



**d -CEBİRLERDE GENELLEŞTİRİLMİŞ
 (α, β) -TÜREVLER**

Aslıhan ŞENBAKAR

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Damla YILMAZ**

**2024
Her hakkı saklıdır.**



**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

***d*-CEBİRLERDE GENELLEŞTİRİLMİŞ (α, β) -TÜREVLER**

Aslıhan ŞENBAKAR

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Damla YILMAZ

Ana Bilim Dalı: Matematik

Erzurum

2024

Her hakkı saklıdır

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

03 / 06 / 2024

Aslıhan ŞENBAKAR

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

d -CEBİRLERDE GENELLEŞTİRİLMİŞ (α, β) -TÜREVLER

Aslıhan ŞENBAKAR

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Damla YILMAZ

Bu tezde ilk olarak cebir türlerinin önemli temsilcilerinden biri olan BCK -cebirleri tanıtılmıştır ve bu cebirsel yapının bir genellemesi olarak karşımıza çıkan d -cebirleri temel özellikleri ile verilmiştir. İki farklı türev kavramının d -cebirlerde sağladığı özellikler sıralanmıştır. Daha sonra d -cebirlerde genelleştirilmiş (α, β) -türevler, α -ideal, G -invariant ideal tanımlanmıştır ve bunların özellikleri incelenmiştir. Son olarak da bir kenar d -cebiri üzerinde verilen sağ genelleştirilmiş (α, β) -türevler ile bu ideal türleri arasındaki ilişki araştırılmıştır.

2024, 37 sayfa

Anahtar Kelimeler: d -cebiri, Kenar d -cebiri, Genelleştirilmiş (α, β) -türev, G -invariant ideal

ABSTRACT

MS. Thesis

GENERALIZED (α, β) -DERIVATIONS ON d -ALGEBRAS

Aslıhan ŞENBAKAR

Erzurum Technical University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Maths

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Damla YILMAZ

In this thesis, firstly, BCK -algebras, one of the important representatives of algebra types, are introduced and d -algebras, which appear as a generalization of this algebraic structure, are given with their basic properties. The properties provided by two different derivation notions in d -algebras are listed. Then, generalized (α, β) -derivations, α -ideal, G -invariant ideal are defined in d -algebras and their properties are examined. Finally, the relationship between the right generalized (α, β) -derivation given on an edge d -algebra and these ideals types is investigated.

2024, 37 page

Keywords: d -algebra, Edge d -algebra, Generalized (α, β) -derivation, G -invariant ideal

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, bilgilerini benimle cömertçe paylaşan, bilgi ve tecrübesiyle bu çalışmayı yönlendiren saygıdeğer hocam Doç. Dr. Damla YILMAZ'a minnettarlığımı sunarım.

Bu günlere gelmemde büyük emeği olan, beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan ve daima desteklerini hissettiğim aileme çok teşekkür ederim. Ayrıca her konuda sabırla yardımcı olan eşim Burak DEMİREL'e desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Aslıhan ŞENBAKAR
Haziran 2024

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	6
3. TEMEL KAVRAMLAR	8
3.1. d -Cebirleri ve Temel Özellikleri.....	8
3.1. Kenar d -Cebirleri	12
4. d -CEBİRLERDE TÜREVLER	15
4.1. d -Cebirlerde Türev.....	15
4.2. d -Cebirlerde (α, β) -Türevler	19
5. d -CEBİRLERDE GENELLEŞTİRİLMİŞ (α, β) -TÜREVLER	25
5.1. d -Cebirlerde Genelleştirilmiş (α, β) -Türevlerin Tanımı ve Özellikleri	25
5.2. d -Cebirlerinin α -İdealleri ve G -İnvaryant İdealleri	34
6. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	36
KAYNAKLAR	37

1. GİRİŞ

Cebirsel mantık, on dokuzuncu yüzyılda cebirin bir alt disiplini olarak ortaya çıkmıştır. İlerleyen yıllarda, Boolean cebirleri, kafes (lattice) sıralı gruplar, *MV*-cebirleri (multi-value cebirleri) gibi sıralı sistemler ve mantık arasındaki ilişkiyi inceleyen birçok çalışma yapılmıştır. Bu cebir türleri küme teorisi ve matematiksel lojik konularından doğmuştur. Örneğin, kümelerdeki kesişim, birleşim ve fark işlemleri tanımlanarak bu işlemlerin özelliklerinin genelleştirilmesiyle Boolean cebiri kavramı çalışılmıştır. Birleşim ve kesişim işlemleri yardımıyla kafes kavramı tanımlanmıştır.

BCK-cebirleri ve BCI-cebirleri, Imai and Iseki (1966) tarafından tanıtılan iki mantık cebir sınıfıdır. Kümeler teorisinde bilinen

$$(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) \subseteq C \setminus B \text{ ve } A \setminus (A \setminus B) \subseteq B$$

bağıntıları temel alınarak BCK-cebiri kavramı ortaya atılmıştır.

p , q ve r birer önerme olmak üzere sadece “ $\Rightarrow$ ” bağlacının kullanılarak oluşturulduğu B , C ve K aksiyomları aşağıda verilmiştir.

$$(B) (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q))$$

$$(C) (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

$$(K) p \Rightarrow p$$

BCI lojik için gerekli *I* aksiyomu aşağıdaki şekildedir:

$$(I) p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

“ $\Rightarrow$ ” bağlacı yerine “ $*$ ” işlemini aşağıdaki gibi alalım.

$$p \Rightarrow q := p * q$$

1. GİRİŞ

X bir küme, “ $*$ ” bu küme üzerinde bir ikili işlem ve “ 0 ” bu kümenin bir elemanı olsun. Bu durumda her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X kümesine bir *BCI*-cebiri denir ve $(X; *, 0)$ ile gösterilir.

$$(BCI - 1) ((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0,$$

$$(BCI - 2) (x * (x * y)) * y = 0,$$

$$(BCI - 3) x * x = 0,$$

$$(BCI - 4) x * y = 0 \text{ ve } y * x = 0 \text{ ise } x = y \text{ dir.}$$

Bir *BCI*-cebirinde her $x \in X$ için

$$(BCK - 5) 0 * x = 0$$

koşulu sağlanıyorsa X kümesine bir *BCK*-cebiri denir.

X kümesi üzerindeki

$$“x * y = 0 \Leftrightarrow x \leq y”$$

bağıntısı düşünülerek *BCK*-cebirinin şartları aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

Her $x, y, z \in X$ için,

$$(BCI - 1') (x * y) * (x * z) \leq z * y,$$

$$(BCI - 2') x * (x * y) \leq y,$$

$$(BCI - 3') x \leq x,$$

$$(BCI - 4') x \leq y \text{ ve } y \leq x \text{ ise } x = y,$$

$$(BCI - 5') 0 \leq x,$$

1. GİRİŞ

BCK-cebirlerinin en iyi bilinen örnekleri aşağıda verilmiştir.

$X = \{0,1,2, \dots\}$ kümesi üzerinde

$$x * y = \begin{cases} x - y, & y < x \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

işlemi verilsin. Bu durumda $(X;*,0)$ bir BCK-cebiridir.

$X \neq \emptyset$ küme, $P(X)$ kuvvet kümesi olsun. $A, B \in P(X)$ için;

$$A * B = \begin{cases} A - B, & B \subseteq A \\ \emptyset, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

işlemi verilsin. Bu durumda $(P(X);*,\emptyset)$ bir BCK-cebiridir.

A herhangi bir boş olmayan küme ve X, A üzerinde tanımlı tüm reel değerli negatif olmayan fonksiyonların kümesi yani

$$X = \{f | f : A \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$$

olsun ve her $f, g \in X$ için;

$$(f * g)(x) = \begin{cases} f(x) - g(x), & g(x) < f(x) \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda, $(X;*,0)$ bir BCK-cebiridir.

BCK-cebirlerinin birçok genelleştirmesi vardır. Bunlardan biri Neggers and Kim (1999) tarafından tanımlanan d -cebirleridir. Neggers et al. (1999) d -alt cebir, d -ideal ve ilgili bazı kavramları tanımlayarak bunlar arasındaki ilişkiyi incelemiştir. d -cebirleri

geniş cebir sınıflarını içerdiğinden (*BCK*-cebiri olmayan) ve *d*-cebirlerinin özel çeşitleri de farklı yönlerle sahip olduğundan bu yapıyı incelemek gerekli olmuştur.

Halka teorisinde türev kavramı asal halkalardaki türevler üzerine oldukça ilgi çekici iki sonuç sunan Posner (1957) tarafından verilmiştir. Bu çalışmada herhangi bir halkada türev tanımı aşağıdaki şekilde vermiştir:

R bir halka ve *d*, *R* halkasının toplamsal bir dönüşümü olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

ise o zaman *d*, *R* halkasının bir türevi olarak adlandırılır.

Yazar bu çalışmasında asal halkaların yapısını, özellikle halkanın değişmeli olma koşullarını türev ile ilişkilendirerek incelemiştir.

Jun and Xin (2004) halka teorisindeki türev kavramını *BCI*-cebirlerine uygulamıştır. Yazarlar *BCI*-cebirlerinin türevlerini tanımlayarak özelliklerini araştırmışlardır. Ayrıca regüler türev, *d*-invariant kavramlarını vererek bir idealin *d*-invariant olması için gerekli koşulları vermişlerdir. İlerleyen yıllarda birçok araştırmacı bu çalışmalara farklı türev çeşitlerini inceleyerek devam etmiştir.

d-cebirlerinde türev kavramı Chandramouleeswaran and Kandaraj (2011) tarafından sunulmuştur. Son zamanlarda Al-Omary (2019), *d*-cebirleri üzerinde (α, β) -türev kavramını sunarak bazı özelliklerini araştırmıştır.

Bu tez altı ana başlıktan oluşmaktadır. İlk bölüm tez konusunun ortaya çıkış noktalarının bahsedildiği giriş bölümünden oluşmaktadır. İkinci bölümde kaynak özetleri hakkında bilgi verilmiş, üçüncü bölümde çalışmamızda kullanacağımız temel tanımlara ve özelliklere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise *d*-cebirlerinde türev ve (α, β) -türevlerin tanımı ve sağladıkları temel özelliklerden bahsedilmiştir. Bu tezin orijinal

1. GİRİŞ

kısmını ise d -cebirlerinin genelleştirilmiş (α, β) -türevlerinin tanımlandığı ve literatürde var olan bazı sonuçların bu türev çeşidine genelleştirildiği beşinci bölüm oluşturmaktadır. Çalışmanın sonuçlarına altıncı bölümde yer verilmiştir.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Imai and Iseki (1966) iki önemli cebir türü olan *BCK*-cebirlerini ve *BCI*-cebirlerini 1966 yılında tanımlamıştır. Bu kavramlar küme teorisi ve matematiksel lojik konularından ortaya çıkmıştır. Küme teorisinde kesişim, birleşim ve fark işlemleri kullanılarak bu işlemlerin özelliklerinin genelleştirilmesi yapılarak *Boolean* cebiri kavramı çalışılmıştır. Matematiksel lojikte *B*, *C* ve *K* aksiyomları temel alınarak *BCK*-cebi tanımlanarak bu konuda birçok çalışmalar yapılmıştır.

Asal halkalarda türev kavramı ilk kez Posner (1957) tarafından 1957 yılında çalışılmaya başlanmıştır. Daha sonra birçok matematikçi halka teorisindeki türev kavramını geliştirerek pek çok çalışma yapmıştır. Jun and Xin (2004) halka teorisindeki türev kavramını *BCI*-cebirlerine uygulamıştır. Al-Roqi (2014) *BCI*-cebirlerinde genelleştirilmiş (α, β) -türevlerin yapısını incelemiştir. Aynı yıl *BCI*-cebirlerinin sol (θ, φ) -türevleri Muhiuddin and Al-Roqi (2014) tarafından tanıtılmıştır.

Neggers and Kim (1999) *BCK*-cebirlerinin bir genellemesi olan *d*-cebirlerini aşağıdaki gibi tanımlamış ve bu cebirsel yapının birçok özel durumlarını incelemişlerdir.

Boş kümeden farklı bir *X* kümesi üzerinde “*” ikili işlemi ve “0” sabiti verilsin. Her $x, y \in X$ için aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(X, *, 0)$ cebirsel yapısına bir *d*-cebi denir.

$$(I) \ x * x = 0,$$

$$(II) \ 0 * x = 0,$$

$$(III) \ x * y = 0 \text{ ve } y * x = 0 \text{ ise } x = y \text{ dir.}$$

Kenar *d*-cebi kavramı yine Neggers and Kim (1999) tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bizim çalışmamızda da sıklıkla kullandığımız kenar *d*-cebi şu şekilde tanımlanmıştır:

X bir *d*-cebi ve $x \in X$ olsun. Eğer herhangi bir $x \in X$ için

$$x * X = \{0, x\}$$

oluyor ise X e bir kenar d -cebiri denir, burada $x * X = \{x * y | y \in X\}$ şeklindedir.

Neggers et al. (1999) d -alt cebir, d -ideal ve ilgili bazı kavramları vererek bunlar arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

Türev kavramı d -cebirlerinde Kandaraj and Chandramouleeswaran (2011) tarafından verilmiş ve birçok temel özellikleri incelenmiştir.

Al-Omary (2019) çalışmasında d -cebirlerinde (α, β) -türevleri tanımlamıştır. Halkalarda, BCK/BCI -cebirlerinde verilen bu kavramı ve bazı önemli sonuçları d -cebirleri için incelemiştir. Bu çalışmada regüler (α, β) -türevler için bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca $d_{(\alpha, \beta)}$ -invariant, α -ideal ve β -ideal kavramları aralarındaki ilişkilerle açıklanmıştır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde d -cebirleri için bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bu cebirsel yapı ile BCK -cebirleri arasındaki ilişkiler örneklerle açıklanmıştır.

3.1. d -Cebirleri ve Temel Özellikleri

Tanım 3.1.1: Boş kümeden farklı bir X kümesi üzerinde “ $*$ ” ikili işlemi ve “ 0 ” sabiti verilsin. Her $x, y \in X$ için aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(X, *, 0)$ cebirsel yapısına bir d -cebiri denir.

$$(I) \ x * x = 0,$$

$$(II) \ 0 * x = 0,$$

$$(III) \ x * y = 0 \text{ ve } y * x = 0 \text{ ise } x = y \text{ dir.}$$

Bir BCK -cebiri aşağıda verilen ek aksiyomları sağlayan bir $(X, *, 0)$ d -cebiridir. Her $x, y, z \in X$ için

$$(IV) \ ((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0,$$

$$(V) \ (x * (x * y)) * y = 0 \text{ (Neggers and Kim 1999).}$$

Örnek 3.1.2: Her BCK -cebiri bir d -cebiridir (Neggers and Kim 1999).

Örnek 3.1.3: $X = \{0, 1, 2\}$ kümesi üzerinde “ $*$ ” işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	2	0	2
2	1	1	0

Bu durumda $(X, *, 0)$ bir d -cebiridir. Burada

$$(2 * (2 * 2)) * 2 = (2 * 0) * 2 = 1 * 2 = 2 \neq 0$$

olduğundan X bir BCK -cebiri değildir (Neggers and Kim 1999).

Uyarı 3.1.4: (1) Bir $(X, *, 0)$ d -cebiri birleşmeli ise

$$0 * x = 0 = (x * x) * x = x * (x * x) = x * 0$$

sağlanır. Böylece (III) özelliğinden $x = 0$ olur. Yani d -cebirleri “en birleşmeli olmayan” cebirlerdir.

(2) $(X, *, 0)$ bir d -cebiri olsun. Eğer $S \subseteq X$ kümesi “*” işlemi altında kapalı ise $x \in S$ için $x * x = 0 \in S$ olur. Dolayısıyla $(S, *, 0)$ bir d -cebiridir (Neggers and Kim 1999).

Önerme 3.1.5: X bir d -cebiri olsun. Eğer $x \neq y$ ve $x * y = 0$ ise $y * x \neq 0$ dır (Neggers et al. 1999).

Tanım 3.1.6: X bir d -cebiri ve S kümesi X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in S$ için $x * y \in S$ oluyorsa S kümesine X in bir d -alt cebiri denir (Neggers et al. 1999).

Tanım 3.1.7: X bir d -cebiri ve $\emptyset \neq I \subseteq X$ olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa I kümesi X in bir BCK -idealidir denir.

(1) $0 \in I$,

(2) $x * y \in I$ ve $y \in I \Rightarrow x \in I$ dır (Neggers et al. 1999).

Tanım 3.1.8: X bir d -cebiri ve $\emptyset \neq I \subseteq X$ olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa I kümesi X in bir d -idealidir denir.

(1) $x * y \in I$ ve $y \in I \Rightarrow x \in I$,

(2) $x \in I$ ve $y \in X \Rightarrow x * y \in I$ yani $I * X \subseteq I$ dır (Neggers et al. 1999).

Örnek 3.1.9: $X = \{0, a, b, c, d\}$ kümesi “*” işlemi ile birlikte *BCK*-cebiri olmayan bir *d*-cebiri olsun.

*	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	0	a
b	b	b	0	c	0
c	c	c	b	0	c
d	c	c	a	a	0

Bu durumda $I = \{0, a\}$ kümesi X in bir *d*-idealidir (Neggers et al. 1999).

Örnek 3.1.10: $X = \{0, a, b, c\}$ kümesi “*” işlemi ile birlikte *BCK*-cebiri olmayan bir *d*-cebiri olsun.

*	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	a
b	b	b	0	0
c	c	c	a	0

Bu durumda $J = \{0, a, c\}$ kümesi Tanım 3.1.8 de verilen (2) koşulunu sağlar. Burada $b * c = 0 \in J$ ve $c \in J$ olduğunda $b \notin J$ dir. Yani Tanım 3.1.7 de verilen (2) koşulu

sağlanmamaktadır. Dolayısıyla J kümesi X in bir d -alt cebiri olmasına rağmen bir BCK -ideali değildir (Neggers et al. 1999).

Uyarı 3.1.11: $\{0\}$ kümesi her X d -cebirinin bir d -alt cebiridir. Ayrıca X in her d -ideali bir d -alt cebiridir. Ancak tersi genel olarak doğru değildir (Neggers et al. 1999).

Örnek 3.1.12: $X = \{0, a, b, c\}$ kümesi “ $*$ ” işlemi ile birlikte BCK -cehiri olmayan bir d -cehiri olsun.

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	b
b	b	b	0	0
c	c	c	c	0

Bu durumda $I = \{0, a\}$ kümesi X in bir d -alt cebiridir. Fakat $a * c = b \notin I$ olduğundan X in bir d -ideali değildir (Neggers et al. 1999).

Lemma 3.1.13: Eğer I , X d -cebirinin bir ideali ise $0 \in X$ sağlanır (Neggers et al. 1999).

Önerme 3.1.14: Bir X d -cebirinin her d -ideali bir BCK -idealdir (Neggers et al. 1999).

Uyarı 3.1.15: Önerme 3.1.14 ün tersinin her zaman doğru olmadığına aşağıdaki örnek verilebilir (Neggers et al. 1999).

Örnek 3.1.16: Örnek 3.1.12 de verilen $I = \{0, a\}$ kümesi X in bir BCK -idealidir fakat X in bir d -ideali değildir (Neggers et al. 1999).

Önerme 3.1.17: I , bir X d -cebirinin d -ideali olsun. Eğer $x \in I$ ve $y * x = 0$ ise $y \in I$ sağlanır (Neggers et al. 1999).

Tanım 3.1.18: $(X, *, 0)$ bir d -cebiri olsun. X üzerinde “ $\leq$ ” bağıntısı

$$\forall x, y \in X, x \leq y \Leftrightarrow x * y = 0$$

şeklinde tanımlanır. Bu bağıntı ile $(X, \leq)$ bir kısmi sıralı kümedir (Neggers and Kim 1999).

3.2. Kenar d -Cebirleri

Tanım 3.2.1: X bir d -cebiri ve $x \in X$ olsun. Eğer herhangi bir $x \in X$ için

$$x * X = \{0, x\}$$

oluyor ise X e bir kenar d -cebiri denir, burada $x * X = \{x * y | y \in X\}$ şeklindedir (Neggers and Kim 1999).

Örnek 3.2.2: Aşağıdaki tablo ile verilen X d -cebirini ele alalım.

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	2	0	0
3	3	3	3	0

Burada her $x \in X$ için $x * X = \{x, 0\}$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla X bir kenar d -cebiridir (Neggers and Kim 1999).

Uyarı 3.2.3: $(X, \leq)$ bir sıralı küme olsun. Bu durumda X kümesi

$$x * y = \begin{cases} 0, & x \leq y \\ x, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı “*” işlemi ile bir *BCK*-cebiridir. Diğer taraftan “*” işleminin tanımı gereği bu *BCK*-cebiri kenar özelliğine sahiptir. Kenar *d*-cebirleri genelde *BCK*-cebirleri değildir (Neggers and Kim 1999).

Örnek 3.2.4: $X = \{0,1,2,3\}$ ve * ikili işlemi aşağıdaki tablo ile tanımlansın.

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	1	0	2
3	3	3	3	0

Burada $(X,*,0)$ bir *BCK*-cebiridir ancak $2 * 1 = 1$ olduğundan kenar *d*-cebiri değildir (Neggers and Kim 1999).

Önerme 3.2.5: Eğer X bir kenar *d*-cebiri ise herhangi bir $x \in X$ için

$$x * 0 = x$$

dir (Neggers and Kim 1999).

Önerme 3.2.6: $(X,*,0)$ bir kenar *d*-cebiri olsun. Bu durumda

$$(x * (x * y)) * y = 0$$

eşitliği sağlanır (Neggers and Kim 1999).

Önerme 3.2.7: $(X,*,0)$ kenar özelliği olmayan bir *d*-cebiri olsun. Bu durumda

$$x \oplus y := \begin{cases} x, & x * y \neq 0 \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\oplus: X \times X \rightarrow X$ ikili işlemine göre $(X, \oplus, 0)$ sistemi bir kenar d -cebiri oluşturur (Neggers and Kim 1999).

Tanım 3.2.8: $(X, *, 0)$ ve $(Y, *, 0)$ iki d -cebiri ve $\delta: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$\delta(a * b) = \delta(a) * \delta(b)$$

eşitliği sağlanıyorsa δ ya bir d -homomorfizma denir (Neggers and Kim 1999).

Önerme 3.2.9: $(X, *, 0)$ ve $(Y, *, 0)$ d -cebirleri ve $\delta: X \rightarrow Y$ bir d -homomorfizma olsun. Bu durumda $\delta(0) = 0$ dır (Neggers and Kim 1999).

4. d-CEBİRLERDE TÜREVLER

Bu bölümde d -cebirlерinde türevler ve (α, β) -türevler; tanımları, örnekleri ve sağladıkları özellikleri ile verilecektir.

4.1. d -Cebirlerde Türev

$(X, *, 0)$ bir d -cebiri olsun. Bu bölümde herhangi $x, y \in X$ için $x * y$ işlemi xy şeklinde yazılacaktır. Ayrıca X bir d -cebiri olmak üzere $x, y \in X$ için

$$x \wedge y = y(yx)$$

işlemi kullanılacaktır.

Tanım 4.1.1: X bir d -cebiri olsun. Eğer $\theta: X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$\theta(xy) = (\theta(x)y) \wedge (x\theta(y))$$

koşulunu sağlıyor ise θ dönüşümüne X in bir sol-sağ türevi denir. Her $x, y \in X$ için

$$\theta(xy) = (x\theta(y)) \wedge ((\theta(x)y)$$

koşulu sağlanıyor ise θ dönüşümüne X in bir sağ-sol türevi denir. Eğer θ , X in hem sol-sağ hem de sağ-sol türevi ise θ dönüşümüne X d -cebirinin bir türevi denir (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

Örnek 4.1.2: $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi üzerinde bir “*” işlemi aşağıdaki gibi verilsin.

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0
3	3	3	1	0	0	0
4	4	2	1	1	0	0
5	5	5	5	3	1	0

Bu durumda X bir d -cebiri. $\theta_1: X \rightarrow X$ ve $\theta_2: X \rightarrow X$ dönüşümleri

$$\theta_1(x) = \begin{cases} 0, & x = 0,1,3,5 \\ 2, & x = 2,4 \end{cases}, \quad \theta_2(x) = \begin{cases} 0, & x = 0,1,3 \\ 2, & x = 2,4,5 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada θ_1 dönüşümü hem sol-sağ hem de sağ-sol türevdir. θ_2 dönüşümü ise sağ-sol türev olmasına rağmen sol-sağ türev değildir (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

Tanım 4.1.3: X d -cebiri üzerinde tanımlanan bir θ dönüşümü için $\theta(0) = 0$ oluyorsa θ ya regülerdir denir (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

Önerme 4.1.4: $(X, *, \theta)$ bir d -cebiri olsun. Eğer $\theta: X \rightarrow X$ dönüşümü bir sol-sağ türev ise regülerdir (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

Sonuç 4.1.5: θ, X d -cebirinin bir türevi ise regülerdir (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

Önerme 4.1.6: X bir d -cebiri olsun. Eğer her $x \in X$ için $x0 = x$ ise her sağ-sol türev regülerdir (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

Uyarı 4.1.7: Bir kenar d -cebirinde her sağ-sol türev regülerdir (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

Önerme 4.1.8: X , her $x \in X$ için $x0 = x$ koşulunu sağlayan bir d -cebiri olsun.

(1) Eğer θ, X in bir sol-sağ türevi ise her $x \in X$ için $\theta(x) = \theta(x) \wedge x$ dir.

(2) Eğer θ, X in bir sağ-sol türevi ise her $x \in X$ için $\theta(x) = x \wedge \theta(x)$ dir
(Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

Önerme 4.1.9: X , her $x \in X$ için $x0 = x$ koşulunu sağlayan bir d -cebiri ve θ, X d -cebirinin bir türevi olsun. Bu durumda her $x \in X$ için

$$(x(x\theta(x)))x = (\theta(x)(\theta(x)x))x$$

eşitliği sağlanır (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

Uyarı 4.1.10: θ, X kenar d -cebirinin bir türevi ise her $x \in X$ için

$$[x(x(\theta(x)))x] = [\theta(x)(\theta(x)x)]x = 0$$

eşitliği sağlanır (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

Tanım 4.1.11: X bir kenar d -cebiri olsun. X üzerinde “ $\leq$ ” bağıntısı her $x, y \in X$ için aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x \leq y \Leftrightarrow xy = 0$$

Bu durumda $(X, \leq)$ bir kısmi sıralı kümedir (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

Önerme 4.1.12: X bir kenar d -cebiri ve θ, X in bir türevi olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $\theta(x) \leq x$,

(2) $\theta(xy) \leq x\theta(y)$,

$$(3) \theta(xy) \leq \theta(x)y,$$

$$(4) \theta(x\theta(x)) = 0,$$

$$(5) \theta(\theta(x)) \leq x,$$

(6) $\theta^{-1}(0) = \{x \in X | \theta(x) = 0\}$ kümesi X in bir d -alt cebiridir (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

Önerme 4.1.13: X bir kenar d -cebiri ve $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ dönüşümleri X in türevleri olsun. Bu durumda her $x \in X$ için

$$\theta_n \left(\theta_{(n-1)} \theta_{(n-2)} \dots \left(\theta_2 (\theta_1(x)) \right) \right) \leq x$$

sağlanır (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

Tanım 4.1.14: θ , X kenar d -cebirinin bir türevi olsun. X in bir I ideali için $\theta(I) = \{\theta(x) | x \in I\}$ olmak üzere $\theta(I) \subseteq I$ oluyor ise I ya θ -invariant denir (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

Örnek 4.1.15: $X = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde “*” işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0
3	3	3	1	0	0	0
4	4	2	1	1	0	0
5	5	5	5	3	1	0

Bu durumda X bir kenar d -cebiridir. $\theta: X \rightarrow X$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x = 0,1,3 \\ 2, & x = 2,4 \end{cases}$$

dönüşümü X üzerinde bir türevdir ve $I = \{0,2\}$ d -ideali, θ -invarianttır (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

Örnek 4.1.16: $X = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde “*” işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0
3	3	3	3	0	0	0
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	5	5	0

Bu durumda X bir kenar d -cebiri. $\theta: X \rightarrow X$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x = 0,1,2,3,4 \\ x, & x = 5 \end{cases}$$

dönüşümü X üzerinde bir türevdir ve $I = \{0,1,2,3,4\}$ d -ideali, θ -invarianttır (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

Teorem 4.1.17: θ, X kenar d -cebirinin bir türevi olsun. Bu durumda X in her d -ideali θ -invarianttır (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011).

4.2. d-Cebirlerde (α, β) -Türevler

Tanım 4.2.1: X bir d -cebiri ve $\alpha: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x * y) = \alpha(x) * \alpha(y)$$

oluyorsa α dönüşümüne bir endomorfizm denir. Bu durumda $\alpha(0) = 0$ dır (Al-Omary 2019).

Bu bölüm boyunca α ve β , X üzerinde endomorfizmalar olarak alınacaktır.

Tanım 4.2.2: X bir d -cebiri olsun. $d_{(\alpha,\beta)}: X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$d_{(\alpha,\beta)}(xy) = d_{(\alpha,\beta)}(x)\alpha(y) \wedge \beta(x)d_{(\alpha,\beta)}(y)$$

koşulunu sağlanıyorsa bu dönüşüme X in bir sol-sağ (α, β) -türevi denir.

Eğer her $x, y \in X$ için

$$d_{(\alpha,\beta)}(xy) = \alpha(x)d_{(\alpha,\beta)}(y) \wedge d_{(\alpha,\beta)}(x)\beta(y)$$

koşulu sağlanıyorsa $d_{(\alpha,\beta)}$ dönüşümüne X in bir sağ-sol (α, β) -türevi denir.

Eğer $d_{(\alpha,\beta)}$ dönüşümü X in hem sol-sağ (α, β) -türevi hem de sağ-sol (α, β) -türevi ise $d_{(\alpha,\beta)}$ dönüşümüne X d -cebirinin (α, β) -türevi denir (Al-Omary 2019).

Örnek 4.2.3: $X = \{0,1,2,3\}$ kümesi üzerinde “*” işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	2	0	0
3	3	3	3	0

X üzerinde $g_{(\alpha,\beta)}:X \rightarrow X$ dönüşümü ve α ve β endomorfizmleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$g_{(\alpha,\beta)}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0,1,2 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$$

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x = 0,1,2 \\ 2, & x = 3 \end{cases}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} 0, & x = 0,1,2 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$$

Burada $g_{(\alpha,\beta)}$ sol-sağ (α, β) -türevdir. Ancak $g_{(\alpha,\beta)}$ sağ-sol (α, β) -türev değildir. Çünkü

$$g_{(\alpha,\beta)}(31) = g_{(\alpha,\beta)}(3) = 3$$

ve

$$\alpha(3)g_{(\alpha,\beta)}(1) \wedge g_{(\alpha,\beta)}(3)\beta(1) = 0$$

dır (Al-Omary 2019).

Teorem 4.2.4: X bir d -cebiri olsun.

(1) Eğer $d_{(\alpha,\beta)}$ bir sol-sağ (α, β) -türev ise $d_{(\alpha,\beta)}$ regülerdir.

(2) Eğer X bir kenar d -cebiri ve $d_{(\alpha,\beta)}$ bir sağ-sol (α, β) -türev ise $d_{(\alpha,\beta)}$ regülerdir (Al-Omary 2019).

Teorem 4.2.5: X bir kenar d -cebiri olsun.

(1) Eğer $d_{(\alpha,\beta)}$ bir sol-sağ (α, β) -türev ise her $x \in X$ için

$$d_{(\alpha,\beta)}(x) = d_{(\alpha,\beta)}(x) \wedge \beta(x)$$

eşitliği sağlanır.

(2) Eğer $d_{(\alpha,\beta)}$ bir sağ-sol (α, β) -türev ise her $x \in X$ için

$$d_{(\alpha,\beta)}(x) = \alpha(x) \wedge d_{(\alpha,\beta)}(x)$$

eşitliği sağlanır (Al-Omary 2019).

Teorem 4.2.6: X bir d -cebiri ve $d_{(\alpha,\beta)}: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun.

Eğer $d_{(\alpha,\beta)} = \alpha(x)$ ise

(1) $d_{(\alpha,\beta)}$ bir (α, β) -türevdir.

(2) $d_{(\alpha,\beta)}(xy) = d_{(\alpha,\beta)}(x)d_{(\alpha,\beta)}(y)$ sağlanır (Al-Omary 2019).

Tanım 4.2.7: X bir d -cebiri ve $d_{(\alpha,\beta)_1}, d_{(\alpha,\beta)_2}: X \rightarrow X$ dönüşümler olsun. Bu durumda her $x \in X$ için

$$d_{(\alpha,\beta)_1} \circ d_{(\alpha,\beta)_2}: X \rightarrow X, \quad d_{(\alpha,\beta)_1} \circ d_{(\alpha,\beta)_2}(x) = d_{(\alpha,\beta)_1}(d_{(\alpha,\beta)_2}(x))$$

şeklinde tanımlanır (Al-Omary 2019).

Teorem 4.2.8: X bir d -cebiri olsun. $d_{(\alpha,\beta)_1}$ ve $d_{(\alpha,\beta)_2}$, X üzerinde $\alpha^2 = \alpha$ koşulunu sağlayan iki sol-sağ (α, β) -türev ise $d_{(\alpha,\beta)_1} \circ d_{(\alpha,\beta)_2}$ dönüşümü de X üzerinde bir sol-sağ (α, β) -türevdir (Al-Omary 2019).

Lemma 4.2.9: X bir d -cebiri ve $d_{(\alpha,\beta)}$, X üzerinde bir sağ-sol (α, β) -türev olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için aşağıdakiler sağlanır:

$$(1) d_{(\alpha,\beta)} \leq \alpha(x)d_{(\alpha,\beta)}(y),$$

$$(2) d_{(\alpha,\beta)}(xd_{(\alpha,\beta)}(x)) = 0,$$

$$(3) d_{(\alpha,\beta)}(d_{(\alpha,\beta)}(x)) \leq \alpha(d_{(\alpha,\beta)}(x)),$$

(4) $d_{(\alpha,\beta)}^{-1}(0) = \{x \in X | d_{(\alpha,\beta)}(x) = 0\}$ kümesi $\alpha(x) = 0$ ise X in bir d -alt cebiridir (Al-Omary 2019).

Teorem 4.2.10: X bir kenar d -cebiri ve $d_{(\alpha,\beta)}$, X üzerinde bir sağ-sol (α, β) -türev olsun. Bu durumda

$$d_{(\alpha,\beta)}^n(d_{(\alpha,\beta)}^{n-1}(\dots(d_{(\alpha,\beta)}^2(d(x))\dots)) \leq \alpha(x)$$

geçerlidir (Al-Omary 2019).

Tanım 4.2.11: X bir d -cebiri $d_{(\alpha,\beta)}$, X üzerinde bir (α, β) -türev ve I da X in d -ideali olsun. Eğer $\alpha(I) \subseteq I$ ($\beta(I) \subseteq I$) oluyor ise I idealine α -ideal (β -ideal) denir (Al-Omary 2019).

Tanım 4.2.12: X bir d -cebiri $d_{(\alpha,\beta)}$, X üzerinde bir (α, β) -türev ve I da X in bir d -ideali olsun. Eğer $d_{(\alpha,\beta)}(I) \subseteq I$ oluyor ise I idealine $d_{(\alpha,\beta)}$ -invariant denir (Al-Omary 2019).

Teorem 4.2.13: X bir d -cebiri $d_{(\alpha,\beta)}$, X üzerinde bir sağ-sol (α, β) -türev ve I da X in bir ideali olsun. Bu durumda $d_{(\alpha,\beta)}$ nın regüler olması için gerek ve yeter koşul X in her α -idealinin $d_{(\alpha,\beta)}$ -invariant olmasıdır (Al-Omary 2019).



5. d -CEBİRLERDE GENELLEŞTİRİLMİŞ (α, β) -TÜREVLER

Bu bölümde d -cebirleri üzerinde genelleştirilmiş (α, β) -türevler tanımlanarak örnekler verilmiştir ve bu türev çeşidinin bazı özellikleri incelenmiştir. d -cebirleri üzerinde dördüncü bölümde verilen teoremler genelleştirilmiştir. Bu bölümde verilen sonuçlar 2023 yılında Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute dergisinde “On Generalized (α, β) -Derivations in d -Algebras” başlıklı makalede yayımlanmıştır.

5.1. d -Cebirlerde Genelleştirilmiş (α, β) -Türevlerin Tanımı ve Özellikleri

Bu bölüm boyunca α ve β , A d -cebiri üzerinde endomorfizmalar olarak alınacaktır.

Tanım 5.1.1: A bir d -cebiri olsun. $G: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olmak üzere eğer A üzerinde bir $d_{(\alpha, \beta)}$ sol-sağ (α, β) -türevi varsa ve her $a, b \in A$ için

$$G(a * b) = (G(a) * \alpha(b)) \wedge (\beta(a) * d_{(\alpha, \beta)}(b))$$

koşulu sağlanıyorsa G ye A üzerinde bir sol genelleştirilmiş (α, β) -türev denir.

Eğer A nın bir $d_{(\alpha, \beta)}$ sağ-sol- (α, β) -türevi varsa ve G dönüşümü

$$G(a * b) = (\alpha(a) * G(b)) \wedge (d_{(\alpha, \beta)}(a) * \beta(b))$$

eşitliğini her $a, b \in A$ için sağlıyor ise G ye A nın bir sağ genelleştirilmiş (α, β) -türevi denir.

Eğer $G = d_{(\alpha, \beta)}$ olur ise sol (sağ) genelleştirilmiş (α, β) -türev kavramı sol-sağ (sağ-sol) (α, β) -türev kavramı ile çakışmaktadır.

Gösterimde kolaylık olması açısından $a * b$ yerine ab kullanılacaktır.

Örnek 5.1.2: $A = \{0,1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde “ $*$ ” işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1
2	2	2	0	3	0
3	3	3	2	0	3
4	3	3	1	1	0

Bu durumda A bir d -cebiridir. (BCK -ceberi değildir.)

$$d_{(\alpha, \beta)}: A \rightarrow A, \quad a \mapsto \begin{cases} 0, & a = 0,1,2,3 \\ 1, & a = 4 \end{cases}$$

dönüşümünü ve

$$\alpha: A \rightarrow A, \quad a \mapsto \begin{cases} 0, & a = 0,1 \\ 2, & a = 2,3,4 \end{cases}$$

$$\beta: A \rightarrow A, \quad a \mapsto \begin{cases} 0, & a = 0,1 \\ 3, & a = 2,3,4 \end{cases}$$

endomorfizmalarını tanımlayalım. Bu durumda $d_{(\alpha, \beta)}$ bir sol-sağ (α, β) -türevidir. Eğer

$$G: A \rightarrow A, \quad a \mapsto \begin{cases} 0, & a = 0,1,3,4 \\ 2, & a = 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak G , A üzerinde bir sol genelleştirilmiş (α, β) -türevidir. Fakat

$$G(20) = G(2) = 2 \text{ ve } \alpha(2)G(0) \wedge d_{(\alpha, \beta)}(2)\beta(0) = 0$$

olduğundan G , A nın bir sağ genelleştirilmiş (α, β) -türevi değildir.

Örnek 5.1.3: $A = \{0, a, b, c\}$ kümesi üzerinde “ $*$ ” işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	0	b
b	b	b	0	0
c	c	c	a	0

Bu durumda A bir d -cebiridir.

$$d_{(\alpha, \beta)}: A \rightarrow A, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0, b \\ a, & x = a \\ c, & x = c \end{cases}$$

dönüşümünü ve

$$\alpha: A \rightarrow A, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0 \\ b, & x = a, c \\ a, & x = b \end{cases}$$

$$\beta: A \rightarrow A, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0 \\ a, & x = a \\ b, & x = b, c \end{cases}$$

endomorfizmalarını tanımlayalım. Bu durumda $d_{(\alpha, \beta)}$ bir sağ-sol (α, β) -türevdir. Ayrıca

$$G: A \rightarrow A, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0, b \\ a, & x = a \\ c, & x = c \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan G dönüşümü A nın bir sağ genelleştirilmiş (α, β) -türevidir, fakat G , A nın sol genelleştirilmiş (α, β) -türevi değildir. Çünkü, $G(ca) = G(c) = c$ olmasına rağmen $G(c)\alpha(a) \wedge \beta(c)d_{(\alpha, \beta)}(a) = 0$ dır.

Önerme 5.1.4: A bir d -cebiri ve $G: A \rightarrow A$ bir sol genelleştirilmiş (α, β) -türev olsun. Bu durumda G regülerdir.

İspat: Her $a \in A$ için,

$$\begin{aligned}
 G(0) &= G(0a) \\
 &= G(0)\alpha(a) \wedge \beta(0)d_{(\alpha, \beta)}(a) \\
 &= G(0)\alpha(a) \wedge 0d_{(\alpha, \beta)}(a) \\
 &= G(0)\alpha(a) \wedge 0 \\
 &= 0(0G(0)\alpha(a)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 5.1.5: A bir kenar d -cebiri ve $G: A \rightarrow A$ bir sağ genelleştirilmiş (α, β) -türev olsun. Bu durumda G regülerdir.

İspat: Sağ genelleştirilmiş (α, β) -türev tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned}
 G(0) &= G(0a) \\
 &= \alpha(0)G(a) \wedge d_{(\alpha, \beta)}(0)\beta(a) \\
 &= 0G(a) \wedge d_{(\alpha, \beta)}(0)\beta(a) \\
 &= 0 \wedge d_{(\alpha, \beta)}(0)\beta(a) \\
 &= d_{(\alpha, \beta)}(0)\beta(a)(d_{(\alpha, \beta)}(0)\beta(a)0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.1.6: A bir kenar d -cebiri olsun.

(1) Eğer G , A nın bir sol genelleştirilmiş (α, β) -türevi ise her $a \in A$ için

$$G(a) = G(a) \wedge \beta(a)$$

sağlanır.

(2) Eğer G , A nın bir sağ genelleştirilmiş (α, β) -türevi ise her $a \in A$ için

$$G(a) = \alpha(a) \wedge d_{(\alpha, \beta)}(a)$$

sağlanır.

İspat: (1) G , A nın sol genelleştirilmiş (α, β) -türevi olduğundan Önerme 3.2.5 ve Teorem 4.2.4 (1) kullanılarak

$$\begin{aligned} G(a) &= G(a0) \\ &= G(a)\alpha(0) \wedge \beta(a)d_{(\alpha, \beta)}(0) \\ &= G(a)0 \wedge \beta(a)0 \\ &= G(a) \wedge \beta(a) \end{aligned}$$

elde edilir.

(2) G , A nın sağ genelleştirilmiş (α, β) türevi olduğundan Önerme 3.2.5 ve Önerme 5.1.5 kullanılarak

$$\begin{aligned} G(a) &= G(a0) \\ &= \alpha(a)G(0) \wedge (d_{(\alpha, \beta)}(a)\beta(0)) \\ &= \alpha(a)0 \wedge d_{(\alpha, \beta)}(a)0 \\ &= \alpha(a) \wedge d_{(\alpha, \beta)}(a) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.1.7: A her $x, y \in A$ için $x(xy) = y$ koşulunu sağlayan bir d -cebiri, $\alpha, \beta: A \rightarrow A$ iki endomorfizma ve $G: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $a \in A$ için $G(a) = \alpha(a)$ ise G bir sol (veya sağ) genelleştirilmiş (α, β) -türevdir.

İspat: Hipotez ve sol genelleştirilmiş (α, β) -türev tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 G(ab) &= \alpha(ab) \\
 &= \alpha(a)\alpha(b) \\
 &= G(a)\alpha(b) \\
 &= \left(\beta(a)d_{(\alpha, \beta)}(b) \right) \left(\left(\beta(a)d_{(\alpha, \beta)}(b) \right) (G(a)\alpha(b)) \right) \\
 &= G(a)\alpha(b) \wedge \beta(a)d_{(\alpha, \beta)}(b)
 \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 5.1.8: A bir d -cebiri, $G_1, G_2: A \rightarrow A$ iki dönüşüm olsun. $G_1 \circ G_2: A \rightarrow A$ dönüşümü; her $a \in A$ için $(G_1 \circ G_2)(a) = G_1(G_2(a))$ biçiminde tanımlanır.

Teorem 5.1.9: A her $x, y \in A$ için $x(xy) = y$ koşulunu sağlayan bir d -cebiri ve G_1 ve $G_2: A$ üzerinde sırasıyla $d_{1(\alpha, \beta)}, d_{2(\alpha, \beta)}$ ile belirlenmiş iki sol genelleştirilmiş (α, β) -türev ve $\alpha^2 = \alpha$ olsun. Bu durumda $G_1 \circ G_2: A$ üzerinde $d_{1(\alpha, \beta)} \circ d_{2(\alpha, \beta)}$ ile belirlenmiş bir sol genelleştirilmiş (α, β) -türevdir.

İspat: $a, b \in A$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 (G_1 \circ G_2)(ab) &= G_1(G_2(ab)) \\
 &= G_1 \left(G_2(a)\alpha(b) \wedge \beta(a)d_{2(\alpha, \beta)}(b) \right) \\
 &= G_1(G_2(a)\alpha(b)) \\
 &= G_1(G_2(a))\alpha^2(b) \wedge \beta(G_2(a))d_{1(\alpha, \beta)}(\alpha(b)) \\
 &= G_1(G_2(a))\alpha(b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\beta(a) \left(d_{1(\alpha, \beta)} \circ d_{2(\alpha, \beta)} \right) (b) \right) \left(\beta(a) \left(d_{1(\alpha, \beta)} \circ d_{2(\alpha, \beta)} \right) (b) (G_1 \circ G_2)(a) \alpha(b) \right) \\
 &= (G_1 \circ G_2)(a) \alpha(b) \wedge \beta(a) \left(d_{1(\alpha, \beta)} \circ d_{2(\alpha, \beta)} \right) (b)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 5.1.10: A bir kenar d -cebri olsun. Eğer G , A nın üzerinde bir sağ genelleştirilmiş (α, β) -türev ise her $a \in A$ için $G(a) \leq \alpha(a)$ sağlanır.

İspat: G , A nın sağ genelleştirilmiş (α, β) -türevi olsun. Teorem 5.1.6 (2) den

$$\begin{aligned}
 G(a) &= \alpha(a) \wedge d_{(\alpha, \beta)}(a) \\
 &= d_{(\alpha, \beta)}(a) \left(d_{(\alpha, \beta)}(a) \alpha(a) \right)
 \end{aligned}$$

olur. O halde;

$$G(a) \alpha(a) = \left(d_{(\alpha, \beta)}(a) \left(d_{(\alpha, \beta)}(a) \alpha(a) \right) \right) \alpha(a)$$

$(a(ab))b = 0$ olduğundan $G(a) \alpha(a) = 0$ ve $G(a) \leq \alpha(a)$ elde edilir.

Önerme 5.1.11: A bir kenar d -cebri ve G , A üzerinde bir sağ genelleştirilmiş (α, β) -türev olsun. Bu durumda her $a, b \in A$ için

$$G(ab) \leq \alpha(a) G(b)$$

sağlanır.

İspat: G , A üzerinde bir sağ genelleştirilmiş (α, β) -türev olsun. Bu durumda her $a, b \in A$ için

$$\begin{aligned} G(ab) &= \alpha(a)G(b) \wedge d_{(\alpha, \beta)}(a)\beta(b) \\ &= \left(d_{(\alpha, \beta)}(a)\beta(b)\right) \left(\left(d_{(\alpha, \beta)}(a)\beta(b)\right) (\alpha(a)G(b))\right) \end{aligned}$$

olur. $(\alpha(ab))b = 0$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} G(ab)(\alpha(a)G(b)) &= \left(d_{(\alpha, \beta)}(a)\beta(b)\right) \left(\left(d_{(\alpha, \beta)}(a)\beta(b)\right) (\alpha(a)G(b))\right) (\alpha(a)G(b)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $G(ab) \leq \alpha(a)G(b)$ elde edilir.

Önerme 5.1.12: A bir kenar d -cebiri ve G , A üzerinde bir sağ genelleştirilmiş (α, β) -türev olsun. Bu durumda

(1) Her $a \in A$ için, $G(G(a)) \leq \alpha(G(a))$ dır.

(2) Her $a \in A$ için, $\alpha(a) = 0$ ise

$$G^{-1}(0) = \{a \in A : G(a) = 0\}$$

kümesi A nın bir d -alt cebiridir.

İspat: (1) G , A nın bir sağ genelleştirilmiş (α, β) -türev olsun. Bu durumda Teorem 5.1.6 (2) den;

$$\begin{aligned} G(G(a)) &= \alpha(G(a)) \wedge d_{(\alpha, \beta)}(G(a)) \\ &= d_{(\alpha, \beta)}(G(a)) \left(d_{(\alpha, \beta)}(G(a)) \alpha(G(a))\right) \end{aligned}$$

olur. Son eşitliğin her iki tarafı $\alpha(G(a))$ ile çarpılırsa,

$$G(G(a)) \alpha(G(a)) = 0$$

bulunur. Böylece $G(G(a)) \leq \alpha(G(a))$ elde edilir.

(2) Önerme 5.1.5 den, G regüler olduğundan $G^{-1}(0) \neq \emptyset$ dir. $a, b \in G^{-1}(0)$ alalım. Önerme 5.1.11 den, $G(ab) \leq \alpha(a)G(b) = 0$ olur. Buradan $G(ab) = 0$ ve dolayısıyla $ab \in G^{-1}(0)$ elde edilir. Böylece $G^{-1}(0)$ kümesi A nın bir d -alt cebridir.

Teorem 5.1.13: A bir kenar d -cebiri ve $G; A$ üzerinde bir sağ genelleştirilmiş (α, β) -türev ve $\alpha^2 = \alpha$ olsun. Bu durumda her $a \in A$ için

$$G^n(G^{n-1}(\dots(G^2(G(a)))) \leq \alpha(a)$$

geçerlidir.

İspat: Tümevarım yöntemini kullanarak ispatlayalım. $n = 1$ olsun. Önerme 5.1.10 dan, $G(a) \leq \alpha(a)$ dır. $n \in \mathbb{N}$ için

$$G^n \left(G^{n-1} \left(\dots \left(G^2(G(a)) \right) \right) \right) \leq \alpha(a)$$

olsun.

$$\nabla_n = G^n \left(G^{n-1} \left(\dots \left(G^2(G(a)) \right) \right) \dots \right)$$

olarak alınırsa, $\nabla_n \leq \alpha(a)$ olur. O halde

$$\begin{aligned} G^{n+1}(\nabla_n) &= G^{n+1}(\nabla_n 0) \\ &= \alpha(\nabla_n) G^{n+1}(0) \wedge d_{(\alpha, \beta)}^{n+1}(\nabla_n) \beta(0) \\ &= \alpha(\nabla_n) \wedge d_{(\alpha, \beta)}^{n+1}(\nabla_n) \end{aligned}$$

$$= d_{(\alpha, \beta)}^{n+1}(\nabla_n)(d_{(\alpha, \beta)}^{n+1}(\nabla_n)\alpha(\nabla_n))$$

olur. Buradan $(a(ab))b = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} G^{n+1}(\nabla_n)\alpha(\nabla_n) &= ((d_{(\alpha, \beta)}^{n+1}(\nabla_n)(d_{(\alpha, \beta)}^{n+1}(\nabla_n)\alpha(\nabla_n)))\alpha(\nabla_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $a \in A$ için $G^{n+1}(\nabla_n) \leq \alpha(\nabla_n) \leq \alpha(a)$ sağlanır.

5.2. d -Cebirlerinin α -İdealleri ve G -invariant İdealleri

Tanım 5.2.1: G , A d -cebirinin bir (sağ veya sol) genelleştirilmiş (α, β) -türevi olsun. A nın bir I d -ideali için $\alpha(I) \subseteq I(\beta(I) \subseteq I)$ oluyorsa I ya bir α -ideal (β -ideal) denir.

Tanım 5.2.2: G , A d -cebirinin bir (sağ veya sol) genelleştirilmiş (α, β) -türevi olsun. A nın bir I d -ideali için $G(I) \subseteq I$ oluyorsa I ya bir G -invariant ideal denir.

Örnek 5.2.3: Örnek 5.1.2 de verilen G sol genelleştirilmiş (α, β) -türevi ve $I = \{0, 1\}$ kümesi verilsin. Bu durumda I d -ideali hem α -ideal hem de β -idealdir. Ayrıca A üzerinde G invarianttır.

Örnek 5.2.4: Örnek 5.1.3 de verilen G sağ genelleştirilmiş (α, β) -türevi ve $I = \{0, b\}$ kümesi verilsin. Bu durumda I bir β -idealdir, fakat α -ideal değildir. Ayrıca I d -ideali G -invarianttır.

Teorem 5.2.5: A bir kenar d -cebiri, I ; A nın bir d -ideali ve G ; A üzerinde bir sağ genelleştirilmiş (α, β) -türev olsun. Bu durumda A nın her α -ideali G -invarianttır.

İspat: I , A nın bir α -ideali olsun. Önerme 5.1.5'ten G regülerdir. $b \in G(I)$ alalım. Bu durumda bir $a \in I$ için $b = G(a)$ dır. Önerme 5.1.10 dan $G(a) \leq \alpha(a)$ yani

$G(a)\alpha(a) = 0 \in I$ olur. Buradan $\alpha(a) \in \alpha(I) \subseteq I$ yani $b \in I$ olur. O halde $G(I) \subseteq I$ olur ki I α -ideali G -invarianttır.



6. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde çalışmamızdan elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümde çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve teoremler sunulmuştur. Bu bölümlerdeki tanım ve teoremler kullanılarak d -cebirlерinde genelleştirilmiş (α, β) -türevler tanımlanmıştır. Ayrıca α -ideal, G -invariant ideal kavramları verilerek bunlar arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Kısmi sıralı kenar d -cebirleri üzerinde genelleştirilmiş (α, β) -türevlerin bazı sonuçları ispatlanmıştır.

Bundan sonra yapılacak çalışmalarda d -cebirlерinde farklı türev çeşitleri araştırılabilir. Farklı ideal tanımları kullanılarak bu sonuçlar onlara da uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- Al-Omary, R. M. 2019. On (α, β) -derivations in d -algebras. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 12(4), 549-556.
- Al-Roqi, A. M. 2014. On generalized (α, β) -derivations in BCI -algebras. Journal of applied mathematics and informatics, 32(1-2), 27-38.
- Hu, Q. P. 1984. On some classes of BCI -algebras. Math. Japon, 29, 251-253.
- Imai, Y. and Iseki, K. 1965. On axiom systems of propositional calculi. I. Proceedings of the Japan Academy, 41(6), 436-439.
- Iseki, K. 1966. An algebra related with a propositional calculus. Proceedings of the Japan Academy, 42(1), 26-29.
- Jun, Y. B and Xin, X. L. 2004. On derivations of BCI -algebras. Information Sciences, 159(3-4), 167-176.
- Kandaraj, N. and Chandramouleeswaran, M. 2012. On Left derivations of d -algebras. Int. J. Math.Arch, 3(11), 3961-3966.
- Muhiuddin, G. and Al-Roqi, A. M. 2014. On left (θ, ϑ) -derivations in BCI -algebras. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 22(2), 157-161.
- Neggers, J. and Kim, H. S. 1999. On d -algebras, Mathematica Slovaca, 49(1), 19-26.
- Neggers, J. and Y. B. Jun, and Kim, H. S. 1999. On d -ideals in d -algebras. Mathematica Slovaca, 49(3), 243-251.
- Posner, E. C. 1957. Derivation in prime rings. Proc. Am. Math. Soc. 8, 1093-1100.
- Şenbakar, A. and Yılmaz, D. 2023. On generalized (α, β) -derivations in d -algebras. Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute, 13(2), 239-247.