- Adım 3: Ağırlıklandırılmış normalize karar matrisi oluşturulur.

Karar matrisinin ağırlıklandırılmış normalize edilmiş değeri v_{ij} olsun.

Ağırlıklandırılmış matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$v_{ij} = w_{ij} n_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ ve } j = 1, 2, \dots, n$$

- Adım 4: Pozitif ve negatif ideal çözümler belirlenir.

Pozitif ideal çözümler istenilen çözüm uzayına yakın olan çözüm kümesidir. Negatif ideal çözümler ise istenilen çözüm uzayından uzak olan çözümler kümesidir. Diğer yandan pozitif ideal çözüm, fayda kriterlerini maksimize ederken, maliyet kriterini minimize eder. Negatif ideal çözüm ise maliyet kriterini maksimize ederken fayda kriterini minimize eder. Pozitif ve negatif ideal çözümler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$A^+ = (v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+) = \left(\left(\max_i \mu_{ij} | j \in I \right), \left(\min_i v_{ij} | j \in J \right) \right)$$

$$A^- = (v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-) = \left(\left(\min_i \mu_{ij} | j \in I \right), \left(\max_i v_{ij} | j \in J \right) \right)$$

A^+ ve A^- kümeleri sırasıyla pozitif ve negatif ideal çözümler kümesidir. Ayrıca I fayda kriterlerini J ise maliyet kriterlerini ifade eden kümelerdir.

- Adım 5: Pozitif ve negatif ideal çözümden olan uzaklıklar hesaplanır.

Bu adımda her bir alternatifin pozitif ve negatif ideal çözümden olan uzaklıkları bulunur. Ayrıca bu adımda çeşitli uzaklık metrikleri de kullanılabilir. Aşağıda örnek olarak sadece öklidyen uzaklığı verilmiştir.

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

- Adım 6: Pozitif ideal çözümlere olan göreceli yakınlık hesaplanır.

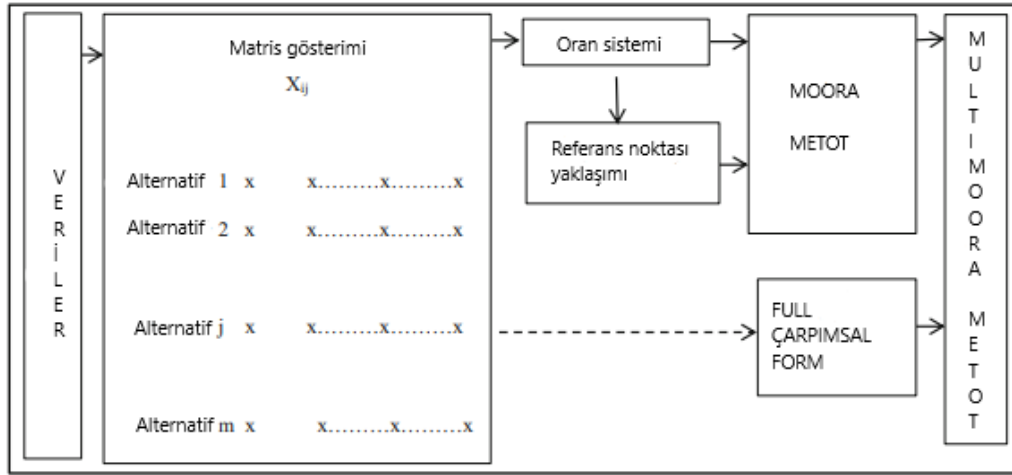
i 'ninci alternatifin A_i A^+ göre göreceli yakınlıkları aşağıdaki şekilde hesaplanır

$$R_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+} \quad 0 \leq R_i \leq 1 \text{ ve } i = 1, 2, \dots, m$$

- Adım 7: Elde edilen göreceli yakınlık değerleri büyükten küçüğe doğru sıralanıp, bir sıralama elde edilir.

3.2.2. MULTIMOORA metot

MULTIMOORA yöntemi moora yönteminde türetilmiştir. Brauers and Zavadskas 2010 yılında moora yapısına tam çarpımsal formu eklemişlerdir ve yeni yönteme Multi-MOORA ismini vermişlerdir (Brauers, W. K. M.; Zavadskas, E. K., 2010). MOORA yöntemi çok amaçlı optimizasyon yöntemlerinden biridir ve ilk olarak Brauers ve Zavadskas (Brauers W. K., 2006) tarafından önerilmiştir. Şekil-3.2’de MULTIMOORA yapısının genel görünümü verilmiştir.



Şekil 3.2. MULTIMOORA'nın genel yapısı (Brauers & Zavadskas, 2012)

MULTIMOORA yöntemini oluşturan MOORA metotları ve tam çarpımsal form aşağıda adımlar halinde verilmiştir.

MOORA metodun oran sistemi yaklaşımı

Adım 1: MOORA metodun ilk adımı problemin karar matrisinin oluşturulması ile başlar. Satırlar alternatifler, sütunlar ise kriterler olarak değerlendirilir. m alternatif ve n kriterden oluşan karar matrisi aşağıda verilmiştir.

$$X = [x_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Adım 2: Bir kriter üzerindeki alternatifin diğer alternatiflere göre performansı hesaplanır.

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ij}^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ ve } j = 1, 2, \dots, n$$

Ayrıca x_{ij}^* sayısı i'ninci alternatifin j'ninci kriter üzerindeki normalize performansıdır.

Adım 3: Fayda ve maliyet kriterlerine göre normalize performans değerleri hesaplanır ve maliyet kriterlerinin toplamı fayda kriterlerinin toplamından çıkarılır. En son elde edilen performans değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$y_i^* = \sum_{j=1}^g x_{ij}^* - \sum_{j=g+1}^n x_{ij}^*$$

Bu formülde g ve (n-g) değerleri sırasıyla maksimize ve minimize edilmesi gereken kriter sayısını vermektedir. Diğer yandan ağırlık normalize işlemi de,

$$y_i^* = \sum_{j=1}^g w_j x_{ij}^* - \sum_{j=g+1}^n w_j x_{ij}^*$$

ile hesaplanır. w_j j'ninci kriterin ağırlığıdır.

Adım 4: Alternatifler azalan sırada elde edilir. y_i^* değeri büyük olan alternatif daha çok tercih edilen alternatif olarak düşünülebilir.

MOORA metodun referans noktası yaklaşımı

Referans noktası yaklaşımı, j'ninci kriterine göre alternatifin normalleştirilmiş performansını kullanır. Normalleştirilmiş performanslar arasında bir maksimum kriter referans noktası belirlenir. Referans noktası yaklaşımı için en uygun ve en çok kullanılan metrik Tchebycheff uzaklığıdır (Brauers W. K., 2006; Brauers, W. K. M., 2008). $\min_i \{\max_j |r_j - x_{ij}^*|\}$ uzaklığı Tchebycheff uzaklığı olarak bilinmektedir. Bu formülde x_{ij}^* i'ninci alternatifin, j'ninci kriter üzerindeki performansıdır. Bütün alternatifler için en ideal performans ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$r_j = \begin{cases} \max_i x_{ij}^*, & \text{maksimize kriter için} \\ \min_i x_{ij}^*, & \text{minimize kriter için} \end{cases}$$

Kriterlerin ağırlıkları düşünüldüğünde ise $\min_i \{\max_j |w_j r_j - w_j x_{ij}^*|\}$ elde edilir.

Tam çarpımsal form yaklaşımı

Çoklu kriterin tam çarpımsal formu, tamamen çarpımsal bir fayda fonksiyonunun hem maksimizasyonu hem de minimize edilmesinden oluşur. İlk olarak Miller ve Starr (1969) tarafından önerilmiştir (Miller DW, 1969). i'ninci alternatifin genel faydası,

$$U_i = \prod_{j=1}^n x_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ ve } j = 1, 2, \dots, n \text{ ile hesaplanır.}$$

Genel performansta farklı ölçü birimlerinin çarpımı elde edilir ve boyutsuz hale gelir. Karar vericiler, minimizasyon problemini diğer kriterlerin maksimizasyonu ile birleştirmek isterse, $U_i = \frac{A_i}{B_i}$ denklemi kullanılır. Burada $A_i = \prod_{j=1}^g x_{ij}$ ve $B_i = \prod_{j=g+1}^n x_{ij}$ denklemleri kullanılır. x_{ij} 0'a eşitse, bu kriterin karar matrisinden çıkarılması gerekir (Brauers W. K., 2002). Çünkü 0 değerinin olması, karar matrisinde belirli bir kriterin olmaması anlamına gelir.

3.3. Birleştirme yöntemleri

MCDM yöntemlerinin çözümünde birleştirme operatörleri de kullanılabilir. Birleştirme, birkaç sayısal değer tek bir değerde birleştirilmesi sürecini ifade eder, böylece birleştirmenin nihai sonucu belirli bir şekilde tüm bireysel değerleri dikkate alır. Tez kapsamından ilk olarak önerilen birleştirme operatörü Fermatean bulanık küme ortamında, aritmetik, geometrik, sıralı ve melez birleştirme operatörleridir. Aritmetik ve geometrik operatörler daha önce Fermatean bulanık ortamında önerilmiştir (Senapati, T.; Yager, R. R., 2019b). Ancak sıralı ve melez operatörler Fermatean bulanık küme ortamında daha önce önerilmedikleri için aşağıdaki bölümlerde temel yapılarına değinilmiştir. İkinci çalışma ise q-rung bulanık küme ortamında Dombi ve öncelikli birleştirme operatörleri ile ilgilidir. Üçüncü çalışma, q-rung bulanık küme ortamında yansız ve kuvvet operatörü ile ilişkilidir. Son çalışma ise aralıklı q-rung bulanık küme ortamında dual Muirhead Mean operatörün kullanılması ile ilişkilidir. Bu yüzden aşağıdaki bölümlerde her bir çalışmada kullanılan birleştirme operatörleri ayrı ayrı incelenmiştir.

3.3.1. Fermatean bulanık küme aritmetik birleştirme operatörü

Tanım 3.12. (Senapati, T.; Yager, R. R., 2019b) $F_i = (\mu_{F_i}, \nu_{F_i})$ FFS olsun and $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ F_i 'nin ağırlık vektörü $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ olsun. Fermatean bulanık ağırlıklı aritmetik birleştirme operatörü: $F^n \rightarrow F$ olacak şekilde

$$FFWA(F_1, F_2, \dots, F_n) = (\sum_{i=1}^n w_i \mu_{F_i}, \sum_{i=1}^n w_i \nu_{F_i}) \quad (8)$$

denklemleriyle tanımlanır.

3.3.2. Fermatean bulanık küme Geometrik birleştirme operatörü

Tanım 3.13. (Senapati, T.; Yager, R. R., 2019b). $F_i = (\mu_{F_i}, \nu_{F_i})$ FFS olsun ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ F_i 'nin ağırlık vektörü $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ olsun. Fermatean bulanık ağırlıklı geometrik birleştirme operatörü: $F^n \rightarrow F$ olacak şekilde

$$\text{FFWG}(F_1, F_2, \dots, F_n) = (\prod_{i=1}^n \mu_{F_i}^{w_i}, \prod_{i=1}^n \nu_{F_i}^{w_i}) \quad (9)$$

Denklemleriyle tanımlanır.

3.3.3. Sezgisel bulanık küme sıralı birleştirme operatörü

Sıralı birleştirme operatörünün odak noktası girdi verilerinin sıralı şekilde ele alınmasıdır.

Tanım 3.14. $A_i = (\mu_{A_i}, \nu_{A_i})$ IFS olsun ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ A_i 'nin ağırlık vektörü $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ olsun. Sezgisel bulanık sıralı ağırlıklı birleştirme operatörü: $A^n \rightarrow A$ olacak şekilde,

$$\text{IFOWA}_w(A_1, A_2, \dots, A_n) = \left[1 - \prod_{j=1}^n \left(1 - \mu_{A_{\sigma(j)}} \right)^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^n \left(\mu_{A_{\sigma(j)}} \right)^{w_j} \right] \quad (10)$$

Denklemleriyle tanımlanmaktadır.

Burada $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ kümesi $(1, 2, \dots, n)$ 'nin permütasyonlarıdır. Ayrıca her j için $A_{\sigma(j-1)} \geq A_{\sigma(j)}$ eşitsizliği sağlanır. Özel olarak, $w = (1/n, 1/n, \dots, 1/n)^T$ ise Sezgisel bulanık ağırlıklı birleştirme operatörü elde edilir.

3.3.4. Sezgisel bulanık küme Melez birleştirme operatörü

Tanım 3.15. (Xu, 2007). $A_i = (\mu_{A_i}, \nu_{A_i})$ IFS olsun ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ A_i 'nin ağırlık vektörü $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ olsun. Sezgisel bulanık melez ağırlıklı birleştirme operatörü: $A^n \rightarrow A$ olacak şekilde,

$$\text{IFHWA}(F_1, F_2, \dots, F_n) = \left[1 - \prod_{j=1}^n \left(1 - \mu_{A_{\sigma(j)}}^* \right)^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^n \left(\mu_{A_{\sigma(j)}}^* \right)^{w_j} \right] \quad (11)$$

Burada, $\lambda_i \geq 0$ için λ_i 'lerin toplamı birdir ($i = 1, 2, \dots, n$). Ayrıca, $A_{\sigma(j)}^*$, ağırlıklandırılmış değerlerin en büyüğüdür. Bu yüzden nihai sıralama $A_{\sigma(1)}^* \geq A_{\sigma(2)}^* \geq \dots \geq A_{\sigma(n)}^*$ olacak şekilde, $A_i^* = n\lambda_i A_i$ eşitliği tanımlanmaktadır. Burada n denge katsayısı olarak

adlandırılır. Eğer $w = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ ise IFWA operatör elde edilir. Eğer $\lambda = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ ise IFOWA operatör elde edilmektedir.

3.3.5. Dombi birleştirme operatörü

Dombi operatörü 1982 yılında Josef Dombi tarafından önerilmiştir (Dombi, 1982). Dombi operatörünün en büyük avantajı, parametresi sayesinde esnek bir yapı sağlayabilmesidir.

Tanım 3.16. (Dombi, 1982). $(a, b) (0,1) \times (0,1)$ kümesinin bir elemanı olmak üzere $\beta \geq 1$, için Dombi operatörleri aşağıdaki gibidir.

$$T(a, b) = \frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{1-a}{a} \right)^\beta + \left(\frac{1-b}{b} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}, S(a, b) = 1 - \frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{a}{1-a} \right)^\beta + \left(\frac{b}{1-b} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}} \quad (12)$$

$T(a,b)$ fonksiyonu üçgensel (triangular) normu gösterirken, $S(a,b)$ fonksiyonu üçgensel conormu göstermektedir ve sırasıyla T-norm ve T-conorm (S-norm) olarak gösterilirler. Ayrıca bu Dombi norm yapısı, T-norm ve T-conorm yapılarını sağladığı için aşağıdaki özellikleri de sağlanmaktadır.

Tanım 3.17. (Dombi, 1982) $T:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ve $\forall x, y, z, x', y'$ için Eğer T bir t-norm ise aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır.

- I. $T(x,0) = 0, T(x,1) = x$ sınır koşulu
- II. $T(x, y) = T(y, x)$ yer değiştirme
- III. $(x \leq x', y \leq y') \rightarrow T(x, y) \leq T(x', y')$ monotonluk
- IV. $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$ birleşme

Tanım 3.18. (Dombi, 1982) $T:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ve $\forall x, y, z, x', y'$ için Eğer T bir t-conorm (S-norm) ise aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır.

- I. $S(x,0) = x, S(x,1) = 1$ sınır koşulu
- II. $S(x, y) = S(y, x)$ yer değiştirme
- III. $(x \leq x', y \leq y') \rightarrow S(x, y) \leq S(x', y')$ monotonluk
- IV. $S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z))$ birleşme

3.3.6. Öncelikli birleştirme operatörü

Öncelik operatörü, kriterlerin öncelik sıralama üzerine odaklanmaktadır. Öncelikli olan operatörün ağırlığı, öncelik sırası ile ilişkilendirmiştir. Böylece kriterlerin ağırlıklarında önceliklerin etkisi bulunmaktadır. Öncelik operatörü 2008 yılında Yager tarafından önerilmiştir (Yager, R. R., 2008).

Tanım 3.19. $H = \{H_1, H_2, \dots, H_t\}$ kriterlerin kümesi olsun. Varsayalım ki kriterlerin arasındaki öncelik ilişkisi $H_1 > H_2 > H_3 > \dots > H_t$ şeklinde olsun. $H_i(x)$ değeri, H_i kriteri altındaki herhangi bir x alternatifinin skor değeri olsun. $H_i(x) \in [0,1]$. Aşağıdaki eşitlik öncelik operatörünü göstermektedir.

$$PA(H_k(x)) = \sum_{u=1}^t \zeta_u H_u(x) \quad (13)$$

Burada $\zeta_i = \frac{\chi_i}{\sum_{i=1}^t \chi_i}$, $\chi_i = \prod_{j=1}^{i-1} H_j(x)$ ($i = 2, 3, \dots, t$), $\chi_1 = 1$. olarak verilir.

3.3.7. Q-rung bulanık küme yansız birleştirme operatörü

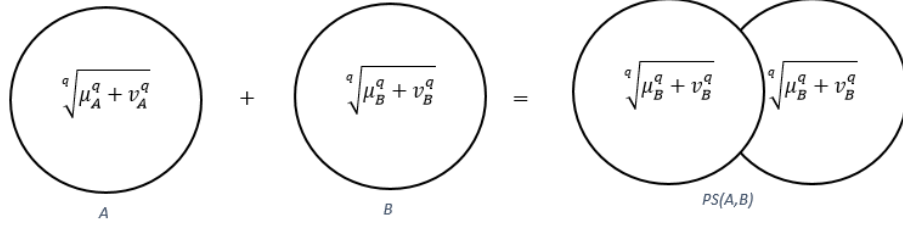
Yansızlık operatörü karar vericilerin yanlı veya önyargılı karar vermeleri durumunda bu durumu azaltmak için kullanılan birleştirme yöntemidir. Yansızlık operatöründe bu durum olasılıksal toplam (probabilistic sum) üzerinde sağlanır.

Tanım 3.20. (Garg, H.; Chen, S. M., 2020a). $A = (\mu_A, \nu_A)$ and $B = (\mu_B, \nu_B)$ iki q-ROF sayı olsun ve $\lambda > 0$ reel sayısı olmak üzere. A ve B'nin yansızlık operatörü üzerindeki operasyonlar aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{I. } A \otimes B &= \left(\sqrt[q]{\frac{MCS^q(A,B)}{MCS^q(A,B)+NCS^q(A,B)}} \cdot PS(\sqrt[q]{\mu_A^q + \nu_A^q}), \sqrt[q]{\frac{NCS^q(A,B)}{MCS^q(A,B)+NCS^q(A,B)}} \cdot PS(\sqrt[q]{\mu_A^q + \nu_A^q}) \right) \\ \text{II. } \lambda A &= \left(\sqrt[q]{\frac{MCS^q(\lambda A)}{MCS^q(\lambda A)+NCS^q(\lambda A)}} \cdot PS(\lambda \sqrt[q]{\mu_A^q + \nu_A^q}), \sqrt[q]{\frac{NCS^q(\lambda A)}{MCS^q(\lambda A)+NCS^q(\lambda A)}} \cdot PS(\lambda \sqrt[q]{\mu_A^q + \nu_A^q}) \right) \\ \text{III. } A^\lambda &= \left(\sqrt[q]{\frac{MCS^q(A^\lambda)}{MCS^q(A^\lambda)+NCS^q(A^\lambda)}} \cdot PS(\lambda \sqrt[q]{\mu_A^q + \nu_A^q}), \sqrt[q]{\frac{NCS^q(A^\lambda)}{MCS^q(A^\lambda)+NCS^q(A^\lambda)}} \cdot PS(\lambda \sqrt[q]{\mu_A^q + \nu_A^q}) \right) \\ \text{IV. } PS(\lambda \sqrt[q]{\mu_A^q + \nu_A^q}) &= \sqrt[q]{1 - (\pi_A^\lambda)} \end{aligned}$$

MCS and NCS sırasıyla üyelik katsayısı toplamı (membership coefficient sum) ve üye olmama katsayısı toplamı (non-membership coefficient sum) $MCS(A,B) =$

${}^q\sqrt{\mu_A^q + \mu_B^q}, NCS(A, B) = {}^q\sqrt{\nu_A^q + \nu_B^q}$. PS olasılıksal toplam olarak ifade edilir (probability sum) (PS).



Şekil 3.3. PS fonksiyonunun etkisi

PS yansızlık operatöründe önemi rol oynar Görsel 3.1’de, ${}^q\sqrt{\mu_A^q + \nu_A^q}$ ve ${}^q\sqrt{\mu_B^q + \nu_B^q}$, q-ROFS ortamında iki bağımsız olaydır. ${}^q\sqrt{\mu_\epsilon^q + \nu_\epsilon^q}$ ’yi, ${}^q\sqrt{\mu_A^q + \nu_A^q}$ ve ${}^q\sqrt{\mu_B^q + \nu_B^q}$ ’nin en az bireysel olaylarının gerçekleşmesinin PS’si olarak belirtelim. Bu şekilde ${}^q\sqrt{\mu_\epsilon^q + \nu_\epsilon^q} = PS({}^q\sqrt{\mu_A^q + \nu_A^q}, {}^q\sqrt{\mu_B^q + \nu_B^q})$ yazılabilir. Fakat üye olma derecesi, üye olmama derecesi ve tereddütlik derecesine sırasıyla ${}^q\sqrt{\mu_A^q + \mu_B^q}$, ${}^q\sqrt{\nu_A^q + \nu_B^q}$, ve ${}^q\sqrt{\pi_A^q + \pi_B^q}$ değerlerini atarsak, o halde q’nuncu kuvvetlerinin toplamının 1’den büyük olduğu görülür. Dolayısıyla, bu toplamın 1 çıkmasını sağlayacak katsayı ${}^q\sqrt{\frac{1 - \pi_A^q \pi_B^q}{\mu_A^q + \nu_A^q + \mu_B^q + \nu_B^q}}$ olarak belirlenir. Böylece tereddütlik derecesi $\pi_A \pi_B$ olarak belirlenir.

$$\text{Üyelik derecesi is } \mu_\epsilon = {}^q\sqrt{\frac{\mu_A^q + \mu_B^q}{\mu_A^q + \nu_A^q + \mu_B^q + \nu_B^q} \cdot (1 - \pi_A^q \pi_B^q)} \text{ and}$$

$$\text{Üye olmama derecesi is } \nu_\epsilon = {}^q\sqrt{\frac{\nu_A^q + \nu_B^q}{\mu_A^q + \nu_A^q + \mu_B^q + \nu_B^q} \cdot (1 - \pi_A^q \pi_B^q)}.$$

Üye olma, üye olmama ve tereddütlik değerlerinin q’nuncu dereceleri toplamı 1 bulunur.

Tanım 3.21. (Garg, H.; Chen, S. M., 2020a). A_i , q-ROF sayı olmak üzere, q-rung orthopair bulanık ağırlıklı yansızlık ortalaması (q-ROFWNA) aşağıdaki gibi verilir

$$q - \text{ROFWNA}(A_1, A_2, \dots, A_n) = \bigotimes_{i=1}^n w_i A_i \quad (14)$$

Burada $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$. w_i , $A_i = (\mu_i, \nu_i)$ 'nin ağırlık vektörüdür ve $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Bu tanım üzerinde verilen birleştirme operatörü

$$q - \text{ROFWNA}(A_1, A_2, \dots, A_n) = \quad (15)$$

$$\left(\sqrt[q]{\frac{\sum_{i=1}^n w_i \mu_i^q}{\sum_{i=1}^n w_i (\mu_i^q + \nu_i^q)} \cdot (1 - \prod_{i=1}^n (\pi_i^q)^{w_i})}, \sqrt[q]{\frac{\sum_{i=1}^n w_i \nu_i^q}{\sum_{i=1}^n w_i (\mu_i^q + \nu_i^q)} \cdot (1 - \prod_{i=1}^n (\pi_i^q)^{w_i})} \right)$$

Şeklindedir.

3.3.8. Kuvvet birleştirme operatörü

Kuvvet birleştirme operatörü, girdi verilerini baz alarak oluşturduğu ağırlık matrisi ile kriterler arasındaki ilişkiyi de karar verme mekanizmasına dahil etmektedir.

Tanım 3.22. (Yager, R. R., 2001). $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ gerçel sayıyı temsil etmek üzere ($a_i \geq 0$). Kuvvet birleştirme operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\text{PA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i (1 + T(a_i))}{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i))} \quad (16)$$

burada $T(a_i) = \sum_{j=1}^n \text{Sup}(a_i, a_j)_{i \neq j}$ ve $\text{Sup}(a_i, a_j)$ destek ölçümü (support measure) olarak bilinir. Ayrıca destek ölçümü aşağıdaki şartları da sağlamaktadır.

$\text{Sup}(a_i, a_j) \in [0, 1]$ için $\text{Sup}(a_i, a_j) = \text{Sup}(a_j, a_i)$, Eğer $|a_i - a_j| < |a_k - a_l|$ ise $\text{Sup}(a_i, a_j) \geq \text{Sup}(a_k, a_l)$ 'dir. $\text{Sup}(a_i, a_j) = 1 - d(a_i, a_j)$, d hamming uzaklık fonksiyonudur. Ağırlıklı kuvvet ortalaması aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\text{WPA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i (1 + T(a_i)) w_i}{\sum_{i=1}^n (1 + T(a_i))} \quad (17)$$

İfadeyi sadeleştirmek istersek;

$$\psi_i = \frac{w_i (1 + T(a_i))}{\sum_{i=1}^n w_i (1 + T(a_i))} \quad (18)$$

Elde edilir $w = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)^T$, $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 'nin ağırlık vektörüdür.

3.3.9. Dual Muirhed Mean operatör

DMM, bir değişken vektör yardımıyla herhangi bir sayıda argüman (kriter) arasındaki ilişkiyi hesaba katan bir birleştirme operatörüdür.

Tanım 3.23. (Wang, J.; Zhang, R.; Zhu, X.; Zhou, Z.; Shang, X.; Li, W., 2019a) a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) pozitif gerçel sayıyı temsil etmek üzere $[p] = [p_1, p_2, \dots, p_n] \in \mathbb{R}^n$ vektör parametresidir.

$$DMM^{[p]}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n p_j} \left(\prod_{\sigma \in S_n} \sum_{j=1}^n p_j \alpha_{\sigma(j)} \right)^{1/n!} \quad (19)$$

burada σ_j ($j = 1, 2, \dots, n$), $\{1, 2, \dots, n\}$ 'nin herhangi bir permütasyonudur. ve S_n , $\{1, 2, \dots, n\}$ 'nin bütün permütasyonlarının kümesidir.

4. FERMATEAN BULANIK DOMBİ OPERATÖLER¹

Bu bölümde ilk önerilen yapı olan, Fermatean bulanık kümeler üzerindeki birleştirme operatörlerine yer verilmiştir. Cebirsel işlemler karar verme problemlerinde etkin olarak kullanılmaktadır. Özellikle Dombi, Hamacher ve Einstein cebirsel operatörleri karar verme alanında sıkça kullanılmaktadır. Diğer yandan, birleştirme operatörlerinin karar verme problemlerinde karar verme sürecini etkilemektedir. Literatürde cebirsel operatörler ve kullanıldıkları birleştirme operatörleri aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Cebirsel operatörler birçok birleştirme yapısı için kullanılmaktadır. Bunlar bazıları Dombi, Einstein, Hamacher operatörleridir. Dombi üçgen normu (t-normu) ve üçgen conorm (t-conorm) operatörü 1982'de Dombi tarafından tanımlanmıştır (Dombi, 1982). Dombi normlarının avantajı, parametre değerine bağlı olmasıdır. Parametre değeri değiştikçe, ortaya çıkan birleştirme operatörü değişmektedir. Chen ve Ye (Chen & Ye, 2017), tek değerli nötrofik setler için Dombi ağırlıklı birleştirme operatörleri önermiş ve yatırım alternatiflerine uygulamıştır. Shi ve Ye, seyahat karar verme mekanizması için nötrofik kübik kümelerin Dombi birleştirme operatörlerini önermişlerdir (Shi & Ye, 2018). Jana ve diğ. bipolar bulanık Dombi operatörlerini, çok yönlü karar verme ile gelişen teknoloji ticarileştirmesinin değerlendirilmesi için önerdiler (Jana, 2019). Dombi operatörlerinin Pisagor bulanık kümelerine yaygın olarak uygulanmasıyla, Khan ve ark. Yatırım problemlerinin karar verme konusunda Pisagor bulanık Dombi birleştirme operatörlerini önerdiler (Khan, ve diğerleri, 2019). Wei, Hamacher için kuvvet birleştirme yöntemini tanımladı ve karar verme problemleri için karşılaştırmalı bir analiz yaptı (Wei G. W., 2019). Senapati ve Yager FFS'ler üzerinde temel operatörleri tanımladılar (Senapati, T.; Yager, R. R., 2019b). Bu operatörler için pratik örnekler sunulmaktadır. Diğer yandan, FFS'ler üzerinde bölme ve çıkarma işlemleri (Senapati & Yager, 2019a) 'de tanımlanmıştır. Ağırlıklı ürün modelini MCDM problemi üzerinde uyguladılar. Ardından köprü yapımı seçim problemlerine modelleri uygulandı. (Liu, D.; Liu, Y.; Wang, L., 2019)'te Fermatean bulanık dilsel terim kümeleri için bir uzaklık yöntemi üzerinde durulmuştur. Önerilen yapı TODIM ve TOPSIS üzerinde test edilmiştir.

¹ Bu bölüm “Aydemir, S. B., & Gunduz, S. Y. Fermatean fuzzy TOPSIS method with dombi aggregation operators and its application in multi-criteria decision making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, (Preprint), 1-19.” makalesini temel almaktadır.

Yukarıda bahsedilen literatür özetinin sonucunda tez kapsamında ilk çalışmada, “Dombi Birleştirme Operatörleri ile Fermatean Bulanık TOPSIS Yöntemi ve Çok Kriterli Karar Vermede Uygulanması” çalışmasında, FFS’lerde Dombi operatörlerinin uygulanmasına odaklanılmıştır. Dombi parametresi değişirken farklı Dombi birleştirme operatörleri elde edilebilir. Çok çeşitli Dombi parametreleri MCDM problemlerine geniş bir bakış açısı sağlar. Fermatean bulanık Dombi ağırlıklı ortalama operatörü, Fermatean bulanık Dombi ağırlıklı geometrik operatörü, Fermatean bulanık Dombi düzenli ağırlıklı geometrik operatörü, Fermatean bulanık Dombi düzenli ağırlıklı ortalama operatörü, Fermatean bulanık Dombi melez ağırlıklı ortalama operatörü, Fermatean bulanık Dombi melez ağırlıklı geometrik operatörü FFS’de kullanılır ve Fermatean-TOPSIS yöntemi ile de test edilir. Dombi ‘nin beta (β) parametresi analiz edilir. Önerilen operatörlerin özellikleri sunulmuş ve operatörler Fermatean bulanık kümelerinde tanımlanmıştır. Son olarak, önerilen operatörler mevcut birleştirme operatörleri ile karşılaştırılmıştır. Önerilen operatörlerin karar verme süreci üzerindeki etkisini anlamak için Fermatean bulanık TOPSIS metodu adımları uygulanmıştır. Fermatean bulanık kümeler için birleştirme operatörleri uygulanırken, Dombi operasyonları üzerinde temel işlemlerin tanımlanması gerekir.

Tanım 4.1. $F_1 = (\mu_{F_1}, v_{F_1})$ ve $F_2 = (\mu_{F_2}, v_{F_2})$ iki Fermatean bulanık sayı olsun. $\beta \geq 1$ ve $\lambda \geq 0$ için Fermatean bulanık kümelerin Dombi operasyonları üzerindeki işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad F_1 \boxplus F_2 &= \left(\sqrt[3]{S(\mu_{F_1}^3, \mu_{F_2}^3)}, \sqrt[3]{T(v_{F_1}^3, v_{F_2}^3)} \right) \\
\text{(II)} \quad F_1 \boxtimes F_2 &= \left(\sqrt[3]{T(\mu_{F_1}^3, \mu_{F_2}^3)}, \sqrt[3]{S(v_{F_1}^3, v_{F_2}^3)} \right) \\
\text{(III)} \quad \lambda.F_1 &= \left(\sqrt[3]{S(\lambda.\mu_{F_1}^3)}, \sqrt[3]{T(\lambda.v_{F_1}^3)} \right) = \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \{\lambda \left(\frac{\mu_{F_1}^3}{1 - \mu_{F_1}^3} \right)^\beta\}^{\frac{1}{\beta}}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \{\lambda \left(\frac{1 - v_{F_1}^3}{v_{F_1}^3} \right)^\beta\}^{\frac{1}{\beta}}}} \right) \\
\text{(IV)} \quad F_1^\lambda &= \left(\sqrt[3]{T(\lambda.\mu_{F_1}^3)}, \sqrt[3]{S(\lambda.v_{F_1}^3)} \right) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{1 + \{\lambda \left(\frac{1 - \mu_{F_1}^3}{\mu_{F_1}^3} \right)^\beta\}^{\frac{1}{\beta}}}}, \sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \{\lambda \left(\frac{v_{F_1}^3}{1 - v_{F_1}^3} \right)^\beta\}^{\frac{1}{\beta}}}} \right).
\end{aligned}$$

4.1. Fermatean bulanık Dombi aritmetik birleştirme operatörü

Fermatean bulanık kümeler üzerinde Dombi toplamsal birleştirme operatörünün temel özellikleri ve gerekli ispatlar verilmektedir.

Tanım 4.2. $F_i = (\mu_{F_i}, v_{F_i})$ herhangi bir Fermatean bulanık sayı olsun. Fermatean bulanık Dombi ağırlıklı aritmetik birleştirme fonksiyonu $FFN^n \rightarrow FFN$ 'dir.

$$FFDWA(F_1, F_2, \dots, F_n) = \boxplus_{i=1}^n \lambda_i F_i \quad (20)$$

Burada , $\lambda_i \geq 0$ için λ_i 'lerin toplamı birdir ($i = 1, 2, \dots, n$). Also, λ_i, F_i 'nin ağırlık vektörüdür.

Teorem 4.1. $F_i = (\mu_{F_i}, v_{F_i})$ herhangi bir Fermatean bulanık sayı olsun. Fermatean bulanık Dombi ağırlıklı aritmetik birleştirme operatörü, Dombi operatör kullanılarak tanımlanabilir. Ayrıca $\beta \geq 1$ için,

$$FFDWA(F_1, F_2, \dots, F_n) = \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\mu_{F_i}^3}{1 - \mu_{F_i}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{1 - v_{F_i}^3}{v_{F_i}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}} \right) \quad (21)$$

Eşitliği sağlanabilmektedir. Burada $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i > 0. \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), F_i$ 'nin ağırlık vektörüdür.

İspat 4.1. İspat matematiksel induksiyon prensibi ile ele alınmıştır.

(i) $n=2$ için Tanım 4.1'den, III kullanılarak $\lambda_1 F_1$ ve $\lambda_2 F_2$ elde edilir

$$\lambda_1 F_1 = \left(\sqrt[3]{S(\lambda_1 \cdot \mu_{F_1}^3)}, \sqrt[3]{T(\lambda_1 \cdot v_{F_1}^3)} \right), \lambda_2 F_2 = \left(\sqrt[3]{S(\lambda_2 \cdot \mu_{F_2}^3)}, \sqrt[3]{T(\lambda_2 \cdot v_{F_2}^3)} \right)$$

$\lambda_1 F_1 \boxplus \lambda_2 F_2$, (I) kullanılarak elde edilir (Tanım 4.1)

$$\begin{aligned}\lambda_1 F_1 \boxplus \lambda_2 F_2 &= \left(\sqrt[3]{S(\lambda_1 \cdot \mu_{F_1}^3, \lambda_2 \mu_{F_2}^3)}, \sqrt[3]{T(\lambda_1 \cdot v_{F_1}^3, \lambda_2 v_{F_2}^3)} \right) \\ &= \left(\sqrt[3]{\sum_{i=1}^2 S(\lambda_i \cdot \mu_{F_i}^3)}, \sqrt[3]{\sum_{i=1}^2 T(\lambda_i \cdot \mu_{F_i}^3)} \right)\end{aligned}$$

(ii) (21) denklemi varsayalım ki $n=k$ için doğru olsun;

$$\begin{aligned}\text{FFDWA}(F_1, F_2, \dots, F_k) &= \\ &= \left(\sqrt[3]{\sum_{i=1}^k S(\lambda_i \cdot \mu_{F_i}^3)}, \sqrt[3]{\sum_{i=1}^k T(\lambda_i \cdot \mu_{F_i}^3)} \right)\end{aligned}$$

(iii) (21) eşitliğinin $n=k+1$ için doğru olduğunu göstermemiz gerekiyor

$$\text{FFDWA}(F_1, F_2, \dots, F_k, F_{k+1}) = \boxplus_{i=1}^k \lambda_i F_i \boxplus \lambda_{k+1} F_{k+1}$$

$$\begin{aligned}\text{FFDWA}(F_1, F_2, \dots, F_k, F_{k+1}) &= \left(\sqrt[3]{\sum_{i=1}^k S(\lambda_i \cdot \mu_{F_i}^3)}, \sqrt[3]{\sum_{i=1}^k T(\lambda_i \cdot \mu_{F_i}^3)} \right) \\ &\boxplus \left(\sqrt[3]{S(\lambda_{k+1} \cdot \mu_{F_{k+1}}^3)}, \sqrt[3]{T(\lambda_{k+1} \cdot \mu_{F_{k+1}}^3)} \right) = \left(\sqrt[3]{\sum_{i=1}^{k+1} S(\lambda_i \cdot \mu_{F_i}^3)}, \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{k+1} T(\lambda_i \cdot \mu_{F_i}^3)} \right)\end{aligned}$$

Böylece (21) eşitliği $n=k+1$ için doğrudur. Dolayısıyla (i), (ii) and (iii) sonucu olarak eşitlik (21) bütün n değerlerinde doğrudur.

Örnek 4.1. Varsayalım ki $F_1 = (0.9, 0.6)$ $F_2 = (0.8, 0.1)$ $F_3 = (0.6, 0.4)$ ve $F_4 = (0.7, 0.5)$ dört Fermatean bulanık sayı olsun. $\lambda = (0.2, 0.2, 0.1, 0.3)$, F_i ($i = 1, 2, 3, 4$)'nin ağırlık vektörü olmak üzere $\beta = 1$ için, $\text{FFDWA}(F_1, F_2, \dots, F_4) = \boxplus_{i=1}^4 \lambda_i F_i$

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^4 \lambda_i \left(\frac{\mu_{F_i}^3}{1 - \mu_{F_i}^3} \right)^1 \right\}^{\frac{1}{1}}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^4 \lambda_i \left(\frac{1 - v_{F_i}^3}{v_{F_i}^3} \right)^1 \right\}^{\frac{1}{1}}}} \right) = \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ 0.2 \times \frac{0.9^3}{1 - 0.9^3} + 0.2 \times \frac{0.8^3}{1 - 0.8^3} + 0.1 \times \frac{0.6^3}{1 - 0.6^3} + 0.3 \times \frac{0.7^3}{1 - 0.7^3} \right\}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ 0.2 \times \frac{1 - 0.6^3}{0.6^3} + 0.2 \times \frac{1 - 0.1^3}{0.1^3} + 0.1 \times \frac{1 - 0.4^3}{0.4^3} + 0.3 \times \frac{1 - 0.5^3}{0.5^3} \right\}}} \right) \\ &= (0.7842, 0.5669).\end{aligned}$$

4.2. Fermatean bulanık Dombi sıralı aritmetik birleştirme operatörü

Tanım 4.3. $F_i = (\mu_{F_i}, v_{F_i})$ herhangi bir Fermatean bulanık sayı olsun. Fermatean bulanık Dombi sıralı ağırlıklı aritmetik birleştirme fonksiyonu $FFN^n \rightarrow FFN$ 'dir.

$$FFDOWA(F_1, F_2, \dots, F_n) = \boxplus_{i=1}^n \lambda_i F_{\sigma(i)} \quad (22)$$

Burada , $\lambda_i \geq 0$ için λ_i 'lerin toplamı birdir ($i = 1, 2, \dots, n$). Also, $F_{\sigma(i)}$, ağırlıklandırılmış değerlerin en büyüğüdür. Bu yüzden nihai sıralama $F_{\sigma(1)} \geq F_{\sigma(2)} \geq \dots \geq F_{\sigma(n)}$ olacak şekilde, $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ $\sigma(i)$ 'nin permütasyonlarıdır.

Teorem 4.2. $F_i = (\mu_{F_i}, v_{F_i})$ herhangi bir Fermatean bulanık sayı olsun. Fermatean bulanık Dombi sıralı ağırlıklı aritmetik birleştirme operatörü, Dombi operatör kullanılarak tanımlanabilir. Ayrıca $\beta \geq 1$ için,

$$FFDOWA(F_1, F_2, \dots, F_n) = \quad (23)$$

$$\left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\mu_{F_{\sigma(i)}}^3}{1 - \mu_{F_{\sigma(i)}}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{1 - v_{F_{\sigma(i)}}^3}{v_{F_{\sigma(i)}}^3} - 1 \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}} \right)$$

Eşitliği sağlanabilmektedir. Burada $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0$. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, F_i 'nin ağırlık vektörüdür. Sıralama $F_{\sigma(1)} \geq F_{\sigma(2)} \geq \dots \geq F_{\sigma(n)}$ olacak şekilde oluşturulan sıralama birleştirme operatöründe denklem (5)'e göre skor tabanlı karşılaştırma yapılmaktadır. Teorem 4.1'nin ispatına benzer şekilde yapılmaktadır.

Örnek 4.2. Varsayalım ki $(0.6, 0.7)$ $F_2 = (0.8, 0.3)$ $F_3 = (0.7, 0.2)$ ve $F_4 = (0.5, 0.3)$ dört Fermatean bulanık sayı olsun. $\lambda = (0.2, 0.2, 0.1, 0.3)$, F_i ($i = 1, 2, 3, 4$)'nin ağırlık vektörüdür. Skor fonksiyonu tanımından $\text{Score}(F_1) = -0.127$, $\text{Score}(F_2) = 0.485$, $\text{Score}(F_3) = 0.335$, $\text{Score}(F_4) = 0.027$ elde edilir. $F_{\sigma(1)} = F_2 = (0.8, 0.3)$, $F_{\sigma(2)} = F_3 = (0.7, 0.2)$, $F_{\sigma(3)} = F_4 = (0.5, 0.3)$, $F_{\sigma(4)} = F_1 = (0.6, 0.7)$. $\beta = 1$ için, $FFDOWA(F_1, F_2, \dots, F_4) = \boxplus_{i=1}^4 \lambda_i F_i$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^4 \lambda_i \left(\frac{\mu_{F_i}^3 \sigma(i)}{1 - \mu_{F_i}^3 \sigma(i)} \right)^1 \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^4 \lambda_i \left(\frac{1 - \nu_{F_i}^3 \sigma(i)}{\nu_{F_i}^3 \sigma(i)} \right)^1 \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}}, \sqrt[3]{\frac{1 - \frac{1}{1 + \left\{ 0.2 X \frac{0.8^3}{1 - 0.8^3} + 0.2 X \frac{0.7^3}{1 - 0.7^3} + 0.1 X \frac{0.5^3}{1 - 0.5^3} + 0.3 X \frac{0.6^3}{1 - 0.6^3} \right\}}{1 + \left\{ 0.2 X \frac{1 - 0.3^3}{0.3^3} + 0.2 X \frac{1 - 0.2^3}{0.2^3} + 0.1 X \frac{1 - 0.3^3}{0.3^3} + 0.3 X \frac{1 - 0.7^3}{0.7^3} \right\}}}} \right) = (0.6628, 0.2995).$$

4.3. Fermatean bulanık Dombi melez aritmetik birleştirme operatörü

Tanım 4.4. $F_i = (\mu_{F_i}, \nu_{F_i})$ herhangi bir Fermatean bulanık sayı olsun. Fermatean bulanık Dombi melez ağırlıklı aritmetik birleştirme fonksiyonu $FFN^n \rightarrow FFN$ 'dir.

$$FFDHW A(F_1, F_2, \dots, F_n) = \boxplus_{i=1}^n \lambda_i F_{\sigma(i)}^* \quad (24)$$

Burada , $\lambda_i \geq 0$ için λ_i 'lerin toplamı birdir ($i = 1, 2, \dots, n$). Also, $F_{\sigma(i)}$, ağırlıklandırılmış değerlerin en büyüğüdür. Bu yüzden nihai sıralama $F_{\sigma(1)}^* \geq F_{\sigma(2)}^* \geq \dots \geq F_{\sigma(n)}^*$ olacak şekilde, $F_i^* = n \lambda_i F_i$ eşitliği tanımlanmaktadır. Burada n denge katsayısı olarak adlandırılır. Eğer $w = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ ise FFDWA operatör elde edilir. Eğer $\lambda = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ ise FFDOWA operatör elde edilmektedir.

Teorem 4.3. $F_i = (\mu_{F_i}, \nu_{F_i})$ herhangi bir Fermatean bulanık sayı olsun. Fermatean bulanık Dombi melez ağırlıklı aritmetik birleştirme operatörü, Dombi operatör kullanılarak tanımlanabilir. Ayrıca $\beta \geq 1$ için, Teorem 4.1'nin ispatına benzer şekilde yapılmaktadır.

$$FFDHW A(F_1^*, F_2^*, \dots, F_n^*) = \left(\sqrt[3]{\frac{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\mu_{F_i}^{3\beta} \sigma(i)}{1 - \mu_{F_i}^{3\beta} \sigma(i)} \right)^{\frac{1}{\beta}}}}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{1 - \nu_{F_i}^{3\beta} \sigma(i)}{\nu_{F_i}^{3\beta} \sigma(i)} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right\}}}}, \sqrt[3]{\frac{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{1 - \nu_{F_i}^{3\beta} \sigma(i)}{\nu_{F_i}^{3\beta} \sigma(i)} \right)^{\frac{1}{\beta}}}}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\mu_{F_i}^{3\beta} \sigma(i)}{1 - \mu_{F_i}^{3\beta} \sigma(i)} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right\}}}} \right) \quad (25)$$

Örnek 4.3. Varsayalım ki $F_1^* = (0.7, 0.3)$ $F_2^* = (0.4, 0.6)$ $F_3^* = (0.5, 0.5)$ ve $F_4^* = (0.8, 0.2)$ dört Fermatean bulanık sayı olsun. $w = (0.2, 0.3, 0.1, 0.2)$, F_i ($i = 1, 2, 3, 4$)'nin ağırlık vektörüdür. $\lambda = (0.2, 0.2, 0.1, 0.3)$ ilişkili ağırlık vektörü olmak üzere $\beta = 2$ için, FFDHWA $(F_1, F_2, \dots, F_4) = \boxplus_{i=1}^4 \lambda_i F_i$

$$\tilde{F}_1^* = \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ 4 \times 0.2 \times \left(\frac{0.7^3}{1-0.7^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ 4 \times 0.2 \times \left(\frac{1-0.3^3}{0.3^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}} \right) = (0.6827, 0.3110)$$

$$\tilde{F}_2^* = \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ 4 \times 0.3 \times \left(\frac{0.4^3}{1-0.4^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ 4 \times 0.3 \times \left(\frac{1-0.6^3}{0.6^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}} \right) = (0.4115, 0.5857)$$

$$\tilde{F}_3^* = \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ 4 \times 0.1 \times \left(\frac{0.5^3}{1-0.5^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ 4 \times 0.1 \times \left(\frac{1-0.5^3}{0.5^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}} \right) = (0.4359, 0.5690)$$

$$\tilde{F}_4^* = \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ 4 \times 0.2 \times \left(\frac{0.8^3}{1-0.8^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ 4 \times 0.2 \times \left(\frac{1-0.2^3}{0.2^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}} \right) = (0.7852, 0.2075)$$

Skor fonksiyonu tanımından (denklem 5), $\text{Score}(\tilde{F}_1^*) = 0.2881$, $\text{Score}(\tilde{F}_2^*) = -0.1312$, $\text{Score}(\tilde{F}_3^*) = -0.1013$, $\text{Score}(\tilde{F}_4^*) = 0.4752$. $\text{Score}(\tilde{F}_4^*) > \text{Score}(\tilde{F}_1^*) > \text{Score}(\tilde{F}_3^*) > \text{Score}(\tilde{F}_2^*)$

$$\tilde{F}_{\sigma(1)}^* = \tilde{F}_4^* = (0.7852, 0.2075), \tilde{F}_{\sigma(2)}^* = \tilde{F}_1^* = (0.6827, 0.3110), \tilde{F}_{\sigma(3)}^* = \tilde{F}_3^* = (0.4359, 0.5690), \tilde{F}_{\sigma(4)}^* = \tilde{F}_2^* = (0.4115, 0.5857).$$

$$\text{FFDHW}A(F_1^*, F_2^*, \dots, F_n^*) = \boxplus_{i=1}^4 \lambda_i \tilde{F}_{\sigma(i)}^*$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^4 \lambda_i \left(\frac{\mu_{F_i}^3}{1 - \mu_{F_i}^3} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^4 \lambda_i \left(\frac{1 - \nu_{F_i}^3}{\nu_{F_i}^3} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}}} \right) \\
&= \left(\sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ 0.2 X \left(\frac{0.7852^3}{1 - 0.7852^3} \right)^2 + 0.2 X \left(\frac{0.6827^3}{1 - 0.6827^3} \right)^2 + 0.1 X \left(\frac{0.4359^3}{1 - 0.4359^3} \right)^2 + 0.3 X \left(\frac{0.4115^3}{1 - 0.4115^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ 0.2 X \left(\frac{1 - 0.2075^3}{0.2075^3} \right)^2 + 0.2 X \left(\frac{1 - 0.3110^3}{0.3110^3} \right)^2 + 0.1 X \left(\frac{1 - 0.5690^3}{0.5690^3} \right)^2 + 0.3 X \left(\frac{1 - 0.5857^3}{0.5857^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}}} \right) \\
&= (0.6842, 0.2667)
\end{aligned}$$

4.4. Fermatean bulanık Dombi geometrik birleştirme operatörü

Tanım 4.5. $F_i = (\mu_{F_i}, \nu_{F_i})$ herhangi bir Fermatean bulanık sayı olsun. Fermatean bulanık Dombi ağırlıklı geometrik birleştirme fonksiyonu $FFN^n \rightarrow FFN$ 'dir.

$$FFDWG(F_1, F_2, \dots, F_n) = \boxtimes_{i=1}^n F_i^{\lambda_i} \quad (26)$$

Burada, $\lambda_i \geq 0$ için λ_i 'lerin toplamı birdir ($i = 1, 2, \dots, n$). Also, λ_i, F_i 'nin ağırlık vektörüdür.

Teorem 3.4. $F_i = (\mu_{F_i}, \nu_{F_i})$ herhangi bir Fermatean bulanık sayı olsun. Fermatean bulanık Dombi ağırlıklı geometrik birleştirme operatörü, Dombi operatör kullanılarak tanımlanabilir. Ayrıca $\beta \geq 1$ için,

$$FFDWG(F_1, F_2, \dots, F_n) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{1 - \mu_{F_i}^3}{\mu_{F_i}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, \sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\nu_{F_i}^3}{1 - \nu_{F_i}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}} \right) \quad (27)$$

Eşitliği sağlanabilmektedir. Burada $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), F_i$ 'nin ağırlık vektörüdür. Teorem 4.1'nin ispatına benzer şekilde yapılmaktadır (Tanım 4.1'in I ve IV öncülleri dikkate alınmalıdır.)

Örnek 4.4. Varsayalım ki $F_1 = (0.7, 0.2)$ $F_2 = (0.8, 0.6)$ $F_3 = (0.4, 0.6)$ ve $F_4 = (0.4, 0.7)$ dört Fermatean bulanık sayı olsun. $\lambda = (0.2, 0.2, 0.1, 0.3)$, F_i ($i = 1, 2, 3, 4$)'nin ağırlık vektörü olmak üzere $\beta = 1$ için, $\text{FFDWG}(F_1, F_2, \dots, F_4) = \boxplus_{i=1}^4 \lambda_i F_i$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^4 \lambda_i \left(\frac{1 - \mu_{F_i}^3}{\mu_{F_i}^3} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right\}}}}, \sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^4 \lambda_i \left(\frac{v_{F_i}^3}{1 - v_{F_i}^3} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right\}}} \right) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ 0.2 X \frac{1-0.7^3}{0.7^3} + 0.2 X \frac{1-0.8^3}{0.8^3} + 0.1 X \frac{1-0.4^3}{0.4^3} + 0.3 X \frac{1-0.4^3}{0.4^3} \right\}}}}, \sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ 0.2 X \frac{0.2^3}{1-0.2^3} + 0.2 X \frac{0.6^3}{1-0.6^3} + 0.1 X \frac{0.6^3}{1-0.6^3} + 0.3 X \frac{0.7^3}{1-0.7^3} \right\}}} \right)$$

$$= (0.5126, 0.5789).$$

Tanım 4.6. $F_i = (\mu_{F_i}, v_{F_i})$ herhangi bir Fermatean bulanık sayı olsun. Fermatean bulanık Dombi sıralı ağırlıklı geometrik birleştirme fonksiyonu $\text{FFN}^n \rightarrow \text{FFN}$ 'dir.

$$\text{FFDOWG}(F_1, F_2, \dots, F_n) = \boxplus_{i=1}^n F_{\sigma(i)}^{\lambda_i} \quad (28)$$

Burada, $\lambda_i \geq 0$ için λ_i 'lerin toplamı birdir ($i = 1, 2, \dots, n$). Also, $F_{\sigma(i)}$, ağırlıklandırılmış değerlerin en büyüğüdür. Bu yüzden nihai sıralama $F_{\sigma(1)} \geq F_{\sigma(2)} \geq \dots \geq F_{\sigma(n)}$ olacak şekilde, $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ $\sigma(i)$ 'nin permütasyonlarıdır.

Teorem 4.4 $F_i = (\mu_{F_i}, v_{F_i})$ herhangi bir Fermatean bulanık sayı olsun. Fermatean bulanık Dombi sıralı ağırlıklı geometrik birleştirme operatörü, Dombi operatör kullanılarak tanımlanabilir. Ayrıca $\beta \geq 1$ için,

$$\text{FFDOWG}(F_1, F_2, \dots, F_n) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{1 - \mu_{F_{\sigma(i)}}^3}{\mu_{F_{\sigma(i)}}^3} \right)^{\beta} \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, \sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{v_{F_{\sigma(i)}}^3}{1 - v_{F_{\sigma(i)}}^3} \right)^{\beta} \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}} \right) \quad (29)$$

Elde edilebilir. Teorem 4.4'ün ispatı, Teorem 4.1'nin ispatına benzer şekilde yapılmaktadır.

Örnek 4.5. Varsayalım ki $F_1 = (0.6, 0.2)$ $F_2 = (0.9, 0.5)$ $F_3 = (0.3, 0.6)$ ve $F_4 = (0.7, 0.4)$ dört Fermatean bulanık sayı olsun. $\lambda = (0.2, 0.2, 0.1, 0.3)$, F_i ($i = 1, 2, 3, 4$)'nin ağırlık vektörüdür. Skor fonksiyonu tanımından $\text{Score}(F_1) = 0.208$, $\text{Score}(F_2) = 0.604$, $\text{Score}(F_3) = -0.189$, $\text{Score}(F_4) = 0.279$. $F_{\sigma(1)} = F_2 = (0.9, 0.5)$, $F_{\sigma(2)} = F_4 = (0.7, 0.2)$, $F_{\sigma(3)} = F_1 = (0.5, 0.3)$, $F_{\sigma(4)} = F_3 = (0.6, 0.7)$. $\beta = 1$ için, $\text{FFDOWA}(F_1, F_2, \dots, F_4) = \boxplus_{i=1}^4 \lambda_i F_{\sigma(i)}$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1 + \left\{ \sum_{i=1}^4 \lambda_i \left(\frac{1 - \mu_{F_{\sigma(i)}}^3}{\mu_{F_{\sigma(i)}}^3} \right)^1 \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \left\{ \sum_{i=1}^4 \lambda_i \left(\frac{v_{F_{\sigma(i)}}^3}{1 - v_{F_{\sigma(i)}}^3} \right)^1 \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1 + \left\{ 0.2 \times \frac{1 - 0.9^3}{0.9^3} + 0.2 \times \frac{1 - 0.7^3}{0.7^3} + 0.1 \times \frac{1 - 0.5^3}{0.5^3} + 0.3 \times \frac{1 - 0.6^3}{0.6^3} \right\}}}, \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \left\{ 0.2 \times \frac{0.5^3}{1 - 0.5^3} + 0.2 \times \frac{0.2^3}{1 - 0.2^3} + 0.1 \times \frac{0.3^3}{1 - 0.3^3} + 0.3 \times \frac{0.7^3}{1 - 0.7^3} \right\}}} \right) = (0.6754, 0.5420).$$

Tanım 4.7. $F_i = (\mu_{F_i}, v_{F_i})$ herhangi bir Fermatean bulanık sayı olsun. Fermatean bulanık Dombi melez ağırlıklı geometrik birleştirme fonksiyonu $\text{FFN}^n \rightarrow \text{FFN}$ 'dir.

$$\text{FFDHWG}(F_1^*, F_2^*, \dots, F_n^*) = \boxtimes_{i=1}^n (F_{\sigma(i)}^*)^{\lambda_i} \quad (30)$$

Burada, $\lambda_i \geq 0$ için λ_i 'lerin toplamı birdir ($i = 1, 2, \dots, n$). Also, $F_{\sigma(i)}$, ağırlıklandırılmış değerlerin en büyüğüdür. Bu yüzden nihai sıralama $F_{\sigma(1)}^* \geq F_{\sigma(2)}^* \geq \dots \geq F_{\sigma(n)}^*$ olacak şekilde, $F_i^* = n\lambda_i F_i$ eşitliği tanımlanmaktadır. Burada n denge katsayısı olarak adlandırılır. Eğer $w = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ ise FFDWG operatör elde edilir. Eğer $\lambda = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ ise FFDOWG operatör elde edilmektedir.

Teorem 4.5 $F_i = (\mu_{F_i}, v_{F_i})$ herhangi bir Fermatean bulanık sayı olsun. Fermatean bulanık Dombi melez ağırlıklı geometrik birleştirme operatörü, Dombi operatör kullanılarak tanımlanabilir. Ayrıca $\beta \geq 1$ için,

$$\text{FFDHWG}(F_1^*, F_2^*, \dots, F_n^*) = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{1 - \mu_{F_i^*}^3}{\mu_{F_i^*}^3} \right)^\beta \right\}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{v_{F_i^*}^3}{1 - v_{F_i^*}^3} \right)^\beta \right\}}} \right) \quad (31)$$

Elde edilebilir. Teorem 4.5'nin ispatı, Teorem 4.1'nin ispatına benzer şekilde yapılmaktadır.

Örnek 4.6. Varsayalım ki $F_1^* = (0.9, 0.6)$ $F_2^* = (0.7, 0.5)$ $F_3^* = (0.6, 0.7)$ ve $F_4^* = (0.5, 0.3)$ dört Fermatean bulanık sayı olsun. $w = (0.2, 0.3, 0.1, 0.2)$, F_i ($i = 1, 2, 3, 4$)'nin ağırlık vektörüdür. $\lambda = (0.2, 0.2, 0.1, 0.3)$ ilişkili ağırlık vektörü olmak üzere $\beta = 2$ için, $\text{FFDHWG}(F_1, F_2, \dots, F_4) = \boxplus_{i=1}^4 \lambda_i F_i$

$$\tilde{F}_1^* = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ 4 \times 0.2 \times \left(\frac{1 - 0.9^3}{0.9^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ 4 \times 0.2 \times \left(\frac{0.6^3}{1 - 0.6^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}} \right) = (0.9087, 0.5825)$$

$$\tilde{F}_2^* = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ 4 \times 0.3 \times \left(\frac{1 - 0.7^3}{0.7^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ 4 \times 0.3 \times \left(\frac{0.5^3}{1 - 0.5^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}} \right) = (0.6859, 0.5133)$$

$$\tilde{F}_3^* = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ 4 \times 0.1 \times \left(\frac{1 - 0.6^3}{0.6^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ 4 \times 0.1 \times \left(\frac{0.7^3}{1 - 0.7^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}} \right) = (0.6719, 0.6824)$$

$$\tilde{F}_4^* = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ 4 \times 0.2 \times \left(\frac{1 - 0.5^3}{0.5^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ 4 \times 0.2 \times \left(\frac{0.3^3}{1 - 0.3^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}} \right) = (0.5164, 0.2893)$$

Skor fonksiyonu tanımından, $\text{Score}(\tilde{F}_1^*) = 0.5527$, $\text{Score}(\tilde{F}_2^*) = 0.1874$, $\text{Score}(\tilde{F}_3^*) = -0.0144$, $\text{Score}(\tilde{F}_4^*) = 0.1134$. $\text{Score}(\tilde{F}_1^*) > \text{Score}(\tilde{F}_2^*) > \text{Score}(\tilde{F}_4^*) > \text{Score}(\tilde{F}_3^*)$

$$\tilde{F}_{\sigma(1)}^* = \tilde{F}_1^* = (0.9087, 0.5825) \quad , \quad \tilde{F}_{\sigma(2)}^* = \tilde{F}_2^* = (0.6859, 0.5133), \quad \tilde{F}_{\sigma(3)}^* = \tilde{F}_4^* = (0.5164, 0.2893), \quad \tilde{F}_{\sigma(4)}^* = \tilde{F}_3^* = (0.6719, 0.6824). \text{FFDHWG}(F_1^*, F_2^*, \dots, F_n^*) = \boxplus_{i=1}^4 \lambda_i \tilde{F}_{\sigma(i)}^*$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{1 - \mu_{F_i}^3}{\mu_{F_i}^3} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}}, \sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{v_{F_i}^3}{1 - v_{F_i}^3} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}} \right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1 + \left\{ 0.2 X \left(\frac{1 - 0.9087^3}{0.9087^3} \right)^2 + 0.2 X \left(\frac{1 - 0.6859^3}{0.6859^3} \right)^2 + 0.1 X \left(\frac{1 - 0.5164^3}{0.5164^3} \right)^2 + 0.3 X \left(\frac{1 - 0.6719^3}{0.6719^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}}, \sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ 0.2 X \left(\frac{0.5825^3}{1 - 0.5825^3} \right)^2 + 0.2 X \left(\frac{0.5133^3}{1 - 0.5133^3} \right)^2 + 0.1 X \left(\frac{0.2893^3}{1 - 0.2893^3} \right)^2 + 0.3 X \left(\frac{0.6824^3}{1 - 0.6824^3} \right)^2 \right\}^{1/2}}} \right) \\
&= (0.6566, 0.6061).
\end{aligned}$$

4.5. Operatörlerin bazı özellikleri

Önerilen birleştirme operatörlerinin sınırlılık, idempotentlik ve monotonluk özellikleri bu bölümde araştırılmıştır.

$F_i = (\mu_{F_i}, v_{F_i})$ herhangi bir Fermatean bulanık sayı olsun. $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ F_i 'nin ağırlık vektörü olmak üzere, $\beta \geq 1$ için önerilen birleştirme operatörleri için aşağıdaki özellikler sağlanmaktadır.

Sınırlılık: $\mu_F^- = \min\{\mu_{F_i}\}$, $\mu_F^+ = \max\{\mu_{F_i}\}$, $v_F^- = \min\{v_{F_i}\}$, $v_F^+ = \max\{v_{F_i}\}$ olmak üzere,

- (i) $(\mu_F^-, v_F^+) \leq FFDWA(F_1, F_2, \dots, F_n) \leq (\mu_F^+, v_F^-)$;
- (ii) $(\mu_F^-, v_F^+) \leq FFDOWA(F_1, F_2, \dots, F_n) \leq (\mu_F^+, v_F^-)$;
- (iii) $(\mu_F^-, v_F^+) \leq FFDHWA(F_1, F_2, \dots, F_n) \leq (\mu_F^+, v_F^-)$;
- (iv) $(\mu_F^-, v_F^+) \leq FFDWGA(F_1, F_2, \dots, F_n) \leq (\mu_F^+, v_F^-)$;
- (v) $(\mu_F^-, v_F^+) \leq FFDOWG(F_1, F_2, \dots, F_n) \leq (\mu_F^+, v_F^-)$;
- (vi) $(\mu_F^-, v_F^+) \leq FFDHWG(F_1, F_2, \dots, F_n) \leq (\mu_F^+, v_F^-)$.

(i), (ii) ve (iii) gösterimlerine yer verilmiştir. Diğer birleştirme operatörlerinin sınırlılık gösterimleri benzer şekilde yapılabilmektedir.

- (i) $F_i = (\mu_{F_i}, v_{F_i})$, $\mu_F^- \leq \mu_{F_i} \leq \mu_F^+$ ve $v_F^- \leq v_{F_i} \leq v_F^+$. Varsayalım ki $F_{min} = (\mu_F^-, v_F^+)$ ve $F_{max} = (\mu_F^+, v_F^-)$ olsun.

$$\mu_F^- = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^n S(\lambda_i \cdot (\mu_F^-)^3)}, \mu_F^+ = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^n S(\lambda_i \cdot (\mu_F^+)^3)}$$

$$v_F^- = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^n T(\lambda_i \cdot (v_F^-)^3)}, v_F^+ = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^n T(\lambda_i \cdot (v_F^+)^3)}$$

Bu yüzden, $\sqrt[3]{\sum_{i=1}^n S(\lambda_i \cdot (\mu_F^-)^3)} \leq \sqrt[3]{\sum_{i=1}^n S(\lambda_i \cdot \mu_{F_i}^3)} \leq \sqrt[3]{\sum_{i=1}^n S(\lambda_i \cdot (\mu_F^+)^3)}$ elde edilir.

$$\text{Diğer yandan, } \sqrt[3]{\sum_{i=1}^n S(\lambda_i \cdot (v_F^-)^3)} \leq \sqrt[3]{\sum_{i=1}^n S(\lambda_i \cdot v_{F_i}^3)} \leq \sqrt[3]{\sum_{i=1}^n S(\lambda_i \cdot (v_F^+)^3)}$$

$$\text{score}(F_{min}) = (\mu_F^-)^3 - (v_F^+)^3 = \left(\sqrt[3]{\sum_{i=1}^n S(\lambda_i \cdot (\mu_F^-)^3)}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{\sum_{i=1}^n T(\lambda_i \cdot (v_F^+)^3)}\right)^3$$

$$\text{score}(F_{max}) = (\mu_F^+)^3 - (v_F^-)^3 = \left(\sqrt[3]{\sum_{i=1}^n S(\lambda_i \cdot (\mu_F^+)^3)}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{\sum_{i=1}^n T(\lambda_i \cdot (v_F^-)^3)}\right)^3$$

$$\text{score}(FFDWA(F_1, F_2, \dots, F_n)) = \left(\sqrt[3]{\sum_{i=1}^n S(\lambda_i \cdot \mu_{F_i}^3)}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{\sum_{i=1}^n S(\lambda_i \cdot v_{F_i}^3)}\right)^3$$

Nihayetinde, $\text{score}(F_{min}) \leq \text{score}(FFDWA(F_1, F_2, \dots, F_n)) \leq \text{score}(F_{max})$. sağlanır.

O halde $(\mu_F^-, v_F^+) \leq FFDWA(F_1, F_2, \dots, F_n) \leq (\mu_F^+, v_F^-)$ sağlanmış olur.

(ii) $F_i = (\mu_{F_i}, v_{F_i})$, $\mu_F^- \leq \mu_{F_i} \leq \mu_F^+$ ve $v_F^- \leq v_{F_i} \leq v_F^+$. olsun. Varsayalım ki

$F_{min} = (\mu_F^-, v_F^+)$ ve $F_{max} = (\mu_F^+, v_F^-)$. olmak üzere, (i) öncülündeki ispatın adımlarına dayanarak, direkt olarak aşağıdaki sonucun yazılabileceği söylenebilir.

$$F_{min} \subseteq FFDWA(F_1, F_2, \dots, F_n) \subseteq F_{max}$$

(iii) $F_i = (\mu_{F_i}, v_{F_i})$, $\mu_F^- \leq \mu_{F_i} \leq \mu_F^+$ and $v_F^- \leq v_{F_i} \leq v_F^+$.

Varsayalım ki $F_{min} = (\mu_F^-, v_F^+)$ ve $F_{max} = (\mu_F^+, v_F^-)$ olmak üzere, (i) öncülündeki ispatın adımlarına dayanarak, direkt olarak aşağıdaki sonucun yazılabileceği söylenebilir.

$$F_{min} \subseteq FFDHWA(F_1, F_2, \dots, F_n) \subseteq F_{max}$$

İdempotentlik: Eğer F_i , Fermatean bulanık sayılar ile özdeş ise $F_i = F = (\mu_{F_i}, v_{F_i})$ 'dir.

Birleştirme operatörler için ise aşağıdaki durumlar geçerlidir.

- (i) $FFDWA(F_1, F_2, \dots, F_n) = F$;
- (ii) $FFDWA(F_1, F_2, \dots, F_n) = F$;
- (iii) $FFDHWA(F_1, F_2, \dots, F_n) = F$;
- (iv) $FFDWG(F_1, F_2, \dots, F_n) = F$;

- (v) $FFDOWG(F_1, F_2, \dots, F_n) = F$;
- (vi) $FFDHWG(F_1, F_2, \dots, F_n) = F$.

(i), (ii) ve (iii) gösterimlerine yer verilmiştir. Diğer birleştirme operatörlerinin sınırlılık gösterimleri benzer şekilde yapılabilir.

$$(i) \quad FFDWA(F_1, F_2, \dots, F_n) = FFDWA(F, F, \dots, F) =$$

$$\left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\mu_F^3}{1 - \mu_F^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{1 - v_F^3}{v_F^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}} \right) = (\mu_F, v_F) = F.$$

$$(ii) \quad FFDOWA(F_1, F_2, \dots, F_n) = FFDOWA(F, F, \dots, F) = (\mu_F, v_F) = F.$$

$$(iii) \quad FFDHWA(F_1, F_2, \dots, F_n) = FFDHWA(F, F, \dots, F) = (\mu_F, v_F) = F.$$

Monotonluk: Eğer $\mu_{F_i} \leq \mu_{G_i}$, $v_{F_i} \geq v_{G_i}$, ise aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

- (i) $FFDWA(F_1, F_2, \dots, F_n) \leq FFDWA(G_1, G_2, \dots, G_n)$;
- (ii) $FFDOWA(F_1, F_2, \dots, F_n) \leq FFDOWA(G_1, G, \dots, G_n)$;
- (iii) $FFDHWA(F_1, F_2, \dots, F_n) \leq FFDHWA(G_1, G_2, \dots, G_n)$;
- (iv) $FFDWG(F_1, F_2, \dots, F_n) \leq FFDWG(G_1, G_2, \dots, G_n)$;
- (v) $FFDOWG(F_1, F_2, \dots, F_n) \leq FFDOWG(G_1, G_2, \dots, G_n)$;
- (vi) $FFDHWG(F_1, F_2, \dots, F_n) \leq FFDHWG(G_1, G_2, \dots, G_n)$

İlk öncül gösterilip, diğer öncüllerin gösterimi de benzer şekilde yapılmaktadır.

- (i) İlk olarak üye olma derecesi üzerinde gösterim yapılabilir.

Eğer $\mu_{F_i} \leq \mu_{G_i}$ ise o halde $\mu_{F_i}^3 \leq \mu_{G_i}^3$ elde edilebilir. Ayrıca $\frac{\mu_{F_i}^3}{1 - \mu_{F_i}^3} \leq \frac{\mu_{G_i}^3}{1 - \mu_{G_i}^3}$ eşitsizliği

de sağlanabilmektedir. O halde, $\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\mu_{F_i}^3}{1 - \mu_{F_i}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}} \geq \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\mu_{G_i}^3}{1 - \mu_{G_i}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}$ yazılabilir.

Dolayısıyla, $1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\mu_{F_i}^3}{1 - \mu_{F_i}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}} \leq \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\mu_{G_i}^3}{1 - \mu_{G_i}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}$ elde edilebileceğinden,

açıkça $\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\mu_{F_i}^3}{1 - \mu_{F_i}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}} \leq \sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\mu_{G_i}^3}{1 - \mu_{G_i}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}$ eşitsizliği sağlanır.

Üye olmama derecesi üzerinden de göstermek gerekirse;

Eğer $v_{F_i} \geq v_{G_i}$ ise o halde $v_{F_i}^3 \geq v_{G_i}^3$ elde edilebilir. Ayrıca $\frac{v_{F_i}^3}{1 - v_{F_i}^3} \geq \frac{v_{G_i}^3}{1 - v_{G_i}^3}$ eşitsizliği

de sağlanabilmektedir. O halde, $\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{v_{F_i}^3}{1 - v_{F_i}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}} \leq \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{v_{G_i}^3}{1 - v_{G_i}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}$ yazılabilir.

Dolayısıyla, $1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{v_{F_i}^3}{1 - v_{F_i}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}} \geq 1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{v_{G_i}^3}{1 - v_{G_i}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}$ elde edilebileceğinden,

açıkça $\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{v_{F_i}^3}{1 - v_{F_i}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}} \geq \sqrt[3]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{v_{G_i}^3}{1 - v_{G_i}^3} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}$ eşitsizliği sağlanır.

Dolayısıyla iki durum ele alındığında,

$FFDWA(F_1, F_2, \dots, F_n) \leq FFDWA(G_1, G_2, \dots, G_n)$ elde edilir.

4.6. Fermatean bulanık kümeler için modifiye uzaklık metodu

Bu bölümde FFS üzerinde daha doğru sonuçlar veren bir mesafe yönteminden bahsedilmektedir. Ke ve Song ve arkadaşları. sezgisel bulanık kümeler üzerinde yeni bir uzaklık yöntemi önermiştir (Ke, Song, & Quan, 2018). Bazı örnekler göz önüne alındığında, sunulan yöntem mevcut Öklid mesafesinden, Hamming mesafesinden, normalleştirilmiş Öklid mesafesinden ve normalleştirilmiş Hamming mesafesinden daha doğru sonuçlar üretmektedir. A ve B'nin $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 'da tanımlanan iki Fermatean bulanık sayı olduğunu varsayalım. $A = \{ \langle x, \mu_A(x), v_A(x) \rangle \mid x \in X \}$ ve $B = \{ \langle x, \mu_B(x), v_B(x) \rangle \mid x \in X \}$, sırasıyla, A ve B arasındaki mesafe aşağıdaki ifadeyle hesaplanır.

$$D^F(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{\text{Sc}(A)}{2} - \frac{\text{Sc}(B)}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\text{Acc}(A)}{2} - \frac{\text{Acc}(B)}{2}\right)^2} \quad (32)$$

Burada $\text{Sc}(A) = \mu_A^3(x_i) - v_A^3(x_i)$ ve $\text{Acc}(A) = \mu_A^3(x_i) + v_A^3(x_i)$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.8. A, B ve C, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ üzerinde Fermatean bulanık sayılar olmak üzere, (18) eşitliğinin sağlanması için aşağıdaki öncüllerin sağlanması gerekmektedir.

- (I) $D^F(A, B) = 0$ gerek ve yeter şart $A = B$.
- (II) $D^F(A, B) = D^F(B, A)$
- (III) Eğer $A \subseteq B \subseteq C$, ise o halde $D^F(A, B) \leq D^F(A, C)$ ve $D^F(B, C) \leq D^F(A, C)$ 'dir
- (IV) $0 \leq D^F(A, B) \leq 1$

İspat (I)

$\Rightarrow$ Varsayalım ki $D^F(A, B) = 0$. Bu durumda $\frac{\mu_A^3(x_i) - v_A^3(x_i)}{2} - \frac{\mu_B^3(x_i) - v_B^3(x_i)}{2} = 0$ ve $\frac{\mu_A^3(x_i) + v_A^3(x_i)}{2} - \frac{\mu_B^3(x_i) + v_B^3(x_i)}{2} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ için. Ayrıca, aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\mu_A^3(x_i) - v_A^3(x_i) = \mu_B^3(x_i) - v_B^3(x_i) \text{ ve } \mu_A^3(x_i) + v_A^3(x_i) = \mu_B^3(x_i) + v_B^3(x_i)$$

Eşitliğin sol ve taraflarını birbirleri arasında ekleyip çıkarırsak, $\mu_A^3(x_i) = \mu_B^3(x_i)$ ve $v_A^3(x_i) = v_B^3(x_i)$ elde edilir. Bu yüzden, $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ and $v_A(x) = v_B(x)$ elde edilir. Dolayısıyla $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $A = B$ elde edilir.

$\Leftarrow$ Varsayalım ki $A = B$ olsun $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için, $\mu_A(x_i) = \mu_B(x_i)$, $v_A(x_i) = v_B(x_i)$, Bu yüzden $D^F(A, B) = 0$ olur.

İspat (II)

$$D^F(B, A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{\text{Sc}(B)}{2} - \frac{\text{Sc}(A)}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\text{Acc}(B)}{2} - \frac{\text{Acc}(A)}{2}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{\text{Sc}(A)}{2} - \frac{\text{Sc}(B)}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\text{Acc}(A)}{2} - \frac{\text{Acc}(B)}{2}\right)^2} = D^F(A, B)$$

İspat (III) Bu kanıt için, monotonluk durumu temel türev bilgileri yardımıyla araştırılmalıdır. $A = \{< x, \mu_A(x), v_A(x) > \mid x \in X\}, B = \{< x, \mu_B(x), v_B(x) > \mid x \in X\}$

ve $C = \{ \langle x, \mu_C(x), \nu_C(x) \rangle \mid x \in X \}$ üç Fermatean bulanık sayı olsun.. $\mu_A(x_i) \leq \mu_B(x_i) \leq \mu_C(x_i)$ ve $\nu_A(x_i) \geq \nu_B(x_i) \geq \nu_C(x_i)$ geçerlidir (Tanım 3.4, IV'den) $A \subseteq B \subseteq C$ olduğu zaman aşağıdaki durumlar araştırılır.

A ve B arasındaki uzaklık,

$$D^F(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{Sc(A)}{2} - \frac{Sc(B)}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{Acc(A)}{2} - \frac{Acc(B)}{2} \right)^2}$$

A ve C arasındaki uzaklık,

$$D^F(A, C) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{Sc(A)}{2} - \frac{Sc(C)}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{Acc(A)}{2} - \frac{Acc(C)}{2} \right)^2}$$

B ve C arasındaki uzaklık,

$$D^F(B, C) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{Sc(B)}{2} - \frac{Sc(C)}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{Acc(B)}{2} - \frac{Acc(C)}{2} \right)^2}$$

Bu aşamada iki değişkenli $f(x, y)$ fonksiyonu oluşturalım.

$$f(x, y) = ((x^3 - y^3) - (a^3 - b^3))^2 + \frac{1}{3}((x^3 + y^3) - (a^3 + b^3))^2$$

Burada $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$ sınırları vardır Monotonluğu araştırmak için x ve y' ye göre kısmi türevlere bakalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6x^2((x^3 - y^3) - (a^3 - b^3)) + x^2((x^3 + y^3) - (a^3 + b^3)) = 6x^2(x^3 - a^3) \\ &+ 6x^2(b^3 - y^3) + x^2(x^3 - a^3) - x^2(b^3 - y^3) = 7x^2(x^3 - a^3) + 5x^2(b^3 - y^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= -6y^2((x^3 - y^3) - (a^3 - b^3)) + y^2((x^3 + y^3) - (a^3 + b^3)) - 6y^2(x^3 - a^3) \\ &- 6y^2(b^3 - y^3) + y^2(x^3 - a^3) - y^2(b^3 - y^3) = -5y^2(x^3 - a^3) - 7y^2(b^3 - y^3) \\ &+ 5y^2(a^3 - x^3) + 7y^2(y^3 - b^3) \end{aligned}$$

Verilen koşullar altında iki farklı durum vardır

- (i) $0 \leq a \leq x \leq 1$ ve $0 \leq y \leq b \leq 1$. $\frac{\partial f}{\partial x} \geq 0$ ve $\frac{\partial f}{\partial y} \leq 0$ eşitsizliklerinden yola çıkabiliriz.

Bu bilginin ışığında, f, x değişkenine göre artan y değişkenine göre azalandır. Varsayalım ki $a = \mu_A(x_i)$, $b = \nu_A(x_i)$, o halde $a = \mu_A(x_i) \leq \mu_B(x_i) \leq \mu_C(x_i)$ ve $b = \nu_A(x_i) \geq \nu_B(x_i) \geq \nu_C(x_i)$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. $f(x, y)$, fonksiyonunun monotonluğu düşünülürse, $f(\mu_B(x_i), \nu_B(x_i)) \leq f(\mu_C(x_i), \nu_C(x_i))$ elde edilir. Öyle ki,

$$D^F(A, C) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \sqrt{f(\mu_C(x_i), v_C(x_i))}, D^F(A, B) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \sqrt{f(\mu_B(x_i), v_B(x_i))}$$

Bu yüzden, $D^F(A, B) \leq D^F(A, C)$ elde edilir.

(ii) $0 \leq x \leq a \leq 1$ ve $0 \leq b \leq y \leq 1$. $\frac{\partial f}{\partial x} \leq 0$ ve $\frac{\partial f}{\partial y} \geq 0$ durumları elde edilebilir.

f x değişkenine göre azalan y değişkenine göre artandır. Varsayalım ki $a = \mu_C(x_i)$, $b = v_C(x_i)$, o halde $\mu_A(x_i) \leq \mu_B(x_i) \leq \mu_C(x_i) = a$ ve $v_A(x_i) \geq v_B(x_i) \geq v_C(x_i) = b$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. $f(x, y)$ 'nin monotonluğu düşünülürse, $f(\mu_B(x_i), v_B(x_i)) \leq f(\mu_A(x_i), v_A(x_i))$ elde edilir. Öyle ki,

$$D^F(A, C) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \sqrt{f(\mu_A(x_i), v_A(x_i))}, D^F(B, C) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \sqrt{f(\mu_B(x_i), v_B(x_i))}$$

Bu yüzden, $D^F(B, C) \leq D^F(A, C)$ elde edilir.

Nihayetinde, Eğer (i) ve (ii) öncülleri düşünülürse, $(A, B) \leq D^F(A, C)$ and $D^F(B, C) \leq D^F(A, C)$ sonucu çıkarılabilir.

İspat (IV) $D^F(A, B) \geq 0$ tanımlamasından dolayı. $A = \{ \langle x, \mu_A(x), v_A(x) \rangle \mid x \in X \}$ ve $B = \{ \langle x, \mu_B(x), v_B(x) \rangle \mid x \in X \}$ iki FFN olsun. Diğer yandan $F_* = \{ \langle x, 0, 1 \rangle \mid x \in X \}$ ve $F^* = \{ \langle x, 1, 0 \rangle \mid x \in X \}$. Tanım 3.4, IV'den, $F_* \subseteq A \subseteq B \subseteq F^*$ elde edilebilir. Dolayısıyla $D^F(A, B) \leq D^F(F_*, F^*)$ düşünülebilir. F_* and F^* 1

$$D^F(A, C) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \sqrt{f(\mu_A(x_i), v_A(x_i))}, D^F(B, C) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \sqrt{f(\mu_B(x_i), v_B(x_i))}$$

Denkleminde yerine yazarsak, $D^F(F_*, F^*)=1$. $D^F(A, B) \leq D^F(F_*, F^*)=1$ bulunur.

Bu yüzden, $D^F(A, B) \leq 1$, ayrıca $D^F(A, B) \geq 0$ ve $D^F(A, B) \leq 1$ elde edilir. Dolayısıyla $0 \leq D^F(A, B) \leq 1$ sonucu çıkarılmaktadır.

4.7. Fermatean Dombi bulanık operatörlerin Fermatean bulanık TOPSIS ile çoklu kriter karar verme yöntemlerine uygulamaları

Bu bölümde önerilen birleştirme yöntemleri TOPSIS metoda uygulanmıştır. Bu bölüm ayrıca algoritmanın adımlarını, problem tanımını ve pratik bir MCDM örneğini içerir.

İlk olarak MCDM problemi, FFN ile temsil edilir. Problemin yapısında alternatifler ve kriterler bulunmaktadır. Her bir alternatifin kriterlerine verilen oylar / derecelendirme MCDM yapısını oluşturur. m alternatifin S_i ($i = 1, 2, \dots, m$) ve n kriteri C_j ($j = 1, 2, \dots, n$)

olduğunu varsayalım. Diğer yandan, $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, $\lambda_j > 0$. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ kriterlerin ağırlık vektörüdür. C_j kriterine göre alternatif S_i değerlendirmesinin gösterimlerini ele alalım. $a_{ij} = (u_{ij}, v_{ij})$ ve $R = (a_{ij})_{m \times n}$. R, Fermatean bulanık karar matrisidir. Önerilen operatörler (Senapati, T.; Yager, R. R., 2020) çalışmasındaki aşamalar dikkate alınarak kullanılmıştır. Dombi operatörlerinin yardımıyla TOPSIS yöntemiyle MCDM probleminin adımları aşağıdaki gibidir:

Adım I. Fermatean bulanık karar matrisi oluşturulur. S_i alternatiflerdir. C_j kriterlerdir. FFS matrisine normalleştirme işlemi yapmak gerekir. Eğer kriter fayda-türüyse, değişiklik gerekli değildir. Kriter maliyet türüyse, tamamlayıcı operatör kullanılmalıdır. Bu durumda, maliyet türü yalnızca son sütun olduğundan, tamamlayıcı yalnızca son sütuna uygulanır (Tablo-4.2). R karar matrisi aşağıdaki gibidir.

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} C_1 & & C_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} (u_{11}, v_{11}) & \cdots & (u_{1n}, v_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (u_{m1}, v_{m1}) & \cdots & (u_{mn}, v_{mn}) \end{pmatrix}_{m \times n} \end{matrix}$$

Adım II. Bu adımda, FFS'ler üzerinde birleştirme operatörleri kullanılır. Geometrik ve ortalama yöntemler ayrı ayrı test edildi. Birleştirme yöntemleri: Fermatean bulanık Dombi ağırlıklı ortalama, Fermatean bulanık Dombi ağırlıklı geometrik, Fermatean bulanık Dombi sıralı ağırlıklı ortalama, Fermatean bulanık Dombi sıralı ağırlıklı geometrik, Fermatean bulanık Dombi melez ağırlıklı ortalama, Fermatean bulanık Dombi melez ağırlıklı geometrik. Birleştirme işlemi uyguladıktan sonra $R = C_j(S_i) = C_j(S_i')$ elde edilir

Adım III. Fermatean bulanık pozitif ve negatif ideal çözümler belirlenir.

Bu adımda, S^+ pozitif and S^- negatif ideal çözümler belirlenir.

$$S^+ = \left\{ \max_i < score(C_j(S_i')) \mid j = 1, 2, \dots, n > \right\}$$

$$S^- = \left\{ \min_i < score(C_j(S_i')) \mid j = 1, 2, \dots, n > \right\}$$

Adım IV. S_i 'nin pozitif (S^+) ve negatif (S^-) ideal çözümlere olan uzaklıkları belirlenir. Bu işlem için öklidyen uzaklık kullanılır..

S_i ve S^+ arasındaki uzaklık $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$

$$D(S_i, S^+) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda_j \sqrt{\left(\frac{\mu_{ij}^3 - v_{ij}^3}{2} - \frac{(\mu_j^+)^3 - (v_j^+)^3}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu_{ij}^3 + v_{ij}^3}{2} - \frac{(\mu_j^+)^3 + (v_j^+)^3}{2} \right)^2}$$

S_i ve S^- arasındaki uzaklık $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$

$$D(S_i, S^-) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda_j \sqrt{\left(\frac{\mu_{ij}^3 - v_{ij}^3}{2} - \frac{(\mu_j^-)^3 - (v_j^-)^3}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu_{ij}^3 + v_{ij}^3}{2} - \frac{(\mu_j^-)^3 + (v_j^-)^3}{2} \right)^2}$$

Adım V. Bu adımda alternatiflerin yakınlık katsayıları hesaplanır. Vencheh and Mirjaberi S^+ ve S^- çözümlerinin her zaman olası çözümler olmadığını göstermiştir. (Hadi-Vencheh & Mirjaberi, 2014) Aslında S_i 'nin pozitif ideal çözüme yakın olması, negatif ideal çözümden uzak olması anlamına gelmemektedir. Bu yüzden, $D(S_i, S^+)$ ne kadar küçükse S_i ve $D(S_i, S^-)$ ne kadar büyükse S_i o kadar iyidir.

$$D_{min}(S_i, S^+) = \min_{1 \leq i \leq m} D(S_i, S^+) , D_{max}(S_i, S^-) = \max_{1 \leq i \leq m} D(S_i, S^-)$$

Karşılaştırma çözümleri ise $\xi(S_i) = \frac{D(S_i, S^-)}{D_{max}(S_i, S^-)} - \frac{D(S_i, S^+)}{D_{min}(S_i, S^+)}$ denklemi ile elde edilir.

Adım VI. $\xi(S_i)$ değerleri azalan şekilde sıralanır ve en son sıralama elde edilir.

4.7.1. Problem tanımı 1

İlk problemin amacı, inşa edilecek bir yapı için en uygun yerin seçilmesidir. Bu problem tipi ile ilgili birkaç çalışma bulunmaktadır vardır (Liu, Liu, & Chen, 2019a; Senapati, T.; Yager, R. R., 2020; Senapati, T.; Yager, R. R., 2019b) . Bu çalışmada da aynı problem yer almaktadır. Vidyasagar Üniversitesi'nden bir grup profesör evlerini merkezi bir konumda inşa etmek istiyor. Bir ekip uygun yeri bulmak için bir araya getirilir. Senapati Construction Limited (SCL). SCL dört farklı yeri ziyaret etti: Vidyasagar Üniversitesi'ne 10 kilometre mesafede bulunan Ashoke Nagar (S_1), Yargıç

Mahkemesi (S_2), Patna Bazar (S_3) ve Kshudiram Nagar (S_4). Bu konumlar belirli kriterlere göre değerlendirilmektedir. Kriterler: yaşam tarzı ve komşular (C_1), toprak tipi (C_2), arazi bloğunun boyutu, şekli, yönü ve eğimi (C_3), mevcut yollar ve temel hizmetlere erişim (C_4), maliyet (C_5). Kriterlerin ağırlıkları $w = (0.2, 0.2, 0.1, 0.3, 0.2)^T$ olarak belirlenmiştir. SCL tarafından oluşturulan Fermatean bulanık karar matrisi Tablo 4.1'deki gibidir.

Tablo 4.1. *Fermatean bulanık karar matrisi*

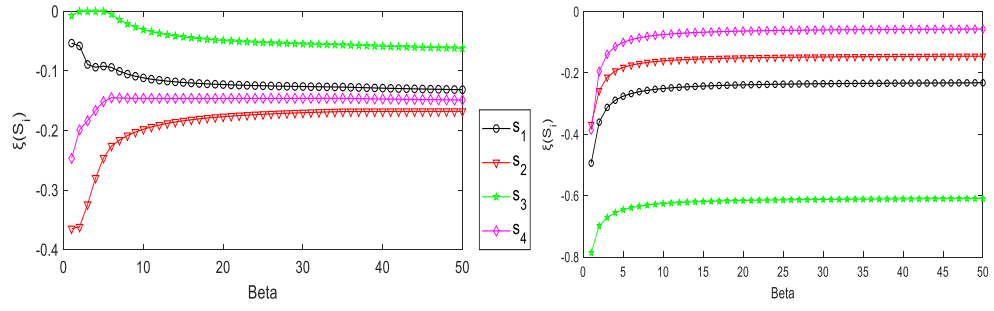
Alternatifler/Kriterler	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
S_1	(0.7,0.3)	(0.4,0.6)	(0.5,0.5)	(0.8,0.2)	(0.8,0.4)
S_2	(0.5,0.8)	(0.8,0.6)	(0.4,0.5)	(0.7,0.4)	(0.6,0.5)
S_3	(0.9,0.6)	(0.8,0.1)	(0.6,0.4)	(0.7,0.5)	(0.9,0.3)
S_4	(0.6,0.7)	(0.8,0.3)	(0.7,0.2)	(0.5,0.3)	(0.7,0.3)

Tablo 4.2. *Normalize edilmiş Fermatean bulanık karar matrisi*

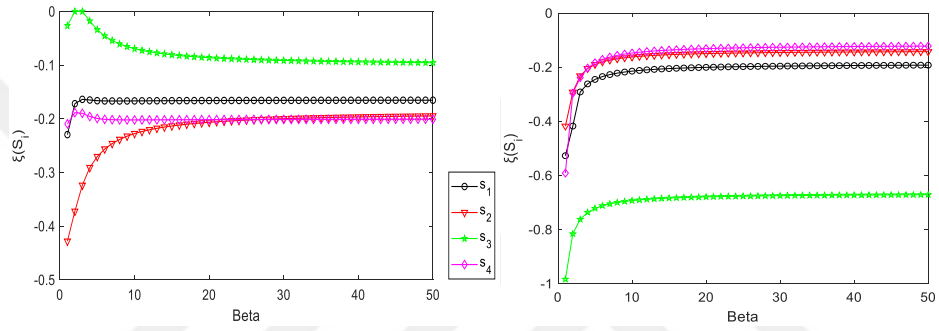
Alternatifler/Kriterler	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
S_1	(0.7,0.3)	(0.4,0.6)	(0.5,0.5)	(0.8,0.2)	(0.4,0.8)
S_2	(0.5,0.8)	(0.8,0.6)	(0.4,0.5)	(0.7,0.4)	(0.5,0.6)
S_3	(0.9,0.6)	(0.8,0.1)	(0.6,0.4)	(0.7,0.5)	(0.3,0.9)
S_4	(0.6,0.7)	(0.8,0.3)	(0.7,0.2)	(0.5,0.3)	(0.3,0.7)

4.7.1.1. Karşılaştırma analizleri ile deney sonuçları

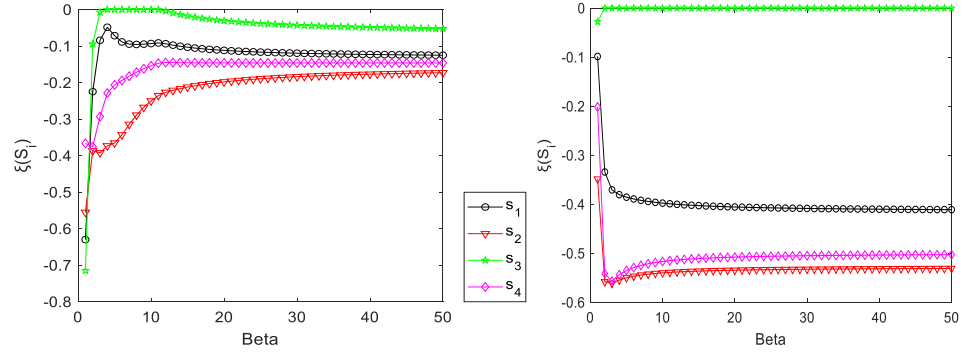
Bu bölümde farklı Dombi parametreleri için sonuçlar verilmiştir. Dombi parametresi değiştikçe, karar verme sürecini nasıl etkilediği gözlenmektedir. Dombi parametrelerinin değiştirilmesinin bir sonucu olarak, belirli bir değerden sonra stabil olduğu anlaşılmaktadır. Bu çalışmada 50'ye kadar olan değerler araştırılmıştır. Ancak 50 değerine ulaşmadan önce istikrarlı hale geldiği görülmektedir. Bu parametre değeri şekillerde görünüm kolaylığı açısından ve stabil değere ulaştığı değere göre seçilmiştir. Her sonuç aynı zamanda etkili bir nispi yakınlık yöntemi kullanılarak karşılaştırıldı. Ayrıca, elde edilen sıralama (Liu, D.; Liu, Y.; Wang, L., 2019; Senapati, T.; Yager, R. R., 2019b) çalışmalarındaki genel sıralama ile aynıdır ($S_3 > S_1 > S_4 > S_2$). Her bir birleştirme operatörüne göre Dombi operatörleri için elde edilen sonuçlar şekiller ile de ifade edilmiştir.



Şekil 4.1. FFDWA (a) ve FFDWG (b) farklı beta parametreleri ile birleştirme sonuçları



Şekil 4.2. FFDOWA (a) ve FFDOWG (b) farklı beta parametreleri ile birleştirme sonuçları



Şekil 4.3. FFDHWA (a) ve FFDHGW (b) farklı beta parametreleri ile birleştirme sonuçları

Şekil 4.1, 4.2 ve 4.3'e bakıldığında, elde edilen sonuçlar Tablo 4.3'te gösterilmektedir. Sadelik açısından: $S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3, S_4 = 4$.

Tablo 4.3. Var olan birleştirme operatörleri ve Dombi

Yaklaşım	$\xi(S_1)$	$\xi(S_2)$	$\xi(S_3)$	$\xi(S_4)$	Sıralama
FFWA	-0.469	-0.375	-0.347	-0.440	3>2>4>1
FFWG	-0.415	-0.378	-0.350	-0.371	3>4>2>1
FFWPA	-0.472	-0.364	-0.348	-0.476	3>2>1>4
FFWPG	-0.444	-0.356	-0.317	-0.468	3>2>1>4
FFDWA	-0.131	-0.167	-0.061	-0.148	3>1>4>2
FFDWG	-0.232	-0.145	-0.609	-0.056	4>2>1>3
FFDOWA	-0.165	-0.194	-0.095	-0.200	3>1>2>4
FFDOWG	-0.192	-0.142	-0.671	-0.122	4>2>1>3
FFDHWA	-0.124	-0.172	-0.052	-0.146	3>1>4>2
FFDHWG	-0.411	-0.531	0	-0.502	3>1>4>2

Tablo 4.3 göz önüne alındığında, Dombi (beta) parametresinin etkisini $\beta = 50$ 'ye kadar gözlemleyebiliriz. Beta değeri 20'den büyük olduktan sonra, revize edilen yakınlık değerlerinin kararlı olduğu gözlenir. Küçük beta değerlerindeki büyük değişkenlik nedeniyle, büyük beta değerleri de dikkate alınır. İnşa edilecek yapı için dört farklı konumun optimal sıralama sırası $S_3 > S_1 > S_4 > S_2$ 'dir ve en iyi alternatif S_3 'tür. FFS'lerde var olan tüm birleştirme operatörleri göz önüne alındığında, Dombi operatörün tutarlı ve etkili sonuçlar ürettiği görülebilir.

Tablo 4.4. Dombi operatörlerin farklı metotlar ile karşılaştırılması

Yaklaşım	Sıralama
Senapati and Yager[33]	3 > 2 > 1 > 4
Senapati and Yager[34]	3 > 1 > 4 > 2
Liu et. al.[24]	3 > 1 > 4 > 2
Dombi Aggregation	
FFDWA, FFDHWG,	3 > 1 > 4 > 2
FFDHWA	
FFDWG, FFDOWG	4 > 2 > 1 > 3
FFDOWA	3 > 1 > 2 > 4

Tablo 4.4 farklı yöntemlerin karşılaştırılmasını göstermektedir. Çalışmalar arasında, Dombi operatörünün FFS'ler üzerinde tutarlı sonuçlar verdiği görülmektedir.

Yöntemler kendi içinde ve diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında genel anlamda en iyi seçenek S_3 'tür.

4.7.2. Problem tanımı 2

İkinci problemin konusu köprü inşaatı seçiminden oluşmaktadır. Köprü veri bilgileri, Tayvan'daki Suhua Karayolu Alternatif Yol Projesi için beton tabanlı köprü üst yapısının inşasından elde edilmiştir. Chen / Wang ve Chen birçok çalışmada bu probleme odaklanmaktadır (Chen T. Y., 2012; Chen, T. Y., 2014; Chen, T. Y., 2014; Chen, T. Y., 2018; Chen, T. Y., 2018). Diğer yandan, köprü inşaat çözümü seçimi için FFS ile araştırılmıştır (Senapati & Yager, 2019a). Köprü inşası için yaygın olarak kullanılan dört yöntem vardır. Yöntemler: gelişmiş paylaşım yöntemi (S_1), artımlı başlatma yöntemi (S_2), dengeli konsol yöntemi (S_3) ve prekast segmental yöntem (S_4). Köprü yapım yöntemlerini değerlendirmek için sekiz kriter belirlenmiştir. Dayanıklılık (C_1), hasar maliyeti (C_2), inşaat maliyeti (C_3), trafik etkisi (C_4), yer durumu (C_5), iklim koşulu (C_6), peyzaj (C_7) ve çevresel etki (C_8) oluşur. Dayanıklılık ve saha koşulu fayda türü, diğer kriterler ise maliyet türüdür. Tablo 3.5 bu verileri içermektedir.

Tablo 4.5. İkinci problem için Fermatean bulanık karar matrisi

Alternatifler/Kriterler	S_1	S_2	S_3	S_4
C_1	(0.38,0.52)	(0.73,0.28)	(0.78,0.23)	(0.57,0.44)
C_2	(0.62,0.22)	(0.56,0.87)	(0.08,0.81)	(0.35,0.65)
C_3	(0.24,0.80)	(0.25,0.47)	(0.21,0.65)	(0.42,0.57)
C_4	(0.51,0.47)	(0.25,0.71)	(0.46,0.48)	(0.40,0.51)
C_5	(0.68,0.35)	(0.39,0.33)	(0.65,0.34)	(0.29,0.63)
C_6	(0.16,0.75)	(0.23,0.79)	(0.38,0.45)	(0.86,0.61)
C_7	(0.25,0.42)	(0.68,0.29)	(0.21,0.75)	(0.17,0.87)
C_8	(0.11,0.90)	(0.40,0.31)	(0.38,0.63)	(0.23,0.76)

Tablo 3.5'teki matris (Senapati & Yager, 2019a)'ten alınmıştır. Ayrıca, 1. adımda olduğu gibi, normalleştirilmiş versiyon Tablo 3.6'dadır. C_1 and C_5 fayda türü, C_2, C_3, C_4, C_6, C_7 ve C_8 maliyet türüdür.

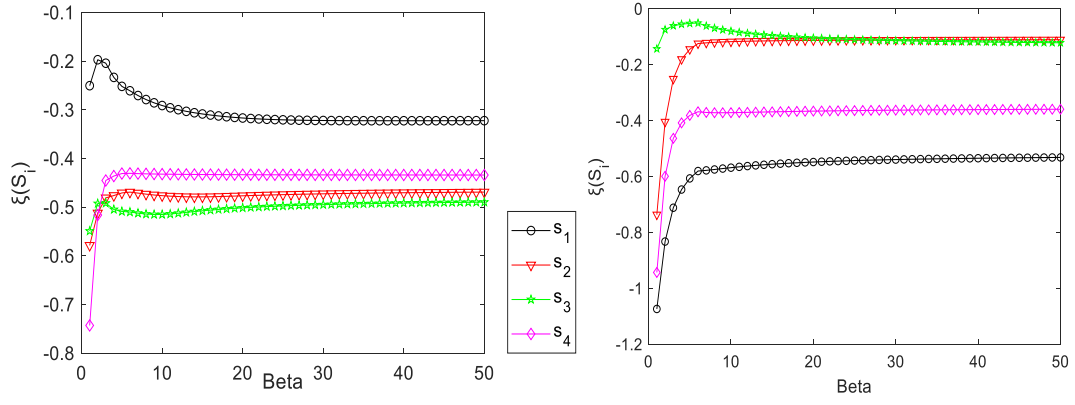
Tablo 4.6. İkinci problem için normalize edilmiş Fermatean bulanık karar matrisi

Alternatifler/Kriterler	S_1	S_2	S_3	S_4
C_1	(0.38,0.52)	(0.73,0.28)	(0.78,0.23)	(0.57,0.44)
C_2	(0.22,0.62)	(0.87,0.56)	(0.81,0.08)	(0.65,0.35)
C_3	(0.80,0.24)	(0.47,0.25)	(0.65,0.21)	(0.57,0.42)
C_4	(0.47,0.51)	(0.71,0.25)	(0.48,0.46)	(0.51,0.40)
C_5	(0.68,0.35)	(0.39,0.33)	(0.65,0.34)	(0.29,0.63)
C_6	(0.75,0.16)	(0.79,0.23)	(0.45,0.38)	(0.61,0.86)
C_7	(0.42,0.25)	(0.29,0.68)	(0.75,0.21)	(0.87,0.17)
C_8	(0.90,0.11)	(0.31,0.40)	(0.63,0.38)	(0.76,0.23)

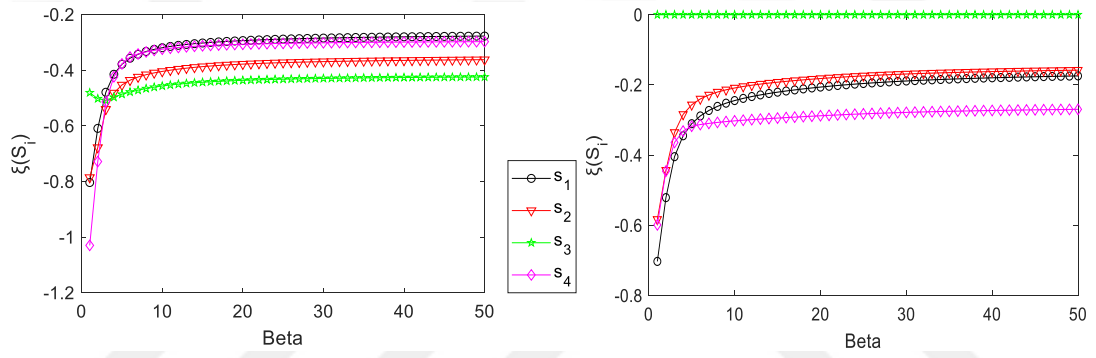
4.7.2.1. Karşılaştırma analizleri ile deney sonuçları

Dombi parametresinin aritmetik ve geometrik birleşimler üzerinde farklı etkileri vardır. Diğer yöntemler ile karşılaştırıldığında, sıralı ve melez birleştirme operatörlerinin FFS'ler ile problemi daha iyi ifade ettiği görülebilir. Ayrıca, FFDWA ve FFDWG operatörlerinde ağırlıklar verilen bulanık değerlere göre kullanılır. FFDOWA ve FFDOWG operatörlerinde ağırlıklar Fermatean bulanık değerleri sırasına göre kullanılır. Ancak her iki durumda da kendi ağırlıklarını kullanırlar. Öte yandan, FFDHWA ve FFDHWG, verilen Fermatean bulanık değerlerinin (Skor tabanlı) sıralı konumlarını ve derecesini yansıtır.

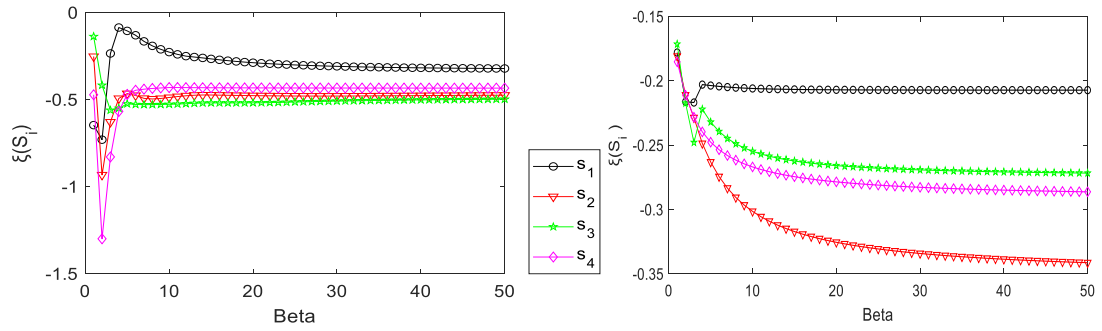
Yapılan çalışmalar da, köprü yapımı seçim problemine FFS'ler, aralık IFS'ler, aralık PFS'ler uygulanmıştır (Chen T. Y., 2012; Chen, T. Y., 2018; Wang & Chen, 2015). Bu çalışmaların da sonuçları da tezde karşılaştırıldı. Dombi birleştirme operatörlerinin karar alma mekanizmalarındaki uygulanabilirliği karşılaştırmalar ile sunulmaktadır. Aşağıdaki görsellerde, parametrelere göre her bir Dombi birleştirme operatörü için revize edilmiş yakınlık değerleri verilmiştir.



Şekil 4.4. FFDWA (a) ve FFDWG (b) farklı beta parametreleri ile birleştirme sonuçları



Şekil 4.5. FFDOWA (a) ve FFDOWG (b) farklı beta parametreleri ile birleştirme sonuçları



Şekil 4.6. FFDHWA (a) ve FFDHGW (b) farklı beta parametreleri ile birleştirme sonuçları

Tablo 4.7. Var olan birleştirme operatörleri ve Dombi

Yaklaşım	$\xi(S_1)$	$\xi(S_2)$	$\xi(S_3)$	$\xi(S_4)$	Sıralama
FFWA	-1.305	-1.175	-0.429	-1.477	$3>2>1>4$
FFWG	-1.271	-1.176	-0.406	-1.351	$3>2>1>4$
FFWPA	-0.799	-0.879	-0.376	-1.237	$3>1>2>4$
FFWPG	-0.533	-0.705	-0.338	-1.080	$3>1>2>4$
FFDWA	-0.322	-0.469	-0.489	-0.434	$1>4>2>3$
FFDWG	-0.568	-0.136	-0.103	-0.383	$3>2>4>1$
FFDOWA	-0.277	-0.362	-0.424	-0.297	$1>4>2>3$
FFDOWG	-0.174	-0.158	0	-0.269	$3>2>1>4$
FFDHWA	-0.321	-0.474	-0.497	-0.433	$1>4>2>3$
FFDHWG	-0.207	-0.346	-0.273	-0.288	$1>3>4>2$

Şekillerde, aritmetik operatörlerde nadir dalgalanmalar görünse de, geometrik operatörlerin kararlı bir yapıya sahip olduğu görünmektedir. Bu durum Dombi parametresine bağlıdır. Aritmetik operatörler Dombi parametresine bağılıken geometrik operatörler Dombi parametresinden daha bağımsız oldukları söylenebilir.

Tablo 4.7, $\beta = 50$ için sonuçları göstermektedir. Tüm yöntemlerde, β değerlerinin yakınlık katsayısı ortalamasından kaynaklanan sıralama ve $\beta = 50$ için sıralama aynıdır. Şekil 4.4a göz önüne alındığında, $\beta \in [1,2]$ olduğunda, $S_1 > S_3 > S_2 > S_4$ sıralama sırası. $\beta \geq 3$ 'ten sonra stabil olduğu görülmekte ve $S_1 > S_4 > S_2 > S_3$ sıralaması elde edilmektedir. FFDWA için en iyi alternatif S_1 'dir. Şekil 4.4b'de, $\beta \in [1,27]$ olduğunda, $S_3 > S_2 > S_4 > S_1$, kalan β değerleri için $S_2 > S_3 > S_4 > S_1$ sıralaması elde edilir. Ancak tüm β değerleri göz önüne alındığında, ortalama sonuç $S_3 > S_2 > S_4 > S_1$ sıralamasıdır. Böylece, FFDWG birleştirme sonucu sıralama sırası $S_3 > S_2 > S_4 > S_1$ elde edilir. Yani, FFDWG için en iyi alternatif S_3 'tür. Şekil 5.5a'ya göre, $\beta \in [1,2]$ olduğunda, $S_3 > S_1 > S_2 > S_4$ sıralaması elde edilir. $\beta \in [5,7]$ için ise sıralama sırası $S_4 > S_1 > S_2 > S_3$ şeklindedir. Ancak $\beta \in [3,4]$ ve $\beta \in [8,50]$ olursa $S_1 > S_4 > S_2 > S_3$ sıralama düzeni elde edilir. Yani, FFDOWA için en iyi alternatif S_1 . Şekil 5.5b'ye göre, $\beta \in [1,4]$ için sıralama sırası $S_3 > S_2 > S_4 > S_1$. $\beta \in [5,50]$ için $S_3 > S_2 > S_1 > S_4$ sıralaması elde edilmektedir. Bu nedenle, FFDOWG için en iyi alternatif S_3 'tür. Şekil 6.6a'ya bakıldığında, sıralama β 'nın daha düşük değerlerinde değişir. $\beta \in [1,2]$ olduğunda, en iyi alternatif S_3 , $\beta \in [3,50]$ için en iyi alternatif S_1 'dir. Yani, FFDHWA için toplam

sıralama sırası $S_1 > S_4 > S_2 > S_3$ ve en iyi alternatif S_1 bulunur. Son olarak, Şekil 6.6b dikkate alındığında, $\beta \in [1,2]$ olduğunda sıralama $S_3 > S_1 > S_2 > S_4$ ve $\beta = 3$ sıralaması $S_1 > S_4 > S_2 > S_3$ 'tür. $\beta \in [4,50]$ olduğunda, birleştirme sonucu sıralama sırası $S_1 > S_3 > S_4 > S_2$ 'dir. Bu nedenle, FFDHWG için en iyi alternatif S_1 elde edilir. Sonuç olarak, en iyi alternatifler S_1 veya S_3 'tür. Tüm Dombi operatörleri göz önüne alındığında, en iyi alternatif S_1 olarak bulunur. Önerilen yöntem Tablo 4.8'deki diğer çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Sıralama sonuçları mevcut diğer yöntemlerle tutarlıdır. Öte yandan, aritmetik operatörlerin kendi içinde daha tutarlı oldukları söylenebilir. Bununla birlikte, geometrik operatörler Dombi parametresine daha az bağımlıdır.

Tablo 4.8. Farklı metotların karşılaştırılması

Kaynak	Metot	Değerlendirme	Kriter ağırlıkları	Sıralama sonuçları	Modelin kategorisi
(Chen T. Y., 2012)	Lineer olmayan assignment-tabanlı metot	IVIF değerler	Eksik bilgili	1 > 3 > 4 > 2	Outranking model
	IVIF QUALIFLEX metot	IVIF değerler	Eksik bilgili	4 > 3 > 1 > 2	Outranking model
(Chen, T. Y., 2014)		IVIF değerler	Eksik bilgili	2 > 3 > 1 > 4	Outranking model
(Chen, T. Y., 2014)	Genişletilmiş linear assignment metot	IVIF değerler	IVIF değerler	1 > 3 > 4 > 2	Outranking model
(Wang & Chen, 2015)	Algoritma A ile Likelihood-tabanlı assignment metot	IVIF değerler	IVIF değerler	1 > 3 > 2 > 4	Outranking model
	Algoritma B ile Likelihood-tabanlı assignment metot	IVIF değerler	Eksik bilgi	1 > 3 > 2 > 4	Outranking model
(Chen, T. Y., 2018)	IVPF outranking metot	IVPF değerler	IVIF değerler	1 > 3 > 4 > 2	Outranking model
	IVPF TOPSIS metot with respect to displaced ideals	IVPF değerler	Normal değerler	3 > 2 > 1 > 4	Compromise model
	IVPF TOPSIS metot with respect to fixed ideals	IVPF değerler	Normal değerler	3 > 1 > 2 > 4	Compromise model
(Chen T. Y., 2018)	Algoritma I ile compromise yaklaşımı	IVPF değerler	Normal değerler	3 > 1 > 2 > 4	Compromise model
	Algoritma II ile compromise yaklaşımı	IVPF değerler	Normal değerler	3 > 1 > 2 > 4	Compromise model
(Senapati & Yager, 2019a)	Ağırlıklandırılmış çarpım modeli	FF değerler	Normal değerler	1 > 3 > 2 > 4	Compromise model

Bizim birleştirme operatörlerimiz	Dombi birleştirme metotları (FFDWA, FFDOWA, FFDHWG)	FF değerler	Normal değerler	1 > 4 > 2 > 3	Compromise model
	FFDWG	FF değerler	Normal değerler	3 > 2 > 4 > 1	Compromise model
	FFDOWG	FF değerler	Normal değerler	3 > 2 > 1 > 4	Compromise model
	FFDHWG	FF değerler	Normal değerler	1 > 3 > 4 > 2	Compromise model



5. Q-RUNG ORTHOPAİR BULANIK ÖNCELİKLİ DOMBİ BİRLEŞTİRME OPERATÖRLERİ²

Dombi operatörleri, Dombi genel yapısı nedeniyle ayarlanabilir parametresi ile esnek bir yapı sağlar. Diğer yandan, öncelikli birleştirme operatörleri, alternatiflerin ve niteliklerin önem düzeyini ifade etmede önemli bir rol oynamaktadır. Öncelik operatörü üzerindeki detaylı literatür aşağıda verilmiştir.

Birleştirme yöntemleri, MCDM problemleri ve PFS'de yaygın olarak kullanılmaktadır. Wei ve Lu, karar verme problemlerinde kuvvet birleştirme operatörlerini, ağırlık olarak kullandılar (Wei G. &, 2018). Yager, MCDM için ağırlıklı ortalama birleştirme operatörlerini tanıttı (Yager, R. R., 1988).

Öncelikli birleştirme operatörleri literatürde birçok operatörler ile birleştirilmiştir. Öncelik operatörleri ilk olarak Yager tarafından önerilmiştir (Yager, R. R., 2008). Bir kriterin öncelik veya etki düzeyinin kişiden kişiye değiştiği gibi nadir de olsa uzmandan uzmana da değişebilmektedir. Bu yüzden öncelik operatörleri MCDM problemlerinin çözümünde önemli rol oynamaktadır. Öncelik operatörleri, Pisagor bulanık ortamında Hamacher t-norm ile kullanılmıştır (Gao, H., 2018). Benzer şekilde öncelik operatörü Einstein t-norm operatörü ile q-rung bulanık ortamında da tanımlanmıştır (Riaz, Athar Farid, Kalsoom, Pamučar, & Chu, 2020). Khan ve diğ. MCDM problemleri için birleştirme operatörü geliştirmiş ve karar vericilerin ve özelliklerin farklı öncelik düzeylerinde olduğu vurgulanmıştır (Khan, Abdullah, Ali, & Amin, 2019). Merigo ve Casanovas, uyarılmış (induced) birleştirme operatörleri sunmuşlardır (Merigo, J. M.; Casanovas, M, 2011). Bu yöntem, karar vericilerin tutumuna bağlı olarak, yeniden sıralama tabanlı uzaklık birleştirme operatörlerinin parametre ailesini sağlamaktadır. Merigó ve Casanovas bulanık genelleştirilmiş melez birleştirme operatörlerini önerdiler ve bu operatörleri karar verme problemine uyguladılar (Merigo & Casanovas, 2010).

MCDM problemlerinde, karar vericilerin ve/veya kriterlerin farklı önem seviyesinde olabildiği bilinmektedir. Bu nedenle, çalışmada farklı öncelik seviyelerini dikkate alan öncelikli operatör kullanılmıştır. Ağırlık değerleri uzmanlar tarafından veya çeşitli yöntemlerle belirlenirken, öncelik sırası bireyin tercih ettiği gibi verilebilir Bu

² Bu bölüm “Aydemir, S. B., & Gündüz, S. Y. (2020). Extension of multi-Moora method with some q-rung orthopair fuzzy Dombi prioritized weighted aggregation operators for multi-attribute decision making. Soft Computing, 1-19.”makalesini temel almaktadır.

nedenle kriterlerin ağırlığı ile öncelik sırasının paralel göstermesi gerekmez. q-ROFS'ler karar vericilerin değerlendirmeleri için IFS ve PFS'leri de kapsayan daha genel bir bulanık kümedir. Örneğin; üyelik olma derecesi 0.9 ve üye olmama derecesi 0.8 seçilebilir. Böylece, değerlendirmelerde karar vericinin istediği gibi daha tutarlı bir yapı elde edilir.

Bu çalışmada, q-rung orthopair bulanık kümelerde (q-ROFS'ler) yeni Dombi öncelikli birleştirme operatörleri geliştirilmiştir. q-ROFS'ler, dinamik olarak değişen q parametrelerine sahip birçok bulanık küme içerir. q-ROFS'ler, q parametresinin değerine göre IFS, PFS ve FFS'leri içerir. Bu çalışmada, Dombi q-ROFS'lerin öncelikli kümelenmesi sunulmuştur. Tanıtılan operatörler, q-ROFS ortamında, Dombi öncelikli ağırlıklı ortalama operatörü ve Dombi öncelikli ağırlıklı geometrik operatördür. Bu operatörlerin bazı özelliklerine de değinilmiştir. Önerilen operatörler MULTIMOORA yöntemi ile birleştirilmiştir. Yeni birleştirme operatörleri ile önerilen yöntemler sayısal örnekler üzerinde gösterilmiştir. Ayrıca MULTIMOORA yapısı üzerinde önerilen operatörler q parametresine ve Dombi parametresine göre analiz edilmiş ve mevcut diğer çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

5.1. Q-rung orthopair bulanık öncelikli Dombi ağırlıklandırılmış aritmetik birleştirme operatörü

Tanım 5.1. $P_j = (\mu_j, \nu_j)$ ($j = 1, 2, \dots, t$) q-ROFS'lerin bir koleksiyonu olsun. q-ROFPDA: $q^t \rightarrow q$ operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$q - \text{ROFPDA}(P_1, P_2, \dots, P_t) = \bigoplus_{j=1}^t \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_j \right) = \frac{\chi_1}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_1 \oplus \frac{\chi_2}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_2 \oplus \dots \oplus \frac{\chi_t}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_t$$

Burada $\chi_j = \prod_{i=1}^{j-1} S(P_i)$ ($j = 2, 3, \dots, t$) ve $\chi_1 = 1$. $S(P_i)$, skor fonksiyonudur.

Teorem 5.1. $P_j = (\mu_j, \nu_j)$ ($j = 1, 2, \dots, t$) q-ROFS'lerin bir koleksiyonu olsun. O halde q – ROFPDA operatör kullanılarak, q-ROFS'lerin birleşimi ayrıca bir q-ROFS'dir. Denklem (33) ile gösterilmektedir.

$$q - \text{ROFPDA}(P_1, P_2, \dots, P_t) = \frac{\chi_1}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_1 \oplus \frac{\chi_2}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_2 \oplus \dots \oplus \frac{\chi_t}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_t$$

$$= \left(q \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{\mu_j^q}{1 - \mu_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}}, q \sqrt{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{1 - v_j^q}{v_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}} \right) \quad (33)$$

Burada $\chi_j = \prod_{i=1}^{j-1} S(P_i) (j = 2, 3, \dots, t)$ ve $\chi_1 = 1$. $S(P_i)$ Denklem (33) matematiksel indüksiyon prensibi ile ispatlanabilir.

İspat. $t=2$ için Denklem (33) denklem aşağıdaki gibi sağlanmaktadır

$$\left(q \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{\chi_1}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{\mu_1^q}{1 - \mu_1^q} \right)^k + \left(\frac{\chi_2}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{\mu_2^q}{1 - \mu_2^q} \right)^k \right\}^{1/k}}}, q \sqrt{\frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{\chi_1}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{1 - v_1^q}{v_1^q} \right)^k + \left(\frac{\chi_2}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{1 - v_2^q}{v_2^q} \right)^k \right\}^{1/k}}} \right) \\ = \left(q \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{\mu_j^q}{1 - \mu_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}}, q \sqrt{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{1 - v_j^q}{v_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}} \right) \quad (34)$$

Bu yüzden $t=2$ için sağlanır.

Varsayalım ki denklem(33) $t=p$ için doğru olsun (p , doğal sayılar elemanı olmak üzere). O halde aşağıdaki denklem elde edilebilir

$$q - \text{ROFPDA}(P_1, P_2, \dots, P_k) = \bigoplus_{j=1}^p \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_j \right) \\ = \left(q \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^p \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{\mu_j^q}{1 - \mu_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}}, q \sqrt{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^p \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{1 - v_j^q}{v_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}} \right) \quad (35)$$

Bu durumda $t = p + 1$ için doğru olduğunu göstermemiz gerekiyor.

$$\begin{aligned}
q - \text{ROFPDA}(P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}) &= \bigoplus_{j=1}^p \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_j \right) \oplus \left(\frac{\chi_{p+1}}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_{p+1} \right) \\
&= \left(\sqrt[q]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^p \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{\mu_j^q}{1 - \mu_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}, q}, \sqrt[q]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^p \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{1 - v_j^q}{v_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}, q}} \right) \\
&\oplus \left(\sqrt[q]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{\chi_{p+1}}{\sum_{j=1}^{p+1} \chi_j} \right) \left(\frac{\mu_{p+1}^q}{1 - \mu_{p+1}^q} \right)^k \right\}^{1/k}}, q}, \sqrt[q]{\frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{\chi_{p+1}}{\sum_{j=1}^{p+1} \chi_j} \right) \left(\frac{1 - v_{p+1}^q}{v_{p+1}^q} \right)^k \right\}^{1/k}}, q}} \right) \\
&= \left(\sqrt[q]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^{p+1} \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{\mu_j^q}{1 - \mu_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}, q}, \sqrt[q]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^{p+1} \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{1 - v_j^q}{v_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}, q}} \right) \quad (36)
\end{aligned}$$

t=p+1 için doğrudur. Dolayısıyla, 34, 35 ve 36 denklemleri birleştirilerek, 33 denklemi gösterilmiş olur.

q-ROFPDAoperatörü için sağlanan bazı özellikler aşağıda verilmiştir.

(İdempotentlik özelliği) $P_j = (\mu_j, v_j)$ ($j = 1, 2, \dots, t$) q-ROFS'lerin bir koleksiyonu olsun. Burada $\chi_j = \prod_{i=1}^{j-1} S(P_i)$ ($j = 2, 3, \dots, t$) ve j=1 için, $\chi_1 = 1$. Eğer P_i 'lerin hepsi birbirine eşit ise o halde her i için $P_i = P$. Yani q-ROFPDA($P_1, P_2, \dots, P_t$) = P sağlanır.

Bütün j'ler için $P_j = (\mu_j, v_j) = P$, Denklem (33) düşünüldüğünde,

$$q - \text{ROFPDA}(P_1, P_2, \dots, P_t) = \bigoplus_{j=1}^t \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_j \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sqrt[q]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{x_j}{\sum_{j=1}^t x_j} \right) \left(\frac{\mu_j^q}{1 - \mu_j^q} \right)^k \right\}^{\frac{1}{k}}}}, \sqrt[q]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{x_j}{\sum_{j=1}^t x_j} \right) \left(\frac{1 - v_j^q}{v_j^q} \right)^k \right\}^{\frac{1}{k}}}} \right) \\
&= \left(\sqrt[q]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{\mu^q}{1 - \mu^q} \right)^k \right\}^{\frac{1}{k}}}}, \sqrt[q]{\frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{1 - v^q}{v^q} \right)^k \right\}^{\frac{1}{k}}}} \right) = \left(\sqrt[q]{1 - \frac{1}{1 + \frac{\mu^q}{1 - \mu^q}}}, \sqrt[q]{\frac{1}{1 + \frac{1 - v^q}{v^q}}} \right)
\end{aligned}$$

$$= (\mu, v) = P.$$

Dolayısıyla $q - \text{ROFPDA}(P_1, P_2, \dots, P_t) = P$ sağlanmış olur.

(Sınırlılık özelliği) $P_j = (\mu_j, v_j)$ ($j = 1, 2, \dots, t$) q -ROFS'lerin bir koleksiyonu olsun. O halde, $P^- \leq q - \text{ROFPDA}(P_1, P_2, \dots, P_t) \leq P^+$ dir.

İspat $P^- = \min(P_1, P_2, \dots, P_t) = (\tilde{\mu}^-, \tilde{v}^-)$ ve $P^+ = \max(P_1, P_2, \dots, P_t) = (\tilde{\mu}^+, \tilde{v}^+)$ olsun. Burada, $\tilde{\mu}^- = \min_j \{\mu_j\}$, $\tilde{v}^- = \max_j \{v_j\}$, ve $\tilde{\mu}^+ = \max_j \{\mu_j\}$, $\tilde{v}^+ = \min_j \{v_j\}$ olarak ifade edilsin.

Yukarıdaki bilgiler ışığında aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

Üye olma derecesi için,

$$\begin{aligned}
\sqrt[q]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{x_j}{\sum_{j=1}^t x_j} \right) \left(\frac{(\tilde{\mu})^{q-}}{(1 - \tilde{\mu})^{q-}} \right)^k \right\}^{1/k}}} &\leq \sqrt[q]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{x_j}{\sum_{j=1}^t x_j} \right) \left(\frac{(\mu)^{q+}}{(1 - \mu)^{q+}} \right)^k \right\}^{1/k}}} \\
\sqrt[q]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{x_j}{\sum_{j=1}^t x_j} \right) \left(\frac{(\tilde{\mu})^{q+}}{(1 - \tilde{\mu})^{q+}} \right)^k \right\}^{1/k}}} &\leq \sqrt[q]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{x_j}{\sum_{j=1}^t x_j} \right) \left(\frac{(\mu)^{q+}}{(1 - \mu)^{q+}} \right)^k \right\}^{1/k}}}
\end{aligned}$$

Diğer yandan üye olmama derecesi için

$$\sqrt[q]{\frac{1}{1+\left\{\sum_{j=1}^t\left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t\chi_j}\right)\left(\frac{(1-\bar{v})^{q-}}{(\bar{v})^{q-}}\right)^k\right\}^{1/k}}} \leq \sqrt[q]{\frac{1}{1+\left\{\sum_{j=1}^t\left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t\chi_j}\right)\left(\frac{(1-\bar{v})^{q-}}{(\bar{v})^{q-}}\right)^k\right\}^{1/k}}} \leq \sqrt[q]{\frac{1}{1+\left\{\sum_{j=1}^t\left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t\chi_j}\right)\left(\frac{(1-\bar{v})^{q+}}{(\bar{v})^{q+}}\right)^k\right\}^{1/k}}}$$

Dolayısıyla $P^- \leq q - \text{ROFPDA}(P_1, P_2, \dots, P_t) \leq P^+$ eşitsizliği sağlanmış olur.

(Monotonluk özelliği) $P_j = (\mu_j, v_j)$ ($j = 1, 2, \dots, t$) q-ROFS'lerin bir koleksiyonu olsun. Eğer her j için $P_j \leq P'_j$ ise, o halde, $q - \text{ROFPDA}(P_1, P_2, \dots, P_t) \leq q - \text{ROFPDA}(P'_1, P'_2, \dots, P'_t)$ sağlanmaktadır.

Burada $\chi_j = \prod_{i=1}^{j-1} S(P_i)$ ($j = 2, 3, \dots, t$), $\chi'_j = \prod_{i=1}^{j-1} S(P'_i)$ ($j = 2, 3, \dots, t$) ve $\chi_1 = \chi'_1 = 1$. $S(P_i)$ ve $S(P'_i)$, sırasıyla P_i and P'_i 'nin skor değerleridir.

İspat. Let P_j and P'_j ($j = 1, 2, \dots, t$) q-ROFS'lerin bir koleksiyonu olsun. Eğer $P'_1, P'_2, \dots, P'_t$, $P_1, P_2, \dots, P_t$ 'nin bütün j 'ler için permütasyonları ise. $\chi_j = \prod_{i=1}^{j-1} S(P_i)$ ($j = 2, 3, \dots, t$) ve $\chi'_j = \prod_{i=1}^{j-1} S(P'_i)$ ($j = 2, 3, \dots, t$) iki ayrı şekilde elde edilebilir. Dolayısıyla $\chi_1 = \chi'_1 = 1$ olarak ifade edilir. $S(P_i)$ ve $S(P'_i)$ 'nin skor fonksiyonları sırasıyla P_i ve P'_i 'dir. Bu yüzden, eğer $P_j \leq P'_j$ ise direkt $q - \text{ROFPDA}(P_1, P_2, \dots, P_t) \leq q - \text{ROFPDA}(P'_1, P'_2, \dots, P'_t)$ eşitsizliği sağlanmaktadır.

q-rung orthopair bulanık öncelikli dombi ağırlıklı aritmetik birleştirme operatörü, q-ROFPDA operatöründe ağırlıklar kullanılarak tanımlanabilir. λ_j ağırlık vektörü olmak üzere, ($j = 1, 2, \dots, t$) için, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)^T$, $\lambda_j > 0$ ve $\sum_{j=1}^t \lambda_j = 1$.

Tanım 5.2. $P_j = (\mu_j, v_j)$ ($j = 1, 2, \dots, t$) q-ROFS'lerin bir koleksiyonu olsun λ_j ağırlık vektörü olmak üzere, ($j = 1, 2, \dots, t$) için, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)^T$, $\lambda_j > 0$ ve $\sum_{j=1}^t \lambda_j = 1$. q-ROFPDWAoperatorü,

$$q - \text{ROFPDWA}(P_1, P_2, \dots, P_t) = \bigoplus_{j=1}^t \left(\frac{\lambda_j \chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_j \right) = \frac{\lambda_1 \chi_1}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_1 \oplus \frac{\lambda_2 \chi_2}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_2 \oplus \dots \oplus \frac{\lambda_t \chi_t}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_t = \left(q \sqrt[1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\lambda_j \chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{\mu_j^q}{1 - \mu_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}]{1 - \frac{1}{\sum_{j=1}^t \chi_j}}, q \sqrt[1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\lambda_j \chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{1 - v_j^q}{v_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}]{1 - \frac{1}{\sum_{j=1}^t \chi_j}} \right)$$

olarak tanımlanır. Burada $\chi_j = \prod_{i=1}^{j-1} S(P_i)$ ($j = 2, 3, \dots, t$) ve $\chi_1 = 1$. $S(P_i)$, skor fonksiyonudur.

5.2. q-rung orthopair bulanık öncelikli Dombi ağırlıklandırılmış geometrik birleştirme operatörü

Tanım 5.3. $P_j = (\mu_j, v_j)$ ($j = 1, 2, \dots, t$) q-ROFS'lerin bir koleksiyonu olsun. q-rung orthopair bulanık öncelikli dombi geometrik birleştirme q-ROFPDG: $q^t \rightarrow q$ operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$q - \text{ROFPDG}(P_1, P_2, \dots, P_t) = \bigotimes_{j=1}^t \left(P_j^{\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j}} \right) = P_1^{\frac{\chi_1}{\sum_{j=1}^t \chi_j}} \otimes P_2^{\frac{\chi_2}{\sum_{j=1}^t \chi_j}} \otimes \dots \otimes P_t^{\frac{\chi_t}{\sum_{j=1}^t \chi_j}}$$

Burada $\chi_j = \prod_{i=1}^{j-1} S(P_i)$ ($j = 2, 3, \dots, t$) ve $\chi_1 = 1$. $S(P_i)$, skor fonksiyonudur.

Teorem 5.2. $P_j = (\mu_j, v_j)$ ($j = 1, 2, \dots, t$) q-ROFS'lerin bir koleksiyonu olsun. O halde q - ROFPDG operatör kullanılarak, q-ROFS'lerin birleşimi ayrıca bir q-ROFS'dir. Denklem (34) eşitlik ile gösterilmektedir.

$$q - \text{ROFPDG}(P_1, P_2, \dots, P_t) = P_1^{\frac{\chi_1}{\sum_{j=1}^t \chi_j}} \otimes P_2^{\frac{\chi_2}{\sum_{j=1}^t \chi_j}} \otimes \dots \otimes P_t^{\frac{\chi_t}{\sum_{j=1}^t \chi_j}} = \left(q \sqrt[1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{1 - \mu_j^q}{\mu_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}]{1 - \frac{1}{\sum_{j=1}^t \chi_j}}, q \sqrt[1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{v_j^q}{1 - v_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}]{1 - \frac{1}{\sum_{j=1}^t \chi_j}} \right) \quad (34)$$

Burada $\chi_j = \prod_{i=1}^{j-1} S(P_i)$ ($j = 2, 3, \dots, t$) ve $\chi_1 = 1$. $S(P_i)$ Denklem (34) matematiksel indüksiyon prensibi ile ispatlanabilir.

İspat. $t=2$ için denklem (34) aşağıdaki gibi sağlanmaktadır

$$\left(\sqrt[q]{\frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{\chi_1}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{1 - \mu_1^q}{\mu_1^q} \right)^k + \left(\frac{\chi_2}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{1 - \mu_2^q}{\mu_2^q} \right)^k \right\}^{1/k}}}}, \sqrt[q]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{\chi_1}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{v_1^q}{1 - v_1^q} \right)^k + \left(\frac{\chi_2}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{v_2^q}{1 - v_2^q} \right)^k \right\}^{1/k}}} } \right) \quad (35)$$

Bu yüzden $t=2$ için sağlanır.

Varsayalım ki denklem (34) $t=p$ için doğru olsun (p , doğal sayılar elemanı olmak üzere).

O halde aşağıdaki denklem elde edilebilir

$$= \left(\sqrt[q]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^p \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{1 - \mu_j^q}{\mu_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}}}, \sqrt[q]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^p \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{v_j^q}{1 - v_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}} } \right) \quad (36)$$

Bu durumda $t = p + 1$ için doğru olduğunu göstermemiz gerekiyor.

$$\begin{aligned} q - \text{ROFPDG}(P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}) &= \bigotimes_{j=1}^p \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_j \right) \otimes \left(\frac{\chi_{p+1}}{\sum_{j=1}^t \chi_j} P_{p+1} \right) \\ &= \left(\sqrt[q]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^p \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{\mu_j^q}{1 - \mu_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}}}, \sqrt[q]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^p \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{1 - v_j^q}{v_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}} } \right) \\ &\quad \otimes \left(\sqrt[q]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{\chi_{p+1}}{\sum_{j=1}^{p+1} \chi_j} \right) \left(\frac{\mu_{p+1}^q}{1 - \mu_{p+1}^q} \right)^k \right\}^{1/k}}}}, \sqrt[q]{\frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{\chi_{p+1}}{\sum_{j=1}^{p+1} \chi_j} \right) \left(\frac{1 - v_{p+1}^q}{v_{p+1}^q} \right)^k \right\}^{1/k}}} } \right) \end{aligned}$$

$$= \left(q \sqrt[1 + \left\{ \sum_{j=1}^{p+1} \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{\mu_j^q}{1-\mu_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}]{1 - \frac{1}{\left\{ \sum_{j=1}^{p+1} \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{\mu_j^q}{1-\mu_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}}}, q \sqrt[1 + \left\{ \sum_{j=1}^{p+1} \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{(1-v_j^q)}{v_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}]{1 - \frac{1}{\left\{ \sum_{j=1}^{p+1} \left(\frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^t \chi_j} \right) \left(\frac{(1-v_j^q)}{v_j^q} \right)^k \right\}^{1/k}}} \right) \quad (37)$$

$t=p+1$ için doğrudur. Dolayısıyla, 35, 36 ve 37 denklemleri birleştirilerek , denklem (34) gösterilmiş olur. Ayrıca, q-ROFPDG operatörü için de idempotentlik, sınırlılık ve monotonluk özellikleri sağlanmaktadır. Ağırlıklar kullanılarak elde edilen denklem ise aşağıdaki gibidir. Aşağıda ise q – ROFDPG operatörün ağırlıklandırılmış hali bulunmaktadır.

$$q - \text{ROFDPWG} \quad (38)$$

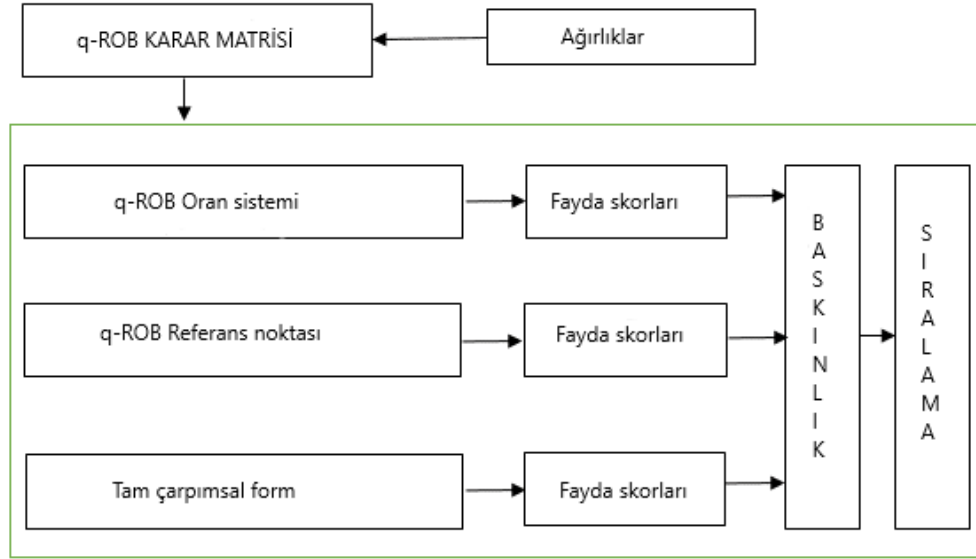
$$= \left(q \sqrt[1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\lambda_j \chi_{ij}}{\sum_{j=1}^t \chi_{ij}} \right) \left(\frac{(1-\mu_{ij}^q)}{\mu_{ij}^q} \right)^k \right\}^{1/k}}]{1 - \frac{1}{\left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\lambda_j \chi_{ij}}{\sum_{j=1}^t \chi_{ij}} \right) \left(\frac{(1-\mu_{ij}^q)}{\mu_{ij}^q} \right)^k \right\}^{1/k}}}}, q \sqrt[1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\lambda_j \chi_{ij}}{\sum_{j=1}^t \chi_{ij}} \right) \left(\frac{v_{ij}^q}{(1-v_{ij}^q)} \right)^k \right\}^{1/k}}]{1 - \frac{1}{\left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\lambda_j \chi_{ij}}{\sum_{j=1}^t \chi_{ij}} \right) \left(\frac{v_{ij}^q}{(1-v_{ij}^q)} \right)^k \right\}^{1/k}}} \right)$$

5.2.1. Önerilen birleştirme operatörleri ile çoklu nitelikli karar verme metodu için MULTIMOORA metodu

Bu bölümde MADM yönteminde q-ROFDPWA operatörü ve q-ROFDPWG operatörü sunulmaktadır. MULTIMOORA yöntemleri önerilen birleştirme operatörleri ile birleştirilir. İlk olarak, nitelikler ve alternatifler kümesini belirlemek gerekir $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ alternatiflerin koleksiyonu olsun. $\{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ niteliklerin koleksiyonu olsun. A_i alternatifi için C_j kriterine verilen değerlendirme, $R_{ij} = (u_{ij}, v_{ij})$ formatında ifade edilir. $R = [r_{ij}]_{m \times t}$ bir karar matrisidir. Ağırlık vektörü $\{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n\}$ kümesidir. Ayrıca $\sum_{j=1}^t \lambda_j = 1$ ve $\lambda_j \in [0,1]$ koşulları sağlanmalıdır. Nitelikler arasındaki önceliklendirmenin $C_1 > C_2 > \dots > C_t$ olduğunu varsayalım. $i < j$ için C_i, C_j daha yüksek önceliğe sahiptir. Bu çalışmada, q-ROFS'ler için (Zhang, Chen, Streimikienė, & Balezentis, 2019) çalışmasında yer alan sezgisel bulanık kümeler için kullanılan MULTIMOORA yöntemi geliştirilmiştir.

MULTIMOORA yöntemi farklı Moora yöntemlerinden ve çarpma işlevinden oluşur. Bu yöntemler, ilave fayda fonksiyonu (oran sistemi), referans noktası yaklaşımı

ve çarpımsal fayda fonksiyonudur (tam çarpımsal form) (Brauers, W. K. M.; Zavadskas, E. K., 2010). Şekil 5.1, MULTIMOORA yönteminin şemasını göstermektedir.



Şekil 5.1. MULTIMOORA metod yapısı

Oran sisteminde ve MULTIMOORA yönteminin tam çarpımsal form kısımlarında, önerilen birleştirme operatörleri kullanılır. Böylece, hem Dombi operatörünün genel parametresinin esnekliği hem de önceliklendirilmiş birleştirme operatörü özellikleri kullanılmış olur.

q-ROFN'lere sahip MULTIMOORA MADM aşağıdaki adımlarla açıklanabilir:

Adım 1. m alternatif n niteliği içeren karar matrisi oluşturulur. Gerekirse, veriler üzerinde normalleştirme yapılır. $R = [r_{ij}]_{m \times n}$ karar matrisi olsun. Nitelikler kümesi, fayda nitelikleri (B) ve maliyet nitelikleri (C) olarak iki kısma ayrılır. $(s_{ij})_{m \times n} = (\mu_{ij}, v_{ij}, \pi_{ij})$ normalleştirilmiş karar matrisidir, burada π_{ij} tereddütlük derecesidir.

$$S = s_{ij} = \begin{cases} r_{ij}, & j \in B \\ neg(r_{ij}), & j \in C \end{cases} \quad (39)$$

Adım 2. Bu adımda, MULTIMOORA-q-ROFS oran sisteminde q-ROFDPWA operatörü kullanılır. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)^T$ niteliklerin ağırlıkları olmak üzere $\lambda_j > 0$, $q \geq 1$ ve $\sum_{j=1}^t \lambda_j = 1$ geçerlidir. Her alternatifin q-ROF faydası aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\rho_i^{RS} = q - \text{ROFDPWA } (s_{ij} | j = 1, 2, \dots, t; \lambda)$$

$$= \left(q \sqrt[1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\lambda_j x_{ij}}{\sum_{j=1}^t x_{ij}} \right) \left(\frac{\mu_{ij}^q}{1 - \mu_{ij}^q} \right)^k \right\}^{1/k}}]{1 - \frac{1}{\sqrt[1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\lambda_j x_{ij}}{\sum_{j=1}^t x_{ij}} \right) \left(\frac{\mu_{ij}^q}{1 - \mu_{ij}^q} \right)^k \right\}^{1/k}}]}}, q \sqrt[1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\lambda_j x_{ij}}{\sum_{j=1}^t x_{ij}} \right) \left(\frac{1 - v_{ij}^q}{v_{ij}^q} \right)^k \right\}^{1/k}}]{\frac{1}{\sqrt[1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\lambda_j x_{ij}}{\sum_{j=1}^t x_{ij}} \right) \left(\frac{1 - v_{ij}^q}{v_{ij}^q} \right)^k \right\}^{1/k}}}}} \right) \quad (40)$$

$$= (\hat{\mu}_i^{RS}, \hat{v}_i^{RS}), i = 1, 2, \dots, m.$$

Adım 3. 2. Adımda elde edilen değerlere skor fonksiyonları uygulanır

$$\tilde{\rho}_i^{RS} = 1/2(1 + (\hat{\mu}_i^{RS})^q - (\hat{v}_i^{RS})^q), i = 1, 2, \dots, m.$$

$$\text{Değerler normalize edilir, } \bar{\rho}_i^{RS} = \frac{\tilde{\rho}_i^{RS}}{\max_i \tilde{\rho}_i^{RS}}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (41)$$

Sonunda, maksimum $\bar{\rho}_i^{RS} \in [0, 1]$ için maksimum fayda değeri bulunur.

Adım 4. Referans noktası yaklaşımı uygulanır. Referans noktası belirlenir ve her bir alternatif için Chebyshev uzaklığı uygulanır. Referans noktası aşağıdaki girdiler üzerinde hesaplanır.

$$R = (r_1, r_2, \dots, r_t) = ((\mu'_1, v'_1), (\mu'_2, v'_2), \dots, (\mu'_t, v'_t))$$

$$r_j = (\mu'_j, v'_j), \mu'_j = \max_i \mu_{ij}, v'_j = \min_i v_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, t$$

İdeal çözüm maksimum üye olma derecesi ile sağlanır. Bu yüzden ideal çözümün, $R = (r_1, r_2, \dots, r_t) = ((1, 0, 0), (1, 0, 0), \dots, (1, 0, 0))$ olduğu söylenebilir. Alternatiflerin referans noktalarına olan uzaklıklarını incelenir. Uzaklık metodu olarak Hamming uzaklığı kullanılmıştır.

μ üye olma derecesi, v üye olmama derecesi ve π is a tereddütler derecesi olsun.

Ayrıca $a_1 = (\mu_1, v_1, \pi_1)$ ve $a_2 = (\mu_2, v_2, \pi_2)$ q-ROFNs sayı olmak üzere;

$$d_{\text{Hamming}}(a_1, a_2) = \frac{1}{2}(|\mu_1^q - \mu_2^q| + |v_1^q - v_2^q| + |\pi_1^q - \pi_2^q|)$$

$$d_{ij} = d_{\text{Hamming}}(\lambda_j s_{ij}, \lambda_j r_j), i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, t.$$

Ayrıca, her bir alternatif için referans noktasından olan maksimum Chebyshev uzaklığı hesaplanır

$$\rho_i^{RP} = \max_j d_{ij}$$

Referans noktası telafi edici olmayan bir yaklaşımdır. Bu nedenle, daha düşük ρ_i^{RS} değeri daha yüksek bir faydaya sahiptir. Ancak bir sonraki adımda, normalleştirilmiş fayda skorları hesaplanabilir.

Adım 5. Normalize fayda skorları hesaplanır

$$\bar{\rho}_i^{RP} = \frac{\min_i \rho_i^{RP}}{\rho_i^{RP}}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (42)$$

Nihayetinde, $\bar{\rho}_i^{RP} \in [0,1]$ için maksimum fayda değeri elde edilir.

Adım 6. MULTIMOORA-q-ROFS için çarpımsal fayda fonksiyonu üzerinde q-ROFDPWG operatör kullanılmıştır. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)^T$ niteliklerin ağırlıklarıdır. $\lambda_j > 0$, $q \geq 1$ ve $\sum_{j=1}^t \lambda_j = 1$. Her bir alternatifin faydası aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} \rho_i^{MF} &= q - \text{ROFDPWG} (s_{ij} | j = 1, 2, \dots, t; \lambda) \\ &= \left(q \sqrt[q]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\lambda_j x_{ij}}{\sum_{j=1}^t x_{ij}} \right) \left(\frac{1 - \mu_{ij}^q}{\mu_{ij}^q} \right)^k \right\}^{1/k}}}}, q \sqrt[q]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\frac{\lambda_j x_{ij}}{\sum_{j=1}^t x_{ij}} \right) \left(\frac{v_{ij}^q}{1 - v_{ij}^q} \right)^k \right\}^{1/k}}} \right) \\ &= (\hat{\mu}_i^{MF}, \hat{v}_i^{MF}), i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (43)$$

The score fonksiyonu uygulanırsa,

$$\tilde{\rho}_i^{MF} = 1/2(1 + (\hat{\mu}_i^{MF})^q - (\hat{v}_i^{MF})^q), i = 1, 2, \dots, m. \quad (44)$$

Normalize değerler

$$\bar{\rho}_i^{MF} = \frac{\tilde{\rho}_i^{MF}}{\max_i \tilde{\rho}_i^{MF}}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (45)$$

Olarak elde edilir.

Nihayetinde, $\bar{\rho}_i^{MF} \in [0,1]$ için maksimum fayda değeri elde edilir. Elde edilen referans noktası, oran sistemi ve çarpımsal form sıralamaları baskınlık teorisine göre tek bir sonuca indirgenir (denklem 41, 42, 45) (Brauers, W. K. M.; Zavadskas, E. K., 2011).

5.2.2. Problem tanımı

Akademik eğitimi güçlendirmek için, Çin üniversitesindeki bir yönetim okulu dünyanın çeşitli yerlerinden seçkin öğretmenleri okullarına davet etmişlerdir. Yöneticiler davet edilen öğretmenler arasından belli kriterler altından en iyi öğretmeni seçeceklerdir. Üniversitenin rektörü, dekanı ve insan kaynakları görevlisinin sorumluluğu ile bir karar vericiler paneli oluşturulmuştur. Öncelik sıralaması sırasıyla, rektör, dekan ve insan kaynakları şeklinde belirlenmiştir. Ancak bu çalışmada üç karar vericinin değerlendirmeleri ayrı ayrı verilmemiştir. (Gao, H., 2018) çalışmasında yer verilen karar matrisi kullanılmıştır. Karar vericiler, beş adayı belli nitelikler altında değerlendirmişlerdir. Adaylar $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ ile ifade edilebilir. Değerlendirmeleri dört niteliğe göre yapılmıştır. Bu nitelikler G_1 ahlak; G_2 araştırma yeteneği; G_3 , öğretim becerisi; G_4 eğitim geçmişi. (Wei G. , 2012) (Gao, H., 2018). Nitelikler için önceliklendirme ilişkisi şu şekilde verilir: $G_1 > G_2 > G_3 > G_4$. Karar matrisi oluşturulurken, karar vericiler Pisagor bulanık sayılarını kullanmışlardır (Gao, H., 2018). Niteliklerin ağırlık vektörü $\lambda = (0.3, 0.4, 0.2, 0.1)^T$ 'dir. Tablo-5.1 karar matrisini göstermektedir. Bu karar matrisinde, bir uzman her alternatifi PFS ortamındaki niteliklere göre değerlendirir.

Tablo 5.1. PFN için karar matrisi

A/x	G_1	G_2	G_3	G_4
A_1	(0.4, 0.2)	(0.3, 0.7)	(0.4, 0.5)	(0.6, 0.3)
A_2	(0.7, 0.2)	(0.4, 0.4)	(0.6, 0.3)	(0.5, 0.5)
A_3	(0.5, 0.1)	(0.9, 0.2)	(0.7, 0.4)	(0.7, 0.4)
A_4	(0.3, 0.2)	(0.4, 0.6)	(0.5, 0.1)	(0.6, 0.2)
A_5	(0.9, 0.2)	(0.9, 0.3)	(0.9, 0.2)	(0.9, 0.3)

5.2.2.1. Pisagor bulanık sayıları için MULTIMOORA karar verme süreci

Tablo 5.1'de Pisagor bulanık ortamında verilen karar matrisi üzerinde $q=3$ ve $k=2$ örneği için karar verme mekanizması adım adım anlatılmıştır.

Öncelikle, $q=3$ ve $k=2$ için kuvvet operatörü yardımıyla öncelik matrisi hesaplanır.

$$\chi_{PFNS} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5280 & 0.1806 & 0.0848 \\ 1 & 0.6675 & 0.3338 & 0.1984 \\ 1 & 0.5620 & 0.4836 & 0.3093 \\ 1 & 0.5095 & 0.2160 & 0.1214 \\ 1 & 0.8605 & 0.7323 & 0.6301 \end{bmatrix}$$

Adım 1. Bütün nitelikler fayda tiplidir. Ayrıca bir normalizasyon işlemine gerek yoktur.

Adım 2., MULTIMOORA-q-ROFS oran sisteminde q-ROFDPWA operatörü kullanılır.

$\lambda = (0.3, 0.4, 0.2, 0.1)^T$ niteliklerin ağırlıkları olmak üzere $\lambda_j > 0$, $q \geq 1$. Her alternatifin q-ROF faydası aşağıdaki gibi hesaplanır. $\rho_i^{RS} = q - \text{ROFDPWA}(s_{ij} | j = 1, 2, \dots, 4; \lambda)$

$$= (\hat{\mu}_i^{RS}, \hat{\nu}_i^{RS}) = [\hat{\mu}_1^{RS}, \hat{\nu}_1^{RS}; \hat{\mu}_2^{RS}, \hat{\nu}_2^{RS}; \dots; \hat{\mu}_5^{RS}, \hat{\nu}_5^{RS}] = [0.3945, 0.2213; 0.6455, 0.2261; 0.8505, 0.1136; 0.4084, 0.1504; 0.9000, 0.2199] \quad i = 1, 2, \dots, 5.$$

Adım 3. Bir önceki adımda elde edilen değerlere skor fonksiyonları uygulanır.

$$\tilde{\rho}_i^{RS} = (0.5253, 0.6287, 0.8069, 0.5324, 0.8592)$$

Değerler normalize edilir,

$$\bar{\rho}_i^{RS} = \frac{\tilde{\rho}_i^{RS}}{\max_i \tilde{\rho}_i^{RS}}, i = 1, 2, \dots, 5. \quad \bar{\rho}_i^{RS} = (0.6114, 0.7318, 0.9391, 0.6196, 1)$$

MULTIMOORA-q-ROFS oran sistemi için sıralam sonucu: $A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$ şeklindedir.

Adım 4. Referans noktası yaklaşımı uygulanır.

$$r_j = (\mu'_j, \nu'_j), \mu'_j = \max_i \mu_{ij}, \nu'_j = \min_i \nu_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, 4$$

$$d_{ij} = d_{\text{Hamming}}(\lambda_j s_{ij}, \lambda_j r_j), i = 1, 2, \dots, 5, j = 1, 2, \dots, 4.$$

Ayrıca, her bir alternatif için referans noktasından olan maksimum Chebyshev uzaklığı hesaplanır

$$\rho_i^{RP} = \max_j d_{ij} = (0.1325, 0.1119, 0.1811, 0.0833, 0.0048) \text{ ile hesaplanır.}$$

Adım 5. Normalize fayda skorları hesaplanır.

$$\bar{\rho}_i^{RP} = \frac{\min_i \rho_i^{RP}}{\rho_i^{RP}} = (0.0365, 0.0432, 0.0267, 0.0580, 1)$$

$$i = 1, 2, \dots 5.$$

MULTIMOORA-q-ROFS referans noktası için sıralama sonucu: $A_5 > A_4 > A_2 > A_1 > A_3$ şeklindedir.

Adım 6. MULTIMOORA-q-ROFS için çarpımsal fayda fonksiyonu üzerinde q-ROFDPWG operatör kullanılmıştır. $\lambda = (0.3, 0.4, 0.2, 0.1)^T$ niteliklerin ağırlıklarıdır. $\lambda_j > 0, q \geq 1$. Her bir alternatifin faydası aşağıdaki gibi hesaplanır

$$\rho_i^{MF} = q - \text{ROFDPWG} (s_{ij} | j = 1, 2, \dots 4; \lambda) = (\hat{\mu}_i^{MF}, \hat{\nu}_i^{MF})$$

$$= [0.3358, 0.3174; 0.4501, 0.0374; 0.5444, 0.0176; 0.3242, 0.1327; 0.8356, 0.0179] \quad i = 1, 2, \dots 5.$$

$$\tilde{\rho}_i^{MF} = (0.3388, 0.4646, 0.5222, 0.3835, 0.7328)$$

Normalize değerler hesaplanır.

$$\bar{\rho}_i^{MF} = \frac{\tilde{\rho}_i^{MF}}{\max_i \tilde{\rho}_i^{MF}} = (0.4623, 0.6341, 0.7126, 0.5234, 1), \quad i = 1, 2, \dots 5.$$

MULTIMOORA-q-ROFS çarpımsal fayda için sıralama sonucu: $A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$

Tablo 5.2. Baskınlık teorisine göre MULTIMOORA sonuçları

	Oran testi	Referans noktası	Çarpımsal form	MULTIMOORA
A_1	5	3	5	5
A_2	3	4	3	3
A_3	2	5	2	2
A_4	4	2	4	4
A_5	1	1	1	1

İki Moora ve çarpımsal dorm işlemlerinin sonucuna, baskınlık teorisi uygulandığında Tablo-5.2 elde edilir ve $q=3, k=2$ için en iyi alternatifin A_5 olduğu görülür.

Baskınlık teorisi sonucu MULTIMOORA yapısının sıralaması: $A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$ elde edilir.

5.2.2.2. Pisagor bulanık sayıları için MULTIMOORA karar verme sürecinde k ve q parametrelerinin etkisi

Önerilen birleştirme yöntemleri q-ROFN ortamında ve Dombi T-norm operatörü aracılığıyla oluşturulduğu için k ve q değerleri önemli rol oynamaktadır. Bu durumda önerilen yöntemi farklı k ve q parametrelerine göre değerlendirmek gerekmektedir. Tablo 5.4’de detaylı bir parametre analizi yapılmıştır. Ancak önerilen yöntemin adım adım detaylı olarak anlatılması için örnek olarak $q = 3$ ve $k = 2$ için özel durumları seçilmiştir. Bu özel durumlar hem diğer yöntemlerle karşılaştırmak hem de belirsizlikleri daha iyi ifade etmek için seçildi. $q = 1$ ise, belirsizlikler yalnızca sezgisel olarak ifade edilebilir. Ancak, veriler daha kapsamlı şekilde ele alınabilir. $q = 2$ ’de ise, belirsizlikler Pisagor bulanık kümesi ile ifade edilir. Ayrıca, veriler PFN’lerden oluşmaktadır. Ancak, q-ROF çalışmaları MADM problemlerine daha geniş bir perspektiften bakıldığında, $q = 3$ örnek olarak seçilmiştir. Ayrıca q değeri arttıkça skor değerlerinin birbirine yaklaştığı da Tablo-5.4’te görülmektedir. k ve q parametrelerinin önerilen yöntemler üzerindeki etkilerini detaylı olarak incelenmiştir. MULTIMOORA-q-ROF yapısı üzerinde parametrenin etkisi sonucunda elde edilen sıralamalar Tablo-5.4’te verilmiştir. Referans noktası yönteminde, hiçbir birleştirme yöntemi kullanılmadığından, yalnızca q değerlerine göre değişir. Bu nedenle q değerlerine göre referans noktası yaklaşımları Tablo-5.3’te verilmiştir.

Tablo 5.3. Pisagor bulanık karar matrisinin referans noktası yaklaşımı sıralamaları

q-parametresi	Fayda skoru	Sıralama
$q = 2$	$A_1 = 0.0684$ $x_2 = 0.0893$ $A_3 = 0.0712$ $A_4 = 0.0921$ $A_5 = 1$	$A_5 > A_4 > A_2 > A_3 > A_1$
$q = 3$	$A_1 = 0.0365$ $x_2 = 0.0432$ $A_3 = 0.0267$ $A_4 = 0.0580$ $A_5 = 1$	$A_5 > A_4 > A_2 > A_1 > A_3$
$q = 4$	$A_1 = 0.0184$ $x_2 = 0.0203$ $A_3 = 0.0098$ $A_4 = 0.0342$ $A_5 = 1$	$A_5 > A_4 > A_2 > A_1 > A_3$
$q = 5$	$A_1 = 0.0089$ $x_2 = 0.0094$ $A_3 = 0.0035$ $A_4 = 0.0192$ $A_5 = 1$	$A_5 > A_4 > A_2 > A_1 > A_3$

Tablo-5.3 ve Tablo-5.4, q ve k parametrelerinin MULTIMOORA-q-ROF yapısı üzerindeki etkisini göstermektedir. Tablo-5.3, en iyi alternatifin q değerlerine göre değişmediğini göstermektedir. Tablo-5.4’te q değerleri arttıkça fayda puanlarının birbirine yaklaştığı görülmektedir. Bu nedenle, q’nun üst sınırı 5 seçilmiştir.

MULTIMOORA'nın sonucu göz önüne alındığında, Dombi TN ile öncelikli birleştirme operatörü uygulamasının bir sonucu olarak, en iyi adayın A_5 olduğu görülmektedir. $q = 3, 4, 5$ ve $k = \{1, 2, 3, 5, 7, 10, 15\}$ değerleri için, kullanılan birleştirme operatörlerine bağlı olarak değiştiği görülmektedir. Adaylar aynı şekilde benzer sıralamadır ve en ideal seçilen aday A_5 'tir. Ancak $q = 2$ olduğunda, A_5 ve A_3 fayda değerleri $k = 7, 10, 15$ değerlerinde birbirine yakındır. Ancak, bu durum yine de MULTIMOORA'nın sonucunu etkilemez.

Tablo 5.4. Pisagor Bulanık karar matrisi için MULTIMOORA q -ROF üzerinde farklı parametrelerin etkisi

q-parametresi	K değerleri	Oran testi	Çarpımsal Form	MULTIMOORA
$q = 2$	$k = 2$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$ (0.6085, 0.7387, 0.9302, 0.6232, 1)	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$ (0.4729, 0.6559, 0.7613, 0.5315, 1)	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
	$k = 2$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
	$k = 3$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
	$k = 5$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
	$k = 7$	$A_3 > A_5 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
	$k = 10$	$A_3 > A_5 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
	$k = 15$	$A_3 > A_5 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
	$k = 1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
	$k = 2$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
	$k = 3$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
$q = 3$	$k = 5$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
	$k = 7$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$

5.2.2.3. *Q-rung bulanık sayıları için MULTIMOORA karar verme sürecinde k ve q parametrelerinin etkisi*

Tablo 5.1, Pisagor bulanık değerleri formatında verilmişti. Ancak önerilen yöntemin daha büyük q değerleri için geçerli olduğunu da göstermek gerekmektedir. Dolayısıyla karar matrisi q-ROFN sayılarına genişletilmiştir. Yeni karar matrisi Tablo 5.5'da verilmiştir. Pisagor karar matrisi bir q-ROF karar matrisine dönüştürülür. Dönüştürülen matris S_{ij} olsun. S_{11} , S_{32} , S_{23} , S_{44} hücrelerine örnek olarak (0.8, 0.7) q-ROFN sayısını atayalım. En iyi alternatif değiştirilmeden, alternatifler, kriterlere göre değiştirilmiştir.

Tablo 5.5. *q-ROFNs karar matrisi*

A/x	G_1	G_2	G_3	G_4
A_1	(0.8, 0.7)	(0.3, 0.7)	(0.4, 0.5)	(0.6, 0.3)
A_2	(0.7, 0.2)	(0.4, 0.4)	(0.8, 0.7)	(0.5, 0.5)
A_3	(0.5, 0.1)	(0.8, 0.7)	(0.7, 0.4)	(0.7, 0.4)
A_4	(0.3, 0.2)	(0.4, 0.6)	(0.5, 0.1)	(0.8, 0.7)
A_5	(0.9, 0.2)	(0.9, 0.3)	(0.9, 0.2)	(0.9, 0.3)

Eğer $\chi_{q-ROFNs}$ ve χ_{PFNs} öncelik matrisleri dikkate alınırsa, A_5 'in öncelik değerleri aynıdır. A_1, A_2, A_3 and A_4 , öncelik değerleri yeni karar matrisinden dolayı değişmektedir. Pisagor bulanık değerlerde de olduğu gibi $= 3$ ve $k = 2$ için sonuçlar tartışılmıştır. İlk olarak, üç yöntem ayrı ayrı incelenmiştir. İkincisi, tüm yöntemlerin sonuçları baskınlık teorisine göre birleştirilmiştir, MULTIMOORA sonucu elde edilmiştir. q değerlerine göre

Tablo 5.6. *q-ROFN bulanık karar matrisinin referans noktası yaklaşımı sıralamaları*

q parametresi	Fayda skoru	Sıralama
$q = 3$	$A_1 = 0.0250$ $A_2 = 0.0270$ $A_3 = 0.0416$ $A_4 = 0.0266$ $A_5 = 1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
$q = 4$	$A_1 = 0.0109$ $A_2 = 0.0114$ $A_3 = 0.0168$ $A_4 = 0.0113$ $A_5 = 1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
$q = 5$	$A_1 = 0.0046$ $A_2 = 0.0047$ $A_3 = 0.0067$ $A_4 = 0.0047$ $A_5 = 1$	$A_5 > A_3 > A_2 \approx A_4 > A_1$

referans noktası yaklaşımları Tablo-5.6'te verilmektedir. Q-ROFN ((0.8, 0.7)) en az $q = 3$ için geçerlidir. Q değeri arttıkça skor değerleri birbirine daha yakındır. Bu nedenle $q =$

5 için A_2 and A_4 alternatifleri birbirine yakındır. Tablo-5.7'deki MULTIMOORA bileşenleri q-ROFN'lerin baskınlık teorisine göre tek bir sonuçta birleştirilir.

Tablo 5.7. Baskınlık teorisine göre MULTIMOORA sonuçları (Q-ROFN)

	Oran sistemi	Referans noktası	Çarpımsal form	MULTIMOORA
A_1	5	5	5	5
A_2	3	3	3	3
A_3	2	2	2	2
A_4	4	4	4	4
A_5	1	1	1	1

Tablo-5.7'ye göre MULTIMOORA tarafından elde edilen sıralama $A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$ 'dir ($q = 3$ ve $k = 2$).

Tablo-5.7, q-ROFN'lerden oluşan karar matrisinin MULTIMOORA sonuçlarını göstermektedir. Tablo-5.8'de farklı q ve k parametreleri değerleri MULTIMOORA yöntemi ile değerlendirildi. Oran sisteminde q-ROFDPWA kullanılmıştır. A_1 'nin q değerleri arttıkça sıralamada yükseldiği görülmektedir. Bu durumda, öncelik operatörünün q-ROFDPWA yöntemini doğrudan etkilediğini söyleyebiliriz. Ayrıca, kriterlerde öncelik ilişkisi kişiye göre değişir. Bu nedenle, başka bir kişi kendi öncelik kriterini oluşturabilir ve sonuçları değerlendirebilir.

Tablo 5.8. Önerilen yöntem üzerinde k ve q parametresinin etkisi

q-parametresi	k değerleri	Oran testi	Çarpımsal Form	MULTIMOORA
	$k = 1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_1$ $> A_4$ (0.6388, 0.7335, 0.7830, 0.6184, 1)	$A_5 > A_2 > A_3 > A_4 > A_1$ (0.4269, 0.6079, 0.6015, 0.5456, 1)	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
	$k = 2$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_1$ $> A_4$	$A_5 > A_2 > A_3 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
	$k = 3$	$A_5 > A_3 > A_1 > A_2$ $> A_4$	$A_5 > A_2 > A_3 > A_4 > A_1$	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$

(0.8267,	0.8137,	(0.4911,
0.8254,	0.8012,	0.5365,
1)		0.5361,
		0.5373, 1)

5.2.2.4. Geçerlilik testi

Önerilen çoklu kriter karar verme yöntemlerinin, literatürde geçerliliğin olması önemli bir etkidir. Bir MADM yöntemi, alternatifler arasındaki ilişkiye, kriterler arasındaki tutarlılığa ve karar vericiler arasındaki tarafsız değerlendirmelere göre değişir. Ancak Wang ve Triantaphyllou, MADM yönteminin geçerli kabul edilmesi için üç etkili geçerlilik testi kriteri önermişlerdir (Wang & Triantaphyllou, 2008). Bu test kriterleri aşağıdaki gibidir.

Test Kriteri 1: "Her kriterin ağırlığını değiştirmeden, optimal olmayan alternatifin daha kötü bir alternatifle değiştirilmesi durumunda en iyi alternatif değişmez."

Test Kriteri 2: "Geçişlilik özelliği sağlanmalıdır"

Test Kriteri 3: "Çok ölçütlü problem alt problemlere ayrıldığında, alt problemlerin sırası başlangıçtaki problemin sırası ile tutarlı olmalıdır."

Önerilen MULTIMOORA yöntemi için geçerlilik testi adım adım aşağıdaki gibi incelenir. Tüm yöntemlerin sıralama sonuçları hesaplanır ve nihai MULTIMOORA sıralama sonuçları elde edilir. Ayrıca, PFS'ler için geçerlilik testi kriterleri uygulanır.

Test kriteri 1: Optimal olmayan alternatif olarak A_4 'ü seçelim. A_4 , alternatifi daha kötü bir alternatifle ($A_{4'}$) değiştirilmiştir. En iyi alternatifin değişip değişmediğini araştıralım. $q = 3$, $k = 2$ için

Varsayalım ki $A_{4'}$, $A_4 = \{(0.3,0.1), (0.3,0.7), (0.4,0.2), (0.5,0.5)\}$ olsun. Önerilen yöntem uygulandığında, yeni alternatifle elde edilen sıralama $A_5 > A_3 > A_2 > A_{4'} > A_1$ şeklindedir. Böylece, sıralama değişmedi ve test kriteri 1 sağlanır.

Test kriteri 2 ve 3: Verilen karar verme problemini alt problemlere ayıralım:

$\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, $\{A_2, A_3, A_4, A_5\}$, $\{A_3, A_4, A_5, A_1\}$ ve $\{A_4, A_5, A_1, A_2\}$. Her bir alt problemin sıralama sonuçları sırasıyla $A_3 > A_2 > A_4 > A_1$, $A_5 > A_3 > A_2 > A_4$, $A_5 >$

$A_3 > A_4 > A_1$, $A_5 > A_2 > A_4 > A_1$ olarak elde edilir. Böylece genel sıralama $A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$ olarak görülebilir. Bu sıralamalar arasında Geçişlilik özelliğinin de sağlandığını söyleyebiliriz. Nihayetinde, test kriteri 2 ve 3'ün sağlandığı görülür.

5.2.2.5. Diğer yöntemlerle karşılaştırma analizi

Bu bölümde önerilen birleştirme yöntemleri ile melez edilmiş MADM yöntemleri, mevcut diğer çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Hem Pisagor karar matrisi hem de q-ROF karar matrisi kullanılmıştır. Tablo-5.9 Pisagor karar matrisine göre diğer çalışmalarla karşılaştırma sonuçlarını göstermektedir.

Tablo 5.9. Pisagor karar matrisine göre diğer çalışmalarla karşılaştırma sonuçları

Yaklaşım	Sıralama
IFPWA/IFPWG (Lin, 2013)	Sonuç vermez
ITFPWA/ITFPWG (Zhang Z. , 2014)	Sonuç vermez
PFHPWA/PFHPWG (Gao, 2018)	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
PFWA/PFWG (Gao, 2018)	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
SPFWA/SPFWA (Ma & Xu, 2016)	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
q-ROFDWA/q-ROFDWG (q=3, k=2) (Jana, 2019)	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
q-ROFWA/q-ROFWG (Liu, P.; Liu, J., 2018c)	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
Önerilen metot birleştirme operatörleri ile MULTIMOORA-q-ROF (q=3, k=2)	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$

IFPWA / IFPWG ve ITFPWA / ITFPWG Pisagor bulanık karar matrisine göre sonuç vermemektedir. PFHPWA / PFHPWA, PFWA / PFWG ve SPFWA / SPFWG Pisagor bulanık değerleri için geçerlidir. Ancak çoklu kriter problemlerinin, daha genel bir yapı tanımlamak mümkündür. Bu nedenle q-ROFN'ler ele alınmaktadır. Diğer yandan, belirsizlikleri daha iyi ifade edebilmek için önerilen yapıya esneklik ve sağlamlık katmak gerekir. q-ROFDWA / q-ROFDWG yöntemleri öncelikli operatörleri içermez. Ayrıca, ek bir parametreye de sahip değillerdir. q-ROFDWA / q-ROFDWG yöntemleri q-ROFN'lerde tanımlanır. Ancak, nitelikler aynı öncelik düzeyinde değerlendirilir. Bir

çoklu kriter karar verme probleminde nitelikler ve karar vericiler farklı öncelik seviyelerine sahip olabilir. Belirsizlikleri daha iyi ifade etmek, nitelikler ile ilgili ağırlıkları, nitelikler arasında daha yüksek öncelikli niteliğin yerine getirilmesine dayalı olarak modelleyerek mümkündür. Bu nedenle çalışmamızda öncelik kavramının önemli bir rolü vardır.

Tablo 5.10. *q-ROFN karar matrisine göre diğer çalışmalarla karşılaştırma sonuçları*

Yaklaşım	Sıralama
IFPWA/IFPWG (Lin, 2013)	Sonuç vermez
ITFPWA/ITFPWG (Zhang Z. , 2014)	Sonuç vermez
PFHPWA/PFHPWG (Gao, 2018)	Sonuç vermez
PFWA/PFWG (Gao, H., 2018)	Sonuç vermez
SPFWA/SPFWA (Ma & Xu, 2016)	Sonuç vermez
q-ROFDWA/q-ROFDWG (Jana, 2019)	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
q-ROFWA/q-ROFWG (Liu, P.; Liu, J., 2018)	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
Önerilen metot birleştirme operatörleri ile MULTIMOORA-q-ROF (q=3, k=2)	$A_5 > A_3 > A_2 > A_4 > A_1$

Tablo-5.8 göz önüne alındığında, A_5 önerilen MULTIMOORA yapısındaki en iyi adaydır. Önerdiğimiz yöntemler yalnızca birleştirme yöntemlerini içermez, aynı zamanda MULTIMOORA yöntemiyle işbirliği içinde çalışır. Tablo-5.10'da önerilen yöntemler q-ROFN'ler için önerilen diğer çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Ancak, IFPWA / IFPWG, ITFPWA / ITFPWG ile ilgili çalışmalar sadece sezgisel bulanık kümeler için geçerlidir. Ayrıca, PFHPWA / PFHPWG, PFWA / PFWG, SPFWA / SPFWA çalışmaları PFN'lerde geçerlidir. IFN'ler için $0.8 + 0.7 < 1$ koşulu sağlanmamıştır. PFN'ler için $0.8^2 + 0.7^2 < 1$ koşulu sağlanmamıştır. Bu nedenle, bu yöntemler sonuç vermez. Karar verme problemlerinde, karar matrisleri uzmanlar tarafından oluşturulmasına rağmen, bu gerçek hayatta farklılık gösterebilir. Q-ROFDWA / q-ROFDWG ve q-ROFDWA / q-ROFDWG operatörleri, bazı özelliklerin diğer özelliklerden daha yüksek öncelikli olabileceği gerçek durumları dikkate alamazlar.

6. YANSIZ KUVVET OPERATÖRLERİ³

Birleştirme operatörleri (AO'lar) tüm alternatifler üzerinden bir değerlendirme sonucu sağlamaktadır. AO'lar yapıları nedeniyle çok kriterli problemlerin çözümü için daha uygundur. Diğer yandan, dinamik yapısı sayesinde, q-rung orthopair bulanık kümeleri (q-ROFS'ler) karar vericiler (DM'ler) için daha geniş bir değerlendirme sağlamaktadır. q-ROFS'ler, değişen $q \geq 1$ parametrelerine sahip birçok bulanık kümeyi içermektedir. Çok özellikli grup karar verme (MAGDM) problemlerinin en önemli kısımlarından biri, DM'lerin yanlılıklarını, çözüm yaklaşımlarında doğru bir şekilde ele alabilmektir. Tez kapsamında önerilen üçüncü çalışma, yansızlık operatörü ile MCDM problemlerine çözüm aramaktır. Önerilen yöntem, kuvvet birleştirme operatörü ile yansızlık operatörünün melez edilmesiyle meydana gelir. Önerilen “yansız kuvvet operatörü” için kuvvet ve yansızlık operatörlerinin literatürde yer verilen bazı çalışmalarından bahsedelim.

Kuvvet birleştirme operatörü, karar vericilerin nihai karara olumsuz etkilerini ortadan kaldırmaktadır (Yager, R. R., 2001). Literatürde, q-ROFS ve kuvvet operatörlerinin melez edildiği çalışmalar bulunmaktadır. Bir çalışmada, kuvvet operatörü ile kriterlerin birbirleri arasındaki ilişkileri hesaba katan MSM operatörü birleştirilmiştir (Liu, P.; Chen, S. M.; Wang, P., 2018d). Diğer bir çalışmada BM ve kuvvet operatörü dilsel değişkenli q-ROFS ortamında MCDM yöntemlerine uygulanmıştır (Liu, P.; Liu, W., 2019). Diğer yandan son zamanlarda önerilen yansızlık operatörü de farklı bulanık küme ortamlarında kullanılmıştır. Yansızlık operatörü, PFS, nötrosofik ve q-ROFS ortamlarında kullanılmıştır (Garg, H.; Chen, S. M., 2020a; Garg, H., 2019a; Garg, 2019b). Bütün çalışmalar dikkate alındığında, hem kuvvet operatörünün, girdi argümanlarının arasındaki ilişkiyi hesaba katması hem de MCDM yöntemleri için tarafsız ve adil bir yapı oluşturmak adına yansızlık operatörünün kullanılması, bu çalışmadaki ana motivasyondur. Ayrıca yansız kuvvet operatörü üzerine odaklanan bu çalışmada, q-ROFS için tereddütlük derecesini de hesaba katan bir skor fonksiyonu geliştirilmiştir.

Bu çalışmada, kuvvet birleştirme (PA) ve Tarafsızlık birleştirme (NA), DM'lerin değerlendirilmesinde daha adil ve tarafsız kararlarla çözüme katkı sağlamak için birleştirilmişlerdir. PA operatörü, girdi değerleri arasındaki ilişkiyi öğrenmemizi sağlar.

³ Bu bölüm “A novel approach to multi-attribute group decision making based on power neutrality aggregation operator for q-rung orthopair fuzzy sets” adlı makale olarak, International Journal of Intelligent System dergisine gönderilmiştir. İlk revizyon sonrası değerlendirilme aşamasındadır (Under review).

Bir diğer yandan, NA operatörü DM'lerin kararlarını tarafsız bir tutum perspektifinden değerlendirmemize olanak tanır. Bu çalışmada önerilen kuvvet yansızlık birleştirme (PNA) operatörü daha objektif sonuçlar üretmektedir. Önerilen operatör, her iki operatörün avantajlarıyla daha tutarlıdır ve DM'lerin tutumunu daha objektif bir şekilde ele alınmaktadır. Ayrıca, önerilen yöntemlerin üstün yönleri sayısal örneklerle gösterilmiştir.

6.1. Çoklu nitelikli grup karar verme yaklaşımı için Q-rung bulanık kümelere dayalı yansız karar verme operatörü

Karar vericilerin tarafsızlığı, karar alma mekanizmalarında önemli bir faktördür. Çünkü karar vericilerin görüşlerinin değerlendirmelere yansması objektif bir değerlendirmenin olumsuz bir örneğidir. Bu çalışmada, karar vericilerin olumsuz etkilerini azaltmak ve karar vericiler arasında daha fazla tarafsızlık sağlamak için iki farklı birleştirme operatörü birleştirilmiştir. Bu operatörler PA ve NA operatörleridir. Tarafsızlık birleştirme operatörü karar vericiler için tarafsızlık sağlar. PA operatörü ise, giriş verilerine dayanarak bir ağırlık vektörü oluşturulmasına izin verir. Bu yüzden, PNA operatörü çoklu kriter karar verme problemlerinde uygulanmış ve literatürde yer alan diğer çalışmalar ile karşılaştırılmıştır.

Tanım 6.1. A_i , q-ROFNs'ın bir koleksiyonu olsun. PNA aşağıdaki denklem ile tanımlanır.

$$q - ROFWPNA(A_1, A_2, \dots, A_n) = \left(\sqrt[q]{\frac{\sum_{i=1}^n \psi_i \mu_i^q}{\sum_{i=1}^n \psi_i (\mu_i^q + v_i^q)} \cdot \left(1 - \prod_{i=1}^n (\pi_i^q)^{\psi_i}\right)}, \sqrt[q]{\frac{\sum_{i=1}^n \psi_i v_i^q}{\sum_{i=1}^n \psi_i (\mu_i^q + v_i^q)} \cdot \left(1 - \prod_{i=1}^n (\pi_i^q)^{\psi_i}\right)} \right)$$

Bu denklem üzerinde,

$\psi_i = \frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))}$, w_i , $A_i = (\mu_i, v_i)$ 'ni ağırlık vektörüdür. $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ and $\sum_{i=1}^n \psi_i = 1$. ψ_i ise q-ROFN'ın ağırlığı olarak ifade edilir. Ayrıca, $T(A_j) = \sum_{i=1, i \neq j}^n \text{Sup}(A_j, A_i)$ ve $\text{Sup}(A_i, A_j) = 1 - d(A_i, A_j)$ denklemlerinde $d(A_i, A_j)$, A_i ve A_j arasındaki normalize hamming uzaklığıdır. $\text{Sup}(A_i, A_j)$ ise destek ölçümüdür (Support measure).

Tanım 6.2. A_i , q -ROFNs'ın bir koleksiyonu olsun. PNG aşağıdaki denklem ile tanımlanır.

$$q - ROFWPNG(A_1, A_2, \dots, A_n) = \left(\sqrt[q]{\frac{\prod_{i=1}^n (\mu_i^q)^{\psi_i}}{\prod_{i=1}^n (\mu_i^q)^{\psi_i} + \prod_{i=1}^n (\nu_i^q)^{\psi_i}} \cdot (1 - \prod_{i=1}^n (\pi_i^q)^{\psi_i})}, \sqrt[q]{\frac{\prod_{i=1}^n (\nu_i^q)^{\psi_i}}{\prod_{i=1}^n (\mu_i^q)^{\psi_i} + \prod_{i=1}^n (\nu_i^q)^{\psi_i}} \cdot (1 - \prod_{i=1}^n (\pi_i^q)^{\psi_i})} \right)$$

Bu denklem üzerrinde,

$\psi_i = \frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))}$, w_i , $A_i = (\mu_i, \nu_i)$ 'ni ağırlık vektörüdür. $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ and $\sum_{i=1}^n \psi_i = 1$. ψ_i ise q -ROFN'ın ağırlığı olarak ifade edilir. Ayrıca, $T(A_j) = \sum_{i=1, i \neq j}^n \text{Sup}(A_j, A_i)$ ve $\text{Sup}(A_i, A_j) = 1 - d(A_i, A_j)$ denklemlerinde $d(A_i, A_j)$, A_i ve A_j arasındaki normalize hamming uzaklığıdır. $\text{Sup}(A_i, A_j)$ ise destek ölçümüdür (Support measure).

Teorem 6.1. A_i , q -ROFNs olsun. $1 \leq i \leq n$ ve $q \geq 1$ için, q -ROFWPNA operatör ile birleştirilmiş değer yine bir q -ROFN'dir.

$$q - ROFWPNA(A_1, A_2, \dots, A_n) = \left(\sqrt[q]{\frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))} \mu_i^q}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))} (\mu_i^q + \nu_i^q)} \cdot \left(1 - \prod_{i=1}^n (\pi_i^q)^{\frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))}}\right)}, \sqrt[q]{\frac{\sum_{i=1}^n \frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))} \nu_i^q}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))} (\mu_i^q + \nu_i^q)} \cdot \left(1 - \prod_{i=1}^n (\pi_i^q)^{\frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))}}\right)} \right) \quad (46)$$

İspat. Teorem ispatında matematiksel indüksiyon prensibi kullanılmıştır.

Adım 1. $n = 1$, $A_i = (\mu_i, \nu_i)$ $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} q - ROFWPNA(A_1) &= \psi_1 A_1 \\ &= \left(\sqrt[q]{\frac{\psi_1 \mu_1^q}{\psi_1 (\mu_1^q + \nu_1^q)} \cdot (1 - (\pi_1^q)^{\psi_1})}, \sqrt[q]{\frac{\psi_1 \nu_1^q}{\psi_1 (\mu_1^q + \nu_1^q)} \cdot (1 - (\pi_1^q)^{\psi_1})} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Burada } \psi_1 = \frac{w_1(1+T(a_1))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))}.$$

Böylece, $n=1$ için Denklem (46) sağlanır.

Adım 2. Varsayalım ki $n=k$ için doğru olsun., yani

$$q - ROFWPNA(A_1, A_2, \dots, A_k) = \left(\sqrt[q]{\frac{\sum_{i=1}^k \psi_i \mu_i^q}{\sum_{i=1}^k \psi_i (\mu_i^q + \nu_i^q)} \cdot (1 - \prod_{i=1}^k (\pi_i^q) \psi_i)}, \sqrt[q]{\frac{\sum_{i=1}^k \psi_i \nu_i^q}{\sum_{i=1}^k \psi_i (\mu_i^q + \nu_i^q)} \cdot (1 - \prod_{i=1}^k (\pi_i^q) \psi_i)} \right)$$

Burada $\psi_i = \frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))}$.

Adım 3. Nihayetinde, $n=k+1$ için,

$$q - ROFWPNA(A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}) = q - ROFWPNA(A_1, A_2, \dots, A_k) \odot \psi_{k+1} A_{k+1}$$

$$\left(\sqrt[q]{\frac{MCS^q(q - ROFWPNA(A_1, A_2, \dots, A_k), \psi_{k+1} A_{k+1})}{\left(MCS^q(q - ROFWPNA(A_1, A_2, \dots, A_k), \psi_{k+1} A_{k+1}) \right) + NCS^q(q - ROFWPNA(A_1, A_2, \dots, A_k), \psi_{k+1} A_{k+1})}} \right. \\ \cdot PS \left(\sqrt[q]{1 - \prod_{i=1}^k (\pi_i^q) \psi_i}, \sqrt[q]{1 - (\pi_{k+1}^q) \psi_{k+1}} \right), \\ \left. \sqrt[q]{\frac{MCS^q(q - ROFWPNA(A_1, A_2, \dots, A_k), \psi_{k+1} A_{k+1})}{\left(MCS^q(q - ROFWPNA(A_1, A_2, \dots, A_k), \psi_{k+1} A_{k+1}) \right) + NCS^q(q - ROFWPNA(A_1, A_2, \dots, A_k), \psi_{k+1} A_{k+1})}} \right) \\ \cdot PS \left(\sqrt[q]{1 - \prod_{i=1}^k (\pi_i^q) \psi_i}, \sqrt[q]{1 - (\pi_{k+1}^q) \psi_{k+1}} \right) \Bigg)$$

Burada,

$$\psi_{k+1} = \frac{w_{k+1}(1+T(a_{k+1}))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))}. \quad MCS^q(q - ROFWPNA(A_1, A_2, \dots, A_k), \psi_{k+1} A_{k+1}) = \\ MCS^q(q - ROFWPNA(A_1, A_2, \dots, A_k)) + MCS^q(\psi_{k+1} A_{k+1}) = \sum_{i=1}^k \psi_i \mu_i^q + \\ \psi_{k+1} \mu_{k+1}^q = \sum_{i=1}^{k+1} \psi_i \mu_i^q.$$

Benzer şekilde,

$$NCS^q(q - ROFWPNA(A_1, A_2, \dots, A_k), \psi_{k+1} A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \psi_i \nu_i^q.$$

$$\begin{aligned} & \text{PS tanımından, } PS \left(\sqrt[q]{1 - \prod_{i=1}^k (\pi_i^q)^{\psi_i}}, \sqrt[q]{1 - (\pi_{k+1}^q)^{\psi_{k+1}}} \right) \\ &= \sqrt[q]{1 - \prod_{i=1}^{k+1} (\pi_i^q)^{\psi_i}}. \text{ Böylece, } q - ROFWPNA(A_1, A_2, \dots, A_{k+1}) \end{aligned}$$

$$= \sqrt[q]{\frac{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))} \mu_i^q}{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))} (\mu_i^q + \nu_i^q)} \cdot \left(1 - \prod_{i=1}^{k+1} (\pi_i^q)^{\frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))}}\right), \sqrt[q]{\frac{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))} \nu_i^q}{\sum_{i=1}^{k+1} \frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))} (\mu_i^q + \nu_i^q)} \cdot \left(1 - \prod_{i=1}^{k+1} (\pi_i^q)^{\frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))}}\right)}.$$

Elde edilir. $n=k+1$ için deklemler 46 sağlanır. Dolayısıyla, denklem 46 bütün n değerleri için doğrudur.

Teorem 6.2. A_i , q -ROFNs olsun. $1 \leq i \leq n$ ve $q \geq 1$ için, q -ROFWPNG operatör ile birleştirilmiş değer yine bir q -ROFN'dir.

$$q - ROFWPNG(A_1, A_2, \dots, A_n) =$$

$$\left(\sqrt[q]{\frac{\prod_{i=1}^n (\mu_i^q)^{\psi_i}}{\prod_{i=1}^n (\mu_i^q)^{\psi_i} + \prod_{i=1}^n (\nu_i^q)^{\psi_i}} (1 - \prod_{i=1}^n (\pi_i^q)^{\psi_i})}, \sqrt[q]{\frac{\prod_{i=1}^n (\nu_i^q)^{\psi_i}}{\prod_{i=1}^n (\mu_i^q)^{\psi_i} + \prod_{i=1}^n (\nu_i^q)^{\psi_i}} (1 - \prod_{i=1}^n (\pi_i^q)^{\psi_i})} \right).$$

Denklem üzerinde, $\psi_i = \frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))}$ değeri ile q -ROFN ağırlıklar ifade edilir. Ayrıca teoremin ispatı 6.1 ile benzer şekilde yapılır.

q -ROFWPNA and q -ROFWPNG operatörlerinin bazı özelliklerine aşağıda değinilmiştir.

(İdempotentlik) $A_i = (\mu_i, \nu_i)$, q -ROFNs kümesi olsun. $1 \leq i \leq n$ ve $q \geq 1$ için. Eğer bütün A_i değerleri birbirine eşit ise o halde, bütün i 'ler için $A_i = A$ 'dir. Dolayısıyla, $q-ROFWPNA_w(A_1, A_2, \dots, A_n) = A = (\mu, \nu)$ ve $q-ROFWPNG_w(A_1, A_2, \dots, A_n) = A = (\mu, \nu)$ elde edilebilir.

(Sınırlılık) $A_i = (\mu_i, \nu_i)$, q -ROFNs kümesi olsun. Ayrıca aşağıdaki öncüllerin sağlandığı açıkça görülebilir,

$$(a) \min_i \{\mu_i^q + \nu_i^q\} \leq \mu_p^q + \nu_p^q \leq \max_i \{\mu_i^q + \nu_i^q\}$$

$$(b) \frac{\min_i\{\mu_i^q + v_i^q\} \cdot \min_i\{\mu_i^q\}}{\max_i\{\mu_i^q + v_i^q\}} \leq \mu_p^q \leq \min_i\left\{\frac{\max_i\{\mu_i^q + v_i^q\} \cdot \max_i\{\mu_i^q\}}{\min_i\{\mu_i^q + v_i^q\}}, 1\right\}$$

$$(c) \frac{\min_i\{\mu_i^q + v_i^q\} \cdot \min_i\{v_i^q\}}{\max_i\{\mu_i^q + v_i^q\}} \leq v_p^q \leq \min_i\left\{\frac{\max_i\{\mu_i^q + v_i^q\} \cdot \max_i\{v_i^q\}}{\min_i\{\mu_i^q + v_i^q\}}, 1\right\}$$

Dolayısıyla, $q - ROFWPNA_w(A_1, A_2, \dots, A_n) = (\mu_p, v_p)$ ve

$q - ROFWPNG_w(A_1, A_2, \dots, A_n) = (\mu_p, v_p)$ elde edilir.

6.2. Q-rung bulanık kümeler için önerilen yeni bir skor fonksiyonu

Bu çalışmada, çalışmada sezgisel bulanık kümelerin skor fonksiyonu (Zeng, Chen, & Kuo, 2019) q-ROFN'ler için genişletilmiştir. Skor fonksiyonlarında kararsızlık derecesi karar alma mekanizmasında önemli bir rol oynamaktadır. Bu nedenle skor fonksiyonlarını tanımlarken iki kısımdan oluştuğu düşünülebilir. Birincisi klasik $\mu^q - v^q$ skor fonksiyonu kısmıdır. Bununla birlikte, ikinci bölüm için skor fonksiyonuna tereddüt derecesi eklenmesi, problemlerin tereddütlük kısımlarının da ele alınmasını sağlamaktadır. Böylece q-ROFN'ler için skor fonksiyonunu aşağıdaki gibi genişletebiliriz:

Tanım 6.3. *q-ROFNs için Proposed Score Function (PSF)* $A = (\mu_A, v_A)$ ve $B = (\mu_B, v_B)$ q-ROFNs olsun. Skor fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$S_{PSF}(A) = \mu_A^q - v_A^q - \pi_A^q \times \frac{\log_2(1 + \pi_A^q)}{100} \quad (47)$$

Burada $S_{PSF}(A) \in [-1, 1]$.

1. Eğer $\pi_A > \pi_B$ ise, o halde $S_{PSF}(A) < S_{PSF}(B)$;
2. Eğer $\pi_A < \pi_B$ ise, o halde $S_{PSF}(A) > S_{PSF}(B)$.

Denklem 47'deki tereddütlük kısmını inceleyelim. İki q-ROFN $\mu^q - v^q$ skor fonksiyonu ile eşitken $\frac{\log_2(1 + \pi_A^q)}{100}$ kısmı iki q-ROFN arasında ayırım yapmamızı sağlar. $\frac{\log_2(1 + \pi_A^q)}{100}$ değeri ne kadar küçükse q-ROFN'nin S_{PSF} değeri o kadar büyük olur. Ayrıca, skor fonksiyonunun μ 'ye göre arttığı ve v 'ya göre azaldığı kolayca görülebilir. S_{PSF} ile ilgili bazı özelliklere aşağıda değinilmiştir.

- $-1 \leq S_{PSF}(A) \leq 1$;
- $S_{PSF}(A) = 1$ if $A = (1,0)$;
- $S_{PSF}(A) = -1$ if $A = (0,1)$;
- $A \neq B$ if $S_{PSF}(A) \neq S_{PSF}(B)$.
- If $A > B$, then $S_{PSF}(A) > S_{PSF}(B)$

Tablo 6.1. Var olan bazı skor fonksiyonlarının karşılaştırılması

Örnekler	q değerleri	$S_{Garg\&Chen}$	$S_{Peng\&etal.}$	S_{PSF}	S_{Liu}
$A = (0.5,0)$ $B = (0.5,0.5)$	$q = 1$	$A > B$	$A > B$	$A > B$	$A > B$
	$q = 2$	$A > B$	$A > B$	$A > B$	$A > B$
	$q = 3$	$A > B$	$A > B$	$A > B$	$A > B$
$A = (0,0.1)$ $B = (0,0.2)$	$q = 1$	$A > B$	$A > B$	$A > B$	$A > B$
	$q = 2$	$A > B$	$A > B$	$A > B$	$A > B$
	$q = 3$	$A > B$	$A > B$	$A > B$	$A > B$
$A = (0.2,0.1)$ $B = (0.3,0.4)$	$q = 1$	$A < B$	$A > B$	$A > B$	$A > B$
	$q = 2$	$A < B$	$A > B$	$A > B$	$A > B$
	$q = 3$	$A > B$	$A > B$	$A > B$	$A > B$
$A = (0.68,0.12)$ $B = (0.60,0.04)$	$q = 1$	$A > B$	$A < B$	$A > B$	$A = B$
	$q = 2$	$A > B$	$A > B$	$A > B$	$A > B$
	$q = 3$	$A > B$	$A > B$	$A > B$	$A > B$
$A = (0.4,0.1)$ $B = (\sqrt{0.1501}, 0.01)$	$q = 1$	$A < B$	$A < B$	$A < B$	$A < B$
	$q = 2$	$A > B$	$A < B$	$A > B$	$A = B$
	$q = 3$	$A > B$	$A > B$	$A > B$	$A > B$
$A = (0.6,0.3)$ $B = (0.5,0.2)$	$q = 1$	$A > B$	$A < B$	$A > B$	$A = B$
	$q = 2$	$A > B$	$A > B$	$A > B$	$A > B$
	$q = 3$	$A > B$	$A > B$	$A > B$	$A > B$

Yakın zamanda önerilen skor fonksiyonları, önerilen skor fonksiyonu ile karşılaştırılmıştır. Çalışmada bahsedilen fonksiyonda (Garg, H.; Chen, S. M., 2020b),

tereddütlik derecesi skor fonksiyonuna dahil edilmiştir. Benzer şekilde, diğer bir çalışmada (Xindong Peng, 2018), tereddüt derecesinin etkisi gözlenmektedir. Kararsızlık derecesinin önerilen skor fonksiyonu ile etkisine dayanarak, bu iki skor fonksiyonu karşılaştırılmıştır. $A = (\mu_A, \nu_A)$ bir q-ROFN olsun.

$S_{Garg\&Chen}(A) = \frac{e^{\mu_A^q - \nu_A^q}}{1 + \pi_A^q}$, burada $S_{Garg\&Chen}(A) \in [e^{-1}, e]$ (Garg, H.; Chen, S. M., 2020b)

$$S_{Peng\&etal.}(A) = \mu_A^q - \nu_A^q + \left(\frac{e^{\mu_A^q - \nu_A^q}}{e^{\mu_A^q - \nu_A^q} + 1} - \frac{1}{2} \right) \pi_A^q,$$

burada $S_{Peng\&etal.}(A) \in [-1, 1]$ (Xindong Peng, 2018)

Yakın zamanda önerilen skor fonksiyonları Tablo-6.1'de karşılaştırılmıştır. Önerilen fonksiyonun q değerlerine göre diğer fonksiyonlardan daha stabil olduğu görülmektedir.

6.3. Önerilen operatörün uygulanması

Çalışmada önerilen birleştirme yöntemi ile yeni bir MAGDM mekanizması önerildi. Q-ROFS ortamında tipik bir MAGDM problemini ifade edelim. $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ bir dizi alternatiflerin kümesi olsun, $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ bir dizi niteliklerin kümesi olsun. Niteliklerin ağırlıkları $w_j > 0, (j = 1, 2, \dots, n)$ olarak ifade edilir. Ayrıca, $\sum_{j=1}^n w_j$ sağlanır. $\Lambda_k = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ karar vericilerin ağırlığını gösterir. $D = \{D_1, D_2, \dots, D_p\}$ uzman koleksiyonu olsun. Uzman D_k tarafından verilen alternatif A_i 'den C_j özelliğinin değerlendirme değerinin $\Omega_{ij}^s = \langle \mu_{ij}^s, \nu_{ij}^s \rangle$ $s = 1, 2, \dots, p$ formunda ifade edilir. Karar matrisi aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$R^s = \langle r_{ij} \rangle_{m \times n}^s = \begin{matrix} & \begin{matrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} r_{11}^s & r_{12}^s & \dots & r_{1n}^s \\ r_{21}^s & r_{22}^s & \dots & r_{2n}^s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1}^s & r_{m2}^s & \dots & r_{mn}^s \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (48)$$

Önerilen birleştirme operatörünü temel alan yeni çok kriterli prosedür adımları aşağıdaki gibidir:

Karar vericilerin birleştirilmiş karar matrisi hesaplanır.

Adım 1. Birden çok ölçüt probleminde iki farklı öznelilik türü vardır. Bu özellik türleri maliyet türü (J_1) ve fayda türü (J_2) olarak ikiye ayrılır. Normalleştirilmiş karar matrisi denklem (49) ile ifade edilmektedir.

$$\delta_{ij}^s = \begin{cases} \langle v_{ij}^s, \mu_{ij}^s \rangle; & \text{for } J_1 \text{ attribute} \\ \langle \mu_{ij}^s, v_{ij}^s \rangle; & \text{for } J_2 \text{ attribute} \end{cases} \quad (49)$$

Adım 2. Destek (Support) değeri hesaplanır.

$$Sup(\delta_{ij}^s, \delta_{ik}^t) = 1 - d(\delta_{ij}^s, \delta_{ik}^t), j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (50)$$

($s, t = 1, 2, \dots, p$), ($i = 1, 2, \dots, m$). Bu çalışmada normalize hamming uzaklığı tanımlanır [2].

$$d(\delta_{ij}^s, \delta_{ij}^t) = \frac{|(\mu_{ij}^q)^s - (\mu_{ij}^q)^t| + |(v_{ij}^q)^s - (v_{ij}^q)^t| + |(\pi_{ij}^q)^s - (\pi_{ij}^q)^t|}{2} \quad (51)$$

Adım 3. δ_{ij}^s , q-ROFN'nin destek değerrinin, diğer bir q-ROFNs ile olan δ_{ij}^t değerleri hesaplanır

$$T(\delta_{ij}^s) = \sum_{t=1, s \neq t}^p Sup(\delta_{ij}^s, \delta_{ij}^t) \quad (52)$$

Adım 4. Her bir karar vericinin ağırlıkları ile kuvvet operatörü ağırlıkları hesaplanır.

$$\psi_{ij}^s = \frac{\lambda_s(1+T(\delta_{ij}^s))}{\sum_{s=1}^p \lambda_s(1+T(\delta_{ij}^s))} \quad (53)$$

burada $\sum_{s=1}^p \psi_{ij}^s = 1$. λ_s karar vericilerin ağırlıklarıdır.

Adım 5. Tüm karar vericiler tarafından oluşturulan karar matrisleri tek bir karar matrisi ile temsil edilir. Bu adımda, denklem (46) ile ifade edilen q-ROFWPNA birleştirme yöntemi kullanılır.

$$q - ROFWPNA(\delta_{ij}^1, \delta_{ij}^2, \dots, \delta_{ij}^p) =$$

$$\left(\sqrt[q]{\frac{\sum_{s=1}^p \psi_{ij}^s \mu_{ij}^q}{\sum_{s=1}^p \psi_{ij}^s (\mu_{ij}^q + v_{ij}^q)} \cdot \left(1 - \prod_{s=1}^p (\pi_{ij}^q)^{\psi_{ij}^s}\right)}, \sqrt[q]{\frac{\sum_{s=1}^p \psi_{ij}^s v_{ij}^q}{\sum_{s=1}^p \psi_{ij}^s (\mu_{ij}^q + v_{ij}^q)} \cdot \left(1 - \prod_{s=1}^p (\pi_{ij}^q)^{\psi_{ij}^s}\right)} \right) \quad (54)$$

Birleştirilmiş alternatif matrisinin hesaplanması

Adım 6. Destek değerinin hesaplanması

$$Sup(\delta_{ij}, \delta_{ik}) = 1 - d(\delta_{ij}, \delta_{ik}) \quad (55)$$

$$j, k = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m$$

Adım 7. $T(\delta_{ij}^s)$ q-ROFN'nin destek değerinin, diğer bir q-ROFNs ile olan $T(\delta_{ik}^t)$ değerleri hesaplanır

$$T(\delta_{ij}) = \sum_{k=1, k \neq j}^n Sup(\delta_{ij}^s, \delta_{ik}^t) \quad (56)$$

Adım 8. Alternatiflerin ağırlıkları ile kuvvet operatörü ağırlıkları hesaplanır.

$$\xi_{ij} = \frac{w_j(1+T(\delta_{ij}))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(\delta_{ij}))} \quad (57)$$

burada, $\sum_{s=1}^p \psi_{ij}^s = 1$. w_s kriterlerin ağırlıklarıdır.

Adım 9. Her bir alternatifin δ_i değerlerini hesaplamak için, denklem (46) ile ifade edilen q-ROFWPNA denklemi kullanılır.

Adım 10. Denklem (47) 'ye göre, her bir alternatifin skor değerleri hesaplanmaktadır.

Adım 11. Son olarak, tüm skor değerleri hesaplanır ve sıralama sonuçlarına göre en ideal alternatif seçilir.

6.3.1. Önerilen operatörün uygulanması

Bu bölüm önerilen birleştirme yöntemine dayanan MAGDM örnekleri sunar. Bu çalışmada, önerilen yöntem üç farklı çalışmada belirtilen verilere uygulanmaktadır (Liu, P.; Chen, S. M.; Wang, P., 2018; Liu, P.; Chen, S. M., 2016a; Xu, Z., 2011). Ayrıca yöntemimiz verilerini kullandığımız diğer çalışmalarla karşılaştırıldı. Çalışmamızın üstün yönlerinden ayrıntılı olarak yer verilmiştir.

Örnek 6.1. (Liu, P.; Chen, S. M.; Wang, P., 2018): İlk örnek, gerçek hayattan ilham bir çok kriter karar verme problemdir. Şirketlerin özelliklerine göre mali durumunu kontrol edilmektedir. Varsayalım ki üç karar vericimiz var $D^p (p = 1, 2, 3)$. Bu karar verme problemi beş şirket $A_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ ve dört özellik $C_j (j = 1, 2, 3, 4)$ oluşmaktadır. (C_1) şirketlerin kurumsal yönetim düzeyine göre yatırım yaptığını, (C_2) ticari büyüme yeteneğini, (C_3) ekonomik fayda niteliklerini, (C_4) kurumsal itibar özelliklerini göstermektedir. Ayrıca, uzmanların ağırlıkları $\Lambda_k = (0.35, 0.40, 0.25)^T$ olarak

verilmiştir. Niteliklerin ağırlıkları ise (0.2,0.1,0.3,0.4) olarak verilsin. Uzmanlar tarafından oluşturulan karar matrisleri $\delta^1, \delta^2, \delta^3$ sırasıyla Tablo 2,3 ve 4'te verilmiştir.

Tablo 6.2. D_1 uzmanının karar matrisi

Alternatifler	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$\langle 0.2, 0.5 \rangle$	$\langle 0.4, 0.6 \rangle$	$\langle 0.4, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.2 \rangle$
A_2	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.4, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.1 \rangle$	$\langle 0.5, 0.2 \rangle$
A_3	$\langle 0.4, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.4, 0.3 \rangle$
A_4	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.3, 0.5 \rangle$	$\langle 0.5, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.2 \rangle$
A_5	$\langle 0.6, 0.1 \rangle$	$\langle 0.4, 0.4 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.6, 0.1 \rangle$

Tablo 6.3. D_2 uzmanının karar matrisi

Alternatifler	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$\langle 0.3, 0.6 \rangle$	$\langle 0.2, 0.7 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$
A_2	$\langle 0.5, 0.1 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.3 \rangle$
A_3	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.6, 0.1 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$
A_4	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$	$\langle 0.2, 0.6 \rangle$	$\langle 0.5, 0.1 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$
A_5	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.3 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$

Tablo 6.4. D_3 uzmanının karar matrisi

Alternatifler	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$\langle 0.2, 0.7 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$	$\langle 0.4, 0.5 \rangle$	$\langle 0.2, 0.6 \rangle$
A_2	$\langle 0.5, 0.2 \rangle$	$\langle 0.6, 0.4 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.4, 0.1 \rangle$
A_3	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$
A_4	$\langle 0.4, 0.5 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.2 \rangle$
A_5	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.1 \rangle$	$\langle 0.6, 0.4 \rangle$	$\langle 0.6, 0.1 \rangle$

Adım 1. Bütün nitelikler fayda tiplidir. Dolayısıyla, normalizsyona ihtiyaç yoktur. " $\Omega_{ij}^s = \delta_{ij}^s$ " sağlanır.

Adım 2. Örnek olarak, $q=3$ seçelim. S^{st} , destek değeri olarak gösterilsin. Uzmanlara göre destek değerleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Sup(\delta_{ij}^s, \delta_{ik}^t) = 1 - d(\delta_{ij}^s, \delta_{ik}^t), j, k = 1, 2, 3, 4. (s, t = 1, 2, 3), (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$S^{12} = S^{21} = \begin{bmatrix} 0.8900 & 0.8730 & 0.9020 & 0.9810 \\ 0.8830 & 0.9200 & 0.9020 & 0.9390 \\ 0.9200 & 0.9090 & 0.9090 & 0.9020 \\ 0.9630 & 0.9090 & 0.9930 & 0.8900 \\ 0.8660 & 0.9630 & 0.9810 & 0.9930 \end{bmatrix}$$

$$S^{13} = S^{31} = \begin{bmatrix} 0.7820 & 0.8480 & 0.9020 & 0.7920 \\ 0.8900 & 0.7920 & 0.9740 & 0.9320 \\ 0.8290 & 1.0000 & 1.0000 & 0.9020 \\ 0.9020 & 0.9020 & 0.9090 & 1.0000 \\ 0.9740 & 0.9370 & 0.9440 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$S^{23} = S^{32} = \begin{bmatrix} 0.8730 & 0.7210 & 0.9390 & 0.8110 \\ 0.9930 & 0.8720 & 0.9090 & 0.9740 \\ 0.9090 & 0.9090 & 0.9090 & 1.0000 \\ 0.9390 & 0.8480 & 0.9020 & 0.8900 \\ 0.8730 & 0.9390 & 0.9630 & 0.9930 \end{bmatrix}$$

Adım 3. Denklem 52'ye bağılı $T(\delta_{ij}^s)$ matrisleri hesaplanır.

$$T^1 = \begin{bmatrix} 1.6720 & 1.7210 & 1.8040 & 1.7730 \\ 1.7730 & 1.7120 & 1.8760 & 1.8710 \\ 1.7490 & 1.9090 & 1.9090 & 1.8040 \\ 1.8650 & 1.8110 & 1.9020 & 1.8900 \\ 1.8400 & 1.9000 & 1.9250 & 1.9930 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = \begin{bmatrix} 1.7630 & 1.5940 & 1.8410 & 1.7920 \\ 1.8760 & 1.7920 & 1.8110 & 1.9130 \\ 1.8290 & 1.8180 & 1.8180 & 1.9020 \\ 1.9020 & 1.7570 & 1.8950 & 1.7800 \\ 1.7390 & 1.9020 & 1.9440 & 1.9860 \end{bmatrix}$$

$$T^3 = \begin{bmatrix} 1.6550 & 1.5690 & 1.8410 & 1.6030 \\ 1.8830 & 1.6640 & 1.8830 & 1.9060 \\ 1.7380 & 1.9090 & 1.9090 & 1.9020 \\ 1.8410 & 1.7500 & 1.8110 & 1.8900 \\ 1.8470 & 1.8760 & 1.9070 & 1.9930 \end{bmatrix}$$

Adım 4. Her bir karar vericinin ağırlıkları ile denklem (53)' bağılı, kuvvet operatörü ağırlıkları hesaplanır.

$$\psi^1 = \begin{bmatrix} 0.3458 & 0.3618 & 0.3470 & 0.3545 \\ 0.3415 & 0.3474 & 0.3530 & 0.3469 \\ 0.3463 & 0.3544 & 0.3544 & 0.3422 \\ 0.3489 & 0.3546 & 0.3531 & 0.3554 \\ 0.3548 & 0.3506 & 0.3496 & 0.3503 \end{bmatrix}$$

$$\psi^2 = \begin{bmatrix} 0.4087 & 0.3942 & 0.4018 & 0.4079 \\ 0.4048 & 0.4088 & 0.3943 & 0.4023 \\ 0.4073 & 0.3924 & 0.3924 & 0.4048 \\ 0.4039 & 0.3975 & 0.4026 & 0.3907 \\ 0.3911 & 0.4010 & 0.4022 & 0.3994 \end{bmatrix}$$

$$\psi^3 = \begin{bmatrix} 0.2455 & 0.2440 & 0.2511 & 0.2377 \\ 0.2536 & 0.2438 & 0.2527 & 0.2508 \\ 0.2464 & 0.2532 & 0.2532 & 0.2530 \\ 0.2471 & 0.2478 & 0.2443 & 0.2539 \\ 0.2541 & 0.2484 & 0.2482 & 0.2502 \end{bmatrix}$$

Adım 5. Tüm karar vericiler tarafından oluşturulan karar matrisleri tek bir karar matrisi ile temsil edilir. $q - ROFWPNA(\delta_{ij}^1, \delta_{ij}^2, \delta_{ij}^3)$ 'ün birleştirilmiş sonucu aşağıda verilmiştir.

Tablo 6.5. Birleştirilmiş karar matrisi

Alternatifler	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$\langle 0.2524, 0.6037 \rangle$	$\langle 0.3856, 0.6137 \rangle$	$\langle 0.4469, 0.4062 \rangle$	$\langle 0.4605, 0.4031 \rangle$
A_2	$\langle 0.5404, 0.2275 \rangle$	$\langle 0.5054, 0.3112 \rangle$	$\langle 0.5451, 0.2183 \rangle$	$\langle 0.4406, 0.2407 \rangle$
A_3	$\langle 0.5046, 0.2749 \rangle$	$\langle 0.5450, 0.2005 \rangle$	$\langle 0.5443, 0.2564 \rangle$	$\langle 0.4717, 0.3727 \rangle$
A_4	$\langle 0.4792, 0.4046 \rangle$	$\langle 0.3527, 0.5272 \rangle$	$\langle 0.5292, 0.1734 \rangle$	$\langle 0.5453, 0.2498 \rangle$
A_5	$\langle 0.6449, 0.2186 \rangle$	$\langle 0.4296, 0.3226 \rangle$	$\langle 0.6003, 0.3093 \rangle$	$\langle 0.6000, 0.1560 \rangle$

Alternatiflerin birleştirilmiş matrisinin hesaplama adımları

Adım 6. Denklem (55)'e göre , δ_{ij} ve δ_{ik} nitelikleri arasındaki destekler hesaplanır.

$$S_{12} = S_{21} = (0.9476, 0.9713, 0.9666, 0.9197, 0.8111)$$

$$S_{13} = S_{31} = (0.8470, 0.9958, 0.9672, 0.9390, 0.9481)$$

$$S_{14} = S_{41} = (0.8455, 0.9277, 0.9690, 0.9479, 0.9411)$$

$$S_{23} = S_{32} = (0.8359, 0.9671, 0.9912, 0.8587, 0.8630)$$

$$S_{24} = S_{42} = (0.8344, 0.9402, 0.9431, 0.8691, 0.8633)$$

$$S_{34} = S_{43} = (0.9916, 0.9236, 0.9437, 0.9757, 0.9739)$$

Adım 7. Denklem (56)'ya göre, destek değerleri hesaplanır.

$$T = \begin{bmatrix} 2.6401 & 2.6179 & 2.6745 & 2.6714 \\ 2.8948 & 2.8787 & 2.8865 & 2.7915 \\ 2.9028 & 2.9009 & 2.9021 & 2.8558 \\ 2.8066 & 2.6474 & 2.7733 & 2.7926 \\ 2.7003 & 2.5373 & 2.7850 & 2.7783 \end{bmatrix}$$

Adım 8. (57) kullanılarak alternatiflerin ağırlıkları ile kuvvet operatörü ağırlıkları hesaplanır.

$$\xi_{ij} = \begin{bmatrix} 0.1989 & 0.0988 & 0.3011 & 0.4012 \\ 0.2024 & 0.1008 & 0.3029 & 0.3940 \\ 0.2010 & 0.1004 & 0.3014 & 0.3971 \\ 0.2017 & 0.0966 & 0.2999 & 0.4019 \\ 0.1978 & 0.0946 & 0.3036 & 0.4040 \end{bmatrix}$$

Adım 9. Her bir alternatifin δ_i değerlerini hesaplamak için, denklem (46) ile ifade edilen q-ROFWPNA denklemi kullanılır.

$$\delta_1 = \langle 0.4225, 0.4852 \rangle, \quad \delta_2 = \langle 0.5044, 0.2418 \rangle, \quad \delta_3 = \langle 0.5097, 0.3133 \rangle, \quad \delta_4 = \langle 0.5144, 0.3293 \rangle, \quad \delta_5 = \langle 0.5987, 0.2516 \rangle$$

Adım 10. Denklem (47) 'ye göre, her bir alternatifin skor değerleri hesaplanmaktadır.

$$S(\delta_1) = -0.0457, \quad S(\delta_2) = 0.1065, \quad S(\delta_3) = 0.0944, \quad S(\delta_4) = 0.0932, \quad S(\delta_5) = 0.1923$$

Adım 11. $S(\delta_5) > S(\delta_2) > S(\delta_3) > S(\delta_4) > S(\delta_1)$ 'e göre alternatiflerin sıralamaları $A_5 > A_2 > A_3 > A_4 > A_1$ şeklindedir.

Tablo 6.6. Farklı q değerleri için sıralama sonuçları

q-değerleri	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Sıralama
$q = 1$	-0.0523	0.3966	0.2185	0.2350	0.4723	$A_5 > A_2 > A_4 > A_3 > A_1$
$q = 2$	-0.0491	0.1939	0.1606	0.1640	0.2989	$A_5 > A_2 > A_4 > A_3 > A_1$
$q = 3$	-0.0457	0.1065	0.0944	0.0932	0.1923	$A_5 > A_2 > A_3 > A_4 > A_1$
$q = 4$	-0.0387	0.0539	0.0499	0.0481	0.1171	$A_5 > A_2 > A_3 > A_4 > A_1$
$q = 5$	-0.0315	0.0247	0.0237	0.0222	0.0688	$A_5 > A_2 > A_3 > A_4 > A_1$

Tablo-6.6'da sıralama sonuçları q değerlerine göre verilmiştir. Önerilen birleştirme yöntemi, hem farklı uzmanların karar matrislerine hem de alternatif tabanlı toplu matrise uygulanmıştır. Farklı q değerlerinde en iyi alternatif A_5 'tir. En kötü alternatif A_1 olarak bulunur. Diğer taraftan, karar vericiler için q değerlerine göre daha geniş bir değerlendirme fırsatı sağladığı bilinmektedir. Örneğin, değerlendirme $\langle 0.9, 0.8 \rangle$ as olarak verilirse, $q = 5$ seçmek daha uygun olacaktır. Tablo-6.6'da q değeri arttıkça skor değerlerinin birbirine daha yakın olduğu söylenebilir.

6.3.2. Geçerlilik testleri

Test kriteri 1: Optimal olmayan alternatif olarak A_1 'i seçelim. A_1 , alternatifini daha kötü bir alternatifle (A_1) değiştirilmiştir. En iyi alternatifin değişip değişmediğini araştıralım. $q = 3$ için

Varsayalım ki;

$$\delta'_{1j} = \langle 0.1, 0.6 \rangle, \langle 0.3, 0.8 \rangle, \langle 0.2, 0.3 \rangle, \langle 0.4, 0.4 \rangle,$$

$$\delta'_{1j} = \langle 0.2, 0.8 \rangle, \langle 0.1, 0.7 \rangle, \langle 0.4, 0.5 \rangle, \langle 0.3, 0.4 \rangle,$$

$$\delta'_{1j} = \langle 0.1, 0.7 \rangle, \langle 0.4, 0.5 \rangle, \langle 0.3, 0.6 \rangle, \langle 0.1, 0.7 \rangle. \text{ olsun.}$$

Önerilen yöntem uygulandığında, yeni alternatifle elde edilen skor değerleri,

$$S(\delta_1) = -0.1839, \quad S(\delta_2) = 0.1065, \quad S(\delta_3) = 0.0944, \quad S(\delta_4) = 0.0932, \quad S(\delta_5) = 0.1923.$$

Sıralama ise $A_5 > A_2 > A_3 > A_4 > A_1$, şeklindedir. Böylece, sıralama değişmedi ve test kriteri 1 sağlanır.

Test kriteri 2 ve 3: Verilen karar verme problemini alt problemlere ayıralım:

$\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, $\{A_2, A_3, A_4, A_5\}$, $\{A_3, A_4, A_5, A_1\}$ ve $\{A_4, A_5, A_1, A_2\}$. Her bir alt problemin sıralama sonuçları sırasıyla $A_2 > A_3 > A_4 > A_1$, $A_5 > A_2 > A_3 > A_4$, $A_5 > A_3 > A_4 > A_1$, $A_5 > A_2 > A_4 > A_1$ olarak elde edilir. Böylece genel sıralama $A_5 > A_2 > A_3 > A_4 > A_1$ olarak görülebilir. Bu sıralamalar arasında, geçişlilik özelliğinin de sağlandığını söyleyebiliriz. Nihayetinde, test kriteri 2 ve 3'ün sağlandığı görülür.

Tablo 6.7. Örnek-1 için karşılaştırmalı sıralamalar

Metotlar	Sıralama sonuçları
IFWAHA	$A_5 > A_2 > A_3 > A_4 > A_1$
$w = (0.2, 0.1, 0.3, 0.4)$	

IFWDBM	$A_5 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1$
$w = (0.2, 0.1, 0.3, 0.4)$	
IFWDGBM	$A_5 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1$
$w = (0.2, 0.1, 0.3, 0.4)$	
IFPWA	$A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_1$
$w = (0.2, 0.1, 0.3, 0.4)$	
PFWA	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$
$w = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$	
PFEWA	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$
$w = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$	
PFEWG	$A_5 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_3$
$w = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$	
SPFWA	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$
$w = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$	
SPFWG	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$
$w = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$	
q-ROFWA	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$
$w = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$	
q-ROFWG	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$
$w = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$	
q-ROFWNA	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$
$w = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$	
q-ROFOWNA	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$
$w = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$	
q-ROFHWNA	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$
$w = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$	
q-ROFWPNA	$A_5 = S(\delta_5) = 0.1923 \succ A_2 = S(\delta_2) = 0.1065 \succ A_3$
$w = (0.2, 0.1, 0.3, 0.4)$	$= S(\delta_3) = 0.0944 \succ A_4 = S(\delta_4) = 0.0932$
	$\succ A_1 = S(\delta_1) = -0.0457$
q-ROFWPNA	$A_5 = S(\delta_5) = 0.1583 \succ A_3 = S(\delta_3) = 0.1236 \succ A_2$
$w = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$	$= S(\delta_2) = 0.1197 \succ A_4 = S(\delta_4) = 0.0434$
	$\succ A_1 = S(\delta_1) = -0.0881$

q-ROFWPNA $w = (0.2, 0.1, 0.3, 0.4)$	$A_5 = S(\delta_5) = 0.0875 > A_2 = S(\delta_2) = 0.0383 > A_3$ $= S(\delta_3) = 0.0381 > A_4 = S(\delta_4) = 0.0287$ $> A_1 = S(\delta_1) = -0.0161$
q-ROFWPNG $w = (0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$	$A_5 = S(\delta_5) = 0.0611 > A_2 = S(\delta_2) = 0.0437 > A_3$ $= S(\delta_3) = 0.0415 > A_4 = S(\delta_4) = 0.0256$ $> A_1 = S(\delta_1) = -0.0327$

6.3.3. Karşılaştırma analizleri

Bu bölümde, ek olarak iki örneğe, önerilen birleştirme yöntemi uygulanmıştır.

Örnek 6.2. Örnek, yatırım seçimi problemini ele almaktadır. Karar alma mekanizması beş şirket ve dört özellikten oluşmaktadır. Ayrıca, üç farklı karar verici için değerlendirmeler yapılır. Uzmanlar değerlendirmelerinde sezgisel bulanık sayıları kullanmışlardır. Nitelikler, risk analizi (C_1), büyüme analizi (C_2), sosyal-politik etki analizi (C_3) ve çevresel etki analizidir (C_4). Liu ve Chen'in çalışmalarında bahsedilen karar matrisleri kullanılmıştır (Lütfen (Liu, P.; Chen, S. M., 2016a)'den Tablo 3-5'e bakınız).

Tablo 6.8. Örnek-2 için karşılaştırmalı sıralamalar

Metot	Sıralama
IFWAHA	$A_2 > A_4 > A_5 > A_1 > A_3$
IFWDGBM	$A_2 > A_4 > A_5 > A_1 > A_3$
PFWA	$A_2 > A_4 > A_5 > A_1 > A_3$
PFEWA	$A_2 > A_4 > A_5 > A_1 > A_3$
PFEWG	$A_2 > A_4 > A_5 > A_1 > A_3$
SPFWA	$A_2 > A_4 > A_5 > A_1 > A_3$
SPFWG	$A_2 > A_4 > A_5 > A_1 > A_3$
q-ROFWA	$A_2 > A_4 > A_5 > A_1 > A_3$
q-ROFPWA	$A_2 > A_4 > A_5 > A_1 > A_3$
q-ROFWNA	$A_2 > A_4 > A_5 > A_1 > A_3$
q-ROFOWNA	$A_2 > A_4 > A_5 > A_1 > A_3$
q-ROFHWNA	$A_2 > A_4 > A_5 > A_1 > A_3$

q-ROFWPNA	$A_2 = S(\delta_2) = 0.2221 > A_4 = S(\delta_4) = 0.1312 > A_5 = S(\delta_5)$ $= 0.0979 > A_1 = S(\delta_1) = 0.0308 > A_3$ $= S(\delta_3) = -0.0025$
q-ROFWPNG	$A_2 = S(\delta_2) = 0.0823 > A_4 = S(\delta_4) = 0.0424 > A_5 = S(\delta_5)$ $= 0.0285 > A_1 = S(\delta_1) = 0.0054 > A_3$ $= S(\delta_3) = -0.0083$

Örnek 6.3. Bu örnekte, yazılım seçim problemi ele alınmıştır. Bir üniversitedeki bir bilgisayar merkezi iş verimliliğini artırmak için yeni bir bilgi sistemi seçmek istiyor. Adaylar için dört alternatif var. Üç uzmanın değerlendirilmesi dikkate alınmıştır. Nitelikler, donanım / yazılım yatırımı (C_1), organizasyon performansına katkı (C_2), mevcut sistemlerden (C_3) dönüşüm sağlama çabası ve dış kaynak yazılım geliştirici güvenilirliğidir (C_4). Xu'nun çalışmasında bahsedilen karar matrisleri kullanılmıştır. (Lütfen (Xu, Z., 2011) 'ten Tablo 4-6'ya bakınız).

Önerilen yöntemin ve literatürdeki diğer çalışmaların karşılaştırılması tablolarda verilmiştir. Tablo 6.7, 6.8 ve 6.9 dikkate alındığında, literatürdeki diğer çalışmaların önerilen yöntemle aynı sıralamaları verdiği görülmektedir. Diğer çalışmalar Heronian ortalaması, Bonferroni ortalaması PA ve NA yapılarının farklı stillerini ele almaktadır. Çalışmamızda PA operatörü girdi değerleri arasındaki ilişki hakkında bilgi edinmemize izin vermektedir. Ayrıca, tarafsızlık birleştirme operatörü DM'lerin kararlarını PS fonksiyonu ile tarafsız perspektiften değerlendirilmesine yardımcı olur. Ayrıca, PNA, q-basamaklı bulanık ortamda değerlendirildiği için daha genel bir yaklaşım sunar.

Tablo 6.9. Örnek-3 için karşılaştırmalı sıralamalar

Metot	Sıralama
PFWA	$A_2 > A_3 > A_4 > A_1$
PFEWA	$A_2 > A_3 > A_4 > A_1$
PFEWG	$A_2 > A_3 > A_4 > A_1$
SPFWA	$A_2 > A_3 > A_4 > A_1$
SPFWG	$A_2 > A_3 > A_4 > A_1$
q-ROFWA	$A_2 > A_3 > A_4 > A_1$
q-ROFWG	$A_2 > A_3 > A_4 > A_1$

q-ROFWNA	$A_2 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1$
q-ROFOWNA	$A_2 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1$
q-ROFHWNA	$A_2 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1$
q-ROFWPNA	$A_2 = S(\delta_2) = 0.1350 \succ A_3 = S(\delta_3) = 0.0693 \succ A_4 = S(\delta_4) = 0.0644 \succ A_1 = S(\delta_1) = -0.1877$
q-ROFWPNG	$A_2 = S(\delta_2) = 0.0384 \succ A_4 = S(\delta_4) = 0.0343 \succ A_3 = S(\delta_3) = 0.0284 \succ A_1 = S(\delta_1) = -0.0891$

Her örnek için, yöntemimizin diğer çalışmalarla farklılıkları vurgulanmıştır. Tablo 6.7, Örnek 6.1'deki diğer çalışmalarla ayrıntılı bir karşılaştırmayı göstermektedir. IFWAHA (sezgisel bulanık ağırlık Arşimedian bulanık ağırlıklı Dombi geometrik Bonferroni ortalaması) ve IFPWA (sezgisel bulanık ağırlıklı Dombi geometrik Bonferroni ortalaması) ve IFPWA (sezgisel bulanık ağırlıklı güç) ortalama) sezgisel bulanık ortamda önerilmektedir. Bu operatörlerde, hem T-norm yapıları (Dombi ve Arşimet) hem de girdilerin (Heronian Ortalamaları ve Bonferroni Ortalamaları) karşılıklı ilişkileri dikkate alınır. Bununla birlikte, her iki yöntemde de karar vericiler yüzeysel değerlendirme yapmaktadır ve DM arasında tarafsız bir değerlendirme yoktur. PFWA (Pisagor bulanık ağırlıklı ortalama), PFEWA (Pisagor bulanık bulanık Einstein ağırlıklı ortalama), PFEWG (Pisagor bulanık Bulanık Einstein ağırlıklı geometrik), SPFWA (Simetrik Pisagor bulanık ağırlıklı ortalama) ve SPFWG (Simetrik Pisagor bulanık ağırlıklı geometrik). Bu çalışmalarda simetrik tabanlı ortalama ve geometrik operatörler önerilmiştir. Ayrıca başka bir çalışmada Einstein T-norm operatörü kullanılmıştır. Ancak bu çalışmalarda girdiler arasındaki ilişki dikkate alınmamıştır. Son olarak, q -ROFWA (q-basamaklı orthopair bulanık ağırlıklı ortalama), q -ROFWG (q-basamaklı orthopair bulanık ağırlıklı geometrik), q -ROFWNA (q-basamaklı orthopair bulanık ağırlıklı tarafsızlık ortalama), q -ROFOWNA (q-basamaklı orthopair bulanık ağırlıklı tarafsızlık ortalama) bulanık ağırlıklı tarafsızlık ortalaması) ve q-basamaklı orthopair bulanık ortamında q-ROFHWNA (q-basamaklı orthopair bulanık melez ağırlıklı tarafsızlık ortalaması) önerilmektedir. Bu çalışmalarda değerlendirme aralığı q'nuncu dereceye göre hesaplanmıştır. Ancak, q -ROFWA ve q -ROFWG operatörleri ortalama ve geometrik operatörlerdir. q -ROFWNA, q -ROFOWNA ve q -ROFHWNA, karar vericilerin tarafsız ve adil kararlar vermesini sağlayan yapılara sahiptir. Ancak bu çalışmalarda, karar verme

sürecinde girdi argümanlarının dikkate alınmadığı ve q değerlerine göre daha kararsız bir skor fonksiyonu kullandıkları görülebilir. İlk örnekte, çalışmamızın hem girdi argümanlarını hem de kararlı skor fonksiyonuna dayalı adil karar alma mekanizmasını yürüttüğü görülmektedir. Ayrıca, sonuçların diğer çalışmalara kıyasla tutarlı olduğu fark edilmektedir. Bu durumda, en iyi alternatifin A_5 en kötü A_1 olduğu söylenebilir.

Benzer şekilde, önerilen yöntem Örnek 6.2 ve 6.3'teki diğer çalışmalarla karşılaştırıldığında benzer sıralamalar elde edilir. Örnek 6.2 için, Tablo 6.8'da en iyi alternatifin A_2 ve en kötü alternatifin A_3 olduğu görülebilir. Önerilen birleştirme operatörünün etkisini anlamak için MAGDM sorunları tartışılmaktadır. Diğer taraftan, Örnek 6.3 için, Tablo 6.9'da en iyi alternatifin A_2 ve en kötü alternatifin A_1 olduğu görülebilir.

7. ÖNCELİKLİ DUAL MUIRHEAD MEAN OPERATOR⁴

q-ROFS, çeşitli bulanık kavramların genelleştirilmesinden meydana gelir. Bulanık küme, sezgisel bulanık küme, Pisagor bulanık küme, Fermatean bulanık küme bu kümelerle örnek gösterilebilir. Aralıklı q-basamak orthopair bulanık kümesi (IVq-ROFS), yukarıdaki kümelerde daha tutarlıdır ve tutarsız ve belirsiz bilgileri ele almak için daha güçlü bir matematiksel araçtır. Bu çalışmanın amacı IVq-ROFS üzerine yeni bir hibrid birleştirme yöntemi sunmaktır.

Tez kapsamında önerilen dördüncü çalışma aralık değerli q-ROFS için öncelikli dual Muirhead Mean operatörünün MCDM problemlerine uygulanmasıdır. Bu çalışma için genel olarak, argümanlar/kriterler arasındaki ilişkilerin birbirlerine olan etkilerini hesaba katan metotları incelemek gerekir. Bu yüzden, kriterler arasındaki ilişkileri inceleyen operatörler Tablo-7.1’ de verilmiştir. MSM operatörü ile bütün argümanlar arasındaki ilişki göz önüne alınmaktadır. Diğer yandan PA, BM ve HM operatörlerinde herhangi iki argüman arasındaki ilişki göz önüne alınır. Ancak MM operatörde herhangi sayıdaki argümanlar arasındaki ilişkiyi kontrolü yapılmaktadır. X parametresi girdi verileri olarak alınmaktadır. m parametresin bütün argümanlar arasındaki ilişkinin kontrolünü sağlar. p ve q parametreleri, ikili girdiler arasındaki ilişkiyi kontrol eder. Ancak bütün bu birleştirme operatörlerinin yanında daha gene bir operatör olan MM operatör bulunmaktadır. MM operatör parametre vektörü gereği, istenilen sayıdaki argüman arasındaki ilişkiyi kontrol edebilmektedir. Bu yüzden MM operatör parametre vektörü sayesinde MSM ve BM operatörlerini de içermektedir. Bu durumda literatürde değinilen çalışmalar düşünüldüğünde, öncelik operatörünün, MM operatörü ile kullanılmadığı görülmektedir. Bu yüzden, karar vericilerin ve kriterlerin farklı öncelik seviyesine sahip olduğu durumlar için öncelikli MM operatör önerilmiştir. Diğer yandan önerilen yaklaşım karar vericiler tarafından genel bir kümeye sahip olması açısından, aralık q-ROFS ortamında kullanılmıştır.

⁴ Bu bölüm “Aydemir, S. B., & Gündüz, S. Y. (2020, July). Interval Valued q-Rung Orthopair Fuzzy Prioritized Dual Muirhead Mean Operator and Their Application in Group Decision Making. In International Conference on Intelligent and Fuzzy Systems (pp. 440-447). Springer, Cham.” konferansını temel almaktadır.

Tablo 7.1. İlişki tabanlı bazı birleştirme operatörleri

Birleştirme operatörü	Girdi	İlişki	Uygulama ortamı
Maclaurin Symmetric Mean	X, m	Bütün Argümanlar arasında	HF (Qin, Liu, & Pedrycz, 2015), PF (Yang & Pang, 2018), IF (Qin, J.; Liu, X., 2014), SVN (Wang, Yang, & Li, 2018), Q-ROF (Liu, P.; Liu, J., 2018)
Power Aggregation	X, supp	Herhangi iki girdi argümanı arasında	IVIF (He, Chen, Zhou, Liu, & Tao, 2013) HF (Liao, Wu, Keikha, & Hafezalkotob, 2018) INS (Liu, P.; Tang, G., 2016) PF (Wei G. &, 2018) NS (Peng, Wang, Wu, Wang, & Chen, 2015) Q-ROF (Liu, P.; Chen, S. M.; Wang, P., 2018d)
Bonferroni Mean	X, p, q	Herhangi iki girdi argümanı arasında	Q-ROF (Liu, P.; Liu, J., 2018) IF (Zhu & Xu, 2013) HF (Xu, Z.; Yager, R. R., 2010) PF (Zhang R. J., 2017) SVN (Wei G. &, 2019)
Heronian Mean	X, p, q	Herhangi iki girdi argümanı arasında	HF (Yu D. , 2017) Q-ROF (Wei G. G., 2018) IF (Yu, D., 2013)
Muirhead Mean	X, $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$	Herhangi sayıdaki argüman arasında	IFG (Liu, P.; Li, D., 2017a) PF (Zhu & Li, 2018) HFL (Liu, Li, Zhang, Zhang, & Zhao, 2018a) Q-ROF (Wang, ve diğerleri, 2019)

Nitelikler ve uzmanlar genellikle MCDM problemlerinde farklı öncelik seviyelerine sahiptir. Bu nedenle, önceliklendirilmiş birleştirme (PA) operatörü birleştirme operatörlerinde (AO) önemli bir rol oynar. Diğer yandan, değişken bir vektörün yardımıyla, herhangi bir sayıda argüman arasındaki ilişkiyi dikkate alan Muirhead ortalama (MM) operatörü de MCDM problemlerin çözümünde etkili sonuçlar vermektedir. Önerilen yöntemde, her iki birleştirme yönteminin önemli özellikleri birleştirilir. Çok özellikli grup karar verme (MAGDM) için, (IVq-ROFS) ortamında öncelikli çift Muirhead ortalama operatörleri (PDMM) önerilmiştir. Ek olarak, önerilen

operatörlerin bazı özelliklerine de yer verilmiştir. Son olarak, pratik bir örnek ile önerilen yöntemin etkisi ve üstünlüğü gösterilir.

7.1. Önerilen metodun uygulanması

Bu bölümde, IVq-ROFS ortamında MM'ye dayanan öncelikli çift birleştirme operatörüne yer verilmiştir.

Tanım 7.1. $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, n)$ herhangi bir aralıklı q-rung orthopair bulanık sayı olmak üzere, $[p] = [p_1, p_2, \dots, p_n] \in \mathbb{R}^n$, vektör parametresi olsun. Varsayalım ki nitelikler arasındaki öncelik ilişkisi $H_1 > H_2 > H_3 > \dots > H_t$ şeklindedir. $i < j$ için, H_i 'nin önceliği H_j 'den büyüktür. $H_i(x)$, H_i niteliği altındaki, herhangi bir x alternatifinin performansıdır. $H_i(x) \in [0, 1]$.

$$PDMM^{[p]}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n p_j} \left(\prod_{\sigma \in S_n} \sum_{j=1}^n (p_j \alpha_{\sigma(j)})^{n \frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^n \chi_j}} \right)^{1/n!} \quad (58)$$

Temel işlemleri kullanarak önerilen birleştirme yöntemi açıkça ifade edilmektedir. Burada kullanılan toplama operatörü, IVq-ROFS'de tanımlanan temel toplama operatörüdür.

$\alpha_j = < [\mu_{\alpha_j}^L, \mu_{\alpha_j}^U], [\nu_{\alpha_j}^L, \nu_{\alpha_j}^U] >$ herhangi bir IV q-ROF sayı olmak üzere. PDMM operatörün birleştirilmiş değeri ayrıca bir IV q-ROF sayıdır.

$$\begin{aligned} & PDMM^{[p]}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ &= \left[\left(1 - \left(1 - \left(\prod_{\sigma \in S_n} \left(1 - \prod_{j=1}^n \left(1 - \left((\mu_{\sigma(j)}^L)^{n \frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^n \chi_j}} \right)^q \right)^{p_j} \right) \right)^{1/n!} \right)^{\frac{1}{q \sum_{j=1}^n p_j}} \right), \right. \\ & \left. \left(1 - \left(1 - \left(\prod_{\sigma \in S_n} \left(1 - \prod_{j=1}^n \left(1 - \left((\mu_{\sigma(j)}^U)^{n \frac{\chi_j}{\sum_{j=1}^n \chi_j}} \right)^q \right)^{p_j} \right) \right)^{1/n!} \right)^{\frac{1}{q \sum_{j=1}^n p_j}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\left[\left(1 - \left(\prod_{\sigma \in S_n} \left(1 - \prod_{j=1}^n \left(1 - \left((1 - v_{\sigma(j)}^L)^{\frac{x_j}{\sum_{j=1}^n x_j}} \right)^q \right)^{p_j} \right) \right)^{1/n!} \right)^{\frac{1}{q \sum_{j=1}^n p_j}} \right. \\ \left. \left(1 - \left(\prod_{\sigma \in S_n} \left(1 - \prod_{j=1}^n \left(1 - \left((1 - v_{\sigma(j)}^U)^{\frac{x_j}{\sum_{j=1}^n x_j}} \right)^q \right)^{p_j} \right) \right)^{1/n!} \right)^{\frac{1}{q \sum_{j=1}^n p_j}} \right]$$

Yukarıdaki denklemde IV q-ROF ortamında PDMM operatörünün genişlemesi verilmiştir. Bu operatörün avantajları aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- Gerçek MADM problemlerinde nitelik ve karar vericilerin öncelik düzeylerinin farklı olduğu bilinmektedir. Bu nedenle, öncelik AO'su kullanılarak farklı öncelik seviyeleri vurgulanır.
- q-ROFN'ler aracılığıyla karar vericilerin derecelendirmeleri daha genel bir kümeyi temsil eder. Böylece değerlendirmeler için daha tutarlı bir yapı elde edilir.
- PDMM operatörü birçok birleştirme operatörünü içerir. Dual Maclaurin simetrik ortalama, geometrik Bonferroni ortalaması, geometrik ortalama bu operatörlere dahildir.
- Önerilen yöntem (PDMM), çok sayıda özellik arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurmaktadır, bu da farklı karmaşık MAGDM problemleri ile başa çıkmayı daha uygun ve güçlü kılar. PDMM operatör idempotentlik ve sınırlılık özelliklerini sağlamaktadır

(Idempotentlik) $A_j = \langle [\mu_j^L, \mu_j^U], [v_j^L, v_j^U] \rangle$ ($j = 1, 2, \dots, n$) q-ROF sayıların koleksiyonu olsun ve $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ için

Eğer bütün A_i 'ler eşit ise bütün i'ler için $A_j = A$ 'dir. Dolayısıyla,

$$IVq - ROFPDMM^P(A_1, A_2, \dots, A_n) = A$$

elde edilir.

(Sınırlılık) $A_j = \langle [\mu_j^L, \mu_j^U], [v_j^L, v_j^U] \rangle$ ($j = 1, 2, \dots, n$) q-ROF sayıların koleksiyonu olsun ve $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ için, $A^- \leq IVq - ROFPDMM^P(A_1, A_2, \dots, A_n) \leq A^+$ özelliği sağlanmaktadır.

7.2. Problem tanımı

Bu bölüm, önerilen yöntemin geçerliliğini göstermek için gerçek bir karar verme problemine odaklanmaktadır.

Örnek 7.1. Örnek bölüm 5.2.2’de verilen örneğin benzeridir (Yu, D.; Wu, Y.; Lu, T., 2012). Fakat bu örnekte üç karar vericiden alınan kararlar kullanılmıştır. Beş aday için değerlendirme yapılır (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5). Dört niteliğe göre değerlendirme yapılmıştır. Bunlar: G_1 ahlak; G_2 araştırma yeteneği; G_3 , öğretim becerisi; G_4 eğitim geçmişi. Üniversite rektörü belirleyici öncelikli karar alma sürecinde ilk sırada, yönetim okulunun dekanı ikinci sırada gelmektedir. Nitelikler için önceliklendirme ilişkisi şu şekilde verilir: $C_1 > C_2 > C_3 > C_4$. Karar matrisini oluştururken, karar vericiler Pisagor bulanık sayılarını kullanmışlardır (Gao, H., 2018). Ayrıca karar vericiler $R^{(q)} = (r_{ij}^q)_{5 \times 4}$, ($q = 1, 2, 3$) ile gösterilmektedir. Karar vericilerin oluşturduğu matrisler aşağıda verilmiştir.

Tablo 7.2. Karar verici-1 tarafından oluşturulan karar matrisi (R^1)

Alternatifler/ kriterler	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$([0.6, 0.8], [0.1, 0.2])$	$([0.2, 0.4], [0.4, 0.5])$	$([0.6, 0.7], [0.2, 0.3])$	$([0.4, 0.5], [0.2, 0.4])$
A_2	$([0.4, 0.7], [0.0, 0.1])$	$([0.5, 0.7], [0.1, 0.2])$	$([0.7, 0.8], [0.1, 0.2])$	$([0.7, 0.8], [0.1, 0.2])$
A_3	$([0.3, 0.7], [0.2, 0.3])$	$([0.2, 0.4], [0.4, 0.5])$	$([0.1, 0.4], [0.4, 0.5])$	$([0.3, 0.4], [0.4, 0.6])$
A_4	$([0.7, 0.8], [0.1, 0.2])$	$([0.2, 0.3], [0.4, 0.6])$	$([0.6, 0.8], [0.0, 0.2])$	$([0.6, 0.8], [0.0, 0.2])$
A_5	$([0.5, 0.6], [0.3, 0.4])$	$([0.7, 0.8], [0.0, 0.1])$	$([0.2, 0.4], [0.4, 0.5])$	$([0.1, 0.3], [0.4, 0.6])$

Tablo 7.3. Karar verici-2 tarafından oluşturulan karar matrisi (R^2)

Alternatifler kriterler	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$([0.2, 0.4], [0.4, 0.5])$	$([0.6, 0.7], [0.1, 0.2])$	$([0.5, 0.7], [0.1, 0.2])$	$([0.5, 0.7], [0.1, 0.2])$
A_2	$([0.6, 0.8], [0.0, 0.2])$	$([0.2, 0.3], [0.4, 0.6])$	$([0.7, 0.8], [0.1, 0.2])$	$([0.2, 0.4], [0.4, 0.5])$
A_3	$([0.1, 0.4], [0.4, 0.5])$	$([0.8, 0.9], [0.0, 0.1])$	$([0.1, 0.4], [0.2, 0.5])$	$([0.4, 0.7], [0.2, 0.3])$
A_4	$([0.6, 0.8], [0.0, 0.2])$	$([0.3, 0.8], [0.0, 0.1])$	$([0.2, 0.3], [0.4, 0.6])$	$([0.6, 0.7], [0.2, 0.3])$
A_5	$([0.2, 0.4], [0.5, 0.6])$	$([0.6, 0.7], [0.2, 0.3])$	$([0.6, 0.8], [0.0, 0.2])$	$([0.1, 0.4], [0.3, 0.5])$

Tablo 7.4. Karar verici-3 tarafından oluşturulan karar matrisi (R^3)

Alternatifler kriterler	C_1	C_2	C_3	C_4
----------------------------	-------	-------	-------	-------

A_1	$([0.2,0.4], [0.4,0.5])$	$([0.2,0.4], [0.4,0.5])$	$([0.4,0.7], [0.0,0.1])$	$([0.7,0.9], [0.0,0.1])$
A_2	$([0.2,0.3], [0.4,0.6])$	$([0.2,0.3], [0.4,0.6])$	$([0.6,0.7], [0.2,0.3])$	$([0.5,0.7], [0.1,0.2])$
A_3	$([0.7,0.9], [0.0,0.1])$	$([0.3,0.4], [0.4,0.5])$	$([0.1,0.3], [0.3,0.5])$	$([0.2,0.4], [0.4,0.5])$
A_4	$([0.3,0.8], [0.1,0.2])$	$([0.1,0.2], [0.4,0.6])$	$([0.2,0.3], [0.4,0.5])$	$([0.3,0.4], [0.4,0.6])$
A_5	$([0.7,0.8], [0.0,0.2])$	$([0.3,0.8], [0.0,0.1])$	$([0.4,0.7], [0.2,0.3])$	$([0.6,0.8], [0.0,0.2])$

Tüm özellikler fayda tipindedir. Dolayısıyla normalleştirme işlemine gerek yoktur. IV q-ROFPDMM operatörüne dayanarak ana adımlar aşağıdaki gibidir:

Adım 1.

Karar vericiler için öncelik matrisleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$T_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.7750 & 0.4250 & 0.7000 & 0.5750 \\ 0.7500 & 0.7250 & 0.8000 & 0.8000 \\ 0.6250 & 0.4250 & 0.4000 & 0.4250 \\ 0.8000 & 0.3750 & 0.8000 & 0.8000 \\ 0.6000 & 0.8500 & 0.4250 & 0.3500 \end{pmatrix}$$

$$T_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.3294 & 0.3188 & 0.5075 & 0.4169 \\ 0.6000 & 0.2719 & 0.6400 & 0.3400 \\ 0.2500 & 0.3825 & 0.1800 & 0.2763 \\ 0.6400 & 0.2813 & 0.3000 & 0.5600 \\ 0.2250 & 0.6375 & 0.3400 & 0.1488 \end{pmatrix}$$

Adım 2. Üç karar verici IV q-ROFWG (Aralıklı ortopair bulanık ağırlıklı geometrik) ile birleştirilmiştir. (Liu, P.; Wang, P., 2018a). Ayrıca $q = 1$ için deney adımları uygulanmıştır.

Tablo 7.5. Birleştirilmiş q-ROF karar matrisi

Alternatifler/ kriterler	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$([0.3371,0.5560],$	$([0.2614,0.4585],$	$([0.5159,0.7000],$	$([0.4796,0.6231],$

	[0.2725,0.3749])	[0.3377,0.4393])	[0.1258,0.2263])	[0.1328,0.2903])
A_2	([0.3814,0.5884], [0.1223,0.2953])	([0.3165,0.4586], [0.2649,0.4340])	([0.6723,0.7725], [0.1274,0.2275])	([0.4154,0.6044], [0.2266,0.3289])
A_3	([0.2329,0.6007], [0.2512,0.3529])	([0.3019,0.4840], [0.3234,0.4259])	([0.1000,0.3871], [0.3432,0.5000])	([0.3018,0.4600], [0.3553,0.5230])
A_4	([0.5329,0.8000], [0.0684,0.2000])	([0.1949,0.3497], [0.3264,0.5194])	([0.3375,0.4786], [0.2348,0.4256])	([0.5090,0.6486], [0.1787,0.3514])
A_5	([0.3856,0.5441], [0.3451,0.4559])	([0.5345,0.7643], [0.0734,0.1000])	([0.2978,0.5265], [0.2828,0.4026])	([0.1195,0.3537], [0.3457,0.5486])

Adım 3. Birleştirilmiş değerler için öncelik matrisi aşağıdaki gibidir.

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0.6345 & 0.3383 & 0.2557 \\ 1 & 0.7271 & 0.4297 & 0.3343 \\ 1 & 0.6716 & 0.4537 & 0.1888 \\ 1 & 0.7971 & 0.4521 & 0.3044 \\ 1 & 0.6532 & 0.5322 & 0.3450 \end{pmatrix}$$

Adım 4. Bu adımda, önerilen IV q-ROFPDMM birleştirme yöntemi Tablo-7.5'teki birleştirilmiş matrise uygulandı (q=1 ve P=(1,1,1,1) için).

$$\begin{aligned} r_1 &= ([0.5303,0.6908], [0.0803,0.3623]) \\ r_2 &= ([0.5683,0.7086], [0.2041,0.3234]) \\ r_3 &= ([0.3882,0.6091], [0.3529,0.5181]) \\ r_4 &= ([0.5143,0.6984], [0.0000,0.3827]) \\ r_5 &= ([0.4270,0.6301], [0.0000,0.4142]) \end{aligned}$$

Adım 5. Skor değerleri hesaplanır. (q=1 ve P=(1,1,1,1) için).

IV q – ROFPDMM operatör

$A_1 = 0.6946$ $A_2 = 0.6874$ $A_3 = 0.5316$ $A_4 = 0.7075$ $A_5 = 0.6607$ dolayısıyla sıralama $A_4 > A_1 > A_2 > A_5 > A_3$ şeklindedir. Bu duruma göre en iyi alternatif A_4 'tür. $P = (1,1,1,1)$ alındığından, kriterler arasındaki tüm etkileşim dikkate alınır. Tablo-7.6 farklı kriterler arasında etkileşim olması durumundaki sonuçları göstermektedir.

Tablo 7.6. IV q-ROFPDMM operatörü üzerinde farklı parametre vektörleri ile sıralama sonuçları

P vektörü	Skor değerleri	Sıralama
$P = (1,0,0,0)$	$S(A_1) = 0.5615, S(A_2) = 0.5757, S(A_3) = 0.5408, S(A_4) = 0.5649, S(A_5) = 0.5608$	$A_2 > A_4 > A_1 > A_5 > A_3$

$P = (1,1,0,0)$	$S(A_1) = 0.6228, S(A_2) = 0.6192, S(A_3) = 0.5711, S(A_4) = 0.6256, S(A_5) = 0.6043$	$A_4 > A_1 > A_2 > A_5 > A_3$
$P = (1,1,1,0)$	$S(A_1) = 0.6630, S(A_2) = 0.6603, S(A_3) = 0.5368, S(A_4) = 0.6717, S(A_5) = 0.6368$	$A_4 > A_1 > A_2 > A_5 > A_3$
$P = (1,1,1,1)$	$S(A_1) = 0.6496, S(A_2) = 0.6874, S(A_3) = 0.5316, S(A_4) = 0.7075, S(A_5) = 0.6607$	$A_4 > A_2 > A_5 > A_1 > A_3$
$P = (2,0,0,0)$	$S(A_1) = 0.6011, S(A_2) = 0.6257, S(A_3) = 0.5739, S(A_4) = 0.6074, S(A_5) = 0.6083$	$A_2 > A_5 > A_4 > A_1 > A_3$
$P = (3,0,0,0)$	$S(A_1) = 0.6285, S(A_2) = 0.6607, S(A_3) = 0.6009, S(A_4) = 0.6361, S(A_5) = 0.6457$	$A_2 > A_5 > A_4 > A_1 > A_3$
$P = (4,0,0,0)$	$S(A_1) = 0.6495, S(A_2) = 0.6874, S(A_3) = 0.6232, S(A_4) = 0.6569, S(A_5) = 0.6755$	$A_2 > A_5 > A_4 > A_1 > A_3$

Tablo-7.6 farklı kriter etkileşimlerinde elde edilen skor değerlerini göstermektedir. Kriterler birbirleriyle etkileşime girdiğinde, en iyi alternatifin A_4 olduğu görülmektedir. Kriterler arasındaki ilişki hesaba katılmıyorsa, $P = (p_1, 0, 0, 0), p_1 > 0$ durumunda olduğu söylenir. ancak, $P = (1, 1, 0, 0)$ durumunda, iki kriter arasında bir ilişki vardır. Aynı şekilde, $P = (1, 1, 1, 0)$ için üç kriter arasındaki ilişki ve $P = (1, 1, 1, 1)$ için tüm kriterler arasındaki ilişki hesaba katılmaktadır. Birden fazla kriter arasında bir ilişki varsa, en iyi alternatif A_4 'tür. Kriterler arasında bir ilişki yoksa (Wang, Mendel, & M., 2019) ($A_2 > A_4 > A_5 > A_1 > A_3$) ve (Yu, D.; Wu, Y.; Lu, T., 2012) ($A_2 > A_4 > A_5 > A_1 > A_3$) çalışmalarına benzer sıralama sonuçları elde edilir. Ancak, diğer kriterler göz önüne alındığında, A_4 alternatifi ilk sıradadır.

8. T-KÜRESEL BULANIK KÜMELERDE DOMBI KUVVET OPERATÖRLERİN KULLANILMASI

Küresel bulanık kümelerde tereddütlük derecesi bağımsız bir şekilde seçilebilmektedir (Kutlu Gündoğdu & Kahraman, 2019). Küresel bulanık kümelerde eklenen üçüncü boyut ile karar vericiler için geniş bir tercih alanı sağlar. Diğer yandan küresel bulanık kümeler sadece ikinci dereceden tanımlanırken, T-küresel bulanık kümeler t. dereceden tanımlanmaktadır (Mahmood, Ullah, Khan, & Jan, 2019). Böylece küresel bulanık kümelerin de genelleştirilmesi yapılmıştır. Bu genelleştirme sayesinde problemlerin değerlendirilmesi için karar verici veya uzmanlara geniş bir küme tanımlanmış olur. T-küresel bulanık kümeler ile ilgili detaylı literatür çalışması aşağıda verilmiştir.

T küresel bulanık kümeler, örüntü tanıma, kümeleme, medikal teşhis problemleri gibi alanlarla kullanılmıştır (Ullah, K.; Mahmood, T.; Jan, N., 2018; Ullah, Garg, Mahmood, Jan, & Ali, 2020; Mahmood, T.; Ullah, K.; Khan, Q.; Jan, N, 2019). Ayrıca T-küresel bulanık kümeler farklı birleştirme operatörleri ile de kullanılmıştır. Peide Liu ve arkadaşları kuvvet MM operatörünü T-küresel ortamda kullanmışlardır (Liu, Q., Mahmood, & Hassan, 2019b). Diğer yandan T-küresel bulanık kümeler Einstein operatörleri ile melez birleştirme operatörlerini literatüre kazandırmışlardır (Munir, Kalsoom, Ullah, Mahmood, & Chu, 2020). K Ullah ve arkadaşları ise T-bulanık kümeler ortamında, Hamacher t-normu ile kurtarma robotlarının performanslarının değerlendirilmesi üzerine bir yaklaşım sunmuşlardır (Ullah, K.; Mahmood, T.; Garg, H., 2020).

Bu çalışmada ise T-küresel bulanık kümelere daha önce uygulanmamış olan Dombi T-norm ile kuvvet operatörü uygulandı. Dombi fonksiyonu ile değişken parametresi sayesinde esnek bir yapı sağlanır. Diğer yandan kuvvet operatörü, toplanan argümanlara ağırlık atayabilir. Bu durum aşırı yüksek veya aşırı düşük argüman değerlerinin birleştirme sonuçları üzerindeki olumsuz etkisini azaltmayı mümkün kılar.

8.1. Çoklu kriter karar verme problemleri için T-küresel bulanık kümeler ortamında Dombi kuvvet operatörleri

Bu bölümde, T-küresel bulanık kümeler ortamında Dombi kuvvet operatörü önerilmiştir. T-küresel bulanık kümeler sezgisel, Pisagor, q-rung bulanık kümelerini

kapsamaktadır. Genel yapısı sayesinde t. dereceden değerlendirme yapmak mümkündür. Önerilen operatörler ve bu operatörlerin bazı özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Tanım 8.1. $S_1 = (P_1, I_1, N_1)$ ve $S_2 = (P_2, I_2, N_2)$ iki T-küresel bulanık sayı olsun. $\beta \geq 1$ ve $\lambda \geq 0$ için T- küresel bulanık kümelerin Dombi operasyonları üzerindeki işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
S_1 \oplus S_2 &= \left(t \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{P_1^t}{1-P_1^t} \right)^\beta + \left(\frac{P_2^t}{1-P_2^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, t \sqrt{\frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{1-I_1^t}{I_1^t} \right)^\beta + \left(\frac{1-I_2^t}{I_2^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, t \sqrt{\frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{1-N_1^t}{N_1^t} \right)^\beta + \left(\frac{1-N_2^t}{N_2^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}} \right), \\
S_1 \otimes S_2 &= \left(t \sqrt{\frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{1-P_1^t}{P_1^t} \right)^\beta + \left(\frac{1-P_2^t}{P_2^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, t \sqrt{\frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{I_1^t}{1-I_1^t} \right)^\beta + \left(\frac{I_2^t}{1-I_2^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, t \sqrt{\frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{N_1^t}{1-N_1^t} \right)^\beta + \left(\frac{N_2^t}{1-N_2^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}} \right), \\
\lambda . S_1 &= \left(t \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \lambda \left(\frac{P_1^t}{1-P_1^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, t \sqrt{\frac{1}{1 + \left\{ \lambda \left(\frac{1-I_1^t}{I_1^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, t \sqrt{\frac{1}{1 + \left\{ \lambda \left(\frac{1-N_1^t}{N_1^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}} \right), \\
S_1^\lambda &= \left(\frac{1}{t \sqrt{1 + \left\{ \lambda \left(\frac{1-P_1^t}{P_1^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, t \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \lambda \left(\frac{I_1^t}{1-I_1^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, t \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \lambda \left(\frac{N_1^t}{1-N_1^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}} \right).
\end{aligned}$$

Yukardaki tanımdan yola çıkarak T-küresel bulanık kümeler ortamında ağırlıklı Dombi kuvvet ortalama operatörü ve T-küresel bulanık kümeler ortamında ağırlıklı Dombi kuvvet geometrik operatörünü tanımlamak mümkündür.

Teorem 8.1. $S_j = (P_j, I_j, N_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) T-SFPDWA'lerin bir koleksiyonu olsun. O halde T – SFPDWA operatör kullanılarak, T-SFN'lerin birleşimi ayrıca bir T-SPN'dir. Denklem (59) ile gösterilmektedir.

T – SFPDWA (59)

$$= \left(\sqrt[t]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^n \psi_j \left(\frac{P_j^t}{1-P_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, \sqrt[t]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^n \psi_j \left(\frac{1-I_j^t}{I_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, \sqrt[t]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^n \psi_j \left(\frac{1-N_j^t}{N_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}} \right)$$

Burada $\psi_i = \frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))}$, w_i , $S_j = (P_j, I_j, N_j)$ 'nin ağırlık vektörüdür. $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ve $\sum_{i=1}^n \psi_i = 1$. ψ_i ise T-SFN'lerin ağırlığı olarak ifade edilir.

İspat. $t=2$ için denklem (59) aşağıdaki gibi sağlanmaktadır

$$= \left(\sqrt[t]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^2 \psi_j \left(\frac{P_j^t}{1-P_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, \sqrt[t]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^2 \psi_j \left(\frac{1-I_j^t}{I_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, \sqrt[t]{\frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^2 \psi_j \left(\frac{1-N_j^t}{N_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}} \right)$$

Bu yüzden $\left(\sqrt[t]{1 - \frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{P_1^t}{1-P_1^t} \right)^\beta + \left(\frac{P_2^t}{1-P_2^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, \sqrt[t]{\frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{1-I_1^t}{I_1^t} \right)^\beta + \left(\frac{1-I_2^t}{I_2^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}}, \sqrt[t]{\frac{1}{1 + \left\{ \left(\frac{1-N_1^t}{N_1^t} \right)^\beta + \left(\frac{1-N_2^t}{N_2^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}} \right)$ elde edilir.

Bu yüzden $t=2$ için sağlanır.

Varsayalım ki denklem (59) $t=p$ için doğru olsun (p , doğal sayılar elemanı olmak üzere). O halde aşağıdaki denklem elde edilebilir.

$$T - SFPDWA(S_1, S_2, \dots, S_k) = \bigoplus_{j=1}^p (\psi_j P_j)$$

$$= \left({}^t \sqrt[1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^P \psi_j \left(\frac{P_j^t}{1 - P_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}]^{\frac{1}{\beta}}, {}^t \sqrt[1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^P \psi_j \left(\frac{1 - I_j^t}{I_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}]^{\frac{1}{\beta}}, {}^t \sqrt[1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^P \psi_j \left(\frac{1 - N_j^t}{N_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}]^{\frac{1}{\beta}} \right)$$

Bu durumda $t = p + 1$ için doğru olduğunu göstermemiz gerekiyor.

$$T - \text{SFPDWA}(S_1, S_2, \dots, S_k, S_{k+1}) = \oplus_{j=1}^p (\psi_j P_j) \oplus (\psi_{p+1} P_{p+1})$$

$$= \left({}^t \sqrt[1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^P \psi_j \left(\frac{P_j^t}{1 - P_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}]^{\frac{1}{\beta}}, {}^t \sqrt[1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^P \psi_j \left(\frac{1 - I_j^t}{I_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}]^{\frac{1}{\beta}}, {}^t \sqrt[1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^P \psi_j \left(\frac{1 - N_j^t}{N_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}]^{\frac{1}{\beta}} \right) \\ \oplus \left({}^t \sqrt[1 - \frac{1}{1 + \left\{ \psi_{p+1} \left(\frac{P_{p+1}^q}{1 - P_{p+1}^q} \right)^k \right\}^{1/k}}}]^{\frac{1}{k}}, {}^t \sqrt[1 - \frac{1}{1 + \left\{ \psi_{p+1} \left(\frac{1 - I_{p+1}^q}{I_{p+1}^q} \right)^k \right\}^{1/k}}}]^{\frac{1}{k}}, {}^t \sqrt[1 - \frac{1}{1 + \left\{ \psi_{p+1} \left(\frac{1 - N_{p+1}^q}{N_{p+1}^q} \right)^k \right\}^{1/k}}}]^{\frac{1}{k}} \right) \\ = \left({}^t \sqrt[1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^{P+1} \psi_j \left(\frac{P_j^t}{1 - P_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}]^{\frac{1}{\beta}}, {}^t \sqrt[1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^{P+1} \psi_j \left(\frac{1 - I_j^t}{I_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}]^{\frac{1}{\beta}}, {}^t \sqrt[1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^{P+1} \psi_j \left(\frac{1 - N_j^t}{N_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}]^{\frac{1}{\beta}} \right)$$

$t=p+1$ için doğrudur. Dolayısıyla, denklem (59) gösterilmiş olur.

Teorem 8.2. $S_j = (P_j, I_j, N_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) T-SFPDWA'lerin bir koleksiyonu olsun. O halde $T - \text{SFPDWA}$ operatör kullanılarak, T-SFN'lerin birleşimi ayrıca bir T-SPN'dir. denklem (60) ile gösterilmektedir.

$$T - \text{SFPDWA} \tag{60}$$

$$= \left({}^t \sqrt[1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^n \psi_j \left(\frac{1 - P_j^t}{P_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}]^{\frac{1}{\beta}}, {}^t \sqrt[1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^n \psi_j \left(\frac{I_j^t}{1 - I_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}]^{\frac{1}{\beta}}, {}^t \sqrt[1 - \frac{1}{1 + \left\{ \sum_{j=1}^n \psi_j \left(\frac{N_j^t}{1 - N_j^t} \right)^\beta \right\}^{\frac{1}{\beta}}}]^{\frac{1}{\beta}} \right)$$

Burada $\psi_i = \frac{w_i(1+T(a_i))}{\sum_{j=1}^n w_j(1+T(a_j))}$, w_i , $S_j = (P_j, I_j, N_j)$ 'nin ağırlık vektörüdür. $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ve $\sum_{i=1}^n \psi_i = 1$. ψ_i ise T-SFN'lerin ağırlığı olarak ifade edilir. Geometrik birleştirme operatörünün gösterimim teorem 8.1'e göre benzer şekilde yapılmaktadır. Ayrıca önerilen operatörler idempotentlik, sınırlılık ve monotonluk özelliklerini de sağlamaktadır. Önerilen yöntemin hem karar vericiler hem de kriterler açısından adım adım uygulama adımları aşağıdaki gibidir.

Karar vericilerin birleşmiş matrisinin hesaplama adımları

Adım 1. Normalizasyon adıımıdır. Eğer maaliyet türünde kriter var ise tamamlayıcı işlem yapılır. Bu durum ise (P_j, I_j, N_j) için P_j ile N_j 'nin yer değiştirmesi anlamına gelir.

Adım 2. Uzmanlara göre destek değerleri hesaplanır ($Sup(\delta_{ij}^s, \delta_{ik}^t)$).

Adım 3. $T(\delta_{ij}^s)$ matrisleri hesaplanır. $T(\delta_{ij}^s)$ değerleri 1- uzaklık olarak ifade edilir.

Adım 4. Her bir karar vericinin ağırlıkları ile kuvvet operatörü ağırlıkları hesaplanır. ψ^s değerleri olarak ifade edilir. Böylelikle her bir değerlendirmenin kuvvet ağırlıkları hesaplanmış olur.

Adım 5. Tüm karar vericiler tarafından oluşturulan karar matrisleri T-SFPDWA (denklem 59) ile tek bir karar matrisine indirgenir.

Alternatiflerin birleşmiş matrisinin hesaplama adımları

Adım 6. δ_{ij} ve δ_{ik} nitelikleri arasındaki destekler hesaplanır.

Adım 7. Destek değerleri hesaplanır. T destek değerleri (1-uzaklık) olarak ifade edilir

Adım 8. Alternatiflerin ağırlıkları ile kuvvet operatörü ağırlıkları hesaplanır.

Adım 9. Her bir alternatifin δ_i değerlerini hesaplamak için, T-SFPDWA (denklem 59) denklemi kullanılır.

Adım 10. (7) 'ye göre, her bir alternatifin skor değerleri hesaplanmaktadır.

8.2. Önerilen operatörün uygulanması

Önerilen operatörler hem çoklu kriter grup karar verme hem de çoklu kriter karar verme problemleri üzerinde uygulanmıştır.

Örnek 8.1. (Liu, Q., Mahmood, & Hassan, 2019b). Bir grup araştırmacı, farklı tarihlerde Guangzhou şehrinde hava kalitesi ölçümü yapmaktadır. Kasım ayı için 2006, 2007, 2008, 2009 tarihlerindeki üç farklı istasyon üzerinden ölçüm yapılmıştır. Dört farklı tarih alternatifleri oluştururken (A_1, A_2, A_3, A_4) nitelikler olarak da havadaki $SO_2(\lambda_1), NO_2(\lambda_2)$ ve $PM_{10}(\lambda_3)$ değerleri dikkate alınmıştır. Ayrıca üç farklı hava kalitesi izleme istasyonlarından alınan veriler de üç farklı karar verici (Z_1, Z_2, Z_3) olarak temsil edilir. Niteliklilerin ağırlıkları $w = (0.314, 0.355, 0.331)^T$, karar vericilerin ağırlıkları ise $\lambda = (0.40, 0.20, 0.40)^T$ olarak belirlenmiştir. Üç nitelik altında, üç hava kalitesi değerlendirme istasyonlarından alınan değerlendirmelere Tablo 8.1, 8.2 ve 8.3’de verilmiştir.

Tablo 8.1. Z_1 istasyonundan alınan hava kalitesi verisi

Alternatifler/ kriterler	C_1	C_2	C_3
A_1	(0.265, 0.350, 0.385)	(0.330, 0.390, 0.280)	(0.245, 0.275, 0.480)
A_2	(0.345, 0.245, 0.410)	(0.430, 0.290, 0.280)	(0.245, 0.375, 0.380)
A_3	(0.365, 0.300, 0.335)	(0.480, 0.315, 0.205)	(0.340, 0.370, 0.290)
A_4	(0.430, 0.300, 0.270)	(0.460, 0.245, 0.295)	(0.310, 0.520, 0.170)

Tablo 8.2. Z_2 istasyonundan alınan hava kalitesi verisi

Alternatifler kriterler	C_1	C_2	C_3
A_1	(0.125, 0.470, 0.405)	(0.220, 0.420, 0.360)	(0.345, 0.490, 0.165)
A_2	(0.335, 0.335, 0.330)	(0.300, 0.370, 0.330)	(0.205, 0.630, 0.165)
A_3	(0.250, 0.445, 0.305)	(0.310, 0.585, 0.105)	(0.240, 0.580, 0.220)
A_4	(0.365, 0.365, 0.270)	(0.355, 0.320, 0.325)	(0.325, 0.485, 0.190)

Tablo 8.3. Z_3 istasyonundan alınan hava kalitesi verisi

Alternatifler kriterler	C_1	C_2	C_3
A_1	(0.260, 0.425, 0.315)	(0.220, 0.450, 0.330)	(0.255, 0.500, 0.245)

A_2	(0.270,0.370,0.360)	(0.320,0.215,0.465)	(0.135,0.575,0.290)
A_3	(0.510,0.220,0.290)	(0.450,0.370,0.180)	(0.490,0.350,0.160)
A_4	(0.390,0.340,0.270)	(0.305,0.475,0.220)	(0.465,0.485,0.050)

Tüm özellikler fayda tipindedir. Dolayısıyla normalizasyon işlemine gerek yoktur. T-SFPDWA operatörüne dayalı çoklu kriter karar verme problemi çözüm adımları aşağıdaki gibidir:

Adım 1. Bütün nitelikler fayda tiplidir. Dolayısıyla, normalizasyona ihtiyaç yoktur. " $Z_{ij}^s = \delta_{ij}^s$ " sağlanır. δ_{ij}^s normalize karar matrisini ifade eder.

Adım 2. Örnek olarak, $t=3$ seçelim. S^{st} , destek değeri olarak gösterilsin. Uzmanlara göre destek değerleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Sup(\delta_{ij}^s, \delta_{ik}^t) = 1 - d(\delta_{ij}^s, \delta_{ik}^t), j, k = 1, 2, 3. (s, t = 1, 2, 3), (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$S^{12} = S^{21} = \begin{bmatrix} 0.9710 & 0.9784 & 0.9236 \\ 0.9802 & 0.9691 & 0.9154 \\ 0.9656 & 0.9143 & 0.9388 \\ 0.9828 & 0.9090 & 0.9890 \end{bmatrix}$$

$$S^{13} = S^{31} = \begin{bmatrix} 0.9798 & 0.9763 & 0.9327 \\ 0.9735 & 0.9534 & 0.9400 \\ 0.9621 & 0.9861 & 0.9645 \\ 0.9892 & 0.9412 & 0.9660 \end{bmatrix}$$

$$S^{23} = S^{32} = \begin{bmatrix} 0.9740 & 0.9907 & 0.9860 \\ 0.9861 & 0.9630 & 0.9713 \\ 0.9338 & 0.9281 & 0.9125 \\ 0.9933 & 0.9642 & 0.9757 \end{bmatrix}$$

Adım 3. $T(\delta_{ij}^s)$ matrisleri hesaplanır.

$$T^1 = \begin{bmatrix} 1.9508 & 1.9547 & 1.8562 \\ 1.9537 & 1.9225 & 1.8554 \\ 1.9277 & 1.9004 & 1.9033 \\ 1.9717 & 1.9124 & 1.9550 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = \begin{bmatrix} 1.9451 & 1.9692 & 1.9095 \\ 1.9663 & 1.9321 & 1.8867 \\ 1.8994 & 1.8424 & 1.8512 \\ 1.9758 & 1.9354 & 1.9647 \end{bmatrix}$$

$$T^3 = \begin{bmatrix} 1.9538 & 1.9671 & 1.9187 \\ 1.9596 & 1.9164 & 1.9113 \\ 1.8960 & 1.9143 & 1.8770 \\ 1.9825 & 1.9054 & 1.9417 \end{bmatrix}$$

Adım 4. Her bir karar vericinin ağırlıkları ile kuvvet operatörü ağırlıkları hesaplanır.

$$\psi^1 = \begin{bmatrix} 0.4000 & 0.3989 & 0.3951 \\ 0.3993 & 0.4001 & 0.3960 \\ 0.4025 & 0.4008 & 0.4029 \\ 0.3993 & 0.3997 & 0.4005 \end{bmatrix}$$

$$\psi^2 = \begin{bmatrix} 0.1996 & 0.2004 & 0.2012 \\ 0.2005 & 0.2007 & 0.2002 \\ 0.1993 & 0.196 & 0.1978 \\ 0.1999 & 0.2015 & 0.2009 \end{bmatrix}$$

$$\psi^3 = \begin{bmatrix} 0.4004 & 0.4006 & 0.4037 \\ 0.4001 & 0.3992 & 0.4038 \\ 0.3982 & 0.3988 & 0.3993 \\ 0.4008 & 0.2478 & 0.3987 \end{bmatrix}$$

Adım 5. Tüm karar vericiler tarafından oluşturulan karar matrisleri tek bir karar matrisi ile temsil edilir. T-SFPDWA($\delta_{ij}^1, \delta_{ij}^2, \delta_{ij}^3$)'ün birleştirilmiş sonucu aşağıda verilmiştir.

Tablo 8.4. Birleştirilmiş karar matrisi

Alternatifler	C_1	C_2	C_3
A_1	$\langle 0.2461, 0.3931, 0.3525 \rangle$	$\langle 0.2754, 0.4166, 0.3098 \rangle$	$\langle 0.2753, 0.3470, 0.2363 \rangle$
A_2	$\langle 0.3172, 0.2915, 0.3687 \rangle$	$\langle 0.3706, 0.2547, 0.3302 \rangle$	$\langle 0.2047, 0.4576, 0.2446 \rangle$
A_3	$\langle 0.4273, 0.2637, 0.3085 \rangle$	$\langle 0.4445, 0.3582, 0.1519 \rangle$	$\langle 0.4073, 0.3796, 0.1961 \rangle$
A_4	$\langle 0.4029, 0.3251, 0.2700 \rangle$	$\langle 0.3891, 0.3000, 0.2570 \rangle$	$\langle 0.3918, 0.4979, 0.0672 \rangle$

Alternatiflerin bir birleşmiş matrisinin hesaplama adımları

Adım 6. δ_{ij} ve δ_{ik} nitelikleri arasındaki destekler hesaplanır.

$$S_{12} = S_{21} = (0.9895, 0.9862, 0.9789, 0.9945)$$

$$S_{13} = S_{31} = (0.9815, 0.9567, 0.9771, 0.9621)$$

$$S_{23} = S_{32} = (0.9843, 0.9523, 0.9890, 0.9619)$$

Adım 7. Destek değerleri hesaplanır.

$$T = \begin{bmatrix} 1.9709 & 1.9737 & 1.9658 \\ 1.9429 & 1.9385 & 1.9090 \\ 1.9560 & 1.9679 & 1.9661 \\ 1.9566 & 1.9564 & 1.9240 \end{bmatrix}$$

Adım 8. Alternatiflerin ağırlıkları ile kuvvet operatörü ağırlıkları hesaplanır.

$$\xi_{ij} = \begin{bmatrix} 0.3141 & 0.3554 & 0.3305 \\ 0.3154 & 0.3560 & 0.3286 \\ 0.3132 & 0.3555 & 0.3313 \\ 0.3152 & 0.3563 & 0.3286 \end{bmatrix}$$

Adım 9. Her bir alternatifin δ_i değerlerini hesaplamak için, T-SFPDWA denklemi kullanılır.

$$\delta_1 = \langle 0.2669, 0.3816, 0.2829 \rangle, \delta_2 = \langle 0.3152, 0.2982, 0.2958 \rangle,$$

$$\delta_3 = \langle 0.4275, 0.3187, 0.1858 \rangle, \delta_4 = \langle 0.3945, 0.3418, 0.0963 \rangle$$

Adım 10. (7) 'ye göre, her bir alternatifin skor değerleri hesaplanmaktadır.

$$S(\delta_1) = -0.592, S(\delta_2) = -0.0211, S(\delta_3) = -0.0393, S(\delta_4) = 0.0205$$

Adım 11. $S(\delta_3) > S(\delta_4) > S(\delta_2) > S(\delta_1)$ 'e göre alternatiflerin sıralamaları $A_3 > A_4 > A_2 > A_1$ şeklindedir. Dolayısıyla üç istasyon ve kriterler ışığında en kaliteli hava ölçümü 2008 yılında görülmüştür.

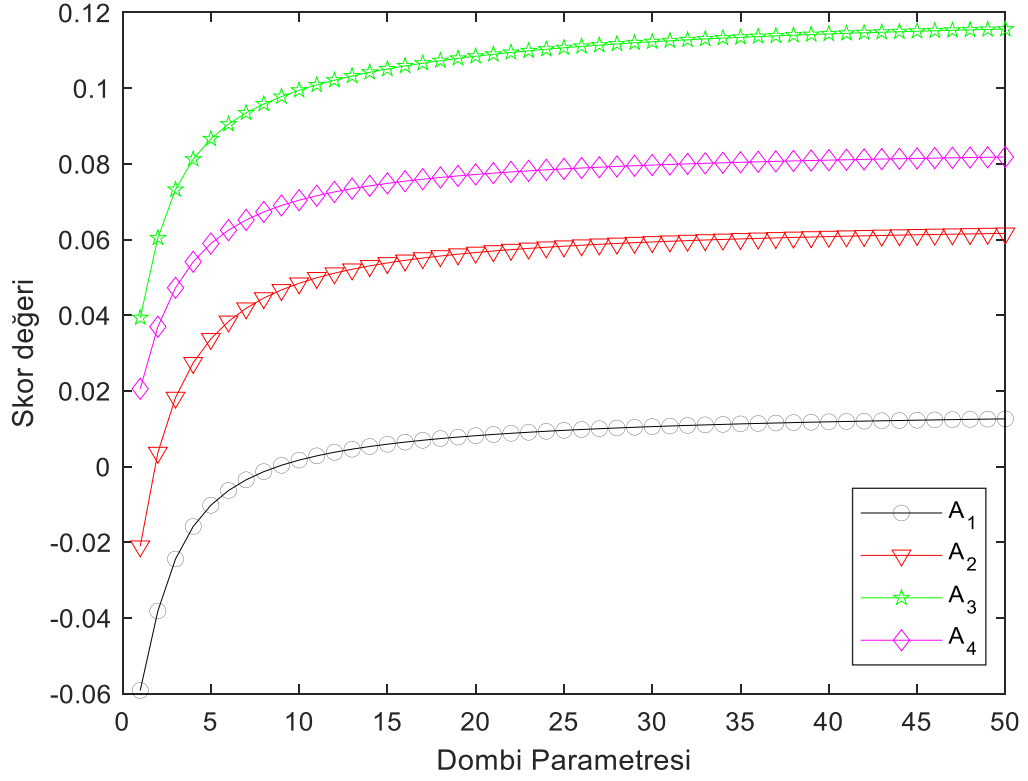
8.3. Karşılaştırma ve parametre analizleri

T- küresel bulanık kümeler, karar vericiler için genel bir değerlendirme ortamı sunmaktadır. Ayrıca önerilen birleştirme yöntemi hem kuvvet operatörü hem de Dombi parametresi ile birleştirilip, T-küresel bulanık ortamda ele alınmaktadır. Önerilen yöntemin literatürde diğer çalışmalar ile karşılaştırılması Tablo-8.5 de yer almaktadır.

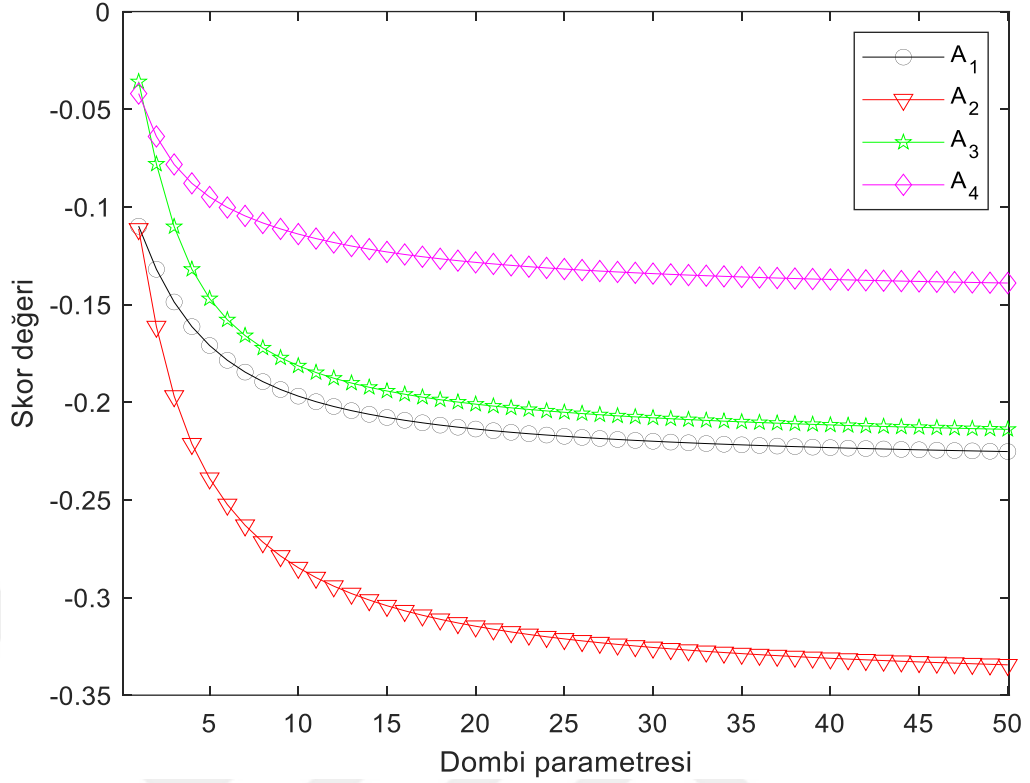
Tablo 8.5. Diğer birleştirme operatörleri ile karşılaştırma sonuçları

Birleştirme operatörü	Sıralama
PFWA	$A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
SGWA	$A_3 > A_2 > A_4 > A_1$
PFBM	$A_4 > A_3 > A_2 > A_1$
SPFPMM	$A_4 > A_3 > A_2 > A_1$
SPFPDMM	$A_4 > A_3 > A_2 > A_1$
T-SFPDWA	$A_3 > A_4 > A_2 > A_1$

T-SFPDWA ve T-SFPDWG operatörleri $t=3$ için farklı dombi parametre değerlerine şekil 8.1 ve 8.2’ de verilmiştir.



Şekil 8.1. T-SFPDWA operatörünün β parametresine göre sonuçları



Şekil 8.2. *T-SFPDWG operatörünün β parametresine göre sonuçları*

Karşılaştırma sonuçlarına göz önüne alındığında, en güncel ve özellikli Muirhead mean operatörü kullanılarak elde edilen operatör SPFPMM ve SPFPDMM operatörleridir. Bu operatörler de T-küresel bulanık küme ortamında çalışılmıştır ve kendi önerdiğimiz yöntemde de aynı veriler üzerinde bir kıyaslama söz konusudur (Liu, Q., Mahmood, & Hassan, 2019b). Ayrıca bu çalışma dikkate alındığından hem t parametresine göre hem de Muirhead mean vektörüne göre ayır ayrı sıralama sonuçları elde etmişlerdir. Ancak bütün durumlar için sadece iki farklı sıralama elde ettikleri görülmektedir. Bu sıralamalar $A_4 > A_3 > A_2 > A_1$ ve $A_3 > A_4 > A_2 > A_1$ şeklindedir. Aynı şekilde bizim çalışmamızda da benzer sıralamaların elde edildiği görülmektedir. Dombi kuvvet operatörünün işlemleri ve denklemleri Muirhead operatöre göre çok daha sade ve anlaşılırdır. Ayrıca MM operatör yapısı daha fazla işlem gerektirdiği için daha yavaş sonuç vermektedir. Bu yüzden Dombi yapısı hem esnek parametresi gereği hem de kuvvet operatörü ile birleştirmesinin verdiği avantaj ile uygulanabilirliği ve etkisi daha yüksek bir birleştirme operatörüdür.

9. SONUÇLAR

MCDM problemleri çözümünde çeşitli metotlar kullanılmaktadır. Son zamanlarda, literatür kapsamında MCDM problemleri için birçok toplama operatörü önerilmiştir. Ayrıca bazı önerilen toplama operatörleri, TOPSIS, MULTIMOORA, VIKOR gibi geleneksel çözüm yöntemleri ile birleştirilmiştir. MCDM problemleri ele alınırken temel bazı problemler bulunmaktadır. Özellikle, karar vericilerin değerlendirme uzayının darlığı, karar vericiler / uzmanlar arasındaki yanlışlık ihtimali, kriterlerin / niteliklerin birbirleri arasındaki orantısız ilişkiler, çoklu kriter problemlerinde karar verme mekanizmasını olumsuz etkilemektedir.

Tez kapsamında, ilk olarak Fermatean bulanık ortamda Dombi toplam operatörleri önerilmiştir. Dombi parametresi, değişken parametresi sayesinde esnek bir toplam operatörü sunmaktadır. Ayrıca önerilen operatör, TOPSIS yapısı ile birleştirilmiş ve literatürde yer alan bazı örneklerle karşılaştırılmıştır. Fermatean bulanık kümeler, sezgisel bulanık ve Pisagor bulanık kümelerinden daha geniş bir değerlendirme uzayına sahip olması da ayrıca bir avantajdır. Geniş Dombi parametresi aralığı kullanılarak, karşılaştırma sonuçlarının diğer çalışmalar ile paralellik göstermektedir. Bu çalışmada, FFS'ler üzerinde Dombi operatörleri kullanılarak daha duyarlı bir yapı oluşturulması amaçlanmıştır. Bu operatörler FFDWA, FFDWG, FFDOWA, FFDOWG, FFDHWA, FFDHWG operatörleridir. Beta 20'den büyük olduktan sonra beta değerlerinin sabit kaldığı görülmüştür. Ek olarak, Dombi operatörlerinin FFS'ler üzerindeki idempotentlik, sınırlılık ve monotonluk özelliklerinden bahsedildi. FFS'ler sezgisel bulanık kümelerin ve Pisagor bulanık kümelerin genişletilmiş kümesi olduğundan, FFS'lerin daha esnek ve daha tutarlı sonuçlar verdiği söylenebilir.

İkinci konu olarak, q-ROF ortamında bulanık öncelikli birleştirme operatörü önerilmiştir. Karar vericiler ve uzmanlar tarafından yapılan değerlendirmeler farklı öncelik düzeyinde olabilir. Böylece farklı öncelik düzeylerini hesaba katmak için öncelikli birleştirme operatörü kullanılmaktadır. Ayrıca önerilen operatörler, MULTIMOORA yöntemi ile birleştirilmiştir. Nitelikler arasındaki ilişki ve niteliklerin önceliği, alternatifler arasındaki ilişki hesaba katılmaktadır. Aynı zamanda bu yöntem hassasiyet ve esneklik sağlar. Önerilen metotlar Dombi ek parametresi içermektedir ve nitelik önceliklerini dikkate almaktadır. Birleştirme yöntemleri tek başına yeterli sonuçlar verse bile, bu yöntemlerin MADM modellerinde kullanılması hem karar verme sürecini

güçlendirmekte hem de belirsizlikleri daha iyi ifade etmelerine olanak sağlamaktadır. Önerilen metotlar için q ve k parametrelerine göre detaylı inceleme yapıldı. Önerilen yapıların hem Pisagor karar matrisinde hem de q -ROF karar matrisinde tutarlı ve doğru sonuçlar verdiği görülmektedir.

Üçüncü konu, karar vericiler arasındaki yansızlığı sağlamak adına önerilen bir yöntemdir. PNA operatörü, kuvvet ve yansızlık operatörünün birleştirilmesinden oluşmaktadır. Hem kuvvet operatörü ile kriterler arasındaki ilişki baz alınarak ağırlık matrisleri elde edilir hem de olasılıksal toplam ile yansızlık operatörü kullanılmaktadır. MADM'in en önemli sorunlarından biri, karar vericilerin önyargılarının değerlendirmelerine yansmasıdır. Bu nedenle önyargılı bir karar alma sürecine neden olur. Bu makalede, PA ve NA toplama operatörlerinin avantajları tek bir toplama yönteminde birleştirilmiştir. NA tarafsız bir karar verme yapısı sunar. PA ayrıca girdiler arasındaki ilişkileri de hesaba katmaktadır. Önerilen çalışmada PNA, çok kriterli problemlere uygulanmıştır. Diğer yandan PNA'nın geçerlilik testleri yapılarak tutarlı sonuçlar elde edilmiştir. PNA yöntemi, literatürde yer alan bazı çalışmalar ile karşılaştırıldığında, tutarlı sonuç verdiği görülmektedir.

Dördüncü konu, kriterlerin birbirleri arasındaki ilişkiyi kullanan MM operatörü ile öncelikli operatör birleştirilmiştir. MM operatörün parametre vektörüne göre herhangi sayıdaki kriter arasındaki ilişki ile sıralamalar elde edilmiştir. Çok kriterli problemlerde kriterler arasındaki ilişkiye göre daha hassas sonuçlar elde edilir. Ayrıca öncelikli operatör kullanılarak hem kriterler hem de karar vericiler arasındaki öncelikler değerlendirilir.

Son konu ise tereddütlük derecesi bağımsız olarak kullanılan T-küresel bulanık küme ortamında önerilmektedir. Dombi ve kuvvet operatörleri birleştirilmiştir. Ayrıca t . Dereceden parametre analizler yapılmış ve literatürde yer alan diğer çalışmalar ile karşılaştırmalar yapılmıştır.

Bütün önerilen yöntemler göz önüne alındığında, tez kapsamında MCDM problemlerine çeşitli çözümler üretilmeye çalışılmıştır. Q -ROF ve T-küresel bulanık kümeler karar vericilere geniş bir değerlendirme uzayı sunar. Kuvvet ve MM operatörleri ile kriterler arasındaki ilişkiler hesaba katılmaktadır. Ayrıca kuvvet operatörü aşırı yüksek veya düşük kriterlerin birleşme sonucundaki olumsuz etkisinin azaltmaktadır. Öncelik

operatörü, karar vericilerin ve uzmanların farklı önem düzeyindeki kriterleri için bir mekanizma oluşturur. Problemler sonucu elde edilen sıralamalar, literatürdeki önerilen diğer sıralamalar ile paralel sonuçlar üretmektedir. Ayrıca tez boyunca önerilen yöntemlerin diğer yöntemlere göre üstün yönlerine ve avantajlarına da değinilmektedir. Önerilen yöntemlerin diğer çalışmalar ile karşılaştırılmasıyla tutarlı sonuçlar elde edildiği için tez kapsamında önerilen bütün yöntemler MAGM ve MADM problemlerinin çözümünde kullanılabilmektedir.



KAYNAKÇA

- Akram, M., Dudek, W. A., & Dar, J. M. (2019). Pythagorean Dombi fuzzy aggregation operators with application in multicriteria decision-making. *International Journal of Intelligent Systems*, 3000-3019.
- Athan, T. W., & Papalambros, P. Y. (1996). A note on weighted criteria methods for compromise solutions in multi-objective optimization. *Engineering Optimization*, 155-176.
- Baležentis, A., Baležentis, T., & Brauers, W. K. (2012). Personnel selection based on computing with words and fuzzy MULTIMOORA. *Expert Systems with applications*, 7961-7967.
- Baležentis, T., Zeng, S., & Baležentis, A. (2014). MULTIMOORA-IFN: A MCDM METHOD BASED ON INTUITIONISTIC FUZZY NUMBER FOR PERFORMANCE MANAGEMENT. *Economic Computation & Economic Cybernetics Studies & Research*, 85-102.
- Baležentis, T.; Zeng, S. (2013). Group multi-criteria decision making based upon interval-valued fuzzy numbers: an extension of the MULTIMOORA method. *Expert Systems with Applications*, 543-550.
- Behzadian, M., Otaghsara, S. K., Yazdani, M., & Ignatius, J. (2012). A state-of the-art survey of TOPSIS applications. *Expert Systems with applications*, 13051-13069.
- Biswas, P., Pramanik, S., & Giri, B. C. (2016). TOPSIS method for multi-attribute group decision-making under single-valued neutrosophic environment. . *Neural computing and Applications*, 727-737.
- Boran, F. E., S., G., M., K., & Akay, D. (2009). A multi-criteria intuitionistic fuzzy group decision making for supplier selection with TOPSIS method. *Expert Systems with Applications*, 11363-11368.
- Brans, J. P., Vincke, P., & Mareschal, B. (1986). How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method. *European journal of operational research*, 228-238.

- Brauers, W. K. (2002). The multiplicative representation for multiple objectives optimization with an application for arms procurement. *Naval Research Logistics*, 327-340.
- Brauers, W. K. (2006). The MOORA method and its application to privatization in a transition economy. *Control and cybernetics*, 445-469.
- Brauers, W. K. M. (2008). Multi-objective contractor's ranking by applying the MOORA method. *Journal of Business Economics and management*, 245-255.
- Brauers, W. K. M.; Zavadskas, E. K. (2010). Project management by MULTIMOORA as an instrument for transition economies. *Technological and Economic Development of Economy*, 5-24.
- Brauers, W. K. M.; Zavadskas, E. K. (2011). MULTIMOORA optimization used to decide on a bank loan to buy property. *Technological and economic development of economy*, 174-188.
- Brauers, W. K., & Zavadskas, E. K. (2012). Robustness of MULTIMOORA: a method for multi-objective optimization. *Informatica*, 1-25.
- Brauers, W. K.; Zavadskas, E. K. (2009). Robustness of the multi-objective MOORA method with a test for the facilities sector. *Technological and economic development of economy*, 352-375.
- Chen, J., & Ye, J. (2017). Some single-valued neutrosophic Dombi weighted aggregation operators for multiple attribute decision-making. *Symmetry*, 1-11.
- Chen, S. J. (1992). Fuzzy multiple attribute decision making methods. *Fuzzy multiple attribute decision making*, 289-486.
- Chen, T. Y. (2012). Nonlinear assignment-based methods for interval-valued intuitionistic fuzzy multi-criteria decision analysis with incomplete preference information. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 821-855.
- Chen, T. Y. (2014). Interval-valued intuitionistic fuzzy QUALIFLEX method with a likelihood-based comparison approach for multiple criteria decision analysis. *Information Sciences*, 149-169.

- Chen, T. Y. (2014). The extended linear assignment method for multiple criteria decision analysis based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Applied Mathematical Modelling*, 2101-2117.
- Chen, T. Y. (2018). A novel PROMETHEE-based outranking approach for multiple criteria decision analysis with Pythagorean fuzzy information. *Ieee Access*, 54495-54506.
- Chen, T. Y. (2018). An interval-valued Pythagorean fuzzy compromise approach with correlation-based closeness indices for multiple-criteria decision analysis of bridge construction methods. *Complexity*, 1-29.
- Chen, T. Y. (2018). An interval-valued Pythagorean fuzzy outranking method with a closeness-based assignment model for multiple criteria decision making. *International Journal of Intelligent Systems*, 126-168.
- Chen, X., Zhao, L., & Liang, H. (2018). A novel multi-attribute group decision-making method based on the MULTIMOORA with linguistic evaluations. *Soft Computing*, 5347-5361.
- Cuong, B. C., & Kreinovich, V. (2013). Picture Fuzzy Sets-a new concept for computational intelligence problems. *Third World Congress on Information and Communication Technologies* (s. 1-6). Hanoi: IEEE.
- Dai, W. F., Zhong, Q. Y., & Qi, C. Z. (2018). Multi-stage multi-attribute decision-making method based on the prospect theory and triangular fuzzy MULTIMOORA. *Soft Computing*, 1-12.
- De, S. K., Biswas, R., & Roy, A. R. (2001). An application of intuitionistic fuzzy sets in medical diagnosis. *Fuzzy sets and Systems*, 209-213.
- Deliktas, D., & Ustun, O. (2017). Student selection and assignment methodology based on fuzzy MULTIMOORA and multichoice goal programming. *International Transactions in Operational Research*, 1173-1195.
- Dombi, J. (1982). A general class of fuzzy operators, the DeMorgan class of fuzzy operators and fuzziness measures induced by fuzzy operators. *Fuzzy sets and systems*, 149-163.

- Fattahi, R., & Khalilzadeh, M. (2018). Risk evaluation using a novel hybrid method based on FMEA, extended MULTIMOORA, and AHP methods under fuzzy environment. *Safety science*, 290-300.
- Gao, H. (2018). Pythagorean fuzzy Hamacher prioritized aggregation operators in multiple attribute decision making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2229-2245.
- Gao, H. (2018). Pythagorean fuzzy Hamacher prioritized aggregation operators in multiple attribute decision making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2229-2245.
- Gao, H. (2018). Pythagorean fuzzy Hamacher prioritized aggregation operators in multiple attribute decision making. . *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2229-2245.
- Garg, H. (2016a). Generalized intuitionistic fuzzy interactive geometric interaction operators using Einstein t-norm and t-conorm and their application to decision making. *Computers & Industrial Engineering*, 53-69.
- Garg, H. (2016b). Novel single-valued neutrosophic aggregated operators under Frank norm operation and its application to decision-making process. *International Journal for Uncertainty Quantification*, 361-375.
- Garg, H. (2017a). Confidence levels based Pythagorean fuzzy aggregation operators and its application to decision-making process. *Computational and Mathematical Organization Theory*, 546-571.
- Garg, H. (2017b). Generalized Pythagorean fuzzy geometric aggregation operators using Einstein t-norm and t-conorm for multicriteria decision-making process. *International Journal of Intelligent Systems*, 597-630.
- Garg, H. (2019a). Neutrality operations-based Pythagorean fuzzy aggregation operators and its applications to multiple attribute group decision-making process. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 1-21.

- Garg, H. (2019b). Novel neutrality aggregation operator-based multiattribute group decision-making method for single-valued neutrosophic numbers. *Soft Computing*, 1-23.
- Garg, H.; Chen, S. M. (2020a). Multiattribute group decision making based on neutrality aggregation operators of q-rung orthopair fuzzy sets. *Information Sciences*, 427-447.
- Garg, H.; Chen, S. M. (2020b). Multiattribute group decision making based on neutrality aggregation operators of q-rung orthopair fuzzy sets. *Information Sciences*, 427-447.
- Geetha, S., Narayanamoorthy, S., Kang, D., & Kureethara, J. V. (2019). A Novel Assessment of Healthcare Waste Disposal Methods: Intuitionistic Hesitant Fuzzy MULTIMOORA Decision Making Approach. *IEEE Access*, 130283-130299.
- Gündoğdu, F. K., & Kahraman, C. (2019). A novel fuzzy TOPSIS method using emerging interval-valued spherical fuzzy sets. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 307-323.
- Hadi-Vencheh, A., & Mirjaber, M. (2014). Fuzzy inferior ratio method for multiple attribute decision making problems. *Information Sciences*, 263-272.
- Hatzimichailidis, A. G., Papakostas, G. A., & Kaburlasos, V. G. (2012). A novel distance measure of intuitionistic fuzzy sets and its application to pattern recognition problems. *International Journal of Intelligent Systems*, 396-409.
- He, Y., Chen, H., Zhou, L., Liu, J., & Tao, Z. (2013). Generalized Interval-Valued Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Power Operators and Their Application to Group Decision Making. *International Journal of Fuzzy Systems*, 401-411.
- Jana, C. M. (2019). Some Dombi aggregation of Q-rung orthopair fuzzy numbers in multiple-attribute decision making. *International Journal of Intelligent Systems*, 3220-3240.
- Joshi, B. P. (2018). Interval valued q-rung orthopair fuzzy sets and their properties. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 5225-5230.

- Joshi, B. P., & Kumar, S. (2012). Intuitionistic fuzzy sets based method for fuzzy time series forecasting. *Cybernetics and Systems*, 34-47.
- Kahraman, C. (2008). *Fuzzy multi-criteria decision making: theory and applications with recent developments*. Springer Science & Business Media.
- Kahraman, C., Gundogdu, F. K., Onar, S. C., & Oztaysi, B. (2019). Hospital location selection using spherical fuzzy TOPSIS. *Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology*. Atlantis Press.
- Ke, D., Song, Y., & Quan, W. (2018). New distance measure for Atanassov's intuitionistic fuzzy sets and its application in decision making. *Symmetry*, 1-20.
- Khan, A. A., Ashraf, S., Abdullah, S., Qiyas, M., Luo, J., & Khan, S. U. (2019). Pythagorean fuzzy Dombi aggregation operators and their application in decision support system. *Symmetry*, 383.
- Khan, M. S., Abdullah, S., Ali, A., & Amin, F. (2019). Pythagorean fuzzy prioritized aggregation operators and their application to multi-attribute group decision making. *Granular Computing*, 249-263.
- Kutlu Gündoğdu, F. (2020). A spherical fuzzy extension of MULTIMOORA method. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 1-16.
- Kutlu Gündoğdu, F., & Kahraman, C. (2019). Spherical fuzzy sets and spherical fuzzy TOPSIS method. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 337-352.
- Li, Z. H. (2014). An extension of the MULTIMOORA method for multiple criteria group decision making based upon hesitant fuzzy sets. *Journal of Applied Mathematics*, 1-16.
- Li, Z., Wei, G., & Lu, M. (2018). Pythagorean fuzzy hamy mean operators in multiple attribute group decision making and their application to supplier selection. *Symmetry*, 505.
- Li, Z.; Wei, G.; Lu, M. (2018). Pythagorean fuzzy hamy mean operators in multiple attribute group decision making and their application to supplier selection. *Symmetry*, 1-34.

- Liang, D., Darko, A. P., Xu, Z., & Wang, M. (2019a). Aggregation of dual hesitant fuzzy heterogeneous related information with extended Bonferroni mean and its application to MULTIMOORA. *Computers & Industrial Engineering*, 156-176.
- Liang, D.; Darko, A. P.; Zeng, J. (2019b). Interval-valued pythagorean fuzzy power average-based MULTIMOORA method for multi-criteria decision-making. *Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence*, 1-30.
- Liang, W., Zhao, G., & Hong, C. (2019). Selecting the optimal mining method with extended multi-objective optimization by ratio analysis plus the full multiplicative form (MULTIMOORA) approach. *Neural Computing and Applications*, 5871-5886.
- Liao, H., Wu, X., Keikha, A., & Hafezalkotob, A. (2018). Power average-based score function and extension rule of hesitant fuzzy set and the hesitant power average operators. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 3873-3882.
- Lin, R. Z. (2013). Fuzzy number intuitionistic fuzzy prioritized operators and their application to multiple attribute decision making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 879-888.
- Liu, D., Liu, Y., & Chen, X. (2019a). Fermatean fuzzy linguistic set and its application in multicriteria decision making. *International Journal of Intelligent Systems*, 878-894.
- Liu, D.; Liu, Y.; Wang, L. (2019). Distance measure for Fermatean fuzzy linguistic term sets based on linguistic scale function: An illustration of the TODIM and TOPSIS methods. *International Journal of Intelligent Systems*, 2807-2834.
- Liu, H. W., & Wang, G. J. (2007). Multi-criteria decision-making methods based on intuitionistic fuzzy sets. *European Journal of Operational Research*, 220-233.
- Liu, P., Li, Y., Zhang, M., Zhang, L., & Zhao, J. (2018a). Multiple-attribute decision-making method based on hesitant fuzzy linguistic Muirhead mean aggregation operators. *Soft Computing*, 5513-5524.

- Liu, P., Q., K., Mahmood, T., & Hassan, N. (2019b). T-spherical fuzzy power Muirhead mean operator based on novel operational laws and their application in multi-attribute group decision making. *IEEE Access*, 22613-22632.
- Liu, P.; Chen, S. M. (2016a). Group decision making based on Heronian aggregation operators of intuitionistic fuzzy numbers. *IEEE transactions on cybernetics*, 2514-2530.
- Liu, P.; Chen, S. M.; Wang, P. (2018). Multiple-attribute group decision-making based on q-rung orthopair fuzzy power maclaurin symmetric mean operators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems.*, 1-16.
- Liu, P.; Chen, S. M.; Wang, P. (2018b). Multiple-attribute group decision-making based on q-rung orthopair fuzzy power maclaurin symmetric mean operators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems.*, 1-16.
- Liu, P.; Chen, S. M.; Wang, P. (2018d). Multiple-attribute group decision-making based on q-rung orthopair fuzzy power maclaurin symmetric mean operators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 1-16.
- Liu, P.; Chen, S. M.; Wang, P. (2018d). Multiple-attribute group decision-making based on q-rung orthopair fuzzy power maclaurin symmetric mean operators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems.*, 1-16.
- Liu, P.; Li, D. (2017). Some Muirhead mean operators for intuitionistic fuzzy numbers and their applications to group decision making. *PloS one*, 1-28.
- Liu, P.; Li, D. (2017). Some Muirhead mean operators for intuitionistic fuzzy numbers and their applications to group decision making. *PloS one*, 1-28.
- Liu, P.; Li, D. (2017a). Some Muirhead mean operators for intuitionistic fuzzy numbers and their applications to group decision making. *PloS one*, 1-28.
- Liu, P.; Liu, J. (2018). Some q-rung orthopai fuzzy Bonferroni mean operators and their application to multi-attribute group decision making. *International Journal of Intelligent Systems*, 315-347.

- Liu, P.; Liu, J. (2018c). Some q-rung orthopai fuzzy Bonferroni mean operators and their application to multi-attribute group decision making. *International Journal of Intelligent Systems*,, 315-347.
- Liu, P.; Liu, W. (2019). Multiple-attribute group decision-making based on power Bonferroni operators of linguistic q-rung orthopair fuzzy numbers. *International Journal of Intelligent Systems*, 652-689.
- Liu, P.; Tang, G. (2016). Some power generalized aggregation operators based on the interval neutrosophic sets and their application to decision making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*,, 2517-2528.
- Liu, P.; Wang, P. (2018a). Some q-rung orthopair fuzzy aggregation operators and their applications to multiple-attribute decision making. *International Journal of Intelligent Systems*, 259-280.
- Ma, Z., & Xu, Z. (2016). Symmetric Pythagorean fuzzy weighted geometric/averaging operators and their application in multicriteria decision-making problems. *International Journal of Intelligent Systems*, 1198-1219.
- Mahmood, T., Ullah, K., Khan, Q., & Jan, N. (2019). An approach toward decision-making and medical diagnosis problems using the concept of spherical fuzzy sets. *Neural Computing and Applications*, 7041-7053.
- Mahmood, T.; Ullah, K.; Khan, Q.; Jan, N. (2019). An approach toward decision-making and medical diagnosis problems using the concept of spherical fuzzy sets. *Neural Computing and Applications*, 7041-7053.
- Melo-Pinto, P. C. (2013). Image segmentation using Atanassov's intuitionistic fuzzy sets. *. Expert Systems with Applications*, 15-26.
- Merigo, J. M., & Casanovas, M. (2010). Fuzzy Generalized Hybrid Aggregation Operators and its Application in Fuzzy Decision Makin. *International Journal of Fuzzy Systems*, 15-24.
- Merigo, J. M.; Casanovas, M. (2011). Decision-making with distance measures and induced aggregation operators. *Computers & Industrial Engineering*, 66-76.

- Miller DW, S. M. (1969). *Executive Decisions and Operations and Research*. Englewood Cliffs: Prentice- Hall Inc.
- Munir, M., Kalsoom, H., Ullah, K., Mahmood, T., & Chu, Y. M. (2020). T-spherical fuzzy Einstein hybrid aggregation operators and their applications in multi-attribute decision making problems. . *Symmetry*, 365.
- Pamučar, D., & Ćirović, G. (2015). The selection of transport and handling resources in logistics centers using Multi-Attributive Border Approximation area Comparison (MABAC). *Expert systems with applications*, 3016-3028.
- Park, J. H., Park, I. Y., Kwun, Y. C., & Tan, X. (2011). Extension of the TOPSIS method for decision making problems under interval-valued intuitionistic fuzzy environment. *Applied Mathematical Modelling*, 2544-2556.
- Peng, J. J., Wang, J. Q., Wu, X. H., Wang, J., & Chen, X. H. (2015). Multi-valued neutrosophic sets and power aggregation operators with their applications in multi-criteria group decision-making problems. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 345-363.
- Qin, J., Liu, X., & Pedrycz, W. (2015). Hesitant fuzzy Maclaurin symmetric mean operators and its application to multiple-attribute decision making. *International Journal of Fuzzy Systems*, 509-520.
- Qin, J.; Liu, X. (2014). An approach to intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making based on Maclaurin symmetric mean operators. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2177-2190.
- Reformat, M. Z., & Yager, R. R. (2014). suggesting recommendations using Pythagorean fuzzy sets illustrated using Netflix movie data. *international conference on information processing and management of uncertainty in knowledge-based systems*, 546-556.
- Riaz, M., Athar Farid, H. M., Kalsoom, H., Pamučar, D., & Chu, Y. M. (2020). A Robust q-rung orthopair fuzzy Einstein prioritized aggregation operators with application towards MCGDM. *Symmetry*, 1058.

- Riaz, M., Farid, H. M., Karaaslan, F., & Hashmi, M. R. (2020). Some q-rung orthopair fuzzy hybrid aggregation operators and TOPSIS method for multi-attribute decision-making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 1-15.
- Roszkowska, E. (2011). Multi-criteria decision making models by applying the TOPSIS method to crisp and interval data. *Multiple Criteria Decision Making*, 200-230.
- Seikh, M. R., & Mandal, U. (2019). Intuitionistic fuzzy Dombi aggregation operators and their application to multiple attribute decision-making. *Granular Computing*, 1-16.
- Senapati, T., & Yager, R. R. (2019a). Some new operations over Fermatean fuzzy numbers and application of Fermatean fuzzy WPM in multiple criteria decision making. *Informatica*, 391-412.
- Senapati, T.; Yager, R. R. (2019b). Fermatean fuzzy weighted averaging/geometric operators and its application in multi-criteria decision-making methods. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 112-121.
- Senapati, T.; Yager, R. R. (2020). Fermatean fuzzy sets. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 663-674.
- Shi, L., & Ye, J. (2018). Dombi aggregation operators of neutrosophic cubic sets for multiple attribute decision-making. *Algorithms*, 29.
- Shih, H. S., Shyur, H. J., & Lee, E. S. (2007). An extension of TOPSIS for group decision making. *Mathematical and computer modelling*, 801-813.
- Shouzen, Z. E., Baležentis, A., & Weihua, S. U. (2013). HE MULTI-CRITERIA HESITANT FUZZY GROUP DECISION MAKING WITH MULTIMOORA METHOD. *Economic Computation & Economic Cybernetics Studies & Research*, 171-184.
- Stanujkic, D., Karabasevic, D., Zavadskas, E. K., Smarandache, F., & Brauers, W. K. (2019). A bipolar fuzzy extension of the MULTIMOORA method. *Informatica*, 135-152.

- Stanujkic, D., Zavadskas, E. K., Smarandache, F., Brauers, W. K., & Karabasevic, D. (2017). A neutrosophic extension of the MULTIMOORA method. *Informatica*, 181-192.
- T.Atanassov, K. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 87-96.
- T.Atanassov, K. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 87-96.
- Tang, X., Fu, C., Xu, D. L., & Yang, S. (2017). Analysis of fuzzy Hamacher aggregation functions for uncertain multiple attribute decision making. . *Information Sciences*, 19-33.
- Torra, V. (2010). Hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 529-539.
- Triantaphyllou, E. (2000). Multi-criteria decision making methods. *Multi-criteria decision making methods: A comparative study*, 5-21.
- Ullah, K., Garg, H., Mahmood, T., Jan, N., & Ali, Z. (2020). Correlation coefficients for T-spherical fuzzy sets and their applications in clustering and multi-attribute decision making. . *Soft Computing*, 1647-1659.
- Ullah, K.; Mahmood, T.; Garg, H. (2020). Evaluation of the Performance of Search and Rescue Robots Using T-spherical Fuzzy Hamacher Aggregation Operators. *International Journal of Fuzzy Systems*, 570-582.
- Ullah, K.; Mahmood, T.; Jan, N. (2018). Similarity measures for T-spherical fuzzy sets with applications in pattern recognition. *Symmetry*, 193.
- Vlachos, I. K., & Sergiadis, G. D. (2007). Intuitionistic fuzzy information–applications to pattern recognition. *Pattern Recognition Letters*, 197-206.
- Wang, J. C., & Chen, T. Y. (2015). Likelihood-based assignment methods for multiple criteria decision analysis based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 425-457.
- Wang, J. Q., Yang, Y., & Li, L. (2018). Multi-criteria decision-making method based on single-valued neutrosophic linguistic Maclaurin symmetric mean operators. *Neural Computing and Applications*, 1529-1547.

- Wang, J., Zhang, R., Zhu, X., Zhou, Z., Shang, X., & Li, W. (2019). Some q-rung orthopair fuzzy Muirhead means with their application to multi-attribute group decision making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 1599-1614.
- Wang, J.; Zhang, R.; Zhu, X.; Zhou, Z.; Shang, X.; Li, W. (2019a). Some q-rung orthopair fuzzy Muirhead means with their application to multi-attribute group decision making. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 1599-1614.
- Wang, W., Mendel, & M., J. (2019). Interval-valued intuitionistic fuzzy aggregation methodology for decision making with a prioritization of criteria. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 115-127.
- Wang, X., & Triantaphyllou, E. (2008). Ranking irregularities when evaluating alternatives by using some ELECTRE methods. *Omega*, 45-63.
- Wei, G. &. (2018). Pythagorean fuzzy power aggregation operators in multiple attribute decision making. *International Journal of Intelligent Systems*, 169-186.
- Wei, G. &. (2019). Some single-valued neutrosophic Bonferroni power aggregation operators in multiple attribute decision making. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 863-882.
- Wei, G. (2012). Hesitant fuzzy prioritized operators and their application to multiple attribute decision making. *Knowledge-Based Systems*, 176-182.
- Wei, G. G. (2018). Some q-rung orthopair fuzzy Heronian mean operators in multiple attribute decision making. *International Journal of Intelligent Systems*, 1426-1458.
- Wei, G. W. (2019). Pythagorean fuzzy Hamacher power aggregation operators in multiple attribute decision making. *Fundamenta Informaticae*, 57-85.
- Wei, G.; Lu, M. (2018). Pythagorean fuzzy Maclaurin symmetric mean operators in multiple attribute decision making. *International Journal of Intelligent Systems*, 1043-1070.
- Xia, M., Xu, Z., & Zhu, B. (2012). Some issues on intuitionistic fuzzy aggregation operators based on Archimedean t-conorm and t-norm. *Knowledge-Based Systems*, 78-88.

- Xian, S., Liu, Z., Gou, X., & Wan, W. (2020). Xian, S., Liu, Z., Gou, X., & Wan, W. (2020). Interval 2-tuple Pythagorean fuzzy linguistic MULTIMOORA method with CIA and their application to MCGDM. *International Journal of Intelligent Systems*, 650-681.
- Xindong Peng, J. D. (2018). Exponential operation and aggregation operator for q-rung orthopair fuzzy set and their decision-making method with a new score function. *International Journal of Intelligent Systems*, 2255–2282.
- Xu, Z. (2007). Intuitionistic fuzzy aggregation operators. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 1179-1187.
- Xu, Z. (2011). Approaches to multiple attribute group decision making based on intuitionistic fuzzy power aggregation operators. *Knowledge-Based Systems*, 749-760.
- Xu, Z.; Yager, R. R. (2010). Intuitionistic fuzzy Bonferroni means. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 568-578.
- Xu, Z.; Yager, R. R. (2010). Intuitionistic fuzzy Bonferroni means. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 568-578.
- Yager, R. R. (1988). On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics*, 183-190.
- Yager, R. R. (1988). On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics*, 183-190.
- Yager, R. R. (2001). The power average operator. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 724-731.
- Yager, R. R. (2008). Prioritized aggregation operators. *International Journal of Approximate Reasoning*, 263-274.
- Yager, R. R. (2008). Prioritized aggregation operators. *International Journal of Approximate Reasoning*, 263-274.

- Yager, R. R. (2013a). Pythagorean fuzzy subsets. *IFSA world congress and NAFIPS annual meeting* (s. 57-61). Edmonton: IEEE.
- Yager, R. R. (2013b). Pythagorean membership grades in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 958-965.
- Yager, R. R. (2016). Generalized orthopair fuzzy sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1222-1230.
- Yang, W., & Pang, Y. (. (2018). New Pythagorean fuzzy interaction Maclaurin symmetric mean operators and their application in multiple attribute decision making. *IEEE Access*, 39241-39260.
- Yu, C., Shao, Y., Wang, K., & Zhang, L. (2019). A group decision making sustainable supplier selection approach using extended TOPSIS under interval-valued Pythagorean fuzzy environment. . *Expert Systems with Applications*, 1-17.
- Yu, D. (2013). Intuitionistic fuzzy geometric Heronian mean aggregation operators. *Applied Soft Computing*, 1235-1246.
- Yu, D. (2017). Hesitant fuzzy multi-criteria decision making methods based on Heronian mean. *Technological and Economic Development of Economy*, 296-315.
- Yu, D.; Wu, Y.; Lu, T. (2012). Interval-valued intuitionistic fuzzy prioritized operators and their application in group decision making. *Knowledge-Based Systems*, 57-66.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 338-353.
- Zavadskas, E. K., Antucheviciene, J., Razavi Hajiagha, S. H., & Hashemi, S. S. (2015). The interval-valued intuitionistic fuzzy MULTIMOORA method for group decision making in engineering. *Mathematical Problems in Engineering*, 1-13.
- Zeng, S., Chen, S. M., & Kuo, L. W. (2019). Multiattribute decision making based on novel score function of intuitionistic fuzzy values and modified VIKOR method. *Information Sciences*, 76-92.
- Zhang, C., Chen, C., Streimikiene, D., & Balezentis, T. (2019). Intuitionistic fuzzy MULTIMOORA approach for multi-criteria assessment of the energy storage technologies. *Applied Soft Computing*, 410-423.

- Zhang, R. J. (2017). Some generalized pythagorean fuzzy bonferroni mean aggregation operators with their application to multiattribute group decision-making. *Complexity*, 1-16.
- Zhang, X., & Xu, Z. (2014). Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets. . *International Journal of Intelligent Systems*, 1061-1078.
- Zhang, Z. (2014). Intuitionistic trapezoidal fuzzy prioritized operators and their application to multiple attribute group decision making. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, 1951-1998.
- Zhao, H., You, J. X., & Liu, H. C. (2017). Failure mode and effect analysis using MULTIMOORA method with continuous weighted entropy under interval-valued intuitionistic fuzzy environment. *Soft Computing*, 5355-5367.
- Zheng, Y. J., Chen, S. Y., Xue, Y., & Xue, J. Y. (2017). A Pythagorean-type fuzzy deep denoising autoencoder for industrial accident early warning. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1561-1575.
- Zhu, B., & Xu, Z. S. (2013). Hesitant fuzzy Bonferroni means for multi-criteria decision making. *Journal of the Operational Research Society*, 1831-1840.
- Zhu, J., & Li, Y. (2018). Pythagorean fuzzy Muirhead mean operators and their application in multiple-criteria group decision-making. *Information*, 1-22.

ÖZGEÇMİŞ

ORCID NO: 0000-0003-0069-3479

E-Posta Adresi salih.aydemir@amasya.edu.tr
Telefon (İş)
Telefon (Cep)
Adres Amasya Üniversitesi Teknoloji Fakültesi
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

ÖĞRENİM BİLGİSİ

Doktora
(2015) Anadolu Üniversitesi Mühendislik Fakültesi
Tez Adı: Çoklu Kriter Karar Verme
Yöntemlerinde Genelleştirilmiş Bulanık
Kümelerin Kullanılması
Tez Danışmanı: Sevcan YILMAZ GÜNDÜZ
Yüksek Lisans
(2013) Anadolu Üniversitesi Mühendislik Fakültesi /
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
Lisans
(2008) Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat
Fakültesi / Matematik Bölümü

GÖREVLER

Araştırma Görevlisi
(2013) Anadolu Üniversitesi Mühendislik Fakültesi /
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
Araştırma Görevlisi
(2020) Amasya Üniversitesi/ Teknoloji Fakültesi/
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

ESERLER

- A. Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler
1. AYDEMİR SALİH BERKAN, YILMAZ GÜNDÜZ SEVCAN (2020). Extension of multi-Moora method with some q-rung orthopair fuzzy Dombi prioritized weighted aggregation operators for multi-attribute decision making. SOFT COMPUTING (Yayın No: 6446038)
 2. AYDEMİR SALİH BERKAN, YILMAZ GÜNDÜZ SEVCAN (2020). Fermatean fuzzy TOPSIS method with dombi aggregation operators and its application in multi-criteria decision making. JOURNAL OF INTELLIGENT and FUZZY SYSTEMS (Yayın No: 6446037)
 3. A novel approach to multi-attribute group decision making based on power neutrality aggregation operator for q-rung orthopair fuzzy sets adlı makale, International Journal of Intelligent System dergisine gönderilmiştir. İlk revizyon sonrası değerlendirilme aşamasındadır (Under review).
- B. Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında (proceedings) basılan bildiriler:
1. AYDEMİR SALİH BERKAN, YILMAZ GÜNDÜZ SEVCAN (2020). Interval Valued q-Rung Orthopair Fuzzy Prioritized Dual Muirhead Mean Operator and Their Application in Group

