

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONTAKT RIEMANN SUBMERSİYONLAR

Nebi YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DIYARBAKIR
Ekim - 2019

T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DIYARBAKIR

Nebi YILMAZ tarafından yapılan “Kontakt Riemann Submersiyonlar” konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

Ünvanı

Adı Soyadı

Başkan: Prof. Dr.

Sedat İLHAN



Üye : Doç. Dr.

Yılmaz GÜNDÜZALP (Danışman)



Üye : Doç. Dr.

Mehmet GÜLBAHAR



Tez Savunma Sınavı Tarihi: 04/10/2019

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../.../2019

Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana yol gösterip destek olan, akademik bilgileri ve tecrübesi ile tezimin hazırlanmasında yardımcı olan ayrıca bana her türlü olanağı sağlayan, çok değerli hocam ve tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP'a en içten duygularıyla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman yanımda olan, her türlü desteğini benden esirgemeyen değerli aileme sonsuz sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
KISALTMA VE SİMGELER.....	V
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ.....	3
2.1 Tanım ve Kavramlar.....	3
3. MATERYAL VE METOT.....	7
3.1. Riemann Submersiyonlar ve Temel Tensörler.....	7
3.2. Kontakt Manifoldlar.....	12
3.2.1 Hemen Hemen Kontakt Manifoldlar	12
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	17
4.1. Hemen Hemen Kontakt Riemann Submersiyonlar ve Özellikleri.....	17
4.2. O'Neill Tensörleri.....	26
4.3. Yapıların Transferi.....	32
4.4. Bir Kontakt Riemann Submersiyonlar İçin Eğrilik İlişkileri.....	39
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	43
6. KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ.....	47

ÖZET

KONTAKT RIEMANN SUBMERSİYONLARI YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nebi YILMAZ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2019

Bu tez çalışması beş bölümden meydana gelmektedir.

Birinci bölümü giriş kısmıdır ve bölümde genel bir literatür taraması yapılmıştır.

İkinci bölüm sonraki bölümlerde kullanılacak tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde Riemann submersiyonlar konusu ile ilgili tanımlar ve özellikler verilmiştir. Kontakt manifoldları tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde, hemen hemen kontakt Riemann submersiyonlar ve özelliklerine çalışılmıştır. Bununla birlikte kontakt Riemann submersiyon için eğrilik ilişkilerine çalışılmıştır.

Beşinci bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Riemann submersiyon, Hemen hemen kontakt metrik manifold, kosimpektik manifold, kontakt Riemann submersiyon.

ABSTRACT

CONTACT RIEMANNIAN SUBMERSIONS

MASTER THESIS

Nebi YILMAZ

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2019

This thesis consist of five chapters.

The first chapter deals with the introduction and the literature review.

The second chapter gives the definitions of the terms and the concepts used in the following chapters.

In the third chapter, definitions and characteristice related to Riemannian submersions are given. Besides, contact manifolds have been identified.

In the fourth chapter, almost contact Riemannian submersions and their attributes have been studied. In addition, curvature relationships are studied for contact Riemannian submersions.

In the fifth chapter, discussions and conclusions are given.

Keywords: Riemannian submersion, almost the contact metric manifolds,cosymplectic manifolds, contact Riemannian submersiyon.

KISALTMA VE SİMGELER

R	: Riemann Eğrilik Tensörü
g	: Metrik Tensör
∇	: Riemann Konneksiyonu
M	: Manifold
$\chi(M)$	: M Manifoldunun Vektör Alanlarının Uzayı
$T_p M$	:Tanjant Uzayı
$[\cdot, \cdot]$	: Lie Braketi
A	: Yatay Tensör Alanı
T	: Dikey Tensör Alanı
D	: Distribüsyon
$\text{çek}F_*$	: Dikey Distribüsyon
$(\text{çek}F_*)^\perp$	: Yatay Distribüsyon
Φ	: Temel 2-form

1. GİRİŞ

Manifoldlar teorisi diferansiyel geometrinin en önemli çalışma alanlarından biridir. Bu alanda çalışma yapılırken izlenilen yöntem, bir manifolddan diğerine uygun bir dönüşüm tanımlamaktır. İzlenilen bu yöntemde, hem dönüşüm hemde diğer manifoldun özelliklerinden yararlanılarak ele alınan manifoldun geometrisi çalışılır. İmmersiyon ve submersiyon bu dönüşümler içerisinde en önemlileri arasındadır.

İmmersiyonlar küçük boyuttan yüksek boyuta, submersiyonları ise yüksek boyuttan küçük boyuta tanımlanan dönüşümlerdir. İzometrik immersiyonların submersiyonlardaki karşılığı olan Riemann submersiyonlar 1966 yılında O'Neill ve 1967 yılında da Gray tarafından bağımsız olarak şöyle tanımlandı.

M_1 ve M_2 birer Riemann manifoldları ve $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir submersiyon olsun. Eğer, $(\text{çek}F_*)^\perp$ üzerinde F_* bir izometri ise F ye bir *Riemann submersiyonu* denir. Buna göre, her $U_1, U_2 \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ için

$$g_1(U_1, U_2) = g_2(F_*(U_1), F_*(U_2))$$

dır (Falcitelli ve ark. 2004).

O'Neill immersiyondaki ikinci temel form ve şekil operatörüne karşılık, Riemann submersiyonlar için iki tane tensör alanı tanımladı ve bunların temel özelliklerini inceledi. Bu temel tensörler, günümüzde O'Neill tensörleri olarak adlandırılmakta ve Riemann submersiyonlar için önemli araçlar olarak görülmektedir (Falcitelli ve ark. 2004).

Manifold teorisinde hemen hemen kontakt Riemann manifoldları oldukça önemli bir yere sahiptir. Hemen hemen kontakt yapı; M , $(2n+1)$ -boyutlu manifold, (φ, ξ, η) da M üzerinde sırasıyla, $(1, 1)$ -tipinde bir tensör alan, bir vektör alanı ve bir 1-form olsun. M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere;

$$\eta(\xi) = 1 \text{ ve } \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

eşitlikleri sağlanır. Bunun ardında, (φ, ξ, η) -üçlüsü hemen hemen kontakt yapısı üzerinde aşağıdaki eşitliklerin yardımıyla bir g metriği tanımlanarak hemen hemen kontakt metrik yapı

$$\begin{aligned} \eta(X) &= g(X, \xi), \\ g(\varphi X, \varphi Y) &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

şekilde tanımlanır.

Watson 1984 yılında, Chinea 1985 yılında hemen hemen kontakt metrik manifoldlar arasında Riemann submersiyonların diferansiyel geometrisini çalışmaya başladı (Falcitelli ve ark. 2004). M_1^{2k+1} ve M_2^{2m+1} manifoldları sırasıyla $(\varphi_1, \xi_1, \eta_1, g_1)$ ve $(\varphi_2, \xi_2, \eta_2, g_2)$ hemen hemen kontakt yapılardan meydana gelsin. Buna göre, $F: M_1 \rightarrow M_2$ Riemann submersiyonu aşağıdaki koşulları gerçekleştirdiği takdirde F ye bir *kontakt Riemann submersiyonu* denir:

$$\begin{aligned} F_* \xi_1 &= \xi_2 \\ F_* \circ \varphi_1 &= \varphi_2 \circ F_* . \end{aligned}$$

Chinea kontakt submersiyonların geometrisini ve bu çeşit dönüşümlerin baz manifoldu üzerindeki hemen hemen kontakt yapıya olan etkisine çalıştı.

Bu çalışmaların ışığında hemen hemen kontakt Riemann submersiyonlar ve özellikleri tanımlanarak örnekler verilmiştir. Daha sonra O'Neill tensörlerin temel özelliklerine deyinilerek yapılar arasındaki dönüşümler inşa edildi. Son olarak bir kontakt Riemann submersiyonlar için eğrilik ilişkileri tanımlandı.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olan bazı temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

2.1. Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1.1 M , n -boyutlu, diferansiyellenebilir manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den R ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, R)$ olmak üzere;

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, R) \quad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik ve 2-lineer Riemann metriği g ile birlikte M ye bir *Riemann manifoldu* adı verilir ve (M, g) şeklinde gösterilir (Kobayashi, S., Nomizo., 1996).

Tanım 2.1.2 M , n -boyutlu, diferansiyellenebilir bir manifold ve M üzerindeki

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M), \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

dönüşümü;

- (I) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$; $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$
- (II) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$; $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, R)$
- (III) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$; $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M, R)$

eşitlikleri sağlanıyor ise ∇ ya M üzerinde bir afin (lineer) konneksiyon adı verilir (Şahin, B., 2012).

Tanım 2.1.3 M_1 diferansiyellenebilir bir manifoldu olsun. Her $X_1, X_2 \in \chi(M_1)$, $f \in C^\infty(M_1, R)$ için

$$\begin{aligned} [,] : \chi(M_1) \times \chi(M_1) &\rightarrow \chi(M_1), \\ (X_1, X_2) &\rightarrow [X_1, X_2]f = X_1(X_2f) - X_2(X_1f) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

şeklinde tanımlanan $[,]$ dönüşümüne X_1 ve X_2 vektör alanlarına *Parantez (Lie) Operatörü* denir.

Lie operatörü $f, g \in C^\infty(M_1)$ ve $X_1, X_2, X_3 \in \chi(M_1)$ koşulunda aşağıdaki özellikleri gerçekleştirir (Do Carmo 1992).

- (I) $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1]$
 (II) $[t_1 X_1 + t_2 X_2, X_3] = t_1 [X_1, X_3] + t_2 [X_2, X_3], \quad t_1, t_2 \in R$
 (III) $[[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2] = 0$
 (IV) $[fX_1, gX_2] = fg[X_1, X_2] + f(X_1g)X_2 - g(X_2f)X_1$ dır.

Tanım 2.1.4 (M, g) , n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin konneksiyonu olmak üzere;

- (I) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]; \quad \forall X, Y \in \chi(M)$
 (II) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z); \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M)$

şartlarını sağladığında ∇ da M üzerinde *sıfır torsiyonlu Riemann konneksiyon* veya M nin *Levi-Civita Konneksiyonu* adı verilir (Hacısalıhoğlu, H.H, 1980).

Tanım 2.1.5 (M, g) , n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir M nin Levi-Civita Konneksiyonu olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \quad (2.1.5)$$

ile tanımlanan ifadeye *Kozsul formülü* adı verilir (O'Neill 1966).

Tanım 2.1.6 (M, g) bir Riemann manifoldu ∇ da Levi-Civita Konneksiyonu ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M), \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z, \\ R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

olarak tanımlanan tensör alanına ∇ konneksiyonunun *eğrilik tensörü* denir (Yano, K. and Kon, M., 1984).

Tanım 2.1.7 M_1 ve M_2 iki Riemann manifoldu olsun,

$$\begin{aligned} F: M_1 &\rightarrow M_2, \\ p &\rightarrow F(p), \quad p \in M_1 \end{aligned}$$

türevlenebilir bir dönüşüm için

$$\begin{aligned} F_{*p}: T_p M_1 &\rightarrow T_{F(p)} M_2, \\ v_p &\rightarrow F_{*p}(v_p) \end{aligned}$$

dönüşümüne M_1 in $p \in M_1$ noktasındaki *türev dönüşümü* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.8 M_1 ve M_2 Riemann manifoldları ve

$$F: M_1 \rightarrow M_2$$

dönüşümü türevlenebilir bir dönüşümü olduğunu farzedelim. Her $p \in M_1$ için

$$F_*(E_p) = G_{F(p)}$$

oluyorsa E ve G , F -bağılıdır denir (O'Neill 1983)

Burada E , M_1 üzerindeki vektör alanı G de M_2 üzerindeki vektör alanıdır.

Tanım 2.1.9 $F: M_1 \rightarrow M_2$ dönüşümü C^∞ da olsun. F dönüşümünün türev dönüşümü $F_*(T_p M_1)$ nin boyutu m ise F dönüşümünün rankıda m dir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.10 (M_1, g_1) n -boyutlu Riemann manifoldu ve M_1 manifoldunun bir p noktasındaki tanjant uzayı $T_p M_1$ olsun. $T_p M_1$ uzayının 2-boyutlu bir alt uzayı P olsun.

P düzlemini geren vektörler X ve Y olmak üzere,

$$K(P) = \frac{g_1(R(X, Y)Y, X)}{g_1(X, X)g_1(Y, Y) - g_1(X, Y)^2}$$

değerine M_1 manifoldunun P düzlemine göre kesit eğriliği denir (Falcitelli ve ark. 2004).



3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olan bazı tanımlar ve teoremler verilecektir.

3.1 Riemann Submersiyonlar ve Temel Tensörler

Tanım 3.1.1 (M_1, g_1) , n -boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere

$$\begin{aligned} D: M_1 &\rightarrow T_x M_1, \\ x &\rightarrow D_x \subset T_x M_1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmış D dönüşümüne *distribüsyon* denir. $X \in \chi(M_1)$ için $p \in M_1$ noktasında $X_p \in D_p$ oluyor ise X vektör alanı D ye ait olur denir. $\forall p$ noktası için D ye ait r -tane diferansiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise D ye *diferansiyellenebilirdir ve boy* $D_p = r$ dır denir (Şahin 1996).

Tanım 3.1.2 (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) sırasıyla m ve n boyutlu birer Riemann manifoldları olmak üzere

$$F: (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir örten C^∞ dönüşümü için

$$\text{rank} F_{*x} = \text{boy} M_2$$

oluyor ise F ye $x \in M_1$ noktasında submersiyon adı verilir. $\forall X \in M_1$ için F submersiyon ise F ye M_1 üzerinde bir *submersiyon* denir.

Herhangi bir $x \in M_2$ alındığında $F_y = F^{-1}(x)$ üzerindeki lif, (M_1, g_1) manifoldunun $(m - n)$ -boyutlu bir alt manifoldudur denir. $F^{-1}(x)$ altmanifoldlarına submersiyonun *lifleri* denir.

Herhangi bir $p \in M_1$ için (M_1, g_1) üzerindeki V integrallenebilir distribüsyonu

$$V_p = \text{Çek}(F_{*p})$$

biçiminde tanımlanır. V_p ye submersiyonun *dikey distribüsyonu* denilir. Submersiyonun yatay distribüsyonu da

$$H_p = (V_p)^\perp$$

biçiminde tanımlanır (Falcitelli ve ark. 2004).

Tanım 3.1.3 (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları olsun.

$$F: (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir C^∞ dönüşümünde $x \in M_1$ noktasına $T_x M_1$ nin sırasıyla V_x ve H_x alt uzaylarına karşılık getiren

$$x \rightarrow V_x \text{ ve } x \rightarrow H_x$$

dönüşümleri $V = V(F)$ ve $H = H(F)$ ile gösterilen C^∞ distribüsyonları tanımlar.

$V = V(F)$ ye F nin *dikey distribüsyonu* veya *dikey alt demeti*, $H = H(F)$ ye ise F nin *yatay distribüsyonu* veya *yatay alt demeti* denir (Falcitelli ve ark. 2004).

Tanım 3.1.4 (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$F: (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir C^∞ dönüşümü olmak üzere, her $x \in M_1$ ve $U_x, V_x \in T_x M_1$ için

$$g_1(U_x, V_x) = g_2(F_*(U_x), F_*(V_x)) \quad (3.1.4)$$

oluyorsa F ye M_1 den M_2 ye bir *izometri* denir (Hacısalıhoğlu 2003).

Tanım 3.1.5 (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$F: (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir C^∞ submersiyonu aşağıdaki şartları gerçekleştiriyor ise F ye bir *Riemann submersiyonu* denir.

(I) F dönüşümü maksimal ranka sahiptir. Yani $\forall p \in M_1$ için F_{*p} türev dönüşümü örtendir.

(II) Her $p \in M_1$ noktasında, F_{*p} dönüşümü yatay vektörlerinin uzunluğunu korur. Yani

$$g_{1p}(u, v) = g_{1(p)}(F_{*p}u, F_{*p}v), \quad u, v \in H_p, \quad p \in M_1 \quad (3.1.5)$$

dır. Bu ise, bir $p \in M_1$ noktasında F_* türev dönüşümünün H_p yatay uzayından $T_{F(p)}M_2$ üzerine bir lineer izometri olduğunu söyler (O'Neill, Falcitelli ve ark. 1966, 2004).

Önerme 3.1.1 (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları

$$F: (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu, ∇_1 ve ∇_2 sırasıyla M_1 ve M_2 nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. M_1 üzerindeki X_1, Y_1 temel vektör alanları X_{1*}, Y_{1*} vektör alanlarına F -bağlı olsun.

$$(I) \quad g_1(X_1, Y_1) = g_1(X_{1*}, Y_{1*}) \circ F$$

$$(II) \quad h[X_1, Y_1] \text{ temel vektör alanı, } [X_{1*}, Y_{1*}] \text{ vektör alanı } F\text{-bağlıdır.}$$

$$(III) \quad h(\nabla_{X_1} Y_1) \text{ temel vektör alanı ve } \nabla_{X_{1*}} Y_{1*} \quad F\text{-bağlıdır.}$$

(IV) Herhangi bir $V_1 \in X^v(M_1)$ için, $[X_1, V_1]$ dikey vektör alanıdır (Falcitelli ve ark. 2004).

Tanım 3.1.6 (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları verilmiş olsun. ∇, M_1 üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun. $E, G \in \chi(M_1)$ için T tensör alanı

$$\begin{aligned} T: \chi(M_1) \times \chi(M_1) &\rightarrow \chi(M_1), \\ (E, G) &\rightarrow T(E, G) = T_E G = h(\nabla_{vE} vG) + v(\nabla_{vE} hG) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill 1966).

Tanım 3.1.7 (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları verilmiş olsun. ∇, M_1 üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun. $E, G \in \chi(M_1)$ için A tensör alanı

$$\begin{aligned} A: \chi(M_1) \times \chi(M_1) &\rightarrow \chi(M_1), \\ (E, G) &\rightarrow A(E, G) = A_E G = h(\nabla_{hE} vG) + v(\nabla_{hE} hG) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill 1966).

Lemma 3.1.1 (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları

$$F: (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Herhangi bir $E, F, G \in \chi(TM)$ için,

$$g_1(T_E F, G) = -g_1(T_E G, F), \quad (3.1.8)$$

$$g_1(A_E F, G) = -g_1(A_E G, F) \quad (3.1.9)$$

dır (Falcitelli ve ark. 2004).

Önerme 3.1.2 (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$F: (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere, A ve T tensör alanları aşağıdaki özellikleri sağlar (O'Neill 1966).

- (I) $T_U W = T_W U$, $U, W \in \chi^v(M_1)$,
- (II) $A_X Y = -A_Y X$, $X, Y \in \chi^h(M_1)$,
- (III) $A_X Y = \frac{1}{2}v[X, Y]$, $X, Y \in \chi^h(M_1)$ dir.

Teorem 3.1.1 (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$F: (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu verilsin. (M_1, g_1) üzerindeki yatay distribüsyonu H olarak verilsin. Burada, H yatay distribüsyonu integrallenebilir olabilmesi için gerek ve yeter şart $A = 0$ olmasıdır (O'Neill 1966).

Lemma 3.1.2 (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$F: (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu, V, W dikey vektör alanları X ve Y yatay vektör alanları verilsin.

- (I) $\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W$
- (II) $\nabla_V X = h\nabla_V X + T_V X$
- (III) $\nabla_X V = A_X V + v\nabla_X V$
- (IV) $\nabla_X Y = h\nabla_X Y + A_X Y$ dir. Ayrıca, X temel vektör alanı ise $[X, V]$ dikey vektör alanı olduğundan

$$h\nabla_V X = h\nabla_X V = A_X V \quad (3.1.10)$$

dir (O'Neill 1966). Burada ∇ , (M_1, g_1) Riemann manifoldunun Levi-Civita konneksiyonudur.

Teorem 3.1.2 (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$F: (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu ve M_1, M_2 ve $(F^{-1}, \hat{g}_x)$ liftinin Riemann eğrilik tensörleri sırasıyla R, R^* ve $\hat{R}$ verilmiş olsun.

Bu durumda, herhangi bir X, Y, Z ve $H \in \chi^h(M_1)$ ve $U_1, U_2, U_3, U_4 \in \chi^v(M_1)$ için

$$\begin{aligned} R(U_1, U_2, U_3, U_4) &= \hat{R}(U_1, U_2, U_3, U_4) + g(T_{U_1}U_3, T_{U_1}U_4) - g(T_{U_2}U_3, T_{U_1}U_4), \\ R(X, Y, Z, H) &= R^*(X, Y, Z, H) + 2g(A_X Y, A_Z H) - g(A_Y Z, A_X H) \\ &\quad + g(A_X Z, A_Y H) \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

$$\begin{aligned} R(X, Y, U_2, U_3) &= g((\nabla_{U_2} A)_X Y, U_3) - g(A_X U_3, A_Y U_2) - g(A_X U_2, A_Y U_3) \\ &\quad + g(A_X Z, A_Y H) g((\nabla_{U_3} A)_X Y, U_2) + g(T_{U_3} X, T_{U_2} Y) \\ &\quad - g(T_{U_2} X, T_{U_3} Y) \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

dır (O'Neill 1966).

Teorem 3.1.3 (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$F: (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$$

bir Riemann submersiyonu ve M_1, M_2 ve $(F^{-1}, \hat{g}_x)$ liftinin Riemann eğrilik tensörleri sırasıyla R, R^* ve $\hat{R}$ verilmiş olsun.

Bu durumda, herhangi bir X, Y, Z ve $H \in \chi^h(M_1)$ ve $U, V, D, W \in \chi^v(M_1)$ için

$$\begin{aligned} K(U, V) &= \hat{R}(U, V, W, D) + g(T_U W, T_U D) - g(T_V W, T_U D), \\ K(X, V) &= g((\nabla_X T)_V V, X) - \|T_V X\|^2 + \|A_X V\|^2 \\ K(X, Y) &= K^*(X, Y) \circ F - 3 \|A_X Y\|^2 \end{aligned}$$

dır (O'Neill ve Falcitelli ve ark. 1966, 2004).

Burada K kesit eğriligidir.

3.2. Kontakt Manifoldlar

3.2.1. Hemen Hemen Kontakt Manifoldlar

Tanım 3.2.1.1 M , $(2n + 1)$ –boyutlu manifold, (φ, ξ, η) da M üzerinde sırasıyla, $(1, 1)$ – tipinde bir *tensor* alan, bir vektör *alanı* ve bir 1-form olsun. Eğer (φ, ξ, η) için M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere;

$$(I) \quad \eta(\xi) = 1$$

$$(II) \quad \varphi^2 X = -X + \eta(X) \xi$$

likleri sağlamıyorsa o zaman (φ, ξ, η) ya M üzerinde bir *hemen hemen kontakt yapısı* denir. M bu yapı ile bir *hemen hemen kontakt manifold* olarak adlandırılır (Yano, K., and Kon, M.,1984).

Teorem 3.2.1.1 (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısı için;

$$(I) \quad \varphi \xi = 0$$

$$(II) \quad \eta(\varphi X) = 0$$

$$(III) \quad \text{rank} \varphi = 2n \text{ dir (Yano, K., and Kon, M.,1984).}$$

Tanım 3.2.1.2 M hemen hemen kontakt manifoldu ve M üzerinde g Riemann metriği;

$$(I) \quad \eta(X) = g(X, \xi)$$

$$(II) \quad g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y)$$

likleri sağlıyor ise g metriğine M üzerinde *hemen hemen kontakt metrik*, (φ, ξ, η, g) yapısı ile M ye de *hemen hemen kontakt metrik manifold* denir(Yano, K., and Kon, M.,1984).

Tanım 3.2.1.3 V bir reel vektör uzayı olsun.

$$J : V \rightarrow V$$

lineer dönüşümü;

$$J^2 = -I$$

şartını sağlıyor ise J ye V üzerinde bir *kompleks yapı* denir. M , $2n + 1$ –boyutlu manifold üzerinde hemen hemen kontakt yapısı (φ, ξ, η) olsun. Reel sayılar kümesini R temsil etmek üzere $M \times R$ çarpım manifoldunu gözönüne alalım. O halde $M \times R$ üzerinde her bir vektör alanı;

$$\left(X, f \frac{d}{dt} \right)$$

biçimindedir. Burada X, M manifolduna teğet bir vektör alanı, R reel doğrunun bir noktasının koordinatı t ve $M \times R$ çarpım üzerinde f bir fonksiyondur. $M \times R$ çarpımının tanjant uzayında,

$$J \left(X, f \frac{d}{dt} \right) = \left(\varphi X - f \xi, \eta(X) \frac{d}{dt} \right)$$

J lineer dönüşümüne $M \times R$ çarpım üzerinde bir *hemen hemen kompleks yapı* denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 3.2.1.4 Eğer $M \times R$ çarpımı üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısı *normaldir* denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 3.2.1.5 $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontakt metrik manifold olduğunu düşünelim. $\forall X_1, X_2 \in \chi(M)$ için

$$\Phi(X_1, X_2) = g(X_1, \varphi X_2)$$

ile tanımlı Φ dönüşümüne M manifoldunun *temel 2- formu* denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 3.2.1.6 $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, hemen hemen kontakt metrik manifoldu için aşağıdaki şartları gerçekleştiriyorsa ise, M^{2n+1} manifolduna *hemen hemen kosimplektik manifolddur* denir.

$$d\Phi = 0,$$

$$d\eta = 0.$$

Eğer hemen hemen kosimplektik manifold normal ise bu manifoldda *kosimplektik manifold* denir(Olszak 1981).

Tanım 3.2.1.7 M , kontakt metrik yapısı (φ, ξ, η, g) olan $(2n + 1)$ -boyutlu bir kontakt metrik manifold olsun. Eğer M nin kontakt metrik yapısı normal ise, M *Sasakian yapıya* sahiptir denir. Bazen Sasakian manifold *normal kontakt metrik manifold* olarak da adlandırılır (Yano and Kon,1984)

Teorem 3.2.1.2 M , kontakt metrik yapısı (φ, ξ, η, g) bir Sasakian yapıdır $\Leftrightarrow \forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla_X \varphi) Y = -g(X, Y) \xi + \eta(Y) X$$

dir (Yano and Kon,1984).

Burada;

$$\nabla_X (\varphi Y) = (\nabla_X \varphi) Y + \varphi \nabla_X Y$$

dir.

Önerme 3.2.1.1 $2n + 1$ -boyutlu bir kontakt metrik manifoldu M olsun. Bu durumda M bir K -kontakt manifoldudur $\Leftrightarrow$

$$\nabla_X \xi = -\varphi X, \quad X \in \chi(M)$$

dir (Yano, K., and Kon, M.,1984).

Tanım 3.2.1.8 $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olduğunu varsayalım. Her $X, Y \in \chi(M)$ için aşağıdaki şartı sağlıyor ise M ye bir *Kenmotsu manifoldu* denir:

$$(\nabla_X \varphi) Y = g(\varphi X, Y) \xi - \eta(Y) \varphi X$$

Bir M Kenmotsu manifoldu üzerinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$\begin{aligned} \nabla_X \xi &= X - \eta(X) \xi \\ (\nabla_X \eta) Y &= g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y) \end{aligned}$$

dır (Dileo, G., Pastore A.M., 2007).

Tanım 3.2.1.9 $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olduğunu varsayalım. Eğer M normal ve temel 2-form kapalı ($d\Phi = 0$) ise bu manifolda *quasi-Sasakian* denir (Blair,1967).

Teorem 3.2.1.3 $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldunun her $X, Y \in \chi(M)$ için *nearly-K-kosimplektik manifold* olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki eşitliklerin gerçekleşmesi gerekir.

$$\begin{aligned} (\nabla_X \varphi)(Y) + (\nabla_Y \varphi)(X) &= 0, \\ \nabla_X \xi &= 0. \end{aligned}$$

dır (Falcitelli, M., Ianus, S. and Pastore, A.M. 2004).

Teorem 3.2.1.4 $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldunun her $X, Y \in \chi(M)$ için *quasi-K-kosimplektik manifold* olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki eşitliğin gerçektirmesi gerekir.

$$(\nabla_X \varphi)(Y) + (\nabla_{Y(X)} \varphi)(\varphi(Y)) = \eta(Y) \nabla_{\varphi(X)} \xi$$

dır (Falcitelli, M., Ianus, S. and Pastore, A.M. 2004).

Tanım 3.2.1.10 $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldunun her $X, Y \in \chi(M)$ için nearly-K-Sasakian manifold olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki eşitlikler gerçektirmesi gerekir:

$$\begin{aligned} (\nabla_X \varphi)(X) &= g(X, X) \xi - \eta(X) X, \\ \nabla_X \xi &= -\varphi X \end{aligned}$$

(Falcitelli, M., Ianus, S. and Pastore, A.M. 2004).



4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüm dört alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde hemem hemen kontakt Riemann submersiyonlar ve özelliklerine değinilip bu tip submersiyonlara bir örnek verilecektir. İkinci alt bölümde O'Neill tensörlerin temel özellikleri incelenecektir. Üçüncü alt bölümde yapılar arasındaki dönüşümler inşa edilecektir. Dördüncü bölümde ise kontakt Riemann submersiyonlar için eğrilik ilişkileri sunulacaktır.

4.1 Hemen Hemen Kontakt Riemann Submersiyonlar ve Özellikleri

Tanım 4.1.1 $(M_1, g_1, \varphi_1, \eta_1, \xi_1)$ ve $(M_2, g_2, \varphi_2, \eta_2, \xi_2)$ hemen hemen kontakt metrik manifoldlar olsun. Bu durumda,

$$F: M_1 \rightarrow M_2$$

dönüşümü için aşağıdaki şart sağlamıyorsa F ye bir (φ_1, φ_2) –*holomorfik dönüşüm* denir:

$$F_* \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ F_*$$

(Falcitelli ve ark. 2004).

Tanım 4.1.2. $(M_1, g_1, \varphi_1, \eta_1, \xi_1)$ ve $(M_2, g_2, \varphi_2, \eta_2, \xi_2)$ hemen hemen kontakt metrik manifoldlar olsun. Bu durumda,

$$F: M_1 \rightarrow M_2$$

dönüşümü,

(I) F bir Riemann submersiyondur.

(II) $F_*\xi_1 = \xi_2$

(III) $F_* \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ F_*$

larını sağlıyorsa F ye bir *kontakt Riemann submersiyon* denir (Falcitelli ve ark. 2004).

Örnek 4.1.1 R^5 Öklidyen uzayı üzerindeki kartezyen koordinatlar (x_1, x_2, x_3, x_4, z) olsun. 1-form $\eta = dz$, karakteristik vektör alanı $\xi = \frac{d}{dz}$, Riemann metriği

$$g_{R^5} = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2 + (dz)^2$$

ve

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ile verilsin. Bu durumda, $(R^5, g_{R^5}, \varphi, \eta, \xi)$ –beğlisi bir hemen hemen kontakt metrik manifolddur.

Örnek 4.1.2 R^5 ve R^3 standart Riemann metrikleri ile verilen Öklidyen uzaylar olsun.

$$\begin{aligned} F: (R^5, g_1) &\rightarrow (R^3, g_2) \\ F(x_1, x_2, x_3, x_4, z) &= \left(\frac{x_1 + x_3}{\sqrt{2}}, \frac{x_2 + x_4}{\sqrt{2}}, z \right) \end{aligned}$$

dönüşümü verilmiş olsun. Bu durumda doğrudan hesaplamalarla

$$F_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Dikey ve yatay uzayı geren vektörler

$$\begin{aligned} \text{Çek}F_* &= \text{span} \{U_1 = (-1, 0, 1, 0, 0), U_2 = (0, -1, 0, 1, 0)\}, \\ (\text{Çek}F_*)^\perp &= \text{span} \{X_1 = (1, 0, 1, 0, 0), X_2 = (0, 1, 0, 1, 0), \xi = (0, 0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır. Buradan

$$\begin{aligned} F_*X_1 &= \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \\ F_*X_2 &= \left(0, \frac{2}{\sqrt{2}}, 0 \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$g_1(X_1, X_1) = g_2(F_*X_1, F_*X_1) = 2$$

ve

$$g_1(X_2, X_2) = g_2(F_*X_2, F_*X_2) = 2$$

olur. Böylece F bir Riemann submersiyondur.

$$\begin{aligned} F_*\varphi_1 X_1 &= \varphi_2 F_* X_1 \text{ ve } F_*\varphi_1 X_2 = \varphi_2 F_* X_2 \\ F_* \circ \varphi_1 &= \varphi_2 \circ F_* \end{aligned}$$

şartlarında sağlar. O halde F bir kontakt Riemann submersiyondur.

Önerme 4.1.1 $(M_1, g_1, \varphi_1, \eta_1, \xi_1)$ ve $(M_2, g_2, \varphi_2, \eta_2, \xi_2)$ hemen hemen kontakt metrik manifold ve $F : M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Eğer X ve Y , M_1 üzerinde temel vektör alanları ise, M_2 üzerinde X', Y' ne F -bağlıdır. Bu durumda aşağıdaki iddalar geçerlidir.

- (I) $\varphi_1 X, \varphi_2 X'$ ne F -bağlıdır.
- (II) $h(\nabla_X \varphi_1) Y, (\nabla_{X'} \varphi_2) Y'$ ne F -bağlıdır.
- (III) $F_* h[X, Y] = [X', Y']$ (Falcitelli ve ark. 2004).

İspat.

- (I) X ve X' F bağlı olduğundan

$$F_* X = X'$$

dır. Tanım 4.1.2 (iii) den

$$F_* \varphi_1 X = \varphi_2 \circ F_* X = \varphi_2 X'$$

elde edilir. Dolayısıyla M_1 üzerindeki $\varphi_1 X$ temel vektör alanı M_2 üzerindeki $\varphi_2 X'$ ne F -bağlıdır.

- (II)

$$(\nabla_X \varphi_1) Y = \nabla_X \varphi_1 Y - \varphi_1 \nabla_X Y$$

dır.

$$F_* X = X'$$

ve

$$F_* Y = Y'$$

dır. Doğrudan hesaplamayla

$$\begin{aligned} F_* (h(\nabla_X \varphi_1) Y) &= F_* (h \nabla_X \varphi_1 Y - h \varphi_1 \nabla_X Y) \\ &= F_* (h \nabla_X \varphi_1 Y) - F_* (h \varphi_1 \nabla_X Y) \end{aligned}$$

dır. F bir holomorfik dönüşüm olduğundan

$$F_*(h(\nabla_X \varphi_1)Y) = F_*h(\nabla_X \varphi_1 Y) - F_*\varphi_1 h\nabla_X Y$$

olur. Önerme 4.1.1 (III) den

$$\begin{aligned} F_*(h(\nabla_X \varphi_1)Y) &= \nabla'_{X'}\varphi_2 Y' - \varphi_2 \nabla'_{X'} Y' \\ &= (\nabla'_{X'}\varphi_2)Y' \end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

(III)

$$F_*X = X' \text{ ve } F_*Y = Y'$$

dır.

$$F_*h[X, Y] = [F_*X, F_*Y] = [X', Y']$$

olur.

Önerme 4.1.2 M_1 ve M_2 hemen hemen kontakt metrik manifoldlar ve $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Bu durumda yatay ve dikey distribüsyonlar φ_1 -invarianttır (Kon M., Yano K. 2004).

İspat. U bir dikey vektör alanı olsun. F holomorfik dönüşüm olduğundan,

$$F_*\varphi_1 U = \varphi_1 F_*U = 0$$

dır. U dikey vektör alanı ve F bir Riemann submersiyon olduğundan $F_*U = 0$ dır. Böylece $F_*\varphi_1 U = 0$ dır. Yani $\varphi_1 U = 0$ dikeydir. X yatay vektör alanını ele alalım. M_1 bir hemen hemen kontakt metrik manifold olduğundan

$$g_1(\varphi_1 X, U) = -g_1(X, \varphi_1 U) = 0$$

dır. Burada $\varphi_1 U$ dikey X yatay vektör alanıdır. Böylece

$$g_1(\varphi_1 X, U) = 0$$

dır. O halde $\varphi_1 X$ yatay vektör alanıdır.

Önerme 4.1.3 $(M_1, g_1, \varphi_1, \eta_1, \xi_1)$ ve $(M_2, g_2, \varphi_2, \eta_2, \xi_2)$ hemen hemen kontakt

metrik manifoldlar ve $F : M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. O halde aşağıdaki iddalar geçerlidir (Falcitelli ve ark. 2004).

- (I) $F_*\Phi_2 = \Phi_1$ sadece yatay distribisyon üzerinde sağlanır.
- (II) $F_*\eta_2 = \eta_1$

İspat.

(I) M_1 üzerindeki X ve Y yatay vektör alanlarını temel vektör alanları olduğunu varsayalım. F kontakt Riemann submersiyon olduğundan tanımadan,

$$\begin{aligned} F_*\Phi_2(X, Y) &= \Phi_2(F_*X, F_*Y) \\ &= g_2(F_*X, \varphi_2 F_*Y) \end{aligned}$$

dır. F holomorfik dönüşüm olduğundan,

$$F_*\Phi_2(X, Y) = g_2(F_*X, F_*\varphi_1 Y)$$

dır. F Riemann submersiyon olduğundan,

$$F_*\Phi_2(X, Y) = g_1(X, \varphi_1 Y)$$

olur. Böylece temel 2-formun tanımı kullanılırsa

$$F_*\Phi_2(X, Y) = \Phi_1(X, Y)$$

olur. Bu eşitlik her $X, Y \in \chi^h(M_1)$ için doğru olduğundan $F_*\Phi_2 = \Phi_1$ dır. Böylece ispat tamamlanır.

(II) M_1 üzerindeki X yatay vektör alanını temel vektör alanı olduğunu varsayalım.

$$F_*\eta_2(X) = \eta_2(F_*X)$$

dır.

$$F_*\eta_2(X) = g_2(F_*X, F_*\xi_1)$$

olur. Riemann submersiyon tanımı kullanılırsa,

$$F_*\eta_2(X) = g_1(X, \xi_1)$$

elde edilir. Her $X \in \chi^h(M_1)$ için doğru olduğundan $F_*\eta_2 = \eta_1$ dır.

Önerme 4.1.4 $F: (M_1^{2m+1}, g_1, \varphi_1, \eta_1, \xi_1) \rightarrow (M_2^{2m+1}, g_2, \varphi_2, \eta_2, \xi_2)$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Bu durumda

(I) Reeb (karakteristik) vektör alanı ξ_1 yataydır. Gerçekten,

$$\xi_1 = v\xi_1 + h\xi_1$$

yazılabilir

$$\begin{aligned} \eta_1(h\xi_1) &= g_2(F_*\xi_1, F_*h\xi_1) \\ &= g_2(\xi_2, \xi_2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$\eta_1(h\xi_1) + \eta_1(v\xi_1) = 1$$

dır. O zaman $v\xi_1 = 0$ dır.

(II) Her $U \in \chi^v(M_1)$ için ξ_1 yatay olduğundan

$$\begin{aligned} \eta_1(U) &= g_1(U, \xi_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

(III) Bir kontakt Riemann submersiyon lifi F^{-1} olsun.

$$\begin{aligned} \dim F^{-1} &= (2m+1) - (2n+1) \\ &= 2(m-n) \\ &= 2k \end{aligned}$$

dır.

$$\left((F^{-1})^k, \widehat{g} \right)$$

üzerinde $J = \widehat{\varphi}$ ve $g_1|_{\pi} = \widehat{g}$ olsun.

$(J, \widehat{g})$ – hemen hemen Hermityen yapısıdır. Kontakt yapının tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} J^2 U &= \varphi_1^2 U \\ &= -U + \eta_1(U) \xi_1 \\ &= -U, \quad U \in \chi(M_1) \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} g_1(JV, JU) &= -g_1(V, J^2 U) \\ &= -g_1(V, -U) \\ &= g_1(V, U) \end{aligned}$$

dır. Bu ise bir kontakt Riemann submersiyonun lifleri hemen hemen Hermityen manifold olduğunu gösterir (Falcitelli ve ark. 2004).

Tanım 4.1.3. $(M_1^{2m+1}, g_1, \varphi_1, \eta_1, \xi_1)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. O halde bir $X \in \chi(TM_1)$ için,

$(\mathcal{L}_X \varphi_1) = 0$ ise X vektör alanına φ_1 -tensör alanının *infinitesimal otomorfizmi* denir (Falcitelli ve ark. 2004).

$\mathcal{L}_X$, X vektör alanına göre Lie türevidir.

Teorem 4.1.1 M_1 bir hemen hemen kosimplektik manifold, M_2 de hemen hemen kontakt metrik manifold ve $F : M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, X yatay vektör alanının infinitesimal otomorfizmi ise o zaman lifler total jeodeziktir (Falcitelli ve ark. 2004).

İspat. M_1 üzerindeki V_1 ve V_2 dikey vektör alanlarını, X yatay vektör alanın olsun. M_1 bir hemen hemen kosimplektik manifold olduğundan,

$$d\Phi_1 = 0$$

olmalıdır. Yani,

$$\begin{aligned} 0 &= d\Phi_1(V_1, \varphi_1 V_2, X) \\ 0 &= V_1(\Phi_1(\varphi_1 V_2, X)) - \varphi_1 V_2(\Phi_1(V_1, X)) + X(\Phi_1(V_1, \varphi_1 V_2)) \\ &\quad - \Phi_1([V_1, \varphi_1 V_2], X) + \Phi_1([V_1, X], \varphi_1 V_2) - \Phi_1([\varphi_1 V_2, X], V_1) \end{aligned}$$

dır. Temel 2-formun tanımından,

$$\begin{aligned} 0 &= V_1 (g_1 (\varphi_1 V_2, \varphi_1 X)) - \varphi_1 V_2 (g_1 (V_1, \varphi_1 X)) + X (g_1 (V_1, \varphi_1^2 V_2)) \\ &\quad - g_1 ([V_1, \varphi_1 V_2], \varphi_1 X) + g_1 ([V_1, X], \varphi_1^2 V_2) - g_1 ([\varphi_1 V_2, X], \varphi_1 V_1) \end{aligned}$$

dır. $[V_1, \varphi_1 V_2]$ dikey ve iki distribüsyon φ_1 -invariant olduğundan,

$$X (g_1 (V_1, \varphi_1^2 V_2)) + g_1 ([V_1, X], \varphi_1^2 V_2) - g_1 ([\varphi_1 V_2, X], \varphi_1 V_1) = 0$$

dır. Burada kontakt yapı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} X g_1 (V_1, -V_2 + \eta_1 (V_2) \xi_1) + g_1 ([V_1, X], -V_2 + \eta_1 (V_2) \xi_1) - g_1 ([\varphi_1 V_2, X], \varphi_1 V_1) &= 0 \\ X g_1 (V_1, V_2) + g_1 ([V_1, X], V_2) + g_1 ([\varphi_1 V_2, X], \varphi_1 V_1) &= 0 \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} 0 &= g_1 (\nabla_X V_2, V_1) + g_1 (\nabla_X V_1, V_2) + g_1 (\nabla_{V_1} X, V_2) \\ &\quad - g_1 (\nabla_X V_1, V_2) - g_1 (\varphi_1 [\varphi_1 V_2, X], V_1) \end{aligned} \quad (4.1)$$

olur. $X \in \chi^h (M_1)$ vektör alanı φ_1 in infinitezimal otomorfizm olduğundan,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \varphi_1) V_2 &= 0 \\ [X, \varphi_1 V_2] - \varphi_1 [X, V_2] &= 0 \\ [X, \varphi_1 V_2] &= \varphi_1 [X, V_2] \end{aligned}$$

dır. Her iki tarafını φ_1 ile işleme alalım.

$$\begin{aligned} \varphi_1 [X, \varphi_1 V_2] &= \varphi_1^2 [X, V_2], \\ &= -[X, \varphi_2] + \eta_1 ([X, \varphi_2]) \xi_1 \\ &= -[X, \varphi_2] \end{aligned} \quad (4.2)$$

olur. Lie parantezi ve 4.1 i 4.2 ye uygularsak

$$\begin{aligned} g_1 (\nabla_{V_2} X + [X, V_2], V_1) + g_1 (\nabla_{V_1} X, V_2) + g_1 (\nabla_{V_1} X, V_2) - g_1 ([X, V_2], V_1) &= 0, \\ g_1 (\nabla_{V_2} X, V_1) + g_1 ([X, V_2], V_1) + g_1 (\nabla_{V_1} X, V_2) - g_1 ([X, V_2], V_1) &= 0, \\ g_1 (\nabla_{V_2} X, V_1) + g_1 (\nabla_{V_1} X, V_2) &= 0. \end{aligned}$$

olur. Lemma 3.1.2 (II) kullanılırsa,

$$g_1(T_{V_2}X, V_1) + g_1(T_{V_1}X, V_2) = 0$$

olur. T anti-simetrik operatör olduğundan,

$$-g_1(T_{V_2}V_1, X) - g_1(T_{V_1}V_2, X) = 0$$

dır. T simetrik operatör olduğundan,

$$2g_1(T_{V_2}V_1, X) = 0$$

dır. $X \neq 0$ olduğundan,

$$T_{V_2}V_1 = 0$$

dır. Her $V_1, V_2 \in \chi(M_1)$ için doğru olduğundan $T = 0$ dır.

Eğer $T = 0$ ise lifler total jeodeziktir.

$T = 0$ ise lifler total jeodeziktir gerek ve yeter koşul lifler minimaldır. Yani $H = 0$ dır.

Teorem 4.1.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.1 $F: M_1 \rightarrow M_2$ kontakt Riemann submersiyonunda M_1 bir quasi-Sasakian veya hemen hemen kosimplektik manifold olsun. Bu taktirde X yatay vektör alanı φ_1 -tensör alanının infinitezimal otomorfizmi ise o zaman liflerde total jeodeziktir (Falcitelli ve ark. 2004).

4.2. O'Neill Tensörleri ve Özellikleri

Lemma 4.2.1 $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Eğer, M_1 nearly K- kosimplektik manifold ise aşağıdaki ifadeler doğrudur (Chinea, D. 1984).

$X \in \chi^h(M_1)$ için,

$$(I) \quad A_X \varphi_1 X = \varphi_1 A_X X$$

$$(II) \quad A_{\varphi_1 X} X = \varphi_1 A_X X$$

$$(III) \quad A_X \varphi_1 X = A_{\varphi_1 X} X$$

$$(IV) \quad A_X \xi_1 = 0$$

İspat.

(I) M_1 bir nearly K- kosimplektik manifold olduğundan, $X \in \chi^h(M_1)$ için,

$$(\nabla_X \varphi_1) X = 0 \text{ ve } \nabla_X \xi_1 = 0$$

dır.

$$(\nabla_X \varphi_1) X = 0$$

$$\nabla_X \varphi_1 X - \varphi_1 \nabla_X X = 0$$

lemma 3.1.2 (IV) kullanılırsa,

$$h \nabla_X \varphi_1 X + A_X \varphi_1 X - \varphi_1 (h \nabla_X X + A_X X) = 0$$

olur. Eşitliğin sağlanması için dikey ve yatay terimler ayrı ayrı sıfıra eşitlenir.

$$A_X \varphi_1 X - \varphi_1 A_X X = 0$$

$$A_X \varphi_1 X = \varphi_1 A_X X$$

dır.

(II) A alterleyen olduğundan (I) den

$$A_{\varphi_1 X} X = -A_X \varphi_1 X$$

$$= -\varphi_1 A_X X$$

$$= \varphi_1 A_X X$$

dır.

(III) (I) ve (II) den (III) elde edilir.

(IV) M_1 bir nearly K- kosimplektik manifold olduğundan,

$$\nabla_X \xi_1 = 0$$

dır. Lemma 3.1.2 (IV) kullanılırsa,

$$h\nabla_X \xi_1 + A_X \xi_1 = 0$$

dır. Buradan $A_X \xi_1 = 0$ ve $h\nabla_X \xi_1 = 0$ dır. Böylece ispat tamamlanır.

Benzer olarak aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 4.2.2 $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Eğer, M_1 nearly K- kosimplektik manifold ise aşağıdaki ifadeler doğrudur (Chinea, D. 1984).

$U \in \chi^v(M_1)$ için,

$$(I) \quad T_U \varphi_1 U = \varphi_1 T_U U$$

$$(II) \quad T_{\varphi_1 U} U = \varphi_1 T_U U$$

$$(III) \quad T_U \varphi_1 U = T_{\varphi_1 U} U$$

$$(IV) \quad T_U \xi_1 = 0$$

Teorem 4.2.1 $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Eğer, M_1 quasi-K- kosimplektik manifold ise,

$V_1, V_2 \in \chi^v(M_1)$, $X_1, X_2 \in \chi^h(M_1)$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Chinea, D. 1984).

$$(I) \quad T_{\varphi_1 V_1} V_2 = \varphi_1 T_{V_1} X_1$$

$$(II) \quad A_{X_1 \varphi_1} X_1 = 0$$

$$(III) \quad A_{X_1 \varphi_1} X_1 = -A_{X_2 \varphi_1} X_1$$

İspat.

(I)

$$\begin{aligned} g_1(T_{\varphi_1 V_1} X_1, V_2) &= -g_1(X_1, T_{\varphi_1 V_1} V_2) \\ &= -g_1(X_1, T_{V_1} \varphi_1 V_2) \\ &= -g_1(T_{V_1} X_1, \varphi_1 V_2) \\ &= -g_1(\varphi_1 T_{V_1} X_1, V_2) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} g_1(T_{\varphi_1 V_1} X_1, V_2) + g_1(\varphi_1 T_{V_1} X_1, V_2) &= 0 \\ g_1(T_{\varphi_1 V_1} X_1 + \varphi_1 T_{V_1} X_1, V_2) &= 0 \end{aligned}$$

dır. $V_2 \neq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} T_{\varphi_1 V_1} X_1 + \varphi_1 T_{V_1} X_1 &= 0, \\ T_{\varphi_1 V_1} X_1 &= -\varphi_1 T_{V_1} X_1 \end{aligned}$$

elde edilir.

(II) M_1 quasi-K- kosimplektik manifold olduğundan, $X_1 \in \chi^h(M_1)$ için

$$(\nabla_{X_1} \varphi_1) X_1 + (\nabla_{\varphi_1 X_1} \varphi_1) \varphi_1 X_1 = \eta_1(X_1) \nabla_{\varphi_1 X_1} \xi_1$$

dır (Chinea 1984).

$$\begin{aligned} \eta_1(X_1) \nabla_{\varphi_1 X_1} \xi_1 &= \nabla_{X_1} \varphi_1 X_1 - \varphi_1 \nabla_{X_1} X_1 + \nabla_{\varphi_1 X_1} \varphi_1^2 X_1 \\ &\quad - \varphi_1 \nabla_{\varphi_1 X_1} \varphi_1 X_1, \end{aligned}$$

dır. Tanım 3.2.1.1 (II) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \eta_1(X_1) \nabla_{\varphi_1 X_1} \xi_1 &= \nabla_{X_1} \varphi_1 X_1 - \varphi_1 \nabla_{X_1} X_1 + \nabla_{\varphi_1 X_1} (-X_1 + \eta_1(X_1) \xi_1) \\ &\quad - \varphi_1 \nabla_{\varphi_1 X_1} \varphi_1 X_1, \\ \eta_1(X_1) \nabla_{\varphi_1 X_1} \xi_1 &= \nabla_{X_1} \varphi_1 X_1 - \varphi_1 \nabla_{X_1} X_1 - \nabla_{\varphi_1 X_1} X_1 + \eta_1(X_1) \nabla_{\varphi_1 X_1} \xi_1 \\ &\quad - \varphi_1 \nabla_{\varphi_1 X_1} \varphi_1 X_1, \\ 0 &= \nabla_{X_1} \varphi_1 X_1 - \varphi_1 \nabla_{X_1} X_1 - \nabla_{\varphi_1 X_1} X_1 - \varphi_1 \nabla_{\varphi_1 X_1} \varphi_1 X_1 \end{aligned}$$

olur. Lemma 3.1.2 (IV) denklemini kullanıp dikey bileşenleri almırsa,

$$A_{X_1} \varphi_1 X_1 - A_{\varphi_1 X_1} X_1 = \varphi_1 A_{X_1} X_1 + \varphi_1 A_{\varphi_1 X_1} \varphi_1 X_1 = 0$$

elde edilir.

$$A_{X_1}\varphi_1 X_1 - A_{\varphi_1 X_1} X_1 = 0$$

$$A_{X_1}\varphi_1 X_1 + A_{X_1}\varphi_1 X_1 = 0$$

$$2A_{X_1}\varphi_1 X_1 = 0$$

$$A_{X_1}\varphi_1 X_1 = 0$$

olur.

(III)

(II) de X_1 yerine $X_1 + X_2$ yazalım.

$$A_{\varphi_1 X_1 + \varphi_1 X_2} X_1 + X_2 = 0$$

$$A_{\varphi_1 X_1} X_1 + A_{\varphi_1 X_1} X_2 + A_{\varphi_1 X_2} X_1 + A_{\varphi_1 X_2} X_2 = 0$$

olur.

(II) den

$$A_{\varphi_1 X_1} X_2 + A_{\varphi_1 X_2} X_1 = 0$$

$$A_{\varphi_1 X_1} X_2 = -A_{\varphi_1 X_2} X_1$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2 $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Eğer, M_1 nearly- kosimplektik manifold ise,

$V_1, V_2 \in \chi^v(M_1)$, $X \in \chi^h(M_1)$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Chinea, D. 1984).

$$(I) 2\varphi_1 T_{V_1} V_2 = T_{V_1} \varphi_1 V_2 + T_{\varphi_1 V_1} V_2$$

$$(II) 2T_{V_1} \varphi_1 X = \varphi_1 T_{V_1} V_2 - T_{\varphi_1 V_1} X$$

İspat.

(I) Lemma 3.1.2 (IV) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 \nabla_{V_1} \varphi_1 V_1 &= T_{V_1} \varphi_1 V_1 + \widehat{\nabla}_{V_1} \varphi_1 V_1 \\
 T_{V_1} \varphi_1 V_1 &= \nabla_{V_1} \varphi_1 V_1 - \widehat{\nabla}_{V_1} \varphi_1 V_1 \\
 T_{V_1} \varphi_1 V_1 &= (\nabla_{V_1} \varphi_1) V_1 + \varphi_1 (\nabla_{V_1} V_1) - (\widehat{\nabla}_{V_1} \varphi_1) V_2 - \varphi_1 (\widehat{\nabla}_{V_1} V_1) \\
 T_{V_1} \varphi_1 V_1 &= \varphi_1 (\nabla_{V_1} V_1) - \varphi_1 (\widehat{\nabla}_{V_1} V_1) \\
 T_{V_1} \varphi_1 V_1 &= \varphi_1 (\nabla_{V_1} V_1 - \widehat{\nabla}_{V_1} V_1) \\
 T_{V_1} \varphi_1 V_1 &= \varphi_1 T_{V_1} V_1
 \end{aligned}$$

olur. Burada V_1 yerine $V_1 + V_2$ yazalım,

$$\begin{aligned}
 T_{V_1+V_2} \varphi_1 V_1 + \varphi_1 V_2 &= \varphi_1 T_{V_1+V_2} V_1 + V_2 \\
 T_{V_1} \varphi_1 V_1 + T_{V_1} \varphi_1 V_2 + T_{V_2} \varphi_1 V_1 + T_{V_2} \varphi_1 V_2 &= \varphi_1 T_{V_1} V_1 + \varphi_1 T_{V_1} V_2 + \varphi_1 T_{V_2} V_1 \\
 &\quad + \varphi_1 T_{V_2} V_2 \\
 T_{V_1} \varphi_1 V_2 + T_{V_2} \varphi_1 V_1 &= \varphi_1 T_{V_1} V_2 + \varphi_1 T_{V_2} V_1
 \end{aligned}$$

T simetrik olduğundan,

$$\begin{aligned}
 T_{V_1} \varphi_1 V_2 + T_{V_1} \varphi_1 V_1 &= \varphi_1 T_{V_1} V_2 + \varphi_1 T_{V_1} V_2 \\
 T_{V_1} \varphi_1 V_2 + T_{V_1} \varphi_1 V_1 &= 2\varphi_1 T_{V_1} V_2
 \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned}
 g_1(2T_{V_1} \varphi_1 X, V_2) &= g_1(X, T_{V_1} \varphi_1 V_2 + T_{\varphi_1 V_1} V_2) \\
 &= g_1(X, T_{V_1} \varphi_1 V_2) + g_1(X, T_{\varphi_1 V_1} V_2) \\
 &= -g_1(T_{V_1} X, \varphi_1 V_2) - g_1(T_{\varphi_1 V_1} X, V_2) \\
 &= g_1(\varphi_1 T_{V_1} X, V_2) - g_1(T_{\varphi_1 V_1} X, V_2) \\
 &= g_1(\varphi_1 T_{V_1} X - T_{\varphi_1 V_1} X, V_2)
 \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$2T_{V_1} \varphi_1 X = \varphi_1 T_{V_1} X - T_{\varphi_1 V_1} X$$

elde edilir.

Teorem 4.2.3 $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Eğer,

M_1 kosimplektik manifold ise,

$E, F \in \chi(M_1)$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Chinea, D. 1984).

$$(I) \quad T_F \varphi_1 E = \varphi_1 T_F E$$

$$(II) \quad A_F \varphi_1 E = \varphi_1 A_F E$$

İspat.

(I) T nin tanımını kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T_F \varphi_1 E &= h \nabla_{vF} v \varphi_1 E + v \nabla_{vF} h \varphi_1 E \\ &= h (\nabla_{vF} \varphi_1) v E + h \varphi_1 (\nabla_{vF} v E) + v (\nabla_{vF} \varphi_1) h E + v \varphi_1 (\nabla_{vF} h E) \\ &= h \varphi_1 (\nabla_{vF} v E) + v \varphi_1 (\nabla_{vF} h E) \\ &= \varphi_1 [h (\nabla_{vF} v E) + v (\nabla_{vF} h E)] \\ &= \varphi_1 T_F E \end{aligned}$$

olur.

(II) A nin tanımını kullanılırsa,

$$\begin{aligned} A_F \varphi_1 E &= v \nabla_{hF} h \varphi_1 E + h \nabla_{hF} v \varphi_1 E \\ &= v (\nabla_{hF} \varphi_1) h E + v \varphi_1 (\nabla_{hF} h E) + h (\nabla_{hF} \varphi_1) v E + h \varphi_1 (\nabla_{hF} v E) \\ &= v \varphi_1 (\nabla_{hF} h E) + h \varphi_1 (\nabla_{hF} v E) \\ &= \varphi_1 [v (\nabla_{hF} h E) + h (\nabla_{hF} v E)] \\ &= \varphi_1 A_F E \end{aligned}$$

olur.

Sonuç 4.2.1 $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Eğer, M_1 kosimplektik manifold ise,

$V, W \in \chi^v(M_1)$, $X \in \chi^h(M_1)$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Chinea, D. 1984).

$$(I) \quad T_V \varphi_1 W = \varphi_1 T_V W$$

$$(II) \quad T_V \varphi_1 X = \varphi_1 T_V X$$

İspat.

(I) Teorem 4.2.3 (I) de F yerine V , E yerine W yazılırsa

$$T_V \varphi_1 W = \varphi_1 T_V W$$

olur.

(II) Teorem 4.2.3 (I) de E yerine X , F yerine V yazılırsa

$$T_V \varphi_1 X = \varphi_1 T_V X$$

elde edilir.

4.3. Yapıların Transferi

Teorem 4.3.1 $(M_1, g_1, \varphi_1, \eta_1, \xi_1)$ ve $(M_2, g_2, \varphi_2, \eta_2, \xi_2)$ hemen hemen kontakt metrik manifoldlar ve $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, M_1 in hemen hemen kontakt yapısı normal ise M_2 nin de hemen hemen kontakt yapısı normaldir (Falcitelli ve ark. 2004).

İspat. M_1 üzerindeki X ve Y yatay vektör alanlarını temel vektör alanları olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$F_* X = X' \text{ ve } F_* Y = Y'$$

dır. M_1 in hemen hemen kontakt yapısı normal olduğundan,

$$N^{(1)}(X, Y) = [\varphi_1, \varphi_1](X, Y) + 2d\eta_1(X, Y)\xi_1$$

dır. F bir Riemann submersiyon olduğundan

$$\begin{aligned} F_* N^{(1)}(X, Y) &= F_* ([\varphi_1, \varphi_1](X, Y) + 2d\eta_1(X, Y)\xi_1), \\ F_* N^{(1)}(X, Y) &= F_* \begin{pmatrix} \varphi_1^2[X, Y] + [\varphi_1 X, \varphi_1 Y] - [\varphi_1 X, Y] \\ -\varphi_1[X, \varphi_1 Y] + 2d\eta_1(X, Y)\xi_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. $N^{(1)}$, φ_1 nin Nijenhuis tensör alanıdır.

$$F_* \varphi_1 = \varphi_2 F_*$$

ve

$$F_* \xi_1 = \xi_2$$

eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
[\varphi_1, \varphi_1](X, Y) &= F_* \left(\begin{aligned} &-[X, Y] + \eta_1([X, Y])\xi_1 + [\varphi_1 X, \varphi_1 Y] - [\varphi_1 X, Y] \\ &\quad - \varphi_1[X, \varphi_1 Y] \end{aligned} \right) \\
&= -[F_* X, F_* Y] + g_1([X, Y], \xi_1) F_* \xi_1 + [F_* \xi_1 X, F_* \xi_1 Y] \\
&\quad - F_* \varphi_1[\varphi_1 X, Y] - F_* \varphi_1[X, \varphi_1 Y] \\
&= -[X', Y'] + g_2(F_*[X, Y], F_* \xi_1) \xi_2 + [\xi_2 F_* X, \xi_2 F_* Y] \\
&\quad - \varphi_2[F_* \varphi_1 X, F_* Y] - \varphi_2[F_* X, F_* \varphi_1 Y] \\
&= -[X', Y'] + g_2([X', Y'], \xi_2) \xi_2 + [\varphi_2 X', \varphi_2 Y'] \\
&\quad - \varphi_2[\varphi_2 X', Y'] - \varphi_2[X', F_* \varphi_2 Y'] \\
&= [\varphi_2, \varphi_2](X', Y')
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
F_* 2d\eta_1(X, Y) \xi_1 &= F_*(X\eta_1(Y) - Y\eta_1(X) - \eta_1([X, Y])\xi_1) \\
&= F_* X g_1(Y, \xi_1) - F_* Y g_1(X, \xi_1) - g_1([X, Y], \xi_1) F_* \xi_1 \\
&= X' g_2(F_* Y, F_* \xi_1) - Y' g_2(F_* X, F_* \xi_1) \\
&\quad - g_2([F_* X, F_* Y], F_* \xi_1) \xi_2 \\
&= X' \eta_2(Y') - Y' \eta_2(X') - \eta_2([X', Y']) \xi_2 \\
&= 2d\eta_2(X', Y') \xi_2
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

(4.3.1) ve (4.3.2) den

$$F_* N^{(1)}(X, Y) = N'^{(1)}(X', Y') = 0$$

dır. O halde,

M_1 manifoldunun kontakt yapısı normal ise M_2 manifoldunda kontakt yapısı normaldir.

Önerme 4.3.1. $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Eğer, M_1 manifoldu hemen hemen kosimplektik manifold ise M_2 manifoldu da hemen hemen kosimplektik manifolddur (Falcitelli ve ark. 2004).

İspat. M_1 üzerindeki X, Y ve Z vektör alanlarını temel vektör alanları olduğu varsayalım. Bu durumda,

$$F_* X = X' \text{ ve } F_* Y = Y'$$

dır. M_1 bir hemen hemen kosimplektik manifold olduğundan,

$$d\phi_1 = 0, \quad d\eta_1 = 0$$

dır.

$$\begin{aligned} 0 &= d\Phi_1(X, Y, Z) \\ 0 &= X(\Phi_1(Y, Z)) - Y(\Phi_1(X, Z)) + Z\Phi_1(X, Y) \\ &\quad - \Phi_1([X, Y], Z) + \Phi_1([X, Z], Y) - \Phi_1([Y, Z], X) \end{aligned}$$

dır. Temel 2- formun tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= Xg_1(Y, \varphi_1 Z) - Yg_1(X, \varphi_1 Z) + Zg_1(X, \varphi_1 Y) \\ &\quad - g_1([X, Y], \varphi_1 Z) + g_1([X, Z], \varphi_1 Y) - g_1([Y, Z], \varphi_1 X) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$F_*\varphi_1 = \varphi_2 F_* \text{ ve } F$$

bir Riemann submersiyonu olduğundan,

$$\begin{aligned} 0 &= X'g_2(Y', \varphi_2 Z') - Y'g_2(X', \varphi_2 Z') + Z'g_2(X', \varphi_2 Y') \\ &\quad - g_2([X', Y'], \varphi_2 Z') + g_2([X', Z'], \varphi_2 Y') - g_2([Y', Z'], \varphi_2 X') \end{aligned}$$

dır. Buradan,

$$\begin{aligned} 0 &= X'\Phi_2(Y', Z') - Y'\Phi_2(X', Z') + Z'\Phi_2(X', Y') \\ &\quad - \Phi_2([X', Y'], Z') + \Phi_2([X', Z'], Y') - \Phi_2([Y', Z'], X') \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$d\Phi_2(X', Y', Z') = 0 \tag{4.3.3}$$

dır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} 0 &= 2d\eta_1(X, Y) \\ 0 &= X\eta_1(Y) - Y\eta_1(X) - \eta_1([X, Y]\xi_1) \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafına F_* uygulanırsa,

$$F_*X g_1(Y, \xi_1) - F_*Y g_1(X, \xi_1) - g_1([X, Y], \xi_1) F_*\xi_1 = 0$$

dır. F bir Riemann submersiyon olduğundan,

$$X' g_2(F_*Y, F_*\xi_1) - Y' g_2(F_*X, F_*\xi_1) - g_2([F_*X, F_*Y], F_*\xi_1) \xi_2 = 0$$

$$X' g_2(Y', \xi'_1) - Y' g_2(X', \xi'_1) - g_2([X', Y'], \xi'_1) \xi_2 = 0$$

$$X' \eta_2(Y') - Y' \eta_2(X') - \eta_2([X', Y']) \xi_2 = 0$$

$$2d\eta_2(X', Y') = 0$$

dır. Böylece

$$d\eta_2 = 0 \quad (4.3.4)$$

dır. 4.3.3 ve 4.3.4 den M_2 manifoldunun hemen hemen kosimplektik manifold olduğu görülür.

Teorem 4.3.1 ve Önerme 4.1.4 in uygulamalarından aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç. 4.3.1 $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Eğer, M_1 manifoldu kosimplektik manifold veya quasi-Sasakian manifold ise M_2 manifoldu da kosimplektik manifold veya quasi-Sasakian manifoldudur (Falcitelli ve ark. 2004).

Önerme 4.3.2 $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Eğer, M_1 manifoldu Sasakian manifold ise M_2 manifoldu da Sasakian manifoldudur (Falcitelli ve ark. 2004).

İspat. Bir hemen hemen kontakt metrik manifoldun Sasakian manifold olması için gerek ve yeter koşul $X, Y \in \chi(M_1)$ olmak üzere,

$$(\nabla_X \varphi_1)Y = g_1(X, Y) \xi_1 - \eta_1(Y) X$$

dır.

X ve Y yatay vektör alanlarının temel vektör alanlarını varsayalım. Bu durumda,

$$F_*X = X' \text{ ve } F_*Y = Y'$$

dır.

Önerme 4.1.1.(II) ve Riemann submersiyon tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
F_*h(\nabla_X\varphi_1)Y &= g_1(X,Y)F_*\xi_1 - g_1(Y,\xi_1)F_*X, \\
(\nabla'_{X'}\varphi_2)Y' &= g_2(F_*X,F_*Y)\xi_2 - g_2(F_*Y,F_*\xi_1)X' \\
&= g_2(X',Y')\xi_2 - g_2(Y',\xi_2)X' \\
&= g_2(X',Y')\xi_2 - \eta_2(Y')X'
\end{aligned}$$

elde edilir.

O halde, M_1 bir Sasakian manifold ise M_2 manifoldu da Sasakian manifoldudur.

Önerme 4.3.3. $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Eğer, M_1 manifoldu nearly-K-kosimplektik manifold ise M_2 manifoldu da aynı sınıfa aittir (Falcitelli ve ark. 2004).

İspat. M_1 manifoldu nearly-K-kosimplektik manifold olduğundan,

$$(\nabla_X\varphi_1)X = 0 \text{ ve } \nabla_X\xi_1 = 0$$

dır. Önerme 4.1.1.(II) den,

$$(\nabla'_{X'}\varphi_2)X' = 0 \text{ ve } \nabla'_{X'}\xi_2 = 0$$

olur.

Önerme 4.3.3 ün uygulamalarından aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 4.3.4. $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Eğer, M_1 manifoldu Kenmatsu veya nearly-K-Sasakian manifold ise M_2 manifoldu da aynı sınıfa aittir (Falcitelli ve ark. 2004).

Önerme 4.3.5. $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Eğer, M_1 bir kosimplektik manifold ise yatay distribüsyonu integrallenebilirdir (Falcitelli ve ark. 2004).

İspat. M_1 bir kosimplektik manifold olduğundan $d\Phi_1 = 0$ dır.

X_1 ve X_2 yatay vektör alanlarına temel varsayalım. U dikey vektör alanı olsun.

Doğrudan hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
0 &= d\Phi_1(X_1, X_2, U) \\
0 &= X_1(\Phi_1(X_2, U)) - X_2(\Phi_1(X_1, U)) + U(\Phi_1(X_1, X_2)) - \Phi_1([X_1, X_2], U) \\
&\quad + \Phi_1([X_1, U], X_2) - \Phi_1([X_2, U], X_1)
\end{aligned}$$

dır. Temel-2 formun tanımını kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
0 &= X_1(g_1(X_2, \varphi_1 U)) - X_2(g_1(X_1, \varphi_1 U)) + U(g_1(X_1, \varphi_1 X_2)) \\
&\quad - g_1([X_1, X_2], \varphi_1 U) + g_1([X_1, U], \varphi_1 X_2) - g_1([X_2, U], \varphi_1 X_1)
\end{aligned}$$

olur.

Dikey ve yatay distribüsyonlar invaryant olduğundan,

Önerme 3.1.1 (IV) kullanılırsa,

$$U(g_1(X_1, \varphi_1 X_2)) - g_1([X_1, X_2], \varphi_1 U) = 0$$

elde edilir.

Eğer X_1 temel ise,

$$h(\nabla_U X_1) = h(\nabla_{X_1} U) = A_{X_1} U$$

dır. Lemma 3.1.1 in (3.1.9) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
U(g_1(X_1, \varphi_1 X_2)) &= g_1(h\nabla_U X_1, \varphi_1 X_2) + g_1(h\nabla_U \varphi_1 X_2, X_1) \\
&= g_1(A_{X_1} U, \varphi_1 X_2) + g_1(A_{\varphi_1 X_2} U, X_1)
\end{aligned}$$

dır. A antisimetrik operatör olduğundan lemma 3.1.1 in (3.1.9) denkleminde

$$U(g_1(X_1, \varphi_1 X_2)) = -g_1(A_{X_1} \varphi_1 X_2, U) - g_1(A_{\varphi_1 X_2} X_1, U)$$

dır. A alterleyen operatör olduğundan önerme 3.1.2 (II) den

$$U(g_1(X_1, \varphi_1 X_2)) = g_1(A_{\varphi_1 X_1} X_2, U) - g_1(A_{\varphi_1 X_2} X_1, U) = 0$$

dır. Buradan,

$$\begin{aligned} g_1([X_1, X_2], \varphi_1 U) &= 0 \\ g_1(\nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{X_2} X_1, \varphi_1 U) &= 0 \end{aligned}$$

dır. $\varphi_1 U \neq 0$ olduğundan,

$$\nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{X_2} X_1 = 0$$

dır. Lemma 3.1.2 (IV) kullanılırsa,

$$A_{X_1} X_2 + h \nabla_{X_1} X_2 - A_{X_2} X_1 + h \nabla_{X_2} X_1 = 0$$

dır. Dikey ve yatay bileşenler ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned} A_{X_1} X_2 - A_{X_2} X_1 &= 0, \\ A_{X_1} X_2 + A_{X_1} X_2 &= 0, \\ 2A_{X_1} X_2 &= 0, \\ A_{X_1} X_2 &= 0, \\ A &= 0 \end{aligned}$$

dır. O halde yatay distribüsyon integrallenebilir. Önerme 4.3.5 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.2 $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Eğer, M_1 manifoldu hemen hemen kosimplektik manifold veya quasi-Sasakian manifold ise yatay distribüsyon integrallenebilir (Falcitelli ve ark. 2004).

4.4. Bir Kontakt Riemann Submersiyon İçin Eğrilik İlişkileri

Tanım 4.4.1 $(M_1, g_1, \varphi_1, \eta_1, \xi_1)$ ve $(M_2, g_2, \varphi_2, \eta_2, \xi_2)$ hemen hemen kontakt metrik manifold ve $F : M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. φ_1 -holomorfik bi-kesit eğriliğini B_1 ile ifade edelim. M_1 üzerinde ξ_1 e ortogonal sıfırdan farklı X_1 ve X_2 vektörleri için φ_1 -holomorfik bi-kesit eğriliği;

$$B_1(X_1, X_2) = \frac{R_1(X_1, \varphi_1 X_1, X_2, \varphi_1 X_2)}{\|X_1\|^2 \|X_2\|^2}$$

dır (Gundmundson, S. 2006).

M_1 üzerinde ξ_1 e ortogonal sıfırdan farklı X_1 vektör alanı için φ_1 -holomorfik bi-kesit eğriliği $H_1(X_1) = B_1(X_1, X_2)$ ile tanımlanır. M_2 nin φ_2 -holomorfik bi-kesit eğriliği, kesit eğriliğini sırasıyla B_2 ve H_2 , lifin J - holomorfik bi-kesit eğriliği, kesit eğriliğini sırasıyla $\hat{B}$ ve $\hat{H}$ ile gösterelim.

Önerme 4.4.1 $F : M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. V ve U birim dikey vektörler, X_1 ve X_2 birim yatay vektör alanları ξ_1 e ortogonal olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlikler doğrudur. (Falcitelli ve ark. 2004).

- (I) $B_1(V, U) = \hat{B}(V, U) + g_1(T_V \varphi_1 U, T_{\varphi_1 V} U) - g_1(T_V U, T_{\varphi_1 V} \varphi_1 U)$
- (II) $B_1(X_1, V) = g_1((\nabla_V A)(X_1, \varphi_1 X_1), \varphi_1 V) - g_1(A_{X_1} \varphi_1 V, A_{\varphi_1 X_1} V) + g_1(A_{X_1} V, A_{\varphi_1 X_1} \varphi_1 V) - g_1((\nabla_{\varphi_1 V} A)(X_1, \varphi_1 X_1), V) - g_1(T_V X_1, T_{\varphi_1 V} \varphi_1 X_1) + g_1(T_{\varphi_1 V} X_1, T_V \varphi_1 X_1)$
- (III) $B_1(X_1, X_2) = B_2(F_* X_1, F_* X_2) - 2g_1(A_{X_1} \varphi_1 X_1, A_{X_2} \varphi_1 X_2) + g_1(A_{\varphi_1 X_1} X_2, A_{X_1} \varphi_1 X_2) - g_1(A_{X_1} X_2, A_{\varphi_1 X_1} \varphi_1 X_2)$
- (IV) $H_1(V) = H_2(V) + \|T_V \varphi_1 V\|^2 - g_1(T_V V, T_{\varphi_1 V} \varphi_1 V)$
- (V) $H_1(X_1) = H_2(F_* X_1) - 3\|A_{X_1} \varphi_1 X_1\|^2$

İspat.

- (I) Teorem 3.1.2 nin (3.1.11) eşitliğinden kolayca görülür.
- (II) Teorem 3.1.2 nin (3.1.12) eşitliğinden kolayca görülür.
- (III) Teorem 3.1.2 nin (3.1.12) eşitliğinden kolayca görülür.
- (IV) Teorem 3.1.2 nin (3.1.11) eşitliğinden kolayca görülür.
- (V) Teorem 3.1.2 nin (3.1.12) eşitliğinden kolayca görülür.

Teorem 4.4.1 $F : M_1 \rightarrow M_2$ bir kontakt Riemann submersiyon olsun. Eğer, M_1 kosimplektik manifold ise, X, Y yatay birim vektör alanları, V dikey vektör alanı için aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Falcitelli ve ark. 2004).

$$(I) B_1(X, V) = 2\|T_V X\|^2$$

$$(II) \ B_1(X, Y) = B_2(F_*X, F_*Y)$$

$$(III) \ H_1(X) = B_2(F_*X)$$

İspat.

(I) Bir kosimplektik submersiyonda $A = 0$ olduğundan Önerme 4.4.1 (II) den

$$B_1(X, V) = -g_1(T_V X, T_{\varphi_1 V} \varphi_1 X) + g_1(T_{\varphi_1 V} X, T_V \varphi_1 X)$$

olur.

$$(\nabla_V \varphi_1) X = 0$$

$$\nabla_V \varphi_1 X - \varphi_1 \nabla_V X = 0$$

dır.

T nin özellikleri kullanılırsa,

$$T_V \varphi_1 X = \varphi_1 T_V X$$

olur.

Benzer olarak,

$$T_V \varphi_1 X = \varphi_1 T_V X$$

bulunur.

$$\begin{aligned} T_{\varphi_1 V} \varphi_1 X &= \varphi_1^2 T_V X \\ &= -T_V X + \eta_1(T_V X) \xi_1 \\ &= -T_V X \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$B_1(X, V) = g_1(T_V X, T_V X) + g_1(\varphi_1 T_V X, \varphi_1 T_V X)$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} g_1(\varphi_1 T_V X, \varphi_1 T_V X) &= g_1(T_V X, T_V X) - \eta_1(T_V X)(T_V X) \\ &= g_1(T_V X, T_V X) \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$B_1(X, V) = 2g_1(T_V X, T_V X) = 2\|T_V X\|^2$$

elde edilir.

(II) Bir kosimplektik submersiyonda $A = 0$ olduğundan önerme 4.4.1 (III) ten,

$$B_1(X, Y) = B_2(F_* X, F_* Y)$$

olur.

(III) Bir kosimplektik submersiyonda $A = 0$ olduğundan önerme 4.4.1 (V) ten,

$$H_1(X) = H_2(F_* X)$$

olur.

Sonuç 4.4.1 $F: M_1 \rightarrow M_2$ bir kosimplektik submersiyon olsun. Bu durumda M_1 in bi-kesit eğriliği M_2 in bi-kesit eğriliğine eşittir (Falcitelli ve ark. 2004).



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Riemann submersiyonları üzerine inşa edilen temel tensörler ve yapılar ile hemen hemen kontakt metrik manifoldlar arasında tanımlanan kontakt Riemann submersiyonlar incelenmiştir. Ayrıca bir kontakt Riemann submersiyon için eğrilik ilişkileri incelenmiştir. Kontakt Riemann submersiyondan yararlanarak kontakt geometride farklı isimlerde submersiyonlar çalışılabilir.





6. KAYNAKLAR

Blair, D.E., 1967. The Theory of quasi-Sasakian Structures, J. Differential Geometry, 1, s.331-345.

Chen, B.Y. 1973. Geometry of Submanifolds. Marcel Dekker, New York.

Chinea, D. 1984. Quasi-K-Cosymplectic Submersions. *Rendiconti Circolo Mat. Pal. Seria II*. pp. 319-320.

Dileo, G., A. M., 2007. Almost Kenmotsu Manifolds and Local Symmetry Bull. Berg. Math. Soc., 14:343-354.

Do Carmo, M. P. 1992. Riemann Geometry. Birkhauser Boston.

Falcitelli, M. I. S. and. Pastore, A.M., 2004. Riemaniann Submersion and Related Topcis, World Scientific.

Gundmundson, S., An Introduction to Riemannian Lecture Notes, University, World Scientific Company, 2004)

Hacisalihoğlu, H. H. 2003. Diferansiyel Geometri. Cilt:1,2,3 Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi.

Kenmotsu K., 1972. A Classn of Contact Riemanian Manifold. *Tohoku Math. J.*, 24:93-103.

Olszak Z. 1981. Almost Cosymplectic Manifolds With Kaehlerian Leaves, **J. Tensor**, 46:117-124.

O'Neill, B. 1983. Semi-Riemanian Geometry With Applications To Relativity. Academic Press, New York.

O'Neill, B. 1966. The Fundamental Equations of a Submersions. **Michingan Math. J.** 13, 458-469.

Şahin, B. 1996. CR-Altmanifoldların Geometrisi Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi.

Şahin, B. 2012. Manifoldların Diferansiyel Geometrisi. Nobel Akademik Yayıncılık.

Şahin, B. 2010. Ant-invariant Riemannian submersions from Almost Hermitian manifolds. *Central European of Math.*, 8(3): 437-447.

Yano, K., Kon, M. 1984. Structures on manifolds. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.



ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Diyarbakır'da doğdum. 1999 yılında Malatya Akçadağ Anadolu Öğretmen Lisesinden mezun oldum. 2005 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Fen ve Matematik Alanları Matematik Öğretmenliğinden mezun oldum. 2017 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım. 2015 yılından itibaren Milli Eğitim Bakanlığına bağlı kadrolu öğretmen olarak çalışmaktayım.





DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ İNTİHAL FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ

ADI VE SOYADI	Nebi YILMAZ
ÖĞRENCİ NO	17804002
EĞİTİM - ÖĞRETİM YILI	2019/2020
YARIYIL	☒ Güz ☐ Bahar
ANABİLİM DALI	
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Kontakt Riemann Submersiyonlar

İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ

RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	53
BENZERLİK ORANI	%23
RAPORLAMA TARİHİ	09/10/ 2019

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 53 sayfalık kısmına ilişkin, 09/10/2019 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 23'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
☐ Kaynakça hariç
☐ Alıntılar hariç/dâhil
☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Nebi YILMAZ

09/10/2019

Doç. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP
Tez Danışmanı
09/10/2019

Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY
Anabilim Dalı Başkanı
09/10/2019

Formdaki bilgiler bilgisayar ortamında doldurulmalıdır. El yazısı ile doldurulan formlar geçersiz sayılmaktadır.