



**CAPUTO KESİRLİ İNTEGRAL İÇEREN
EŞİTSİZLİKLER**

Fesih AYDEMİR

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı**

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

**AĞRI-2019
Her Hakkı Saklıdır**

T.C.

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Fesih AYDEMİR

CAPUTU KESİRLİ İNTEGRAL İÇEREN

EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Dç. Dor. Ahmet Ocak AKDEMİR

AĞRI-2019



T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürüğü



TEZ ONAY FORMU

CAPUTO KESİRLİ İNTEGRAL İÇEREN EŞİTSİZLİKLER

Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR danışmanlığında, Fesih AYDEMİR tarafından hazırlanan bu çalışma, 05/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Abdullah ÇAĞMAN

İmza :

Üye : Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

İmza :

Üye : Doç. Dr. Furkan YILDIRIM

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../201.. tarih ve / nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim HAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum “**CAPUTO KESİRLİ İNTEGRAL İÇEREN EŞİTSİZLİKLER**” adlı yüksek lisans tezinin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu ve bu tezi Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik gaye ve ünvan almak amacıyla vermediğimi beyan ederim.

Δ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

16/07/2019

FESİH AYDEMİR

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CAPUTO KESİRLİ İNTEGRAL İÇEREN

EŞİTSİZLİKLER

Fesih AYDEMİR

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Bu tez çalışmasında; Caputo kesirli türev ve Caputo kesirli integral içeren eşitsizlikler kavramlarının matematiksel olarak uygulamalarına yönelik çalışmalarda, öncelikle gerekli olan tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Riemann-Liouville integral ve türev operatörleri ile Caputo türev operatörü ve Caputo integral operatörleri tanıtılıp bazı genel özelliklerine ve aralarındaki ilişkiye değinilmiştir. Caputo kesirli türev ve Caputo kesirli integral içeren eşitsizlikler yardımıyla ispat edilmiş ve literatürde mevcut olan bazı eşitsizlikler sunulmuştur. Daha önce bazı araştırmacılar tarafından iki ve üç fonksiyonun çarpımı için elde edilen sonuçların tane fonksiyona genelleştirilmiştir.

2019, 56 sayfa

Anahtar kelimeler: Kesirli türev operatörü, kesirli integral operatörü, Caputo kesirli türevi, Caputo kesirli integrali,

ABSTRACT

Master

CONTUT INTEGRAL CONTAINING CAPUTU

INEQUALITIES

Fesih AYDEMİR

Ağrı İbrahim Çeçen University

Graduate School Of Natural & Applied Sciences

Department Of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

In this thesis, the concepts of Caputo fractional derivative and Caputo fractional integral are applied mathematically and the definitions and theorems necessary with priority are given. Riemann-Liouville integral and derivative operators and Caputo derivative operator and Caputo integral operators are introduced and some of their general properties and the relationship between them are discussed. The Caputo fractional derivative and Caputo fractional integral have been proved with the help of inequalities and some inequalities present in the literature have been presented. Previously, the results obtained by some researchers for the product of two and three functions have been generalized to n functions.

2019, 56 pages

Keywords: Fractional derivative operator, Fractional integral operator, Caputo fractional derivative and Caputo fractional integral

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Yüksek lisans eğitim hayatım boyunca bana rehberlik eden engin tecrübesiyle ve değerli bilgileriyle bana her türlü desteği sağlayan ve her zaman yol gösterip beni destekleyen saygı değer danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans sürecinde bana yardımcı olan Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ'e ve değerli arkadaşlarım Sayın Nazlıcan EROĞLU, Sayın Ali Ömer YÜZBAŞI'na en samimi duygularıyla teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum maddi ve manevi destekten dolayı aileme ve her zaman yanımda olan sevgili nişanım Dilan KARAOĞLAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Fesih AYDEMİR

Temmuz, 2019

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

Açıklama

$<$ Küçüktür

$>$ Büyüktür

$\leq$ Küçük eşittir

$\geq$ Büyük eşittir

$\in$ Elemanıdır

(a, b)

Açık aralık

$[a, b]$

Kapalı aralık

$\cup$

Birleşim

$\cap$

Kesişim

$\mathbb{R}$

Reel sayılar

$\Gamma(x)$

Gamma Fonksiyonu

$\Gamma_p(x)$

Genelleştirilmiş Gamma Fonksiyonu

$B(x, y)$

Beta fonksiyonu

$B_p(x, y)$

Genelleştirilmiş Beta Fonksiyonu

${}_2F_1$

(Gauss) Hipergeometrik Fonksiyon

F_p

Genelleştirilmiş Hipergeometrik Fonksiyon

D_z^α

Riemann-Liouville kesirli türevi

$D_z^{-\alpha}$	Riemann-Liouville kesirli integrali
I_z^α	Riemann-Liouville kesirli integrali
$D_z^{-\alpha,p}$	Genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli türevi
$(\alpha)_n$	Pochhammer sembolü
D_{a+}^α	Riemann-Liouville kesirli türevi
${}^c D_{a+}^\alpha$	Caputo kesirli türevi
${}^H D_{a+}^\alpha$	Hadamard kesirli türevi
${}^{CH} D_{a+}^\alpha$	Caputo-Hadamard kesirli türevi
${}^c D_{a+}^{\alpha,p}$	Sağ taraflı Caputo-Katugampola kesirli türevi
${}^c D_{b-}^{\alpha,p}$	Sol taraflı Caputo-Katugampola kesirli türevi
${}^c I_{a+}^{\alpha,p}$	Sağ taraflı Caputo-Katugampola kesirli integrali
${}^c I_{b-}^{\alpha,p}$	Sol taraflı Caputo-Katugampola kesirli integrali
$L_1([a, b])[a, b]$	$[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$C[a, b][a, b]$	$[a, b]$ üzerinde sürekli fonksiyonların kümesi
$C^n[a, b]$	n. mertebeden sürekli türevlenebilen fonksiyonların kümesi

İÇİNDEKİLER

ÖZET	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR.....	IV
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	V
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Gamma Fonksiyonu	4
2.2 Beta Fonksiyonu	6
2.3 Genelleştirilmiş Gama ve Beta Fonksiyonları	8
2.4 Hipergeometrik Fonksiyonlar.....	10
3. MATERYAL VE YÖNTEM	15
3.1 Kesirli Türev ve Integraller.....	15
3.2 Caputo Kesirli Türevi	16
3.3 Genelleştirilmiş Caputo Kesirli Türevi.....	17
3.4 Genel Caputo Kesirli İşlemi İçin Bir Gronwall Eşitsizliği	17
3.5 Caputo-Katugampola Kesirli Türev ve İntegrali	19
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	46
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	55
KAYNAKLAR.....	56
ÖZGEÇMİŞ.....	59

1. GİRİŞ

Kesirli türev ve integral, Leibniz ve Newton tarafından ayrıntılı olarak incelenen klasik türev ve integral kavramlarının genelleştirilmiş halidir. Kesirli türev ile aslında anlatılmak istenen herhangi bir mertebeden türevdir. Kesirli mertebeden türev ve integral kavramları klasik türev ve integral kavramları kadar eski olup kesirli türev ifadesi birçok kaynakta belirtildiği gibi ilk defa 1965 yılında Leibniz'in L'Hospital'a yazdığı bir mektupta geçmektedir (Dalir and Bashour 2010). Leibniz'in mektubunda L'Hospital'a yönelttiği “ Tamsayı basamaktan türevler kesirli basamaktan türevlere genişletilebilir mi?” sorusu kesirli diferensiyel kavramının ilk ortaya çıkışı olarak gösterilebilir. Leibniz dışında Riemann, Liouville, Lagrange, Laplace, Fourier, Weyl ve Abel gibi birçok ünlü matematikçi de aynı konu üzerinde ilerleyen zamanlarda benzer çalışmalar yapmışlardır (Loverro 2004).

Kesirli türev ve kesirli integral için literatürde çeşitli tanımlar verilmiştir. Bunlardan bazıları Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Weyl, Riesz kesirli türevleridir. Kesirli mertebeden türev nasıl tanımlanırsa tanımlansın türev, mertebesi tamsayıya eşit olacak şekilde seçildiğinde ortaya çıkan ifade tam sayı mertebeden türev ifadesi ile aynı olmaktadır (Oldham 1974; Podlubny 1999; Miller 1993; Hilfer 2000). Yapılan bazı çalışmalarda belirli şartlar altında bu tanımların eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Birbirleri arasında geçiş olmasına rağmen tanımların fiziksel yorumları farklılık gösterebilir. Kesirli analizde birden fazla türev tanımının olmasının bize sağladığı yarar problemin türüne göre en uygun olanının kullanılması ve böylece en iyi problem çözümünün elde edilmiş olmasıdır (Oldham, 1974; Miller 1993; Podlubny 1999; Hilfer 2000).

Caputo kesirli türev tanımı, Riemann-Liouville tanımının Laplace dönüşümü uygulamalarında ortaya çıkan başlangıç değerlerinin hesaplanması veya deneysel yolla ölçülmesi problemini ortadan kaldırmak için 1960'lı yıllarda İtalyan matematikçi M. Caputo tarafından önerilmiştir. Caputo yaklaşımının temel avantajı, Caputo türevli kesirli diferensiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşulları ile tamsayı mertebeli diferensiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşullarının aynı olmasıdır. Bu yüzden literatürde yer alan son çalışmalarda,

kesirli diferensiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümlerinde Riemann-Liouville kesirli türev operatörü yerine kesirli türev operatörü daha çok tercih edilmelidir. Son yıllarda kesirli adi ve kısmi diferensiyel denklemler ile kesirli integral denklemlerinin çözümlerinin elde edilmesine yönelik çalışmalar giderek artmıştır. Kesirli diferensiyel denklemlerin pek çoğunun analitik çözümü bulunamadığından yaklaşık ya da sayısal çözümlerinin bulunması için çeşitli ve daha pratik yöntemler ortaya konulmuştur. Bu yöntemlerin kesirli diferensiyel denklemlere uygulamalarında, kesirli türev ve integral operatörleri etkili bir şekilde kullanılmaktadır (Momani et al. 2006).

Literatürde, Riemann-Liouville kesirli türevi ile kastedilen sol türevdir. Keyfi bir $[a, b]$ aralığında tanımlanan fiziksel sistem sürecini ifade eden $f(t)$ fonksiyonunu ele alalım. Sağ türev f fonksiyonun gelecekteki durumunu ifade eder. Ancak f sürecinin şimdiki durumu gelecekteki durumuna bağlı değildir. Bu yüzden fiziksel bir problemin tanımlanmasında sağ türev genellikle ihmal edilir (Podlubny 1999).

Caputo ve Caputo-Hadamard'ın genelleştirilmiş yeni bir kesirli işlemi olan kesirli türev işlemi ele alınmıştır. Bu çalışmada işlemin bazı özellikleri incelenmiştir. Yani işlemin genelleştirilmiş kesirli integralin tersine (evrik) işlemi olduğu kanıtlanmıştır. Bu işlem ile Riemann-Liouville arasında bağıntı kurulmuştur. Çalışma kesirli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin karşılaştırması için faydalı olan kesirli bir Gronwall eşitsizlik türü ile devam etmiştir (Almeida 2017).

Kesirli türev ve integrale değinirken en önemli kavramlardan bazıları ele alınmıştır. U. Katugampola, $p = 1$ olduğunda Riemann-Liouville kesirli işlemini elde ettiğimiz ve Hadamard kesirli işlemini $p \rightarrow 0^+$ olarak elde ettiğimiz yeni bir $p < 0$ parametresi sunarak genel bir kesirli işlem öne sürmüştür. Sonrasında Caputo kesirli integrali öne sürmüştür ve bunun bazı özellikleri kanıtlanmıştır. Bu çalışmaya rastgele gerçek sıralamalı $\alpha \in (0,1)$ 'nin Caputo-Katugampola kesirli türevinin tanımı yapılarak devam edilmiştir ve görüldüğü üzere bu Katugampola

kesirli integralinin tersine işlemidir. Daha sonra yeni kesirli türev işleminin birtakım özellikleri üzerinde durulmuştur (Katugampola 2011).

Tez beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Temel kavramlar olan ikinci bölümde, önbilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Materyal ve Yöntem olan üçüncü bölümde; Riemann-Liouville kesirli türev ve integral, Caputo-Katugampola kesirli türev ve Caputo-Katugampola kesirli integral tanımlarına yer verilmiştir. Araştırma ve Bulguları olan dördüncü bölümde ise daha önce iki ve üç fonksiyon için yapılan çalışma n tane fonksiyon için genelleştirilmiştir. Beşinci bölüm ise tartışma ve sonuç bölümüne ayrılmıştır.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasının ilerleyen bölümlerinde kullanılacak bazı temel bilgiler verilecektir

2.1 Gamma Fonksiyonu

Gama fonksiyonunu ifade etmek için

$$F(u) = \int_0^{\infty} e^{-ut} dt = \frac{1}{u} \quad (2.1)$$

integrali ile tanımlanan fonksiyonu ele alalım. Bu integral $c > 0$ olmak üzere $0 < u < \infty$ sonlu aralığında $\frac{1}{u}$ değerine düzgün yakınsaktır (Altın 2011). (2.1) eşitliğinde u değişkenine türevler alırsak:

$$-F'(u) = \int_0^{\infty} t e^{-ut} dt = \frac{1}{u^2}$$

$$F''(u) = \int_0^{\infty} t^2 e^{-ut} dt = \frac{2!}{u^3}$$

$$-F'''(u) = \int_0^{\infty} t^3 e^{-ut} dt = \frac{3!}{u^4}$$

devam edilirse n . mertebeden türevi için

$$(-1)^n F^{(n)}(u) = \int_0^{\infty} t^n e^{-ut} dt = \frac{n!}{u^{n+1}}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte $u = 1$ alınırsa

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

olur. Burada n değerleri pozitif tamsayılar olarak alınmıştır. Halbuki n değerinin herhangi bir reel sayı olması halinde de bu genelleştirilmiş integral tanımlıdır. $x > 0$ olan herhangi bir reel sayı üzere;

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.2)$$

Genelleştirilmiş fonksiyon yardımıyla tanımlanan fonksiyona Gama fonksiyonu denir

Gama fonksiyonun tanımından

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt \\ &= x! \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan görülüyor ki, -1 değerinden büyük tüm reel sayıların faktöriyel değerlerini sonlu bir reel sayı olarak tanımlamak mümkündür. Bundan dolayı Gama fonksiyonuna genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denir.

$x = 0$ olduğu zaman faktöriyel fonksiyonun değeri

$$0! = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

olur. Bu aynı zaman da $0!$ değerinin 1 olduğunu bize ispat eder.

Matematikte n faktöriyel;

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1$$

şeklinde ifade edilir. Burada $n! = n(n-1)!$ eşitliği olduğundan eğer $x = n$ bir tamsayı ise;

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1) = n\Gamma(n)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer x bir tam sayı değilse, yani herhangi bir reel sayı ise

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-t^{x+1} e^{-t}) \Big|_0^b + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \end{aligned}$$

$$= x\Gamma(x)$$

olduğundan Γ fonksiyonu,

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad (2.3)$$

eşitliği tüm $x > 0$ reel sayıları için sağlanmış olur (Andrews 1995).

Bu (2.3) eşitliği yardımıyla gama fonksiyonu için herhangi iki tamsayı arasındaki sonuçların bilinmesi halinde diğer aralıklardaki fonksiyon değerleri de kolayca bulunabilir.

Daha önce pozitif x değerleri için tanımlanan Γ fonksiyonu aynı zamanda negatif x değerleri için de tanımlanabilir. Yani tüm reel sayılara genişletebilir.

Gama fonksiyonun özellikleri şu şekilde sıralanabilir:

$$1. \Gamma(n + 1) = n\Gamma(n), n > 0$$

$\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2!, \Gamma(4) = 3!, \dots \Gamma(n + 1) = n!, n = 1, 2, \dots$ şeklindedir.

$$2. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$3. \Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}, n < 0$$

$$4. \Gamma(p)\Gamma(1 - p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, 0 < p < 1$$

5. $2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x)$ bu formüle aynı zamanda Gamma için çoğalma formülü de denir.

$$6. \gamma, \text{ Euler sabiti olmak üzere } \Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx = -\gamma \text{ dır.}$$

2.2 Beta Fonksiyonu

$B(x,y)$ ile gösterilen Beta fonksiyonu,

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0, \quad \operatorname{Re}(y) > 0 \quad (2.4)$$

genelleştirilmiş integral yardımıyla tanımlanan iki değişkenli bir fonksiyon olup

$$\beta(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta \quad (2.5)$$

$$\beta(x, y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du \quad (2.6)$$

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (2.7)$$

biçimlerinde de ifade edilebilir. Bu dört tanım eş anlamlıdır (Altın 2011). (2.4) tanımında $t = \sin^2 \theta$ alınırsa $dt = 2 \sin \theta \cos \theta$ olup

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta)^{x-1} (1 - \sin^2 \theta)^{y-1} \sin 2\theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta \end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle (2.5) tanımı elde edilir. Bu (2.5) tanımında $t = \frac{u}{u+1}$ alınırsa;

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{u+1}\right)^{x-1} \left(1 - \frac{u}{u+1}\right)^{y-1} \frac{du}{(1+u)^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du \end{aligned}$$

böylece (2.6) elde edilmiş olur.

Beta fonksiyonun Gamma fonksiyonu cinsinden ifade edildiği (2.7) tanımında ve (2.2) tanımında $t = s^2$ dönüşümü yapılırsa:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} s^{2x-1} e^{-s^2} ds$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} t^{2y-1} e^{-t^2} dt$$

yazılır. Buradan

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} s^{2x-1} t^{2y-1} e^{-(t^2+s^2)} dt ds$$

bulunur. Burada $s = r \cos \theta$ $t = r \sin \theta$ dönüşümleri ile kutupsal koordinatlara geçilirse;

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r^{2(x+y)-2} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} e^{-r^2} r dr d\theta$$

$$= \left[2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} d\theta \right] \left[2 \int_0^{\infty} r^{2(x+y)-1} e^{-r^2} dr \right]$$

$$= \beta(x, y) \Gamma(x + y)$$

elde edilir. Böylelikle (2.7) tanımı elde edilir. Ayrıca Gamma Beta fonksiyonunun özelliğini veren (2.7) eşitliğinde;

$$\beta(x, y) = \beta(y, x)$$

olduğu aşıkardır. Bu eşitliğe aynı zamanda Beta fonksiyonunun simetri özelliği de denilmektedir.

2.3 Genelleştirilmiş Gama ve Beta Fonksiyonları

Özel fonksiyonların tanım kümesi genişletilerek elde edilen fonksiyonlardan, bu özel fonksiyonların önemli özelliklerini sağlaması beklenir.

Euler faktöriyel fonksiyonunun, doğal sayılardan kompleks düzlemin Sağ yarısı üzerinde

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlı Gama fonksiyonuna genellemiştir.

Legendre (2.8) integralini parçalayıp sırasıyla üst ve alt sınırlarını alarak Gama fonksiyonunu

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

şeklinde $\gamma(\alpha, x)\Gamma(\alpha, x)$ parçalayarak tam olmayan Gama fonksiyonlarını tanımlamıştır (Andrews 1985; Chaudhry 1994).

Chaudhry ve Zubair, (2.8) integraline düzenleyici bir $e^{-\frac{p}{t}}$ çarpanı x alarak Gama fonksiyonunu

$$\Gamma_p(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t-\frac{p}{t}} dt, \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlamış ve Gama fonksiyonunun tanım kümesini tüm kompleks düzleme genişletmişlerdir (Qadir2007).

Bu çarpan $\text{Re}(p) > 0$ için $t = 0$ limitinden gelen tekilliği kaldırır ve $p = 0$ için genelleştirilmiş fonksiyonu orijinal Gamma fonksiyonuna indirgenir.

Bu Γ_p genelleştirilmiş Gama fonksiyonunun Macdonald fonksiyonu $K_{\alpha}(2\sqrt{p})$ ile

$$\Gamma_p(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t-\frac{p}{t}} dt = 2p^{\frac{\alpha}{2}} K_{\alpha}(2\sqrt{p}), \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \quad (2.10)$$

şeklinde bir ilişki vardır. (Özarıslan2010). Aynı zamanda genelleştirilmiş Gamma fonksiyonu indirgeme bağıntısını ve yansıma formülünü de sağlar. Şöyle ki:

$$\Gamma_p(\alpha + 1) = \alpha \Gamma_p(\alpha) + p \Gamma_p(\alpha - 1)$$

$$\Gamma_p(-\alpha) = p^{-\alpha} \Gamma_p(\alpha)$$

şeklinde elde edilir.

Literatür tarandığında genelleştirilmiş Gama fonksiyonunun çeşitli mühendislik ve fiziksel problemlerde oldukça etkili olduğu görülmüştür.

Euler'in Beta fonksiyonu

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \text{Re}(x) > 0, \quad \text{Re}(y) > 0$$

şeklinde bir gösterime sahiptir ve Gamma fonksiyonu ile arasında

$$\beta(x, y) = \beta(y, x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

şeklinde bir ilişki vardır (Andrews 1985; Chaudhry 1994).

Beta fonksiyonu içinde benzer şekilde genelleme düşünülürse, Gamma fonksiyonu için kullanılan $e^{-\frac{p}{t}}$ çarpanının Beta fonksiyonu için çok önemli simetri özelliğini bozacağı görülür. Bu simetrinin korunması için t ve $1-t$ integrandı simetri olmalıdır. Bu yüzden Beta fonksiyonuna $e^{\frac{-p}{t(1-t)}}$ çarpanı eklenmesiyle;

$$\beta_p(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} e^{\frac{-p}{t(1-t)}} dt, \quad \text{Re}(x) > 0, \text{Re}(y) > 0 \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanıyor (Özarslan 2010).

Genelleştirilmiş Beta fonksiyonu, Beta fonksiyonun birçok özelliğini sağlar. Hata ve Whittaker fonksiyonları ile olan ilişkilerini gerçekleştirir. Aşıkardır ki Beta fonksiyonu $p = 0$ durumunda orijinal Beta fonksiyonuna dönüşür (Özarslan 2010).

2.4 Hipergeometrik Fonksiyonlar

α, β ve γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (2.12)$$

bu şekilde ifade edilen seri matematikte önemli bir yere sahiptir. Bu seri

$$1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Geometrik serinin bir genelleştirilmesi olduğundan hipergeometrik seri adını alır.

(2.12) tanımından görülür ki, γ değeri sıfır ya da negatif bir tam sayı olmamalıdır. (2.12) hipergeometrik serisi $|x| < 1$ için yakınsak $|x| > 1$ için ise ıraksaktır. $|x| = 1$ için eğer $\gamma > \alpha + \beta$ ise seri mutlak yakınsaktır. Ayrıca $x = -1$ iken $\gamma > \alpha + \beta - 1$ ise seri yakınsaktır (Altın 2011 and Andrews 1985).

α reel ya da kompleks bir sayı ve n sıfır ya da pozitif bir sayı olmak üzere

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n - 1) \quad (2.13)$$

$$(\alpha)_0 = 1, \quad \alpha \neq 0$$

şeklinde tanımlanan ifadeye Pochhammer sembolü denir (Altın 2011). pochhammer sembolünün (2.13) gösterimi dikkate alınarak (2.12) hipergeometrik serisi

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!} \quad (2.14)$$

şeklinde yazılabilir. (2.14) eşitliğinde görülen F fonksiyonunun her iki yanındaki 2 ve 1 alt indisleri yapısında biri α ve β değeri γ olmak üzere iki tip parametre kullandığını ifade eder. (2.14) eşitliğin genelleştirilmiş ifadesi

$${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n (\gamma_2)_n \dots (\gamma_q)_n} \frac{x^n}{n!}$$

şeklindedir. Hipergeometrik fonksiyonu ifade eden ${}_2F_1$ gösterimi yerine genellikle sadece F kullanılır. Yani,

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = F(\alpha, \beta, \gamma; x)$$

olup bu fonksiyon Gauss hipergeometrik fonksiyonu olarak tanımlanır. Ayrıca hipergeometrik fonksiyonun α ve β değişkenlerine göre simetrik olduğu görülür.

Hipergeometrik fonksiyonun birinci mertebeden türevi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(\alpha, \beta, \gamma; x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n+1} (\beta)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}} \frac{n}{(n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)_n \beta(\beta+1)_n}{\gamma(\gamma+1)_n} \frac{x^n}{(n)!} \\ &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_n (\beta+1)_n}{(\gamma+1)_n} \frac{x^n}{(n)!} \\ &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; x) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde m. mertebeden türevi,

$$\frac{d^m}{dx^m} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(\gamma)_m} F(\alpha+m, \beta+m, \gamma+m; x) \quad (2.15)$$

şeklinde bulunur (Anderws 1985; Altın 2011).

Aşağıdaki teorem integral ve toplam sembollerinin yer değiştirmesi ile ilgilidir

Teorem 2.1.1 $\sum f_n$ $[a, b]$ üzerinde sınırlı, reel değerli ve integrallenebilir fonksiyonların bir serisi olsun. $\sum f_n$ serisi düzgün yakınsak ise,

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$$

şeklinde olur (Balcı 2005).

Lemma 2.1.1 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ fonksiyonu,

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-xt)^{-\alpha} dt \quad (2.16)$$

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir (Anderws 1985; Altın 2011).

İspat: Beta fonksiyonunun,

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

tanımından ve Pochhammer sembolünün özelliklerinden

$$\begin{aligned} \frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n} &= \frac{B(\beta + n, \gamma - \beta)}{B(\beta, \gamma - \beta)} \\ &= \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 (t)^{\beta+n-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} dt \end{aligned} \quad (2.17)$$

yazılabilir. Buradan (2.17) ifadesi (2.14) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n \int_0^1 (t)^{\beta+n-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} dt$$

olur. Seri düzgün yakınsak olduğundan toplam ile integrasyon işleminin sırası

$$\text{değiştirilse, } F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 (t)^{\beta+n-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} (xt)^n dt$$

elde edilir. Diğer yandan $(1-xt)^{-\alpha}$ ifadesinin binom açılımından,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} (xt)^n = (1-xt)^{-\alpha}$$

olduğu dikkate alınırsa istenilen sonuç;

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 (t)^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-xt)^{-\alpha} dt$$

şeklinde elde edilir. Hipergeometrik fonksiyonun bir integral gösterimini veren bu formül $|x| < 1$ ve $0 < \beta < \gamma$ için geçerlidir (Yusuf 2012).



3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Kesirli Türev Ve İntegraller

Burada ilk olarak kesirli türev ve integrale ilgili bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir

Keyfi mertebeden diferansiyel ve integral kavramları, tam sayı mertebeli türev ve integralin tam olmayan (keyfi) mertebelere genişletilmiş şeklidir. Bu kavramlar 17. Yüzyıldan itibaren Liouville, Leibniz, Euler, Abel, Caputo ve diğer birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Son yıllarda matematik, fizik, biyoloji ve mühendislik alanlarında oldukça geniş uygulama alanı bulmuştur (Giona 1992; Distefano 1995; Mainardi 1997; Magin 2004).

Literatürde kesirli türevin birçok tanımı mevcuttur. Birden fazla tanımının olması problemin türüne göre en uygun olanın kullanılması ve böylece en iyi çözümün bulmasını sağlamış olur. Bu tanımlardan bazıları Grünwald-Letnikov, Wely, Riesz, Rimemann-Liouville ve Caputo kesirli integralleridir (Miller 1993; Podlubny 1999; Hilfer 2000).

Bu bölümde ilk olarak Rimemann-Liouville kesirli türev ve integral tanımını, kesirli türev ve integralin ortak gösterimini, genelleştirilmiş Rimemann-Liouville kesirli türevini ele alacağız. Daha sonra klasik Caputo kesirli türev ve Caputo kesirli integral tanımına değineceğiz.

Tanım 3.1.1 $\alpha \geq 0$ ve $f, [a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$I_z^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^z f(t)(z-t)^{\alpha-1} dt$$

$$I_z^0 f(z) = f(z)$$

İntegraline α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali denir (Podlubny 1999; Kılbas 2006).

Tanım 3.1.2 f fonksiyonu her sonlu (a, x) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun $m \in \mathbb{Z}^+, m - 1 \leq \alpha < m$ olmak üzere $x > a$ için reel bir f fonksiyonunun α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi;

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x f(t)(x-t)^{m-\alpha-1} dt \quad (3.1.1)$$

şeklindedir (Podlubny 1999).

3.2 Caputo Kesirli Türevi

Riemann-Liouville (3.1.1) kesirli türev tanımı, kesirli türev ve integral teorisinin gelişmesinde ve bunların matematikteki uygulamalarında önemli bir rol oynar.

Uygulama problemleri, başlangıç koşulları fiziksel olarak yorumlanabilir kesirli türev tanımları gerektirir. Bu açıdan bakıldığında, Riemann-Liouville yaklaşımının problemlerin yorumlanmasında yetersiz kaldığı ortaya konmuştur. Çünkü Riemann-Liouville yaklaşımı $t = a$ noktasında, Riemann-Liouville kesirli türevinin limit değerleri biçiminde tanımlanan başlangıç koşullarına sahiptir (Podlubny 1999). örneğin; $b_1, b_2, \dots, b_m$ keyfi sabitler olmak üzere

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-1} f(z) = b_1$$

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-2} f(z) = b_2$$

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-3} f(z) = b_3$$

.

.

.

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-m} f(z) = b_m$$

Büyükte tanımlanan başlangıç koşulları meydana gelir. Bu tipteki başlangıç koşullarına sahip başlangıç-değer problemleri matematiksel olarak başarılı bir

şekilde çözülmesine rağmen, bunların sonuçları kullanışlı değildir. Çünkü bu tipteki başlangıç koşullarının bilinen fiziksel yorumları yoktur.

Kesirli diferansiyel tekniğinde başlangıç koşullarını fiziksel yorumlara en uygun şekilde veren M. Caputo olmuştur. Caputo'nun tanımı; m bir tamsayı olmak üzere $m - 1 < \alpha < m$ için

$${}_a D_z^{\alpha-1} f(z) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^z (z-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \quad (3.2.1)$$

şeklindedir (Podlubny 1999; Kılbas 2006).

$f(z)$ fonksiyonunun normal koşullar altında $\alpha \rightarrow m$ için Caputo türevi, $f(z)$ fonksiyonunun m . basamaktan klasik türevine eşittir.

3.3 Genelleştirilmiş Caputo Kesirli Türevi

Tanım 3.3.1 m pozitif bir tamsayı ve $m - 1 < Re(\mu) < m$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonun μ . mertebeden klasik Caputo kesirli türevi

$$D_z^\mu f(z) = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_0^z (z-t)^{m-\mu-1} \frac{d^m}{dt^m} f(t) dt \quad (3.3.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Podlubny 1999; Kılbas 2006)

3.4 Genel Caputo Kesirli İşlemi İçin Bir Gronwall Eşitsizliği

Bu çalışmada Caputo ve Caputo-Hadamard'ın genelleştirilmiş yeni bir kesirli işlem olan kesirli türev işlemi ele alınmıştır. Çalışmada bazı özellikleri ele alınmıştır. Yani işlemin genelleştirilmiş kesirli integralin tersine (evrik) işlemi olduğu kanıtlanmıştır. Bu işlem ile Riemann-Liouville arasında bağıntı kurulmuştur. Çalışma kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin karşılaştırması için faydalı olan kesirli bir Gronwall eşitsizlik türü ile sonuçlanmıştır (Ricardo 2010).

Şimdi bu bölüm ile ilgili tanım ve teoremleri yazalım.

$x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilen bir fonksiyon olsun. N-fold (eğrisel) bir integral için Cauchy'in förmülü ile başlarsak;

$$\int_a^t dr_1 \int_a^{r_1} dr_2 \dots \int_a^{r_{n-1}} x(r_n) dr_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-r)^{n-1} x(r) dr$$

$a < 0$ rastgele gerçek sıralı integraller için direkt genelleştirme elde ederiz. x ' in a daki Riemann-Liouville kesirli integrali şöyle tanımlanabilir:

$$I_a^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-r)^{\alpha-1} x(r) dr$$

şeklindedir. Sonrasında şu förmülü göz önünde bulundurarak

$$\int_a^t \frac{1}{r_1} dr_1 \int_a^{r_1} \frac{1}{r_2} dr_2 \dots \int_a^{r_{n-1}} \frac{1}{r_n} x(r_n) dr_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{r}\right)^{n-1} \frac{x(r)}{r} dr$$

Hadamard kesirli integrali olarak bilinen yeni bir kesirli işlem türü tanımlamıştır (Hadamard 1892).

$$I_{a+}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{r}\right)^{\alpha-1} \frac{x(r)}{r} dr$$

Kesirli türevler kesirli integral işlemleri kullanarak tanımlanır. Riemann-Liouville kesirli integrali ile başlarsak, kesirli türevler için en önemli tanımlar elde edilir.

Tanım 3.4.1 $\alpha > 0$ olsun ve $n \in \mathbb{N}, \alpha \in (n-1, n)$ olsun. x fonksiyonu için a 'nın sıralı Riemann-Liouville kesirli türevi şöyle tanımlanabilir:

$$D_{a+}^\alpha x(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a+}^{n-\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-r)^{n-\alpha-1} x(r) dr$$

şeklindedir. Caputo kesirli türevi ise şöyle tanımlanır:

$${}^c D_{a+}^{\alpha} x(t) = I_{a+}^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dt} \right)^n x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-r)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dr} \right)^n x(r) dr$$

şeklindedir. Hadamard kesirli türevi ile bölümde ise şu formüle ulaşılır.

$${}^H D_{a+}^{\alpha} x(t) = \left(t \frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{n-\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \left(\ln \frac{t}{r} \right)^{n-\alpha-1} x(r) \frac{dr}{r}$$

şeklinde ifade edilebilir. Son olarak Caputo-Hadamard türevi şu şekilde tanımlanabilir:

$${}^{CH} D_{a+}^{\alpha} x(t) = I_{a+}^{n-\alpha} \left(t \frac{d}{dt} \right)^n x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{r} \right)^{n-\alpha-1} \left(r \frac{d}{dr} \right)^n x(r) \frac{dr}{r}$$

dır (Ricardo 2010).

Katugampola, Riemann-Liouville türünün $p = 1$ olduğu ve Hadamard integralinin $p \rightarrow 0^+$ olduğu yeni bir kesirli integral türü ileri sürmüştür.

Tanım3.4.2 $a, b > 0$ olmak üzere iki gerçektek sayı olsun. $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Sol taraflı ve sağ taraflı Katugampola kesirli integralinin $a > 0$ dizini ve $p > 0$ parametresi sırasıyla şöyle tanımlanmıştır:

$$I_{a+}^{\alpha, p} x(t) = \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t r^{\rho-1} (t^{\rho} - r^{\rho})^{\alpha-1} x(r) dr$$

ve

$$I_{b-}^{\alpha, p} x(t) = \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b r^{\rho-1} (r^{\rho} - t^{\rho})^{\alpha-1} x(r) dr$$

şeklindedir (Katugampola 2014). Ayrıca $a > 0$ için dizinin diferansiyel işlemi $p > 0$ parametresine bağlı olarak şöyle tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}
D_{a+}^{\alpha,\rho} x(t) &= \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{n-\alpha,\rho} x(t) \\
&= \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{n-\alpha-1} x(r) dr
\end{aligned}$$

sol taraflı ve sağ taraflı kesirli türev için şu elde edilir:

$$\begin{aligned}
D_{b-}^{\alpha,\rho} x(t) &= \left(-t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n I_{b-}^{n-\alpha,\rho} x(t) \\
&= \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b r^{\rho-1} (r^\rho - t^\rho)^{n-\alpha-1} x(r) dr
\end{aligned}$$

şeklindedir (Ricardo 2010).

3.5 Caputo-Katugampola Kesirli Türevi ve İntegrali

Kesirli işlemlerin farklı tanımları göz önünde bulundurulduğunda Caputo-Katugampola kesirli türevin tanımı şu şekilde yapılır:

Tanım 3.5.10 $a < b < \infty$ olmak üzere iki reel sayı olsun, p pozitif reel sayı olsun, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olsun, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha \in (n-1, n)$ olsun ve $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ C^n sınıfının bir fonksiyonu olsun. Sol taraflı ve sağ taraflı Caputo-Katugampola kesirli türevinin a dizini için ve p parametresi için tanımları şöyledir (Ricardo 2010).

$$\begin{aligned}
{}^c D_{a+}^{\alpha,\rho} x(t) &= I_{a+}^{n-\alpha,\rho} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n x(t) \\
&= \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{n-\alpha-1} \left(r^{1-\rho} \frac{d}{dr} \right)^n x(r) dr
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
{}^C D_{b-}^{\alpha, \rho} x(t) &= I_{b-}^{n-\alpha, \rho} \left(-t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n x(t) \\
&= \frac{p^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b r^{\rho-1} (r^\rho - t^\rho)^{n-\alpha-1} \left(-r^{1-\rho} \frac{d}{dr} \right)^n x(r) dr
\end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca Katugompola kesirli integralleri sınırlı doğrusal işlemler olduğu için sol taraflı ve sağ taraflı Caputo-Katugompola kesirli türevlerinin $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olduğu açıktır. Bu tanımdan hareketle, sabit bir sayının kesirli türevinin sıfır olduğu da açıktır. Şunu sadeleştirmek için şu formül ortaya çıkar (Ricardo 2010).

$$x_{(n)}(t) = \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n x(t)$$

$C^n[a, b]$, x' 'in bir fonksiyonu olsun, öyle ki $x^{(n)}$ mevcuttur ve $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli dir. Normları $C^n[a, b]$ üzerinde tanımlarız:

$$\|x\|_{C^n}^p = \sum_{k=0}^n \max_{t \in [a, b]} |x^{(k)}(t)|$$

ve

$$\|x\|_C = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$$

şeklinde tanımlanır (Ricardo 2010).

Teorem 3.5.1 Aşağıdaki ilişkiler kurulmuştur:

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^C \square_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) &= x_{(n)}(t), \\
\lim_{\alpha \rightarrow (n-1)^+} {}^C D_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) &= x_{(n-1)}(t) - x_{(n-1)}(a) \\
\lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^C D_{b-}^{\alpha, \rho} x(t) &= (-1)^n x_{(n)}(t), \\
\lim_{\alpha \rightarrow (n-1)^+} {}^C D_{b-}^{\alpha, \rho} x(t) &= (-1)^n (x_{(n-1)}(b) - x_{(n-1)}(t)),
\end{aligned}$$

İspat: İfadeleri birlikte düşünerek:

$$\begin{aligned}
{}^c D_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) &= \frac{p^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{n-\alpha-1} x_{(n)}(r) dr \\
&= \frac{p^{-n+\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} (t^\rho - a^\rho)^{n-\alpha} x_{(n)}(a) \\
&\quad + \frac{p^{-n+\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_a^t (t^\rho - r^\rho)^{n-\alpha} \frac{d}{dr} x_{(n)}(r) dr
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^c D_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) = x_{(n)}(a) + [x_{(n)}(t) - x_{(n)}(a)] = x_{(n)}(t)$$

tanımdan hareketle, ikinci formül için direkt olarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow (n-1)^+} {}^c D_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) &= \int_a^t \frac{d}{dr} x_{(n-1)}(r) dr \\
&= x_{(n-1)}(t) - x_{(n-1)}(a)
\end{aligned}$$

böylece ispat tamamlanır. Diğer iki formülde benzer yoldan ispatlanmıştır (Ricardo 2010).

Teorem 3.5.2 $x \in C^n[a, b]$ fonksiyonunda $t \in [a, b]$ olduğunda şunu elde edilir:

$$| {}^c D_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) | \leq \frac{p^{\alpha-n}}{\Gamma(n+1-\alpha)} \max_{r \in [a, t]} |x_{(n)}(r)| (t^\rho - a^\rho)^{n-\alpha}$$

ve

$$| {}^c D_{b-}^{\alpha, \rho} x(t) | \leq \frac{p^{\alpha-n}}{\Gamma(n+1-\alpha)} \max_{r \in [t, b]} |x_{(n)}(r)| (b^\rho - t^\rho)^{n-\alpha}$$

ayrıca

$${}^c D_{a+}^{\alpha,\rho} x(a) = 0, \quad {}^c D_{b-}^{\alpha,\rho} x(b) = 0$$

dır.

Teorem 3.5.3 ${}^c D_{a+}^{\alpha,\rho}$ ve ${}^c D_{b-}^{\alpha,\rho}$ kesirli türevleri $C^n[a, b]$ ' den $C[a, b]$ 'a sınırlı işlemidir.

$$\| {}^c D_{a+}^{\alpha,\rho} x \|_C \leq K \| x \|_{C^n}^\rho \quad \text{ve} \quad \| {}^c D_{b-}^{\alpha,\rho} x \|_C \leq K \| x \|_{C^n}^\rho$$

iken

$$K = \frac{p^{\alpha-n}}{\Gamma(n+1-\alpha)} (b^\rho - a^\rho)^{n-\alpha}$$

İspat: $t \in [a, b]$ ve $x \in C^n[a, b]$ olduğu göz önünde bulundurulursa $|x_{(n)}(t)| \leq \| x \|_{C^n}^\rho$ olduğunda teorem 3.5.2'deki sonuç şöyledir (Ricardo 2010).

Lemma 3.5.1 $x, y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alınırsa,

$$x(t) = (t^\rho - a^\rho)^v, \quad y(t) = (b^\rho - t^\rho)^v, \quad v > n - 1$$

öyleyse

$${}^c D_{a+}^{\alpha,\rho} x(t) = \frac{p^\alpha \Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\alpha+1)} (t^\rho - a^\rho)^{v-\alpha}$$

ve

$${}^c D_{b-}^{\alpha,\rho} y(t) = \frac{p^\alpha \Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\alpha+1)} (b^\rho - t^\rho)^{v-\alpha}$$

Olur.

İspat: Yalnızca ilk ifadeyi ispat etmek için:

$$x_{(n)}(t) = \frac{p^\alpha \Gamma(v+1)}{\Gamma(v-n+1)} (t^\rho - a^\rho)^{v-\alpha}$$

yazılır. Öyleyse

$$\begin{aligned}
& {}^c D_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) \\
&= \frac{\rho^{\alpha+1} \Gamma(v+1)}{\Gamma(n-\alpha) \Gamma(v-n+1)} (t^\rho - a^\rho)^{n-1-\alpha} \int_a^t r^{\rho-1} \left(1 - \frac{r^\rho - a^\rho}{t^\rho - a^\rho}\right)^{n-1-\alpha} (r^\rho - a^\rho)^{v-n} dr
\end{aligned}$$

Değişkenlerin değiştirilmesiyle $u = (r^\rho - a^\rho)/(t^\rho - a^\rho)$ ve Beta fonksiyonunun özelliğinden

$$B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1} du, \quad x, y > 0$$

şu elde edilir:

$$\begin{aligned}
{}^c D_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) &= \frac{\rho^\alpha \Gamma(v+1)}{\Gamma(n-\alpha) \Gamma(v-n+1)} \left({}^c D_{a+}^{\alpha, \rho} (t^\rho - a^\rho)^v \right)^{v-a} B(n-\alpha, v-n+1)
\end{aligned}$$

bu kullanışlı özellikten faydalanarak:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

formülü ispatlanır.

$${}^c D_{a+}^{\alpha, \rho} (t^\rho - a^\rho)^v = \frac{\rho^\alpha \Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\alpha+1)} (t^\rho - a^\rho)^{v-a}$$

bu bağıntıları kullanarak Mittag-Leffler fonksiyonun kesirli türevi ortaya çıkarılabilir.

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

bütün $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned}
{}^c D_{a+}^{\alpha,\rho} E_a(\lambda(t^\rho - a^\rho)^\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} {}^c D_{a+}^{\alpha,\rho} (t^\rho - a^\rho)^{\alpha k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} {}^c D_{a+}^{\alpha,\rho} (t^\rho - a^\rho)^{\alpha k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1 - \alpha)} (t^\rho - a^\rho)^{\alpha k - \alpha} \\
&= \lambda p^\alpha E_a(\lambda(t^\rho - a^\rho)^\alpha)
\end{aligned}$$

ve

$${}^c D_{b-}^{\alpha,\rho} E_a(\lambda(b^\rho - t^\rho)^\alpha) = \lambda p^\alpha E_a(\lambda(b^\rho - t^\rho)^\alpha)$$

Sıradaki iki sonuç 3.5.1 Tanımdaki sonuçları doğrulamaktadır. Çünkü Caputo-Katugampola kesirli türevi Katugampola kesirli integralinin tersine işlemidir (Ricardo 2010).

Teorem 3.5.4 $x \in C^n[a, b]$ fonksiyonu göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki ifade elde edilir:

$$I_{a+}^{\alpha,\rho} {}^c D_{a+}^{\alpha,\rho} x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{-k}}{k!} (t^\rho - a^\rho)^k x_{(k)}(a)$$

ve

(3.5.1)

$$I_{b-}^{\alpha,\rho} {}^c D_{b-}^{\alpha,\rho} x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{-k} (-1)^k}{k!} (b^\rho - t^\rho)^k x_{(k)}(b)$$

İspat: Daha önceki teoremleri göz önünde bulunduralım.

$$\begin{aligned}
I_{a+}^{\alpha,\rho} {}^c D_{a+}^{\alpha,\rho} x(t) &= I_{a+}^{\alpha,\rho} I_{a+}^{n-\alpha,\rho} x_{(n)}(t) \\
&= I_{a+}^{n,\rho} x_{(n)}(t)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\rho^{1-n}}{(n-1)!} \int_a^t (t^\rho - r^\rho)^{n-1} \frac{d}{dr} x_{(n-1)}(r) dr$$

bu ifadelerin integrali alınırsa;

$$I_{a+}^{\alpha, \rho} {}^c D_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) = \frac{\rho^{2-n}}{(n-2)!} \int_a^t (t^\rho - r^\rho)^{n-2} \frac{d}{dr} x_{(n-2)}(r) dr$$

$$- \frac{\rho^{1-n}}{(n-1)!} (t^\rho - a^\rho)^{n-1} x_{(n-1)}(a)$$

bulunur. Tekrar integralini alarak aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$I_{a+}^{\alpha, \rho} {}^c D_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) = \frac{\rho^{3-n}}{(n-3)!} \int_a^t (t^\rho - r^\rho)^{n-3} \frac{d}{dr} x_{(n-3)}(r) dr$$

$$- \sum_{k=n-2}^{n-1} \frac{\rho^{-k}}{k!} (t^\rho - a^\rho)^k x_{(k)}(a)$$

süreci $n - 3$ defa tekrar edilirse;

$$I_{a+}^{\alpha, \rho} {}^c D_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) = \int_a^t \frac{d}{dr} x(r) dr - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho^{-k}}{k!} (t^\rho - a^\rho)^k x_{(k)}(a)$$

$$= x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{-k}}{k!} (t^\rho - a^\rho)^k x_{(k)}(a)$$

bulunur. İkinci formülde benzer biçimde ispatlanmıştır (Katugampola2011).

$\rho = 1$ alırsak formül (5.4) Caputo halini alır (Kilbas 2006).

$$I_{a+}^{\alpha, \rho} {}^c D_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (t - a)^k x^{(k)}(a)$$

ve $\rho \rightarrow 0^+$ iken $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} (t^\rho - a^\rho)/\rho = \ln(t/a)$ olduğu düşünüldüğünde;

$${}^C I_{a+}^\alpha {}^{CH} D_{a+}^\alpha x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^k \left[\left(t \frac{d}{dt} \right)^k x(t) \right]_{t=a}$$

elde edilir (Ricardo 2010).

Teorem 3.5.5 $x \in C^1[a, b]$ göz önünde bulundurulduğunda;

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \rho} I_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) = x(t)$$

ve

$${}^C D_{b-}^{\alpha, \rho} I_{b-}^{\alpha, \rho} x(t) = x(t)$$

dır.

İspat: Tanım itibarıyla;

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \rho} I_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) = I_{a+}^{n-\alpha, \rho} y_{(n)}(t), y_{(n)}(t) = \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) \quad (3.5.2)$$

doğrudan hesaplandığında ve $\alpha \in (n-1, n)$ için:

$$\begin{aligned} y_{(1)}(t) &= t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{\alpha-1} x(r) dr \\ &= \frac{\rho^{2-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{\alpha-2} x(r) dr \end{aligned}$$

yazılır. Süreci tekrarladığımızda şu ifadeye ulaşılır:

$$\begin{aligned} y_{(n-1)}(t) &= \frac{\rho^{n-\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t \rho r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{\alpha-n} x(r) dr \\ &= \frac{\rho^{n-\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-n+2)} \left[(t^\rho - a^\rho)^{\alpha-n+1} x(a) + \int_a^t (t^\rho - r^\rho)^{\alpha-n+1} \frac{d}{dr} x(r) dr \right] \end{aligned}$$

ve parçaların türevini ayrı ayrı hesaplanırsa;

$$y_{(n)}(t) = t^{1-\rho} \frac{d}{dt} y_{(n-1)}(t)$$

$$= \frac{\rho^{n-\alpha}}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \left[(t^\rho - a^\rho)^{\alpha-n} x(a) + \int_a^t (t^\rho - r^\rho)^{\alpha-n} \frac{d}{dr} x(r) dr \right]$$

olur. Sonrasında bu son ifadeyi (3.5.2) denkleminde yerine yazar ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$${}^c D_{a+}^{\alpha,\rho} I_{a+}^{\alpha,\rho} x(t)$$

$$= \frac{\rho}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)} \left[x(a) \int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{n-\alpha-1} (r^\rho - a^\rho)^{\alpha-n} dr \right.$$

$$\left. + \int_a^t \int_a^r r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{n-\alpha-1} (r^\rho - s^\rho)^{\alpha-n} \frac{d}{ds} x(s) ds dr \right]$$

elde edilir. Değişken değişirmesiyle $u = (r^\rho - a^\rho)/(t^\rho - a^\rho)$

$$\int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{n-\alpha-1} (r^\rho - a^\rho)^{\alpha-n} dr$$

$$= \int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - a^\rho)^{n-\alpha-1} \left(1 - \frac{r^\rho - a^\rho}{t^\rho - a^\rho} \right)^{n-\alpha-1} (r^\rho - a^\rho)^{\alpha-n} dr$$

$$= \frac{1}{\rho} (1-u)^{n-\alpha-1} u^{\alpha-n} du$$

$$= \frac{1}{\rho} B(n-\alpha, \alpha-n+1)$$

$$= \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)}{\rho}$$

İfadesine ulaşılır. Benzer yoldan ve Dirichlet formülünü kullanarak:

$$\begin{aligned}
& \int_a^t \int_a^r r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{n-\alpha-1} (r^\rho - s^\rho)^{\alpha-n} \frac{d}{ds} x(s) ds dr \\
&= \int_a^t \int_a^r s^{\rho-1} (t^\rho - s^\rho)^{n-\alpha-1} (s^\rho - r^\rho)^{\alpha-n} \frac{d}{dr} x(r) ds dr \\
&= \int_a^t \frac{d}{dr} x(r) \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)}{\rho} dr \\
&= \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)}{\rho} (x(t) - x(a))
\end{aligned}$$

bulunur kibu durumda

$$\begin{aligned}
& {}^c D_{a+}^{\alpha,\rho} I_{a+}^{\alpha,\rho} x(t) \\
&= \frac{\rho}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)} \left[x(a) \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)}{\rho} + \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)}{\rho} (x(t) - x(a)) \right] = x(t)
\end{aligned}$$

olur. Burada tekrardan $\rho = 1$ için $\rho \rightarrow 0^+$ iken klasik formüller yeniden elde edilir (Kilbas 2006).

$${}^c D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} x(t) = {}^{cH} D_{a+}^{\alpha} {}^c I_{a+}^{\alpha} x(t) = x(t)$$

böylelikle Katugampola ve Caputo-Katugampola türevleri arasında bağıntı kurulmuş olur (Ricardo 2010).

Teorem 3.5.6 $x \in C^n[a, b]$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$${}^c D_{a+}^{\alpha,\rho} x(t) = D_{a+}^{\alpha,\rho} \left[x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{-k}}{k!} (t^\rho - a^\rho)^k x_{(k)}(a) \right]$$

ve

$${}^c D_{b-}^{\alpha, \rho} x(t) = D_{b-}^{\alpha, \rho} \left[x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{-k} (-1)^k}{k!} (b^\rho - t^\rho)^k x_{(k)}(b) \right]$$

dır.

İspat: Katugampola kesirli türevinin tanımıyla başlayarak ve parçaların integralini alarak:

$$\begin{aligned} & \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{n-\alpha-1} \left[x(r) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{-k}}{k!} (r^\rho - a^\rho)^k x_{(k)}(a) \right] dr \\ &= \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{n-\alpha}}{\rho(n-\alpha)} \left[x_{(1)}(r) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho^{1-k}}{(k-1)!} (r^\rho - a^\rho)^{k-1} x_{(k)}(a) \right] dr \\ &= \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^{n-1} \int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{n-\alpha-1} \left[x_{(1)}(r) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho^{1-k}}{k!} (r^\rho - a^\rho)^{k-1} x_{(k)}(a) \right] dr \end{aligned}$$

yazılır. Benzer şekilde süreci $n - 2$ defa tekrarlandığında;

$$t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{n-\alpha}}{\rho(n-\alpha)} x_{(n)}(r) dr = \int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{n-\alpha-1} x_{(n)}(r) dr$$

olur ve ilk formül ispatlanmış olur. İkincisini de benzer yoldan ulaşılır (Ricardo2010).

Teorem 5.3.6'da ulaşılan formül iki tür kesirli türev işlemi arasında doğrudan ilişki kurmamızı sağlar. Aslında daha önce yapıldığı üzere bu yolla aşağıdaki sonuç ortaya çıkar:

$$D_{a+}^{\alpha, \rho} (t^\rho - a^\rho)^k = \frac{\rho^{-n+\alpha} k!}{\Gamma(n - \alpha + k + 1)} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n (t^\rho - a^\rho)^{n-\alpha+k}$$

ve

$$\left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt}\right)^n (t^\rho - a^\rho)^{n-\alpha+k} = \rho^n \frac{\Gamma(n-\alpha+k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (t^\rho - a^\rho)^{k-\alpha}$$

Buradan da

$${}^c D_{a+}^{\alpha,\rho} x(t) = D_{a+}^{\alpha,\rho} x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{\alpha-k}}{\Gamma(k+1-\alpha)} (t^\rho - a^\rho)^{k-\alpha} x_{(k)}(a)$$

bulunur ve benzer olarak:

$${}^c D_{b-}^{\alpha,\rho} x(t) = D_{b-}^{\alpha,\rho} x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{\alpha-k} (-1)^k}{\Gamma(k+1-\alpha)} (b^\rho - t^\rho)^{k-\alpha} x_{(k)}(b)$$

elde edilir.

Aşağıdaki sonuç parçaların integrallenmesi formülünü oluşturur ve (3.5.2) de ispatlanan $\alpha > 0$ rastgele reel bir sayı olmak üzere formülü genelleştirir (Ricardo, 2010)

Teorem 3.5.7 $x \in C[a, b]$ ve $y \in C^n[a, b]$ olmak üzere iki fonksiyon olsun. Öyleyse;

$$\begin{aligned} \int_a^b x(t) {}^c D_{a+}^{\alpha,\rho} y(t) dt &= \int_a^b D_{b-}^{\alpha,\rho} (t^{1-\rho} x(t)) t^{\rho-1} y(t) dt \\ &+ \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(-t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^k I_{b-}^{n-\alpha,\rho} (t^{1-\rho} x(t)) y_{(n-k-1)}(t) \right]_{t=a}^{t=b} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_a^b x(t) {}^c D_{b-}^{\alpha,\rho} y(t) dt &= \int_a^b D_{a+}^{\alpha,\rho} (t^{1-\rho} x(t)) t^{\rho-1} y(t) dt \\ &+ \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^k I_{a+}^{n-\alpha,\rho} (t^{1-\rho} x(t)) y_{(n-k-1)}(t) \right]_{t=a}^{t=b} \end{aligned}$$

dır.

İspat: İkisi de benzer olduğu için ilkinin ispatlamak yeterlidir. Dirichlet uygulayıp kısmi integrasyon uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
\int_a^b x(t) {}^c D_{a+}^{\alpha, \rho} y(t) dt &= \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b \int_a^t x(t) (t^\rho - r^\rho)^{n-\alpha-1} \frac{d}{dr} y_{(n-1)}(r) dr \\
&= \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b \int_a^t x(r) (r^\rho - t^\rho)^{n-\alpha-1} dr \frac{d}{dt} y_{(n-1)}(t) dt \\
&= \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[\int_t^b x(r) (r^\rho - t^\rho)^{n-\alpha-1} dr y_{(n-1)}(t) \right]_{t=a}^{t=b} \\
&\quad - \frac{\rho^{1-n+\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\int_t^b x(r) (r^\rho - t^\rho)^{n-\alpha-1} dr \right) t^{1-\rho} \frac{d}{dt} y_{(n-2)}(t) dt \\
&= [I_{b-}^{n-\alpha, \rho} (t^{1-\rho} x(t)) y_{(n-1)}(t)]_{t=a}^{t=b} \\
&\quad + \int_a^b -t^{1-\rho} \frac{d}{dt} I_{b-}^{n-\alpha, \rho} (t^{1-\rho} x(t)) \frac{d}{dt} y_{(n-2)}(t) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Parçaların birer kez daha integrali alındığında ve yeniden düzenleme yapılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
\int_a^b x(t) {}^c D_{a+}^{\alpha, \rho} y(t) dt &= \left[\sum_{k=0}^1 \left(-t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^k I_{b-}^{n-\alpha, \rho} (t^{1-\rho} x(t)) y_{(n-k-1)}(t) \right]_{t=a}^{t=b} \\
&\quad + \int_a^b \left(-t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^2 I_{b-}^{n-\alpha, \rho} (t^{1-\rho} x(t)) \frac{d}{dt} y_{(n-3)}(t) dt
\end{aligned}$$

benzer şekilde parçaların n-3 defa integrali alındığında aşağıdaki ve yeniden düzenlenirse:

$$\int_a^b x(t) {}^c D_{a+}^{\alpha, \rho} y(t) dt = \left[\sum_{k=0}^{n-2} \left(-t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^k I_{b-}^{n-\alpha, \rho} (t^{1-\rho} x(t)) y_{(n-k-1)}(t) \right]_{t=a}^{t=b} \\ + \int_a^b \left(-t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^{n-1} I_{b-}^{n-\alpha, \rho} (t^{1-\rho} x(t)) \frac{d}{dt} y(t) dt$$

olur. Formül son integralin üzerine parçaların integralinin alınmasıyla devam eder (Ricardo 2010).

Teorem 3.5.8 u, v integrallenebilen iki fonksiyon olsun ve g sürekli bir fonksiyon olsun. $[a, b]$ tanım kümesi olsun. Varsayalım ki

1. u, v negatif olmayan iki fonksiyon olsun.
2. g negatif olmayan ve azalmayan bir fonksiyon olsun.

Eğer

$$u(t) \leq v(t) + g(t) \rho^{1-\alpha} \int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{\alpha-1} u(r) dr, \quad \forall t \in [a, b]$$

Öyleyse

$$u(t) \leq v(t) + \int_a^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{1-k\alpha} (g(t) \Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(k\alpha)} r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{k\alpha-1} v(r) dr, \\ \forall t \in [a, b]$$

Ayrıca, eğer v azalmıyorsa, bu durumda

$$u(t) \leq v(t) E_\alpha \left[g(t) \Gamma(\alpha) \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right], \forall t \in [a, b]$$

olur.

İspat: Fonksiyonun tanımından

$$\psi x = g(t)\rho^{1-\alpha} \int_a^t r^{\rho-1}(t^\rho - r^\rho)^{\alpha-1} x(r) dr$$

yazılır. öyleyse $u(t) \leq v(t) + \psi u(t)$ benzer şekilde işlem arka arkaya tekrarlayınca $n \in N$ için:

$$u(t) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \psi^k v(t) + \psi^n u(t)$$

olur. Matematiksel bir çıkarımla kanıtlamak gerekirse x negatif olmayan bir fonksiyon ise, bu durumda

$$\psi^k x(t) \leq \rho^{1-k\alpha} \int_a^t \frac{(g(t)\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(k\alpha)} r^{\rho-1}(t^\rho - r^\rho)^{k\alpha-1} x(r) dr$$

$k = 1$ için formülün doğru olduğu açıktır. $k \in N$ için formülün geçerli olduğunu kabul edelim, öyleyse

$$\begin{aligned} \psi^{k+1} x(t) &\leq \psi \psi^k x(t) \\ &\leq g(t)\rho^{1-\alpha} \int_a^t r^{\rho-1}(t^\rho - r^\rho)^{\alpha-1} \rho^{1-k\alpha} \int_a^r \frac{(g(t)\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(k\alpha)} s^{\rho-1}(r^\rho \\ &\quad - s^\rho)^{k\alpha-1} x(s) ds dr \end{aligned}$$

g azalmadığı için, $r \leq t$ iken $g(r) \leq g(t)$ dir. Öyleyse

$$\begin{aligned} \psi^{k+1} x(t) &\leq (g(t))^{k+1} \rho^{2-(k+1)\alpha} \frac{(\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_a^t \int_a^r r^{\rho-1}(t^\rho - r^\rho)^{\alpha-1} s^{\rho-1}(r^\rho \\ &\quad - s^\rho)^{k\alpha-1} x(s) ds dr \end{aligned}$$

Dirichlet formülünü kullanarak ve gerekli düzenlemeri yaparak:

$$\psi^{k+1} x(t)$$

$$\leq (g(t))^{k+1} \rho^{2-(k+1)\alpha} \frac{(\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_a^t r^{\rho-1} x(r) \int_r^t s^{\rho-1} (t^\rho - s^\rho)^{\alpha-1} (s^\rho - r^\rho)^{k\alpha-1} ds dr$$

elde edilir. Teorem 3.5.5'in ispatlanmasındaki benzer yolla şu sonuca ulaşılır:

$$\int_r^t s^{\rho-1} (t^\rho - s^\rho)^{\alpha-1} (s^\rho - r^\rho)^{k\alpha-1} dr = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(k\alpha)}{\rho\Gamma(k\alpha + \alpha)} (t^\rho - r^\rho)^{(k+1)\alpha-1}$$

öyleyse,

$$\psi^{k+1}x(t)$$

$$\leq \rho^{1-(k+1)\alpha} \int_a^t \frac{(g(t)\Gamma(\alpha))^{k+1}}{\Gamma((k+1)\alpha)} r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{(k+1)\alpha-1} x(r) dr$$

böylece ispat tamamlanmıştır(Ricardo 2010).

Şunu kanıtlamak gerekirse $\psi^n u(t) \rightarrow 0$ ve $n \rightarrow \infty$ için öncelikle g 'nin $[a, b]$ aralığında sürekliliğini kullanarak $M > 0$ olmak üzere $g(t) < M$ 'in sabit sayı olduğunu ve $t \in [a, b]$ olduğunun sağlanması yapılmış olur. Öyleyse,

$$0 \leq \psi^n u(t) \leq \rho^{1-n\alpha} \int_a^t \frac{(M\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{n\alpha-1} u(r) dr$$

şu seri düşünüldüğünde;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(M\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)}$$

Oran testini seriye uygularsak ve asimptotik yaklaşımı uygularsak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n\alpha)(n\alpha)^\alpha}{\Gamma(n\alpha + \alpha)} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(n\alpha + \alpha)} = 0$$

böylece seri yakınsanır ve $\psi^n u(t) \rightarrow 0$ olduğunda $n \rightarrow \infty$ için sonuç olarak:

$$u(t) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \psi^k v(t) \leq v(t) + \int_a^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{1-k\alpha} (g(t)\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(k\alpha)} r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{k\alpha-1} v(r) dr$$

elde edilir. İkinci durum için v 'nin azalmadığını farzedelim. Öyleyse her $r \in [a, t]$ ve $v(r) \leq v(t)$ için:

$$\begin{aligned} u(t) &\leq v(t) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{1-k\alpha} (g(t)\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{k\alpha-1} dr \right] \\ &= v(t) \left[1 + \frac{p^{-k\alpha} ((g(t)\Gamma(\alpha))(t^\rho - r^\rho)^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} \right] \\ &= v(t) E_\alpha \left[g(t)\Gamma(\alpha) \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir (Ricardo 2010).

Teorem 3.5.9 u, v integrallenebilen iki fonksiyon olsun ve $g[a, b]$ tanım kümesinde sürekli bir fonksiyon olsun. Varsayalım ki

1. u, v negatif olmayan iki fonksiyon olsun.
2. g negatif olmayan ve artmayan bir fonksiyon olsun.

Eğer

$$u(t) \leq v(t) + g(t)p^{1-\alpha} \int_t^b r^{\rho-1}(r^\rho - t^\rho)^{\alpha-1} u(r) dr, \quad \forall t \in [a, b]$$

öyleyse bu durumda

$$u(t) \leq v(t) + \int_t^b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{1-k\alpha} (g(t)\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(k\alpha)} r^{\rho-1} (r^\rho - t^\rho)^{k\alpha-1} v(r) dr, \\ \forall t \in [a, b]$$

ayrıca v artmayan bir fonksiyon olduğundan bu durumda

$$u(t) \leq v(t) E_\alpha \left[u(t) \Gamma(\alpha) \left(\frac{b^\rho - t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right], \quad \forall t \in [a, b]$$

Gronwall eşitsizliğini kullanarak, iki kesirli diferansiyel denklem arasındaki sonuçlar arasında bağıntı kurabilir.

Aşağıdaki kesirli diferansiyel denklemi göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{cases} {}^c D_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) dt = f(t, x(t)) \\ x^{(i)}(a) = x_a^i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.5.3)$$

buruda $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon iken, $i = 0, 1, \dots, n-1$ için $\alpha \in (n-1, n) \vee x_a^i$ reel sayılardır $I_{a+}^{\alpha, \rho}$ kesirli integral işlemini denklem (3.5.3)'teki kesirli diferansiyel denklemi her iki tarafa da uygulayarak ve Teorem 3.5.4'ü kullanarak:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{-k}}{k!} (t^\rho - a^\rho)^k x_{(k)}(a) + I_{a+}^{\alpha, \rho} f(t, x(t)) \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{-k}}{k!} (t^\rho - a^\rho)^k x_{(k)}(a) \quad (3.5.4)$$

$$+ \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{\alpha-1} f(r, x(r)) dr$$

elde edilir. Buna karşılık diğer taraftan, eğer x denklem (3.5.4) yi sağlarsa bu durumda x denklem (3.5.3) i sağlar. Bu durum ${}^C D_{a+}^{\alpha, \rho}$ kesirli türev işleminin denklem (3.5.4) inin her iki tarafına uygulanmasıyla, Teorem 3.5.5'in kullanılmasıyla ve

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \rho} (t^\rho - a^\rho)^k = 0, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

ve formülünün kullanılmasıyla ispatlanmıştır (Ricardo 2010)

Teorem 3.5.10 $f, g: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere iki sürekli fonksiyon olsun ve x, y aşağıdaki sistemlerin çözümü olsun.

$$\begin{cases} {}^C D_{a+}^{\alpha, \rho} x(t) dt = f(t, x(t)) \\ x^{(i)}(a) = x_a^i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} {}^C D_{a+}^{\alpha, \rho} y(t) dt = f(t, y(t)) \\ x^{(i)}(a) = y_a^i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

farz edelim ki

1. C pozitif bir sayı olsun öyle ki

$$|g(t, y_1) - g(t, y_2)| \leq C |y_1 - y_2|, \quad \forall t \in [a, b] \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

2. $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere sürekli bir fonksiyon olsun, öyle ki

$$|f(t, x(t)) - g(t, x(t))| \leq \psi(t), \quad \forall t \in [a, b]$$

$v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım.

$$v(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{-k}}{k!} (t^\rho - a^\rho)^k |x_{(k)}(a) - y_{(\square)}(a)|$$

$$+ \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{\alpha-1} \psi(r) dr$$

bu durumda $\forall t \in [a, b]$ için

$$|x(t) - y(t)| \leq v(t) + \int_a^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{1-k\alpha} C^k}{\Gamma(k\alpha)} r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{\alpha-1} v(r) dr$$

dır.

İspat: Tanımdan $u(t) = |x(t) - y(t)|$ dır. Öyleyse

$$u(t) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{-k}}{k!} (t^\rho - a^\rho)^k |x_{(k)}(a) - y_{(k)}(a)|$$

$$+ \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{\alpha-1} |f(r, x(r)) - g(r, y(r))| dr$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{-k}}{k!} (t^\rho - a^\rho)^k |x_{(k)}(a) - y_{(k)}(a)|$$

$$+ \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{\alpha-1} (|f(r, x(r)) - g(r, x(r))|$$

$$+ |g(r, x(r)) - g(r, y(r))|) dr$$

olur. Bağlantıları kullanarak

$$|f(r, x(r)) - g(r, x(r))| \leq \psi(r)$$

ve

$$|g(r, x(r)) - g(r, y(r))| \leq C|x(r) - y(r)|$$

ve Gronwall eşitsizliğini kullanarak sonuç kanıtlanır.

Özellikle $g = f$ olduğunda daha basit bir formül olan:

$$|x(t) - y(t)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{-k}}{k!} (t^\rho - a^\rho)^k |x_{(k)}(a) - y_{(k)}(a)|$$

$$+ \int_a^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{1-k\alpha} C^k}{\Gamma(k\alpha)} r^{\rho-1} (t^\rho - r^\rho)^{k\alpha-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{-k}}{k!} (t^\rho - a^\rho)^k |x_{(k)}(a) - y_{(k)}(a)| dr$$

şeklinde elde edilir. Bu bize (3.5.3) sisteminin özgün olduğunu gösterir (Ricardo 2010).

Teorem 3.5.11 $\alpha > 0, m = [\alpha], f, g, h \in AC^m([a, b])$ olmak üzere $f^k(b) = g^k(b) = h^k(b) = 0, k = 1, 2, \dots, m-1$ ve $D_{b-}^\alpha f, D_{b-}^\alpha g, D_{b-}^\alpha h \in L_\infty([a, b])$ olsun. Bu durumda

$$\left| 3 \int_a^b f(x)g(x)h(x) - \int_a^b [f(b)g(x)h(x) + f(x)g(b)h(x) + f(x)g(x)h(b)] dx \right|$$

$$\leq \|D_{b-}^\alpha f\|_\infty I_\alpha^{\alpha+1} |g(b)h(b)|$$

$$+ \|D_{b-}^\alpha g\|_\infty I_\alpha^{\alpha+1} |f(b)h(b)| \quad (3.5.5)$$

$$+ \|D_{b-}^\alpha h\|_\infty I_\alpha^{\alpha+1} |f(b)g(b)|$$

dır.

İspat: $x \in [a, b]$ olsun. O halde:

$$f(x) - f(b) = \frac{1}{\gamma^\alpha} \int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^\alpha f(t) dt \quad (3.5.6)$$

$$g(x) - g(b) = \frac{1}{\gamma^\alpha} \int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^\alpha g(t) dt \quad (3.5.7)$$

$$h(x) - h(b) = \frac{1}{\gamma\alpha} \int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^{\alpha} h(t) dt \quad (3.5.8)$$

olur. Bu üç denklemi sırasıyla $g(x)h(x)$, $h(x)f(x)$ ve $f(x)g(x)$ ile çarpıp ve bunları taraf tarafa toplayarak:

$$\begin{aligned} & 3f(x)g(x)h(x) - f(b)g(x)h(x) - f(x)g(b)h(x) - f(x)g(x)h(b) \\ &= \frac{g(x)h(x)}{\Gamma(\gamma)} \int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^{\alpha} f(t) dt \\ &+ \frac{h(x)f(x)}{\Gamma(\gamma)} \int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^{\alpha} g(t) dt \\ &+ \frac{f(x)g(x)}{\Gamma(\gamma)} \int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^{\alpha} h(t) dt \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

elde edilir. (3.5.8) in her tarafını x 'e göre integralini alarak ve yukarıdaki denklemi yeniden yazarak:

$$\begin{aligned} & 3 \int_a^b f(x)g(x)h(x) - \int_a^b [f(b)g(x)h(x) + f(x)g(b)h(x) + f(x)g(x)h(b)] dx \\ &= \int_a^b \frac{g(x)h(x)}{\Gamma(\gamma)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^{\alpha} f(t) dt \right) \\ &+ \int_a^b \frac{h(x)f(x)}{\Gamma(\gamma)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^{\alpha} g(t) dt \right) \\ &+ \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{\Gamma(\gamma)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^{\alpha} h(t) dt \right) \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

bulunur. (3.5.9) i ve modülün özelliklerini kullanarak:

$$\begin{aligned}
& \left| 3 \int_a^b f(x)g(x)h(x) - \int_a^b [f(b)g(x)h(x) + f(x)g(b)h(x) + f(x)g(x)h(b)]dx \right| \\
&= \int_a^b \frac{|g(x)h(x)|}{\Gamma(\gamma)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} |D_{b-}^{\alpha} f(t) dt| \right) \\
&+ \int_a^b \frac{|h(x)f(x)|}{\Gamma(\gamma)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} |D_{b-}^{\alpha} g(t) dt| \right) \quad (3.5.11) \\
&+ \int_a^b \frac{|f(x)g(x)|}{\Gamma(\gamma)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} |D_{b-}^{\alpha} h(t) dt| \right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Artık şunu gözlemlemek kolaydır.

$$\begin{aligned}
& \left| 3 \int_a^b f(x)g(x)h(x) - \int_a^b [f(b)g(x)h(x) + f(x)g(b)h(x) + f(x)g(x)h(b)]dx \right| \\
&\leq \frac{\|D_{b-}^{\alpha} f\|_{\infty}}{\gamma\alpha} \int_a^b |g(x)h(x)| \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} dt \right) dx \\
&+ \frac{\|D_{b-}^{\alpha} g\|_{\infty}}{\gamma\alpha} \int_a^b |h(x)f(x)| \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} dt \right) dx \\
&+ \frac{\|D_{b-}^{\alpha} h\|_{\infty}}{\gamma\alpha} \int_a^b |f(x)g(x)| \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} dt \right) dx \\
&= \frac{\|D_{b-}^{\alpha} f\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b (b-x)^{\alpha} |g(x)h(x)| dx \quad (3.5.12) \\
&+ \frac{\|D_{b-}^{\alpha} g\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b (b-x)^{\alpha} |h(x)f(x)| dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\|D_{b-}^a h\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_a^b (b-x)^\alpha |f(x)g(x)| dx \\
& = \|D_{b-}^a f\|_\infty I_{\alpha+1}^\alpha |g(b)h(b)| \\
& + \|D_{b-}^a g\|_\infty I_{\alpha+1}^\alpha |h(b)f(b)| \\
& + \|D_{b-}^a h\|_\infty I_{\alpha+1}^\alpha |f(b)g(b)|
\end{aligned}$$

şeklinde ispat tamamlanır (Pachpatte 2012).

Remark 3.5.11 Teorem 3.5.11’de $h(t) = 1, g(t) = 1$ alınırsa $\|D_{b-}^a h\|_\infty = 0, \|D_{b-}^a g\|_\infty = 0$ elde edilir ve bu sonuçtan başka teoremlerde elde edilir (Pachpatte 2012).

Teorem 3.5.12 $\alpha \geq 0, m = [\alpha], f, g, h \in AC^m([a, b])$ olmak üzere $f^k(b) = g^k(b) = h^k(b) = 0, k = 1, 2, \dots, m-1$ ve $D_{b-}^a f, D_{b-}^a g, D_{b-}^a h \in L_1([a, b])$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| 3 \int_a^b f(x)g(x)h(x) - \int_a^b [f(b)g(x)h(x) + f(x)g(b)h(x) + f(x)g(x)h(b)] dx \right| \\
& \leq \|D_{b-}^a f\|_{L_1([a,b])} I_{\alpha+}^\alpha |g(b)h(b)| \\
& + \|D_{b-}^a g\|_{L_1([a,b])} I_{\alpha+}^\alpha |h(b)g(b)| \\
& + \|D_{b-}^a h\|_{L_1([a,b])} I_{\alpha+}^\alpha |f(b)g(b)|
\end{aligned}$$

İspat: (3.5.10)’dan:

$$\begin{aligned}
& \left| 3 \int_a^b f(x)g(x)h(x) - \int_a^b [f(b)g(x)h(x) + f(x)g(b)h(x) + f(x)g(x)h(b)] dx \right| \\
& \leq \int_a^b \frac{|g(x)h(x)|}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} |D_{b-}^a f(t)| dt \right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_a^b \frac{|h(x)f(x)|}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} |D_{b-}^a g(t) dt| \right) dx \\
& + \int_a^b \frac{|f(x)g(x)|}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} |D_{b-}^a h(t) dt| \right) dx \\
& \leq \int_a^b \frac{|g(x)h(x)|}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\alpha-1} \left(\int_x^b |D_{b-}^a f(t) dt| \right) dx \\
& + \int_a^b \frac{|h(x)f(x)|}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\alpha-1} \left(\int_x^b |D_{b-}^a g(t) dt| \right) dx \\
& + \int_a^b \frac{|f(x)g(x)|}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\alpha-1} \left(\int_x^b |D_{b-}^a h(t) dt| \right) dx \\
& = \|D_{b-}^a f\|_{L_1([a,b])} \int_a^b \frac{|g(x)h(x)|}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\alpha-1} dx \\
& + \|D_{b-}^a g\|_{L_1([a,b])} \int_a^b \frac{|h(x)f(x)|}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\alpha-1} dx \\
& + \|D_{b-}^a h\|_{L_1([a,b])} \int_a^b \frac{|f(x)g(x)|}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\alpha-1} dx
\end{aligned}$$

yazılır ve devamında

$$\begin{aligned}
& \leq \|D_{b-}^a f\|_{L_1([a,b])} I_{\alpha+}^\alpha |g(b)h(b)| \\
& + \|D_{b-}^a g\|_{L_1([a,b])} I_{\alpha+}^\alpha |h(b)f(b)| \\
& + \|D_{b-}^a h\|_{L_1([a,b])} I_{\alpha+}^\alpha |f(b)g(b)|
\end{aligned}$$

böylelikle ispat tamamlanmış olur (Pachpatte 2012).

Remark 3.5.12 Teorem 3.5.12’de $h(t) = 1, g(t) = 1$ alınırsa $\|D_{b-}^a h\|_\infty = 0, \|D_{b-}^a g\|_\infty = 0$ elde edilir ve bu sonuçtan başka teoremlerde elde edilir (Pachpatte 2012).



4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde daha önce 3 tane fonksiyon için yapılan Teorem 3.5.11 teoremini n tane fonksiyona genişletilmiştir.

Teorem 4.1.1 $\alpha > 0, m = [\alpha], f_1, f_2, \dots, f_n \in AC^m([a, b])$ olmak üzere $f_1^k(b) = f_2^k(b) = f_3^k(b) = \dots = f_n^k(b) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-1$ ve $D_{b-}^\alpha f_1, D_{b-}^\alpha f_2, \dots, D_{b-}^\alpha f_n \in L_\infty([a, b])$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \left| n \int_a^b f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) dx \right. \\ & \quad \left. - \int_a^b [f_1(b) f_2(x) \dots f_n(x) + f_1(x) f_2(b) \dots f_n(x) + \dots \right. \\ & \quad \left. + f_1(x) f_2(x) \dots f_n(b)] dx \right| \\ & \leq \|D_{b-}^\alpha f_1\|_\infty I_{\alpha+1}^\alpha |f_2(b) f_3(b) \dots f_n(b)| \\ & \quad + \|D_{b-}^\alpha f_2\|_\infty I_{\alpha+1}^\alpha |f_1(b) f_3(b) \dots f_n(b)| \\ & \quad + \|D_{b-}^\alpha f_3\|_\infty I_{\alpha+1}^\alpha |f_1(b) f_2(b) f_4(b) \dots f_n(b)| \\ & \quad \cdot \\ & \quad \cdot \\ & \quad \cdot \\ & \quad + \|D_{b-}^\alpha f_n\|_\infty I_{\alpha+1}^\alpha |f_1(b) f_2(b) \dots f_{n-1}(b)| \end{aligned}$$

dir.

İspat: $x \in [a, b]$ olsun. O halde:

$$f_1(x) - f_1(b) = \frac{1}{\gamma\alpha} \int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^a f_1(t) dt$$

$$f_2(x) - f_2(b) = \frac{1}{\gamma\alpha} \int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^a f_2(t) dt \quad (4.1.1)$$

$$f_3(x) - f_3(b) = \frac{1}{\gamma\alpha} \int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^a f_3(t) dt$$

$$f_n(x) - f_n(b) = \frac{1}{\gamma\alpha} \int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^a f_n(t) dt$$

elde edilir. Şimdi bu denklemleri sırasıyla

$$f_2(x)f_3(x) \dots f_n(x), \quad f_1(x)f_3(x) \dots f_n(x),$$

... , $f_1(x)f_2(x) \dots f_{n-1}(x)$ çarpılıp taraf tarafa toplanırsa;

$$nf_1(x)f_2(x) \dots f_n(x)dx - f_1(b)f_2(x) \dots f_n(x) - f_1(x)f_2(b) \dots f_n(x) - \dots - f_1(x)f_2(x) \dots f_n(b)$$

$$= \frac{f_2(x)f_3(x) \dots f_n(x)}{\Gamma(\gamma)} \int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^a f_1(t) dt$$

$$= \frac{f_1(x)f_3(x) \dots f_n(x)}{\Gamma(\gamma)} \int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^a f_2(t) dt \quad (4.1.2)$$

$$= \frac{f_1(x)f_2(x) \dots f_{n-1}(x)}{\Gamma(\gamma)} \int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^a f_n(t) dt$$

elde edilir. Şimdi (4.1.2) denkleminin her iki tarafının x 'e göre integralini alıp denklem yeniden yazıldığında:

$$\begin{aligned} & n \int_a^b f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) dx \\ & - \int_a^b [f_1(b)f_2(x) \dots f_n(x) + f_1(x)f_2(b) \dots f_n(x) + \dots \\ & + f_1(x)f_2(x) \dots f_n(b)] dx \\ & = \int_a^b \frac{f_2(x)f_3(x) \dots f_n(x)}{\Gamma(\gamma)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^a f_1(t) dt \right) \\ & = \int_a^b \frac{f_1(x)f_3(x) \dots f_n(x)}{\Gamma(\gamma)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^a f_2(t) dt \right) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

.

.

.

$$= \int_a^b \frac{f_1(x)f_2(x) \dots f_{n-1}(x)}{\Gamma(\gamma)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} D_{b-}^a f_n(t) dt \right)$$

elde edilir. Şimdi denklem (4.1.3) 'ü ve modülün özelliklerini kullanarak yeniden düzenlenirse:

$$\begin{aligned}
& \left| n \int_a^b f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) dx \right. \\
& \quad - \int_a^b [f_1(b) f_2(x) \dots f_n(x) + f_1(x) f_2(b) \dots f_n(x) + \dots \\
& \quad \left. + f_1(x) f_2(x) \dots f_n(b)] dx \right| \\
& = \int_a^b \frac{|f_2(x) f_3(x) \dots f_n(x)|}{\Gamma(\gamma)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} |D_{b-}^{\alpha} f_1(t) dt| \right) \\
& = \int_a^b \frac{|f_1(x) f_3(x) \dots f_n(x)|}{\Gamma(\gamma)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} |D_{b-}^{\alpha} f_2(t) dt| \right) \quad (4.1.4) \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& = \int_a^b \frac{|f_1(x) f_2(x) \dots f_{n-1}(x)|}{\Gamma(\gamma)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} |D_{b-}^{\alpha} f_n(t) dt| \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Artık şunu kolaylıkla:

$$\begin{aligned}
& \left| n \int_a^b f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) dx \right. \\
& \quad - \int_a^b [f_1(b) f_2(x) \dots f_n(x) + f_1(x) f_2(b) \dots f_n(x) + \dots \\
& \quad \left. + f_1(x) f_2(x) \dots f_n(b)] dx \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\|D_{b-}^a f_1\|_\infty}{\gamma\alpha} \int_a^b |f_2(x)f_3(x) \dots f_n(x)| \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} dt \right) dx \\
&+ \frac{\|D_{b-}^a f_2\|_\infty}{\gamma\alpha} \int_a^b |f_1(x)f_3(x) \dots f_n(x)| \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} dt \right) dx \\
&\dots \\
&\dots \\
&\dots \\
&+ \frac{\|D_{b-}^a f_n\|_\infty}{\gamma\alpha} \int_a^b |f_1(x)f_2(x) \dots f_{n-1}(x)| \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} dt \right) dx
\end{aligned}$$

yazılabilir ve devamında

$$\begin{aligned}
&= \frac{\|D_{b-}^a f_1\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b (b-x)^\alpha |f_2(x)f_3(x) \dots f_n(x)| dx \\
&+ \frac{\|D_{b-}^a f_2\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b (b-x)^\alpha |f_1(x)f_3(x) \dots f_n(x)| dx \\
&\dots \\
&\dots \\
&\dots \\
&+ \frac{\|D_{b-}^a f_n\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b (b-x)^\alpha |f_1(x)f_2(x) \dots f_{n-1}(x)| dx
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$= \|D_{b-}^a f_1\|_\infty I_{\alpha+}^{\alpha+1} |f_2(b)f_3(b) \dots f_n(b)|$$

$$+\|D_{b-}^a f_2\|_{\infty} I_{\alpha+}^{\alpha+1} |f_1(b) f_3(b) \dots f_n(b)|$$

.

.

.

$$+\|D_{b-}^a f_n\|_{\infty} I_{\alpha+}^{\alpha+1} |f_1(b) f_3(b) \dots f_{n-1}(b)|$$

olduğu görülür. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Remark 4.1.1 Teorem 4.1.1 de $f_2(t) = 1, f_3(t) = 1, \dots, f_n(t) = 1$ alınırsa $\|D_{b-}^a f_2\|_{\infty} = 0, \|D_{b-}^a f_3\|_{\infty} = 0, \dots, \|D_{b-}^a f_n\|_{\infty} = 0$ elde edilir ve bu sonuçtan başka teoremlerde elde edilir.

Şimdi Teorem 3.5.12 'yi n tane fonksiyon için genişletilecektir.

Teorem 4.1.2 $\alpha \geq 0, m = [\alpha], f_1, f_2, \dots, f_n \in AC^m([a, b])$ olmak üzere $f_1^k(b) = f_2^k(b) = f_3^k(b) = \dots = f_n^k(b) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-1$ ve $D_{b-}^a f_1, D_{b-}^a f_2, \dots, D_{b-}^a f_n \in L_1([a, b])$ olsun. Bu durumda

$$\left| n \int_a^b f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) dx - \int_a^b [f_1(b) f_2(x) \dots f_n(x) + f_1(x) f_2(b) \dots f_n(x) + \dots + f_1(x) f_2(x) \dots f_n(b)] dx \right|$$

$$\leq \|D_{b-}^a f_1\|_{L_1([a, b])} I_{\alpha+}^{\alpha} |f_2(b) f_3(b) \dots f_n(b)|$$

$$+\|D_{b-}^a f_2\|_{L_1([a, b])} I_{\alpha+}^{\alpha} |f_1(b) f_3(b) \dots f_n(b)|$$

.

$$+ \|D_{b-}^{\alpha} f_n\|_{L_1([a,b])} I_{\alpha+}^{\alpha} |f_1(b)f_2(b) \dots f_{n-1}(b)|$$

dir.

İspat: Teorem 4.1.1 ‘deki (4.1.4) ‘ü kullanarak:

$$\left| n \int_a^b f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) dx - \int_a^b [f_1(b)f_2(x) \dots f_n(x) + f_1(x)f_2(b) \dots f_n(x) + \dots + f_1(x)f_2(x) \dots f_n(b)] dx \right|$$

$$\leq \int_a^b \frac{|f_2(x)f_3(x) \dots f_n(x)|}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} |D_{b-}^{\alpha} f_1(t) dt| \right) dx$$

$$+ \int_a^b \frac{|f_1(x)f_3(x) \dots f_n(x)|}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} |D_{b-}^{\alpha} f_2(t) dt| \right) dx$$

.

.

.

$$+ \int_a^b \frac{|f_1(x)f_2(x) \dots f_{n-1}(x)|}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_x^b (t-x)^{(\alpha-1)} |D_{b-}^{\alpha} f_n(t) dt| \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_a^b \frac{|f_2(x)f_3(x) \dots f_n(x)|}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\alpha-1} \left(\int_x^b |D_{b-}^a f_1(t) dt| \right) dx \\
&+ \int_a^b \frac{|f_1(x)f_3(x) \dots f_n(x)|}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\alpha-1} \left(\int_x^b |D_{b-}^a f_2(t) dt| \right) dx \\
&\dots \\
&\dots \\
&\dots \\
&+ \int_a^b \frac{|f_1(x)f_2(x) \dots f_{n-1}(x)|}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\alpha-1} \left(\int_x^b |D_{b-}^a f_n(t) dt| \right) dx
\end{aligned}$$

yazılır ve daha sonra

$$\begin{aligned}
&= \|D_{b-}^a f_1\|_{L_1([a,b])} \int_a^b \frac{|f_2(x)f_3(x) \dots f_n(x)|}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\alpha-1} dx \\
&+ \|D_{b-}^a f_2\|_{L_1([a,b])} \int_a^b \frac{|f_1(x)f_3(x) \dots f_n(x)|}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\alpha-1} dx \\
&\dots \\
&\dots \\
&\dots \\
&+ \|D_{b-}^a f_n\|_{L_1([a,b])} \int_a^b \frac{|f_1(x)f_2(x) \dots f_{n-1}(x)|}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\alpha-1} dx
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$= \|D_{b-}^a f_1\|_{L_1([a,b])} I_{\alpha+}^\alpha |f_2(b)f_3(b) \dots f_n(b)|$$

$$+\|D_{b-}^a f_2\|_{L_1([a,b])} I_{a+}^\alpha |f_1(b)f_3(b) \dots f_n(b)|$$

.

.

.

$$+\|D_{b-}^a f_n\|_{L_1([a,b])} I_{a+}^\alpha |f_1(b)f_2(b) \dots f_{n-1}(b)|$$

olur ki böylelikle ispat tamamlanır.

Remark 4.1.2 Teorem 4.1.1 de $f_2(t) = 1, f_3(t) = 1, \dots, f_n(t) = 1$ alınır sa $\|D_{b-}^a f_2\|_\infty = 0, \|D_{b-}^a f_3\|_\infty = 0, \dots, \|D_{b-}^a f_n\|_\infty = 0$ elde edilir ve bu sonuçtan başka teoremlerde elde edilir.

5.TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle Caputo kesirli türev ve Caputo kesirli integral ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca Caputo Katugampola kesirli türevi ile Caputo Katugampola arasındaki ilişkiye değinilmiştir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar Yorum 3.5.11 ve Yorum 3.5.12'den esinlenerek yeni integral özdeşlikleri elde edebilirler.



KAYNAKLAR

- Almedia, R., 2017. Variational Problems Involving a Caputo-Type Fractional Derivative, J. Optim. Theory Appl. (in pres)
- Almeida, R. and Malinowska A.B., and Odziejewicz, T., 2016. Fractional differential equations with dependence on the Caputo-Katugampola dervative, J. Comput. Nonlinear Dynam. 11 No 6, Article number 061017
- Altın, A., 2011. Uygulamalı Matematik, Gazi kitapevi, Ankara.
- Anddrews, L.C.,1985. *Special Functions for Engineers and Applied Mathematicians*, Macmillan, New York.
- Bohner, M. and Matthews, T., 2008. “Ostrowski inequalities on time scales.”*Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, vol. 9, no.1, article 6,8 pages,
- Caputo, M., 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost independent, II, Geopays, J. R., Astron. 13, 529-539
- Chaudhry, M. A and Zubair, S. M., 1994. *Generalized incomplete gamma functions with applications*, J. Comput. Appl. Math. 55, 99-124.
- Chaudhry, M. A and Zubair, S. M., 1995. On the decomposition of generalized incomplete gamma functions with applicitions to Fourier transforms, J. Comput. Appl. Math. 59, 253-284.
- Diethelm K., and Ford, N. J., 2002. Analysis of fractional differential equations, JMAA 265,229-248
- Distefano, J. J. and Stubberud, A. R. and Williams, I. J., 1995. *Schaum's outline of theory and problems of feedback and systems*, Mc Graw Hill.
- Dragomir S.S., 2013. Some Gronwall Type Inequalities and Applications, Nova Science Pub Inc, Hauppauge, NY.
- Giona, M. and Cerbelli, S. and Roman, H. E., 1992. Fractional diffusion equation and relaxation in complex viscoelastic materials, Physica A, 191, 449.

- Glöckle W. G. and Nonnenmacher, T. F., 1995. *A fractional Calculus approach to self similar protein dynamics*, Biophys. J. 68, 46-53
- Hadamard, J. and Taylor, J., 1892. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Math. Pures Appl. 8 101-186
- Hilfer, R., 2000. *Applications of fractional calculus in physics*, World Scientific Singapore.
- Jarad. F. and Abdeljawed, T. and Baleanu D., 2016. Caputo-Type modification of the Hadamard fractional derivatives, Adv. Difference Equ.
- Katugampola, U. N., 2011. New approach to a generalized fractional integral, Appl. Math. Comput. 218, 860-865
- Kumar, P. and Agrawal O.P., 2006. *An approximate method for numerical solution of fractional differential equations*, Signal Processing, 86, 2602-2610
- Kilbas A. A. and Srivastava H.M. and Trujillo Theory, J.J., 2006. Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, North Holland.
- Lakshmikantham, V. S. and Leale, D.J., 2009. Vasundhara, Theory of Fractional Dynamic Systems, Cambridge Scientific Publishers.
- Lakshmikantham, V. and Vatsala, A.S., 2008. *General uniqueness and monotone iterative technique for fractional differential equations*, Appl. Math. Lett., 21, 828-834
- Loverro, A., 2004. Fractional Calculus. History, Definition and Applications for the Engineer, USA.
- Momani, S. and Odibat, Z., 2006. *Application of Variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order*, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 1, 27-34.
- Magin, R. L., 2004. Fractional Calculus in Bioengineering, Critical Reviews in Biomedical Engineering, 32, 11

- Mainardi, F., 1997. Fractional Calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, 291.
- Metzler, R. and Schick, H. G. and Killian, T. F., 1995. Nonnenmacher, Relaxation in filled polymers: A fractional Calculus approach, *J. Chem. Phys.* 103, 7180-7186.
- Miller, K. S. and Ross, B., 1993. *An Introduction to the fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley Sons, New York NY, USA.
- Oldham B., Spanier J., 1974. *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, London.
- Oldham, K.B. and Spanier, J., 1974. *The fractional calculus*, Academic Press, New York.
- Özarslan, M. A. and Özergin, E., 2010 *Some generating relations for extended hypergeometric functions via generalized fractional derivative operator*, *J. Comput. Appl. Math.* 52, 1825-1833.
- Özarslan, M. A. ve Özergin, E. ve Altın, A., 2010. *Extension of gamma, beta and hypergeometric functions*, *J. Comput. Appl. Math.* 235, 4601-4610.
- Pachpatte B.G., 2000. "On an inequality of Ostrowski type in three independent variables," *journal of Mathematical Analysis and Applications*," vol. 249, no.2 pp. 583-591.
- Podlubny I., 1999. *Fractional Differential Equations*, vol. 198, Academic Press, San Diego, Calif, USA.
- Qadir, A., 2007. The generalization of special functions, *Appl. Math. Comput.* 187, 395-402.
- Samko S. G. and Kilbas, A.A. and Marichev, O. I., 1993. *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*, Gordon and Breach, Yverdon.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Ağrı-Hamur Baldere köyünde doğdu. İlköğrenimini köyde orta öğrenimini Ağrı-Tutak'ta ve lise öğrenimini Erzurum-Narman'da tamamladı. 2011 yılında kayıt yaptırdığı Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 2015 yılında Pedagogolojik Formasyon alarak bitirdi. Aynı yıl Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Şimdi Ağrı Merkez Ahmedi Hani Kültür Merkezi'nde öğretmenlik yapmaktadır.

