



d -CEBİRLERDE SİMETRİK İKİLİ TÜREVLER

Iskandar NASIROV

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Damla YILMAZ**

2025

Her hakkı saklıdır.



**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

***d*-CEBİRLERDE SİMETRİK İKİLİ TÜREVLER**

Iskandar NASIROV

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Damla YILMAZ

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2025

Her hakkı saklıdır

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY FORMU

***d*-CEBİRLERDE SİMETRİK İKİLİ TÜREVLER**

Doç. Dr. Damla YILMAZ danışmanlığında, Iskandar NASIROV tarafından hazırlanan bu çalışma 17 / 06 / 2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **Oy birliği ile (3/3)** kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. İnci GÜLTEKİN	İmza	:
Üye	: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR	İmza	:
Üye	: Doç. Dr. Damla YILMAZ	İmza	:

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Doç. Dr. Bünyamin ÖZGERİŞ
Enstitü Müdürü

Bu tez çalışması tarafından nolu proje ile desteklenmiştir.

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

17 / 06 / 2025

Iskandar NASIROV

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

d-CEBİRLERDE SİMETRİK İKİLİ TÜREVLER

Iskandar NASIROV

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Damla YILMAZ

Bu tezde, cebirsel yapıların temel örneklerinden biri olan *BCK*-cebirleri tanıtilmiş ve bu yapının doğal bir genellemesi olan *d*-cebirleri temel özellikleri ile incelenmiştir. Türev kavramının *d*-cebirleri üzerinde sağladığı özellikler detaylandırılmış; bu doğrultuda, simetrik ikili türevler tanımlanarak ilgili cebirsel özellikleri kapsamlı biçimde analiz edilmiştir. Bu türev türü ile *d*-cebirlерinin bazı altkümeleri arasındaki ilişkiler örneklerle desteklenerek ortaya konmuştur. Ayrıca kenar *d*-cebirleri üzerinde tanımlanan genelleştirilmiş simetrik ikili türevler ile *d*-ideallerin bu türevler altında invaryantlık koşulları değerlendirilmiş ve çeşitli sonuçlara ulaşılmıştır.

2025, 45 sayfa

Anahtar Kelimeler: *d*-cebir, Kenar *d*-cebir, Türev, Simetrik ikili türev

ABSTRACT

MS. Thesis

SYMMETRIC BI-DERIVATIONS IN d -ALGEBRAS

Iskandar NASIROV

Erzurum Technical University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Maths

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Damla YILMAZ

In this thesis, BCK -algebras, one of the fundamental examples of algebraic structures, are introduced, and their natural generalization, d -algebras, is examined with a focus on their fundamental properties. The structural implications of the derivation concept on d -algebras are elaborated; in this context, symmetric bi-derivations are defined and their algebraic properties are thoroughly analyzed. The relationships between this type of derivation and certain subsets of d -algebras are demonstrated with supporting examples. Furthermore, generalized symmetric bi-derivations defined on edge d -algebras, along with the invariance conditions of d -ideals under these derivations, are evaluated, leading to a variety of structural results.

2025, 45 page

Keywords: d -algebra, Edge d -algebra, Derivation, Symmetric bi-derivation

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında emeği geçen, desteğini esirgemeyen herkese içtenlikle teşekkürlerimi sunuyorum.

Öncelikle, tez sürecimde bana her zaman ilham veren, bilgilerini ve deneyimlerini benimle paylaşan, yol göstericiliği ile bu süreci başarıyla tamamlamamı sağlayan değerli hocam Doç. Dr. Damla YILMAZ'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, beni her zaman destekleyen, her durumda yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Iskandar NASIROV
Haziran 2025

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	5
3. TEMEL KAVRAMLAR	8
3.1. d -Cebirleri ve Özellikleri	8
3.2. Kenar d -Cebirleri	13
4. d -CEBİRLERDE TÜREV	16
5. d -CEBİRLERDE SİMETRİK İKİLİ TÜREVLER	22
5.1. d -Cebirlerde Simetrik İkili Türevlerin Tanımı ve Özellikleri	22
5.2. d -Cebirlerinin $Ker_{\delta}(Y)$ ve $Fix_{\Delta}(Y)$ Kümeleri ve Özellikleri	31
5.3. d -Cebirlerde Genelleştirilmiş Simetrik İkili Türevler	36
6. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	43
KAYNAKLAR	44

1. GİRİŞ

Mantık cebirlerinin iki önemli sınıfı olan *BCK*-cebirleri ve *BCI*-cebirleri ilk kez Imai and Iseki (1965), Iseki (1966) tarafından kümeler teorisindeki fark işleminin ve önermeler mantığının bir genelleştirilmesi olarak tanımlanmıştır. O zamandan bu yana, bu cebirlerin teorisi üzerine kapsamlı bir literatür oluşmuştur. *BCK*-cebirlerinin, *BCI*-cebirlerinin bir öz alt sınıfını oluşturduğu bilinmektedir.

Y bir küme, “ $*$ ” bu küme üzerinde bir ikili işlem ve “ 0 ” bu kümenin bir sabit elemanı olsun. Bu durumda her $v, \omega, \eta \in Y$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa Y kümesine bir *BCI*-cebiri denir ve $(Y; *, 0)$ ile gösterilir.

$$(1) ((v * \omega) * (v * \eta)) * (\eta * \omega) = 0,$$

$$(2) (v * (v * \omega)) * \omega = 0,$$

$$(3) v * v = 0,$$

$$(4) v * \omega = 0 \text{ ve } \omega * v = 0 \text{ ise } v = \omega \text{ dir.}$$

Eğer bir *BCI*-cebirinde her $v \in Y$ için

$$(5) 0 * v = 0$$

koşulu sağlanıyorsa Y kümesine bir *BCK*-cebiri denir.

Y kümesi üzerinde bir “ $\leq$ ” bağıntısı

$$v \leq \omega \Leftrightarrow v * \omega = 0$$

ile tanımlansın. Bu işleme göre $(Y; *, 0)$ bir *BCK*-cebiridir. O halde *BCK*-cebirinin şartları aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir :

Her $v, \omega, \eta \in Y$ için,

1. GİRİŞ

$$(1') (v * \omega) * (v * \eta) \leq \eta * \omega,$$

$$(2') v * (v * \omega) \leq \omega,$$

$$(3') v \leq v,$$

$$(4') v \leq \omega \text{ ve } \omega \leq v \text{ ise } v = \omega,$$

$$(5') 0 \leq v.$$

Aşağıda bu cebirlere örnek verilmiştir.

X boş kümeden farklı bir küme ve $P(X)$ kuvvet kümesi olsun. Her $A, B \in P(X)$ için;

$$A * B = \begin{cases} A \setminus B, & B \subseteq A \\ \emptyset, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

işlemi verilsin. Bu durumda $(P(X); *, \emptyset)$ bir BCK -cebiridir.

$Y = \{0,1,2,3\}$ kümesi üzerinde bir “*” ikili işlemi aşağıdaki Cayley tablosu ile verilsin.

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	2	0	0
3	3	2	1	0

Bu durumda $(Y; *, 0)$ bir BCK -cebiridir.

$Y = \{0,1,2\}$ kümesi üzerinde bir “*” ikili işlemi aşağıdaki Cayley tablosu ile verilsin.

*	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

Bu durumda $(Y; *, 0)$ bir *BCI*-cebiridir. Dikkat edilirse Y bir *BCI*-ceberi olmasına rağmen $0 * 2 = 2$ olduğundan bir *BCK*-ceberi değildir. Bu örnekten de anlaşılacağı üzere her *BCK*-ceberi bir *BCI*-cebiridir ancak tersi doğru değildir.

BCI – *BCK*-cebirlerinin birçok genellemesi tanımlanmıştır. Hu and Li (1983) tarafından *BCI*-cebirlerinin bir genellemesi olan *BCH*-cebirleri tanımlanmıştır. Bu çalışmada yazarlar *BCI*-cebirlerinin, *BCH*-cebirlerinin bir öz alt sınıfını oluşturduğunu göstermişlerdir. Yani her *BCI*-ceberi bir *BCH*-cebiridir ancak tersi doğru değildir. Dolayısıyla *BCK*-cebirleri de *BCH*-cebirlerinin bir öz alt sınıfını oluşturmaktadır. *BCH*-cebirleri üzerinde bazı çalışmalar yapılmış olsa da, genel olarak *BCI*-cebirleri kadar kapsamlı bir şekilde araştırılmamışlardır. *BCK*-cebirlerinin diğer alanlarla da bazı bağlantıları vardır. Mundici (1986), *MV*-cebirlerinin (multi-value cebirleri) kategorik olarak sınırlı değişmeli *BCK*-cebirlerine denk olduğunu kanıtlamıştır. Meng (1995), implikatif değişmeli yarı grupların *BCK*-cebirlerine denk olduğunu kanıtlamıştır. *BCK*-cebirlerinin bir diğer yararlı genellemesi olan *d*-cebirleri Neggers and Kim (1999) tarafından tanımlanmıştır. Neggers et al. (1999) tarafından *d*-alt cebir, *d*-ideal, *d**-ideal ve bazı ilgili kavramlar tanımlanmış ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

Halka teorisinde türev kavramı ilk kez Posner (1957) tarafından verilmiştir. Herhangi bir halkada türev tanımı aşağıda verilmiştir.

R bir halka ve $d: R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her $a, b \in R$ için

$$d(ab) = d(a)b + ad(b)$$

ise o zaman d , R halkasının bir türevi olarak adlandırılır.

Simetrik ikili türev kavramı ilk kez Maksa (1987) tarafından bir halka üzerinde tanımlanmıştır. İlerleyen yıllarda bu çalışma halkalar ve bazı cebirsel yapılarda incelenerek birçok araştırmacıya çalışma alanı oluşturmuştur.

d -cebirlerinde türev kavramı ilk kez Chandramouleeswaran and Kandaraj (2011) tarafından verilmiş ve ilgili özellikler incelenmiştir. 2012 yılında Muhiuddin and Al-roqi (2012), BCI -cebirlerinde t -türev kavramını tanıtmış ve bununla ilgili bazı özellikler elde etmiştir. Ilbira et al. (2011) çalışmasından ilham alan Muhiuddin et al. (2013), BCI -cebirleri üzerinde sol simetrik ikili türev kavramını ortaya atmış ve özelliklerini incelemiştir.

Bu tez altı ana başlıktan oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusunun tarihsel sürecinden kısaca bahsedilmiştir. İkinci bölümde kaynak özetleri sunulmuş, üçüncü bölümde tez boyunca kullanılan temel tanımlara ve özelliklere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde d -cebirleri üzerinde türev yapısı temel olarak incelenmiştir. Beşinci bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde d -cebirlerinin simetrik ikili türevleri tanımlanarak bu türev kavramı ile ilişkili bazı kümelerin yapısı incelenmiştir. Bu yapıların çeşitli özellikleri araştırılmış ve bulguları desteklemek amacıyla örnekler sunulmuştur. Yine beşinci bölümde simetrik ikili türevlerin genelleştirilmesine yer verilmiştir. Altıncı bölüm ise çalışmanın sonuçlarından oluşmaktadır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

BCK-cebiri ve *BCI*-cebiri kavramları ilk olarak Imai and Iseki (1965) tarafından tanımlanmıştır. İki önemli cebir türü olan bu kavramlar kümeler teorisi ve matematiksel lojik dallarından doğmuştur. Kümeler teorisinde bilinen

$$(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) \subseteq C \setminus B \text{ ve } A \setminus (A \setminus B) \subseteq B$$

bağıntıları temel alınarak *BCK*-cebiri kavramı ortaya atılmıştır. Matematiksel lojikte ise *B*, *C* ve *K* aksiyomları temel alınarak *BCK*-cebiri kavramı tanımlanmıştır. *a*, *b* ve *c* birer önerme olmak üzere sadece “ $\Rightarrow$ ” bağlacının kullanılarak oluşturulduğu *B*, *C* ve *K* aksiyomları aşağıda verilmiştir.

$$(B) (a \Rightarrow b) \Rightarrow ((c \Rightarrow a) \Rightarrow (c \Rightarrow b))$$

$$(C) (a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (b \Rightarrow (a \Rightarrow c))$$

$$(K) a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$$

BCI-cebiri için gerekli *I* aksiyomu aşağıdaki şekildedir:

$$(I) a \Rightarrow a$$

Halka teorisindeki türev kavramı köklü bir geçmişe sahip olup, analiz, cebirsel geometri ve soyut cebir gibi çeşitli alanlarda önemli bir yere sahiptir. Bu kavram, asal halkalarda türevler ile ilgili önemli iki sonuç elde eden Posner (1957) tarafından verilmiştir. Jun and Xin (2004), Posner tarafından ortaya atılan halka teorisindeki türev kavramına benzer şekilde tanımlanan türev kavramını *BCI*-cebirlerinde vermişlerdir. Bu çalışmadan sonra, *BCI*-cebirlerinin türevleri hakkında farklı yönlerden birçok araştırma makalesi ortaya çıkmıştır. 2005 yılında Zhan and Liu (2005), *BCI*-cebirlerinde *f*-türev kavramını vermiştir. 2007 yılında Abujabal and Al-Shehri (2007), *BCI*-cebirlerinin sol türevini tanımlamış ve bazı özelliklerini incelemiştir. Öztürk et al. (2009), *BCI*-cebirlerinde genelleştirilmiş türev kavramını tanıtmış ve bazı sonuçlar elde etmiştir.

Halka teorisinde simetrik ikili türev kavramı ilk kez Maksa (1987) tarafından verilmiştir. Bu çalışmada herhangi bir halkada simetrik ikili türev tanımı aşağıdaki şekilde vermiştir:

R bir halka ve $F: R \times R \rightarrow R$ bir simetrik ikili toplamsal dönüşüm olmak üzere her $a, b, c \in R$ için

$$F(ab, c) = F(a, c)b + aF(b, c)$$

ise o zaman F , R halkasının bir simetrik ikili türevi olarak adlandırılır. Bu durumda her $a, b, c \in R$ için

$$F(a, bc) = F(a, b)c + bF(a, c)$$

eşitliği de sağlanır. Aynı zamanda Maksa (1987) bu çalışmada simetrik ikili türevlerin bazı fonksiyonel denklemlerin genel çözümüyle ilişkili olduğunu göstermiştir. Vukman (1989) asal ve yarı asal halkalarda simetrik ikili türevle ilgili bazı önemli sonuçlar kanıtlamıştır.

Jun and Xin (2004) halka teorisindeki türev kavramını BCI -cebirlerinde uyguladıktan sonra birçok matematikçi BCI -cebirleri üzerinde farklı türevleri incelemiştir. Ilbira et al. (2011), BCI -cebirlerinde simetrik ikili türevin tanımını vermiş ve bazı özelliklerini incelemiştir. Muhiuddin et al. (2013), BCI -cebirler üzerinde sol simetrik ikili türev kavramını tanımlamıştır.

BCK -cebirlerinin bir genellemesi olan d -cebirleri Neggers and Kim (1999) tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmada d -cebiri tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir:

Boş kümeden farklı bir Y kümesi üzerinde “ $*$ ” ikili işlemi ve “ 0 ” sabiti verilsin. Her $v, \omega \in Y$ için aşağıdaki koşullar sağlandığında $(Y; *, 0)$ cebirsel yapısına bir $(2,0)$ tipli d -cebiri denir.

- (1) $v * v = 0$,
- (2) $0 * v = 0$,
- (3) $v * \omega = 0$ ve $\omega * v = 0$ ise $v = \omega$ dir.

Neggers and Kim (1999) tarafından d -cebiri kavramının yanı sıra kenar d -cebiri kavramı da detaylı bir şekilde incelenmiştir. Neggers et al. (1999) d -alt cebir, d -ideal, d^* -ideal ve bazı ilgili kavramları vermiş ve bunlar arasındaki ilişkileri incelemiştir.

d -cebirlерinde türev kavramı ilk kez Chandramouleeswaran and Kandaraj (2011) tarafından verilmiştir. Pek çok araştırmacı d -cebirlерdeki türev kavramını farklı yönlerden incelemiştir. Son zamanlarda Al-Omary (2019), d -cebirleri üzerinde (α, β) -türev kavramını tanıtmış ve bazı özelliklerini incelemiştir. Çok yakın zamanda Şenbakar and Yılmaz (2023), d -cebirlерinin genelleştirilmiş (α, β) -türevlerini tanıtmış ve ilgili bazı özelliklerini araştırmıştır. 2024 yılında Alnefaie (2024), halka teorisindeki ters türev kavramına benzer yapıyı d -cebirleri üzerinde tanımlayarak teorik çerçeveyi genişletmiştir. d -Cebirlерinde simetrik ikili türevler Nasirov and Yılmaz (2025) tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmada, simetrik ikili türev kavramı ile ilişkili $Ker_{\delta}(Y)$ ve $Fix_{\Delta}(Y)$ kümeleri tanıtılmıştır. Ayrıca bu yapıların çeşitli özellikleri incelenerek örnek ve karşıt örnekler sunulmuştur.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, d -cebirleri ile ilgili temel tanım ve teoremler sunulmuştur.

3.1. d -Cebirleri ve Özellikleri

Tanım 3.1.1: Boş kümeden farklı bir Y kümesi üzerinde “ $*$ ” ikili işlemi ve “ 0 ” sabiti verilsin. Her $v, \omega \in Y$ için aşağıdaki koşullar sağlandığında $(Y; *, 0)$ cebirsel yapısına bir $(2,0)$ tipli d -cebiri denir.

- (1) $v * v = 0$,
- (2) $0 * v = 0$,
- (3) $v * \omega = 0$ ve $\omega * v = 0$ ise $v = \omega$ dir (Neggers and Kim, 1999).

Bir BCK -cebiri aşağıdaki ek aksiyomları sağlayan bir $(Y; *, 0)$ d -cebiridir. Her $v, \omega, \eta \in Y$ için

- (4) $((v * \omega) * (v * \eta)) * (\eta * \omega) = 0$,
- (5) $(v * (v * \omega)) * \omega = 0$ (Neggers and Kim, 1999) .

Örnek 3.1.2: Her BCK -cebiri bir d -cebiridir (Neggers and Kim, 1999).

Örnek 3.1.3: $Y = \{0,1,2\}$ kümesi üzerinde “ $*$ ” işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	2	0	2
2	1	1	0

Bu durumda $(Y; *, 0)$ bir d -cebiridir, fakat

$$(2 * (2 * 2)) * 2 = (2 * 0) * 2 = 1 * 2 = 2 \neq 0$$

olduğundan bir *BCK*-cebiri değildir (Neggers and Kim, 1999).

Örnek 3.1.4: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere, her $v, \omega \in \mathbb{R}$ için

$$v * \omega = v(v - \omega)$$

olacak şekilde tanımlı “ $*$ ” işlemi ile $(\mathbb{R}; *, 0)$ yapısı bir *d*-cebiridir ancak $v = \omega = 2 \in \mathbb{R}$ için

$$(2 * (2 * 2)) * 2 = (2 * 0) * 2 = 4 * 2 = 8 \neq 0$$

olduğundan bir *BCK*-cebiri değildir (Neggers and Kim, 1999).

Uyarı 3.1.5: (1) Bir $(Y; *, 0)$ *d*-cebiri birleşmeli ise, o zaman

$$0 * v = 0 = (v * v) * v = v * (v * v) = v * 0$$

ve böylece (3) özelliğinden $v = 0$ olur.

(2) $(Y; *, 0)$ bir *d*-cebiri olsun. Eğer $\Phi \subseteq Y$ kümesi “ $*$ ” işlemi altında kapalı ise $v \in \Phi$ için $v * v = 0 \in \Phi$ olur. Dolayısıyla $(\Phi; *, 0)$ bir *d*-cebiridir (Neggers and Kim, 1999).

Önerme 3.1.6: Y bir *d*-cebiri olsun. Eğer $v \neq \omega$ ve $v * \omega = 0$ ise $\omega * v \neq 0$ dır (Neggers et al. 1999).

Tanım 3.1.7: $(Y; *, 0)$ bir *d*-cebiri ve $\emptyset \neq \Phi \subseteq Y$ olsun. Eğer her $v, \omega \in \Phi$ için $v * \omega \in \Phi$ oluyorsa Φ kümesine Y un bir *d*-alt cebiri denir (Neggers et al.1999).

Tanım 3.1.8: $(Y; *, 0)$ bir d -cebiri ve $\emptyset \neq \Phi \subseteq Y$ olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa Φ kümesi Y un bir BCK -idealidir denir.

(1) $0 \in \Phi$,

(2) $v * \omega \in \Phi$ ve $\omega \in \Phi \Rightarrow v \in \Phi$ dir (Neggers et al. 1999).

Tanım 3.1.9: $(Y; *, 0)$ bir d -cebiri ve $\emptyset \neq \Phi \subseteq Y$ olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa Φ kümesi Y un bir d -idealidir denir.

(1) $v * \omega \in \Phi$ ve $\omega \in \Phi \Rightarrow v \in \Phi$,

(2) $v \in \Phi$ ve $\omega \in Y \Rightarrow v * \omega \in \Phi$ yani $\Phi * Y \subseteq \Phi$ dir (Neggers et al. 1999).

Örnek 3.1.10: $Y = \{0, v, \omega, \eta\}$ kümesi aşağıdaki Cayley tablosu ile BCK -cebiri olmayan bir d -cebiri olsun.

$*$	0	v	ω	η
0	0	0	0	0
v	v	0	0	v
ω	ω	ω	0	0
η	η	η	v	0

Bu durumda $\Phi = \{0, v, \eta\}$ kümesi Tanım 3.1.8 de verilen (1) koşulunu sağlar ancak (2) koşulunu sağlamaz. Çünkü $\omega * \eta = 0 \in \Phi$ ve $\eta \in \Phi$ olduğunda $\omega \notin \Phi$ dir. Dolayısıyla Φ kümesi Y un bir d -alt cebiri olmasına rağmen bir BCK -ideali değildir. Ayrıca Φ kümesi Tanım 3.1.9 da verilen (1) koşulunu sağlamadığından Y un bir d -ideali değildir (Neggers et al. 1999).

Örnek 3.1.11: $Y = \{0, v, \omega, \eta, \xi\}$ kümesi aşağıdaki Cayley tablosu ile BCK -cebiri olmayan bir d -cebiri olsun.

$*$	0	v	ω	η	ξ
0	0	0	0	0	0
v	v	0	v	0	v
ω	ω	ω	0	η	0
η	η	η	ω	0	η
ξ	η	η	v	v	0

Bu durumda $\Phi = \{0, v\}$ kümesi Y un bir d -idealidir (Neggers et al. 1999).

Uyarı 3.1.12: Bir d -cebirinde, bir BCK -ideali bir d -alt cebir olmak zorunda değildir ve ayrıca bir d -alt cebirinin bir BCK -ideali olması da gerekmez (Neggers et al. 1999).

Örnek 3.1.13: $Y = \{0, v, \omega, \eta\}$ kümesi aşağıdaki Cayley tablosu ile BCK -cebiri olmayan bir d -cebiri olsun.

$*$	0	v	ω	η
0	0	0	0	0
v	v	0	0	ω
ω	ω	η	0	0
η	η	η	η	0

Bu durumda $\Phi = \{0, v, \omega\}$ kümesi Y un d -alt cebiri olmayan bir BCK -idealidir. $\Psi = \{0, \eta\}$ kümesi ise Y un BCK -ideali olmayan bir d -alt cebiridir (Neggers et al. 1999).

Uyarı 3.1.14: Her Y d -cebiri için $\{0\}$ ve Y bir d -alt cebirdir. Ayrıca Y un her d -ideali bir d -alt cebiridir ancak tersi doğru olmak zorunda değildir (Neggers et al. 1999).

Örnek 3.1.15: $Y = \{0, v, \omega, \eta\}$ kümesi aşağıdaki Cayley tablosu ile BCK -cebiri olmayan bir d -cebiri olsun.

$*$	0	v	ω	η
0	0	0	0	0
v	v	0	0	ω
ω	ω	ω	0	0
η	η	η	η	0

Bu durumda $\Phi = \{0, v\}$ kümesi Y un bir d -alt cebiridir fakat $v * \eta = \omega \notin \Phi$ olduğundan Y un bir d -ideali değildir (Neggers et al. 1999).

Lemma 3.1.16: Φ , bir Y d -cebirinin bir d -ideali olsun. O zaman $0 \in \Phi$ dir (Neggers et al. 1999).

Önerme 3.1.17: Bir Y d -cebirinin her d -ideali bir BCK -idealdir ancak tersi her zaman doğru değildir (Neggers et al. 1999).

Örnek 3.1.18: Örnek 3.1.15 de verilen $\Phi = \{0, v\}$ kümesi Y un bir BCK -idealidir fakat $v \in \Phi$ ve $\eta \in Y$ iken $v * \eta = \omega \notin \Phi$ olduğundan Y un bir d -ideali değildir (Neggers et al. 1999).

Önerme 3.1.19: Φ , bir Y d -cebirinin bir d -ideali olsun. Eğer $v \in \Phi$ ve $\omega * v = 0$ ise o zaman $\omega \in \Phi$ dir (Neggers et al. 1999).

Tanım 3.1.20: $(Y; *, 0)$ bir d -cebiri olsun. Y üzerinde “ $\leq$ ” bağıntısı

$$\forall v, \omega \in Y, v \leq \omega \Leftrightarrow v * \omega = 0$$

şeklinde tanımlanır. Bu bağıntı ile $(Y, \leq)$ bir kısmi sıralı kümedir (Neggers and Kim, 1999).

3.2. Kenar d -Cebirleri

Tanım 3.2.1: $(Y; *, 0)$ bir d -cebiri ve $v \in Y$ olsun.

$$v * Y = \{v * \omega \mid \omega \in Y\}$$

kümesi tanımlansın. Eğer herhangi bir $v \in Y$ için $v * Y = \{v, 0\}$ oluyor ise Y a bir kenar d -cebiri denir (Neggers and Kim, 1999).

Uyarı 3.2.2: $(Y, \leq)$ bir sıralı küme olsun. Bu durumda Y kümesi

$$v * \omega = \begin{cases} 0, & v \leq \omega \\ v, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı “ $*$ ” işlemi ile bir BCK -cebiridir. Diğer taraftan, “ $*$ ” işleminin tanımı gereği bu BCK -cebiri “kenar” özelliğine sahiptir. Kenar d -cebirleri genelde BCK -cebirleri değildir (Neggers and Kim, 1999).

Örnek 3.2.3: Aşağıdaki tablo ile verilen Y d -cebirini ele alalım.

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	2	2	0	0
3	3	3	3	0

Burada her $v \in Y$ için $v * Y = \{v, 0\}$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla Y bir kenar d -cebiridir ve $((1 * 3) * (1 * 2)) * (2 * 3) = 1 \neq 0$ olduğundan bir BCK -cebiri değildir (Neggers and Kim, 1999).

Lemma 3.2.4: $(Y; *, 0)$ bir kenar d -cebiri olsun. Bu durumda herhangi bir $v \in Y$ için

$$v * 0 = v$$

sağlanır (Neggers and Kim, 1999).

Önerme 3.2.5: $(Y; *, 0)$ bir kenar d -cebiri olsun. Bu durumda her $v, \omega \in Y$ için

$$(v * (v * \omega)) * \omega = 0$$

eşitliği sağlanır (Neggers and Kim, 1999).

Önerme 3.2.6: $(Y; *, 0)$ kenar özelliği olmayan bir d -cebiri olsun. O zaman

$$v \oplus \omega = \begin{cases} v, & v * \omega \neq 0 \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\oplus: Y \times Y \rightarrow Y$ ikili işlemine göre $(Y; \oplus, 0)$ yapısı bir kenar d -cebiri oluşturur (Neggers and Kim, 1999).

Tanım 3.2.7: Bir $(Y; *, 0)$ d -cebiri verilmiş olsun. Bu d -cebirinden bir $(Y; \oplus, 0)$ kenar d -cebiri oluşturulabilir ve bu yapıya genişletilmiş kenar d -cebiri denir (Neggers and Kim, 1999).

Örnek 3.2.8: Aşağıdaki gibi 27 tane d -cebiri vardır:

$*$	0	v	ω	η
0	0	0	0	0
v	v	0	0	a
ω	ω	b	0	0
η	η	0	c	0

Burada $\{a, b, c\} \in \{v, \omega, \eta\}$ dır. Bu cebirlerin tamamı, aşağıda gösterildiği gibi aynı ve yalnızca bir kenar d -cebirine sahiptir:

$\oplus$	0	v	ω	η
0	0	0	0	0
v	v	0	0	v
ω	ω	ω	0	0
η	η	0	η	0

Kenar özelliğine sahip d -cebirlerinin özellikleri, genel olarak kenar d -cebirlerinin özelliklerini yansıtır. Bu durum, d -cebirlerinde karşılaşılan bazı soruların, daha sade bir yapı olan kenar d -cebirlerine indirgenerek incelenmesini mümkün kılabilir (Neggers and Kim, 1999).

Tanım 3.2.9: $(Y; *, 0)$ ve $(\Phi; *, 0)$ iki d -cebiri ve $f: Y \rightarrow \Phi$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $v, \omega \in Y$ için

$$f(v * \omega) = f(v) * f(\omega)$$

eşitliği sağlanıyorsa f ye bir d -homomorfizma denir. Bu kavram bazı kenar özelliklerinin incelenmesinde kullanılır (Neggers and Kim, 1999).

Önerme 3.2.10: $(Y; *, 0)$ ve $(\Phi; *, 0)$ d -cebirleri ve $f: Y \rightarrow \Phi$ bir d -homomorfizma olsun. Bu durumda $f(0_Y) = 0_\Phi$ dır (Neggers and Kim, 1999).

Önerme 3.2.11: $(Y; *, 0)$ bir kenar d -cebiri ve $f: Y \rightarrow \Phi$ bir örten d -homomorfizma olsun. Bu durumda $(\Phi; *, 0)$ da bir kenar d -cebidir (Neggers and Kim, 1999).

4. d -CEBİRLERDE TÜREV

Bu bölümde d -cebirlерinde türev kavramı, örnekleri ve sağladığı özellikleri ile verilmiştir.

Uyarı 4.1: Bir $(Y; *, 0)$ d -cebiri üzerinde herhangi $v, \omega \in Y$ için $v * \omega$ işlemi kısaca $v\omega$ şeklinde yazılacaktır. Ayrıca bir Y d -cebiri üzerindeki v, ω elemanları için

$$v \wedge \omega = \omega(\omega v)$$

işlemi kullanılacaktır (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Tanım 4.2: Y bir d -cebiri olsun. Eğer her $v, \omega \in Y$ için

$$v \wedge \omega = \omega \wedge v$$

eşitliği sağlanıyorsa Y a bir değişmeli d -cebiri denir (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Tanım 4.3: Y bir d -cebiri olsun. Eğer bir $g: Y \rightarrow Y$ dönüşümü her $v, \omega \in Y$ için

$$g(v\omega) = (g(v)\omega) \wedge (vg(\omega))$$

koşulunu sağlıyor ise g dönüşümüne Y un bir sol-sağ türevi denir. Eğer g dönüşümü her $v, \omega \in Y$ için

$$g(v\omega) = (vg(\omega)) \wedge (g(v)\omega)$$

koşulunu sağlıyor ise g dönüşümüne Y un bir sağ-sol türevi denir. Eğer g , Y un hem bir sol-sağ hem de bir sağ-sol türevi ise g dönüşümüne Y d -cebirinin bir türevi denir (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Örnek 4.4: $Y = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde “*” ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlanan bir d -cebiri olsun.

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0
3	3	3	1	0	0	0
4	4	2	1	1	0	0
5	5	5	5	3	1	0

Burada $g_1: Y \rightarrow Y$ ve $g_2: Y \rightarrow Y$ dönüşümleri

$$g_1(v) = \begin{cases} 0, & v \in \{0,1,3,5\} \\ 2, & v \in \{2,4\} \end{cases}, \quad g_2(v) = \begin{cases} 0, & v \in \{0,1,3\} \\ 2, & v \in \{2,4,5\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda g_1 dönüşümü hem sol-sağ hem de sağ-sol türevdir; fakat g_2 dönüşümü sağ-sol türev olmasına rağmen $g_2(5) = g_2(5)0 \wedge 5g_2(0) = 3 \neq 2$ olduğundan sol-sağ türev değildir (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Tanım 4.5: Bir Y d -cebiri üzerinde tanımlanan bir g dönüşümü için $g(0) = 0$ oluyorsa g ye regülerdir denir (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Önerme 4.6: $(Y; *, 0)$ bir d -cebiri olsun. Eğer $g: Y \rightarrow Y$ dönüşümü bir sol-sağ türev ise g regülerdir (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Sonuç 4.7: g , Y d -cebirinin bir türevi ise regülerdir (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Önerme 4.8: Y bir d -cebiri olsun. Eğer her $v \in Y$ için $v0 = v$ ise her sağ-sol türev regülerdir (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Uyarı 4.9: Bir kenar d -cebirinde her sağ-sol türev regülerdir (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Önerme 4.10: Y , her $v \in Y$ için $v0 = v$ koşulunu sağlayan bir kenar d -cebiri olsun.

(1) Eğer g , Y un bir sol-sağ türevi ise her $v \in Y$ için $g(v) = g(v) \wedge v$ dir.

(2) Eğer g , Y un bir sağ-sol türevi ise her $v \in Y$ için $g(v) = v \wedge g(v)$ eşitliği geçerlidir (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Önerme 4.11: Y , her $v \in Y$ için $v0 = v$ koşulunu sağlayan bir kenar d -cebiri ve g , Y kenar d -cebirinin bir türevi olsun. Bu durumda her $v \in Y$ için

$$(v(vg(v)))v = (g(v)(g(v)v))v$$

eşitliği sağlanır (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Uyarı 4.12: g , Y kenar d -cebirinin bir türevi ise her $v \in Y$ için

$$(v(vg(v)))v = (g(v)(g(v)v))v = 0$$

eşitliği sağlanır (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Tanım 4.13: Y bir kenar d -cebiri olsun. Y üzerinde “ $\leq$ ” bağıntısı her $v, \omega \in Y$ için aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$v \leq \omega \Leftrightarrow v\omega = 0$$

Bu durumda $(Y, \leq)$ bir kısmi sıralı kümedir (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Önerme 4.14: Y bir kenar d -cebiri ve g , Y un bir türevi olsun. Bu durumda her $v, \omega \in Y$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $g(v) \leq v$,

(2) $g(v\omega) \leq vg(\omega)$,

(3) $g(v\omega) \leq g(v)\omega$,

(4) $g(vg(v)) = 0$,

(5) $g(g(v)) \leq v$,

(6) $g^{-1}(0) = \{v \in Y | g(v) = 0\}$ kümesi Y un bir d -alt cebiridir (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Önerme 4.15: Y bir kenar d -cebiri ve $g_1, g_2, \dots, g_n$, Y un türevleri olsun. Bu durumda her $v \in Y$ için

$$g_n \left(g_{(n-1)} \left(g_{(n-2)} \dots \left(g_2(g_1(v)) \right) \right) \right) \leq v$$

sağlanır (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Tanım 4.16: g , Y kenar d -cebirinin bir türevi olsun. Y un bir Φ ideali için $g(\Phi) = \{g(v) | v \in \Phi\}$ olmak üzere $g(\Phi) \subseteq \Phi$ oluyor ise Φ ye g -invariant denir (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Örnek 4.17: $Y = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde “*” ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0
3	3	3	1	0	0	0
4	4	2	1	1	0	0
5	5	5	5	3	1	0

Bu durumda Y bir d -cebiri. $g: Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$g(v) = \begin{cases} 0, & v \in \{0,1,3,5\} \\ 2, & v \in \{2,4\} \end{cases}$$

olarak verilsin. O zaman g dönüşümü Y d -cebirinin bir türevidir. Ayrıca $\Phi = \{0,1\}$ d -ideali, g -invarianttır (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Örnek 4.18: $Y = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde “*” ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0
3	3	3	3	0	0	0
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	5	5	0

Bu durumda Y bir kenar d -cebiri. $g: Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$g(v) = \begin{cases} 0, & v \in \{0,1,2,3,4\} \\ 5, & v = 5 \end{cases}$$

olarak verilsin. O zaman g dönüşümü Y kenar d -cebirinin bir türevidir. $\Phi = \{0,1,2,3,4\}$ d -ideali, g -invarianttır (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).

Teorem 4.19: g , Y kenar d -cebirinin bir türevi olsun. Bu durumda Y un her d -ideali g -invarianttır (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011).



5. d -CEBİRLERDE SİMETRİK İKİLİ TÜREVLER

5.1. d -Cebirlerde Simetrik İkili Türevlerin Tanımı ve Özellikleri

Bu bölümde d -cebiri üzerinde simetrik ikili türevler tanımlanarak örnekler verilmiştir ve bu türev çeşidinin bazı özellikleri incelenmiştir. Bu bölümde sunulan sonuçlar “Nasirov I. and Yılmaz, D. 2025. Symmetric bi-derivations on d -algebras. Bull. Int. Math. Virtual Inst., 15(1), 25–34.” başlıklı çalışmamızda elde edilen sonuçlardır.

Tanım 5.1.1: Y bir d -cebiri olsun. Eğer $\Delta: Y \times Y \rightarrow Y$ dönüşümü her $v, \omega \in Y$ için

$$\Delta(v, \omega) = \Delta(\omega, v)$$

koşulunu sağlıyor ise Δ dönüşümüne Y d -cebiri üzerinde bir simetrik dönüşüm denir (Nasirov and Yılmaz, 2025).

Tanım 5.1.2: Y bir d -cebiri olsun. $\delta: Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$\delta(v) = \Delta(v, v)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda δ dönüşümüne Δ simetrik dönüşümün izi denir (Nasirov and Yılmaz, 2025).

Tanım 5.1.3: Y bir d -cebiri ve $\Delta: Y \times Y \rightarrow Y$ bir simetrik dönüşüm olsun. Eğer Δ dönüşümü her $v, \omega, \eta \in Y$ için

$$\Delta(v * \omega, \eta) = (\Delta(v, \eta) * \omega) \wedge (v * \Delta(\omega, \eta))$$

koşulunu sağlıyor ise Δ dönüşümüne Y un bir sol-sağ simetrik ikili türevi denir. Eğer Δ dönüşümü her $v, \omega, \eta \in Y$ için

$$\Delta(v * \omega, \eta) = (v * \Delta(\omega, \eta)) \wedge (\Delta(v, \eta) * \omega)$$

koşulunu sağlıyor ise Δ dönüşümüne Y un bir sağ-sol simetrik ikili türevi denir. Eğer Δ , Y un hem sol-sağ hem de sağ-sol simetrik ikili türevi ise Δ dönüşümüne Y d -cebiri bir simetrik ikili türevi denir (Nasırov and Yılmaz, 2025).

Y un değişmeli d -cebiri olması durumunda sol-sağ simetrik ikili türev ile sağ-sol simetrik ikili türev tanımlarının denk olduğu açıktır.

d -cebirlerde simetrik ikili türevlerin varlığı aşağıdaki örneklerle gösterilmiştir.

Örnek 5.1.4: $Y = \{0, v, \omega\}$ kümesi aşağıdaki Cayley tablosu ile bir değişmeli d -cebiri olsun.

$*$	0	v	ω
0	0	0	0
v	v	0	0
ω	ω	v	0

Burada $\Delta: Y \times Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$\Delta(a, b) = \begin{cases} v, & (a, b) = (\omega, \omega) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak verilsin. Bu durumda Δ dönüşümü Y üzerinde bir simetrik ikili türevdir (Nasırov and Yılmaz, 2025).

Örnek 5.1.5: $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi üzerinde “*” ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0
3	3	3	1	0	0	0
4	4	2	1	1	0	0
5	5	5	3	3	1	0

Bu durumda Y bir d -cebiri. $\Delta: Y \times Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$\Delta(v, \omega) = \begin{cases} 3, & (v, \omega) = (4, 4) \\ 5, & (v, \omega) = (5, 5) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak verilsin. Bu durumda Δ dönüşümü bir sağ-sol simetrik ikili türev olmasına rağmen bir sol-sağ simetrik ikili türev değildir. Bunun nedeni aşağıda açıklanmıştır:

$$\begin{aligned} \Delta(4 * 0, 4) &= (4 * \Delta(0, 4)) \wedge (\Delta(4, 4) * 0) \\ &= 4 \wedge 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \Delta(4 * 0, 4) &= (\Delta(4, 4) * 0) \wedge (4 * \Delta(0, 4)) \\ &= 3 \wedge 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

olur (Nasirov and Yılmaz, 2025).

Önerme 5.1.6: Y bir d -cebiri ve Δ , Y üzerinde bir sol-sağ simetrik ikili türev olsun. Bu durumda her $v \in Y$ için

$$\Delta(0, v) = 0$$

eşitliği sağlanır (Nasırov and Yılmaz, 2025).

İspat: Her $v \in Y$ için,

$$\begin{aligned}
 \Delta(0, v) &= \Delta(0 * v, v) \\
 &= (\Delta(0, v) * v) \wedge (0 * \delta(v)) \\
 &= (\Delta(0, v) * v) \wedge 0 \\
 &= 0 * (0 * (\Delta(0, v) * v)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 5.1.7: Y bir kenar d -cebiri ve Δ , Y üzerinde bir sağ-sol simetrik ikili türev olsun. Bu durumda her $v \in Y$ için

$$\Delta(0, v) = 0$$

eşitliği sağlanır (Nasırov and Yılmaz, 2025).

İspat: Δ bir sağ-sol simetrik ikili türev olduğundan

$$\begin{aligned}
 \Delta(0, v) &= \Delta(0 * v, v) \\
 &= (0 * \delta(v)) \wedge (\Delta(0, v) * v) \\
 &= 0 \wedge (\Delta(0, v) * v) \\
 &= (\Delta(0, v) * v) * ((\Delta(0, v) * v) * 0) \\
 &= (\Delta(0, v) * v) * (\Delta(0, v) * v) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 5.1.8: Υ bir kenar d -cebiri ve Δ , Υ üzerinde bir sağ-sol simetrik ikili türev olsun. Bu durumda her $v, \omega, \eta \in \Upsilon$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- (1) $\Delta(v, \omega) = v \wedge \Delta(v, \omega)$
- (2) $\delta(v) = v \wedge \delta(v)$
- (3) $\Delta(v, \omega) \leq v$
- (4) $\delta(v) \leq v$
- (5) $\delta(\delta(v) * v) = 0$
- (6) $\Delta(v * \omega, \eta) \leq v * \Delta(\omega, \eta)$
- (7) $\Delta(\delta(v), \omega) \leq \delta(v)$ (Nasırov and Yılmaz, 2025).

İspat: (1) $v, \omega \in \Upsilon$ olsun. Önerme 5.1.8 kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \Delta(v, \omega) &= \Delta(v * 0, \omega) \\
 &= (v * \Delta(0, \omega)) \wedge (\Delta(v, \omega) * 0) \\
 &= (v * 0) \wedge \Delta(v, \omega) \\
 &= v \wedge \Delta(v, \omega)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(2) δ , Δ nın izi olduğundan, ispat (1) den elde edilir.

(3) $v, \omega \in \Upsilon$ olsun. (1) ve Önerme 3.2.5 kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \Delta(v, \omega) &= v \wedge \Delta(v, \omega) \\
 &= \Delta(v, \omega) * (\Delta(v, \omega) * v)
 \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned}
 \Delta(v, \omega) * v &= (\Delta(v, \omega) * (\Delta(v, \omega) * v)) * v \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda her $v, \omega \in \Upsilon$ için $\Delta(v, \omega) \leq v$ olur.

(4) (3) ten kolayca elde edilebilir.

(5) (4) ve (2) kullanılarak

$$\begin{aligned}\delta(0) &= 0 \wedge \delta(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Bunun sonucu olarak her $v \in Y$ için

$$\begin{aligned}\delta(\delta(v) * v) &= \delta(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir.

(6) $v, \omega, \eta \in Y$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\Delta(v * \omega, \eta) &= (v * \Delta(\omega, \eta)) \wedge (\Delta(v, \eta) * \omega) \\ &= (\Delta(v, \eta) * \omega) * ((\Delta(v, \eta) * \omega) * (v * \Delta(\omega, \eta)))\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&\Delta(v * \omega, \eta) * (v * \Delta(\omega, \eta)) \\ &= [(\Delta(v, \eta) * \omega) * ((\Delta(v, \eta) * \omega) * (v * \Delta(\omega, \eta)))] * (v * \Delta(\omega, \eta)) \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla her $v, \omega, \eta \in Y$ için istenen $\Delta(v * \omega, \eta) \leq v * \Delta(\omega, \eta)$ bağıntısı elde edilir.

(7) $v, \omega \in Y$ olsun. Eğer (1) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Delta(\delta(v), \omega) &= \delta(v) \wedge \Delta(\delta(v), \omega) \\ &= \Delta(\delta(v), \omega) * (\Delta(\delta(v), \omega) * \delta(v))\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned}\Delta(\delta(v), \omega) * \delta(v) &= \left(\Delta(\delta(v), \omega) * (\Delta(\delta(v), \omega) * \delta(v)) \right) * \delta(v) \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 5.1.9: Y bir kenar d -cebiri ve Δ , Y üzerinde bir sol-sağ simetrik ikili türev olsun. Bu durumda her $v, \omega, \eta \in Y$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- (1) $\Delta(v, \omega) = \Delta(v, \omega) \wedge v$
- (2) $\delta(v) = \delta(v) \wedge v$
- (3) $\Delta(v * \omega, \eta) \leq \Delta(v, \eta) * \omega$ (Nasırov and Yılmaz, 2025).

İspat: (1) $v, \omega \in Y$ olsun. Önerme 5.1.7 kullanılarak

$$\begin{aligned}\Delta(v, \omega) &= \Delta(v * 0, \omega) \\ &= (\Delta(v, \omega) * 0) \wedge (v * \Delta(0, \omega)) \\ &= \Delta(v, \omega) \wedge v\end{aligned}$$

elde edilir.

(2) δ, Δ nın izi olduğundan, ispat (1) den elde edilir.

(3) $v, \omega, \eta \in Y$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\Delta(v * \omega, \eta) &= (\Delta(v, \eta) * \omega) \wedge (v * \Delta(\omega, \eta)) \\ &= (v * \Delta(\omega, \eta)) * ((v * \Delta(\omega, \eta)) * (\Delta(v, \eta) * \omega))\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
 & \Delta(v * \omega, \eta) * (\Delta(v, \eta) * \omega) \\
 &= \left[(v * \Delta(\omega, \eta)) * ((v * \Delta(\omega, \eta)) * (\Delta(v, \eta) * \omega)) \right] * (\Delta(v, \eta) * \omega) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla her $v, \omega, \eta \in Y$ için gerekli olan $\Delta(v * \omega, \eta) \leq \Delta(v, \eta) * \omega$ bağıntısı elde edilir.

Örnek 5.1.10: $Y = \{0, v, \omega, \eta\}$ kümesi üzerinde “*” ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

*	0	v	ω	η
0	0	0	0	0
v	v	0	v	0
ω	ω	ω	0	0
η	ω	ω	ω	0

Bu durumda Y bir d -cebiri. $\Delta: Y \times Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} v, & (x, y) = (\eta, \eta) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak verilsin. Δ dönüşümünün Y üzerinde hem sol-sağ hem de sağ-sol simetrik ikili türev olduğu açıktır. Y nun bir kenar d -cebiri olmadığı kolay bir şekilde kontrol edilebilir. Diğer taraftan, $\delta(\eta) = v \neq \delta(\eta) \wedge \eta = v \wedge \eta = \omega$ ve $\Delta(0, \eta) = 0 \neq \Delta(0, \eta) \wedge \eta = 0 \wedge \eta = \omega$ dir. Bu nedenle Önerme 5.1.9 ve Önerme 5.1.10 da verilen kenar d -cebiri olma koşulu kaldırılamazdır (Nasirov and Yılmaz, 2025).

Önerme 5.1.11: Y bir kenar d -cebiri ve Δ , Y üzerinde bir sağ-sol simetrik ikili türev olsun. Eğer her $\omega, \eta \in Y$ için $v \leq \Delta(\omega, \eta)$ koşulunu sağlayan bir $v \in Y$ elemanı varsa, o zaman $v \leq \omega$ geçerlidir (Nasirov and Yılmaz, 2025).

İspat: Her $\omega, \eta \in Y$ için $v \leq \Delta(\omega, \eta)$ koşulunu sağlayan bir $v \in Y$ elemanının var olduğunu varsayalım. Önerme 5.1.9 (1) kullanılarak

$$v \leq \Delta(\omega, \eta) * (\Delta(\omega, \eta) * \omega)$$

ve

$$v * \omega \leq (\Delta(\omega, \eta) * (\Delta(\omega, \eta) * \omega)) * \omega$$

elde edilir. Buradan $v * \omega = 0$ elde edilir. Bu durumda $v \leq \omega$ geçerlidir.

Tanım 5.1.12: Y bir d -cebiri ve B , Y un boş kümeden farklı bir altkümesi olsun. O zaman, $\Delta(B, B) = \{\Delta(\omega_1, \omega_2) | \omega_1, \omega_2 \in B\}$ olmak üzere $\Delta(B, B) \subseteq B$ ise B kümesine Δ -invariant denir (Nasirov and Yılmaz, 2025).

Önerme 5.1.13: Y bir kenar d -cebiri ve Δ , Y üzerinde bir sağ-sol simetrik ikili türev olsun. O zaman, Y un her B d -ideali Δ -invarianttır (Nasirov and Yılmaz, 2025).

İspat: $\eta \in \Delta(B, B)$ olsun. Dolayısıyla, herhangi $\omega_1, \omega_2 \in B$ için $\eta = \Delta(\omega_1, \omega_2)$ dır. Önerme 5.1.9 (3) kullanılarak $\Delta(\omega_1, \omega_2) \leq \omega_1$ sağlanır ve dolayısıyla $\Delta(\omega_1, \omega_2) * \omega_1 = 0$ elde edilir. B bir d -ideal ve $\omega_1 \in B$ olduğundan, $\Delta(\omega_1, \omega_2) = \eta \in B$ bulunur. Böylece $\Delta(B, B) \subseteq B$ elde edilir.

Tanım 5.1.14: Y bir d -cebiri ve Δ , Y üzerinde bir sol-sağ (veya sağ-sol) simetrik ikili türev olsun. Sabit bir $v \in Y$ elemanı ve her $\omega \in Y$ için $\delta_v(\omega) = \Delta(v, \omega)$ olacak şekilde bir $\delta_v: Y \rightarrow Y$ dönüşümü tanımlanır (Nasirov and Yılmaz, 2025).

Teorem 5.1.15: Y bir d -cebiri ve Δ , Y üzerinde bir sol-sağ (veya sağ-sol) simetrik ikili türev olsun. O zaman, Tanım 5.1.15 te tanımlanan δ_v dönüşümü, her $v \in Y$ için Y un bir sol-sağ (veya sağ-sol) simetrik ikili türevidir (Nasirov and Yılmaz, 2025).

İspat: Her $\omega, \eta \in Y$ için

$$\begin{aligned}
 \delta_v(\omega * \eta) &= \Delta(v, \omega * \eta) \\
 &= (\Delta(v, \omega) * \eta) \wedge (\omega * \Delta(v, \eta)) \\
 &= (\delta_v(\omega) * \eta) \wedge (\omega * \delta_v(\eta))
 \end{aligned}$$

elde edilir.

5.2. d -Cebirlerinin $Ker_\delta(Y)$ ve $Fix_\Delta(Y)$ Kümeleri ve Özellikleri

Bu bölümde, simetrik ikili türev kavramı ile ilişkili $Ker_\delta(Y)$ ve $Fix_\Delta(Y)$ kümeleri tanıtılmıştır. Ayrıca bu bölümde sunulan sonuçlar “Nasirov I. and Yılmaz, D. 2025. Symmetric bi-derivations on d-algebras. Bull. Int. Math. Virtual Inst., 15(1), 25–34.” başlıklı çalışmamızda elde edilen sonuçlardır.

Tanım 5.2.1: Y bir d -cebiri ve Δ , Y üzerinde bir sol-sağ (veya sağ-sol) simetrik ikili türev olsun. δ , Δ ’nın izi olmak üzere Y ’un bir $Ker_\delta(Y)$ altkümesi $Ker_\delta(Y) = \{v \in Y \mid \delta(v) = 0\}$ olarak tanımlanır (Nasirov and Yılmaz, 2025).

Teorem 5.2.2: Y bir kenar d -cebiri, Δ ; Y üzerinde bir sol-sağ (veya sağ-sol) simetrik ikili türev ve δ , Δ ’nın izi olsun. O zaman $Ker_\delta(Y)$, Y ’un bir d -alt cebiridir (Nasirov and Yılmaz, 2025).

İspat: $\delta(0) = 0$ olduğundan $0 \in Ker_\delta(Y)$ ve dolayısıyla $Ker_\delta(Y) \neq \emptyset$ olur. $v, \omega \in Ker_\delta(Y)$ olsun. Bu durumda $\delta(v) = \delta(\omega) = 0$ olur. Sol-sağ simetrik ikili türevin tanımını kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \delta(v * \omega) &= \Delta(v * \omega, v * \omega) \\
 &= (\Delta(v, v * \omega) * \omega) \wedge (v * \Delta(\omega, v * \omega)) \\
 &= \left[((\delta(v) * \omega) \wedge (v * \Delta(v, \omega))) * \omega \right] \wedge \\
 &\quad \left[v * ((\Delta(\omega, v) * \omega) \wedge (v * \delta(\omega))) \right] \\
 &= 0 \wedge [v * ((\Delta(\omega, v) * \omega) \wedge v)]
 \end{aligned}$$

$$= 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $Ker_{\delta}(Y)$, Y un bir d -alt cebiridir.

Örnek 5.2.3: $Y = \{0, v, \omega, \eta\}$ kümesi üzerinde “*” ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

*	0	v	ω	η
0	0	0	0	0
v	v	0	0	v
ω	ω	ω	0	0
η	η	0	η	0

Bu durumda Y bir d -cebiri. $\Delta: Y \times Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} \eta, & (x, y) = (\eta, \eta) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak verilsin. O zaman Δ dönüşümü Y üzerinde hem sağ-sol hem de sol-sağ simetrik ikili türevdir. $Ker_{\delta}(Y) = \{0, v, \omega\}$ olarak bulunur. $\eta * v \in Ker_{\delta}(Y)$ ve $v \in Ker_{\delta}(Y)$ fakat $\eta \notin Ker_{\delta}(Y)$ olduğundan, $Ker_{\delta}(Y)$ bir d -ideal değildir (Nasırov and Yılmaz, 2025).

Teorem 5.2.4: Δ , Y d -cebiri (kenar d -cebiri) üzerinde bir sağ-sol (sol-sağ) simetrik ikili türev ve δ , Δ nın izi olsun. Eğer $v \in Y$ ve $\omega \in Ker_{\delta}(Y)$ ise, o zaman $v \wedge \omega \in Ker_{\delta}(Y)$ ($\omega \wedge v \in Ker_{\delta}(Y)$) dır (Nasırov and Yılmaz, 2025).

İspat: Δ nın Y un bir sağ-sol simetrik ikili türevi olduğunu varsayalım. $v \in Y$ ve $\omega \in Ker_{\delta}(Y)$ olsun. O zaman $\delta(\omega) = 0$ ve

$$\begin{aligned} \delta(v \wedge \omega) &= \Delta(v \wedge \omega, v \wedge \omega) \\ &= \Delta(v \wedge \omega, \omega * (\omega * v)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\omega * \Delta(v \wedge \omega, \omega * v)) \wedge \\
 &\quad (\Delta(\omega, v \wedge \omega) * (\omega * v)) \\
 &= (\omega * \Delta(v \wedge \omega, \omega * v)) \wedge \\
 &\quad (\Delta(\omega, \omega * (\omega * v)) * (\omega * v)) \\
 &= (\omega * \Delta(v \wedge \omega, \omega * v)) \wedge \\
 &\quad \left[((\omega * \Delta(\omega, \omega * v)) \wedge \right. \\
 &\quad \left. (\delta(\omega) * (\omega * v))) * (\omega * v) \right] \\
 &= (\omega * \Delta(v \wedge \omega, \omega * v)) \wedge 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, her $v \in Y$ ve $\omega \in Ker_\delta(Y)$ için $v \wedge \omega \in Ker_\delta(Y)$ elde edilir.

Örnek 5.2.5: $Y = \{0, v, \omega, \eta\}$ kümesi üzerinde “*” ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

*	0	v	ω	η
0	0	0	0	0
v	v	0	0	ω
ω	ω	ω	0	0
η	η	η	v	0

Bu durumda Y kenar özelliğinin sağlanmadığı bir d -cebiridir. $\Delta: Y \times Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} \eta, & (x, y) = (\eta, \eta) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak verilsin. O zaman Δ dönüşümü Y üzerinde hem sağ-sol hem de sol-sağ simetrik ikili türevdir. Sol-sağ simetrik ikili türevler için Teorem 5.2.4 koşullarında kenar koşulu kaldırılamazdır. Çünkü $\eta \in Y$ ve $\omega \in Ker_\delta(Y)$ fakat $\omega \wedge \eta = \eta \notin Ker_\delta(Y)$ (Nasirov and Yılmaz, 2025).

Tanım 5.2.6: Y bir d -cebiri ve Δ , Y üzerinde bir sol-sağ (veya sağ-sol) simetrik ikili türev olsun. Sabit bir $\eta \in Y$ elemanı için bir $Fix_{\Delta}(Y) = \{v \in Y | \Delta(v, \eta) = v\}$ kümesi tanımlanır (Nasırov and Yılmaz, 2025).

Önerme 5.2.7: Y bir kenar d -cebiri ve Δ , Y üzerinde bir sol-sağ (veya sağ-sol) simetrik ikili türev olsun. Bu durumda $Fix_{\Delta}(Y)$, Y un bir d -alt cebiridir (Nasırov and Yılmaz, 2025).

İspat: $\Delta(0, \eta) = 0$ olduğundan $0 \in Fix_{\Delta}(Y)$ elde edilir ve böylece $Fix_{\Delta}(Y) \neq \emptyset$ olur. $v, \omega \in Fix_{\Delta}(Y)$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} \Delta(v * \omega, \eta) &= (\Delta(v, \eta) * \omega) \wedge (v * \Delta(\omega, \eta)) \\ &= (v * \omega) \wedge (v * \omega) \\ &= v * \omega \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $v * \omega \in Fix_{\Delta}(Y)$ olduğundan $Fix_{\Delta}(Y)$, Y un bir d -alt cebiridir.

Örnek 5.2.8: $Y = \{0, v, \omega, \eta\}$ kümesi üzerinde “*” ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

*	0	v	ω	η
0	0	0	0	0
v	v	0	v	0
ω	ω	ω	0	0
η	η	η	0	0

Bu durumda Y bir d -cebiridir. $\Delta: Y \times Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} \omega, & (x, y) \in \{(\omega, \eta), (\eta, \omega)\} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak verilsin. O zaman Δ , bir sağ-sol simetrik ikili türev olmasına rağmen bir sol-sağ simetrik ikili türev değildir. Çünkü

$$\Delta(\eta * v, \omega) = (\eta * \Delta(v, \omega)) \wedge (\Delta(\eta, \omega) * v) = \eta * \omega = \omega$$

ve

$$\Delta(\eta * v, \omega) = (\Delta(\eta, \omega) * v) \wedge (\eta * \Delta(v, \omega)) = \omega * \eta = \eta$$

olur. Ayrıca $\text{Fix}_\Delta(Y) = \{0, \omega\}$ dir. Burada $\eta * \omega \in \text{Fix}_\Delta(Y)$ ve $\omega \in \text{Fix}_\Delta(Y)$ ancak $\eta \notin \text{Fix}_\Delta(Y)$ olduğundan $\text{Fix}_\Delta(Y)$ bir d -ideal değildir (Nasırov and Yılmaz, 2025).

Önerme 5.2.9: Y bir kenar d -cebiri ve Δ , Y üzerinde bir sol-sağ (veya sağ-sol) simetrik ikili türev olsun. Eğer $v, \omega \in \text{Fix}_\Delta(Y)$ ise $v \wedge \omega \in \text{Fix}_\Delta(Y)$ dir (Nasırov and Yılmaz, 2025).

İspat: $v, \omega \in \text{Fix}_\Delta(Y)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Delta(v \wedge \omega, \eta) &= \Delta(\omega * (\omega * v), \eta) \\ &= (\Delta(\omega, \eta) * (\omega * v)) \wedge (\omega * \Delta(\omega * v, \eta)) \\ &= (\omega * (\omega * v)) \wedge \\ &\quad \left(\omega * ((\Delta(\omega, \eta) * v) \wedge (\omega * \Delta(v, \eta))) \right) \\ &= (v \wedge \omega) \wedge (\omega * ((\omega * v) \wedge (\omega * v))) \\ &= (v \wedge \omega) \wedge (v \wedge \omega) \\ &= v \wedge \omega \end{aligned}$$

elde edilir.

5.3. d -Cebirlerde Genelleştirilmiş Simetrik İkili Türevler

Bu alt başlıkta, “Yılmaz, D. 2024. Generalized Symmetric Bi-derivations on d -Algebras. Presented at the 12. International Summit Scientific Research Congress. 105-111.” isimli çalışma ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Tanım 5.3.1: Y bir d -cebiri, $\Delta: Y \times Y \rightarrow Y$ bir sol-sağ simetrik ikili türev ve $\Gamma: Y \times Y \rightarrow Y$ bir simetrik dönüşüm olsun. Eğer Γ dönüşümü her $v, \omega, \eta \in Y$ için

$$\Gamma(v * \omega, \eta) = (\Gamma(v, \eta) * \omega) \wedge (v * \Delta(\omega, \eta))$$

koşulunu sağlıyor ise Γ dönüşümüne Δ ya bağlı bir genelleştirilmiş sol-sağ simetrik ikili türev denir. $\Delta: Y \times Y \rightarrow Y$ bir sağ-sol simetrik ikili türev ve $\Gamma: Y \times Y \rightarrow Y$ bir simetrik dönüşüm olmak üzere, eğer her $v, \omega, \eta \in Y$ için

$$\Gamma(v * \omega, \eta) = (v * \Gamma(\omega, \eta)) \wedge (\Delta(v, \eta) * \omega)$$

koşulu sağlanıyor ise Γ dönüşümüne Δ ya bağlı bir genelleştirilmiş sağ-sol simetrik ikili türev denir (Yılmaz, 2024).

Örnek 5.3.2: $Y = \{0, v, \omega\}$ kümesi üzerinde “*” ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

*	0	v	ω
0	0	0	0
v	v	0	0
ω	ω	v	0

Bu durumda Y bir d -cebiridir. $\Delta: Y \times Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$\Delta(a, b) = \begin{cases} v, & (a, b) = (\omega, \omega) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve $\Gamma: Y \times Y \rightarrow Y$ dönüşümü

$$\Gamma(a, b) = \begin{cases} v, & (a, b) \in \{(v, \omega), (\omega, v)\} \\ \omega, & (a, b) = (\omega, \omega) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak verilsin. Bu durumda Δ bir simetrik ikili türev ve Γ, Δ ya bağlı bir genelleştirilmiş sol-sağ simetrik ikili türevdir. Burada

$$\Gamma(\omega * v, \omega) = (\Gamma(\omega, \omega) * v) \wedge (\omega * \Delta(v, \omega)) = (\omega * v) \wedge (\omega * 0) = v \wedge \omega = v$$

ve

$$\Gamma(\omega * v, \omega) = (\omega * \Gamma(v, \omega)) \wedge (\Delta(\omega, \omega) * v) = (\omega * v) \wedge (v * v) = v \wedge 0 = 0$$

olduğundan Γ, Δ ya bağlı bir genelleştirilmiş sağ-sol simetrik ikili türev değildir (Yılmaz, 2024).

Önerme 5.3.3: Y bir d -cebiri ve Γ, Y üzerinde Δ sol-sağ simetrik ikili türevine bağlı bir genelleştirilmiş sol-sağ simetrik ikili türev olsun. Bu durumda her $v \in Y$ için

$$\Gamma(0, v) = 0$$

eşitliği sağlanır (Yılmaz, 2024).

İspat: Her $v \in Y$ için,

$$\begin{aligned} \Gamma(0, v) &= \Gamma(0 * v, v) \\ &= (\Gamma(0, v) * v) \wedge (0 * \Delta(v, v)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\Gamma(0, v) * v) \wedge 0 \\
 &= 0 * (0 * (\Gamma(0, v) * v)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 5.3.4: Y bir kenar d -cebiri ve Γ , Y üzerinde Δ sağ-sol simetrik ikili türevine bağlı bir genelleştirilmiş sağ-sol simetrik ikili türev olsun. Bu durumda her $v \in Y$ için

$$\Gamma(0, v) = 0$$

eşitliği sağlanır (Yılmaz, 2024).

İspat: Y bir kenar d -cebiri ve Γ , Y üzerinde Δ sağ-sol simetrik ikili türevine bağlı bir genelleştirilmiş sağ-sol simetrik ikili türev olduğundan

$$\begin{aligned}
 \Gamma(0, v) &= \Gamma(0 * v, v) \\
 &= (0 * \Gamma(v, v)) \wedge (\Delta(0, v) * v) \\
 &= 0 \wedge (\Delta(0, v) * v) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 5.3.5: Y bir kenar d -cebiri ve Γ , Y üzerinde Δ sağ-sol simetrik ikili türevine bağlı bir genelleştirilmiş sağ-sol simetrik ikili türev olsun. δ ve γ sırasıyla Δ ve Γ nın izleri olmak üzere, her $v, \omega, \eta \in Y$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$$(1) \Gamma(v, \omega) = v \wedge \Delta(v, \omega)$$

$$(2) \gamma(v) = v \wedge \delta(v)$$

$$(3) \Gamma(v, \omega) \leq v$$

$$(4) \gamma(v) \leq v$$

$$(5) \gamma(\gamma(v) * v) = 0$$

$$(6) \Gamma(v * \omega, \eta) \leq v * \Gamma(\omega, \eta) \text{ (Yılmaz, 2024)}$$

İspat: (1) $v, \omega \in Y$ olsun. Önerme 5.3.4 kullanılarak

$$\begin{aligned} \Gamma(v, \omega) &= \Gamma(v * 0, \omega) \\ &= (v * \Gamma(0, \omega)) \wedge (\Delta(v, \omega) * 0) \\ &= (v * 0) \wedge \Delta(v, \omega) \\ &= v \wedge \Delta(v, \omega) \end{aligned}$$

elde edilir.

(2) γ ve δ sırasıyla Γ ve Δ nın izleri olduğundan, ispat (1) den elde edilir.

(3) $v, \omega \in Y$ olsun. (1) ve Önerme 3.2.5 kullanılarak

$$\begin{aligned} \Gamma(v, \omega) &= v \wedge \Delta(v, \omega) \\ &= \Delta(v, \omega) * (\Delta(v, \omega) * v) \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned} \Gamma(v, \omega) * v &= (\Delta(v, \omega) * (\Delta(v, \omega) * v)) * v \\ &= 0 \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda her $v, \omega \in Y$ için $\Gamma(v, \omega) \leq v$ olur.

(4) (3) ten kolayca elde edilebilir.

(5) (4) ve (2) kullanılarak

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= 0 \wedge \delta(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Bunun sonucu olarak her $v \in Y$ için

$$\begin{aligned}\gamma(\gamma(v) * v) &= \gamma(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir.

(6) $v, \omega, \eta \in Y$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\Gamma(v * \omega, \eta) &= (v * \Gamma(\omega, \eta)) \wedge (\Delta(v, \eta) * \omega) \\ &= (\Delta(v, \eta) * \omega) * ((\Delta(v, \eta) * \omega) * (v * \Gamma(\omega, \eta)))\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\Gamma(v * \omega, \eta) * (v * \Gamma(\omega, \eta)) &= [(\Delta(v, \eta) * \omega) * ((\Delta(v, \eta) * \omega) * (v * \Gamma(\omega, \eta)))] * (v * \Gamma(\omega, \eta)) \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla her $v, \omega, \eta \in Y$ için $\Gamma(v * \omega, \eta) \leq v * \Gamma(\omega, \eta)$ bağıntısı elde edilir.

Önerme 5.3.6: Y bir kenar d -cebiri ve Γ , Y üzerinde Δ sol-sağ simetrik ikili türevine bağlı bir genelleştirilmiş sol-sağ simetrik ikili türev olsun. δ ve γ sırasıyla Δ ve Γ nin izleri olmak üzere, her $v, \omega, \eta \in Y$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

$$(1) \Gamma(v, \omega) = \Gamma(v, \omega) \wedge v$$

$$(2) \gamma(v) = \gamma(v) \wedge v$$

$$(3) \Gamma(v * \omega, \eta) \leq \Gamma(v, \eta) * \omega \text{ (Yılmaz, 2024).}$$

İspat: (1) $v, \omega \in Y$ olsun. Önerme 5.3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \Gamma(v, \omega) &= \Gamma(v * 0, \omega) \\
 &= (\Gamma(v, \omega) * 0) \wedge (v * \Delta(0, \omega)) \\
 &= \Gamma(v, \omega) \wedge v
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(2) γ , Γ nın izi olduğundan, ispat (1) den elde edilir.

(3) $v, \omega, \eta \in Y$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 \Gamma(v * \omega, \eta) &= (\Gamma(v, \eta) * \omega) \wedge (v * \Delta(\omega, \eta)) \\
 &= (v * \Delta(\omega, \eta)) * ((v * \Delta(\omega, \eta)) * (\Gamma(v, \eta) * \omega))
 \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned}
 &\Gamma(v * \omega, \eta) * (\Gamma(v, \eta) * \omega) \\
 &= \left[(v * \Delta(\omega, \eta)) * ((v * \Delta(\omega, \eta)) * (\Gamma(v, \eta) * \omega)) \right] * (\Gamma(v, \eta) * \omega) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla her $v, \omega, \eta \in Y$ için $\Gamma(v * \omega, \eta) \leq \Gamma(v, \eta) * \omega$ bağıntısı geçerlidir.

Önerme 5.3.7: Y bir kenar d -cebiri ve Γ , Y üzerinde Δ sağ-sol simetrik ikili türevine bağlı bir genelleştirilmiş sağ-sol simetrik ikili türev olsun. Eğer her $\omega, \eta \in Y$ için $v \leq \Gamma(\omega, \eta)$ koşulunu sağlayan bir $v \in Y$ elemanı varsa, o zaman $v \leq \omega$ geçerlidir (Yılmaz, 2024).

İspat: Her $\omega, \eta \in Y$ için $v \leq \Gamma(\omega, \eta)$ koşulunu sağlayan bir $v \in Y$ elemanının var olduğunu varsayalım. Önerme 5.3.5 (1) kullanılarak

$$v \leq \Delta(\omega, \eta) * (\Delta(\omega, \eta) * \omega)$$

ve

$$v * \omega \leq (\Delta(\omega, \eta) * (\Delta(\omega, \eta) * \omega)) * \omega$$

elde edilir. Buradan $v * \omega = 0$ bulunur. Bu durumda $v \leq \omega$ geçerlidir.

Tanım 5.3.8: Y bir d -cebiri ve B , Y un boş kümeden farklı bir altkümesi olsun. O zaman, $\Gamma(B, B) = \{\Gamma(\omega_1, \omega_2) | \omega_1, \omega_2 \in B\}$ olmak üzere $\Gamma(B, B) \subseteq B$ ise B ya Γ -invariant denir (Yılmaz, 2024).

Teorem 5.3.9: Y bir kenar d -cebiri ve Γ , Y üzerinde Δ sağ-sol simetrik ikili türevine bağlı bir genelleştirilmiş sağ-sol simetrik ikili türev olsun. Bu durumda, Y un her B d -ideali Γ -invarianttır (Yılmaz, 2024).

İspat: $v \in \Gamma(B, B)$ olsun. O halde, herhangi $\omega_1, \omega_2 \in B$ için $v = \Gamma(\omega_1, \omega_2)$ vardır. Önerme 5.3.5 (3) kullanılarak $\Gamma(\omega_1, \omega_2) \leq \omega_1$ ve dolayısıyla $\Gamma(\omega_1, \omega_2) * \omega_1 = 0$ elde edilir. B bir d -ideal ve $\omega_1 \in B$ olduğundan, $\Gamma(\omega_1, \omega_2) = v \in B$ elde edilir. Böylece $\Gamma(B, B) \subseteq B$ elde edilir.

6. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde çalışmamızdan elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde BCK -cebirlерinin bir genellemesi olan d -cebir kavramı, örnekleri ve sağladığı özelliklerle birlikte sunulmuştur. Aynı bölümde d -cebirlерinin önemli bir çeşidi olan kenar d -cebiri kavramı da örneklerle ele alınmıştır. Dördüncü bölümde ise d -cebirlerde türev kavramı tanıtılmış; ilgili örnekler ve bu türevin sağladığı temel özellikler ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Beşinci bölümde d -cebirlерinde simetrik ikili türevler tanımlanmış, $Ker_{\delta}(Y)$ ve $Fix_{\Delta}(Y)$ kümeleri verilerek simetrik ikili türevlerle aralarındaki ilişkiler araştırılmıştır. Ayrıca d -cebirleri üzerinde genelleştirilmiş simetrik ikili türevler ve özellikleri incelenmiştir. Bir kenar d -cebiri üzerinde (genelleştirilmiş) sağ-sol simetrik ikili türevler için d -ideallerin invaryant olduğu ispatlanmıştır.

Gelecekteki çalışmalarda, bu sonuçlar simetrik ikili türevlerin farklı türleri ve d -cebirlерinde permütasyonlu üçlü türevler için araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Abujabal, H. A. and Al-Shehri, N. O. 2007. On left derivations of BCI-algebras. *Soochow Journal of Mathematics*, 33(3), 435.
- Al-Omary, R. M. 2019. On (α, β) -derivations in d-algebras. *Bollettino dell Unione Matematica Italiana*, 12, 549-556.
- Alnefaie, K. 2024. On Reverse Derivations in d-algebras. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 17(1), 362-371.
- Chandramouleeswaran, M. and Kandaraj, N. 2011. Derivations on d-algebras. *International Journal of Mathematical Sciences and applications*, 1(1), 231-237.
- Hu, Q. P. and Li, X. 1983. On BCH-algebras. *Math. Sem. Notes*, 11, 313–320.
- Ilbira, S., Firat, A. and Jun, Y. B. 2011. On symmetric bi-derivations of BCI-algebras. *Applied mathematical sciences*, 5(57-60), 2957-2966.
- Imai, Y. and Iseki, K. 1965. On axiom systems of propositional calculi. I. *Proceedings of the Japan Academy*, 41(6), 436-439.
- Iseki, K. 1966. An algebra related with a propositional calculus. *Proceedings of the Japan Academy*, 42(1), 26-29.
- Jun, Y. B. and Xin, X. L. 2004. On derivations of BCI-algebras. *Information Sciences*, 159(3-4), 167-176.
- Maksa, Gy. 1987. On the trace of symmetric bi-derivations. *CR Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 9(6), 303-307.
- Meng, J. 1995. Implicative commutative semigroups are equivalent to a class of BCK algebras. *In Semigroup Forum*, 50, 89-96.
- Muhiuddin, G., Al-roqi, A. M., Jun, Y. B. and Çeven, Y. 2013. On Symmetric Left Bi-Derivations in BCI-Algebras. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2013, 1-6.
- Muhiuddin, G. and Al-Roqi, A. M. 2012. On t-Derivations of BCI-Algebras. *In Abstract and Applied Analysis*, 2012 (1), 872784.
- Mundici, D. 1986. Interpretation of AF C*-algebras in Łukasiewicz sentential calculus. *Journal of Functional Analysis*, 65(1), 15-63.
- Nasırov I. and Yılmaz, D. 2025. Symmetric bi-derivations on d-algebras. *Bull. Int. Math. Virtual Inst.*, 15(1), 25–34.

- Neggers, J. and Kim, H. S. 1999. On d-algebras. *Mathematica Slovaca*, 49(1), 19-26.
- Neggers J., Jun, Y. B. and Kim, H. S. 1999. On d-ideals in d-algebras. *Mathematica Slovaca*, 49(3), 243-251.
- Öztürk, M. A., Çeven, Y. and Jun, Y. B. 2009. Generalized derivations of BCI-algebras. *Honam Mathematical Journal*, 31(4), 601-609.
- Posner, E. C. 1957. Derivation in prime rings. *Proc. Am. Math. Soc.*, 8, 1093-1100.
- Şenbakar, A. and Yılmaz, D. 2023. On Generalized (α, β) -derivations in d-algebras. *Bull. Int. Math. Virtual Inst.*, 13(2), 239-247.
- Vukman, J. 1989. Symmetric bi-derivations on prime and semi-prime rings. *Aequationes mathematicae*, 38, 245-254.
- Yılmaz, D. 2024. Generalized Symmetric Bi-derivations on d-Algebras. Presented at the 12. International Summit Scientific Research Congress. 105-111.
- Zhan, J. and Liu, Y. L. 2005. On f-derivations of BCI-algebras. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2005(11), 1675-1684.