



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**CRANK-NICOLSON SONLU FARK YÖNTEMİNE BAĞLI STRANG
PARÇALAMA (SPLITTING) METODU İLE BURGERS' DENKLEMİNİN
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

Aydın KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran - 2019
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**CRANK-NICOLSON SONLU FARK YÖNTEMİNE BAĞLI STRANG
PARÇALAMA (SPLITTING) METODU İLE BURGERS' DENKLEMİNİN
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

Aydın KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

Haziran - 2019
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Aydın KAYA tarafından hazırlanan "Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemine Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile Burgers' Denkleminin Sayısal Çözümleri" adlı tez çalışması 18/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Doç. Dr. Erdal KORKMAZ
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik



Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik



Üye

Dr. Öğr. Üyesi Erkan ÇİMEN
Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, MBFE, Matematik Eğitimi



Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu 25/06/2019 Tarih ve 18/15 nolu kararı
ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü



TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.



Aydın KAYA

Haziran -2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CRANK-NICOLSON SONLU FARK YÖNTEMİNE BAĞLI STRANG PARÇALAMA(SPLITTING) METODU İLE BURGERS' DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Aydın KAYA

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

2019, 84 sayfa

Jüri

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU
Jüri Üyesi: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ
Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Erkan ÇİMEN

Dört bölümden oluşan bu tez çalışmasında, Crank-Nicolson sonlu fark yöntemine bağlı Strang parçalama (splitting) metodu ile 1-boyutlu Burgers' denkleminin sayısal çözümleri incelenmiştir.

Birinci bölümde 1-boyutlu Burgers' denklemi hakkında literatürün bir özeti verilmiştir.

İkinci bölümde sonlu fark yöntemleri ve Taylor seri açılımı incelendi. Taylor seri açılımını kullanarak sonlu fark formülleri sunuldu. Burgers' denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı verildi. Hopf-Cole dönüşümü kullanarak 1-boyutlu Burgers' denkleminin iki model problem için analitik çözümleri sunuldu.

Üçüncü bölümde parçalama (splitting) yöntemi hakkında bilgi verildi. Buna bağlı Lie-Trotter ve Strang parçalama (splitting) metotları açıklanmış ve bu yöntemlerin yerel hataları sunulmuştur. Sonlu fark yöntemleri için lineerleştirme teknikleri sunulmuştur.

Dördüncü bölümde farklı lineerleştirme teknikleri ile Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımına bağlı Strang parçalama yöntemi kullanılarak model problemlerin sayısal çözümleri elde edildi. Sayısal çözümler analitik çözümlerle karşılaştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Burgers senklemleri, Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi, Strang parçalama (Splitting) metodu, Taylor seri açılımı.

ABSTRACT

MS THESIS

NUMERICAL SOLUTIONS OF THE BURGERS' EQUATION WITH STRANG SPLITTING METHOD BASED ON CRANK-NICOLSON FINITE DIFERENCE SCHEME

Aydın KAYA

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF MUŞ
ALPARSLAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
MATHEMATICS SCIENCE**

Advisor: Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

2019, 84 Pages

Jury

Advisor : Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

Jury Member: Doç.Dr. Erdal KORKMAZ

Jury Member: Dr. Öğr. Üyesi Erkan ÇİMEN

In this thesis, the numerical solutions of the 1-dimensional Burgers' equation obtained by Strang splitting method based on Crank-Nicolson finite difference scheme have been analyzed in four chapter.

In the first chapter, a summary of the literature about 1-dimensional Burgers' equation has been given.

In the second chapter, finite difference methods and Taylor series expansion are examined. Using the Taylor series expansion, the finite difference formulations are presented. Crank-Nicolson finite difference approach of the Burgers equation has been given. The analytical solution of the 1-dimensional Burgers' equation for two model problems has been obtained by using Hopf-Cole transformation.

In the third chapter, the Lie-Trotter and Strang splitting methods have been explained and their local errors have been presented. Different linearization technique has been presented for finite difference methods.

In the fourth chapter, the numerical solutions of the model problems have been obtained by using Strang splitting method based on the Crank-Nicolson finite difference method and different linearization technique. The numerical solutions have been compared with analytical solutions.

Keywords: Burgers' equation, Crank-Nicolson Finite difference methods, Strang splitting method, Taylor series expansion.

ÖNSÖZ

Sahip olduğum azim çocuklarımın bana olan inançları ile birleşince bu zorlu maratonu başarabildim. Bu maratonda benden tecrübelerini esirgemeyen danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU'na saygılarımı sunuyorum.

Aydın KAYA
18/06/2019



İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
TABLOLAR LİSTESİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	5
2.1. İki Değişkenli Taylor Seri Açılımı	5
2.2. Sonlu Fark Yöntemleri	7
2.3. Temel Kavramlar	9
2.3.1. Kararlılık	9
2.3.2. Fourier seri (von Neumann) Kararlılık Analizi Yöntemi	9
2.3.3. Crout Yöntemi	10
2.4. 1-Boyutlu Burgers' Denkleminin Seri Çözümü	13
2.5. Hopf-Cole Dönüşümü.....	13
2.6. Model Problemler	15
Problem 2.1	15
Problem 2.2.....	18
2.7. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY).....	19
2.7.1. 1-Boyutlu Burgers' Denkleminin CNSFY Yaklaşımı	19
Kararlılık Analizi	20
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	22
3.1. Parçalama (Splitting) Yöntemi	22
3.1.1. Lie-Trotter Parçalama (splitting) Metodu	24
3.1.2. Lie-Trotter Parçalama Yönteminde Hata Analizi	25
3.1.3. Strang Parçalama (Splitting) Metodu	26
3.1.4. Strang Parçalama Yönteminde Hata Analizi.....	27
3.2. 1-Boyutlu Burgers' Denkleminin Parçalaması	28
3.2.1. Viskozitesiz Burgers' Denkleminin Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı (CNSFY)	29
3.2.2. Isı İletim Denkleminin Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı (CNSFY)	32
3.3. Lineerleştirme Teknikleri	34
3.3.1. Viskozitesiz Burgers' Denklemi için Robin-Graves Lineerleştirme Tekniği (RGSFY)	34
3.3.2. Viskozitesiz Burgers' Denkleminin CNSFY1 Yaklaşımı	35
3.3.3. Viskozitesiz Burgers' Denkleminin CNSFY 2 Yaklaşımı	36
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA.....	38

4.1. Burgers' Denkleminin CNSFY ile Nümerik Çözümünün Sonuçları	38
4.2. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemine(CNSFY) Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile 1-Boyutlu Burgers Denkleminin Nümerik Çözümleri.....	45
4.2.1. Strang BAB (S-BAB) Yaklaşımı	45
4.2.2. S-BAB için Nümerik Sonuçlar	45
4.2.3. Strang ABA (S-ABA) Yaklaşımı	52
4.2.4. S-ABA için Nümerik Sonuçlar	52
4.2.5. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemine Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodunun ABA ve BAB Kalıplarının Karşılaştırılması.....	57
4.3. RGSFY 'e Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile 1-Boyutlu Burgers Denkleminin Nümerik Çözümleri	59
4.4. CNSFY 1 Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile 1-Boyutlu Burgers Denkleminin Nümerik Çözümleri	65
4.5. CNSFY 2 Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile 1-Boyutlu Burgers Denkleminin Nümerik Çözümleri	71
4.6. Parçalanmış Burgers' Denkleminin Değişik Lineerleştirme Teknikleri ile Elde Edilmiş Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması.....	77
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	79
KAYNAKÇA	80
ÖZGEÇMİŞ	85

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.Düğüm Noktalarının Gösterimi.....	8
Şekil 4.1.Problem 2.1'in CNSFY ile $\Delta x=0.0125$, $\Delta t =0.00001$, $v=1$ iken t 'nin değişen değerleri için çözüm grafiği.....	41
Şekil 4.2.Problem 2.1'in CNSFY ile $\Delta x=0.0125$, $\Delta t =0.00001$, $v=0.1$ iken t 'nin değişen değerleri için çözüm grafiği.....	42
Şekil 4.3.Problem 2.1'in CNSFY ile $\Delta x=0.0125$, $\Delta t =0.00001$, $v=0.01$ iken t 'nin değişen değerleri için çözüm grafiği	42
Şekil 4.4. $\Delta x=0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v= 1$ değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği.....	48
Şekil 4.5. $\Delta x=0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v= 0.1$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği.....	49
Şekil 4.6. $\Delta x =0.0125$, $\Delta t= 0.00001$, $v=0.0$ 1 iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği	49
Şekil 4.7. $\Delta x=0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v=1$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in RGSFY'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği.....	61
Şekil 4.8. $\Delta x=0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v=0.1$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in RGSFY'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği.....	62
Şekil 4.9. $\Delta x=0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v=0.0$ 1 iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in RGSFY'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği	62
Şekil 4.10. $\Delta x =0.0125$, $\Delta t= 0.00001$, $v=1$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY1'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği.....	67
Şekil 4.11. $\Delta x=0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v=0.1$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY1'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği ..	68
Şekil 4.12. $\Delta x=0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v=0.0$ 1 iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY1'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği ..	68
Şekil 4.13. $\Delta x=0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v= 1$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY2'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği.....	73
Şekil 4.14. $\Delta x =0.0125$, $\Delta t= 0.00001$, $v=0.1$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY2'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği.....	74
Şekil 4.15. $\Delta x=0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v=0.0$ 1 iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY2'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği ..	74

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 4.1. Problem 2.1'in CNSFY ile $t=0.1$, $\Delta t = 0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri	39
Tablo 4.2. Problem 2.1'in CNSFY ile $\Delta t = 0.00001$, $\Delta x = 0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ için değişken t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri.....	40
Tablo 4.3. Problem 2.2'in CNSFY ile $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri	43
Tablo 4.4. Problem 2.2'in CNSFY ile $\Delta t = 0.00001$, $\Delta x = 0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ için değişken t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri.....	44
Tablo 4.5. Problem 2.1'in CNSFY 'ne bağlı Strang Parçalama Metodu BAB'a göre $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri	46
Tablo 4.6. Problem 2.1'in CNSFY'ne bağlı Strang Parçalama Metodu BAB'a göre $\Delta t=0.00001$, $\Delta x = 0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için değişen t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri	47
Tablo 4.7. Problem 2.2 CNSFY 'ne bağlı Strang Parçalama Metodu BAB'a göre $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri.....	50
Tablo 4.8. Problem 2.2'in CNSFY'ne bağlı Strang Parçalama Metodu BAB'a göre $\Delta t=0.00001$, $\Delta x = 0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için değişen t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri	51
Tablo 4.9. Problem 2.1'in CNSFY 'ne bağlı Strang Parçalama Metodu ABA'a göre $t=0.1$, $\Delta t = 0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri	53
Tablo 4.10. Problem 2.1'in CNSFY'ne bağlı Strang Parçalama Metodu ABA'a göre $\Delta t = 0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için değişen t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri	54
Tablo 4.11. Problem 2.2'in CNSFY 'ne bağlı Strang Parçalama Metodu ABA'a göre $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri	55
Tablo 4.12. Problem 2.2'in CNSFY'ne bağlı Strang Parçalama Metodu ABA'a göre $\Delta t = 0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için değişen t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri	56
Tablo 4.13. $t=0.1$, $\Delta t = 0.00001$, $v=1$, $\Delta x=0.0125$ iken Problem 2.1'in Strang Parçalama Metodunun ABA ve BAB çözümlerinin karşılaştırılması	57
Tablo 4.14. $t=0.1$, $\Delta t = 0.00001$, $v=1$, $\Delta x=0.0125$ iken Problem 2.2'in Strang Parçalama Metodunun ABA ve BAB çözümlerinin karşılaştırılması	58
Tablo 4.15. Problem 2.1'in RGSFY ile $t=0.1$, $\Delta t = 0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri	59
Tablo 4.16. Problem 2.1'in RGSFY ile $\Delta t = 0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için analitik ve nümerik çözümleri	60

Tablo 4.17. Problem 2.2'nin RGSFY ile $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri	63
Tablo 4.18. Problem 2.2'nin RGSFY ile $\Delta t =0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için analitik ve nümerik çözümleri	64
Tablo 4.19. Problem 2.1'nin CNSFY1 ile $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri	65
Tablo 4.20. Problem 2.1'in CNSFY1 ile $\Delta t = 0.00001$, $\Delta x= 0.0125$ iken $v=1$, $v= 0.1$, $v= 0.01$ değerleri için analitik ve nümerik çözümleri	66
Tablo 4.21. Problem 2.2'nin CNSFY1 ile $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri	69
Tablo 4.22. Problem 2.2'in CNSFY1 ile $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için analitik ve nümerik çözümleri	70
Tablo 4.23. Problem 2.1'in CNSFY2 ile $t=0.1$, $\Delta t =0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri	71
Tablo 4.24. Problem 2.1'in CNSFY2 ile $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için analitik ve nümerik çözümleri	72
Tablo 4.25. Problem 2.2'nin CNSFY2 ile $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri	75
Tablo 4.26. Problem 2.2'nin CNSFY2 ile $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken t 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri.....	76
Tablo 4.27. $v=1$, $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken problem 2.1'in BAB, RGSFY, CNSFY1, CNSFY2'ün nümerik sonuçlarının karşılaştırması	77
Tablo 4.28. $v=1$, $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken problem 2.2'nin BAB, RGSFY, CNSFY1, CNSFY2'ün nümerik sonuçlarının karşılaştırması	78

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

u_m^n	:	Analitik çözüm
U_m^n	:	Sayısal çözüm
Δt	:	t yönünde zaman adım uzunluğu
Δx	:	x yönünde konum adım uzunluğu
$(m\Delta x, n\Delta t)$	:	Düğüm noktası
L_2	:	Ortalama hata
L_∞	:	Maksimum hata
ν	:	Kinematik viskozite sayısı
$[\cdot, \cdot]$	:	Komütatör
$\ \cdot\ $	:	Öklid normu
$u(x, t)$	:	x ve t değişkenli bir fonksiyon
$t^n (\equiv t_n)$	:	n . zaman adımı
u^n	:	u 'nun n . zaman adımındaki değeri
u_t	:	u 'nun t 'ye göre türevi
u_x	:	u 'nun x 'ye göre türevi

Kısaltmalar

S-ABA	:	Strang parçalamasının ABA yaklaşımı
S-BAB	:	Strang parçalamasının BAB yaklaşımı

1. GİRİŞ

Bu çalışmada sayısal çözümlerini inceleyeceğimiz Burgers' denklemi

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

ilk olarak Burgers' tarafından türbülansın matematiksel modellemesi için önerilmiştir (Burger, 1948). Bu denklem non-lineer konveksiyon ve viskoziteli difüzyon terimi içerdiğinden Navier-Stokes denkleminin basit bir formudur. Ses ve şok dalga teorisi, elastik dalgalar, sayı teorisi, gaz dinamiği, ısı iletimi gibi birçok alanda bu denklem kullanılmıştır. Hopf ve Cole aynı dönemlerde fakat birbirinden bağımsız olarak (1.1) denklemini bazı başlangıç koşulları için Hopf-Cole dönüşümü olarak adlandırılan bir yöntem ile ısı iletim denklemine dönüştürüp analitik çözümünü sundular (Hopf, 1950; Cole, 1951).

Analitik çözümü bilinen Burgers' denklemi, nümerik çözümün analitik çözüme ne kadar yakın olduğunu test edebilen bir non-lineer kısmi diferansiyel denklemdir. Bu yüzden (1.1) Burgers' denkleminin yaklaşık çözümleri birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır.

Hon ve Maon (1998) çalışmasında uzay ayırıklaştırma metodu olarak multiküadrik ve zaman ayırıklaştırması için düşük mertebeden açık sonlu fark yaklaşımı kullanılarak Burgers' denkleminin yaklaşık çözümlerini sunmuşlardır. Kutluay ve ark. (2004) çalışmasında en küçük kareler kuadratik B-spline sonlu eleman metodu kullanılarak Burgers' denkleminin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Burgers' denkleminin yaklaşık çözümlerini bulmak için Kutluay ve Essen (2004) çalışmasında lineerleştirilmiş kapalı sonlu fark metodunu önermişlerdir. Öziş ve ark. (2005) çalışmasında Hopf-Cole dönüşümü ile indirgenmiş Burgers' denklemini yaklaşık olarak çözmek için Galerkin kuadratik B-spline sonlu eleman metodunu kullanmışlar. Gülsu ve Öziş (2005) araştırmasında Burgers' denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için kısıtlanmış Taylor yaklaşımı metodunu uygulamışlardır. Burgers' denklemini Aksan (2005) çalışmasında Galerkin sonlu eleman yöntemi ile yaklaşık olarak çözmüştür. Kadalbajoo ve Awasthi (2006) çalışmasında Burgers' denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark metodu ile elde edilmiş çözümlerini sunmuşlardır. Saka ve Dağ, Kuartik B-spline kollokasyon metodunu kullanılarak Burgers' denkleminin yaklaşık çözümlerini

sunmuşlardır (Saka ve Dağ, 2007). Burgers' denkleminin sayısal çözümü için dördüncü ve altıncı merteye kompakt sonlu fark metodu sırası ile (Lao, 2008; Sari ve Gürarlan, 2009) çalışmalarında önerilmiştir. Pandey ve ark. (2009) çalışmasında Burgers' denklemini ısı denklemine indirgeyerek Douglas sonlu fark yöntemi ile çözmüşlerdir. Burgers' denkleminin yaklaşık çözümleri öngörme-düzeltilme yöntemi kullanılarak Zhang ve Wang (2012) yaptıkları çalışmada elde etmişlerdir. Jiwari (2012) çalışmasında Haar dalgacık yarı-lineer yaklaşımı ile Burgers' denkleminin nümerik çözümlerini sunmuştur. İnan ve Bahadır (2013) yaptıkları çalışmada Burgers' denkleminin yaklaşık çözümleri için kapalı ve full kapalı üssel yöntemlerini önermişlerdir. Burgers' denkleminin sayısal çözümü için Jiwari (2015) çalışmasında yazar Euler kapalı metoduna, yarı lineerleştirmeye ve düzgün Haar dalgacıklarına bağlı bir karma yaklaşık şema sunmuştur. Jiwari ve Alshomraniv (2017) yaptıkları çalışmada modifiye edilmiş trigonometrik kübik B-spline fonksiyonlarını kullanarak Burgers' denkleminin yaklaşık çözümü için yeni bir algoritma önermişlerdir. Seydaoğlu (2019) çalışmasında uzay ayırıştırması için multiküadrik radyal baz fonksiyonu ve zaman integrasyonu için Lie-Grup şemasını kullanılarak Burgers' denkleminin sayısal çözümlerini sunmuştur.

Marchuk (1968) çalışmasında matematiksel fizik problemlerinin çözümü için parçalama metotlarının bazı uygulamalarını vermiştir. Strang (1968) çalışmasında iki uzay değişkenli lineer olamayan başlangıç değer problemlerinin yaklaşık çözümleri için parçalama tekniğini önermiştir. Yoshida (1990) makalesinde Hamiltonyan sistemler için yüksek mertebeden parçalama metotları sunmuştur. Burgers' denkleminin parçalama tekniği ve kübik spline metodu kullanılarak nümerik çözümlerini Jain ve ark. (1992) çalışmasında elde etmişlerdir. İskandar ve Mohsen (1992) yaptıkları çalışmada Burgers' denkleminin yaklaşık çözümü için Crank-Nicolson sonlu fark yöntemine ve Picard yaklaşımına bağlı birinci merteye parçalama yöntemini önermişlerdir. Shankar ve Singh (1995) yaptıkları çalışmada Homojen olmayan iki boyutlu coupled Burgers' denkleminin yaklaşık çözümlerini kübik spline fonksiyonları ile sonlu fark metotlarına bağlı parçalama metodu ile elde etmişlerdir. Rouhi ve Wright (1995) yaptıkları çalışmada sığ akım, Boussinesq ve KdV denklemlerinin yaklaşık çözümü için tek çift parçalama olarak adlandırılan yeni bir parçalama metodunu önermişlerdir. Holden ve Karlsen (1999) çalışmasında genelleştirilmiş KdV denklemi için birinci merteye parçalama metodunun yakınsaklık özelliklerini incelediler. Bhardwaj ve Shankar (2000) yazdıkları makalede Kuintik spline tekniğini ve parçalama metodunu kullanarak düzenli

uzun dalga (RLW) denklemi için yeni bir sonlu fark metodunu geliştirdiler. Blanes ve Moan (2000) çalışmasında zamana bağlı Schrödinger denklemi için yeni dördüncü mertebe parçalama metodunu, Blanes ve Moan (2001) çalışmasında otonom olamayan Hamiltonyan denklemler için parçalama metotlarını sunmuşlardır. Muslu ve Erbay (2003) makalesinde Kompleks modifiye edilmiş KdV denkleminin Fourier dönüşümüne bağlı üç farklı parçalama metodu ile sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Blanes ve Cases (2006) çalışmasında otonom olamayan ayrılabilir dinamik sistemler için yeni dördüncü ve altıncı mertebeden parçalama metotlarını sunmuşlardır. Lubich (2008) çalışmasında lineer olmayan Schrödinger denklemlerinin Strang parçalama metoduna bağlı hata analizini vermiştir. Hansen ve Osterman akış denklemleri için yüksek mertebeden parçalama metotlarını ve yakınsaklık analizlerini sunmuşlardır. Bir yıl sonra yine bu araştırmacılar Lie ve Piceman-Rachford parçalama metotlarının lineer olmayan akış denklemleri için yakınsaklık analizini sunmuşlardır (Hansen ve Ostermann, 2009; Hansen ve Ostermann, 2010). Kosinüs açılımına bağlı diferansiyel tütleme metodu ve parçalama metodu kullanılarak KdV denklemini Saka (2009) çalışmasında sayısal olarak çözmüştür. Seydaoğlu (2010) çalışmasında parçalanmış Burgers' denklemini sonlu fark yöntemlerini kullanarak sayısal çözümlerini elde etmiştir. Blanes ve Cases (2010) çalışmasında diferansiyel denklemler için pozitif reel kısma sahip altıncı mertebe kompleks katsayılı parçalama metotlarını elde ettiler. Holden ve ark.(2011) çalışmasında KdV denkleminin Godunov ve Strang parçalama metotlarına bağlı yakınsaklığını göstermişlerdir. Holden ve Lubich 2013 yılında Burgers' non-lineerliğine sahip kısmi diferansiyel denklemler için Strang parçalama metoduna bağlı yakınsaklık özelliklerini sundular (Holden ve Lubich, 2013). Blanes ve Seydaoğlu (2013) çalışmasında otonom olamayan ayrılabilir parabolik denklemler için pozitif reel kısma sahip yeni yüksek mertebeden parçalama metotlarını elde etmişlerdir. Seydaoğlu (2015) çalışmasında pertürbe edilmiş sistemler için üretilmiş yüksek mertebeden parçalama (splitting) metotlarını kullanarak farklı sınır koşulları altında 1-Boyutlu Burgers' tipi kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini incelemiştir. Aynı araştırmasında spektral, WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) sonlu fark metotlarını kullanmıştır. Seydaoğlu ve ark. (2016) çalışmasında Burgers' denkleminin farklı sınır koşulları için Fourier dönüşümüne, dördüncü mertebe açık ve WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) sonlu fark metotlarına bağlı yüksek mertebeden parçalama metotları ile yaklaşık çözümleri elde etmiştir. Seydaoğlu (2018) çalışmasında

filtreleme tekniği ile Crank-Nicolson sonlu fark metoduna ve Picard yaklaşımına bağlı pertürbe edilmiş denklemler için üretilen ikinci mertebe pozitif katsayılı simetrik parçalama metodu kullanılarak Burgers' denkleminin sayısal çözümlerini sunmuştur. Çelikkaya yaptığı çalışmada Burgers', modifiye edilmiş Burgers' (mBE) ve düzenli dalga (RLW) denklemlerinin sayısal çözümlerini kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemlerine bağlı Strang, dördüncü ve altıncı mertebe ekstrapolasyon parçalama yöntemleri ile elde etmiştir (Çelikkaya, 2018).

Bu çalışmada Burgers' denkleminin iki farklı başlangıç ve sınır koşulları altında farklı lineerleştirme teknikleri kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark yöntemine bağlı Strang parçalama metodu ile sayısal çözümleri elde edilecek ve bu çözümler ile denklemin analitik çözümleri karşılaştırılacaktır.



2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. İki Değişkenli Taylor Seri Açılımı

$U(x, t)$, fonksiyonunun $(x + \Delta x, t + \Delta t)$ noktasındaki Taylor seri açılımı aşağıdaki gibidir.

$$U(x + \Delta x, t + \Delta t) = U(x, t) + \left[\Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t} \right] + \frac{1}{2!} \left[(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\Delta x \Delta t \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right] + \frac{1}{3!} \left[(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + 3(\Delta x)^2 \Delta t \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} + 3\Delta x (\Delta t)^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial t^2} + (\Delta t)^3 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right] + \dots$$

Yukarıdaki Taylor seri açılımında $\Delta t = 0$ olarak alınırsa

$$U(x + \Delta x, t) = U(x, t) + \left[\Delta x \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \frac{1}{2!} \left[(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{3!} \left[(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right] + \dots, \text{ olur.}$$

Yukarıdaki ifadede birinci türev çekilirse

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x + \Delta x, t) - U(x, t)}{(\Delta x)} - \frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \frac{(\Delta x)^3}{4!} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - \dots, \text{ ifadesi bulunur.}$$

$$O(\Delta x) = -\frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \frac{(\Delta x)^3}{4!} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - \dots, \text{ olarak alınırsa}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x + \Delta x, t) - U(x, t)}{(\Delta x)} + O(\Delta x) \text{ ifadesi elde edilir. Bu ifadede}$$

$$U(x, t) = U_m^n, U(x + \Delta x, t) = U_{m+1}^n \text{ olacak şekilde yerine yazarsak}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.1)$$

zaman sabit iki nokta ileri fark formülünü (türeve yaklaşım formülü) bulmuş oluruz. Benzer şekilde $\Delta x = 0$ olarak alınırsa yeni denklem aşağıdaki gibi olur.

$$U(x, t + \Delta t) = U(x, t) + \left[\Delta t \frac{\partial U}{\partial t} \right] + \frac{1}{2!} \left[(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right] + \frac{1}{3!} \left[(\Delta t)^3 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right] + \dots$$

Yukarıdaki ifadeden birinci türevi çekersek

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{(\Delta t)} - \frac{(\Delta t)}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{(\Delta t)^2}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \frac{(\Delta t)^3}{4!} \frac{\partial^4 U}{\partial t^4} - \dots, \text{ ifadesini buluruz.}$$

$$O(\Delta t) = -\frac{(\Delta t)}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{(\Delta t)^2}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \frac{(\Delta t)^3}{4!} \frac{\partial^4 U}{\partial t^4} - \dots, \text{ olarak alınır}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{(\Delta t)} + O(\Delta t) \text{ şeklinde bulunur. Bulduğumuz bu ifadede}$$

$$U(x, t + \Delta x) = U_m^{n+1}, \quad U(x, t) = U_m^n \text{ olarak yerine yazılırsa}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (2.2)$$

iki nokta ileri zaman fark formülü (türe ve yaklaşım formülü) oluşur.

Benzer bir şekilde $U(x, t)$ 'nin $(x \pm \Delta x, t \pm \Delta t)$ ve $(x \pm 2\Delta x, t \pm 2\Delta t)$ noktalarındaki iki değişkenli Taylor seri açılımı yapılırsa aşağıdaki konum zaman fark formülleri diğer bir ifade ile türe ve yaklaşım formülleri bulunur (Uçar, 2005).

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_m^n - U_{m-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad , \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^n - U_m^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad , \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad , \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad , \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_m^n - 2U_{m+1}^n + U_{m+2}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2) \quad , \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2) \quad , \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2) \quad , \quad (2.9)$$

2.2. Sonlu Fark Yöntemleri

Analitik çözümü bulunamayan denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmak amacıyla araştırmacılar birçok nümerik yöntem geliştirmişlerdir. Bu yöntemler arasındaki üstünlük, yöntemin hassasiyetine ve hızına bağlıdır. Son zamanlarda çözümü analitik olarak bulunamayan diferansiyel denklemler doğruluk hassasiyeti yüksek olan bilgisayarlar yardımı ile nümerik yöntemlerle çözülmektedir.

Lineer veya lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin bulunmasında sonlu fark yöntemleri sıklıkla kullanılmaktadır. Yaygın olarak kullanılan sonlu fark yöntemleri Açık, Kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleridir (Özişik ve ark., 2017). Bu tezde sadece Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile ilgileneceğiz.

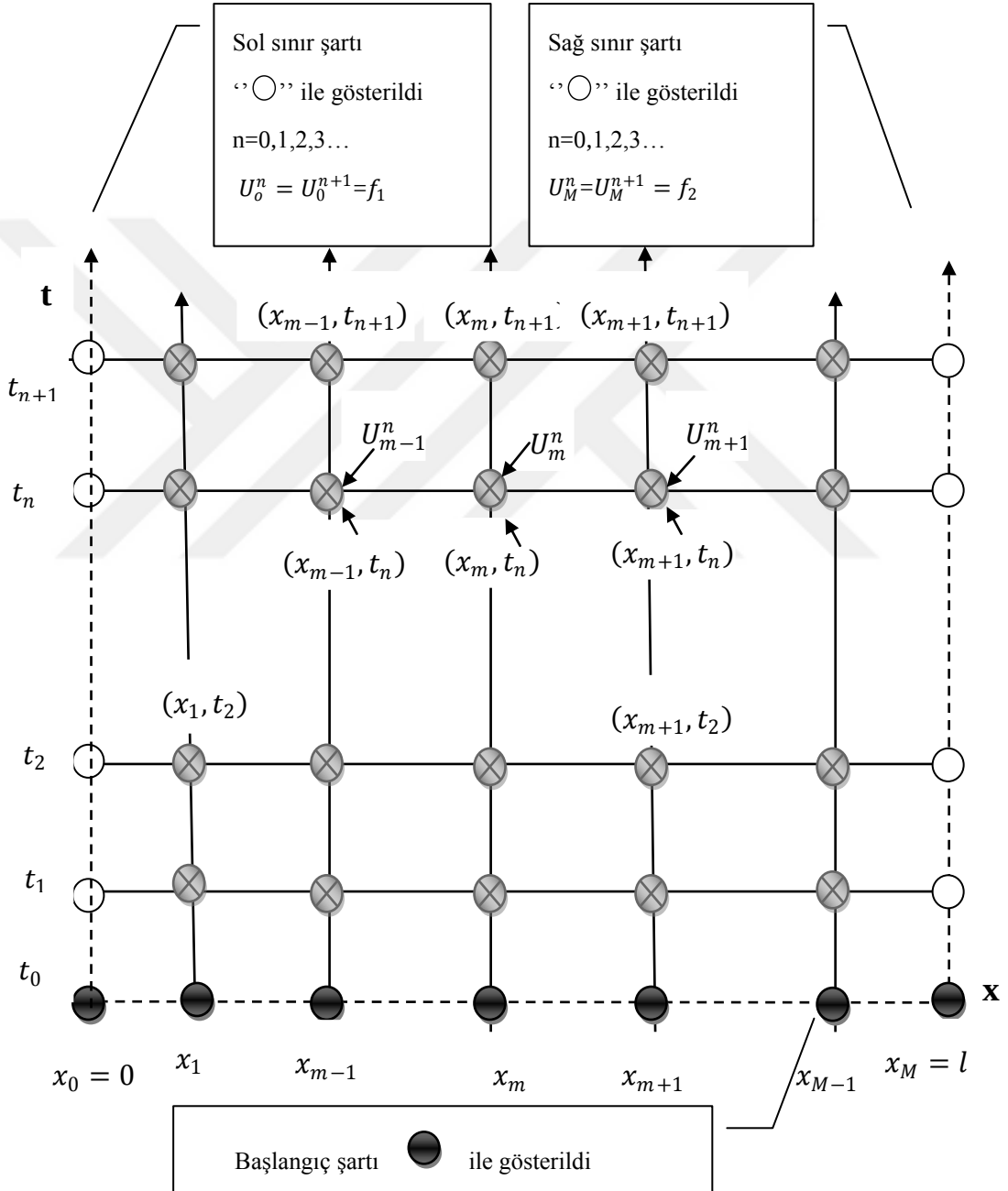
Bir kısmi diferansiyel denklemin sonlu fark yaklaşımı bulunurken öncelikle problemin çözüm bölgesi Şekil 2.1’de gösterildiği gibi genellikle dikdörtgensel şekiller içeren kafeslere bölünür ve problemin yaklaşık çözümü her bir kafesin düğüm noktaları üzerinde hesaplanır. Daha sonra diferansiyel denklemdeki türevler ve sınır şartları yerine uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece diferansiyel denklemlerden oluşan problem, klasik sonlu fark denklemlerinden oluşan bir cebirsel denklem sistemine indirgenmiş olur.

U , x ve t değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olsun. $[0, l] \times [0, \infty)$ yarı açık bölgesinde (x_m, t_n) olarak ifade edilen düğüm noktasında Δx , x yönünde konum adım uzunluğu; Δt , t yönünde zaman adım uzunluğunu gösterebilir.

$$x = x_m = m \Delta x, \quad m = 0(1)M, \quad l = M \cdot \Delta x$$

$$t = t_n = n \Delta t, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$U(x_m, t_n) = U_m^n$ olarak ifade edilir.



Şekil 2.1. Düğüm Noktalarının Gösterimi

2.3. Temel Kavramlar

Bu bölümde konunun ilerleyen kısımlarında kullanacağımız kararlılık, von Neumann kararlılık analizi ve Crout yöntemi kavramlarını inceleyeceğiz.

2.3.1. Kararlılık

Sonlu fark yöntemleri ile çözülen kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde meydana gelen hata miktarında ilerleyen zaman adımlarında artış gözlenmiyorsa kullanılan sonlu fark yöntemi kararlıdır denir (Özişik ve ark., 2017).

2.3.2. Fourier seri (von Neumann) Kararlılık Analizi Yöntemi

Bu yöntem diferansiyel denklemlerin sonlu fark yaklaşımları yazıldıktan sonra elde edilen denklemin hata yayılımına bağlı kararlılığını inceler.

$t \in [0, T]$, zaman aralığında, konum adım uzunluğu $\Delta x \rightarrow 0$ ve zaman adım uzunluğu $\Delta t \rightarrow 0$, $N \cdot \Delta t = T$ olmak üzere $N \rightarrow \infty$ için iki zaman seviyeli $U(x, t)$ 'nin sonlu fark yaklaşım denkleminde $t = 0$ düğüm noktasındaki başlangıç değerleri Fourier seri veya von Neumann metodunun başlangıç değerini ifade eder. Kısmi diferansiyel denklemi değişkenlere ayrılma metoduna benzer bir yöntemle $t = 0$ için Fourier serisine indirgenen bir fonksiyon ele alalım. Bu fonksiyon Fourier seri formunda

$$\sum \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right], \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

$e^{in\pi} = \cos(n\pi) + i \cdot \sin(n\pi)$, $i^2 = -1$ eşitliğinden dolayı yukarıdaki denklemi kolaylık olsun diye

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \quad M \cdot \Delta x = l, \quad i^2 = -1, \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

$$m = 0(1)M, \quad M \cdot \Delta x = l \text{ ve } \theta_n = \frac{n\pi}{l} \text{ olarak alınırsa}$$

$$A_n e^{\frac{in\pi x}{l}} = A_n e^{i\theta_n m \Delta x} \text{ ifadesi elde edilecektir. } t = 0 \text{ pivot noktasına ait başlangıç değeri}$$

$$U(x, 0) = U(m\Delta x, 0) = U_m^0 = \sum_{n=0}^M A_n e^{i\theta_n m \Delta x}, \quad m = 0(1)M, \text{ olarak tanımlanır.}$$

$M+1$ adet denklemin $A_0, A_1, \dots, A_M$ bilinmeyen katsayılarını belirtsin. Bu katsayıların hepsi birer sabit sayı olduğu için ihmal edilebilir. Yani başlangıç değeri kompleks üstel formada yazılabilir. Bunu gösterebilmek için

ω , genellikle bir karmaşık sayı olmak üzere;

$e^{i\beta m \Delta x} = e^{i\theta m \Delta x + \omega t}$, $t = n \cdot \Delta t$, olur. Bu ifadeyi düzenlersek

$e^{i\theta m \Delta x} \cdot e^{\omega t} = e^{i\theta m \Delta x} \cdot e^{\omega n \Delta t} = e^{i\theta m \Delta x} \cdot (e^{\omega \Delta t})^n = e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n$, olarak bulunur.

Burada $|\mu| = \mu = e^{\omega \Delta t}$ olarak alınır ve güçlendirme faktörü olarak adlandırılır.

Lax-Richtmyer tanımına göre sonlu fark denklemini kararlı olabilmesi için $\Delta x \rightarrow 0$ ve $\Delta t \rightarrow 0$ olduğunda $n \leq N$ için başlangıç şartını sağlayan θ değerleri için $|\mathbf{U}_m^n|$ ifadesi sabit olmalıdır. Sonlu fark denkleminin analitik çözümü zamana bağlı üstel biçimde artmıyorsa kararlılık için yeter şart $|\mu| \leq 1$ dir.

Eğer $|\mathbf{U}_m^n|$ zamana bağlı artıyorsa kararlılık için yeter ve gerek şart $K > 0$ sayısı Δx , Δt ve θ 'dan bağımsız olmak üzere $|\mu| \leq 1 + K\Delta t = 1 + O(\Delta t)$, olmalıdır. Bu yöntem l periyotlu ve sabit katsayılı lineer denklemler için uygulanır.

Von Neumann şartı iki veya daha fazla bağımlı değişkene sahip denklemler ile üç veya daha fazla zaman seviyeli denklemler için geçerlidir ancak yeterli olmayabilir (Smith, 1985).

2.3.3. Crout Yöntemi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots a_{2n}x_n = b_2,$$

.

.

.

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots a_{nn}x_n = b_n,$$

denklem sisteminin katsayılar matrisi A olsun. L ve U sırası ile alt ve üst üçgensel matrisler olmak üzere $A = LU$ olarak yazalım.

$Ax = b$, denklem sisteminde $A = LU$ olarak yazılırsa $LUx = b$ denklem sistemi meydana gelir. $Ly = b$, denklem sistemi çözülerek y bulunur. Daha sonra

$Ux = y$ denklem sistemi çözülerek bilinmeyen x 'ler bulunur. Şimdi $A = LU$ ayrıklaştırılmasının nasıl yapıldığına bakalım.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & \dots & . & a_{2n} \\ a_{31} & . & a_{33} & . & \dots & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ a_{(n-1)1} & . & . & . & \dots & . & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ L_{31} & . & L_{33} & 0 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ L_{(n-1)1} & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & . & . & . & . & L_{n(n-1)} & L_{nn} \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & U_{14} & . & . & . & U_{1(n-1)} & U_{1n} \\ 0 & 1 & U_{23} & U_{24} & . & . & . & . & U_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & U_{34} & . & . & . & . & U_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & U_{45} & . & . & . & U_{4n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & U_{5n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & U_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

1.adım:

$$L_{11} = a_{11}, L_{21} = a_{21}, \dots, L_{n1} = a_{n1} \quad (L\text{'nin 1.sütunu})$$

$$U_{12} = \frac{a_{12}}{L_{11}}, U_{13} = \frac{a_{13}}{L_{11}}, U_{14} = \frac{a_{14}}{L_{11}}, \dots, U_{1n} = \frac{a_{1n}}{L_{11}}, \quad (U\text{'nun 1. satırı})$$

2.adım:

$$L_{22} = a_{22} - L_{21}U_{12} ,$$

$$L_{32} = a_{32} - L_{31}U_{12} ,$$

$$L_{42} = a_{42} - L_{41}U_{12} ,$$

$$L_{n2} = a_{n2} - L_{n1}U_{12} \quad (L' \text{nin 2.sütunu}).$$

$$U_{23} = (a_{23} - L_{21}U_{13})/L_{22} ,$$

$$U_{24} = (a_{24} - L_{21}U_{14})/L_{22} ,$$

$$U_{2n} = (a_{2n} - L_{21}U_{1n})/L_{22} \quad (U' \text{nun 2. satırı}).$$

3.adım:

$$L_{33} = a_{33} - L_{31}U_{13} - L_{32}U_{23} ,$$

$$L_{43} = a_{43} - L_{41}U_{13} - L_{42}U_{23} ,$$

$$L_{n3} = a_{n3} - L_{n1}U_{13} - L_{n2}U_{23} \quad (L' \text{nin 3.sütunu}).$$

$$U_{34} = (a_{34} - L_{31}U_{14} - L_{32}U_{24})/L_{33},$$

$$U_{35} = (a_{35} - L_{31}U_{15} - L_{32}U_{25})/L_{33},$$

$$U_{3n} = (a_{3n} - L_{31}U_{1n} - L_{32}U_{2n})/L_{33} \quad (U' \text{nun 3. satırı}).$$

n . adım:

$$L_{n1}U_{1n} + L_{n2}U_{2n} + L_{n3}U_{3n} + \dots + L_{nn}U_{nn} = a_{nn} , \quad (L' \text{nin } n.\text{sütunu})$$

$$U_{nn} = 1 , \quad (U' \text{nun } n. \text{ satırı})$$

Daha genel bir ifadeyle

$$L_{ii} = 1 , \quad L_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk} U_{ki} , \quad j = i+1, i+2, \dots, n$$

$$U_{ji} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj}) / L_{ii} , \quad j = i+1, i+2, \dots, n \quad L_{ii} \neq 0$$

şeklinde gösterilir (Esen ve Bahadır, 1998).

2.4. 1-Boyutlu Burgers' Denkleminin Seri Çözümü

$$U_t + UU_x = vU_{xx} , \quad -\infty < x < +\infty , \quad t > 0$$

şeklindeki Burgers denklemi non-lineer bir denklem olup seri çözümü vardır.

Burgers' (1948) çalışmasında,

$$U = \frac{S(Z)}{\sqrt{t}} , \quad Z = \frac{x}{\sqrt{4vt}}$$

dönüşümünü kullanarak bu denklemi adi diferansiyel denklem tipi olan

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y^2 + g(x)y + h(x) \text{ Ricatti denklemine indirgemeyi başardı.}$$

Hopf (1950) ise,

$$U = -2v \frac{\theta_x}{\theta} , \text{ dönüşümünü uygulayarak Burgers denklemini}$$

$\theta_t = v\theta_{xx}$, şeklindeki ısı iletim denklemine indirgeyerek çözdü (Hopf, 1950; Cole, 1951).

Bu denklemin hiperbolik tanjant yöntemi ile çözümü için bkz. (Malfliet ve Hereman, 1996), (Mızrak ve Ertaş, 2008). Ve gezinen dalga yöntemi ile çözümü için bkz. Doktora tezi (Aslan, 2007).

2.5. Hopf-Cole Dönüşümü

$$U_t + UU_x = vU_{xx} , \quad -\infty < x < +\infty , \quad t > 0$$

$$U(x, t) = U_0(x)$$

başlangıç değer problemini ele alım. θ , x ve t 'ye bağlı bir fonksiyon olmak üzere Burgers' denklemine

$$U = -2v \frac{\theta_x}{\theta} \text{ (Hopf-Cole) dönüşümünü uygulayalım.}$$

Hopf-Cole dönüşümün uygun türevleri:

$$U_t = -2v \frac{\theta_{xt}}{\theta} + 2v \frac{\theta_x \theta_t}{\theta^2},$$

$$U_x = -2v \frac{\theta_{xx}}{\theta} + 2v \frac{(\theta_x)^2}{\theta^2},$$

$$U_{xx} = -2v \frac{\theta_{xxx}}{\theta} + 6v \frac{\theta_x \theta_{xx}}{\theta^2} - 4v \frac{(\theta_x)^3}{\theta^3} \text{ dır.}$$

Bu ifadeler Burgers' denkleminde yerine yazılırsa

$$U_t + UU_x - vU_{xx} = \frac{\theta_{xt}\theta - v\theta\theta_{xxx} - \theta_x\theta_t + v\theta_{xx}}{\theta^2} = 0,$$

$\theta_{tx} = \theta_{xt}$ olduğundan

$$\frac{\theta_{tx}\theta - v\theta\theta_{xxx} - \theta_x\theta_t + v\theta_{xx}}{\theta^2} = \left(\frac{\theta_t - v\theta_{xx}}{\theta} \right)_x = 0 \text{ ifadesi bulunur. Her tarafın } x' \text{ e göre}$$

integrali alınır,

$$\int \left(\frac{\theta_t - v\theta_{xx}}{\theta} \right)_x dx = \int 0. dx ,$$

$$\frac{\theta_t - v\theta_{xx}}{\theta} = c , \quad c = k(t) ,$$

ifadeleri elde edilir. Burada $c = 0$ alınır

$$\theta_t - v\theta_{xx} = 0 \text{ olur.}$$

Bu denklem bir ısı denklemi olup Fourier dönüşümü metodu ile çözümü mevcuttur.

2.6. Model Problemler

Problem 2.1

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0 \quad (\text{Burgers' denklemini})$$

$$\left. \begin{aligned} U(0, t) &= f_1(t) = 0 \\ U(1, t) &= f_2(t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{sınır şartları})$$

$$U(x, 0) = f(x) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{başlangıç şartı})$$

başlangıç ve sınır şartlarına sahip Burgers' denklemini Hopf-Cole dönüşümü ile ısı iletim denklemine dönüştürelim.

$$U(x, 0) = U_0(x) = -2\nu \frac{\theta_x(x, 0)}{\theta(x, 0)} \text{ dır. Bunu düzenlersek}$$

$$\frac{\theta_x(x, 0)}{\theta(x, 0)} = -\frac{1}{2\nu} U_0(x) \text{ olur. Bu ifadede } x \text{ 'e göre integral alırsak}$$

$$\int \frac{\theta_x(x, 0)}{\theta(x, 0)} dx = \int -\frac{1}{2\nu} U_0(x) dx,$$

$$\ln(\theta(x, 0)) = -\frac{1}{2\nu} \int_0^x U_0(s) ds,$$

$$\theta(x, 0) = e^{-\frac{1}{2\nu} \int_0^x U_0(s) ds}, \quad (\text{başlangıç koşulu})$$

$$\theta(x, 0) = e^{-\frac{1}{2\nu} \int_0^x \sin(\pi s) ds} = e^{-\frac{1}{2\nu} (-\cos(\pi x) + 1)} \text{ olur. Ayrıca,}$$

$$U(x, t) = -2\nu \frac{\theta_x(x, t)}{\theta(x, t)} \text{ olduğundan}$$

$$U(0, t) = -2\nu \frac{\theta_x(0, t)}{\theta(0, t)} = 0 \text{ ve } U(1, t) = -2\nu \frac{\theta_x(1, t)}{\theta(1, t)} = 0 \text{ olur. Öyleyse}$$

$$\theta_x(0, t) = 0 \text{ ve } \theta_x(1, t) = 0 \quad (\text{sınır koşulları})$$

elde edilir (Hopf, 1950), (Cole, 1951). Şimdi Burgers' denklemini

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t > 0$$

$$\theta(x, 0) = e^{-\frac{1}{2\pi v}(-\cos(\pi x) + 1)}, \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ (başlangıç şartı)}$$

$$\theta_x(0, t) = 0 \text{ ve } \theta_x(1, t) = 0 \text{ (sınır şartı)}$$

ısı denklemi formuna çevrilmiş oldu. Şimdi bu denklemi çözelim. Değişken ayırıştırma metoduna göre

$\theta(x, t) = X(x).T(t)$ olsun. Bu fonksiyonun aşağıdaki türevlerini

$$\theta_x(x, t) = X'(x).T(t),$$

$$\theta_{xx}(x, t) = X''(x).T(t),$$

$$\theta_t(x, t) = X(x).T'(t), \text{ ısı iletim denkleminde}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \text{ yerine yazarsak}$$

$X(x).T'(t) - v.X''(x).T(t) = 0$, olarak bulunur. Bu ifadeyi yeniden düzenlersek

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \text{ ifadesi elde edilir.}$$

Eşitliğin bir tarafı t 'ye bağlı diğer tarafı x 'e bağlı olduğu için

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = k \text{ ve } k = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

olacak şekilde bir k sabiti vardır. Bu iki ifadeyi düzenlersek

$$T'(t) - kvT(t) = 0 \text{ ve } X''(x) - kX(x) = 0$$

olacak şekilde iki ayrı adi diferansiyel denklem elde edilir. $-k$ sabit sayısı pozitif

$(-k > 0 \text{ veya } -k = \delta^2)$ olmalıdır. Çünkü $T'(t)$ ifadesini çözümü üstel bir ifadedir.

$k = -\delta^2$, olarak alındığında bir çözüme sahip

$$T'(t) + \delta^2 v T(t) = 0 \text{ ve } X''(x) + \delta^2 X(x) = 0, \text{ denklemleri oluşur.}$$

Bu iki ifadeyi yeniden düzenleyip her iki tarafın integralini alalım.

$$\int \frac{T'(t)}{T(t)} dt = \int -v\delta^2 dt \text{ ve } \int X''(x) + \delta^2 X(x) = 0, \text{ adi diferansiyel denklemlerin}$$

$T(t) = A. e^{-\delta^2 vt}$ ve $X(x) = B. \sin(\delta x) + C. \cos(\delta x)$, şeklinde çözümleri bulunur.

$\theta(x, t) = X(x).T(t)$, olduğundan

$\theta(x, t) = A. e^{-\delta^2 vt} [B. \sin(\delta x) + C. \cos(\delta x)]$, şeklinde bir çözüm bulunur.

(A.B=E, A.C = F) olmak üzere yukarıdaki ifadenin x 'e göre türevini alalım.

$$\theta_x(x, t) = e^{-\delta^2 vt} (E. \delta. \cos(\delta x) - F. \delta. \sin(\delta x))$$

İfadesine sınır değerlerini yazarsak

$$\theta_x(0, t) = e^{-\delta^2 vt} (E. \delta. \cos(0) - F. \delta. \sin(0)) = 0 \text{ olduğundan } E=0 \text{ olur.}$$

$$\theta_x(1, t) = e^{-\delta^2 vt} (E. \delta. \cos(\delta) - F. \delta. \sin(\delta)) = 0 \text{ olduğundan } \sin(\delta) = 0 \text{ olur.}$$

Buradan $\delta = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$, olduğu için $\delta_n = \pm n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ olur. Yani;

$$\theta(x, t) = F. e^{-\delta^2 vt} . \cos(n\pi x) ,$$

$$\theta_n(x, t) = F_n. e^{-(n\pi)^2 vt} . \cos(n\pi x) , \quad n= 0, 1, 2, 3, \dots ,$$

$$\theta_0(x, t) = F_0. e^{-(0.\pi)^2 vt} . \cos(0. \pi x) = F_0. e^0 . \cos(0) = F_0 ,$$

$$\theta(x, t) = \theta_0(x, t) + \theta_1(x, t) + \theta_2(x, t) + \dots = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n. e^{-(n\pi)^2 vt} . \cos(n\pi x)$$

oluşan denklemde F_0 ve F_n katsayıları Fourier katsayıları olup

$$F_0 = \int_0^1 \exp\{-(2\pi v)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\} dx ,$$

$$F_n = 2 \int_0^1 \exp\{-(2\pi v)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\} \cos(n\pi x) dx , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde (Cole, 1951; Hopf, 1950).

$U(x, t) = -2v \frac{\theta_x(x, t)}{\theta(x, t)}$, olduğundan problemin analitik çözümü

$$U(x, t) = \frac{2\pi v. \sum_{n=1}^{\infty} F_n. n. e^{-(n\pi)^2 vt} . \sin(n\pi x)}{F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n. e^{-(n\pi)^2 vt} . \cos(n\pi x)} \text{ dir.}$$

Problem 2.2

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0 \quad (\text{Burgers' denklemini})$$

$$\left. \begin{aligned} U(0, t) &= f_1(t) = 0 \\ U(1, t) &= f_2(t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{sınır şartları})$$

$$U(x, 0) = f(x) = 4x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{başlangıç şartı})$$

başlangıç ve sınır şartlarına sahip problem 2.2'nin çözümü model problem 2.1'e benzer şekilde yapılır. Bu probleme Hopf-Cole dönüşümünü uygularsak

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0$$

$$\theta(x, 0) = e^{-\frac{1}{3v}x^2(3-2x)}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{başlangıç şartı})$$

$$\theta_x(0, t) = 0 \quad \text{ve} \quad \theta_x(1, t) = 0 \quad (\text{sınır şartı})$$

şeklinde ısı denklemi formuna çevrilmiş olur. Şimdi bu denklemi değişken ayırıştırma metodu ile çözersek

$$\theta(x, t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot e^{-(n\pi)^2 vt} \cdot \cos(n\pi x), \quad \text{olarak bulunur.}$$

$$U(x, t) = -2v \frac{\theta_x(x, t)}{\theta(x, t)}$$

olduğundan problemin analitik çözümü

$$U(x, t) = \frac{2\pi v \cdot \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot n \cdot e^{-(n\pi)^2 vt} \cdot \sin(n\pi x)}{F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot e^{-(n\pi)^2 vt} \cdot \cos(n\pi x)} \quad \text{dir.}$$

Buradaki F_0 ve F_n Fourier katsayıları olup,

$$F_0 = \int_0^1 \exp\{-x^2(3v)^{-1}[3-2x]\} dx,$$

$$F_n = 2 \int_0^1 \exp\{-x^2(3v)^{-1}[3-2x]\} \cos(n\pi x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{şeklindedirler.}$$

2.7. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY)

2.7.1. 1-Boyutlu Burgers' Denkleminin CNSFY Yaklaşımı

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t},$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = U_m^n \frac{1}{2} \left(\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2 \Delta x} + \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2 \Delta x} \right),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{2(\Delta x)^2},$$

ifadelerini (1.1)'deki Burgers' denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + U_m^n \frac{1}{2} \left[\left(\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2 \Delta x} \right) + \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2 \Delta x} \right) \right] \\ & = v \left[\left(\frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2} \right) + \left(\frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{2(\Delta x)^2} \right) \right] \text{ ifadesi elde edilir.} \end{aligned}$$

Bu denklem yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\Delta x U_m^n + 2v}{4(\Delta x)^2} \right) U_{m-1}^{n+1} + \left(\frac{(\Delta x)^2 + vk}{\Delta t (\Delta x)^2} \right) U_m^{n+1} + \left(\frac{\Delta x U_m^n - 2v}{4(\Delta x)^2} \right) U_{m+1}^{n+1} \\ & = \frac{U_m^n}{\Delta t} - \frac{U_m^n}{4 \Delta x} (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) + \frac{v}{2(\Delta x)^2} (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$m = 1(1)M - 1$, $n = 0(1)N$ yaklaşımı elde edilir.

$r_1 = \frac{\Delta t}{4 \Delta x}$, $r = \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} & U_m^{n+1} + r_1 U_m^n (U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}) - rv (U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}) = \\ & U_m^n - r_1 U_m^n (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) + rv (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) \end{aligned} \quad (2.11)$$

denklemini elde edilir.

Kararlılık Analizi

(2.11) denklemine von Neumann kararlılık analizini uygulamak için $i^2 = -1$ olmak üzere

$$U_m^n = e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n$$

ifadelerini (2.11) denkleminde yerine yazılım.

$$\begin{aligned} & e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} + r_1 \dot{U} [e^{i\theta (m+1) \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} - e^{i\theta (m-1) \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)}] - \\ & rv [e^{i\theta (m-1) \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} - 2e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} + e^{i\theta (m+1) \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)}] = \\ & e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n - r_1 \dot{U} [e^{i\theta (m+1) \Delta x} \cdot (\mu)^n - e^{i\theta (m-1) \Delta x} \cdot (\mu)^n] + \\ & rv [e^{i\theta (m-1) \Delta x} \cdot (\mu)^n - 2e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n + e^{i\theta (m+1) \Delta x} \cdot (\mu)^n] \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Uygun düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned} & e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} [1 + r_1 \dot{U} (e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x}) - rv(e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})] = \\ & e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n [1 - r_1 \dot{U} (e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x}) + rv(e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})] \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buradan μ 'yü çekersek

$$\mu = \frac{1 - r_1 \dot{U} (e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x}) + rv(e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})}{1 + r_1 \dot{U} (e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x}) - rv(e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})} \text{ oluşur.}$$

$$e^{i\theta \Delta x} = \cos(\theta \Delta x) + i\sin(\theta \Delta x),$$

$$e^{-i\theta \Delta x} = \cos(\theta \Delta x) - i\sin(\theta \Delta x), \text{ ifadelerinden}$$

$$e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x} = 2i\sin(\theta \Delta x) \text{ ve } e^{i\theta \Delta x} + e^{-i\theta \Delta x} = 2\cos(\theta \Delta x) \text{ bulunur. Bu ifadeleri}$$

yerine yazarsak

$$\mu = \frac{1 - r_1 \dot{U} 2i\sin(\theta \Delta x) + rv(2\cos(\theta \Delta x) - 2)}{1 + r_1 \dot{U} 2i\sin(\theta \Delta x) - rv(2\cos(\theta \Delta x) - 2)} \text{ olur.}$$

Diğer taraftan

$\cos(\theta\Delta x) = 1 - 2 \sin^2(\frac{\theta\Delta x}{2})$ ifadesini yerine yazarsak

$$\mu = \frac{1 - 2r_1 \dot{U} i \sin(\theta\Delta x) - 4rv \sin^2(\frac{\theta\Delta x}{2})}{1 + 2r_1 \dot{U} i \sin(\theta\Delta x) + 4rv \sin^2(\frac{\theta\Delta x}{2})} \text{ olarak bulunur.}$$

$U_m^n = \dot{U}$ sabiti olarak alınmıştır.

$r_1 > 0$ ve $r > 0$ için $|\mu| \leq 1$, ifadesi her zaman doğru olacaktır. Öyleyse Burgers' denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı şartsız kararlıdır.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Parçalama (Splitting) Yöntemi

Parçalama metotları denklemlerin farklı fiziksel özelliklere sahip alt denklemlere bölünmesi ve her bir denklemin orijinal denklemden daha kolay çözülebilmesi mantığına dayanır. Parçalama metotları hız, hassalık ve kararlılık gibi hesaplamalarda bir takım avantajlar sağlamaktadır. Genellikle açık metotlardır ve uygulanması kolaydır (Strang, 1968). Parçalanmamış denklem yerine parçalanmış her bir denklemi sayısal olarak çözmek kısmi diferansiyel denklemlerinin sayısal çözümleri için sıklıkla tercih edilmektedir (Blanes ve Casas, 2016).

$$\frac{du(t)}{dt} = \widehat{W}(u(t)) = \widehat{A}(u(t)) + \widehat{B}(u(t)), \quad u(0) = u_0, \quad t \in [0, T] \quad (3.1)$$

problemi aşağıdaki gibi

$$\frac{du(t)}{dt} = \widehat{A}(u(t)), \quad (3.2)$$

ve

$$\frac{du(t)}{dt} = \widehat{B}(u(t)), \quad (3.3)$$

alt denklemlere ayrılın. Burada $u(t) \in \mathbb{R}^d$ $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{A} + \widehat{B}$ operatörleri sonlu ya da sonsuz Banach uzayında pozitif değerler için C^0 yarı gruplarını gererler. (1.1)

Burgers' denkleminin yarı ayrıklaştırma sonucunda elde edilen formu (3.1)'e bir örnektir. Lineer olmayan (3.1) denklemi Lie operatörleri kullanılarak görünüşte lineer formda yazılabilir. A ve B operatörleri

$$A = \widehat{A}(u(t)) \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{ve} \quad B = \widehat{B}(u(t)) \frac{\partial}{\partial u}$$

şeklinde $u(t)$ 'ye uygulanan Lie operatörleri olsunlar. O halde (3.1) denklemi

$$\frac{du}{dt} = Au(t) + Bu(t) \quad (3.4)$$

gibi lineer formada ifade edilebilir. (3.4) denklemi

$$\frac{du}{dt} = Au(t) \quad (3.5)$$

$$\frac{du}{dt} = Bu(t) \quad (3.6)$$

iki alt denkleme bölünsün.

$t = n\Delta t$, $\Delta t \rightarrow 0$, için u_n , (3.1) denkleminin çözümü

$u(t) = \psi_W^t(u_0)$ 'ın yaklaşımı olmak üzere,

(3.5) ve (3.6) denklemlerinin yeterince küçük Δt için akışları sırası ile $e^{\Delta t A}$, $e^{\Delta t B}$ şeklinde tanımlansın. O halde zamana göre birinci mertebe Lie-Trotter parçalama metodu

$$u_{n+1} = e^{\Delta t A} \left(e^{\Delta t B} (u_n) \right) \text{ veya } u_{n+1} = e^{\Delta t B} \left(e^{\Delta t A} (u_n) \right) \quad (3.7)$$

ve ikinci mertebe Strang metodu

$$u_{n+1} = e^{\frac{\Delta t}{2} A} \left(e^{\Delta t B} \left(e^{\frac{\Delta t}{2} A} (u_n) \right) \right) \text{ veya } u_{n+1} = e^{\frac{\Delta t}{2} B} \left(e^{\Delta t A} \left(e^{\frac{\Delta t}{2} B} (u_n) \right) \right) \quad (3.8)$$

formlarında verilirler (Blanes ve Casas, 2016).

Öte yandan lineer olmayan durumlar için üstel fonksiyon gösterimine denk olan (3.2), (3.3) denklemlerinin yeterince küçük Δt için akışları sırası ile $\psi_A^{\Delta t}$, $\psi_B^{\Delta t}$ dönüşümleri ile de tanımlanabilmektedir. Bu durumda (3.7) metoduna denk

$$u_{n+1} = \psi_A^{\Delta t} \left(\psi_B^{\Delta t} (u_n) \right) \text{ veya } u_{n+1} = \psi_B^{\Delta t} \left(\psi_A^{\Delta t} (u_n) \right)$$

$n = 0, 1, 2, 3 \dots$, ve (3.8) metoduna denk olan

$$u_{n+1} = \psi_A^{\frac{\Delta t}{2}} \left(\psi_B^{\Delta t} \left(\psi_A^{\frac{\Delta t}{2}} (u_n) \right) \right) \text{ veya } u_{n+1} = \psi_B^{\frac{\Delta t}{2}} \left(\psi_A^{\Delta t} \left(\psi_B^{\frac{\Delta t}{2}} (u_n) \right) \right)$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$, metotları yazılabilir. (1.1) Burgers' denklemi için operatörler

$\hat{A}(u) = v u_{xx}$ ve $\hat{B}(u) = u u_x$ şeklinde olurlar (Holden ve ark., 2013).

3.1.1. Lie-Trotter Parçalama (splitting) Metodu

$$\frac{du}{dt} = Wu(t), \quad u(0) = u_0,$$

$$t \in [t^n, t^{n+1}], \quad n = 0(1)N - 1$$

$$t^N = T \quad \text{ve} \quad t^0 = 0$$

Cauchy probleminde $W=A+B$ olarak alırsa

$$\frac{du}{dt} = (A + B)u(t), \quad u(0) = u_0, \quad (3.9)$$

ifadesi oluşur. Bu ifadeyi ayrıklaştırıp yeniden düzenlersek aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d u_1(t)}{dt} &= A u_1(t), \quad t \in [t^n, t^{n+1}] \\ u_1(t^n) &= u_0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{d u_2(t)}{dt} &= B u_2(t), \quad t \in [t^n, t^{n+1}] \\ u_2(t^n) &= u_1(t^{n+1}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$n=0,1,2,3, \dots, N-1, \quad t^N = T \quad \text{ve} \quad t^0 = 0$$

Birinci operatörü orijinal problemin başlangıç koşulu ile çözdükten sonra oluşan çözüm kümesi ikinci operatörün başlangıç koşulu olarak kabul edilir. İkinci operatör oluşan yeni başlangıç koşulu ile birlikte çözülmesi durumunda aslında orijinal problem çözülmüş olur.

(3.10) ve (3.11) denklemlerini ardı ardına çözülmesi ile (3.9) denkleminin çözümü elde edilir.

3.1.2. Lie-Trotter Parçalama Yönteminde Hata Analizi

Bu kısımda Lie-Trotter parçalama yönteminin lokal hatasını inceleyeceğiz.

- i) Orijinal denklemin çözümü $u(t) = e^{(A+B)t}$ dir.
- ii) Lie-Trotter yöntemi ile parçaladığımız denklemin çözümü ise $e^{At} \cdot e^{Bt}$ dır.

Yukarıdaki bu iki ifadenin farkı bize hata miktarını verir. Yani toplam hata

$$e^{(A+B)t} - e^{At} \cdot e^{Bt} \text{ olarak bulunur.} \quad (3.12)$$

$t^{n+1} - t^n = \Delta t$ olmak üzere $t \rightarrow \Delta t$ olarak (3.12) denkleminde yerine yazalım.

Oluşan denklemi Taylor seri

$$\frac{e^{(A+B)\Delta t}}{\Delta t^k} - \frac{e^{A\Delta t}}{\Delta t^k} \cdot \frac{e^{B\Delta t}}{\Delta t^k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} (A+B)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} (A)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} (B)^k$$

formunda yazalım. Buradan da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} (A+B)^k = (I + \Delta t (A+B) + \frac{\Delta t^2}{2!} (A+B)^2 + \dots + O(\Delta t^3)),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} (A)^k = (I + \Delta t A + \frac{\Delta t^2}{2!} A^2 + \dots + O(\Delta t^3)),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} (B)^k = (I + \Delta t B + \frac{\Delta t^2}{2!} B^2 + \dots + O(\Delta t^3)), \text{ dır.}$$

Şimdi yukarıdaki denklemleri yeniden düzenlersek

$$(I + \Delta t (A+B) + \frac{\Delta t^2}{2!} (A+B)^2 + \dots + O(\Delta t^3)) - [(I + \Delta t A + \frac{\Delta t^2}{2!} A^2 + \dots + O(\Delta t^3))$$

$$(I + \Delta t B + \frac{\Delta t^2}{2!} B^2 + \dots + O(\Delta t^3))],$$

$$\Rightarrow (I + \Delta t (A+B) + \frac{\Delta t^2}{2!} (A+B)^2 + \dots + O(\Delta t^3)) - [I + \Delta t (A+B) +$$

$$\Delta t^2 (\frac{A^2}{2} + BA + \frac{A^2}{2}) + O(\Delta t^3)],$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (I + \Delta t (A + B) + \frac{\Delta t^2}{2!} (A + B)^2 + \dots + O(\Delta t^3)) - \\
&[I + \Delta t (A + B) + \frac{\Delta t^2}{2} (A^2 + 2BA + B^2) + O(\Delta t^3)] \\
&= \frac{\Delta t^2}{2} ((A + B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2)) + O(\Delta t^3) \\
&= \frac{\Delta t^2}{2} [(A^2 + AB + BA + B^2) - (A^2 + 2BA + B^2)] + O(\Delta t^3) \\
&= \frac{\Delta t^2}{2} (AB - BA) + O(\Delta t^3) \text{ olarak bulunur.} \\
&[A, B] = AB - BA \text{ olduğundan toplam hata } \frac{(\Delta t)^2}{2} [A, B] + O(\Delta t^3) \text{ olarak bulunur.} \\
&H_n \text{ lokal hata olmak üzere toplam hata} \\
&\Delta t \cdot H_n = \frac{(\Delta t)^2}{2} [A, B] + O(\Delta t^3) \text{ olur. Bu ifadeden lokal hatayı çekersek} \\
&H_n = \frac{\Delta t}{2} [A, B] u(t^n) + O(\Delta t^2) \tag{3.13}
\end{aligned}$$

olarak bulunur (Strang, 1968).

3.1.3. Strang Parçalama (Splitting) Metodu

Bu yöntemde zaman aralığı iki eşit parçaya bölünmüştür. Bu yöntemi uygulamak için sırası ile aşağıdaki adımlar gerçekleştirilir.

- i) Birinci zaman aralığında A operatörü ile
- ii) Tam zaman aralığında B operatörü ile
- iii) İkinci zaman aralığında A operatörü ile çözüm yapılır.

Strang parçalanması sistematığı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\frac{d u_1(t)}{dt} &= A u_1(t), \quad t \in [t^n, t^{n+1/2}] \\
u_1(t^n) &= u_0 \tag{3.14}
\end{aligned}$$

$$\frac{d u_2(t)}{dt} = B u_2(t), \quad t \in [t^n, t^{n+1}]$$

$$u_2(t^n) = u_1(t^{n+1/2}) \quad (3.15)$$

$$\frac{d u_3(t)}{dt} = A u_3(t), \quad t \in [t^{n+1/2}, t^{n+1}]$$

$$u_3(t^{n+1/2}) = u_2(t^{n+1}), \quad (3.16)$$

$n=0,1,2,\dots,N-1$, $t^0 = 0$, $t^N = T$, $t^{n+1} - t^n = \Delta t$ ve $t^{n+1/2} - t^n = \frac{\Delta t}{2}$ dır.

(3.14) operatörü orijinal problemin başlangıç koşulu ile $\frac{\Delta t}{2}$ için çözüldükten sonra oluşan çözüm kümesi (3.15) operatörün başlangıç koşulu olarak kabul edilir.

(3.15) operatörü oluşan yeni başlangıç koşulu ile Δt için çözülür. Oluşan yeni çözüm kümesi tekrar (3.16) operatörün başlangıç koşulu olarak kabul edilir.

(3.16) operatörü oluşan yeni başlangıç koşulu ile $\frac{\Delta t}{2}$ için çözülmesi ile oluşan çözüm orijinal denklemin yaklaşık çözümleridir.

3.1.4. Strang Parçalama Yönteminde Hata Analizi

Daha önce kullandığımız Lie-Trotter hata analizi yöntemini burada tekrar kullanacağız. Toplam hata

$$\Delta t \cdot H_n = e^{(A+B)\Delta t} - e^{\frac{A}{2}\Delta t} \cdot e^{B\Delta t} \cdot e^{\frac{A}{2}\Delta t} \quad (3.17)$$

dir. Yerel hata ise;

$$H_n = \frac{1}{\Delta t} [e^{(A+B)\Delta t} - e^{\frac{A}{2}\Delta t} \cdot e^{B\Delta t} \cdot e^{\frac{A}{2}\Delta t}] \text{ şeklindedir. Şimdi bunu düzenleyelim}$$

$$e^{(A+B)\Delta t} = (I + \Delta t (A+B) + \frac{\Delta t^2}{2!} (A+B)^2 + \dots + O(\Delta t^3)),$$

$$e^{\frac{A}{2}\Delta t} = (I + \Delta t \frac{A}{2} + \frac{\Delta t^2}{2!} (\frac{A}{2})^2 + \dots + O(\Delta t^3)),$$

$e^{B\Delta t} = (I + \Delta t B + \frac{\Delta t^2}{2!} B^2 + \dots + O(\Delta t^3))$ ifadelerini (3.17)'de yerine yazarsak

$$(I + \Delta t (A+B) + \frac{\Delta t^2}{2!} (A+B)^2 + \dots + O(\Delta t^3)) - (I + \Delta t \frac{A}{2} + \frac{\Delta t^2}{2!} (\frac{A}{2})^2 + \dots + O(\Delta t^3)),$$

$$(I + \Delta t B + \frac{\Delta t^2}{2!} B^2 + \dots + O(\Delta t^3))(I + \Delta t \frac{A}{2} + \frac{\Delta t^2}{2!} (\frac{A}{2})^2 + \dots + O(\Delta t^3)) \text{ denklemi elde edilir.}$$

Bu ifade düzenlenirse

$$H_n = \frac{\Delta t^2}{12} [B, [B, A]] u(t^n) - \frac{\Delta t^2}{24} [A, [A, B]] u(t^n) + O(\Delta t^3) \quad (3.18)$$

olarak bulunur (Strang, 1968).

3.2. 1-Boyutlu Burgers' Denkleminin Parçalaması

(1.1)'deki Burgers' denklemi,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (\text{Viskozitesiz Burgers Denklemi}) \quad (3.19)$$

ve

$$\frac{\partial U}{\partial t} = v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (\text{Isı İletim Denklemi}) \quad (3.20)$$

gibi iki alt denkleme parçalayalım. Parçalanmış Burgers' denkleminin alt denklemleri art arda çözülür. Böylece orijinal denklemin yaklaşık çözümleri elde edilir. Burada operatörler

$$B(u) = U \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{ve} \quad A(u) = v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \text{ şeklindedir.}$$

3.2.1. Viskozitesiz Burgers' Denkleminin Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı (CNSFY)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} + O(\Delta x) ,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x) ,$$

yukarıdaki iki denklemi taraf tarafa toplarsak

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right\} + O(\Delta x) \quad (3.21)$$

ifadesi elde edilir. (2.2) ve (3.21) ifadelerini $O(\Delta t)$ ve $O(\Delta x)$ ihmal etmek şartı ile (3.19)'daki viskozitesiz Burgers' denkleminde yerine yazarsak

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + U_m^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right\} = 0 \text{ şeklinde fark şeması elde edilir.}$$

Burada $r_1 = \frac{\Delta t}{4\Delta x}$ alıp, denklemi yeniden düzenleyip yazarsak

$$U_m^{n+1} + r_1 U_m^n (U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}) = U_m^n - r_1 U_m^n (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) \quad (3.22)$$

olacak şekilde Crank-Nicolson sonlu fark yöntemini bulmuş oluruz (Smith, 1985).

Bu denklemi yeniden düzenlersek

$$U_{m-1}^{n+1} (-r_1 U_m^n) + U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1} (r_1 U_m^n) = U_{m-1}^n (r_1 U_m^n) + U_m^n + U_{m+1}^n (-r_1 U_m^n) \quad (3.23)$$

olarak bulunur. Burada $m = 1(1)M - 1$, $n = 0(1)N$ alınırsa aşağıdaki denklem sistemi oluşur.

$$m = 1 \text{ için } \overbrace{U_0^{n+1}(-r_1 U_1^n)}^{f_1} + U_1^{n+1} + U_2^{n+1}(r_1 U_1^n) = \overbrace{U_0^n(r_1 U_1^n)}^{f_1} + U_1^n + U_2^n(-r_1 U_1^n),$$

$$m = 2 \text{ için } U_1^{n+1}(-r_1 U_2^n) + U_2^{n+1} + U_3^{n+1}(r_1 U_2^n) = U_1^n(r_1 U_2^n) + U_2^n + U_3^n(-r_1 U_2^n),$$

$$m = 3 \text{ için } U_2^{n+1}(-r_1 U_3^n) + U_3^{n+1} + U_4^{n+1}(r_1 U_3^n) = U_2^n(r_1 U_3^n) + U_3^n + U_4^n(-r_1 U_3^n),$$

$m = M-1$ için

$$U_{M-2}^{n+1}(-r_1 U_{M-1}^n) + \overbrace{U_{M-1}^{n+1}}^{f_2} + U_M^{n+1}(r_1 U_{M-1}^n) = U_{M-2}^n(r_1 U_{M-1}^n) + U_{M-1}^n + \overbrace{U_M^n(-r_1 U_{M-1}^n)}^{f_2},$$

Burada U_M^{n+1} değerlerini elde edilinceye kadar işlem devam edilir ve denklem sistemi çözülür. Şimdi bu denklem sistemini

$$U_0^n = U_0^{n+1} = f_1 = 0,$$

$$U_M^n = U_M^{n+1} = f_2 = 0, \text{ şartına bağlı aşağıdaki gibi matris formunda yazalım.}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & r_1 U_1^n & & \\ -r_1 U_2^n & 1 & r_1 U_2^n & \\ & & \ddots & \\ & & & -r_1 U_{M-2}^n & 1 & r_1 U_{M-2}^n \\ & & & -r_1 U_{M-1}^n & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -r_1 U_1^n & & \\ r_1 U_2^n & 1 & -r_1 U_2^n & \\ & & \ddots & \\ & & & r_1 U_{M-2}^n & 1 & -r_1 U_{M-2}^n \\ & & & r_1 U_{M-1}^n & 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-2}^n \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} r f_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r f_2 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

$A \underline{U}^{(n+1)} = B \underline{U}^{(n)} + \underline{b}$ şeklindeki matrisi elde edilir. Burada A, B, $\underline{U}^{(n)}$, $\underline{b}$ matrisleri bilinen ve $\underline{U}^{(n+1)}$ bilinmeyen değerlerdir.

Kararlılık Analizi

(3.22) denklemin von Neumann kararlılık analizini uygulamak için $i^2 = -1$ olmak üzere

$$U_m^n = e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n$$

ifadeleri (3.22) denkleminde yerine yazılırsa

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} + r_1 \dot{U}[e^{i\theta(m+1)\Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} - e^{i\theta(m-1)\Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)}] =$$

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n - r_1 \dot{U}[e^{i\theta(m+1)\Delta x} \cdot (\mu)^n - e^{i\theta(m-1)\Delta x} \cdot (\mu)^n] \text{ olur. Buradan}$$

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} [1 + r_1 \dot{U}(e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x})]$$

$$= e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n [1 - r_1 \dot{U}(e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x})] \text{ olur.}$$

Yukarıdaki ifadeyi düzenlersek

$$\mu [1 + r_1 \dot{U}(e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x})] = [1 - r_1 \dot{U}(e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x})] ,$$

$$\mu = \frac{1 - r_1 \dot{U}(e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x})}{1 + r_1 \dot{U}(e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x})} \text{ bulunur.}$$

$$e^{i\theta \Delta x} = \cos(\theta \Delta x) + i \sin(\theta \Delta x),$$

$$e^{-i\theta \Delta x} = \cos(\theta \Delta x) - i \sin(\theta \Delta x),$$

Bilinen eşitliklerden

$$e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x} = 2i \sin(\theta \Delta x) \text{ ifadesi bulunur.}$$

Bu ifadeyi yerine yazarsak

$$\mu = \frac{1 - r_1 \dot{U} 2i \sin(\theta \Delta x)}{1 + r_1 \dot{U} 2i \sin(\theta \Delta x)} \text{ ifadesini bulmuş oluruz.}$$

$r_1 > 0$ için $|\mu| \leq 1$ ifadesi her zaman doğru olacaktır. Öyleyse viskozitesiz Burgers' denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı şartsız kararlıdır.

3.2.2. Isı İletim Denkleminin Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı (CNSFY)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{2(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2) \quad (3.24)$$

fark şemasını yazalım. (2.2) ve (3.24) ifadelerini $O(\Delta t)$ ve $O(\Delta x^2)$ ihmal etmek şartı ile (3.20)'deki ısı denkleminde yerine yazalım.

$$U_m^{n+1} - U_m^n = \frac{1}{2} \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} (U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}) + \frac{1}{2} \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) \quad (3.25)$$

ifadesi olur. Burada $r = \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2}$ olarak yeniden düzenlenirse

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad (3.26)$$

$m = 1(1)M-1$, $n = 0(1)N$ denklemi elde edilir (Smith, 1985).

Bu denklemde $m=1, 2, 3, \dots, M-1$ yerine yazılırsa

$$\left. \begin{array}{l} f_1=0 \\ \left. \begin{array}{l} -rU_0^{n+1} + (2+2r)U_1^{n+1} - rU_2^{n+1} = rU_0^n + (2-2r)U_1^n + rU_2^n, \\ -rU_1^{n+1} + (2+2r)U_2^{n+1} - rU_3^{n+1} = rU_1^n + (2-2r)U_2^n + rU_3^n, \\ \cdot \\ \cdot \\ -rU_{M-3}^{n+1} + (2+2r)U_{M-2}^{n+1} - rU_{M-1}^{n+1} = rU_{M-3}^n + (2-2r)U_{M-2}^n + rU_{M-1}^n, \\ -rU_{M-2}^{n+1} + (2+2r)U_{M-1}^{n+1} - \underbrace{rU_M^{n+1}} = rU_{M-2}^n + (2-2r)U_{M-1}^n + \underbrace{rU_M^n}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} U_0^n = U_0^{n+1} = f_1 \\ U_M^n = U_M^{n+1} = f_2 \end{array} \\ f_2=0 \end{array} \right\} \quad f_2=0$$

denklem sistemi bulunur. Denklem sistemi herhangi bir n -inci zaman adımı için matris formunda aşağıdaki gibi yazalım.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (2+2r) - r & & & \\ -r & (2+2r) & -r & \\ & & \ddots & \\ & & & -r & (2+2r) - r \\ & & & -r & (2+2r) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (2-2r) & r & & \\ r & (2-2r) & r & \\ & & \ddots & \\ & & & r & (2-2r) & r \\ & & & r & (2-2r) \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-2}^n \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} rf_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ rf_2 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

veya $A\underline{U}^{(n+1)} = B\underline{U}^{(n)} + \underline{b}$ olarak bulunur.

Kararlılık Analizi

(3.25) denkleminde von Neumann kararlılık analizini uygulamak için $t^2 = -1$ olmak üzere

$$U_m^n = e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n$$

ifadelerini (3.25) denkleminde yerine yazılırsa

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} - e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n =$$

$$\frac{rv}{2} [e^{i\theta(m-1)\Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} - 2e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} + e^{i\theta(m+1)\Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)}] +$$

$$\frac{rv}{2} [e^{i\theta(m-1)\Delta x} \cdot (\mu)^n - 2e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n + e^{i\theta(m+1)\Delta x} \cdot (\mu)^n] \text{ bulunur. Buradan}$$

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} - \frac{rv}{2} [e^{i\theta(m-1)\Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} - 2e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} + e^{i\theta(m+1)\Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)}]$$

$$= \frac{rv}{2} [e^{i\theta(m-1)\Delta x} \cdot (\mu)^n - 2e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n + e^{i\theta(m+1)\Delta x} \cdot (\mu)^n] + e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n \text{ olur.}$$

Yukarıdaki denklemi yeniden düzenlersek

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} [1 - \frac{rv}{2} (e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})] =$$

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n [1 + \frac{rv}{2} (e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})],$$

$$\mu [1 - \frac{rv}{2} (e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})] = [1 + \frac{rv}{2} (e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})] \text{ olur. Buradan da}$$

$$\mu = \frac{1 + \frac{rv}{2} (e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})}{1 - \frac{rv}{2} (e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})} \text{ denklemi elde edilir.}$$

$$e^{i\theta \Delta x} = \cos(\theta \Delta x) + i \sin(\theta \Delta x),$$

$$e^{-i\theta \Delta x} = \cos(\theta \Delta x) - i \sin(\theta \Delta x),$$

Bilinen bu iki ifadeyi taraf tarafa toplarsak

$$e^{i\theta\Delta x} + e^{-i\theta\Delta x} = 2 \cos(\theta\Delta x),$$

$$2\cos(\theta\Delta x) = 2 - 4 \sin^2\left(\frac{\theta\Delta x}{2}\right) \text{ olur.}$$

Bulduğumuz bu ifadeleri denklemde uygun yerlerine yazarsak

$$\mu = \frac{1 - 2rv \sin^2\left(\frac{\theta\Delta x}{2}\right)}{1 + 2rv \sin^2\left(\frac{\theta\Delta x}{2}\right)} \text{ olarak bulunur.}$$

$r > 0$ için $|\mu| \leq 1$ ifadesi her zaman doğru olacaktır. Öyleyse ısı iletim denklemi Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı şartsız kararlıdır.

3.3. Lineerleştirme Teknikleri

3.3.1. Viskozitesiz Burgers' Denklemi için Robin-Graves Lineerleştirme Tekniği (RGSFY)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t}$$

ve

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = U_m^{n+1} \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) + U_m^n \left(\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) - U_m^n \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right)$$

ifadelerini (3.19)'daki viskozitesiz Burgers' denkleminde yerine yazarsak (Rubin ve Graves, 1975)

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + U_m^{n+1} \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) + U_m^n \left(\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) - U_m^n \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) = 0$$

ifadesi oluşur. $r_1 = \frac{\Delta t}{2\Delta x}$, olmak üzere yukarıdaki denklem yeniden düzenlenirse

$$U_{m-1}^{n+1}(-r_1 U_m^n) + U_m^{n+1}(1 + r_1(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n)) + U_{m+1}^{n+1}(r_1 U_m^n) =$$

$$U_m^n + U_m^n(r_1(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n)) \quad (3.27)$$

denklemini meydana gelir. Şimdi bu ifadeyi matris formunda aşağıdaki gibi yazalım.

$$U_0^n = U_0^{n+1} = f_1 = 0,$$

$$U_M^n = U_M^{n+1} = f_2 = 0, \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + r_1 U_2^n & r_1 U_1^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_1 U_2^n & 1 + r_1 (U_3^n - U_1^n) & r_1 U_2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_1 U_3^n & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & r_1 U_{M-3}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_1 U_{M-2}^n & 1 + r_1 (U_{M-1}^n - U_{M-3}^n) & r_1 U_{M-2}^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_1 U_{M-1}^n & 1 - r_1 U_{M-2}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} U_1^n + r_1 U_1^n (U_2^n) \\ U_2^n + r_1 U_2^n (U_3^n - U_1^n) \\ U_3^n + r_1 U_3^n (U_4^n - U_2^n) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{M-1}^n - r_1 U_{M-1}^n (U_{M-2}^n) \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

3.3.2. Viskozitesiz Burgers' Denkleminin CNSFY1 Yaklaşımı

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t},$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{U_m^n + U_{m+1}^n}{2} \right) \frac{1}{2} \left[\left(\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) \right]$$

ifadelerini (3.19)'deki viskozitesiz Burgers' denkleminde yerine yazarsak

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + \left(\frac{U_m^n + U_{m+1}^n}{2} \right) \frac{1}{2} \left[\left(\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) \right] = 0$$

elde edilir (Uçar, 2005).

$$r_1 = \frac{\Delta t}{8\Delta x} \text{ olmak üzere yukarıdaki denklemi yeniden düzenlersek}$$

$$\begin{aligned} & U_{m-1}^{n+1} (-r_1 (U_m^n + U_{m+1}^n)) + U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1} (r_1 (U_m^n + U_{m+1}^n)) \\ &= U_m^n - r_1 (U_m^n + U_{m+1}^n) (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) \end{aligned} \quad (3.28)$$

denklemini meydana gelir. Şimdi bu ifadeyi matris formunda aşağıdaki gibi yazalım.

$$U_0^n = U_0^{n+1} = f_1 = 0,$$

$$U_M^n = U_M^{n+1} = f_2 = 0, \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & r_1(U_1^n + U_2^n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_1(U_2^n + U_3^n) & 1 & r_1(U_2^n + U_3^n) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_1(U_3^n + U_4^n) & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & r_1(U_{M-2}^n + U_{M-1}^n) \\ 0 & 0 & 0 & -r_1 U_{M-1}^n & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} U_1^n - r_1(U_1^n + U_2^n)(U_2^n) \\ U_2^n - r_1(U_2^n + U_3^n)(U_3^n - U_1^n) \\ U_3^n - r_1(U_3^n + U_4^n)(U_4^n - U_2^n) \\ \vdots \\ U_{M-2}^n - r_1(U_{M-2}^n + U_{M-1}^n)(U_{M-1}^n - U_{M-3}^n) \\ U_{M-1}^n + r_1(U_{M-1}^n)(U_{M-2}^n) \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

3.3.3. Viskozitesiz Burgers' Denkleminin CNSFY 2 Yaklaşımı

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t},$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n}{3} \right) \frac{1}{2} \left[\left(\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) \right],$$

ifadelerini (3.19)'deki viskozitesiz Burgers' denkleminde yerine yazarsak

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + \left(\frac{U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n}{3} \right) \frac{1}{2} \left[\left(\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \left(\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) \right] = 0 \text{ elde edilir.}$$

$$r_1 = \frac{\Delta t}{12\Delta x} \text{ olmak üzere yukarıdaki denklemi yeniden düzenlersek}$$

$$U_{m-1}^{n+1}(-r_1(U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n)) + U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}(r_1(U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n))$$

$$= U_m^n - r_1(U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n)(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) \quad (3.29)$$

denklemini meydana gelir. Şimdi bu ifadeyi matris formunda aşağıdaki gibi yazalım.

$$U_0^n = U_0^{n+1} = f_1 = 0,$$

$$U_M^n = U_M^{n+1} = f_2 = 0, \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & r_1(U_1^n + U_2^n) & 0 & 0 & 0 \\ -r_1(U_1^n + U_2^n + U_3^n) & 1 & r_1(U_1^n + U_2^n + U_3^n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_1(U_{M-3}^n + U_{M-2}^n + U_{M-1}^n) \\ 0 & 0 & 0 & -r_1(U_{M-2}^n + U_{M-1}^n) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^n - r_1(U_1^n + U_2^n)(U_2^n) \\ U_2^n - r_1(U_1^n + U_2^n + U_3^n)(U_3^n - U_1^n) \\ U_3^n - r_1(U_2^n + U_3^n + U_4^n)(U_4^n - U_2^n) \\ \vdots \\ U_{M-2}^n - r_1(U_{M-3}^n + U_{M-2}^n + U_{M-1}^n)(U_{M-1}^n - U_{M-3}^n) \\ U_{M-1}^n + r_1(U_{M-2}^n + U_{M-1}^n)(U_{M-2}^n) \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

4.1. Burgers' Denkleminin CNSFY ile Nümerik Çözümünün Sonuçları

Sayısal çözümlerin analitik çözüme ne kadar yaklaştığını ölçmek için aşağıdaki hata normları göz önüne alındı.

$$L_2 = \left[(\Delta x) \sum_{m=1}^M \left| U(x_m, t_n) - U_m^n \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Ortalama hata}) \quad (4.1)$$

ve

$$L_\infty = \max_m \left| U(x_m, t_n) - U_m^n \right| \quad (\text{Maksimum hata}) \quad (4.2)$$

$t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken değişen Δx değerleri için Problem 2.1'in Crank-Nicolson sonlu fark yönteminin (2.10) yaklaşımını kullanılarak elde edilen sayısal çözümler ve analitik çözümler L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte Tablo 4.1'de verildi. Küçülen Δx değerleri için sayısal çözüm düzenli olarak analitik çözüme yaklaştığı ve L_2 , L_∞ hata miktarlarının azaldığı tespit edilmiştir.

Tablo 4.1. Problem 2.1'in CNSFY ile $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

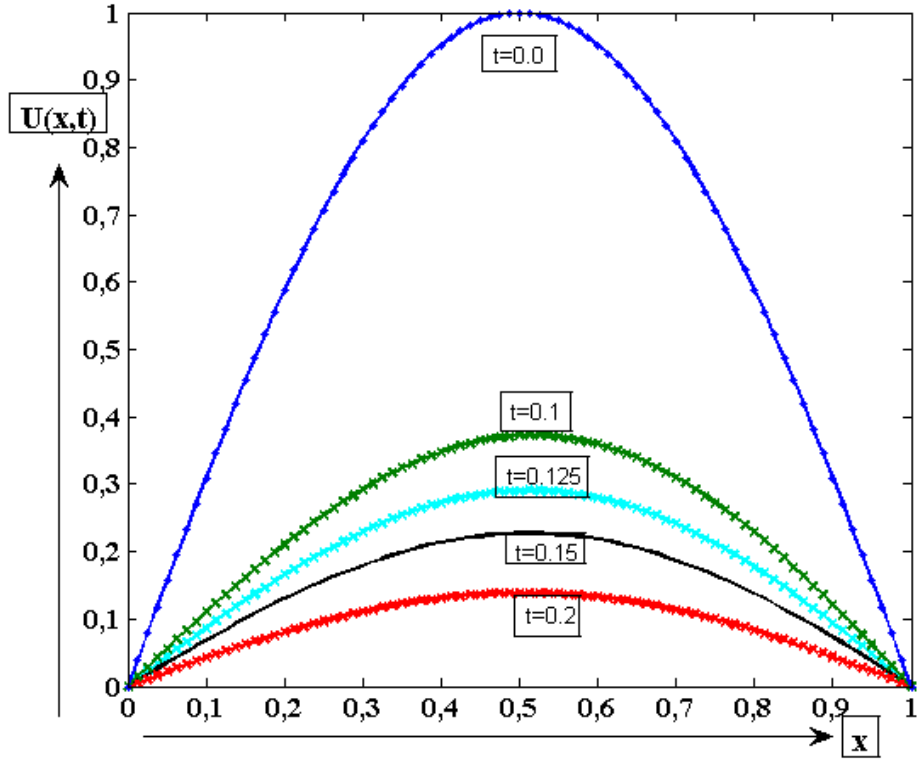
x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.110293	0.109727	0.109585	0.109550	0.109538
0.2	0.211279	0.210164	0.209885	0.209815	0.209792
0.3	0.294057	0.292436	0.292031	0.291930	0.291896
0.4	0.350643	0.348604	0.348094	0.347966	0.347924
0.5	0.374662	0.372348	0.371770	0.371625	0.371577
0.6	0.362211	0.359836	0.359243	0.359095	0.359046
0.7	0.312789	0.310625	0.310085	0.309950	0.309905
0.8	0.230031	0.228370	0.227956	0.227852	0.227817
0.9	0.121892	0.120987	0.120762	0.120706	0.120687
Hata Normu					
$L_2 \times 10^3$	2.214530	0.553194	0.138221	0.034502	
$L_\infty \times 10^3$	3.165204	0.790918	0.198345	0.049610	

$h=0.0125$, $k=0.00001$ iken viskozite parametresi $\nu=1$, $\nu=0.1$ ve $\nu=0.01$ için çeşitli t zaman adımlarında ($t=0.2$, $t=0.6$, $t=1.0$, $t=1.2$, $t=2.0$) Problem 2.1'in Crank-Nicolson sonlu fark yönteminin (2.10) yaklaşımı kullanılarak elde edilen sayısal ve analitik çözümleri Tablo 4.2'de verildi. Bu tablo incelendiğinde nümerik çözümlerin analitik çözümler ile uyumlu olduğu görülmektedir.

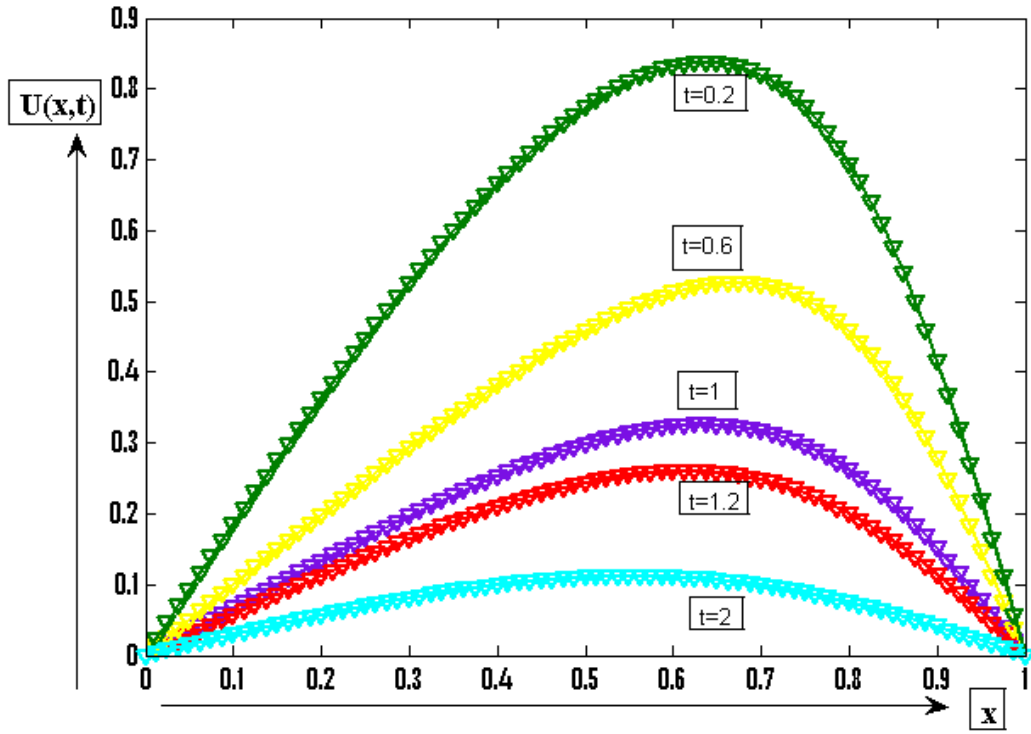
Tablo 4.2. Problem 2.1'in CNSFY ile $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $\nu=1$, $\nu=0.1$, $\nu=0.01$ için değişken t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.096465	0.096442	0.429340	0.429317	0.466607	0.466583
	0.6	0.001890	0.001889	0.240758	0.240739	0.268975	0.268965
	1.0	0.000037	0.000036	0.162587	0.162565	0.188199	0.188194
	1.2	0.000005	0.000005	0.136465	0.136440	0.163590	0.163586
	2.0	0.000000	0.000000	0.068232	0.068206	0.107383	0.107381
0.50	0.2	0.138509	0.138473	0.753869	0.753811	0.848434	0.848365
	0.6	0.002674	0.002672	0.447280	0.447206	0.529448	0.529418
	1.0	0.000052	0.000052	0.291999	0.291916	0.374433	0.374420
	1.2	0.000007	0.000007	0.238592	0.238511	0.326066	0.326057
	2.0	0.000000	0.000000	0.107944	0.107890	0.214562	0.214558
0.75	0.2	0.099462	0.099435	0.749231	0.749139	0.962061	0.961891
	0.6	0.001891	0.001890	0.487466	0.487215	0.767330	0.767243
	1.0	0.000037	0.000036	0.287658	0.287474	0.556078	0.556051
	1.2	0.000005	0.000005	0.222741	0.222595	0.486031	0.486013
	2.0	0.000000	0.000000	0.086636	0.086579	0.321293	0.321282

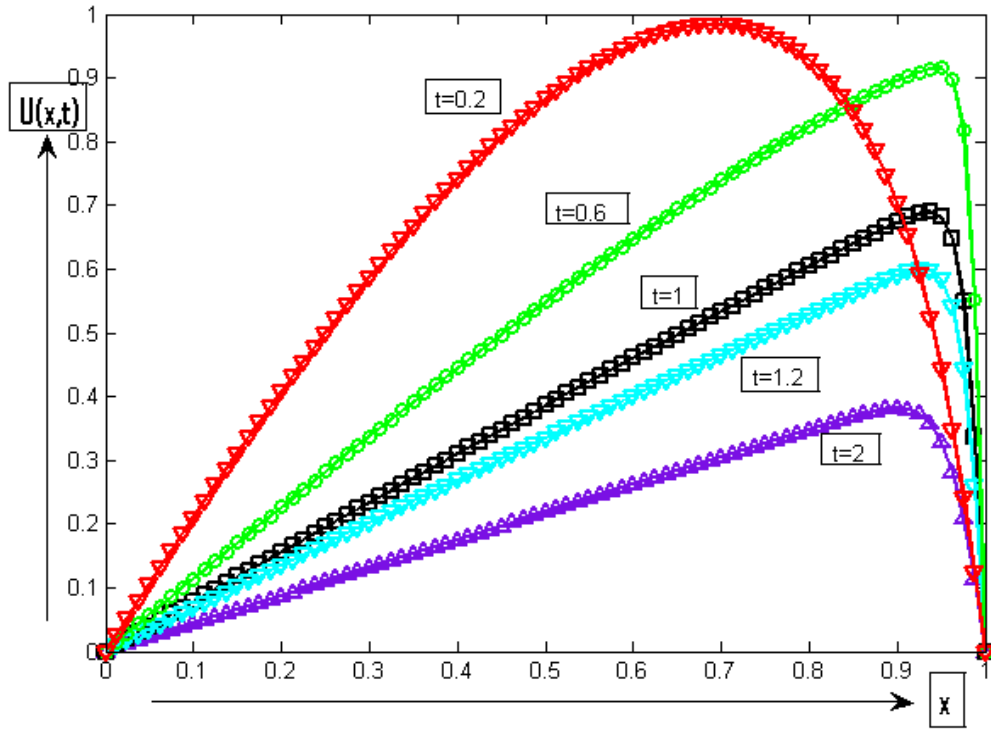
Problem 2.1'in Crank-Nicolson sonlu fark yönteminin (2.10) yaklaşımını kullanarak elde edilen sayısal çözümlerinin fiziksel davranışları görebilmek için Şekil 4.1, Şekil 4.2 ve Şekil 4.3'teki grafikler verildi. Farklı nümerik çözüm eğrileri tek bir grafikte çizildiği zaman nümerik çözümlerin Problem 2.1'in fiziksel davranışlarını sergilediği görüldü. Viskozite parametresi ν küçüldükçe nümerik çözümlerin sağa keskin dönüşler yaptığı görülmektedir.



Şekil 4.1. Problem 2.1'in CNSFY ile $\Delta x=0.0125$, $\Delta t=0.00001$, $\nu=1$ iken t 'nin değişen değerleri için çözüm grafiği



Şekil 4.2. Problem 2.1'in CNSFY ile $\Delta x=0.0125$, $\Delta t=0.00001$, $v=0.1$ iken t 'nin değişen değerleri için çözüm grafiği



Şekil 4.3. Problem 2.1'in CNSFY ile $\Delta x=0.0125$, $\Delta t=0.00001$, $v=0.01$ iken t 'nin değişen değerleri için çözüm grafiği

$t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken değişen Δx değerleri için 'nin Crank-Nicolson sonlu fark yönteminin (2.10) yaklaşımı kullanılarak elde edilen nümerik ve analitik çözümleri L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte Tablo 4.3'de verildi. Küçülen Δx değerlerine bakıldığında nümerik çözüm analitik çözüme yaklaştığı ve L_2 , L_∞ hata miktarlarının azaldığı tespit edildi.

Tablo 4.3. Problem 2.2'in CNSFY ile $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.113664	0.113086	0.112941	0.112904	0.112892
0.2	0.217772	0.216634	0.216347	0.216276	0.216252
0.3	0.303174	0.301520	0.301104	0.301000	0.300966
0.4	0.361646	0.359562	0.359038	0.358906	0.358863
0.5	0.386586	0.384216	0.383621	0.383472	0.383422
0.6	0.373915	0.371474	0.370862	0.370709	0.370658
0.7	0.323045	0.320812	0.320252	0.320113	0.320066
0.8	0.237665	0.235945	0.235515	0.235407	0.235371
0.9	0.125970	0.125031	0.124796	0.124738	0.124718
Hata Normu					
$L_2 \times 10^3$	2.276964	0.570840	0.142756	0.035642	
$L_\infty \times 10^3$	3.256902	0.816383	0.204858	0.051256	

Problem 2.2 Crank-Nicolson sonlu fark yönteminin (2.10) yaklaşımı kullanılarak çözüldü. $\Delta x = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$ iken $t = 0.2$, $t = 0.6$, $t = 1.0$, $t = 1.2$, $t = 2.0$ zaman adımlarında $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$ için elde edilen nümerik ve analitik çözümler Tablo 4.4’de verildi. Bu tabloyu incelediğimizde nümerik çözümlerin analitik çözümlere yakın değerler olduğu görülmektedir.

Tablo 4.4. Problem 2.2’in CNSFY ile $\Delta t = 0.00001$, $\Delta x = 0.0125$ iken $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$ için değişken t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.099494	0.099470	0.446829	0.446807	0.499835	0.499828
	0.6	0.001951	0.001949	0.246151	0.246138	0.282040	0.282037
	1.0	0.000038	0.000038	0.165615	0.165599	0.194688	0.194690
	1.2	0.000005	0.000005	0.138952	0.138933	0.168490	0.168494
	2.0	0.000000	0.000000	0.069536	0.069514	0.109475	0.109482
0.50	0.2	0.142925	0.142888	0.773141	0.773101	0.867170	0.867136
	0.6	0.002759	0.002757	0.458041	0.457976	0.548320	0.548316
	1.0	0.000053	0.000053	0.298417	0.298343	0.385668	0.385676
	1.2	0.000007	0.000007	0.243755	0.243682	0.334886	0.334897
	2.0	0.000000	0.000000	0.110248	0.110199	0.218574	0.218588
0.75	0.2	0.102683	0.102655	0.773553	0.773440	0.969871	0.969734
	0.6	0.001952	0.001950	0.502934	0.502676	0.783041	0.782994
	1.0	0.000038	0.000038	0.296041	0.295857	0.569314	0.569319
	1.2	0.000005	0.000005	0.228942	0.228797	0.497132	0.497145
	2.0	0.000000	0.000000	0.088734	0.088680	0.326909	0.326926

4.2. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemine(CNSFY) Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile 1-Boyutlu Burgers Denkleminin Nümerik Çözümleri

4.2.1. Strang BAB (S-BAB) Yaklaşımı

(3.23)'deki viskozitesiz Burgers' denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$U_{m-1}^{n+1}(-r_1 U_m^n) + U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}(r_1 U_m^n) = U_{m-1}^n(r_1 U_m^n) + U_m^n + U_{m+1}^n(-r_1 U_m^n),$$

$$r_1 = \frac{\Delta t}{4\Delta x}, \quad m = 1(1)M - 1, \quad n=0(1)t^{n+1/2}$$

ile (3.26)'teki ısı iletim denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2 + 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n,$$

$$r = \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad m = 1(1)M - 1, \quad n=0(1)t^{n+1}$$

fark şemaları oluşturulur.

Strang parçalama metodu için (3.23) fark şeması $\frac{\Delta t}{2}$ için çözülür. Elde edilen bu çözüm başlangıç koşulu alınarak (3.26) fark şeması Δt için çözülür. Elde edilen yeni çözüm tekrar (3.23) fark şemasının başlangıç koşulu kabul edilir ve (3.23) fark şeması $\frac{\Delta t}{2}$ için tekrar çözülür.

4.2.2. S-BAB için Nümerik Sonuçlar

Problem 2.1 CNSFY'ne bağlı Strang parçalama metodunun BAB yaklaşımı ile çözüldü. $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ için değişen Δx değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümler L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte Tablo 4.5'te verildi. Küçülen Δx değerlerine bakıldığında nümerik çözüm analitik çözümlere yaklaştığı ve L_2 , L_∞ hata miktarlarının azaldığı görüldü.

Tablo 4.5. Problem 2.1'in CNSFY 'ne bağı Strang Parçalama Metodu BAB'a göre $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.110293	0.109727	0.109585	0.109550	0.109538
0.2	0.211279	0.210164	0.209885	0.209815	0.209792
0.3	0.294057	0.292437	0.292031	0.291930	0.291896
0.4	0.350643	0.348604	0.348094	0.347966	0.347924
0.5	0.374662	0.372348	0.371770	0.371625	0.371577
0.6	0.362210	0.359836	0.359243	0.359095	0.359046
0.7	0.312789	0.310624	0.310085	0.309950	0.309905
0.8	0.230030	0.228369	0.227955	0.227852	0.227817
0.9	0.121892	0.120987	0.120762	0.120705	0.120687
Hata Normu					
$L_2 \times 10^3$	2.214524	0.553193	0.138221	0.034501	
$L_\infty \times 10^3$	3.164993	0.790858	0.198214	0.049480	

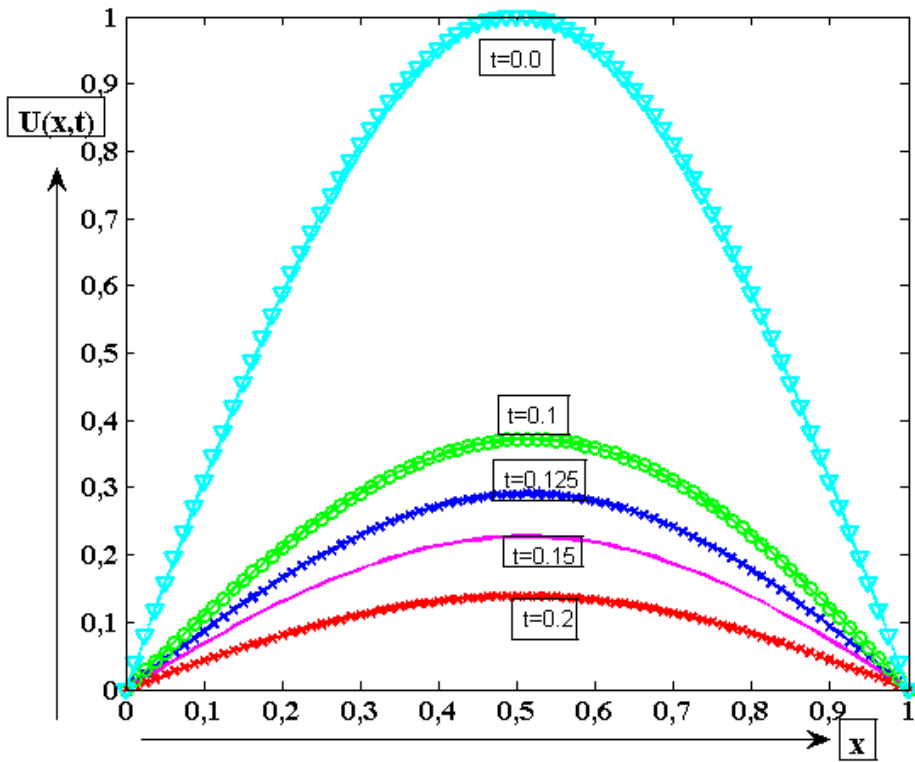
Problem 2.1'in CNSFY'ne bağı Strang parçalama metodu BAB'a göre $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken viskozite parametresi $\nu=1$, $\nu=0.1$, $\nu=0.01$ değerleri için değişken t zaman adımlarında analitik ve nümerik çözümleri Tablo 4.6'da verildi. Bu tablo incelendiğinde nümerik çözümlerin analitik çözümlere yakın olduğu görülüyor.

Tablo 4.6. Problem 2.1'in CNSFY'ne bağı Strang Parçalama Metodu BAB'a göre $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $\nu=1$, $\nu=0.1$, $\nu=0.01$ değerleri için değişen t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri

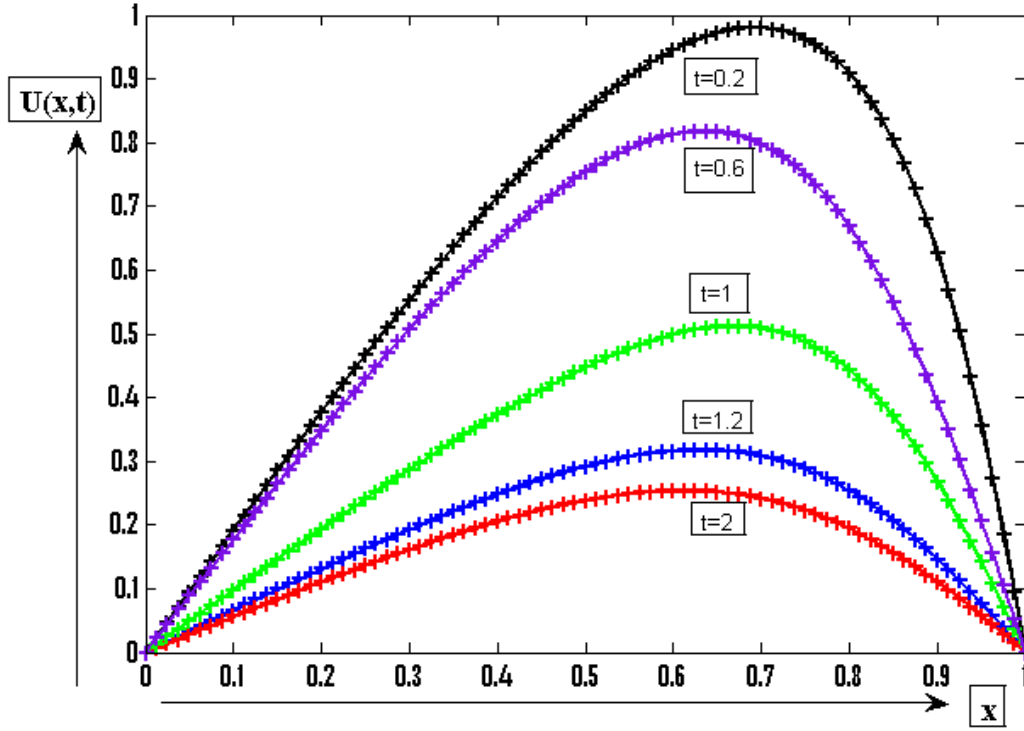
x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.096465	0.096442	0.429340	0.429317	0.466607	0.466583
	0.6	0.001890	0.001889	0.240758	0.240739	0.268975	0.268965
	1.0	0.000037	0.000036	0.162588	0.162565	0.188199	0.188194
	1.2	0.000005	0.000005	0.136465	0.136440	0.163590	0.163586
	2.0	0.000000	0.000000	0.068232	0.068206	0.107383	0.107381
0.50	0.2	0.138509	0.138473	0.753869	0.753811	0.848434	0.848365
	0.6	0.002674	0.002672	0.447280	0.447206	0.529448	0.529418
	1.0	0.000052	0.000052	0.291999	0.291916	0.374433	0.374420
	1.2	0.000007	0.000007	0.238592	0.238511	0.326066	0.326057
	2.0	0.000000	0.000000	0.107944	0.107890	0.214562	0.214558
0.75	0.2	0.099462	0.099435	0.749229	0.749139	0.962061	0.961891
	0.6	0.001891	0.001890	0.487465	0.487215	0.767330	0.767243
	1.0	0.000037	0.000036	0.287657	0.287474	0.556078	0.556051
	1.2	0.000005	0.000005	0.222740	0.222595	0.486031	0.486013
	2.0	0.000000	0.000000	0.086635	0.086579	0.321293	0.321282

Problem 2.1'in Crank-Nicolson sonlu fark yöntemine bağılı Strang parçalama metodunu kullanarak elde edilen sayısal çözümlerinin fiziksel davranışları görebilmek için Şekil 4.4, Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'daki grafikler verildi.

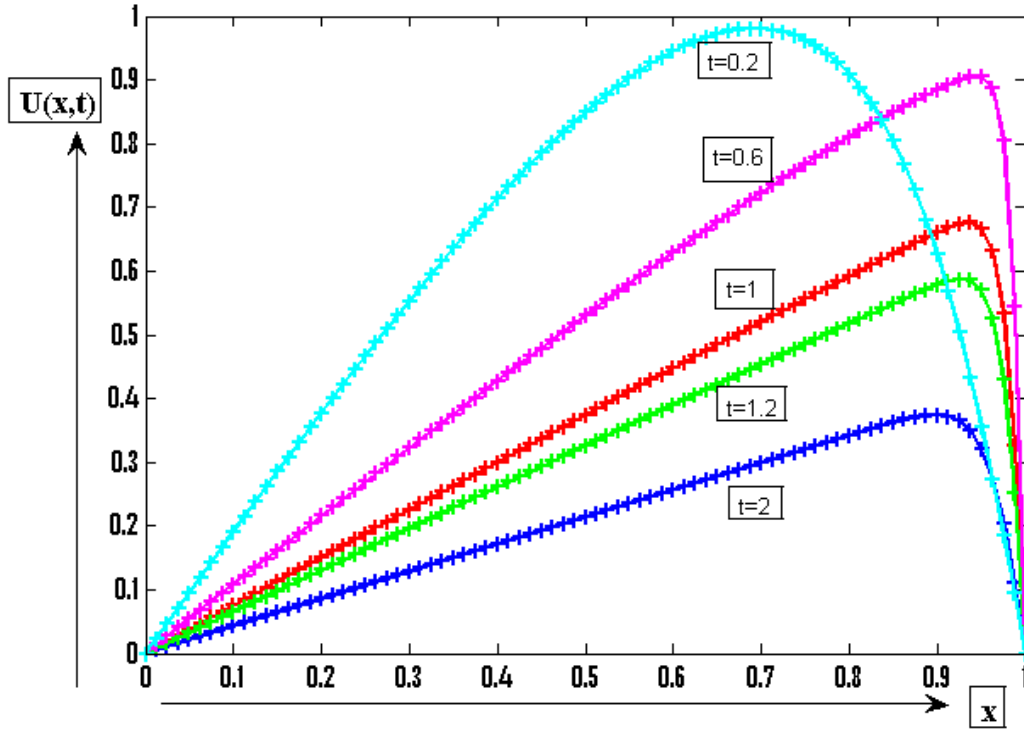
$\Delta x=0.0125$, $\Delta t=0.00001$ iken Problem 2.1'in değişen t zaman adımlarındaki sayısal çözümlerin grafikleri oluşturuldu. Farklı nümerik çözüm eğrileri tek bir grafikte çizildiği zaman nümerik çözümlerin Problem 2.1'in fiziksel davranışlarını sergilediği görüldü. Viskozite parametresi ν küçüldükçe nümerik çözümlerin sağa keskin dönüşler yaptığı Şekil 4.6'da görülmektedir.



Şekil 4.4. $\Delta x=0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu = 1$ değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY'ine bağılı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği



Şekil 4.5. $\Delta x=0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v=0.1$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği



Şekil 4.6. $\Delta x = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v=0.0$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği

Problem 2.2 CNSFY'ne bağı Strang parçalama metodunun BAB yaklaşımına göre çözüldü. $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken değişen Δx değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümler L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte Tablo 4.7'de verildi. Küçülen Δx konum adım uzunluğu değerlerine bakıldığında nümerik çözüm analitik çözüme yaklaştığı ve L_2 , L_∞ hata miktarlarının azaldığı görüldü. Tablo 4.7'deki hata miktarlarını incelediğimizde düzenli bir azalış olduğu görülmektedir.

Tablo 4.7. Problem 2.2 CNSFY 'ne bağı Strang Parçalama Metodu BAB'a göre $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.113665	0.113086	0.112941	0.112904	0.112892
0.2	0.217773	0.216634	0.216348	0.216276	0.216252
0.3	0.303175	0.301521	0.301105	0.301001	0.300966
0.4	0.361646	0.359562	0.359038	0.358907	0.358863
0.5	0.386586	0.384216	0.383621	0.383472	0.383422
0.6	0.373915	0.371474	0.370862	0.370709	0.370658
0.7	0.323044	0.320811	0.320252	0.320112	0.320066
0.8	0.237665	0.235945	0.235514	0.235407	0.235371
0.9	0.125970	0.125031	0.124796	0.124738	0.124718
Hata Normu					
$L_2 \times 10^3$	2.276956	0.570838	0.142755	0.035639	
$L_\infty \times 10^3$	3.256675	0.816167	0.204719	0.051113	

4.2.3. Strang ABA (S-ABA) Yaklaşımı

(3.26)'teki ısı iletim denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2 + 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n$$

$$r = \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad m = 1(1)M - 1, \quad n=0(1)t^{n+1/2}$$

ile (3.23)'deki viskozitesiz Burgers' denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$U_{m-1}^{n+1}(-r_1 U_m^n) + U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}(r_1 U_m^n) = U_{m-1}^n(r_1 U_m^n) + U_m^n + U_{m+1}^n(-r_1 U_m^n)$$

$$r_1 = \frac{\Delta t}{4\Delta x}, \quad m = 1(1)M - 1, \quad n=0(1)t^{n+1}$$

fark şemaları oluşturulur.

Strang parçalama metodu için (3.26) fark şeması $\frac{\Delta t}{2}$ için çözülür. Elde edilen bu çözüm başlangıç koşulu alınarak (3.23) fark şeması Δt için çözülür. Elde edilen bu çözüm tekrar (3.26) fark şemasının başlangıç koşulu kabul edilir ve (3.26) fark şeması $\frac{\Delta t}{2}$ için çözülür.

4.2.4. S-ABA için Nümerik Sonuçlar

Problem 2.1 Crank-Nicolson sonlu fark yöntemine (CNSFY) bağlı Strang parçalama metodunun ABA yaklaşımı ile çözüldü. $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken küçülen Δx konum adım uzunluğu değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümleri L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte Tablo 4.9'da verildi. Küçülen Δx değerleri için nümerik çözümlerin giderek analitik çözüme yaklaştığı görüldü. Tablo 4.9'daki hata miktarlarının düzenli azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.9. Problem 2.1'in CNSFY 'ne bağı Strang Parçalama Metodu ABA'a göre $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.110288	0.109722	0.109580	0.109545	0.109538
0.2	0.211271	0.210156	0.209877	0.209807	0.209792
0.3	0.294048	0.292428	0.292023	0.291921	0.291896
0.4	0.350637	0.348598	0.348088	0.347960	0.347924
0.5	0.374661	0.372348	0.371769	0.371624	0.371577
0.6	0.362215	0.359841	0.359248	0.359099	0.359046
0.7	0.312798	0.310634	0.310094	0.309958	0.309905
0.8	0.230040	0.228379	0.227965	0.227861	0.227817
0.9	0.121898	0.120993	0.120768	0.120711	0.120687
Hata Normu					
$L_2 \times 10^3$	2. 214589	0. 553262	0. 138292	0. 034577	
$L_\infty \times 10^3$	3. 165469	0. 791066	0. 198568	0. 049852	

Problem 2.1 CNSFY'ne bağı Strang parçalama metodunun ABA yaklaşımına göre çözüldü.

$\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için değişken t değerlerinin ($t=0.2$, $t=0.6$, $t=1.0$, $t=1.2$, $t=2.0$) analitik ve nümerik çözümleri Tablo 4.10'da verildi. Bu tabloyu incelediğimizde nümerik çözümlerin analitik çözümler ile uyumlu olduğu görüldü.

Tablo 4.10. Problem 2.1'in CNSFY'ne bağı Strang Parçalama Metodu ABA'a göre $\Delta t = 0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için değişen t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri

x	t	v = 1		v = 0.1		v = 0.01	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.096465	0.096442	0.429340	0.429317	0.466607	0.466583
	0.6	0.001890	0.001889	0.240758	0.240739	0.268975	0.268965
	1.0	0.000037	0.000036	0.162588	0.162565	0.188199	0.188194
	1.2	0.000005	0.000005	0.136465	0.136440	0.163590	0.163586
	2.0	0.000000	0.000000	0.068232	0.068206	0.107383	0.107381
0.50	0.2	0.138509	0.138473	0.753869	0.753811	0.848434	0.848365
	0.6	0.002674	0.002672	0.447280	0.447206	0.529448	0.529418
	1.0	0.000052	0.000052	0.291999	0.291916	0.374433	0.374420
	1.2	0.000007	0.000007	0.238592	0.238511	0.326066	0.326057
	2.0	0.000000	0.000000	0.107944	0.107890	0.214562	0.214558
0.75	0.2	0.099462	0.099435	0.749229	0.749139	0.962061	0.961891
	0.6	0.001891	0.001890	0.487465	0.487215	0.767330	0.767243
	1.0	0.000037	0.000036	0.287657	0.287474	0.556078	0.556051
	1.2	0.000005	0.000005	0.222740	0.222595	0.486031	0.486013
	2.0	0.000000	0.000000	0.086635	0.086579	0.321293	0.321282

Problem 2.2 CNSFY'ne bağı Strang parçalama (splitting) metodunun ABA yaklaşımına göre çözüldü.

L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken değişen Δx değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümler Tablo 4.11 'de verildi. Küçülen Δx değerlerine bakıldığında nümerik çözümlerin analitik çözümlere yaklaştığı ve L_2 ve L_∞ hata miktarlarının düzenli azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.11. Problem 2.2'in CNSFY 'ne bağı Strang Parçalama Metodu ABA'a göre $t=0.1, \Delta t=0.00001, v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.113664	0.113086	0.112940	0.112904	0.112892
0.2	0.217772	0.216633	0.216347	0.216275	0.216252
0.3	0.303174	0.301520	0.301104	0.301000	0.300966
0.4	0.361645	0.359561	0.359037	0.358906	0.358863
0.5	0.386586	0.384216	0.383621	0.383472	0.383422
0.6	0.373915	0.371475	0.370862	0.370709	0.370658
0.7	0.323045	0.320812	0.320253	0.320113	0.320066
0.8	0.237666	0.235946	0.235515	0.235408	0.235371
0.9	0.125971	0.125031	0.124797	0.124738	0.124718
Hata Normu					
$L_2 \times 10^3$	2.277028	0.570913	0.142832	0.035722	
$L_\infty \times 10^3$	3.257184	0.816688	0.205094	0.051531	

Problem 2.2 CNSFY'ne bağı Strang parçalama metodunun ABA yaklaşımına göre çözüldü.

$\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için $t=0.2$, $t=0.6$, $t=1.0$, $t=1.2$, $t=2.0$ değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri Tablo 4.12 'de verildi. Bu tabloyu incelediğimizde nümerik çözümlerin analitik çözümler ile uyumlu olduğu görüldü.

Tablo 4.12. Problem 2.2'in CNSFY'ne bağı Strang Parçalama Metodu ABA'a göre $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için değişen t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri

x	t	$v = 1$		$v = 0.1$		$v = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.099494	0.099470	0.446830	0.446807	0.499837	0.499828
	0.6	0.001951	0.001949	0.246156	0.246138	0.282049	0.282037
	1.0	0.000038	0.000038	0.165621	0.165599	0.194698	0.194690
	1.2	0.000005	0.000005	0.138958	0.138933	0.168500	0.168494
	2.0	0.000000	0.000000	0.069540	0.069514	0.109484	0.109482
0.50	0.2	0.142925	0.142888	0.773142	0.773101	0.867171	0.867136
	0.6	0.002759	0.002757	0.458049	0.457976	0.548333	0.548316
	1.0	0.000053	0.000053	0.298427	0.298343	0.385686	0.385676
	1.2	0.000007	0.000007	0.243765	0.243682	0.334905	0.334897
	2.0	0.000000	0.000000	0.110255	0.110199	0.218592	0.218588
0.75	0.2	0.102683	0.102655	0.773555	0.773440	0.969871	0.969734
	0.6	0.001952	0.001950	0.502940	0.502676	0.783053	0.782994
	1.0	0.000038	0.000038	0.296049	0.295857	0.569336	0.569319
	1.2	0.000005	0.000005	0.228949	0.228797	0.497157	0.497145
	2.0	0.000000	0.000000	0.088739	0.088680	0.326935	0.326926

4.2.5. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemine Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodunun ABA ve BAB Kalıplarının Karşılaştırılması

Problem 2.1 CNSFY'ne bağlı Strang parçalama metodunun ABA ve BAB yaklaşımları ile çözüldü.

$t=0.1$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu=1$, $\Delta x=0.0125$ iken Problem 2.1'in ABA ve BAB yaklaşımlarını kullanılarak elde edilen nümerik ve analitik çözümler L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte Tablo 4.13'de verildi. Tabloyu incelediğimizde BAB kalıbının hata miktarı ABA kalıbının hata miktarından az olduğu görülüyor.

Parçalanmış Burgers' denklemlerini çözmeye başlarken ilk önce non-lineer (viskozitesiz Burgers') denklemi çözmek daha sonra lineer (Isı iletim) denklemini çözmenin daha avantajlı olduğu görülmektedir.

Tablo 4.13. $t=0.1$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu=1$, $\Delta x=0.0125$ iken Problem 2.1'in Strang Parçalama Metodunun ABA ve BAB çözümlerinin karşılaştırılması

x	BAB	ABA	Analitik Çözüm
0.1	0.109550	0.109545	0.109538
0.2	0.209815	0.209807	0.209792
0.3	0.291930	0.291921	0.291896
0.4	0.347966	0.347960	0.347924
0.5	0.371625	0.371624	0.371577
0.6	0.359095	0.359099	0.359046
0.7	0.309950	0.309958	0.309905
0.8	0.227852	0.227861	0.227817
0.9	0.120705	0.120711	0.120687
Hata Normu			
$L_2 \times 10^3$	0.034501	0.034577	
$L_\infty \times 10^3$	0.049480	0.049852	

Problem 2.2 CNSFY'ne bağı Strang parçalama metodunun ABA ve BAB yaklaşımları ile çözüldü.

$t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$, $\Delta x=0.0125$ iken Problem 2.2'in ABA ve BAB yaklaşımlarını kullanılarak elde edilen nümerik ve analitik çözümler L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte Tablo 4.14'de verildi. Tabloyu incelediğimizde BAB kalıbının hata miktarı ABA kalıbının hata miktarından az olduğu görülmektedir.

Tablo 4.14. $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$, $\Delta x=0.0125$ iken Problem 2.2'in Strang Parçalama Metodunun ABA ve BAB çözümlerinin karşılaştırılması

x	BAB	ABA	Analitik Çözüm
0.1	0.112904	0.112904	0.112892
0.2	0.216276	0.216275	0.216252
0.3	0.301001	0.301000	0.300966
0.4	0.358907	0.358906	0.358863
0.5	0.383472	0.383472	0.383422
0.6	0.370709	0.370709	0.370658
0.7	0.320112	0.320113	0.320066
0.8	0.235407	0.235408	0.235371
0.9	0.124738	0.124738	0.124718
Hata Normu			
$L_2 \times 10^3$	0.035639	0.035722	
$L_\infty \times 10^3$	0.051113	0.051531	

4.3. RGSFY 'e Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile 1-Boyutlu Burgers Denkleminin Nümerik Çözümleri

Probleme önce (3.27) yaklaşımı ve sonra (3.26) yaklaşımını uygulamak RGSFY yaklaşımını oluştursun.

Problem 2.1 RGSFY'e bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözüldü. $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $\nu=1$ için değişen Δx adım uzunluğu için elde edilen nümerik ve analitik çözümleri L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte Tablo 4.15'de verildi. Küçülen Δx değerleri için nümerik çözümün analitik çözüme yaklaştığı ve L_2 , L_∞ hata miktarlarının düzenli azaldığı görüldü.

Tablo 4.15. Problem 2.1'in RGSFY ile $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $\nu=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.110293	0.109727	0.109585	0.109550	0.109538
0.2	0.211279	0.210164	0.209885	0.209815	0.209792
0.3	0.294057	0.292437	0.292031	0.291930	0.291896
0.4	0.350643	0.348604	0.348094	0.347966	0.347924
0.5	0.374662	0.372348	0.371770	0.371626	0.371577
0.6	0.362211	0.359836	0.359243	0.359095	0.359046
0.7	0.312789	0.310625	0.310085	0.309950	0.309905
0.8	0.230030	0.228369	0.227955	0.227852	0.227817
0.9	0.121892	0.120987	0.120762	0.120705	0.120687
Hata Normu					
$L_2 \times 10^3$	2.214531	0.553195	0.138221	0.034501	
$L_\infty \times 10^3$	3.164985	0.790840	0.198196	0.049461	

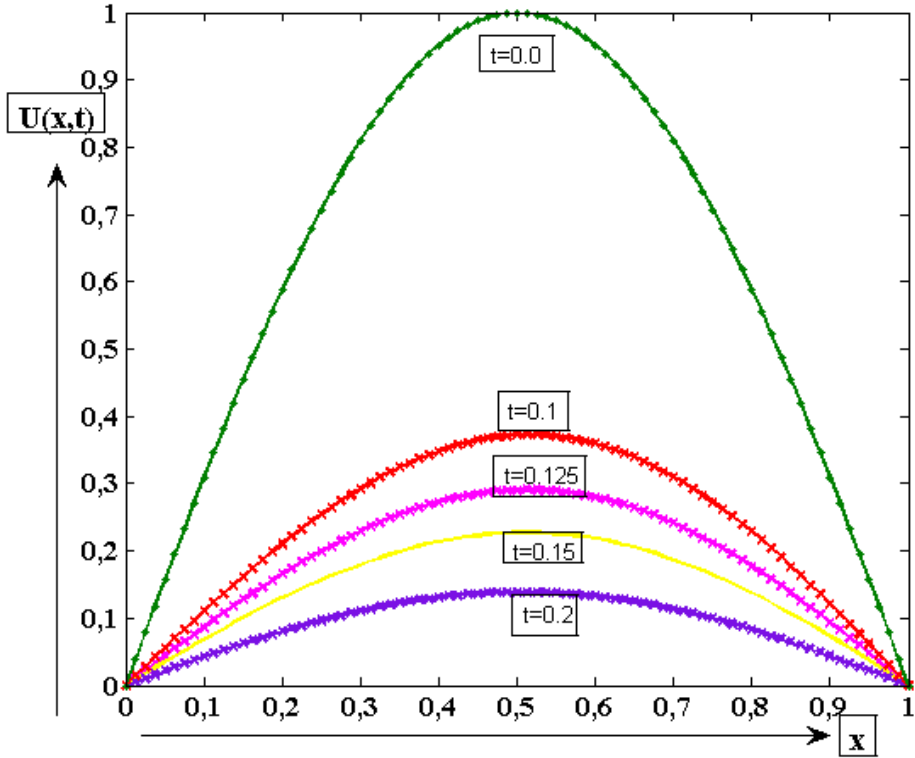
Problem 2.1 RGSFY'e bağı Strang parçalama metoduna göre çözüldü. $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için $t=0.2$, $t=0.6$, $t=0.1$, $t=1.2$, $t=2$ zaman değerleri için analitik ve nümerik çözümleri Tablo 4.16'da verildi. Bu tabloyu incelediğimizde nümerik çözümlerin analitik çözümlere yakın değerler olduğu görüldü.

Tablo 4.16. Problem 2.1'in RGSFY ile $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

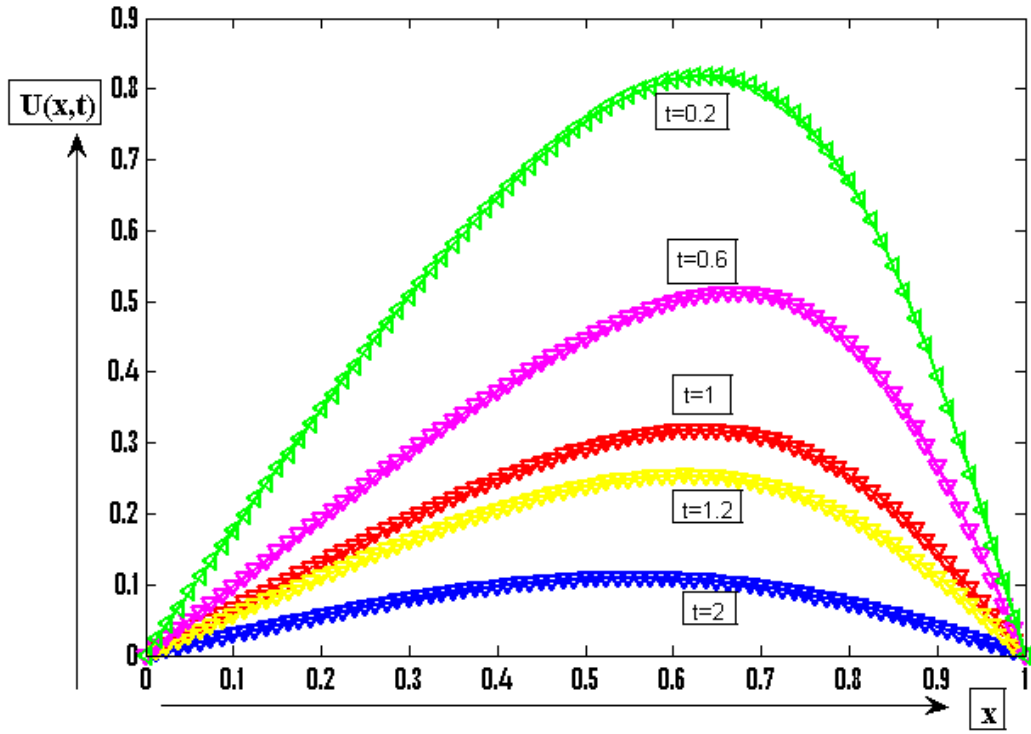
x	t	v = 1		v = 0.1		v = 0.01	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.096466	0.096442	0.429342	0.429317	0.466611	0.466583
	0.6	0.001890	0.001889	0.240759	0.240739	0.268978	0.268965
	1.0	0.000037	0.000036	0.162588	0.162565	0.188201	0.188194
	1.2	0.000005	0.000005	0.136465	0.136440	0.163591	0.163586
	2.0	0.000000	0.000000	0.068233	0.068206	0.107384	0.107381
0.50	0.2	0.138509	0.138473	0.753870	0.753811	0.848435	0.848365
	0.6	0.002674	0.002672	0.447281	0.447206	0.529452	0.529418
	1.0	0.000052	0.000052	0.292000	0.291916	0.374436	0.374420
	1.2	0.000007	0.000007	0.238593	0.238511	0.326069	0.326057
	2.0	0.000000	0.000000	0.107944	0.107890	0.214563	0.214558
0.75	0.2	0.099462	0.099435	0.749229	0.749139	0.962057	0.961891
	0.6	0.001891	0.001890	0.487465	0.487215	0.767333	0.767243
	1.0	0.000037	0.000036	0.287658	0.287474	0.556083	0.556051
	1.2	0.000005	0.000005	0.222741	0.222595	0.486035	0.486013
	2.0	0.000000	0.000000	0.086636	0.086579	0.321295	0.321282

Problem 2.1'e önce (3.27) yaklaşımı ve sonra (3.26) yaklaşımını uygulayarak (RGSFY) elde edilen nümerik çözümlerinin fiziksel davranışları görebilmek için $\Delta x = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$ iken çeşitli t zaman adımlarında $v=1$ için Şekil 4.7, $v=0.1$ için Şekil 4.8 ve $v=0.01$ için Şekil 4.9 verildi.

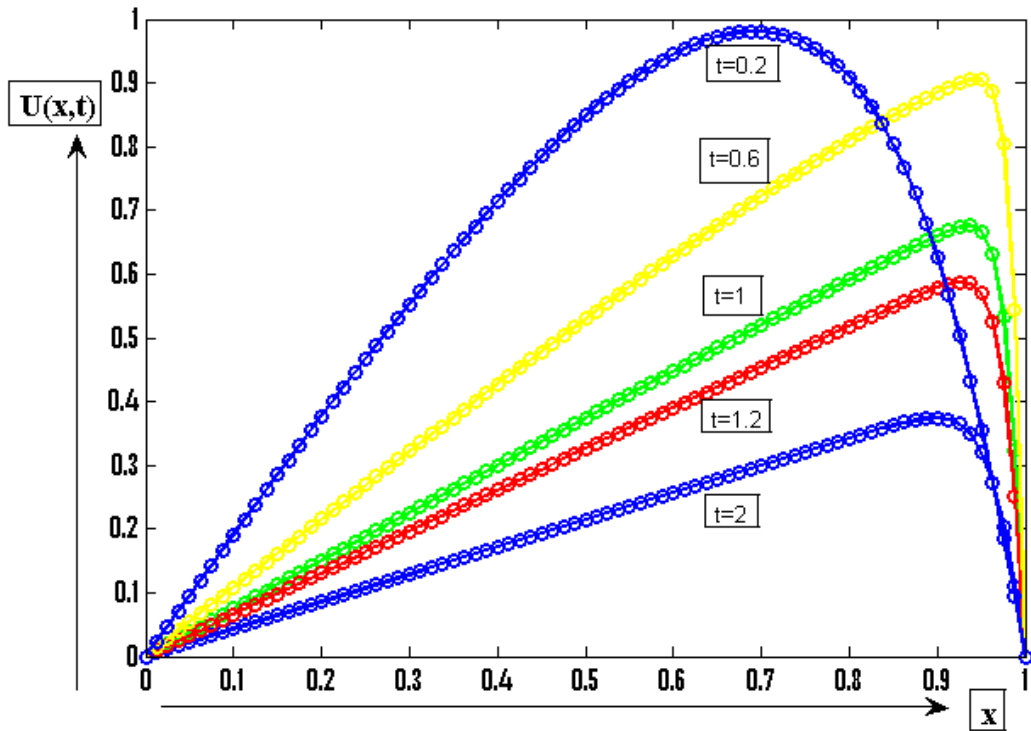
Nümerik çözümlerin problem 2.1'in fiziksel davranışlarını sergilediği görüldü. Viskozite parametresi v küçüldükçe sayısal çözümlerin sağa dik inişler yaptığı Şekil 4.9'da görülmektedir.



Şekil 4.7. $\Delta x = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v=1$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in RGSFY'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği



Şekil 4.8. $\Delta x=0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v=0.1$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in RGSFY'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği



Şekil 4.9. $\Delta x=0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v=0.0$ 1 iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in RGSFY'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği

Problem 2.2 önce (3.27) yaklaşımı ve sonra (3.26) yaklaşımını uygulayarak (RGSFY) Strang parçalama metoduna göre çözüldü. $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ için değişen Δx konum adım uzunluğu için elde edilen nümerik ve analitik çözümler L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte Tablo 4.17’de verildi. Küçülen Δx değerlerine bakıldığında nümerik çözüm analitik çözüme yaklaştığı ve L_2 , L_∞ hata miktarlarının düzenli azaldığı görüldü.

Tablo 4.17. Problem 2.2’nin RGSFY ile $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken Δx ’nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.113665	0.113086	0.112941	0.112904	0.112892
0.2	0.217773	0.216634	0.216348	0.216276	0.216252
0.3	0.303175	0.301521	0.301105	0.301001	0.300966
0.4	0.361646	0.359562	0.359038	0.358907	0.358863
0.5	0.386586	0.384216	0.383621	0.383472	0.383422
0.6	0.373914	0.371474	0.370862	0.370709	0.370658
0.7	0.323044	0.320811	0.320252	0.320112	0.320066
0.8	0.237665	0.235945	0.235514	0.235407	0.235371
0.9	0.125970	0.125031	0.124796	0.124738	0.124718
Hata Normu					
$L_2 \times 10^3$	2.276961	0.570837	0.142753	0.035637	
$L_\infty \times 10^3$	3.256663	0.816147	0.204694	0.051089	

Problem 2.2 RGSFY'e bağı Strang parçalama yöntemi ile çözüldü. $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için değişken t zaman değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri Tablo 4.17'de verildi. Bu tablo incelediğinde nümerik çözümlerin analitik çözümler ile uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 4.18. Problem 2.2'nin RGSFY ile $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	t	v = 1		v = 0.1		v = 0.01	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.099494	0.099470	0.446833	0.446807	0.499841	0.499828
	0.6	0.001951	0.001949	0.246158	0.246138	0.282052	0.282037
	1.0	0.000038	0.000038	0.165622	0.165599	0.194700	0.194690
	1.2	0.000005	0.000005	0.138958	0.138933	0.168502	0.168494
	2.0	0.000000	0.000000	0.069541	0.069514	0.109485	0.109482
0.50	0.2	0.142925	0.142888	0.773143	0.773101	0.867171	0.867136
	0.6	0.002759	0.002757	0.458051	0.457976	0.548338	0.548316
	1.0	0.000053	0.000053	0.298428	0.298343	0.385690	0.385676
	1.2	0.000007	0.000007	0.243765	0.243682	0.334908	0.334897
	2.0	0.000000	0.000000	0.110255	0.110199	0.218594	0.218588
0.75	0.2	0.102683	0.102655	0.773552	0.773440	0.969867	0.969734
	0.6	0.001952	0.001950	0.502938	0.502676	0.783056	0.782994
	1.0	0.000038	0.000038	0.296048	0.295857	0.569341	0.569319
	1.2	0.000005	0.000005	0.228949	0.228797	0.497161	0.497145
	2.0	0.000000	0.000000	0.088739	0.088680	0.326938	0.326926

4.4. CNSFY 1 Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile 1-Boyutlu Burgers Denkleminin Nümerik Çözümleri

Probleme önce (3.28) yaklaşımı ve sonra (3.26) yaklaşımını uygulamak CNSFY1 yaklaşımını oluştursun.

Problem 2.1 CNSFY1'ye bağlı Strang parçalama metodu ile çözüldüğünde nümerik çözümlerin analitik çözüme ne kadar yaklaştığını ölçmek için L_2 ve L_∞ hata normları göz önüne alındı.

$t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken değişen Δx konum adım uzunluğu değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümleri L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte Tablo 4.19'da verildi. Küçülen Δx değerleri için nümerik çözüm analitik çözüme yaklaştığı ve L_2, L_∞ hata miktarlarının azaldığı tespit edildi.

Tablo 4.19. Problem 2.1'nin CNSFY1 ile $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

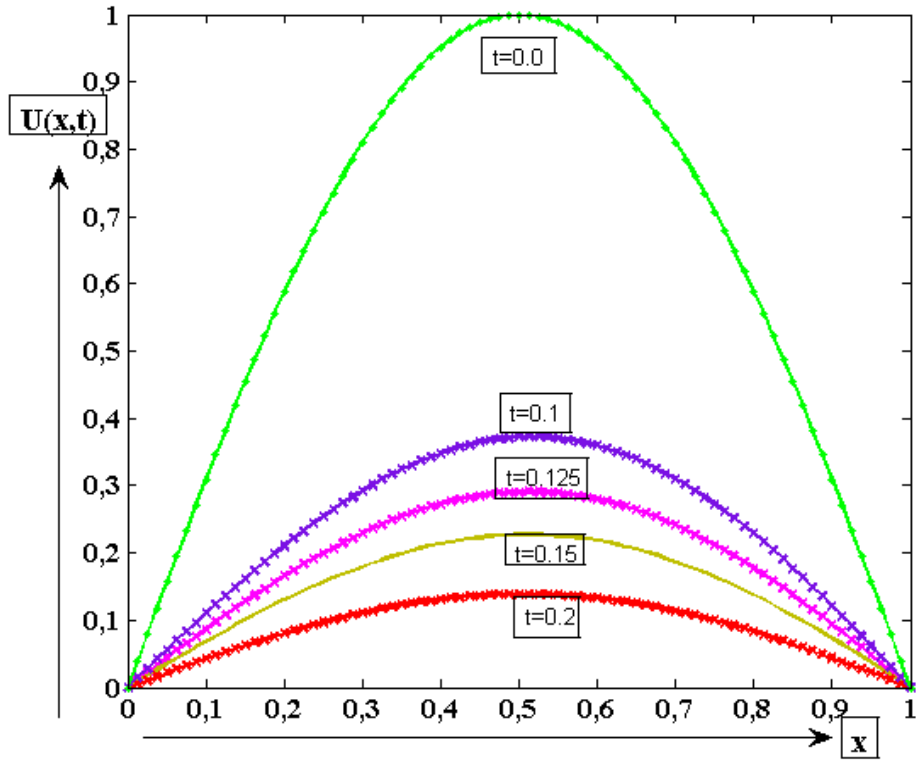
x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.108531	0.108792	0.109107	0.109308	0.109538
0.2	0.208375	0.208616	0.209092	0.209415	0.209792
0.3	0.290505	0.290542	0.291062	0.291441	0.291896
0.4	0.346731	0.346531	0.347038	0.347435	0.347924
0.5	0.370498	0.370175	0.370672	0.371075	0.371577
0.6	0.357862	0.357610	0.358128	0.358538	0.359046
0.7	0.308476	0.308456	0.309006	0.309413	0.309905
0.8	0.226281	0.226506	0.227032	0.227393	0.227817
0.9	0.119545	0.119827	0.120187	0.120420	0.120687
Hata Normu					
$L_2 \times 10^3$	1.210612	1.195978	0.741261	0.405671	
$L_\infty \times 10^3$	1.536096	1.451069	0.917938	0.507616	

Problem 2.1'in CNSFY1'ye bağı Strang parçalama metoduna göre $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için değişken t zaman adımlarında ($t=0.2$, $t=0.6$, $t=1.0$, $t=1.2$, $t=2.0$) elde edilen nümerik ve analitik çözümleri Tablo 4.20'de verildi. Bu tabloyu incelediğimizde nümerik çözümlerin analitik çözüme yakın olduğu görülmektedir

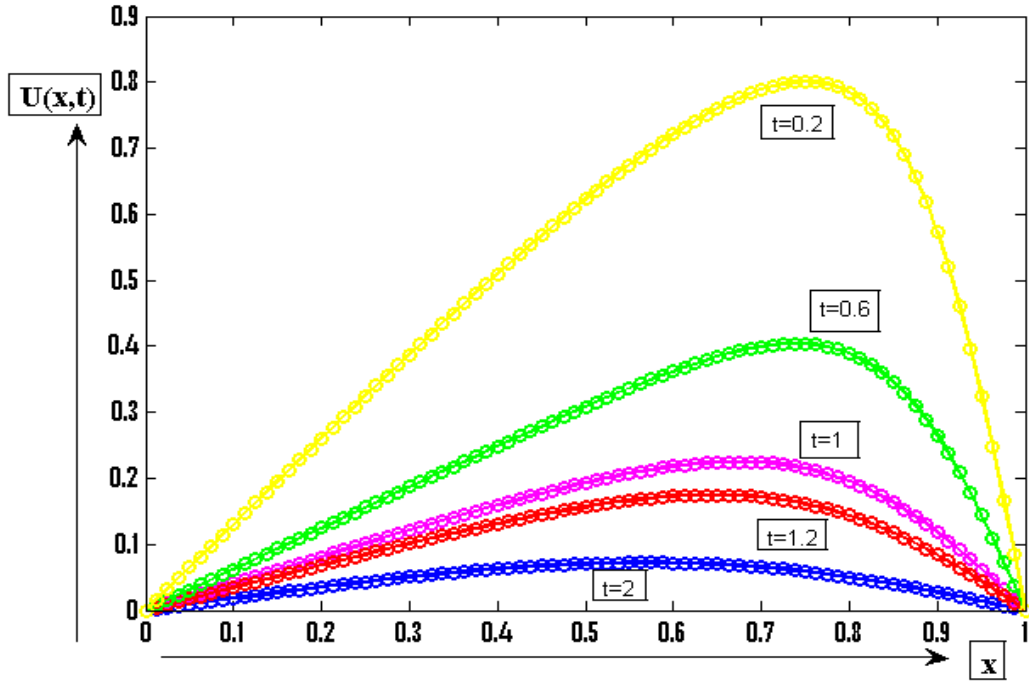
Tablo 4.20. Problem 2.1'in CNSFY1 ile $\Delta t = 0.00001$, $\Delta x = 0.0125$ iken $v=1$, $v=0.1$, $v=0.01$ değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	t	v = 1		v = 0.1		v = 0.01	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.096244	0.096442	0.426068	0.429317	0.461801	0.466583
	0.6	0.099227	0.001889	0.237924	0.240739	0.262590	0.268965
	1.0	0.000036	0.000036	0.160452	0.162565	0.182754	0.188194
	1.2	0.000005	0.000005	0.134589	0.136440	0.158658	0.163586
	2.0	0.000000	0.000000	0.067126	0.068206	0.103993	0.107381
0.50	0.2	0.138203	0.138473	0.751963	0.753811	0.846381	0.848365
	0.6	0.002667	0.002672	0.443567	0.447206	0.523542	0.529418
	1.0	0.000051	0.000052	0.288574	0.291916	0.368362	0.374420
	1.2	0.000007	0.000007	0.235473	0.238511	0.320251	0.326057
	2.0	0.000000	0.000000	0.106139	0.107890	0.210015	0.214558
0.75	0.2	0.099227	0.099435	0.745528	0.749139	0.961079	0.961891
	0.6	0.001886	0.001890	0.481738	0.487215	0.763178	0.767243
	1.0	0.000036	0.000036	0.282993	0.287474	0.550494	0.556051
	1.2	0.000005	0.000005	0.218844	0.222595	0.480407	0.486013
	2.0	0.000000	0.000000	0.084943	0.086579	0.316407	0.321282

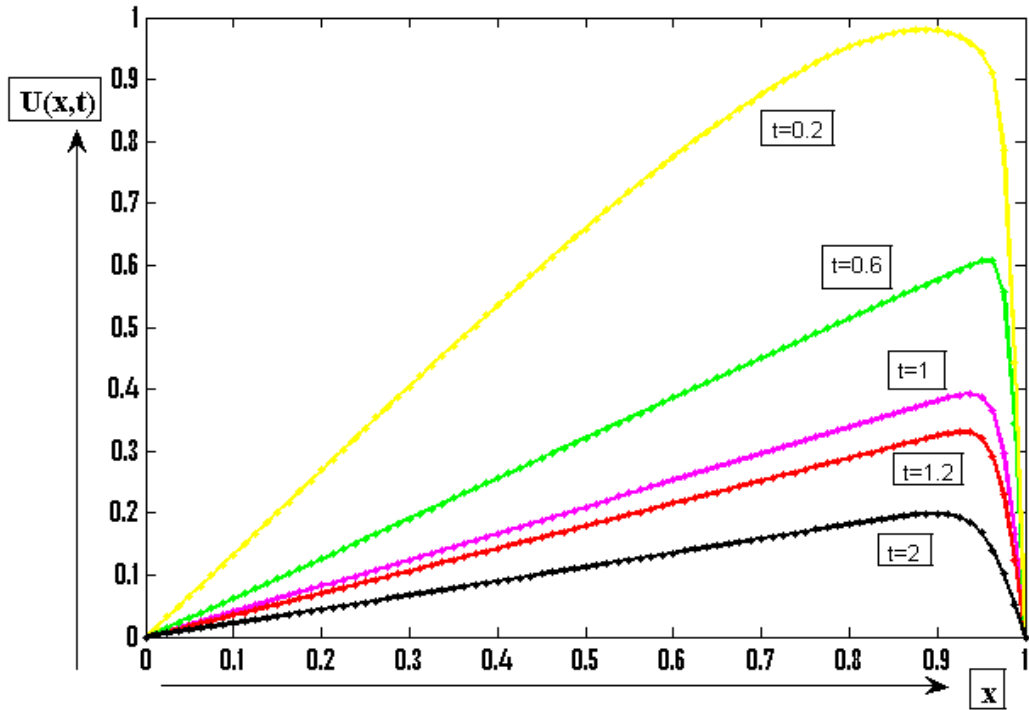
$\Delta x = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$ iken Problem 2.1 çeşitli t zaman adımlarında CNSFY1'ye bağlı Strang parçalama metodu ile çözdüğümüzde elde edilen nümerik çözümlerin fiziksel davranışını gösterebilmek için $v = 1$ iken Şekil 4.10, $v = 0.1$ iken Şekil 4.11 ve $v = 0.01$ iken Şekil 4.12 verildi. Farklı nümerik çözüm eğrileri tek bir grafikte çizildiği zaman nümerik çözümlerin Problem 2.1'in fiziksel davranışlarını sergilediği görülmektedir. Burgers' denkleminin fiziksel yapısından dolayı viskozite parametresi v küçüldükçe nümerik çözümlerin sağa keskin dönüşler yaptığı Şekil 4.12'de görülmektedir.



Şekil 4.10. $\Delta x = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v=1$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY1'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği



Şekil 4.11. $\Delta x=0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v=0.1$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY1'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği



Şekil 4.12. $\Delta x=0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v=0.0$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY1'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği

Problem 2.2'in CNSFY1'ye bağı Strang parçalama metoduna göre $t = 0.1$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu = 1$ iken değişen Δx adım uzunluğu için elde edilen nümerik ve analitik çözümler L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte Tablo 4.21 'de verildi. Küçülen Δx değerleri için nümerik çözümlerin analitik çözüme yaklaştığı ve L_2 , L_∞ hata miktarlarında azalma olduğu görüldü.

Tablo 4.21. Problem 2.2'nin CNSFY1 ile $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $\nu=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0. 111826	0. 112110	0. 112441	0. 112652	0. 112892
0.2	0. 214751	0. 215021	0. 215521	0. 215858	0. 216252
0.3	0. 299488	0. 299551	0. 300097	0. 300492	0. 300966
0.4	0. 357591	0. 357411	0. 357942	0. 358355	0. 358863
0.5	0. 382268	0. 381962	0. 382482	0. 382901	0. 383422
0.6	0. 369393	0. 369161	0. 369703	0. 370130	0. 370658
0.7	0. 318543	0. 318550	0. 319127	0. 319553	0. 320066
0.8	0. 233736	0. 233995	0. 234549	0. 234927	0. 235371
0.9	0. 123503	0. 123812	0. 124193	0. 124438	0. 124718
Hata Normu					
$L_2 \times 10^3$	1. 288220	1. 250113	0. 772776	0. 422558	
$L_\infty \times 10^3$	1. 634859	1. 515668	0. 955463	0. 527612	

Tablo 4.22 'te Problem 2.2 CNSFY1'ye bağı Strang parçalama yöntemi ile $\Delta t = 0.00001$, $\Delta x = 0.0125$ iken $\nu = 1$, $\nu = 0.1$, $\nu = 0.01$ değerleri için değişken t zaman adım değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri verildi. Tabloyu incelediğimizde nümerik çözümlerin analitik çözümlere yakın olduğu görüldü.

Tablo 4.22. Problem 2.2'in CNSFY1 ile $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $\nu=1$, $\nu=0.1$, $\nu=0.01$ değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0. 099262	0.099470	0. 443423	0. 446807	0. 494864	0. 499828
	0.6	0. 001945	0.001949	0. 243229	0. 246138	0. 275055	0. 282037
	1.0	0. 000038	0.000038	0. 163430	0. 165599	0. 188828	0. 194690
	1.2	0. 000005	0.000005	0. 137036	0. 138933	0. 163224	0. 168494
	2.0	0.000000	0.000000	0. 068406	0. 069514	0. 105929	0. 109482
0.50	0.2	0. 142605	0.142888	0. 771324	0. 773101	0. 865496	0. 867136
	0.6	0. 002752	0.002757	0. 454254	0. 457976	0. 542320	0. 548316
	1.0	0. 000053	0.000053	0. 294919	0. 298343	0. 379272	0. 385676
	1.2	0. 000007	0.000007	0. 240567	0. 243682	0. 328746	0. 334897
	2.0	0.000000	0.000000	0. 108399	0. 110199	0. 213817	0. 218588
0.75	0.2	0. 102436	0.102655	0. 770017	0. 773440	0. 969254	0. 969734
	0.6	0. 001947	0.001950	0. 497091	0. 502676	0. 779206	0. 782994
	1.0	0. 000038	0.000038	0. 291229	0. 295857	0. 563679	0. 569319
	1.2	0. 000005	0.000005	0. 224918	0. 228797	0. 491363	0. 497145
	2.0	0.000000	0.000000	0. 086990	0. 088680	0. 321827	0. 326926

4.5. CNSFY 2 Bağı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile 1-Boyutlu Burgers Denkleminin Nümerik Çözümleri

Probleme önce (3.29) yaklaşımı ve sonra (3.26) yaklaşımını uygulamak CNSFY2 yaklaşımını oluştursun.

Tablo 4.23 'de problem 2.1 CNSFY2'e bağı Strang parçalama yöntemi ile $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $\nu=1$ iken değişen Δx değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümler L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte verildi. Küçülen Δx değerlerine bakıldığında nümerik çözümlerin analitik çözümlere yaklaştığı görülmektedir. Tablo 4.23 incelendiğinde meydana gelen hata miktarında düzenli azalış olduğu anlaşılmaktadır.

Tablo 4.23. Problem 2.1'in CNSFY2 ile $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $\nu=1$ iken Δx 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.110454	0.109766	0.109595	0.109552	0.109538
0.2	0.211544	0.210229	0.209901	0.209819	0.209792
0.3	0.294331	0.292504	0.292048	0.291934	0.291896
0.4	0.350820	0.348647	0.348105	0.347969	0.347924
0.5	0.374660	0.372348	0.371770	0.371626	0.371577
0.6	0.362010	0.359787	0.359231	0.359092	0.359046
0.7	0.312450	0.310542	0.310064	0.309945	0.309905
0.8	0.229679	0.228284	0.227934	0.227846	0.227817
0.9	0.121669	0.120933	0.120748	0.120702	0.120687
Hata Normu					
$L_2 \times 10^3$	2.177558	0.544161	0.135976	0.033940	
$L_\infty \times 10^3$	3.082034	0.770080	0.192444	0.048074	

Problem 2.1'in CNSFY2'e bağı Strang parçalama metoduna göre $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $\nu=1$, $\nu=0.1$, $\nu=0.01$ değerleri için değişken t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri Tablo 4.24'te verildi. Tabloyu incelediğimizde nümerik çözümün analitik çözüm ile uyumlu olduğu görülmektedir.

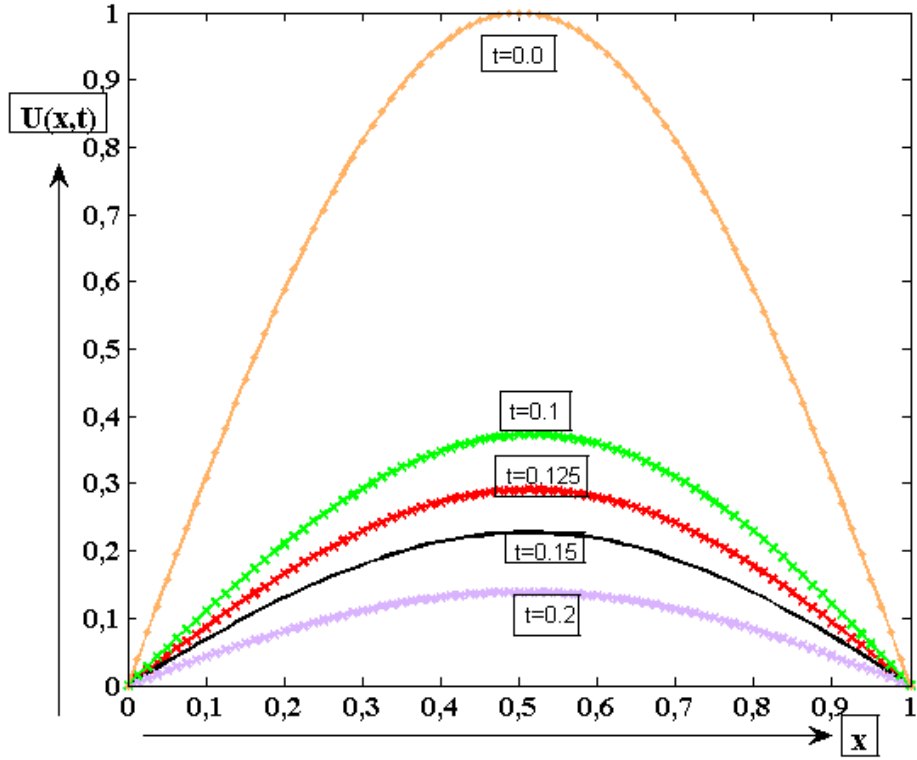
Tablo 4.24. Problem 2.1'in CNSFY2 ile $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $\nu=1$, $\nu=0.1$, $\nu=0.01$ değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.096466	0.096442	0.429379	0.429317	0.466653	0.466583
	0.6	0.001890	0.001889	0.240779	0.240739	0.268998	0.268965
	1.0	0.000037	0.000036	0.162597	0.162565	0.188211	0.188194
	1.2	0.000005	0.000005	0.136470	0.136440	0.163599	0.163586
	2.0	0.000000	0.000000	0.068230	0.068206	0.107387	0.107381
0.50	0.2	0.138509	0.138473	0.753909	0.753811	0.848503	0.848365
	0.6	0.002674	0.002672	0.447299	0.447206	0.529495	0.529418
	1.0	0.000052	0.000052	0.291994	0.291916	0.374458	0.374420
	1.2	0.000007	0.000007	0.238583	0.238511	0.326085	0.326057
	2.0	0.000000	0.000000	0.107935	0.107890	0.214570	0.214558
0.75	0.2	0.099461	0.099435	0.749108	0.749139	0.961975	0.961891
	0.6	0.001891	0.001890	0.487340	0.487215	0.767404	0.767243
	1.0	0.000037	0.000036	0.287582	0.287474	0.556118	0.556051
	1.2	0.000005	0.000005	0.222685	0.222595	0.486061	0.486013
	2.0	0.000000	0.000000	0.086620	0.086579	0.321305	0.321282

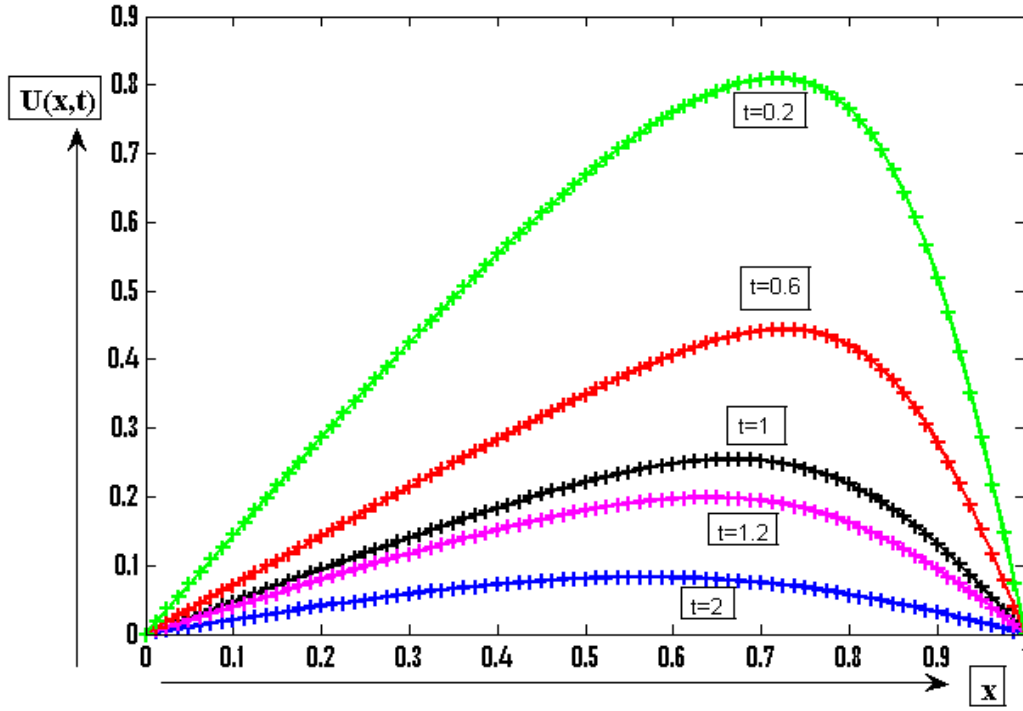
CNSFY2'e bağı Strang parçalama metodu ile Problem 2.1'in nümerik çözümlerinin fiziksel davranışlarını görmek için $\nu = 1$ için Şekil 4.13, $\nu = 0.1$ için Şekil 4.14 ve $\nu = 0.01$ için Şekil 4.15 verildi.

$\Delta x = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$ iken Problem 2.1 çeşitli t zaman adımlarında CNSFY2'mine bağı Strang parçalama metodu ile çözüldü.

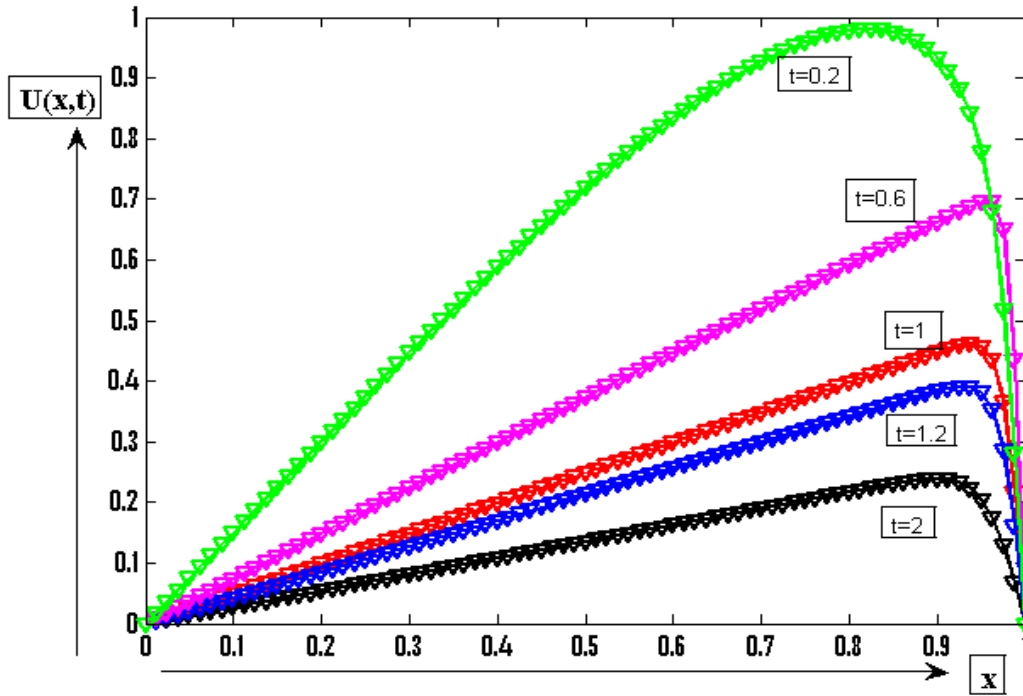
Farklı nümerik çözüm eğrileri tek bir grafikte çizildiği zaman nümerik çözümlerin Problem 2.1'in fiziksel davranışlarını sergilediği göstermektedir. Viskozite parametresi ν küçüldükçe grafiklerin keskin dönüşler yaptığı görülmektedir.



Şekil 4.13. $\Delta x=0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu = 1$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY2'ine bağı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği



Şekil 4.14. $\Delta x = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v = 0.1$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY2'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği



Şekil 4.15. $\Delta x = 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$, $v = 0.0$ iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY2'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği

Tablo 4.25’te problem 2.2’nin CNSFY2’e bağı Strang parçalama yöntemiyle $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ için değişen Δx değerleri için nümerik ve analitik çözümleri L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte verildi. Bu tablo incelendiğinde sayısal çözüm ile analitik çözüm kendi aralarında uyumlu olduğu gözükmemektedir. Azalan Δx değerleri için nümerik çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın azaldığı görülmektedir. Tabloyu incelediğimizde L_2 ve L_∞ hata miktarının düzenli azaldığı anlaşılmaktadır.

Tablo 4.25. Problem 2.2’nin CNSFY2 ile $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $v=1$ iken Δx ’nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.113838	0.113129	0.112951	0.112907	0.112892
0.2	0.218059	0.216704	0.216365	0.216280	0.216252
0.3	0.303472	0.301593	0.301123	0.301005	0.300966
0.4	0.361838	0.359609	0.359050	0.358910	0.358863
0.5	0.386586	0.384216	0.383621	0.383472	0.383422
0.6	0.373700	0.371422	0.370849	0.370706	0.370658
0.7	0.322680	0.320722	0.320230	0.320107	0.320066
0.8	0.237286	0.235852	0.235492	0.235401	0.235371
0.9	0.125730	0.124972	0.124782	0.124734	0.124718
Hata Normu					
$L_2 \times 10^3$	2.237810	0.561332	0.140396	0.035050	
$L_\infty \times 10^3$	3.163118	0.793551	0.198488	0.049596	

Problem 2.2'in CNSFY2'e bağı Strang parçalama metoduna göre $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken $\nu=1$, $\nu=0.1$, $\nu=0.01$ değerleri için değişken t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri Tablo 4.26'da verildi. Nümerik çözüm ile analitik çözümün uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 4.26. Problem 2.2'nin CNSFY2 ile $\nu=1$, $\nu=0.1$, $\nu=0.01$ $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken t 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.049596	0.099470	0.446882	0.446807	0.499917	0.499828
	0.6	0.001951	0.001949	0.295969	0.246138	0.282100	0.282037
	1.0	0.000038	0.000038	0.165631	0.165599	0.194725	0.194690
	1.2	0.000005	0.000005	0.138964	0.138933	0.168521	0.168494
	2.0	0.000000	0.000000	0.069539	0.069514	0.109494	0.109482
0.50	0.2	0.142925	0.142888	0.773186	0.773101	0.867234	0.867136
	0.6	0.002759	0.002757	0.458073	0.457976	0.548403	0.548316
	1.0	0.000053	0.000053	0.298424	0.298343	0.385731	0.385676
	1.2	0.000007	0.000007	0.243756	0.243682	0.334941	0.334897
	2.0	0.000000	0.000000	0.110245	0.110199	0.218610	0.218588
0.75	0.2	0.102682	0.102655	0.773423	0.773440	0.969816	0.969734
	0.6	0.001952	0.001950	0.502808	0.502676	0.783131	0.782994
	1.0	0.000038	0.000038	0.295969	0.295857	0.569392	0.569319
	1.2	0.000005	0.000005	0.228891	0.228797	0.497203	0.497145
	2.0	0.000000	0.000000	0.088724	0.088680	0.326959	0.326926

4.6. Parçalanmış Burgers' Denkleminin Değişik Lineerleştirme Teknikleri ile Elde Edilmiş Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması

$v=1$, $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken problem 2.1 ve problem 2.2'nin BAB, RGSFY, CNSFY1, CNSFY2 yaklaşımlarına bağlı nümerik sonuçlarının karşılaştırması sırası ile Tablo 4.27 ve Tablo 4.28 verildi. Bu tablolar incelendiğinde dört yöntemin nümerik sonuçları birbirleri ile uyumlu olduğu ve analitik çözüme yakın değerler oldukları görülüyor.

Tablo 4.27. $v=1$, $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken problem 2.1'in BAB, RGSFY, CNSFY1, CNSFY2'nün nümerik sonuçlarının karşılaştırması

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	<i>BAB</i>	<i>RGSFY</i>	<i>CNSFY1</i>	<i>CNSFY2</i>	
0.1	0.109550	0. 109550	0. 109308	0. 109552	0.109538
0.2	0.209815	0. 209815	0. 209415	0. 209819	0.209792
0.3	0.291930	0. 291930	0. 291441	0. 291934	0.291896
0.4	0.347966	0. 347966	0. 347435	0. 347969	0.347924
0.5	0.371625	0. 371626	0. 371075	0. 371626	0.371577
0.6	0.359095	0. 359095	0. 358538	0. 359092	0.359046
0.7	0.309950	0. 309950	0. 309413	0. 309945	0.309905
0.8	0.227852	0. 227852	0. 227393	0. 227846	0.227817
0.9	0.120705	0. 120705	0. 120420	0. 120702	0.120687
Hata Normu					
$L_2 \times 10^3$	0. 034501	0. 034501	0. 405671	0. 033940	
$L_\infty \times 10^3$	0. 049480	0. 049461	0. 507616	0. 048074	

Tablo 4.28. $v=1$, $t=0.1$, $\Delta t=0.00001$, $\Delta x=0.0125$ iken problem 2.2'nin BAB, RGSFY, CNSFY1, CNSFY2'nün nümerik sonuçlarının karşılaştırması

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	<i>BAB</i>	<i>CNSFY1</i>	<i>CNSFY2</i>	<i>CNSFY3</i>	
0.1	0.112904	0. 112904	0. 112652	0. 112907	0.112892
0.2	0.216276	0. 216276	0. 215858	0. 216280	0.216252
0.3	0.301001	0. 301001	0. 300492	0. 301005	0.300966
0.4	0.358907	0. 358907	0. 358355	0. 358910	0.358863
0.5	0.383472	0. 383472	0. 382901	0. 383472	0.383422
0.6	0.370709	0. 370709	0. 370130	0. 370706	0.370658
0.7	0.320112	0. 320112	0. 319553	0. 320107	0.320066
0.8	0.235407	0. 235407	0. 234927	0. 235401	0.235371
0.9	0.124738	0. 124738	0. 124438	0. 124734	0.124718
Hata Normu					
$L_2 \times 10^3$	0.035639	0. 035637	0. 422558	0. 035050	
$L_\infty \times 10^3$	0.051113	0. 051089	0. 527612	0. 049596	

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Crank-Nicolson sonlu fark yöntemlerine bağlı olarak Strang parçalama metodu ile Burgers' denkleminde değişik lineerleştirme teknikleri uygulandı. Bu yöntemlerin analitik çözüme ne kadar yakın olduğunu görebilmek için Matlab programı yardımı ile sayısal çözümleri elde edildi. Bu yöntemlere ait sayısal çözümler tablo ve grafikler çizilerek sunuldu.

Burgers' denklemini parçalama yöntemi ile çözmek için önce viskozitesiz Burgers' denklemini çözüp sonra ısı iletim denklemini çözmenin daha iyi sonuç verdiği görüldü.

Burgers' denklemini Strang parçalama metoduna bağlı CNSFY, RGSFY, CNSFY1 ve CNSFY2 yaklaşımları ile çözüldüğünde sayısal çözümlerin analitik çözümler ile uyumlu olduğu ve L_2 ve L_∞ hata miktarının yeterince küçük olduğu görüldü.

Problem 2.1'i CNSFY, RGSFY, CNSFY1 ve CNSFY2 yaklaşımları ile çözdüğümüzde elde edilen nümerik çözümlerinin fiziksel davranışları incelemek için çeşitli t zaman adımlarında $\nu=1$, $\nu=0.1$ ve $\nu=0.01$ için Matlab programı yardımı ile nümerik çözümlerin eğrileri çizildi. Viskozite parametresi ν küçüldükçe nümerik çözümlerin sağa keskin dönüşler yaptığı grafikler ile gösterildi.

KAYNAKÇA

- Aksan, E. N., 2005. A numerical solution of Burgers' equation by finite element method constructed on the method of discretization in time. *Applied mathematics and computation*, 170(2), 895-904.
- Aslan, İ., 2007, Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin benzerlik çözümleri üzerine, (Doktora tezi), *Matematik anabilim dalı*, Ege üniversitesi, Bornova-İzmir.
- Bhardwaj, D., Shankar, R., 2000. A computational method for regularized long wave equation. *Computers Mathematics with Applications*, 40(12), 1397-1404.
- Blanes, S., Moan, P. C., 2000. Splitting methods for the time-dependent Schrödinger equation. *Physics Letters A*, 265(1-2), 35-42.
- Blanes, S., Moan, P. C., 2001. Splitting methods for non-autonomous Hamiltonian equations. *Journal of Computational Physics*, 170(1), 205-230.
- Blanes, S., Casas, F., 2006. Splitting methods for non-autonomous separable dynamical systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(19), 5405.
- Blanes, S., Casas, F., Murua, A., 2010. Splitting methods with complex coefficients. *SeMA Journal*, 50(1), 47-60.
- Blanes, S., Seydaoglu, M., 2013. High-order splitting methods for separable non-autonomous parabolic equations. *Preprint*.
- Blanes, S., Casas, F., 2016. A concise introduction to geometric numerical integration. Chapman and Hall/CRC.
- Cole, J.D., 1951. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quarterly of applied mathematics*, 9(3), 225-236.
- Çelikkaya, İ., 2018, Operatör splitting B-Spline kolokasyon yöntemi ile bazı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri, (Doktora tezi), *Fen Bilimleri enstitüsü*, Malatya İnönü üniversitesi, Malatya
- Esen, A., Bahadır, A.R., 1998, M644 nümerik analizde özel konular fen bilimleri enstitüsü ödevi lineer denklem sistemlerinin çözümleri, *Fen Edebiyat Fakültesi*, İnönü üniversitesi, Malatya
- Gülsu, M., Öziş, T., 2005. Numerical solution of Burgers' equation with restrictive Taylor approximation. *Applied mathematics and computation*, 171(2), 1192-1200.
- Hansen, E., Ostermann, A., 2009. High order splitting methods for analytic semigroups exist. *BIT Numerical Mathematics*, 49(3), 527-542.

- Hansen, E., Ostermann, A., 2010. Dimension splitting for quasilinear parabolic equations. *IMA journal of numerical analysis*, 30(3), 857-869.
- Harwood, R.C., 2011, Operator Splitting Method and Applications Semilinear Parabolic Partial Differential Equations, (PhD Thesis), *Department of mathematics*, Washington state university
- Holden, H., Karlsen, K. H., Risebro, N. H., 1999. Operator splitting methods for generalized Korteweg–de Vries equations. *Journal of Computational Physics*, 153(1), 203-222.
- Holden, H., Karlsen, K., Risebro, N., Tao, T., 2011. Operator splitting for the KdV equation. *Mathematics of Computation*, 80(274), 821-846.
- Holden, H., Lubich, C., Risebro, N., 2013. Operator splitting for partial differential equations with Burgers nonlinearity. *Mathematics of Computation*, 82(281), 173-185.
- Hon, Y.C., Mao, X. Z., 1998. An efficient numerical scheme for Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 95(1), 37-50.
- Hopf, E., 1950. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu x x$. *Communications on Pure and Applied mathematics*, 3(3), 201-230.
- Inan, B., Bahadir, A. R., 2013. Numerical solution of the one-dimensional Burgers' equation: Implicit and fully implicit exponential finite difference methods. *Pramana*, 81(4), 547-556.
- Iskandar, L., Mohsen, A., 1992. Some numerical experiments on the splitting of Burgers' equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 8(3), 267-276.
- Jain, P. C., Shankar, R., Singh, T. V., 1992. Cubic spline technique for solution of Burgers' equation with a semi-linear boundary condition. *Communications in applied numerical methods*, 8(4), 235-242.
- Jiwari, R., 2012. A Haar wavelet quasilinearization approach for numerical simulation of Burgers' equation. *Computer Physics Communications*, 183(11), 2413-2423.
- Jiwari, R., 2015. A hybrid numerical scheme for the numerical solution of the Burgers' equation. *Computer Physics Communications*, 188, 59-67..
- Jiwari, R., Alshomrani, A. S., 2017. A new algorithm based on modified trigonometric cubic B-splines functions for nonlinear Burgers'-type equations. *International Journal of Numerical Methods for Heat Fluid Flow*, 27(8), 1638-1661.
- Kadalbajoo, M. K., Awasthi, A., 2006. A numerical method based on Crank-Nicolson scheme for Burgers' equation. *Applied mathematics and computation*, 182(2), 1430-1442.

- Kutluay, S., Esen, A., 2004. A linearized numerical scheme for Burgers-like equations. *Applied mathematics and computation*, 156(2), 295-305.
- Kutluay, S., Esen, A., Dag, I., 2004. Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 167(1), 21-33.
- Liao, W., 2008. An implicit fourth-order compact finite difference scheme for one-dimensional Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 206(2), 755-764.
- Lubich, C., 2008. On splitting methods for Schrödinger-Poisson and cubic nonlinear Schrödinger equations. *Mathematics of computation*, 77(264), 2141-2153.
- Malfliet, W., Hereman, W., 1996. The tanh method: I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations. *Physica Scripta*, 54(6), 563.
- Marchuk, G. I., 1968. Some application of splitting-up methods to the solution of mathematical physics problems. *Aplikace matematiky*, 13(2), 103-132.
- Mizrak, M., Ertaş, A., 2008, Hiperbolik tanjant yönteminin klasik boussinesq sistemine uygulanması. *Dicle University Journal of Ziya Gokalp Education Faculty*, 11.
- Muslu, G. M., Erbay, H. A., 2003. A split-step Fourier method for the complex modified Korteweg-de Vries equation. *Computers Mathematics with Applications*, 45(1-3), 503-514.
- Özis, T., Esen, A., Kutluay, S., 2005. Numerical solution of Burgers' equation by quadratic B-spline finite elements. *Applied Mathematics and Computation*, 165(1), 237-249.
- Özişik, M. N., Orlande, H. R., Colaço, M. J., Cotta, R. M., 2017. *Finite difference methods in heat transfer*. CRC press.
- Pandey, K., Verma, L., Verma, A. K., 2009. On a finite difference scheme for Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 215(6), 2206-2214.
- Rubin, S. G., Graves Jr, R. A., 1975. A cubic spline approximation for problems in fluid mechanics. *Nasa TR R-436*.
- Rouhi, A., Wright, J., 1995. A new operator splitting method for the numerical solution of partial differential equations. *Computer physics communications*, 85(1), 18-28.
- Saka, B., Dağ, İ., 2007. Quartic B-spline collocation method to the numerical solutions of the Burgers' equation. *Chaos, Solitons Fractals*, 32(3), 1125-1137.
- Saka, B., 2009. Cosine expansion-based differential quadrature method for numerical solution of the KdV equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(5), 2181-2190.

- Sari, M., Gürarlan, G., 2009. A sixth-order compact finite difference scheme to the numerical solutions of Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 208(2), 475-483.
- Seydaoğlu, M., 2010, 1-Boyutlu Burgers' denkleminin sonlu fark yöntemleri ile nümerik çözümleri, (yüksek lisans tezi), *Fen Bilimleri Enstitüsü*, İnönü üniversitesi, Malatya.
- Seydaoğlu, M., 2015, Burgers' tipi kısmi diferansiyel denklemlerin yüksek mertebeden parçalama(Splitting) metodları ile sayısal çözümleri üzerine, (Doktora tezi), *Fen bilimleri enstitüsü*, Ege üniversitesi, İzmir.
- Seydaoğlu, M., Erdoğan, U., Öziş, T., 2016. Numerical solution of Burgers' equation with high order splitting methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 291, 410-421.
- Seydaoğlu, M., 2018. An accurate approximation algorithm for Burgers' equation in the presence of small viscosity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 344, 473-481.
- Seydaoğlu, M., 2019. A Meshless Method for Burgers' Equation Using Multiquadric Radial Basis Functions with a Lie-Group Integrator. *Mathematics*, 7(2), 113.
- Shankar, R., Singh, T. V., Bassaif, A. A., 1995. Numerical solution of coupled burgers equations in inhomogeneous form. *International journal for numerical methods in fluids*, 20(11), 1263-1271.
- Smith, G.D., 1985, Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods. Oxford university press.
- Strang, G., 1968. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 5(3), 506-517.
- Uçar, Y., 2005, 1-Boyutlu Burgers' tipi denklemlerin sonlu fark çözümleri, (yüksek lisans tezi), *Matematik anabilmdalı*, İnönü üniversitesi, Malatya.
- Yoshida, H., 1990. Construction of higher order symplectic integrators. *Physics letters A*, 150(5-7), 262-268.
- Zhang, P. G., Wang, J. P., 2012. A predictor–corrector compact finite difference scheme for Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 219(3), 892-898.

Kontrol Edilecek Hususlar	Evet	Hayır
Sayfa yapısı uygun mu?	✓	
Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu?	✓	
Denklem yazımları uygun mu?	✓	
İç kapak, onay sayfası, tez bildirimi, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür uygun yazıldı mı?	✓	
Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır?	✓	
Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi?	✓	
Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu?	✓	
Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı?	✓	
Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir)	✓	
Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı?	✓	
Tez Önerisi Formunun (FBE Form 22) ilk sayfası ile birlikte materyal ve yöntem kısımlarını içeren sayfaların fotokopisini tezinizin içindekiler sayfasından önce telli zımbalı formda koydunuz mu?	✓	

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

Unvanı Adı SOYADI

Öğrenci : Aydın KAYA

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

İmza

Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına izin veriyorum.

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

Onaylayan Adı SOYADI

Dr. Öğretim Üyesi Harun ÖZÜ

Tarih

18.07.2019

İmza

ÖZGEÇMİŞ**KİŞİSEL BİLGİLER**

Adı Soyadı : Aydın KAYA
Uyruğu : T.C
Doğum Yeri ve Tarihi : Diyarbakır-10.09.1980
Telefon : 5079474909
Faks :
e-mail : etikahlak@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Ziya Gökalp Lisesi	1998
Üniversite	: Dicle Üniversitesi	2003
Yüksek Lisans:	Muş Alpaslan Üniversitesi	2019
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
9	PTT A.Ş	Memur

UZMANLIK ALANI:Matematik

YABANCI DİLLER : İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR