

d - ORTOGONAL POLİNOMLAR

Gülşen ORUCOVA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TEMMUZ 2013
ANKARA**

Gülşen ORUCOVA tarafından hazırlanan “ d - ORTOGONAL POLİNOMLAR” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN

.....

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

.....

Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 09/ 07/ 2013

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Gülşen ORUCOVA

d - ORTOGONAL POLİNOMLAR**(Yüksek Lisans Tezi)****Gülşen ORUCOVA****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Temmuz 2013****ÖZET**

Bu çalışmada d -ortogonal polinomlar incelenmiştir. İlk olarak önbilgiler ve kullanılacak olan bazı kavramlar, d -ortogonallikle ilgili tanımlar ve lemmalar verilmiştir. Daha sonra Humbert polinomlarının d -ortogonalliği gösterilmiş ve özel hallerinin d -ortogonalliği incelenmiştir. Ayrıca Jacobi tipi polinomların d -ortogonalliği gösterilmiş, rekürans bağıntısı elde edilmiştir. Buna ek olarak genelleştirilmiş d -ortogonal polinomlar verilerek özel halleri incelenmiştir. Son olarak Hermite tipi polinomların d -ortogonalliği gösterilmiş, Charlier, Gould-Hopper, Laguerre tipi polinomlar ve bunların d -ortogonalliği araştırılmıştır.

Bilim Kodu : 204.1.138**Anahtar Kelimeler : d -ortogonallik, Meijer G-fonksiyonu, Pochhammer sembolü, hipergeometrik fonksiyon.****Sayfa Adedi : 74****Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN**

d - ORTHOGONAL POLYNOMIALS**(M. Sc. Thesis)****Gülşen ORUCOVA****GAZİ UNIVERSITY****GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES****July 2013****ABSTRACT**

In this study, d -orthogonal polynomials were investigated. First, preliminaries and some concepts that will be used, definitions and lemmas regarding the concept of d -orthogonality were given. After that d -orthogonality of Humbert polynomials was shown and d -orthogonalities of their special cases were examined. Also d -orthogonality of Jacobi-type polynomials was shown and recurrence relation was obtained. In addition generalized d -orthogonal polynomials were given and their special cases were investigated. Lastly d -orthogonality of Hermite-type polynomials was shown, d -orthogonalities of Charlier, Gould-Hopper and Laguerre-type polynomials were investigated.

Science Code : 204.1.138**Key Words : d -orthogonality, Meijer's G-function, Pochhammer symbol,
hypergeometric function****Page Number: 74****Adviser : Assoc. Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN**

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimin her aşamasında desteğini esirgemeyen, tecrübesi ve derin bilgileri ile bana yardımcı olan çok kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN'a ve her zaman bilgisinden faydalandığım babama sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisans eğitimim süresince desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	2
2.1. Gamma Fonksiyonu	2
2.2. Pochhammer Sembolü	3
2.3. Meijer G-Fonksiyonu	5
2.4. Hipergeometrik Seri ve Hipergeometrik Fonksiyon	7
3. d - ORTOGONAL POLİNOMLARIN TEORİSİNE GİRİŞ	9
3.1. d - Ortogonallik	9
4. d - ORTOGONAL HUMBERT POLİNOMLARI	12
4.1. d - Boyutlu Fonksiyonel Vektör.....	22
4.2. Humbert Polinomlarının Özel Durumları	23
4.2.1. Gegenbauer polinomları.....	24
4.2.2. Pincherle tipi polinomlar.....	26
4.2.3. Tchebicheff tipi d -ortogonal polinomlar	28
4.2.4. Legendre tipi polinomlar.....	32

Sayfa

5. JACOBI TİPİ POLİNOMLARIN d - ORTOGONALLIĞI.....	36
5.1. Humbert Polinomlarının Bileşenleri	36
5.2. Doğurucu Fonksiyon.....	42
5.3. Rekürans Bağıntısı	42
5.4. Diferensiyel Denklem	45
6. GENELLEŞTİRİLMİŞ HİPERGEOMETRİK d - ORTOGONAL POLİNOMLAR	49
7. HERMİTE TİPİ POLİNOMLARIN d - ORTOGONALLIĞI.....	57
7.1. Charlier Tipi d - Ortogonal Polinomlar.....	60
7.2. Genelleştirilmiş Hermite Polinomları	64
7.3. Doğurucu Fonksiyon.....	64
7.4. Limit İlişkisi	65
8. SONUÇ VE ÖNERİLER	71
KAYNAKLAR	72
ÖZGEÇMİŞ	74

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$(a)_r$	Pochhammer sembolü
$h_{n,d+1}^v(x)$	Humbert polinomu
$H_n(x)$	Hermite polinomu
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Jacobi polinomu
$C_n^v(x)$	Gegenbauer polinomu
$P_n^v(x)$	Pincherle polinomu
$U_n(x)$	İkinci çeşit Tchebicheff polinomu
$G_{p,q}^{m,n}$	Meijer G- fonksiyonu
$L_n(x;d)$	Legendre tipi polinom
$g_n^{d+1}(x;h)$	Gould- Hopper polinomu
$C_n^{(a)}(x)$	Charlier polinomu
$l_n^{(\alpha_d)}(x)$	Laguerre tipi polinomlar

1. GİRİŞ

d -ortogonalite kavramı literatürde birçok bilim adamı tarafından incelenmiştir. 1997 yılında K. Douak, P. Maroni tarafından d -ortogonal Tchebicheff polinomları, 2000 yılında Y. Ben Cheikh, K. Douak tarafından genelleştirilmiş hipergeometrik d -ortogonal polinomlar kümesi, belli formda doğurucu fonksiyon bağıntısı ile tanımlanan polinomların d -ortogonalitesi konuları çalışılmıştır. 2003 yılında Y. Ben Cheikh, Ali Zaghouani tarafından bazı diskre d -ortogonal polinomlar incelenmiştir. Y. Ben Cheikh, A. Ouni, I. Lamiri, 2008 yılında Humbert, Jacobi tipi ve Hermite tipi polinomların d -ortogonalitesi, 2011 yılında ise q -Laguerre tipi polinomların d -ortogonalitesini çalışmışlardır.

Bu tezde klasik ortogonalitenin genel hali olan d -ortogonalite kavramı incelenmiştir. Humbert polinomlar kümesinin d -ortogonalitesi gösterilmiş, bu küme için ağırlık fonksiyonu ve iç çarpım verilmiştir. Gegenbauer, Pincherle tipi, Tchebicheff tipi, Legendre tipi polinomların Humbert polinomları ile ilişkisi verilerek, bu polinomların da d -ortogonal olduğu gösterilmiş ve d nin özel halleri incelenmiştir. Daha sonra Humbert polinomlarının bileşenleri tanımlanmış, bu bileşenlerden oluşan polinomlar kümesinin de d -ortogonal olduğu verilmiştir. Sonraki bölümlerde Jacobi, Laguerre, Hermite tipi polinomların d -ortogonalitesi incelenmiş ve özel durumlarıyla birlikte farklı özellikleri gösterilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Gamma Fonksiyonu

$\Gamma(x)$ ile gösterilen gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. $x > -1$ olan herhangi bir reel sayı olmak üzere;

$$x! = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \Gamma(x+1)$$

şeklindedir. Buradan da görülür ki, -1 den büyük olan tüm reel sayıların faktöriyel değerlerini sonlu bir reel sayı olarak tanımlamak mümkündür. Bundan dolayı

$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ genelleştirilmiş integraline *genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu* da denir.

$x = 0$ olduğu zaman faktöriyel fonksiyonunun değeri,

$$0! = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

dir. Bu sonuç $0!$ değerinin neden 1 olarak tanımlanması gerektiğini açıklar.

Elemanter matematikte n faktöriyel, $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1$ çarpımı ile verilir.

Bu özellik $n! = n(n-1)!$ eşitliğini içerdiğine göre, eğer $x = n$ bir tam sayı ise

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-t^x e^{-t} \Big|_0^b \right) + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

olduğundan Γ fonksiyonu, Eş.2.2 yi tüm $x > 0$ değerleri için sağlar. Ayrıca $0 < \text{Re}(z) < 1$ için

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (2.3)$$

eşitliği vardır. Eş. 2.3 den

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \pi \\ \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (2.4)$$

bulunur.

2.2. Pochhammer Sembolü

a reel ya da kompleks bir sayı, r sıfır ya da pozitif tamsayı olmak üzere

$$(a)_r = a(a+1)\dots(a+r-1), \quad r \geq 1$$

$$(a)_0 = 1, \quad a \neq 0$$

şeklinde tanımlanır. $(a)_r$ Pochhammer sembolü olarak bilinir. Pochhammer sembolü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(a)_r = \frac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)} \quad (2.5)$$

$$(a)_{i+j} = a(a+1)\dots(a+i-1)(a+i)(a+i+1)\dots(a+i+j-1) = (a)_i(a+i)_j \quad (2.6)$$

ve

$$\begin{aligned} m^{ms} \prod_{j=0}^{m-1} \left(\frac{a+j}{m}\right)_s &= m^{ms} \left(\frac{a+0}{m}\right)_s \left(\frac{a+1}{m}\right)_s \dots \left(\frac{a+m-1}{m}\right)_s = m^{ms} \left(\frac{a}{m}\right) \left(\frac{a}{m}+1\right) \left(\frac{a}{m}+2\right) \dots \\ &\quad \left(\frac{a}{m}+s-1\right) \left(\frac{a+1}{m}\right) \left(\frac{a+1}{m}+1\right) \left(\frac{a+1}{m}+2\right) \dots \left(\frac{a+1}{m}+s-1\right) \dots \\ &\quad \left(\frac{a+m-1}{m}\right) \left(\frac{a+m-1}{m}+1\right) \left(\frac{a+m-1}{m}+2\right) \dots \left(\frac{a+m-1}{m}+s-1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m^{ms} \frac{a(a+m)\dots(a+m(s-1))}{m^s} \frac{(a+1)(a+1+m)\dots(a+1+m(s-1))}{m^s} \\
&\quad \dots \times \frac{(a+m-1)(a+m-1+m)\dots(a+m-1+m(s-1))}{m^s} \\
&= \frac{m^{ms}}{(m^s)^m} a(a+1)\dots(a+m-1)(a+m)(a+m+1)\dots(a+m+m-1) \\
&\quad \dots \times (a+m(s-1))(a+m(s-1)+1)\dots(a+m(s-1)+m-1) \\
&= (a)_{ms} \tag{2.7}
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca Pochhammer sembolünün özelliğinden

$$(a)_{2n} = 2^{2n} \left(\frac{1}{2}a\right)_n \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right)_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

yazılabilir. Eş. 2.5 kullanılırsa,

$$\frac{\Gamma(a+2n)}{\Gamma(a)} = 2^{2n} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

olup, bu eşitlikte $a=1$ alındığında,

$$\frac{\Gamma(1+2n)}{\Gamma(1)} = 2^{2n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

ve buradan da

$$\begin{aligned}
\Gamma(2n+1) &= 2^{2n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{\sqrt{\pi}} \Gamma(n+1), \quad n = 0, 1, \dots \\
\sqrt{\pi} 2n \Gamma(2n) &= 2^{2n} \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) n \Gamma(n), \quad n = 0, 1, \dots \\
\sqrt{\pi} \Gamma(2n) &= 2^{2n-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) \Gamma(n), \quad n = 0, 1, \dots \tag{2.8}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca Pochhammer sembolü

$$(a)_{n-k} = \frac{(-1)^k (a)_n}{(1-n-a)_k}, \quad 0 \leq k \leq n \quad (2.9)$$

bağıntısını da sağlar.

2.3. $G_{p,q}^{m,n}$ Meijer G- Fonksiyonu

$$G_{p,q}^{m,n} \left(z \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right) = (2\pi i)^{-1} \int_L z^\tau \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - \tau) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + \tau)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + \tau) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - \tau)} d\tau$$

şeklinde tanımlanır. Burada $0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$ ve parametreler $j=1,2,\dots,m$ için $\Gamma(b_j - \tau)$ nun, $k=1,2,\dots,n$ için $\Gamma(1 - a_k + \tau)$ nun kutup noktaları olmayacak şekildedir. (a_p) ile $a_1, a_2, \dots, a_p$ sıralısı gösterilmektedir.

$$G_{p,q}^{m,n} \left(z \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right) = (2\pi i)^{-1} \int_L z^\tau \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - \tau) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + \tau)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + \tau) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - \tau)} d\tau$$

eşitliğinin her iki tarafı z^σ ile çarpılırsa,

$$z^\sigma G_{p,q}^{m,n} \left(z \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right) = (2\pi i)^{-1} \int_L z^{\tau+\sigma} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - \tau) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + \tau)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + \tau) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - \tau)} d\tau$$

olur. $\tau + \sigma = u$ dönüşümü altında $d\tau = du$ ve $\tau = u - \sigma$ dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} z^\sigma G_{p,q}^{m,n} \left(z \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right) &= (2\pi i)^{-1} \int_U z^u \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - u + \sigma) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + u - \sigma)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + u - \sigma) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - u + \sigma)} du \\ &= (2\pi i)^{-1} \int_U z^u \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma((b_j + \sigma) - u) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - (a_j + \sigma) + u)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - (b_j + \sigma) + u) \prod_{j=n+1}^p \Gamma((a_j + \sigma) - u)} du \end{aligned}$$

$$= G_{p,q}^{m,n} \left(z \left| \begin{matrix} a_1 + \sigma, a_2 + \sigma, \dots, a_p + \sigma \\ b_1 + \sigma, b_2 + \sigma, \dots, b_q + \sigma \end{matrix} \right. \right) \quad (2.10)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} G_{p,q}^{m,n} \left(z \left| \begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, \beta_1 \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{matrix} \right. \right) &= (2\pi i)^{-1} \int_L z^\tau \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(\beta_j - \tau) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - \alpha_j + \tau)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - \beta_j + \tau) \prod_{j=n+1}^{p-1} \Gamma(\alpha_j - \tau) \Gamma(\beta_1 - \tau)} d\tau \\ &= (2\pi i)^{-1} \int_L z^\tau \frac{\Gamma(\beta_1 - \tau) \dots \Gamma(\beta_m - 1) \Gamma(1 - \alpha_1 + \tau) \dots \Gamma(1 - \alpha_n + \tau)}{\Gamma(1 - \beta_{m+1} + \tau) \dots \Gamma(1 - \beta_q + \tau) \Gamma(\alpha_{n+1} - \tau) \dots \Gamma(1 - \alpha_{p-1} - \tau) \Gamma(\beta_1 - 1)} d\tau \\ &= (2\pi i)^{-1} \int_L z^\tau \frac{\Gamma(\beta_2 - \tau) \dots \Gamma(\beta_m - 1) \Gamma(1 - \alpha_1 + \tau) \dots \Gamma(1 - \alpha_n + \tau)}{\Gamma(1 - \beta_{m+1} + \tau) \dots \Gamma(1 - \beta_q + \tau) \Gamma(\alpha_{n+1} - \tau) \dots \Gamma(1 - \alpha_{p-1} - \tau)} d\tau \\ &= (2\pi i)^{-1} \int_L z^\tau \frac{\prod_{j=2}^m \Gamma(\beta_j - \tau) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - \alpha_j + \tau)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - \beta_j + \tau) \prod_{j=n+1}^{p-1} \Gamma(\alpha_j - \tau)} d\tau \\ &= (2\pi i)^{-1} \int_L z^\tau \frac{\prod_{j=1}^{m-1} \Gamma(\beta_{j+1} - \tau) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - \alpha_j + \tau)}{\prod_{j=m}^{q-1} \Gamma(1 - \beta_{j+1} + \tau) \prod_{j=n+1}^{p-1} \Gamma(\alpha_j - \tau)} d\tau \\ &= G_{p-1,q-1}^{m-1,n} \left(z \left| \begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1} \\ \beta_2, \dots, \beta_q \end{matrix} \right. \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

elde edilir. Ayrıca [9] dan

$$\begin{aligned} G_{p,q}^{m,n} \left(x \left| \begin{matrix} (\alpha_p) \\ (\beta_q) \end{matrix} \right. \right) &= \sum_{h=1}^m \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(\beta_j - \beta_h)^* \prod_{j=1}^n \Gamma(1 + \beta_h - \alpha_j)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 + \beta_h - \beta_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(\alpha_j - \beta_h)} x^{\beta_h} \\ &\quad \times {}_pF_{q-1} \left(\left((1 + \beta_h - \alpha_p); (1 + \beta_h - \beta_q)^* ; (-1)^{p-m-n} x \right) \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

olup burada $p < q$ veya $p = q$, $|x| < 1$ dir. $h = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere $h \neq j$ durumları $*$ sembolü ile gösterilir. Eş. 2.12 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
G_{1,1}^{1,0} \left(x \middle| \begin{matrix} \alpha + \beta \\ \alpha \end{matrix} \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta - \alpha)} x^\alpha {}_1F_0 \left((1 + \alpha - (\alpha + \beta)); -; x \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} x^\alpha {}_1F_0 \left((1 + \alpha - (\alpha + \beta)); -; x \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} x^\alpha {}_1F_0 \left((1 - \beta); -; x \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - \beta)_k}{k!} x^k \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - \beta)(1 - \beta + 1) \dots (1 - \beta + k - 1)}{k!} x^k \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} (1 - x)^{\beta-1} x^\alpha
\end{aligned} \tag{2.13}$$

bulunur.

2.4. Hipergeometrik Seri ve Hipergeometrik Fonksiyon

α, β, γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1 + \frac{\alpha \beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots \tag{2.14}$$

olarak ifade edilen seri matematikte büyük bir öneme sahiptir. Bu seri $1 + x + x^2 + \dots$

geometrik serisinin bir genelleştirilmesi olduğundan *hipergeometrik seri* adını alır.

Eş. 2.14 den görülmektedir ki, γ değeri sıfır ya da negatif bir tamsayı olmamalıdır.

Bu seri $|x| < 1$ için yakınsak, $|x| > 1$ için ıraksaktır. $|x| = 1$ olduğu zaman $\gamma > \alpha + \beta$

ise seri mutlak yakınsaktır. $x = -1$ iken $\gamma > \alpha + \beta - 1$ ise seri yakınsaktır.

Pochhammer sembolünün tanımı kullanılarak, Eş. 2.14 aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir.

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r (\beta)_r}{(\gamma)_r} \frac{x^r}{r!} \tag{2.15}$$

Eş. 2.15 de görülen F nin altındaki 2 ve 1 alt indisleri, F nin yapısında biri α ve β diğeri γ olmak üzere iki tip parametre bulunduğunu ifade eder. Eş. 2.15 in genelleştirilmiş şekli

$${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \gamma_1, \dots, \gamma_q; x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_r \dots (\alpha_p)_r}{(\gamma_1)_r \dots (\gamma_q)_r} \frac{x^r}{r!} \quad (2.16)$$

şeklindedir. Hipergeometrik fonksiyonu ifade eden ${}_2F_1$ gösterimi yerine genellikle sadece F kullanılır. Yani,

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = F(\alpha, \beta; \gamma; x)$$

olup, bu fonksiyon hipergeometrik fonksiyon olarak adlandırılır.

3. d- ORTOGONAL POLİNOMLARIN TEORİSİNE GİRİŞ

P , katsayıları kompleks sayı olan polinomların vektör uzayı ve P' bu vektör uzayının cebirsel duali olsun. $\langle u, f \rangle$ ile $f \in P$ polinomu ve $u \in P'$ fonksiyonelinin iç çarpımını göstereceğiz. n ler negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, $\{P_n\}_{n \geq 0}$ polinomlar kümesinde her n için $der P_n = n$ dir.

3.1. d- Ortogonallik

3.1. Tanım

d pozitif bir tamsayı olsun. $\{P_n\}_{n \geq 0}$ polinomlar kümesi,

$$\begin{cases} \langle \Gamma_k, P_r P_n \rangle = 0, & r > nd + k, \quad n \in IN_0 = \{0, 1, 2, \dots\} \\ \langle \Gamma_k, P_n P_{nd+k} \rangle \neq 0, & n \in IN_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

ortogonallik bağıntısını her $k \in IN_d = \{0, 1, \dots, d-1\}$ tamsayısı için sağlıyorsa, bu kümeye, d -boyutlu $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{d-1})$ fonksiyonel vektörüne göre *d-ortogonaldir* denir [1].

3.2. Tanım

$\{P_n\}_{n \geq 0}$ polinomlar kümesi d -ortogonal olmak üzere $\left\{ (n+1)^{-1} \frac{d}{dx} P_{n+1} \right\}_{n \geq 1}$ türev dizisi

de d -ortogonal ise $\{P_n\}_{n \geq 0}$ polinomlar kümesi Hahn özelliğine sahiptir denir. Bu durumda $\{P_n\}_{n \geq 0}$ polinomlar kümesine *klasik d-ortogonal polinomlar kümesidir* denir [2].

3.3. Tanım

$\{P_n\}_{n \geq 0}$ polinomlar kümesi,

$$P_n(\omega_{d+1}x) = \omega_{d+1}^n P_n(x), n \in \mathbb{N}, \omega_{d+1} = \exp\left(\frac{2\pi i}{d+1}\right) \quad (3.2)$$

eşitliğini sağlarsa bu kümeye *d-simetriktir* denir [3].

Örnek

$d=1$ için $\omega_2 = \exp\left(\frac{2\pi i}{2}\right) = \exp(\pi i) = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ bulunur. Bu durumda

$\{P_n\}_{n \geq 0}$ polinomlar kümesi Eş. 3.2 yi sağlıyorsa simetriktir ve $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ dir.

3.1. Lemma

$\{P_n\}_{n \geq 0}$ polinomlar kümesinin *d-ortogonal polinomlar kümesi* olması için gerek ve yeter şart

$$x P_n(x) = \sum_{k=0}^{d+1} \alpha_{k,d}(n) P_{n-d+k}(x) \quad (3.3)$$

$(d+1)$. basamaktan indirgeme bağıntısını sağlamasıdır. Burada

$n \geq d$ için $\alpha_{d+1,d}(n) \alpha_{0,d}(n) \neq 0$ ve $n \geq 1$ için $P_{-n} = 0$ dır [4].

3.2. Lemma

$\{P_n\}_{n \geq 0}$ polinomlar kümesinin *d-simetrik* olması için gerek ve yeter şart

$P_{(d+1)n+\mu}(x) = x^\mu P_n^\mu(x^{d+1}), \mu \in \mathbb{N}_{d+1}, n \in \mathbb{N}$ koşulunu sağlayan $(d+1)$ tane

$\{P_n^\mu(x)\}_{n \geq 0}$ polinomlar dizisinin olmasıdır. Burada $\{P_n^\mu(x)\}_{n \geq 0}$ ailesine $\{P_n\}_{n \geq 0}$ *d-simetrik* polinomlar kümesinin *bileşeni* denir [3].

3.3. Lemma

$\{P_n\}_{n \geq 0}$ *d-simetrik* polinomlar kümesi ve $\{u_r\}_{r \geq 0}$ onun dual dizisi olsun. Eğer $\{P_n\}_{n \geq 0}$

d-ortogonal ise $\{P_n^\mu(x)\}_{n \geq 0}, \mu \in \mathbb{N}_{d+1}$ bileşenleri de *d-ortogonal*dir ve $\{P_n^\mu(x)\}_{n \geq 0}$

ler için verilen d -boyutlu fonksiyonel vektör $u^\mu = {}^t(u_0^\mu, u_1^\mu, \dots, u_{d-1}^\mu)$ şeklindedir.

Burada

$$u_r^\mu = \sigma_{d+1} \left(x^\mu u_{\mu+r(d+1)} \right), r \in \mathbb{N}_d, \mu \in \mathbb{N}_{d+1}$$

şeklindedir. Ayrıca σ_q operatörü

$$\sigma_q \left(f(x) \right) = f(x^q), f \in P$$

ile tanımlanmıştır ve $q \geq 2$ olan pozitif tamsayıdır [3].

4. d- ORTOGONAL HUMBERT POLİNOMLARI

Genelleştirilmiş Humbert polinomları $P_n(m, x, y, p, C)$ ile gösterilir ve

$$(C - mxt + yt^m)^p = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(m, x, y, p, C) t^n$$

doğurucu fonksiyon bağıntısıyla tanımlanır. Burada $m \geq 1$ tamsayı olup diğer parametreler için sınırlama yoktur. Bu tanım çok iyi bilinen birçok özel polinomu içerir. Bunlardan bazıları;

$$P_n\left(2, q, -1, -\frac{1}{2}, p^2\right) = f_n(p, q), \text{ Louville (1722)}$$

$$P_n\left(2, x, 1, -\frac{1}{2}, 1\right) = X_n = P_n(x), \text{ Legendre (1784)}$$

$$P_n(2, x, 1, -1, 1) = U_n(x), \text{ Chebyshev (1859)}$$

$$P_n(2, x, 1, -v, 1) = C_n^v(x), \text{ Gegenbauer (1874)}$$

$$P_n\left(3, x, 1, -\frac{1}{2}, 1\right) = P_n(x), \text{ Pincherle (1890)}$$

$$P_n(m, x, 1, -v, 1) = h_{n,m}^v(x), \text{ Humbert (1921)}$$

$$P_n\left(m, x, 1, -\frac{1}{m}, 1\right) = P_n(m, x), \text{ Kinney (1963)}$$

şeklindedir.

$h_{n,m}^v(x)$ Humbert polinomlarının $m = d + 1$ hali

$$(1 - (d+1)xt + t^{d+1})^{-v} = \sum_{n \geq 0} h_{n,d+1}^v(x) t^n \quad (4.1)$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir. Burada $v > -\frac{1}{2}$, $v \neq 0$ ve d

pozitif tamsayıdır. Bu polinomlar ilk olarak Pincherle tarafından $v = -\frac{1}{2}$, $d = 2$

durumunda çalışılmıştır. $h_{n,d+1}^v(x)$ Humbert polinomları $d \geq 2$ için

$$h_{n+1,d+1}^v(x) = \frac{(v+n)(d+1)}{(n+1)} x h_{n,d+1}^v(x) - \left(\frac{(d+1)(v-1)}{(n+1)} + 1 \right) h_{n-d,d+1}^v(x) \quad (4.2)$$

rekürans bağıntısına sahiptir. Gerçekten de

$$\left(1 - (d+1)xt + t^{d+1}\right)^{-v} = \sum_{n \geq 0} h_{n,d+1}^v(x) t^n$$

eşitliğin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} -v \left(1 - (d+1)xt + t^{d+1}\right)^{-v-1} \left(-(d+1)x + (d+1)t^d\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) n t^{n-1} \\ -v \left(1 - (d+1)xt + t^{d+1}\right)^{-v-1} (d+1)(t^d - x) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) n t^{n-1} \\ -v \left(1 - (d+1)xt + t^{d+1}\right)^{-v} (d+1)(t^d - x) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) n t^{n-1} (1 - (d+1)xt + t^{d+1}) \\ -v(d+1)(t^d - x) \sum_{n=0}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) t^n &= \sum_{n=1}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) n t^{n-1} - (d+1)x \sum_{n=1}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) n t^n \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) n t^{n+d} \\ -v(d+1) \sum_{n=0}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) t^{n+d} + vx(d+1) \sum_{n=0}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) t^n &= \sum_{n=1}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) n t^{n-1} \\ &\quad - (d+1)x \sum_{n=1}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) n t^{n+d} \\ vx(d+1) \sum_{n=0}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) t^n + (d+1)x \sum_{n=1}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) n t^{n-1} \\ &= v(d+1) \sum_{n=0}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) t^{n+d} + \sum_{n=1}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) n t^{n+d} \end{aligned}$$

Eşitliğin sağ tarafındaki serilerde $n \rightarrow n-d$, eşitliğin sol tarafındaki üçüncü seride $n \rightarrow n+1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} vx(d+1) \sum_{n=0}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) t^n + (d+1)x \sum_{n=1}^{\infty} h_{n,d+1}^v(x) n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} h_{n+1,d+1}^v(x) (n+1) t^n \\ = v(d+1) \sum_{n=d}^{\infty} h_{n-d,d+1}^v(x) t^n + \sum_{n=d+1}^{\infty} h_{n-d,d+1}^v(x) (n-d) t^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[vx(d+1) + (d+1)xn \right] h_{n,d+1}^v(x) - h_{n+1,d+1}^v(x)(n+1) \right\} t^n + vx(d+1) h_{0,d+1}^v(x) \\
& - h_{1,d+1}^v(x) = \sum_{n=d+1}^{\infty} \left[v(d+1) + (n-d) \right] h_{n-d,d+1}^v(x) t^n + v(d+1) h_{0,d+1}^v(x) t^d \\
& \sum_{n=1}^{d-1} \left\{ \left[x(v+n)(d+1) \right] h_{n,d+1}^v(x) - h_{n+1,d+1}^v(x)(n+1) \right\} t^n + vx(d+1) h_{0,d+1}^v(x) - h_{1,d+1}^v(x) \\
& + \left\{ \left[x(v+d)(d+1) \right] h_{d,d+1}^v(x) - h_{d+1,d+1}^v(x)(d+1) \right\} t^d \\
& + \sum_{n=d+1}^{\infty} \left\{ \left[x(v+n)(d+1) \right] h_{n,d+1}^v(x) - h_{n+1,d+1}^v(x)(n+1) \right\} t^n \\
& = \sum_{n=d+1}^{\infty} \left[v(d+1) + (n-d) \right] h_{n-d,d+1}^v(x) t^n + v(d+1) h_{0,d+1}^v(x) t^d
\end{aligned}$$

olup, polinomların eşitliğinden serilerdeki t^n lerin katsayıları birbirine eşitlenirse $n \geq d+1$ için

$$\left[x(v+n)(d+1) \right] h_{n,d+1}^v(x) - h_{n+1,d+1}^v(x)(n+1) = \left[v(d+1) + (n-d) \right] h_{n-d,d+1}^v(x)$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$h_{n+1,d+1}^v(x) = \frac{(d+1)(v+n)}{(n+1)} x h_{n,d+1}^v(x) - \left[\frac{(d+1)(v-1)}{(n+1)} + 1 \right] h_{n-d,d+1}^v(x)$$

elde edilir.

$1 \leq n \leq d-1$ için

$$\left[x(v+n)(d+1) \right] h_{n,d+1}^v(x) - h_{n+1,d+1}^v(x)(n+1) = 0$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$h_{n+1,d+1}^v(x) = \frac{(d+1)(v+n)}{(n+1)} x h_{n,d+1}^v(x)$$

elde edilir. Dikkat edilirse Eş. 4.2 deki $h_{n-d,d+1}^v(x)$ teriminin $n \leq d-1$ için varlığından bahsedemeyiz. Geriye kalan terimlerde birbirine eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
& vx(d+1) h_{0,d+1}^v(x) - h_{1,d+1}^v(x) + \left\{ \left[x(v+d)(d+1) \right] h_{d,d+1}^v(x) - h_{d+1,d+1}^v(x)(d+1) \right\} t^d \\
& = v(d+1) h_{0,d+1}^v(x) t^d
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikten $n=0$ ve $n=d$ durumları için

$$\left[x(v+n)(d+1) \right] h_{n,d+1}^v(x) - h_{n+1,d+1}^v(x)(n+1) = 0$$

rekürans bağıntısının sağlandığı görülür.

4.1. Teorem

Eş. 4.1 de tanımlanan $\{h_{n,d+1}^v(x)\}_{n \geq 0}$ Humbert polinomlar kümesinin $\{u_r\}_{r \geq 0}$ dual dizisinin iç çarpımı aşağıdaki gibidir:

$$\text{Eğer } r > n \text{ ise, } \langle u_r, x^n \rangle = 0 \quad (4.3)$$

ve

$n \geq r$ ise,

$$\langle u_r, x^n \rangle = \delta_{i',i} \int_0^{\frac{d}{d+1}} \xi^n \varphi_{r,d}(\xi) d\xi \quad (4.4)$$

dir. Burada

$$\begin{cases} n = i + (d+1)k, k \in \mathbb{N}_0, i \in \mathbb{N}_{d+1} \\ r = i' + (d+1)k', k' \in \mathbb{N}_0, i' \in \mathbb{N}_{d+1} \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{r,d}(\xi) = & \frac{r!}{(d+1)^{r-1} (v)_r} \frac{\prod_{j=1}^d \Gamma\left(\frac{v+r+j}{d}\right)}{\prod_{j=1}^{d+1} \Gamma\left(\frac{r+j}{d+1}\right)} \xi^{-(r+1)} \\ & \times G_{d+1,d+1}^{d+1,0} \left(d^d \xi^{d+1} \left| \begin{matrix} \frac{v+r+1}{d}, \dots, \frac{v+r+d}{d}, 1 \\ \frac{r+1}{d+1}, \dots, \frac{r+(d+1)}{d+1} \end{matrix} \right. \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

olup, $G_{p,q}^{m,n}$ Meijer G-fonksiyonu ve (a_p) , $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ şeklinde ve L kapalı konturdur.

İspat

Eş. 4.3 ün ispatı açıktır. Eş. 4.4 ü ispatlayalım. [6] dan $\{h_{n,d+1}^v(x)\}_{n \geq 0}$ Humbert polinomlar kümesi için

$$x^n = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{d+1} \right\rfloor} \frac{(v+n-(d+1)j)}{(v)_{n+1-j}} \frac{n!}{(d+1)^n j!} h_{n-(d+1)j, d+1}^v(x) \quad (4.7)$$

inversiyon formülü vardır. Diğer taraftan $j=0,1,\dots,\frac{n}{(d+1)}$ ve i, i' Eş. 4.5 de tanımlandığı gibi iki tamsayı olmak üzere $i=i'$ ve $j=k-k'$ olduğunda δ nın tanımından $\delta_{i,i'}=1$ ve $\delta_{j,k-k'}=1$ olur. Dolayısıyla $\delta_{i,i'}\delta_{j,k-k'}=1$ bulunur. Ayrıca Eş.4.5 den

$$r-n+(d+1)j=i'-i+(d+1)(k'-k)+(d+1)j=0+(d+1)(-j)+(d+1)j=0$$

dır. Yani $r=n-(d+1)j$ ve $\delta_{r,n-(d+1)j}=1$ dir. O halde, $i=i'$ ve $j=k-k'$ durumunda $\delta_{r,n-(d+1)j}=\delta_{i,i'}\delta_{j,k-k'}$ eşitliği vardır.

$i=i'$ ve $j \neq k-k'$ olduğunda δ nın tanımından $\delta_{i,i'}=1$ ve $\delta_{j,k-k'}=0$ olur.

Dolayısıyla $\delta_{i,i'}\delta_{j,k-k'}=0$ bulunur. Ayrıca Eş. 4.5 den

$$\begin{aligned} r-n+(d+1)j &= i'-i+(d+1)(k'-k)+(d+1)j \\ &= 0+(d+1)(k'-k)+(d+1)j \\ &= (d+1)(k'-k+j) \neq 0 \end{aligned}$$

dır. Yani $r \neq n-(d+1)j$ ve $\delta_{r,n-(d+1)j}=0$ dir. O halde, $i=i'$ ve $j \neq k-k'$ durumunda $\delta_{r,n-(d+1)j}=\delta_{i,i'}\delta_{j,k-k'}$ eşitliği vardır.

$i \neq i'$ ve $j=k-k'$ olduğunda δ nın tanımından $\delta_{i,i'}=0$ ve $\delta_{j,k-k'}=1$ olur.

Dolayısıyla $\delta_{i,i'}\delta_{j,k-k'}=0$ bulunur. Ayrıca Eş. 4.5 den

$$\begin{aligned} r-n+(d+1)j &= i'-i+(d+1)(k'-k)+(d+1)j \\ &= (i'-i)+(d+1)(-j)+(d+1)(j) \\ &= i'-i \neq 0 \end{aligned}$$

dir. Yani $r \neq n-(d+1)j$ ve $\delta_{r,n-(d+1)j}=0$ dir. O halde, $i \neq i'$ ve $j=k-k'$

durumunda $\delta_{r,n-(d+1)j}=\delta_{i,i'}\delta_{j,k-k'}$ eşitliği vardır.

$i \neq i'$ ve $j \neq k - k'$ olduğunda δ nın tanımından $\delta_{i,i'} = 0$ ve $\delta_{j,k-k'} = 0$ olur.

Dolayısıyla $\delta_{i,i'} \delta_{j,k-k'} = 0$ bulunur. Ayrıca Eş. 4.5 den

$$\begin{aligned} r - n + (d+1)j &= i' - i + (d+1)(k' - k) + (d+1)j \\ &= (i' - i) + (d+1)(k' - k + j) \neq 0 \end{aligned}$$

dır. Yani $r \neq n - (d+1)j$ ve $\delta_{r,n-(d+1)j} = 0$ dır. O halde, $i \neq i'$ ve $j \neq k - k'$

durumunda $\delta_{r,n-(d+1)j} = \delta_{i,i'} \delta_{j,k-k'}$ eşitliği vardır.

Ayrıca kroniker deltası sabit sayı olduğundan indise bağlı değildir. Yani $\delta_{i,i'} = \delta_{i',i}$ dir. Eş. 4.7 den

$$\begin{aligned} \langle u_r, x^n \rangle &= \left\langle u_r, \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{d+1}\right]} \frac{(v+n-(d+1)j)}{(v)_{n+1-j}} \frac{n!}{(d+1)^n j!} h_{n-(d+1)j, d+1}^v(x) \right\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{d+1}\right]} \frac{(v+n-(d+1)j)}{(v)_{n+1-j}} \frac{n!}{(d+1)^n j!} \langle u_r, h_{n-(d+1)j, d+1}^v(x) \rangle \end{aligned}$$

yazılır. Dual dizi tanımından $\langle u_r, h_{n-(d+1)j, d+1}^v(x) \rangle = \delta_{r,n-(d+1)j}$ dir. Dolayısıyla

$$\langle u_r, x^n \rangle = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{d+1}\right]} \frac{(v+n-(d+1)j)}{(v)_{n+1-j}} \frac{n!}{(d+1)^n j!} \delta_{r,n-(d+1)j}$$

olur. Ayrıca $\delta_{r,n-(d+1)j} = \delta_{i,i'} \delta_{j,k-k'}$ olduğundan

$$\langle u_r, x^n \rangle = \delta_{i',i} \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{d+1}\right]} \frac{(v+n-(d+1)j)}{(v)_{n+1-j}} \frac{n!}{(d+1)^n j!} \delta_{j,k-k'}$$

ve burada $n \rightarrow r + (d+1)(k - k')$ dönüşümü yapılırsa

$$\langle u_r, x^n \rangle = \delta_{i',i} \sum_{j=0}^{\left[k-k'+\frac{r}{d+1}\right]} \frac{(v+r+(d+1)(k-k')-(d+1)j)(r+(d+1)(k-k'))!}{(v)_{r+(d+1)(k-k')+1-j} (d+1)^{r+(d+1)(k-k')} j!} \delta_{j,k-k'}$$

olup, $j = k - k'$ ise $\delta_{j,k-k'} = 1$ ve $j \neq k - k'$ ise $\delta_{j,k-k'} = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\langle u_r, x^n \rangle &= \delta_{i', i} \frac{v+r+(d+1)0}{(v)_{r+(d+1)(k-k')+1-(k-k')}} \frac{(r+(d+1)(k-k'))!}{(d+1)^{r+(d+1)(k-k')} (k-k')!} \\
&= \delta_{i', i} \frac{v+r}{(v)_{r+d(k-k')+1}} \frac{(1)_{r+(d+1)(k-k')}}{(d+1)^{r+(d+1)(k-k')} (k-k')!}
\end{aligned}$$

olur.

Burada $k'' = k - k'$ denilirse,

$$\langle u_r, x^n \rangle = \delta_{i', i} \frac{v+r}{(v)_{r+1+dk''}} \frac{(1)_{r+(d+1)k''}}{(d+1)^{r+(d+1)k''} k''!} \quad (4.8)$$

bulunur. Eş. 2.6 ve Eş. 2.7 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
(v)_{r+1+dk''} &= (v)_r (v+r)_{1+dk''} \\
&= (v)_r (v+r)_1 (v+r+1)_{dk''} \\
&= (v)_r (v+r) d^{dk''} \prod_{j=0}^{d-1} \left(\frac{v+r+1+j}{d} \right)_{k''}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(1)_{r+(d+1)k''} &= (1)_r (1+r)_{(d+1)k''} \\
&= r! (d+1)^{(d+1)k''} \prod_{j=0}^d \left(\frac{1+r+j}{d+1} \right)_{k''}
\end{aligned}$$

bulunur. Bunlar Eş. 4.8 de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\langle u_r, x^n \rangle &= \delta_{i', i} \frac{v+r}{(v)_r (v+r) d^{dk''} \prod_{j=0}^{d-1} \left(\frac{v+r+1+j}{d} \right)_{k''}} \frac{r! (d+1)^{(d+1)k''} \prod_{j=0}^d \left(\frac{1+r+j}{d+1} \right)_{k''}}{(d+1)^{r+(d+1)k''} k''!} \\
&= \delta_{i', i} \frac{r! \prod_{j=1}^{d+1} \left(\frac{r+j}{d+1} \right)_{k''}}{(d+1)^r (v)_r d^{dk''} k''! \prod_{j=1}^d \left(\frac{v+r+j}{d} \right)_{k''}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& r! \prod_{j=1}^{d+1} \frac{\Gamma\left(\frac{r+j}{d+1} + k''\right)}{\Gamma\left(\frac{r+j}{d+1}\right)} \\
& = \delta_{i',i} \frac{1}{(d+1)^r (v)_r d^{dk''} k''! \prod_{j=1}^d \frac{\Gamma\left(\frac{v+r+j}{d} + k''\right)}{\Gamma\left(\frac{v+r+j}{d}\right)}} \\
& = \delta_{i',i} \frac{r! \prod_{j=1}^d \Gamma\left(\frac{v+r+j}{d}\right) \prod_{j=1}^{d+1} \Gamma\left(\frac{r+j}{d+1} + k''\right)}{(d+1)^r (v)_r d^{dk''} \Gamma(1+k'') \prod_{j=1}^{d+1} \Gamma\left(\frac{r+j}{d+1}\right) \prod_{j=1}^d \Gamma\left(\frac{v+r+j}{d} + k''\right)} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$A_{k'',r}(d) = \frac{\prod_{j=1}^{d+1} \Gamma\left(\frac{r+j}{d+1} + k''\right)}{d^{dk''} \Gamma(1+k'') \prod_{j=1}^d \Gamma\left(\frac{v+r+j}{d} + k''\right)}$$

ve

$$\begin{cases} \alpha_j = \frac{r+j}{d+1} + k'' - 1, & 1 \leq j \leq d+1 \\ \beta_j = \frac{v(d+1)+r+j}{d(d+1)}, & 1 \leq j \leq d \\ \beta_{d+1} = -\frac{r}{d+1} \end{cases}$$

denirse bu durumda,

$$\alpha_j + \beta_j + 1 = \frac{r+j}{d+1} + k'' - 1 + \frac{v(d+1)+r+j}{d(d+1)} + 1 = \frac{r+j+v}{d} + k'' \text{ ve}$$

$$j = d+1 \text{ için } \alpha_{d+1} + \beta_{d+1} + 1 = \frac{r+d+1}{d+1} + k'' - 1 - \frac{r}{d+1} + 1 = k'' + 1 \text{ olur. Buradan}$$

$\Gamma(\alpha_{d+1} + \beta_{d+1} + 1) = \Gamma(k'' + 1)$ yazılır. Dolayısıyla

$$A_{k'',r}(d) = \frac{\prod_{j=1}^{d+1} \Gamma\left(\frac{r+j}{d+1} + k''\right)}{d^{dk''} \Gamma(1+k'') \prod_{j=1}^d \Gamma\left(\frac{v+r+j}{d} + k''\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{j=1}^{d+1} \Gamma(\alpha_j + 1)}{d^{dk''} \Gamma(1+k'') \prod_{j=1}^d \Gamma(\alpha_j + \beta_j + 1)} \\
&= \frac{\prod_{j=1}^{d+1} \Gamma(\alpha_j + 1)}{d^{dk''} \prod_{j=1}^{d+1} \Gamma(\alpha_j + \beta_j + 1)} \\
&= \frac{1}{d^{dk''}} \prod_{j=1}^{d+1} \frac{\Gamma(\alpha_j + 1)}{\Gamma(\alpha_j + \beta_j + 1)} \tag{4.10}
\end{aligned}$$

bulunur. [7] den

$${}_p F_q \left(\begin{matrix} (a_p) \\ (\alpha_q + \beta_q + 1); x \end{matrix} \right) = \prod_{i=1}^q \left(\frac{\Gamma(\alpha_i + 1 + \beta_i)}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \right) \int_0^1 G_{q,q}^{q,0} \left(t \left| \begin{matrix} (\alpha_q + \beta_q) \\ (\alpha_q) \end{matrix} \right. \right) {}_p F_q \left(\begin{matrix} (a_p) \\ (\alpha_q + 1); xt \end{matrix} \right) dt \tag{4.11}$$

eşitliği vardır. Burada $\sum_{j=1}^{d+1} \beta_j > 0$ ve

$${}_p F_q \left(\begin{matrix} (a_p) \\ (b_q); z \end{matrix} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[a_p]_k}{[b_q]_k} \frac{z^k}{k!} \tag{4.12}$$

hipergeometrik fonksiyon olup, $[a_r]_p = \prod_{i=1}^r (a_i)_p$ şeklindedir. Eş. 4.11 de $x=0$,

$q = d+1$ yazılırsa,

$$1 = \prod_{i=1}^{d+1} \left(\frac{\Gamma(\alpha_i + 1 + \beta_i)}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \right) \int_0^1 G_{d+1,d+1}^{d+1,0} \left(t \left| \begin{matrix} (\alpha_{d+1} + \beta_{d+1}) \\ (\alpha_{d+1}) \end{matrix} \right. \right) dt$$

elde edilir. Buradan da

$$\prod_{i=1}^{d+1} \left(\frac{\Gamma(\alpha_i + 1)}{\Gamma(\alpha_i + \beta_i + 1)} \right) = \int_0^1 G_{d+1,d+1}^{d+1,0} \left(t \left| \begin{matrix} (\alpha_{d+1} + \beta_{d+1}) \\ (\alpha_{d+1}) \end{matrix} \right. \right) dt \tag{4.13}$$

bulunur. Bu bağıntı $v > -\frac{1}{2}$ için olmak üzere Eş. 4.10 da kullanılırsa

$$\begin{aligned}
A_{k^r, r}(d) &= \frac{1}{d^{dk^r}} \prod_{j=1}^{d+1} \frac{\Gamma(\alpha_j + 1)}{\Gamma(\alpha_j + \beta_j + 1)} \\
&= \frac{1}{d^{dk^r}} \int_0^1 G_{d+1, d+1}^{d+1, 0} \left(t \left| \begin{matrix} (\alpha_{d+1} + \beta_{d+1}) \\ (\alpha_{d+1}) \end{matrix} \right. \right) \\
&= \frac{1}{d^{dk^r}} \int_0^1 G_{d+1, d+1}^{d+1, 0} \left(t \left| \begin{matrix} \frac{v+r+1}{d} - 1 + k^r, \dots, \frac{v+r+d}{d} - 1 + k^r, k^r \\ \frac{r+1}{d+1} - 1 + k^r, \dots, \frac{r+(d+1)}{d+1} - 1 + k^r \end{matrix} \right. \right) dt \quad (4.14)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Eş. 4.14 ün sağ tarafı t^{k^r} ile çarpıp bölünürse,

$$A_{k^r, r}(d) = \int_0^1 \left(\frac{t}{d^d} \right)^{k^r} t^{-k^r} G_{d+1, d+1}^{d+1, 0} \left(t \left| \begin{matrix} \frac{v+r+1}{d} - 1 + k^r, \dots, \frac{v+r+d}{d} - 1 + k^r, k^r \\ \frac{r+1}{d+1} - 1 + k^r, \dots, \frac{r+(d+1)}{d+1} - 1 + k^r \end{matrix} \right. \right) dt$$

olup, Eş. 2.11 özelliğinden

$$A_{k^r, r}(d) = \int_0^1 \left(\frac{t}{d^d} \right)^{k^r} G_{d+1, d+1}^{d+1, 0} \left(t \left| \begin{matrix} \frac{v+r+1}{d} - 1, \dots, \frac{v+r+d}{d} - 1, 0 \\ \frac{r+1}{d+1} - 1, \dots, \frac{r+(d+1)}{d+1} - 1 \end{matrix} \right. \right) dt$$

yazılabilir. Burada, $t = d^d \xi^{d+1}$ dönüşümü yapılırsa, $dt = d^d (d+1) \xi^d d\xi$ olur ve

$$A_{k^r, r}(d) = \int_0^{d^{-\frac{d}{d+1}}} \xi^{(d+1)k^r} G_{d+1, d+1}^{d+1, 0} \left(d^d \xi^{d+1} \left| \begin{matrix} \frac{v+r+1}{d} - 1, \dots, \frac{v+r+d}{d} - 1, 0 \\ \frac{r+1}{d+1} - 1, \dots, \frac{r+(d+1)}{d+1} - 1 \end{matrix} \right. \right) d^d (d+1) \xi^d d\xi \quad (4.15)$$

elde edilir. Eş. 4.9 ve Eş. 4.15 den

$$\langle u_r, x^n \rangle = \delta_{i, i} \frac{r!}{(d+1)^{r-1} (v)_r} \frac{\prod_{j=1}^d \Gamma\left(\frac{v+r+j}{d}\right)}{\prod_{j=1}^{d+1} \Gamma\left(\frac{r+j}{d+1}\right)} \int_0^{d^{-\frac{d}{d+1}}} \xi^{r+k^r(d+1)} \xi^{-(r+1)}$$

$$\times (d^d \xi^{d+1}) G_{d+1, d+1}^{d+1, 0} \left(d^d \xi^{d+1} \left| \begin{array}{c} \frac{v+r+1}{d} - 1, \dots, \frac{v+r+d}{d} - 1, 0 \\ \frac{r+1}{d+1} - 1, \dots, \frac{r+(d+1)}{d+1} - 1 \end{array} \right. \right) d\xi \quad (4.16)$$

yazılır. Eş. 4.16 de tekrar Eş. 2.10 özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \langle u_r, x^n \rangle &= \delta_{i', i} \frac{r!}{(d+1)^{r-1} (v)_r} \frac{\prod_{j=1}^d \Gamma\left(\frac{v+r+j}{d}\right)}{\prod_{j=1}^{d+1} \Gamma\left(\frac{r+j}{d+1}\right)} d^{-\frac{d}{d+1}} \int_0^1 \xi^{r+k''(d+1)} \xi^{-(r+1)} \\ &\quad \times G_{d+1, d+1}^{d+1, 0} \left(d^d \xi^{d+1} \left| \begin{array}{c} \frac{v+r+1}{d}, \dots, \frac{v+r+d}{d}, 1 \\ \frac{r+1}{d+1}, \dots, \frac{r+(d+1)}{d+1} \end{array} \right. \right) d\xi \end{aligned}$$

olur. $k'' = k - k'$ yerine yazılır ve Eş. 4.5 den $i = i'$ için $n = r + (k - k')(d+1)$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \langle u_r, x^n \rangle &= \delta_{i', i} \frac{r!}{(d+1)^{r-1} (v)_r} \frac{\prod_{j=1}^d \Gamma\left(\frac{v+r+j}{d}\right)}{\prod_{j=1}^{d+1} \Gamma\left(\frac{r+j}{d+1}\right)} d^{-\frac{d}{d+1}} \int_0^1 \xi^n \xi^{-(r+1)} \\ &\quad \times G_{d+1, d+1}^{d+1, 0} \left(d^d \xi^{d+1} \left| \begin{array}{c} \frac{v+r+1}{d}, \dots, \frac{v+r+d}{d}, 1 \\ \frac{r+1}{d+1}, \dots, \frac{r+(d+1)}{d+1} \end{array} \right. \right) d\xi \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

4.1. d - Boyutlu Fonksiyonel Vektör

Bu kısmın amacı, Humbert polinomlarının d -ortogonalliği için d -boyutlu fonksiyonel vektörü tanımlamaktır. $\{P_n\}_{n \geq 0}$ polinomlar kümesinin $\Gamma = {}^t(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{d-1})$ d -boyutlu fonksiyonel vektörüne göre d -ortogonal olması için gerek ve yeter şart bu

polinomlar kümesinin kendisinin dual dizisi olan $\{u_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin ilk d bileşeninden oluşan $u = {}^t(u_0, u_1, \dots, u_{d-1})$ vektörüne göre d -ortogonal olmasıdır [8]. Kısacası Humbert polinomları için d -boyutlu fonksiyonel vektör olarak, Humbert polinomlarının dual dizisinin ilk d bileşenini göz önüne alacağız ki bu vektör bu polinomların d -ortogonallığını garanti edecek.

4.1.1. Teorem

Eş. 4.1 ile tanımlanan $\{h_{n,d+1}^v(x)\}_{n \geq 0}$ Humbert polinomlar kümesi, $u = {}^t(u_0, u_1, \dots, u_{d-1})$ d -boyutlu fonksiyonel vektörüne göre aşağıda tanımlanan iç çarpımla d -ortogonal polinomlar kümesidir.

$$\text{Eğer } n < r \text{ ise } \langle u_r, x^n \rangle = 0 \quad (4.17)$$

ve $n \geq r$ için

$$\langle u_r, x^n \rangle = \delta_{r,i} \int_0^{\frac{d}{d+1}} \xi^n \varphi_{r,d}(\xi) d\xi \quad (4.18)$$

dir. Burada $n = i + (d+1)k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $i \in \mathbb{N}_{d+1}$, $r \in \mathbb{N}_d$ ve

$$\varphi_{r,d}(\xi) = \frac{r!}{(d+1)^{r-1} (v)_r} \frac{\prod_{j=1}^d \Gamma\left(\frac{v+r+j}{d}\right)}{\prod_{j=1}^{d+1} \Gamma\left(\frac{r+j}{d+1}\right)} \xi^{-(r+1)} G_{d+1,d+1}^{d+1,0} \left(d^d \xi^{d+1} \left| \begin{matrix} \frac{v+r+1}{d}, \dots, \frac{v+r+d}{d}, 1 \\ \frac{r+1}{d+1}, \dots, \frac{r+(d+1)}{d+1} \end{matrix} \right. \right) \quad (4.19)$$

dir.

Teorem 4.1.1 in ispatı Teorem 4.1 e benzer olarak yapılabilir. $r \in \mathbb{N}_d$ olduğunda $k' = 0$ ve $r = i'$ dür.

4.2. Humbert Polinomlarının Özel Durumları

Bu bölümde d ve v parametrelerinin özel değerleri için Humbert polinomlarının özel durumlarını inceleyeceğiz.

4.2.1. Gegenbauer polinomları ($d=1$)

Eş. 4.1 de $d=1$ yazılırsa, $\{C_n^v(x)\}_{n \geq 0}$ Gegenbauer polinomlarının doğurucu fonksiyon bağıntısı,

$$(1-2xt+t^2)^{-v} = \sum_{n \geq 0} C_n^v(x) t^n$$

olarak elde edilir. Buradan $C_n^v(x) = h_{n,2}^v(x)$ olduğu görülür. Gegenbauer polinomlarının 1-ortogonallığı için ağırlık fonksiyonu $r \in IN_d = IN_1 = \{0\}$ olmak üzere Eş. 4.19 dan

$$\begin{aligned} \varphi_{0,1}(\xi) &= \frac{0!}{2^{-1}(v)_0} \frac{\prod_{j=1}^d \Gamma\left(\frac{v+0+j}{1}\right)}{\prod_{j=1}^{d+1} \Gamma\left(\frac{0+j}{2}\right)} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(\xi^2 \left| \begin{matrix} v+1, 1 \\ \frac{1}{2}, 1 \end{matrix} \right. \right) \\ &= \frac{2\Gamma(v+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(\xi^2 \left| \begin{matrix} v+1, 1 \\ \frac{1}{2}, 1 \end{matrix} \right. \right) \\ &= \frac{2\Gamma(v+1)}{\sqrt{\pi}} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(\xi^2 \left| \begin{matrix} v+1, 1 \\ \frac{1}{2}, 1 \end{matrix} \right. \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

olur. Eş. 2.11 , Eş. 4.20 de kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \varphi_{0,1}(\xi) &= \frac{2\Gamma(v+1)}{\sqrt{\pi}} \xi^{-1} G_{1,1}^{1,0} \left(\xi^2 \left| \begin{matrix} v+1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right) \\ &= \frac{2\Gamma(v+1)}{\sqrt{\pi}} \xi (\xi^2)^{-1} G_{1,1}^{1,0} \left(\xi^2 \left| \begin{matrix} v+1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right) \end{aligned}$$

olup, burada Eş. 2.10 kullanılırsa,

$$\varphi_{0,1}(\xi) = \frac{2\Gamma(v+1)}{\sqrt{\pi}} \xi G_{1,1}^{1,0} \left(\xi^2 \left| \begin{matrix} v \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \right. \right)$$

bulunur. Eş. 2.12 den $0 \leq \xi \leq 1$ için

$$\begin{aligned}\varphi_{0,1}(\xi) &= \frac{2\Gamma(v+1)}{\sqrt{\pi}} \xi \frac{1}{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)} (1-\xi^2)^{v-\frac{1}{2}} (\xi^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2\Gamma(v+1)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)} (1-\xi^2)^{v-\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (4.21)$$

elde edilir. Eş. 4.21 de Eş. 2.8 uygulanırsa $0 \leq \xi \leq 1$ için

$$\begin{aligned}\varphi_{0,1}(\xi) &= \frac{2\Gamma(v+1)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2v)}{2^{2v-1}\Gamma(v)}} (1-\xi^2)^{v-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{v\Gamma(v)}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2v}\Gamma(v)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2v)} (1-\xi^2)^{v-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2^{2v}v(\Gamma(v))^2}{\pi\Gamma(2v)} (1-\xi^2)^{v-\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (4.22)$$

ağırlık fonksiyonu elde edilir. O halde, Gegenbauer polinomları için iç çarpım,

$$\begin{aligned}\langle u_0, x^n \rangle &= \delta_{0,i} \int_0^1 \xi^n \varphi_{0,1}(\xi) d\xi \\ &= \delta_{0,i} \int_0^1 \frac{v(\Gamma(v))^2}{\pi\Gamma(2v)} 2^{2v} (1-\xi^2)^{v-\frac{1}{2}} \xi^n d\xi\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\langle u_0, x^n \rangle &= \delta_{0,i} \int_{-1}^1 \xi^n \varphi_{0,1}(\xi) d\xi \\ &= \delta_{0,i} \int_{-1}^1 \frac{v(\Gamma(v))^2}{\pi\Gamma(2v)} 2^{2v-1} \xi^n (1-\xi^2)^{v-\frac{1}{2}} d\xi\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$n = i + 2k, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad i = 0, 1$$

dır. Bu iç çarpımla Gegenbauer polinomları $d = 1$ -ortogonaldır.

Biliyoruz ki, Gegenbauer polinomları için $-1 \leq x \leq 1$ aralığında ortogonallik özelliği

$v > -\frac{1}{2}$ için,

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{v-\frac{1}{2}} C_n^v(x) C_m^v(x) dx = \begin{cases} 0 & ; m \neq n \\ \frac{\pi 2^{1-2v} \Gamma(n+2v)}{n!(v+n)(\Gamma(v))^2} & ; m = n \end{cases}$$

şeklindedir. Ağırlık fonksiyonu ise $-1 \leq x \leq 1$ için

$$\varphi(x) = \frac{v(\Gamma(v))^2}{\pi \Gamma(2v)} 2^{2v-1} (1-x^2)^{v-\frac{1}{2}}$$

dir. Yani $d=1$ durumunda ağırlık fonksiyonu, bildiğimiz ortogonallikteki ağırlık fonksiyonu ile çakışır.

4.2.2. Pincherle tipi polinomlar ($d=2$)

Pincherle tipi polinomlar,

$$(1-3xt+t^3)^{-v} = \sum_{n \geq 0} P_n^v(x) t^n \quad (4.23)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısıyla tanımlanır [10]. Bu bağıntı, $v = -\frac{1}{2}$ için Pincherle polinomlarını verir. Eş. 4.1 de $d=2$ yazılırsa

$$\begin{aligned} (1-3xt+t^3)^{-v} &= \sum_{n \geq 0} h_{n,3}^v(x) t^n = \sum_{n \geq 0} P_n^v(x) t^n \\ \Rightarrow h_{n,3}^v(x) &= P_n^v(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1 den $\{P_n^v(x)\}_{n \geq 0}$ Pincherle tipi polinomları 2 boyutlu $u = {}^t(u_0, u_1)$

fonksiyonel vektörüne göre aşağıdaki iç çarpımla 2-ortogonaldır:

$$\langle u_r, x^n \rangle = \delta_{r,i} \int_0^{2^{-\frac{2}{3}}} \xi^n \varphi_{r,2}(\xi) d\xi, \quad r=0,1, \quad n=i+3k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.24)$$

Burada ağırlık fonksiyonu $\varphi_{r,2}(\xi)$ olmak üzere, $r=0$ için

$$\begin{aligned}
\varphi_{0,2}(\xi) &= \frac{0!}{3^{-1}(\nu)_0} \frac{\prod_{j=1}^2 \Gamma\left(\frac{\nu+0+j}{2}\right)}{\prod_{j=1}^3 \Gamma\left(\frac{0+j}{3}\right)} \xi^{-1} G_{3,3}^{3,0} \left(\begin{matrix} \left| \frac{\nu+0+1}{2}, \frac{\nu+0+2}{2}, 1 \right| \\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \end{matrix} \right) \\
&= \frac{3\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma(1)} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(\begin{matrix} \left| \frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu+2}{2} \right| \\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \end{matrix} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Eş. 2.8 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\varphi_{0,2}(\xi) &= \frac{3\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1) 2^{-\nu}}{\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}}} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(\begin{matrix} \left| \frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu+2}{2} \right| \\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \end{matrix} \right) \\
&= \frac{3\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1) 2^{-\nu}}{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(\begin{matrix} \left| \frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu+2}{2} \right| \\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \end{matrix} \right) \\
&= \frac{3\sqrt{3} \Gamma(\nu+1) 2^{-\nu-1}}{\sqrt{\pi}} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(\begin{matrix} \left| \frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu+2}{2} \right| \\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \end{matrix} \right)
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $r=1$ için,

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,2}(\xi) &= \frac{1!}{3^0(\nu)_1} \frac{\prod_{j=1}^2 \Gamma\left(\frac{\nu+1+j}{2}\right)}{\prod_{j=1}^3 \Gamma\left(\frac{1+j}{3}\right)} \xi^{-2} G_{3,3}^{3,0} \left(\begin{matrix} \left| \frac{\nu+1+1}{2}, \frac{\nu+1+2}{2} \right| \\ \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3} \end{matrix} \right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)}{\nu \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma(1)} \xi^{-2} G_{2,2}^{2,0} \left(\begin{matrix} \left| \frac{\nu+2}{2}, \frac{\nu+3}{2} \right| \\ \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \end{matrix} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(v+2) 2^{-v-1}}{v \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \xi^{-2} G_{2,2}^{2,0} \left(4\xi^3 \left| \begin{matrix} \frac{v+2}{2}, \frac{v+3}{2} \\ \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \end{matrix} \right. \right)$$

bulunur.

4.2.3. Tchebicheff tipi d -ortogonal polinomlar ($v=1$)

$\{U_n(.,d)\}_{n \geq 0}$ 2. tip Tchebicheff tipi d -ortogonal polinomlar kümesi,

$$(1 - xt + bt^{d+1})^{-1} = \sum_{n \geq 0} U_n(x;d) t^n, \quad b \neq 0 \quad (4.25)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir [13]. $d=b=1$ için klasik 2. tip Tchebicheff

tipi polinomlar kümesi elde edilir. Eş. 4.1 de $v=1$, $x \rightarrow \frac{x}{(d+1)b^{\frac{1}{d+1}}}$, $t \rightarrow tb^{\frac{1}{d+1}}$

alınırsa,

$$\begin{aligned} \left(1 - (d+1) \frac{x}{(d+1)b^{\frac{1}{d+1}}} tb^{\frac{1}{d+1}} + \left(tb^{\frac{1}{d+1}} \right)^{d+1} \right)^{-1} &= \sum_{n \geq 0} h_{n,d+1}^1 \left(\frac{x}{(d+1)b^{\frac{1}{d+1}}} \right) \left(tb^{\frac{1}{d+1}} \right)^n \\ \Rightarrow (1 - xt + bt^{d+1})^{-1} &= \sum_{n \geq 0} h_{n,d+1}^1 \left(\frac{x}{(d+1)b^{\frac{1}{d+1}}} \right) b^{\frac{n}{d+1}} t^n = \sum_{n \geq 0} U_n(x;d) t^n \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$U_n(x;d) = b^{\frac{n}{d+1}} h_{n,d+1}^1 \left(\frac{x}{(d+1)b^{\frac{1}{d+1}}} \right) \quad (4.26)$$

şeklindedir. Teorem 4.1.1 den Eş. 4.26 ile verilen $\{U_n(.,d)\}_{n \geq 0}$ Tchebicheff tipi polinomlar kümesi d -boyutlu $u = {}^t(u_0, u_1, \dots, u_{d-1})$ fonksiyonel vektörü ile aşağıdaki iç çarpımla d -ortogonaldır:

$$\text{Eğer } n < r \text{ ise } \langle u_r, x^n \rangle = 0 \quad (4.27)$$

ve $n \geq r$ için

$$\langle u_r, x^n \rangle = \delta_{r,i} \int_0^{(d+1)\left(\frac{b}{d^d}\right)^{\frac{1}{d+1}}} \xi^n \psi_{r,d}(\xi) d\xi. \quad (4.28)$$

Burada $n = i + (d+1)k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $i \in \mathbb{N}_{d+1}$, $r = 0, 1, \dots, d-1$ ve

$$\psi_{r,d}(\xi) = (d+1) \frac{\prod_{j=1}^d \Gamma\left(\frac{1+r+j}{d}\right)}{\prod_{j=1}^{d+1} \Gamma\left(\frac{r+j}{d+1}\right)} \xi^{-(r+1)} G_{d+1,d+1}^{d+1,0} \left(\frac{d^d \xi^{d+1}}{b(d+1)^{d+1}} \left| \begin{matrix} \frac{r+2}{d}, \dots, \frac{r+1+d}{d}, 1 \\ \frac{r+1}{d+1}, \dots, \frac{r+(d+1)}{d+1} \end{matrix} \right. \right)$$

şeklindedir.

$d = b = 1$ durumunda, ikinci tip $\{U_n(x)\}_{n \geq 0}$ Tchebicheff polinomlar kümesi karşımıza çıkar ki bu polinomun ağırlık fonksiyonu

$$\begin{aligned} \psi_{0,1}(\xi) &= 2 \frac{\prod_{j=1}^1 \Gamma\left(\frac{1+j}{1}\right)}{\prod_{j=1}^2 \Gamma\left(\frac{j}{2}\right)} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 \left| \begin{matrix} \frac{2}{1}, 1 \\ \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \end{matrix} \right. \right) \\ &= 2 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1)} \xi^{-1} G_{1,1}^{1,0} \left(\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 \left| \begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right) \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \xi^{-1} G_{1,1}^{1,0} \left(\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 \left| \begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right) \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \xi^{-1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \left(1 - \frac{\xi^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\xi^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ve iç çarpımı,

$$\begin{aligned}
\langle u_0, x^n \rangle &= \delta_{0,i} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 \xi^{2k-1} G_{1,1}^{1,0} \left(\left(\frac{\xi}{2} \right)^2 \middle| \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right) d\xi \\
&= \delta_{0,i} \int_0^2 \xi^n \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\xi^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} d\xi
\end{aligned} \tag{4.29}$$

olup, burada $n = i + 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$ ve $i = 0, 1$ dir. Eş. 2.10 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\langle u_0, x^n \rangle &= \delta_{0,i} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 \xi^{2k-1} \left(\frac{\xi}{2} \right)^2 \left(\frac{\xi}{2} \right)^{-2} G_{1,1}^{1,0} \left(\left(\frac{\xi}{2} \right)^2 \middle| \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right) d\xi \\
&= \delta_{0,i} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^2 \xi^{2k+1} G_{1,1}^{1,0} \left(\left(\frac{\xi}{2} \right)^2 \middle| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \right) d\xi
\end{aligned}$$

yazılır. $\left\{ U_n \left(\frac{x}{2} \right) \right\}_{n \geq 0}$ polinomlar kümesi için iç çarpım,

$$\begin{aligned}
\left\langle u_0, \left(\frac{x}{2} \right)^n \right\rangle &= \delta_{0,i} \frac{1}{2^n} \int_0^2 \xi^n \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\xi^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \\
&= \delta_{0,i} \frac{2}{\pi} \int_0^2 \left(\frac{\xi}{2} \right)^n \left(1 - \left(\frac{\xi}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\xi
\end{aligned}$$

şeklindedir. $t = \frac{\xi}{2}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\left\langle u_0, \left(\frac{x}{2} \right)^n \right\rangle &= \delta_{0,i} \frac{4}{\pi} \int_0^1 \xi^n (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} d\xi \\
&= \delta_{0,i} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \xi^n (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} d\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\left\{ U_n \left(\frac{x}{2} \right) \right\}_{n \geq 0}$ polinomlar kümesi için $-1 \leq x \leq 1$ için ağırlık fonksiyonu,

$$\psi_{0,1}(\xi) = \frac{2}{\pi} (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}$$

dir. Biliyoruz ki 2. tip Tchebicheff polinomları için $-1 \leq x \leq 1$ aralığında ortogonallık özelliği

$$\int_{-1}^1 U_n(x) U_m(x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \end{cases}$$

şeklindedir. Yani 2. tip Tchebicheff polinomları için $-1 \leq x \leq 1$ aralığındaki ağırlık fonksiyonu $d=1$ durumundaki ağırlık fonksiyonu ile çakışır.

$d=2, b=\frac{4}{27}$ durumunda, Tchebicheff tipi polinomlar kümesi u_0, u_1 fonksiyonelleri

ile aşağıdaki iç çarpıma göre 2-ortogonaldır:

$$\langle u_r, x^n \rangle = \delta_{r,i} \int_0^1 \xi^n \psi_{r,2}(\xi) d\xi. \quad (4.30)$$

Burada $n = i + 3k, k \in \mathbb{N}_0, i = 0, 1, 2, r = 0, 1$ ve

$$\begin{aligned} \psi_{0,2}(\xi) &= 3 \frac{\prod_{j=1}^2 \Gamma\left(\frac{1+0+j}{2}\right)}{\prod_{j=1}^{d+1} \Gamma\left(\frac{0+j}{3}\right)} \xi^{-1} G_{3,3}^{3,0} \left(\frac{4\xi^3}{27} \middle| \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, 1 \right) \\ &= 3 \frac{\Gamma(1) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma(1)} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(\xi^3 \middle| 1, \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(\xi^3 \middle| 1, \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi}} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(\xi^3 \middle| 1, \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{1,2}(\xi) &= 3 \frac{\prod_{j=1}^2 \Gamma\left(\frac{1+1+j}{2}\right)}{\prod_{j=1}^3 \Gamma\left(\frac{1+j}{3}\right)} \xi^{-2} G_{3,3}^{3,0} \left(\frac{4\xi^3}{27} \middle| \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, 1 \right) \\
&= 3 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma(1) \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \xi^{-2} G_{2,2}^{2,0} \left(\xi^3 \middle| \frac{3}{2}, 2 \right) \\
&= \frac{9\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \xi^{-2} G_{2,2}^{2,0} \left(\xi^3 \middle| \frac{3}{2}, 2 \right) \\
&= \frac{9\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi}} \xi^{-2} G_{2,2}^{2,0} \left(\xi^3 \middle| \frac{3}{2}, 2 \right)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

4.2.4. Legendre tipi polinomlar $\left(v = \frac{1}{2}\right)$

Bu kısımda $\{L_n(.,d)\}_{n \geq 0}$ Legendre tipi d -ortogonal polinomlar kümesi

incelenecektir. $v = \frac{1}{2}$ için $\{h_{n,d+1}^v(x)\}_{n \geq 0}$ Humbert polinomlar kümesi

$L_n(x;d) = h_{n,d+1}^{\frac{1}{2}}(x)$ olur. $d=1$ durumu, Legendre polinomlar kümesini verir. Eş.

4.2 den $v = \frac{1}{2}$ için

$$h_{n+1,d+1}^v(x) = \frac{(v+n)(d+1)}{(n+1)} x h_{n,d+1}^v(x) - \left(\frac{(d+1)(v-1)}{(n+1)} + 1 \right) h_{n-d,d+1}^v(x)$$

$$\begin{aligned}
h_{n+1,d+1}^{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{\left(\frac{1}{2}+n\right)(d+1)}{(n+1)} x h_{n,d+1}^{\frac{1}{2}}(x) - \left(\frac{(d+1)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{(n+1)} + 1 \right) h_{n-d,d+1}^{\frac{1}{2}}(x) \\
\Rightarrow L_{n+1}(x;d) &= \frac{(2n+1)(d+1)}{2(n+1)} x L_n(x;d) - \left(\frac{2n+2-d-1}{2(n+1)} \right) L_{n-d}(x;d) \\
\Rightarrow 2(n+1)L_{n+1}(x;d) &= (2n+1)(d+1)xL_n(x;d) - (2n+1-d)L_{n-d}(x;d)
\end{aligned}$$

rekürans bağıntısı elde edilir.

Burada $d=1$ yazılırsa Legendre polinomları için bilinen

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

rekürans bağıntısı bulunur.

Teorem 4.1.1 den $v = \frac{1}{2}$ için $\{L_n(.,d)\}_{n \geq 0}$ polinomlar kümesi d -boyutlu

$u = {}^t(u_0, u_1, \dots, u_{d-1})$ fonksiyonel vektörüne göre aşağıdaki iç çarpımla d -ortogonal polinomlar kümesidir:

$$\text{Eğer } n < r \text{ ise } \langle u_r, x^n \rangle = 0 \quad (4.31)$$

ve $n \geq r$ ise

$$\langle u_r, x^n \rangle = \delta_{r,i} \int_0^d \xi^n \varphi_{r,d}(\xi) d\xi. \quad (4.32)$$

Burada $n = i + (d+1)k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $i = 0, 1, \dots, d$, $r = 0, 1, \dots, d-1$ ve

$$\begin{aligned}
\varphi_{r,d}(\xi) &= \frac{r!}{(d+1)^{r-1} \left(\frac{1}{2}\right)_r} \frac{\prod_{j=1}^d \Gamma\left(\frac{r+j}{d} + \frac{1}{2d}\right)}{\prod_{j=1}^{d+1} \Gamma\left(\frac{r+j}{d+1}\right)} \xi^{-(r+1)} \\
&\quad \times G_{d+1,d+1}^{d+1,0} \left(d^d \xi^{d+1} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2d} + \frac{r+1}{d}, \dots, \frac{1}{2d} + \frac{r+d}{d}, 1 \\ \frac{r+1}{d+1}, \dots, \frac{r+(d+1)}{d+1} \end{array} \right. \right)
\end{aligned} \quad (4.33)$$

olup $d=1$ durumunda,

$$\begin{aligned}
\varphi_{0,1}(\xi) &= \frac{0!}{2^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)_0} \frac{\prod_{j=1}^1 \Gamma\left(\frac{0+j}{1} + \frac{1}{2}\right)}{\prod_{j=1}^2 \Gamma\left(\frac{0+j}{2}\right)} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(\xi^2 \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} + 1, 1 \\ \frac{1}{2}, 1 \end{array} \right. \right) \\
&= 2 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1)} \xi^{-1} G_{1,1}^{1,0} \left(\xi^2 \left| \begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right. \right) \\
&= \xi^{-1} \frac{1}{\Gamma(1)} (1 - \xi^2)^0 (\xi^2)^{\frac{1}{2}} = 1
\end{aligned}$$

bulunur. Yani bilindiği gibi, $-1 \leq x \leq 1$ aralığında Legendre polinomları $\varphi_{0,1}(\xi) = 1$ ağırlık fonsiyonuna göre ortogonaldır.

$d = 2$ durumunda Legendre tipi polinomlar için ağırlık fonsiyonu, Pincherle tipi polinomları için $d = 2$ durumunda bulunan ağırlık fonsiyonunda $v = \frac{1}{2}$ yazılarak

$$\begin{aligned}
\varphi_{0,2}(\xi) &= \frac{3\sqrt{3} \Gamma(v+1) 2^{-v-1}}{\sqrt{\pi}} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(4\xi^3 \left| \begin{array}{c} \frac{v+1}{2}, \frac{v+2}{2} \\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \end{array} \right. \right) \\
&= \frac{3\sqrt{3} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) 2^{-\frac{3}{2}-1}}{\sqrt{\pi}} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(4\xi^3 \left| \begin{array}{c} \frac{\frac{1}{2}+1}{2}, \frac{\frac{1}{2}+2}{2} \\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \end{array} \right. \right) \\
&= 3\sqrt{3} 2^{-\frac{7}{2}} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(4\xi^3 \left| \begin{array}{c} \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \\ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \end{array} \right. \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\varphi_{1,2}(\xi) &= \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\right)2^{-\frac{1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\xi^{-2}G_{2,2}^{2,0}\left(4\xi^3\left|\begin{array}{c}\frac{1}{2}+2\quad\frac{1}{2}+3\\ \frac{2}{2},\frac{2}{2}\end{array}\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right.\right) \\ &= \frac{3\pi 2^{-\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\xi^{-2}G_{2,2}^{2,0}\left(4\xi^3\left|\begin{array}{c}\frac{5}{4},\frac{7}{4}\\ \frac{2}{3},\frac{4}{3}\end{array}\right.\right)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Ayrıca $v = \frac{1}{d+1}$ için $\{h_{n,d+1}^v(x)\}_{n \geq 0}$ Humbert polinomlar kümesi $\{K_n(.,d)\}_{n \geq 0}$

Kinney polinomlarını verir [11]. Özel durumlarda, $\{L_n(x)\}_{n \geq 0}$ ($d=1$) Legendre ve

$\left\{P_n^{\frac{1}{3}}(x)\right\}_{n \geq 0}$ ($d=2$) Pincherle tipi polinomlarını içerir. Bu polinomlar Legendre

polinomlarının bazı temel özelliklerine sahiptir. Sonuç olarak bu polinomlar, Legendre tipi d -ortogonal polinomlar olarak da görülebirlirler.

5. JACOBI TİPİ POLİNOMLARIN d -ORTOGONALLIĞI

5.1. Humbert Polinomlarının Bileşenleri

5.1.1. Teorem

$\left\{ h_{n,d+1}^v \left(\frac{x}{d+1} \right) \right\}_{n \geq 0}$ Humbert polinomlar kümesinin bileşenleri $\mu \in IN_{d+1}$ olmak

üzere, $\left\{ \frac{(v)_\mu}{\mu!} P_n^{v+\mu} \left(x; (\alpha_{d,\mu}) \right) \right\}_{n \geq 0}$ şeklinde yazılabilir. Burada,

$$P_n^{v+\mu} \left(x; (\alpha_{d,\mu}) \right) = \frac{(-1)^n (v+\mu)_n}{n!} {}_{d+1}F_d \left(-n, \Delta(d, n+v+\mu); (\alpha_{d,\mu}); \frac{d^d x}{(d+1)^{d+1}} \right) \quad (5.1)$$

$$(\alpha_{d,\mu}) = \left\{ \frac{\mu+1+j}{d+1}; j=0,1,\dots,d \right\} - \{1\} \quad (5.2)$$

dir ve $\Delta(p, a)$ ile, $j=1,\dots,p$ olmak üzere $\frac{a+j-1}{p}$ ler gösterilir.

5.1.2. Teorem

$v > -\frac{1}{2}$, $\mu \in IN_{d+1}$ ve Eş. 5.2 ile verilen $(\alpha_{d,\mu})$ için Eş. 5.1 de tanımlanan

$\left\{ P_n^{v+\mu} \left(x; (\alpha_{d,\mu}) \right) \right\}_{n \geq 0}$ polinomlar kümesi $u^\mu = {}^t(u_0^\mu, u_1^\mu, \dots, u_{d-1}^\mu)$ d -boyutlu

fonksiyonel vektörüne göre aşağıdaki iç çarpımla d -ortogonal polinomlar kümesidir [12]:

$$\text{Eğer } n < r \text{ ise } \langle u_r, x^n \rangle = 0, \quad (5.3)$$

ve $n \geq r$ ise

$$\langle u_r^\mu, x^n \rangle = \int_0^{d\left(1+\frac{1}{d}\right)^{d+1}} \xi^n \varphi_{r,d}(\xi) d\xi. \quad (5.4)$$

Burada,

$$\varphi_{r,d}(\xi) = \frac{(v + \mu + r(d+1))}{(v + \mu)_{r+1}} \frac{\prod_{j=1}^d \Gamma\left(\frac{v + \mu + r + j}{d}\right)}{\prod_{j=1}^{d+1} \Gamma\left(\frac{\mu + j}{d+1}\right)} \xi^{-1} \\ \times G_{d+1,d+1}^{d+1,0} \left(\frac{\xi}{d \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{d+1}} \left| \begin{matrix} \frac{v + \mu + r + 1}{d}, \dots, \frac{v + \mu + r + d}{d}, 1 - r \\ \frac{\mu + 1}{d+1}, \dots, \frac{\mu + (d+1)}{d+1} \end{matrix} \right. \right) \quad (5.5)$$

şeklindedir.

$d=1$ durumunda, Eş 5.2 den

$$(\alpha_{1,\mu}) = \left\{ \frac{\mu+1+j}{2}; j=0,1 \right\} - \{1\} = \left\{ \frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu+2}{2}; \mu=0,1 \right\} - \{1\} = \left\{ \mu + \frac{1}{2}; \mu=0,1 \right\}$$

bulunur. Ayrıca

$$\left\{ P_n^{v+\mu} \left(x; (\alpha_{d,\mu}) \right) \right\}_{n \geq 0}, \quad \mu=0,1 \text{ polinomlar kümesi } \left\{ \frac{(\mu+v)_n}{\left(\mu + \frac{1}{2}\right)_n} P_n^{\left(v-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2} - 1 \right) \right\}_{n \geq 0},$$

$\mu=0,1$ Jacobi polinomlar kümesine dönüşür. Gerçekten, $\mu=0$ için Eş. 5.1 den

$$P_n^v \left(x; \frac{1}{2} \right) = \frac{(-1)^n (v)_n}{n!} {}_2F_1 \left(-n, \Delta(1, n+v); \frac{1}{2}; \frac{x}{4} \right) = \frac{(-1)^n (v)_n}{n!} {}_2F_1 \left(-n, n+v; \frac{1}{2}; \frac{x}{4} \right)$$

bulunur. Burada $x \rightarrow 2(x+1)$ dönüşümü yapılırsa,

$$P_n^v \left(2(x+1); \frac{1}{2} \right) = \frac{(-1)^n (v)_n}{n!} {}_2F_1 \left(-n, n+v; \frac{1}{2}; \frac{x+1}{2} \right) \quad (5.6)$$

elde edilir.

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n (1+\beta)_n}{n!} {}_2F_1 \left(-n, 1+\alpha+\beta+n; 1+\beta; \frac{x+1}{2} \right) \quad (5.7)$$

eşitliği ile bilinen Jacobi polinomlarında $\alpha = v - \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$ durumları göz önüne

alınırsa,

$$\begin{aligned}
P_n^v\left(2(x+1); \frac{1}{2}\right) &= \frac{(-1)^n (v)_n}{n!} \frac{n!}{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, n+v; \frac{1}{2}; \frac{x+1}{2}\right) \\
&= \frac{(v)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} P_n^{\left(v-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x) \\
\Rightarrow P_n^v\left(x; \frac{1}{2}\right) &= \frac{(v)_n}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} P_n^{\left(v-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\mu=1$ için Eş. 5.1 den

$$\begin{aligned}
P_n^{v+1}\left(x; \frac{3}{2}\right) &= \frac{(-1)^n (v+1)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, \Delta(1, n+v+1); \frac{3}{2}; \frac{x}{4}\right) \\
&= \frac{(-1)^n (v+1)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, n+v+1; \frac{3}{2}; \frac{x}{4}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. $x \rightarrow 2(x+1)$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
P_n^{v+1}\left(2(x+1); \frac{3}{2}\right) &= \frac{(-1)^n (v+1)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, n+v+1; \frac{3}{2}; \frac{x+1}{2}\right) \\
&= \frac{(-1)^n (v+1)_n}{n!} \frac{n!}{(-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)_n} \frac{(-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, n+v+1; \frac{3}{2}; \frac{x+1}{2}\right) \\
&= \frac{(v+1)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} P_n^{\left(v-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}(x) \\
\Rightarrow P_n^{v+1}\left(x; \frac{3}{2}\right) &= \frac{(v+1)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} P_n^{\left(v-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca Eş. 5.5 den ağırlık fonksiyonu $d=1$ durumu için

$$\begin{aligned}
\varphi_{0,1}(\xi) &= \frac{(\nu + \mu)}{(\nu + \mu)_1} \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{\Gamma\left(\frac{\mu + 1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu + 2}{2}\right)} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(\frac{\xi}{4} \left| \begin{matrix} \nu + \mu + 1, 1 \\ \frac{\mu + 1}{2}, \frac{\mu + 2}{2} \end{matrix} \right. \right) \\
&= \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \xi^{-1} G_{1,1}^{1,0} \left(\frac{\xi}{4} \left| \begin{matrix} \nu + \mu + 1 \\ \mu + \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. İç çarpım Eş. 5.4 den

$$\langle u_0, x^n \rangle = \int_0^4 \xi^n \varphi_{0,1}(\xi) d\xi = \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^4 \xi^{n-1} G_{1,1}^{1,0} \left(\frac{\xi}{4} \left| \begin{matrix} \nu + \mu + 1 \\ \mu + \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right) d\xi$$

şeklinde dir. Burada Eş. 2.12 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\langle u_0, x^n \rangle &= \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^4 \xi^{n-1} \left(1 - \frac{\xi}{4}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \left(\frac{\xi}{4}\right)^{\mu + \frac{1}{2}} d\xi \\
&= \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{4\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^4 \xi^n \left(1 - \frac{\xi}{4}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \left(\frac{\xi}{4}\right)^{\mu - \frac{1}{2}} d\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\left\langle u_0, \left(\frac{x}{2}\right)^n \right\rangle = \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{4\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^4 \left(\frac{\xi}{2}\right)^n \left(1 - \frac{\xi}{4}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \left(\frac{\xi}{4}\right)^{\mu - \frac{1}{2}} d\xi$$

olup, $t = \frac{\xi}{2} - 1$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
\left\langle u_0, \left(\frac{x}{2}\right)^n \right\rangle &= \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{4\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (t+1)^n \left(1 - \frac{t+1}{2}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \left(\frac{t+1}{2}\right)^{\mu - \frac{1}{2}} 2 dt \\
&= \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1)}{2^{\nu + \mu} \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (t+1)^n (1-t)^{\nu - \frac{1}{2}} (t+1)^{\mu - \frac{1}{2}} dt
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\left(\frac{x}{2}-1\right)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{x}{2}\right)^j (-1)^{n-j}$$

binom açılımından,

$$\begin{aligned} \left\langle u_0, \left(\frac{x}{2}-1\right)^n \right\rangle &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \left\langle u_0, \left(\frac{x}{2}\right)^j \right\rangle \\ &= \frac{\Gamma(v+\mu+1)}{2^{v+\mu} \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (t+1)^n (1-t)^{v-\frac{1}{2}} (t+1)^{\mu-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{\Gamma(v+\mu+1)}{2^{v+\mu} \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 t^n (1-t)^{v-\frac{1}{2}} (t+1)^{\mu-\frac{1}{2}} dt \end{aligned} \quad (5.8)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\left\{ \frac{(\mu+v)_n}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)_n} P_n^{(v-\frac{1}{2}, \mu-\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}-1\right) \right\}_{n \geq 0}$ Jacobi polinomlarının ağırlık

fonksiyonu $d=1$ için $-1 \leq t \leq 1$ aralığında $(1-t)^{v-\frac{1}{2}} (1+t)^{\mu-\frac{1}{2}}$ dir.

$d=2$ durumunda, $h_{n,3}^v(x) = P_n^v(x)$ idi. Teorem 5.1.1 den $\left\{ P_n^v \left(\frac{x}{3} \right) \right\}_{n \geq 0}$ polinomlar

kümesinin bileşenleri

$$P_n^{v+\mu}(x; \alpha_1, \alpha_2) = \frac{(-1)^n (v+\mu)_n}{n!} {}_3F_2 \left(-n, \Delta(2, n+v+\mu); \alpha_1, \alpha_2; \frac{4x}{27} \right)$$

şeklindedir. Burada

$$\{\alpha_1, \alpha_2\} = \left\{ \frac{\mu+1}{3}, \frac{\mu+2}{3}, \frac{\mu+3}{3} \right\} - \{1\} \text{ dir. Dolayısıyla}$$

$$P_n^{v+\mu}(x; \alpha_1, \alpha_2) = \frac{(-1)^n (v+\mu)_n}{n!} {}_3F_2 \left(-n, \frac{n+v+\mu}{2}, \frac{n+v+\mu+1}{2}; \alpha_1, \alpha_2; \frac{4x}{27} \right) \quad (5.9)$$

dir. Teorem 5.1.2 den $\left\{ P_n^{v+\mu}(x; (\alpha_{d,\mu})) \right\}_{n \geq 0}$, $\mu=0,1$ Humbert polinomlarının Eş. 5.9

ile tanımlanan bileşenleri 2-boyutlu $u = {}^t(u_0, u_1)$ fonksiyonel vektörüne göre

$$\langle u_r, x^n \rangle = \int_0^{\frac{27}{4}} \xi^n \varphi_{r,2}(\xi) d\xi; \quad r = 0, 1$$

iç çarpımıyla 2-ortogonaldır. Burada,

$$\begin{aligned} \varphi_{0,2}(\xi) &= \frac{(v+\mu)}{(v+\mu)_1} \frac{\Gamma\left(\frac{v+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v+\mu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+3}{3}\right)} \xi^{-1} G_{3,3}^{3,0} \left(\frac{4\xi}{27} \left| \frac{v+\mu+1}{2}, \frac{v+\mu+2}{2}, 1 \right. \right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{v+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v+\mu+2}{2}\right)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \xi^{-1} G_{2,2}^{2,0} \left(\frac{4\xi}{27} \left| \frac{v+\mu+1}{2}, \frac{v+\mu+2}{2} \right. \right) \\ \varphi_{1,2}(\xi) &= \frac{(v+\mu+3)}{(v+\mu)_2} \frac{\Gamma\left(\frac{v+\mu+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v+\mu+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+3}{3}\right)} \xi^{-1} G_{3,3}^{3,0} \left(\frac{4\xi}{27} \left| \frac{v+\mu+2}{2}, \frac{v+\mu+3}{2}, 0 \right. \right) \\ &= \frac{(v+\mu+3)}{(v+\mu)_2} \frac{\Gamma\left(\frac{v+\mu+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v+\mu+3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \xi^{-1} G_{3,3}^{3,0} \left(\frac{4\xi}{27} \left| \frac{v+\mu+2}{2}, \frac{v+\mu+3}{2}, 0 \right. \right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

5.1.1. Tanım

Humbert polinomlarının bileşenlerinin genişletmesi,

$$P_n^{v+\mu}(x; (\alpha_d)) := P_n^v(x; \alpha_1, \dots, \alpha_d) = \frac{(-1)^n (v)_n}{n!} {}_{d+1}F_d \left(-n, \Delta(d, n+v); (\alpha_d); \frac{d^d x}{(d+1)^{d+1}} \right) \quad (5.10)$$

şeklinde genelleştirilmiş hipergeometrik polinomu olarak tanımlanır ve bu polinomlara Jacobi tipi polinomlar denir. Burada, $j = 1, 2, \dots, d$ için $\alpha_j \neq 0, -1, \dots$ ve

$v + d(1 - \alpha_j) \neq 0, -1, -2$ dir. Eğer (α_d) yerine $(\alpha_{d,\mu})$, v yerine $v + \mu$ yazılırsa, Eş.

5.1 deki Humbert polinomlarının bileşenleri karşımıza çıkar.

5.2. Doğurucu Fonksiyon

Eş. 5.10 ile tanımlanan Jacobi tipi polinomların doğurucu fonksiyonu

$$(1+t)^{-\nu} {}_{d+1}F_d \left(\Delta(d+1, \nu); (\alpha_d); \frac{xt}{(1+t)^{d+1}} \right) = \sum_{n \geq 0} P_n^\nu(x; (\alpha_d)) t^n \quad (5.11)$$

şeklindedir. Gerçekten de, [13] den

$$\begin{aligned} (1+t)^{-\lambda} {}_pF_q \left((a_p); (b_q); -\frac{r^r xt}{(1-t)^r} \right) \\ = \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda)_n}{n!} {}_{p+r}F_{q+r} \left(-n, \Delta(r-1, n+\lambda)(a_p); \Delta(r, \lambda), (b_q); (r-1)^{r-1} x \right) t^n \end{aligned} \quad (5.12)$$

yazılabilir. Eş. 5.12 de $r \rightarrow d+1$, $\lambda \rightarrow \nu$, $(b_q) \rightarrow (\alpha_d)$, $(a_p) \rightarrow \Delta(d+1, \nu)$,

$x \rightarrow \frac{x}{(d+1)^{d+1}}$, $t \rightarrow -t$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} (1+t)^{-\nu} {}_{d+1}F_d \left(\Delta(d+1, \nu); (\alpha_d); \frac{xt}{(1+t)^{d+1}} \right) \\ = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (\nu)_n}{n!} {}_{2d+2}F_{2d+1} \left(-n, \Delta(d, n+\nu), \Delta(d+1, \nu); \Delta(d+1, \nu), (\alpha_d); \frac{d^d x}{(d+1)^{d+1}} \right) t^n \\ = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (\nu)_n}{n!} {}_{d+1}F_d \left(-n, \Delta(d, n+\nu); (\alpha_d); \frac{d^d x}{(d+1)^{d+1}} \right) t^n \\ = \sum_{n \geq 0} P_n^{\nu+\mu}(x; (\alpha_d)) t^n \end{aligned}$$

elde edilir.

5.3. Rekürans Bağıntısı

Eş. 5.10 da tanımlanan Jacobi tipi polinomlar için rekürans bağıntısı bulalım.

Eş. 5.11 in her iki yanının x e göre türevi alınır,

$$(1+t)^{-v} \frac{t}{(1+t)^{d+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{v}{d+1}\right)_n \left(\frac{v+1}{d+1}\right)_n \cdots \left(\frac{v+d}{d+1}\right)_n}{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \cdots (\alpha_d)_n (n-1)!} \left(\frac{xt}{(1+t)^{d+1}}\right)^{n-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{d}{dx} P_n^v(x; (\alpha_d)) t^n$$

$$(1+t)^{-(v+d+1)} t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{v}{d+1}\right)_{n+1} \left(\frac{v+1}{d+1}\right)_{n+1} \cdots \left(\frac{v+d}{d+1}\right)_{n+1}}{(\alpha_1)_{n+1} (\alpha_2)_{n+1} \cdots (\alpha_d)_{n+1} n!} \left(\frac{xt}{(1+t)^{d+1}}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{d}{dx} P_n^v(x; (\alpha_d)) t^n$$

$$(1+t)^{-(v+d+1)} t \frac{\left(\frac{v}{d+1}\right) \left(\frac{v+1}{d+1}\right) \cdots \left(\frac{v+d}{d+1}\right)}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{v}{d+1}+1\right)_n \left(\frac{v+1}{d+1}+1\right)_n \cdots \left(\frac{v+d}{d+1}+1\right)_n}{(\alpha_1+1)_n (\alpha_2+1)_n \cdots (\alpha_d+1)_n n!} \times \left(\frac{xt}{(1+t)^{d+1}}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{d}{dx} P_n^v(x; (\alpha_d)) t^n$$

$$t \frac{\left(\frac{v}{d+1}\right)_{d+1}}{(d+1)^{d+1} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_d} (1+t)^{-(v+d+1)} {}_{d+1}F_d \left(\Delta(d+1, v+d+1); (\alpha_d+1); \frac{xt}{(1+t)^{d+1}} \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{d}{dx} P_n^v(x; (\alpha_d)) t^n$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{v}{d+1}\right)_{d+1}}{(d+1)^{d+1} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_d} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{v+d+1}(x; (\alpha_d+1)) t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} P_n^v(x; (\alpha_d)) t^n$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{v}{d+1}\right)_{d+1}}{(d+1)^{d+1} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_d} \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}^{v+d+1}(x; (\alpha_d+1)) t^n = \frac{d}{dx} P_0^v(x; (\alpha_d)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} P_n^v(x; (\alpha_d)) t^n$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{v}{d+1}\right)_{d+1}}{(d+1)^{d+1} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_d} \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}^{v+d+1}(x; (\alpha_d+1)) t^n = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} P_n^v(x; (\alpha_d)) t^n$$

olup buradan t^n nin katsayıları eşitlenirse $n \geq 1$ için,

$$\frac{\left(\frac{v}{d+1}\right)_{d+1}}{(d+1)^{d+1} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_d} P_{n-1}^{v+d+1}(x; (\alpha_d+1)) = \frac{d}{dx} P_n^v(x; (\alpha_d))$$

rekürans bağıntısı elde edilir.

Diğer taraftan, Eş. 5.11 in her iki yanının t ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
& -v(1+t)^{-v-1} {}_{d+1}F_d \left(\Delta(d+1, v); (\alpha_d); \frac{xt}{(1+t)^{d+1}} \right) + (1+t)^{-v} \\
& \quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{v}{d+1} \right)_n \left(\frac{v+1}{d+1} \right)_n \cdots \left(\frac{v+d}{d+1} \right)_n}{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \cdots (\alpha_d)_n (n-1)!} \left(\frac{xt}{(1+t)^{d+1}} \right)^{n-1} \frac{x(1+t)^d (1-td)}{(1+t)^{2(d+1)}} \\
& \quad = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^v(x; (\alpha_d)) n t^{n-1} \\
& -v(1+t)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^v(x; (\alpha_d)) t^n + (1+t)^{-v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{v}{d+1} \right)_n \left(\frac{v+1}{d+1} \right)_n \cdots \left(\frac{v+d}{d+1} \right)_n}{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \cdots (\alpha_d)_n (n-1)!} \left(\frac{xt}{(1+t)^{d+1}} \right)^{n-1} \\
& \quad \times \frac{x(1-td)}{(1+t)^{d+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^v(x; (\alpha_d)) n t^{n-1} \\
& -v \sum_{n=0}^{\infty} P_n^v(x; (\alpha_d)) t^n + \frac{\left(\frac{v}{d+1} \right) \left(\frac{v+1}{d+1} \right) \cdots \left(\frac{v+d}{d+1} \right)}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_d} (1+t)^{-(v+d+1)} \\
& \quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{v}{d+1} + 1 \right)_n \left(\frac{v+1}{d+1} + 1 \right)_n \cdots \left(\frac{v+d}{d+1} + 1 \right)_n}{(\alpha_1 + 1)_n (\alpha_2 + 1)_n \cdots (\alpha_d + 1)_n n!} \left(\frac{xt}{(1+t)^{d+1}} \right)^n x(1-td) \\
& \quad = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^v(x; (\alpha_d)) n t^{n-1} (1+t) \\
& -v \sum_{n=0}^{\infty} P_n^v(x; (\alpha_d)) t^n + \frac{(v)_{d+1}}{(d+1)^{d+1} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_d} \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{v+d+1}(x; (\alpha_d + 1)) t^n x(1-td) \\
& \quad = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^v(x; (\alpha_d)) n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} P_n^v(x; (\alpha_d)) n t^n \\
& -v \sum_{n=0}^{\infty} P_n^v(x; (\alpha_d)) t^n + \frac{(v)_{d+1}}{(d+1)^{d+1} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_d} x \\
& \quad \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{v+d+1}(x; (\alpha_d + 1)) t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}^{v+d+1}(x; (\alpha_d + 1)) t^n d \right) \\
& \quad = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}^v(x; (\alpha_d)) (n+1) t^n + \sum_{n=1}^{\infty} P_n^v(x; (\alpha_d)) n t^n
\end{aligned}$$

olup, gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra her iki tarafta t^n nin katsayıları eşitlenirse $n \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} -vP_n^v(x;(\alpha_d)) + \frac{(v)_{d+1}}{(d+1)^{d+1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_d} x(P_n^{v+d+1}(x;(\alpha_d+1)) - dP_{n-1}^{v+d+1}(x;(\alpha_d+1))) \\ = (n+1)P_{n+1}^v(x;(\alpha_d)) + nP_n^v(x;(\alpha_d)) \end{aligned}$$

şeklinde türev içermeyen rekürans bağıntısı bulunur.

5.4. Diferensiyel Denklem

5.4.1. Teorem

Eş. 5.10 ile tanımlanan Jacobi tipi polinomlar aşağıdaki diferensiyel denklemi sağlar [12]:

$$\begin{aligned} \left\{ (x-1)x^d D^{d+1} + \left[\left(v + \frac{d^2+2d-1}{2} \right) x - \frac{d(d-1)}{2} - \sum_{j=1}^d \alpha_j \right] x^{d-1} D^d \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{d-1} (c_{d+1,m} x - c'_{d+1,m}) x^{m-1} D^m - \frac{n(v+n)_d}{d^d} \right\} y = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Burada

$$\begin{aligned} y &= P_n^v \left(\frac{(d+1)^{d+1}}{d^d} x; (\alpha_d) \right), \quad D = \frac{d}{dx}, \\ c_{d+1,m} &= \sum_{k=0}^{d+1-m} \binom{d+1-k}{d+1-k-m} B_{d+1-k-m}^{(-m)} S_k(a_{d+1}) \\ c'_{d+1,m} &= \sum_{k=0}^{d+1-m} \binom{d+1-k}{d+1-k-m} B_{d+1-k-m}^{(-m)} S_k(b_{d+1}) \\ a_{d+1} &= -n, \quad a_j = \frac{v+n+j-1}{d}; \quad j=1,\dots,d \\ b_{d+1} &= 0, \quad b_j = \alpha_j - 1; \quad j=1,\dots,d \end{aligned}$$

ve $B_n^{(a)}$ Bernoulli sayılarıdır, $S_0(a_{d+1})=1$ ve $k > 0$ için $S_k(a_{d+1})$ simetrik polinomlardır.

$$S_k(a_{d+1}) = \sum a_{i_k} a_{i_{k-1}} \dots a_{i_1}, a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_k}, k_j = 1, 2, \dots, d+1, j = 1, 2, \dots, k$$

şeklindedir.

Özel olarak $d=1, v=\alpha+\beta+1, \alpha_1=\beta+1$ için Eş. 5.13 den $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomlarının sağladığı diferensiyel denklem bulunabilir. Gerçekten de Eş. 5.13 de d, v, α_1 yerine yazılırsa $y = P_n^v(4x;(\alpha_1))$ polinomunun sağladığı diferensiyel denklem

$$\{(x-1)x D^2 + [(\alpha+\beta+1+1)x - \beta - 1] D - n(1+\alpha+\beta+n)\} y = 0 \quad (5.14)$$

olur. Eş. 5.10 dan

$$\begin{aligned} y = P_n^v(4x;(\alpha_1)) &= \frac{(-1)^n (v)_n}{n!} {}_2F_1(-n, \Delta(1, n+v); \alpha_1; x) \\ &= \frac{(-1)^n (v)_n}{n!} {}_2F_1(-n, (n+v); \alpha_1; x) \\ &= \frac{(-1)^n (1+\alpha+\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, (n+1+\alpha+\beta); \beta+1; x) \end{aligned} \quad (5.15)$$

bulunur. Jacobi polinomlarının

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n (1+\beta)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, 1+\beta+\alpha+n; 1+\beta; \frac{1+x}{2}\right)$$

eşitliği kullanılırsa,

$$y = \frac{(-1)^n (1+\alpha+\beta)_n}{n!} {}_2F_1(-n, 1+\beta+\alpha+n; 1+\beta; x) = \frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\beta)_n} P_n^{(\alpha,\beta)}(2x-1)$$

bulunur. Yani $y = \frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\beta)_n} P_n^{(\alpha,\beta)}(2x-1)$ Jacobi polinomunun sağladığı

diferensiyel denklem

$$\{(x-1)x D^2 + [(\alpha+\beta+2)x - \beta - 1] D - n(1+\alpha+\beta+n)\} y = 0$$

dir. $x \rightarrow \frac{x+1}{2}$ dönüşümü yapıldığında diferensiyel denklem

$$\left\{ \left(\frac{x+1}{2} - 1 \right) \frac{x+1}{2} 4D^2 + \left[(\alpha+\beta+2) \frac{x+1}{2} - \beta - 1 \right] 2D - n(1+\alpha+\beta+n) \right\} y = 0$$

$$\left\{ (x-1)(x+1)D^2 + [(\alpha + \beta + 2)(x+1) - 2\beta - 2]D - n(1 + \alpha + \beta + n) \right\} y = 0$$

$$\left\{ (x-1)(x+1)D^2 + [(\alpha + \beta + 2)x + \alpha - \beta]D - n(1 + \alpha + \beta + n) \right\} y = 0$$

$$(1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + n(1 + \alpha + \beta + n)y = 0$$

olarak bulunur. Diğer taraftan Eş. 5.10 ile tanımlanan Jacobi tipi polinomlar klasik d -ortogonal polinomlardır [12].

$d = 2$ durumunda Jacobi tipi 2-ortogonal polinomlar,

$$\begin{aligned} P_n^v(x; \alpha_1, \alpha_2) &= \frac{(-1)^n (v)_n}{n!} {}_3F_2 \left(-n, \Delta(2, n+v); \alpha_1, \alpha_2; \frac{4x}{27} \right) \\ &= \frac{(-1)^n (v)_n}{n!} {}_3F_2 \left(-n, \frac{n+v}{2}, \frac{n+v+1}{2}; \alpha_1, \alpha_2; \frac{4x}{27} \right) \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu polinomların doğurucu fonksiyonu;

$$\begin{aligned} (1+t)^{-v} {}_3F_2 \left(\Delta(3, v); \alpha_1, \alpha_2; \frac{xt}{(1+t)^3} \right) &= (1+t)^{-v} {}_3F_2 \left(\frac{v}{3}, \frac{v+1}{3}, \frac{v+2}{3}; \alpha_1, \alpha_2; \frac{xt}{(1+t)^3} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} P_n^v(x; (\alpha_d)) t^n \end{aligned}$$

dir ve $y = P_n^v \left(\frac{27}{4} x; \alpha_1, \alpha_2 \right)$ polinomunun sağladığı 3. basamaktan diferensiyel

denklem,

$$\begin{aligned} \left\{ (x-1)x^2D^3 + \left[\left(v + \frac{4+4-1}{2} \right) x - \frac{2(2-1)}{2} - \sum_{j=1}^2 \alpha_j \right] x^1D^2 \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^1 (c_{3,m}x - c'_{3,m}) x^{m-1}D^m - \frac{n(v+n)_2}{4} \right\} y = 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ (x-1)x^2D^3 + \left[\left(v + \frac{7}{2} \right) x - (1 + \alpha_1 + \alpha_2) \right] xD^2 + (c_{3,1}x - c'_{3,1})D - \frac{n(v+n)_2}{4} \right\} y = 0$$

$$\left\{ (x-1)x^2D^3 + \left[\left(v + \frac{7}{2} \right) x - (\alpha_1 + \alpha_2 + 1) \right] xD^2 + \left[\left(-\frac{3}{4}n^2 - \frac{1+2v}{4}n + \frac{v(v+5)}{4} + \frac{3}{2} \right) x \right. \right.$$

$$-\alpha_1\alpha_2]D-\frac{n(v+n)(v+n+1)}{4}\Big\}y=0$$

şeklindedir.

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ HİPERGEOMETRİK d - ORTOGONAL POLİNOMLAR

Genelleştirilmiş hipergeometrik polinom,

$$P_n(x) = {}_{p+1}F_q \left(-n, (a_p); (\alpha_q + 1); x \right) = \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m (a_1)_m \dots (a_p)_m}{(\alpha_1 + 1)_m \dots (\alpha_q + 1)_m} \frac{x^m}{m!} \quad (6.1)$$

şeklinde tanımlanır [14]. Burada $\alpha_j \neq -1, -2, \dots; j = 1, \dots, q$ dur.

$D = \frac{d}{dx}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} D {}_pF_q \left((a_p); (b_q); x \right) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(a_1)_m \dots (a_p)_m}{(b_1)_m \dots (b_q)_m} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+1} \dots (a_p)_{m+1}}{(b_1)_{m+1} \dots (b_q)_{m+1}} \frac{x^m}{m!} \\ &= \frac{a_1 \dots a_p}{b_1 \dots b_q} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a_1 + 1)_m \dots (a_p + 1)_m}{(b_1 + 1)_m \dots (b_q + 1)_m} \frac{x^m}{m!} \\ &= \frac{a_1 \dots a_p}{b_1 \dots b_q} {}_pF_q \left((a_p + 1); (b_q + 1); x \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

eşitliği vardır.

Eş. 6.1 ile verilen hipergeometrik polinom $p = 0, q = d$ için

$$l_n^{(\alpha_d)}(x) = {}_1F_d \left(-n; (\alpha_d + 1); x \right), \alpha_j \neq -1, -2, \dots, j = 1, \dots, d \quad (6.3)$$

şeklini alır.

6.1. Lemma

Eş. 6.1 ile tanımlanan P_n polinomları aşağıdaki diferensiyel rekürans bağıntısını sağlar:

$$\frac{P_{n-k}}{(n-k)!} = (-1)^k (\theta - n)_k \frac{P_n}{n!}. \quad (6.4)$$

Burada $\theta = x \frac{d}{dx}$ dir [15].

6.2. Lemma

Eş. 6.1 ile tanımlanan P_n polinomlarının d -ortogonal olması için gerek ve yeter şart

$$(x(\theta - n) - S(\theta))y = 0$$

şeklindeki diferensiyel denklemi sağlamasıdır [14]. Burada S , $d + 1$. dereceden

$$S(\theta) = \sum_{k=0}^{d+1} s_{n,k} (\theta - n)_k, s_{n,0} \neq 0 \text{ ve } s_{n,d+1} \neq 0$$

formuna sahip bir polinomdur.

6.1. Teorem

Eş. 6.1 ile tanımlanan hipergeometrik polinomların sadece Eş. 6.3 de verilen özel halleri d -ortogonaldır. Dahası bu polinomlar klasiktirler.

İspat

$f(x) = {}_pF_q \left((\sigma_p); (\delta_q); x \right)$ hipergeometrik polinomlar,

$$\left(\theta \prod_{j=1}^q (\theta + \delta_j - 1) - x \prod_{j=1}^p (\theta + \sigma_j) \right) y = 0, \theta = x \frac{d}{dx}$$

diferensiyel denkleminin çözümüdür [16]. O halde P_n polinomları

$$\left(\theta \prod_{j=1}^q (\theta + \alpha_j) - x \prod_{j=1}^p (\theta + a_j) (\theta - n) \right) y = 0 \quad (6.5)$$

diferensiyel denklemini sağlar.

$A(\theta) = \theta \prod_{j=1}^q (\theta + \alpha_j)$ operatörü $A(\theta) = \sum_{k=0}^{q+1} a_{n,k} (\theta - n)_k$ şeklinde yazılabilir. Burada

$a_{n,0} = n \prod_{j=1}^q (n + \alpha_j)$ ve $a_{n,q+1} = 1$ dir. Gerçekten de;

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \sum_{k=0}^{q+1} a_{n,k} (\theta - n)_k \\ &= a_{n,0} + \sum_{k=1}^q a_{n,k} (\theta - n)_k + a_{n,q+1} (\theta - n)_{q+1} \end{aligned}$$

$$= n \prod_{j=1}^q (n + \alpha_j) + \sum_{k=1}^q a_{n,k} (\theta - n)_k + 1(\theta - n)_{q+1}$$

olup, $n = \theta$ alınırsa,

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \theta \prod_{j=1}^q (\theta + \alpha_j) + \sum_{k=1}^q a_{\theta,k} (\theta - \theta)_k + 1(\theta - \theta)_{q+1} \\ &= \theta \prod_{j=1}^q (\theta + \alpha_j) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden Lemma 6.2 den P_n polinomlarının d -ortogonal olması için gerek ve yeter şart $(p, q) = (0, d)$ olmasıdır. Bu özel durumdaki polinomlar ise, Eş.

6.3 ile verilen $l_n^{(\alpha_d)}$, $n = 0, 1, \dots$ polinomlarına karşılık gelirler. Ayrıca Eş. 6.2 den

$$\begin{aligned} D l_n^{(\alpha_d)}(x) &= D_1 F_d(-n; (\alpha_d + 1); x) \\ &= \frac{-n}{(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_d + 1)} {}_1F_d(-n + 1; (\alpha_d + 2); x) \\ &= \frac{-n}{(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_d + 1)} l_{n-1}^{(\alpha_d + 1)}(x) \end{aligned}$$

yani

$$\prod_{i=1}^d (\alpha_i + 1) D l_n^{(\alpha_d)}(x) = -n l_{n-1}^{(\alpha_d + 1)}(x) \quad (6.6)$$

elde edilir. Buradan

$$\prod_{i=1}^d (\alpha_i + 1) D l_{n+1}^{(\alpha_d)}(x) = -(n+1) l_n^{(\alpha_d + 1)}(x)$$

olduğundan $\left\{ \frac{1}{n+1} D l_{n+1}^{(\alpha_d)} \right\}_{n \geq 0}$ dizisi de d -ortogonaldır. Dolayısıyla $l_n^{(\alpha_d)}$, $n = 0, 1, \dots$

klasiktir. $\square$

$d = 2$ durumunda Eş. 6.3 de $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$ alınırsa

$$l_n^{(\alpha, \beta)}(x) = {}_1F_2(-n; \alpha + 1, \beta + 1; x) \quad (6.7)$$

olur ve bu polinomlar Eş. 6.5 den

$$(x(\theta - n) - \theta(\theta + \alpha)(\theta + \beta))y = 0$$

diferensiyel denklemini sağlar. Ayrıca $d = 2$ durumunda Eş. 6.6 dan

$$(1+\alpha)(1+\beta)Dl_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = -(n+1)l_n^{(\alpha+1,\beta+1)}(x), n \geq 0 \quad (6.8)$$

elde edilir. Buradan $\left\{ \frac{1}{n+1} Dl_{n+1}^{(\alpha,\beta)} \right\}_{n \geq 0}$ türev dizisi 2-ortogonaldır ve $\{l_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n \geq 0}$

klasiktir. Ayrıca [17] den $l_n^{(\alpha_d)}, n=0,1,\dots$ polinomları $\omega_{\alpha,\beta}(x)$ ve $(x\omega_{\alpha,\beta}(x))'$ ağırlık fonksiyonları ile 2-ortogonaldır. Burada

$$\omega_{\alpha,\beta}(x) = 2(\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta))^{-1} x^{\frac{\alpha+\beta}{2}} K_{\alpha-\beta}(2\sqrt{x})$$

şeklindedir ve K_ν Macdonald fonksiyonudur. Eş. 6.3 den $l_n^{(\alpha_d)}$ polinomları açık olarak

$$\begin{aligned} l_n^{(\alpha_d)}(x) &= {}_1F_d(-n; (\alpha_d+1); x) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j+1)_k k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-n)(-n+1)\dots(-n+k-1)}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j+1)_k k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(-1)^k}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j+1)_k k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!(-1)^k}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j+1)_k (n-k)! k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j+1)_k} x^k, n \geq 0 \end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca Brafman eşitliğinden

$$e^t {}_pF_q((a_p); (\alpha_q+1); -xt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} {}_{p+1}F_q(-k, (a_p); (\alpha_q+1); x)$$

özellği vardır [18]. Bu durumda $l_n^{(\alpha_d)}$ fonksiyonları için doğurucu fonksiyon bağıntısı,

$$\begin{aligned} e^t {}_0F_d(-;(\alpha_d+1);-xt) &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_1F_d(-k;(\alpha_d+1);x) \frac{t^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} l_k^{(\alpha_d)}(x) \frac{t^k}{k!} \end{aligned} \quad (6.9)$$

şeklinde bulunur. Eşitliğin iki tarafını e^{-t} ile çarpıp düzenlemelerden sonra t^n nin katsayıları eşitlenirse,

$$\begin{aligned} {}_0F_d(-;(\alpha_d+1);-xt) &= e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} l_k^{(\alpha_d)}(x) \frac{t^k}{k!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n x^n}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j+1)_n n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} l_k^{(\alpha_d)}(x) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n x^n}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j+1)_n n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} l_k^{(\alpha_d)}(x) \frac{(-1)^{n-k} t^{n-k}}{(n-k)!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n x^n}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j+1)_n n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^n (-1)^{n-k}}{k! (n-k)!} l_k^{(\alpha_d)}(x) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$x^n = \prod_{j=1}^d (\alpha_j+1)_n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} l_k^{(\alpha_d)}(x)$$

elde edilir.

$d=1$ durumunda Eş. 6.9 daki doğurucu fonksiyon bağıntısı, $\alpha_1 = \alpha$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} e^t {}_0F_1(-;(\alpha+1);-xt) &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_1F_1(-n;(\alpha+1);x) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x) t^n}{\binom{n+\alpha}{n} n!} \end{aligned}$$

olur. Burada ${}_0F_1(-;(\alpha+1);-xt)$ fonksiyonu yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
 e^t \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (xt)^m}{(\alpha+1)_m m!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x) t^n}{\binom{n+\alpha}{n} n!} \\
 \Rightarrow e^t \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (xt)^m \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+m+1) m!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x) t^n}{\frac{(n+\alpha)!}{n! \alpha!}} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{(\alpha+1)_n} t^n
 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Birinci çeşit Bessel fonksiyonunun tanımı kullanılırsa,

$$e^t J_{\alpha}(2\sqrt{xt}) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(xt)^{\frac{\alpha}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{(\alpha+1)_n} t^n$$

eşitliği elde edilir.

$l_n^{(\alpha_d)}$ polinomları için Eş 6.2 den

$$\begin{aligned}
 D l_n^{(\alpha_d)}(x) &= D {}_1F_d(-n;(\alpha_d+1);x) \\
 &= \frac{-n}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j+1)} {}_1F_d(-n+1;(\alpha_d+2);x)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte her iki tarafın x e göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
 D^2 l_n^{(\alpha_d)}(x) &= \frac{-n}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j+1)} D {}_1F_d(-n+1;(\alpha_d+2);x) \\
 &= \frac{-n}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j+1)} D \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-n+1)_m}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j+2)_m} \frac{x^m}{m!} \\
 &= \frac{-n}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j+1)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-n+1)_m x^{m-1}}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j+2)_m (m-1)!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-n}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j + 1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-n+1)_{m+1} x^m}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j + 2)_{m+1} m!} \\
&= \frac{-n(-n+1)}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j + 1)(\alpha_j + 2)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-n+2)_m x^m}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j + 3)_m m!} \\
&= \frac{-n(-n+1)}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j + 1)(\alpha_j + 2)} {}_1F_d(-n+2; \alpha_d + 3; x) \\
&= \frac{(-1)^2 n(n-1)}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j + 1)_2} l_{n-2}^{(\alpha_d+2)}(x) \\
&= \frac{(-1)^2 n!}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j + 1)_2 (n-2)!} l_{n-2}^{(\alpha_d+2)}(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde x e göre k kez türev alınırsa,

$$D^k l_n^{(\alpha_d)}(x) = \frac{(-1)^k n!}{\prod_{j=1}^d (\alpha_j + 1)_k (n-k)!} l_{n-k}^{(\alpha_d+k)}(x)$$

elde edilir.

Şimdi, $l_n^{(\alpha_d)}$ polinomlarının özel durumlarına bakalım.

$d=1$ durumunda $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha > -1$ alınırsa,

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{n!}{(\alpha+1)_n} L_n^{(\alpha)}(x)$$

olur. Yani $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n \geq 0}$ Laguerre polinomlar kümesi de 1-ortogonaldır.

$$(\alpha_d(\alpha)) = \left(\frac{\alpha+1}{d} - 1, \dots, \frac{\alpha+d}{d} - 1 \right), \alpha > -1 \text{ için}$$

$$Z_n^\alpha(x, k) = \frac{(\alpha+1)_{kn}}{n!} {}_1F_k \left(-n; \frac{\alpha+1}{k}, \dots, \frac{\alpha+k}{k}; \left(\frac{x}{k} \right)^k \right)$$

olarak tanımlanan Konhauser polinomu [19] için,

$$\begin{aligned}
Z_n^\alpha \left(d x^{\frac{1}{d}}, d \right) &= \frac{(\alpha+1)_{dn}}{n!} {}_1F_d \left(-n; \frac{\alpha+1}{d}, \dots, \frac{\alpha+d}{d}; \left(\frac{dx^{\frac{1}{d}}}{d} \right)^d \right) \\
&= \frac{(\alpha+1)_{dn}}{n!} {}_1F_d \left(-n; \frac{\alpha+1}{d}, \dots, \frac{\alpha+d}{d}; x \right) \\
&= \frac{(\alpha+1)_{dn}}{n!} l_n^{(\alpha_d(\alpha))}(x)
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Özel olarak

$$\begin{aligned}
Z_n^\alpha(x, 1) &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} {}_1F_1(-n; \alpha+1; x) \\
&= \binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1(-n; \alpha+1; x) = L_n^\alpha(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

7. HERMİTE TİPİ POLİNOMLARIN d - ORTOGONALLIĞI

Hermite polinomlarının açık ifadesi,

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \gamma_{n,2}(k) x^{n-2k}$$

şeklindedir. Burada

$$\gamma_{n,2}(k) = \frac{n!(-1)^k 2^{n-2k}}{k!(n-2k)!} \text{ olup,}$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{n,2}(k+1)}{\gamma_{n,2}(k)} &= \frac{n!(-1)^{k+1} 2^{n-2(k+1)}}{(k+1)!(n-2(k+1))!} \frac{k!(n-2k)!}{n!(-1)^k 2^{n-2k}} \\ &= -\frac{(n-2k)!}{4(k+1)(n-2k-2)!} \\ &= -\frac{(n-2k)(n-2k-1)}{4(k+1)} \\ &= -\frac{(2k-n)(2k-n+1)}{4(k+1)} \\ &= -\frac{(2k-n)_2}{4(k+1)} \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]} \gamma_{n,m}(k) B_{n-mk}(x) \quad (7.1)$$

formundaki $\{P_n\}_{n \geq 0}$ polinomlar kümesini göz önüne alalım. Burada

$$m \geq 2, \{B_k\}_{k \geq 0}, B_0(x) = 1, B_k(x) = \prod_{r=0}^{k-1} (x + \pi(r)), k = 1, 2, \dots \quad (7.2)$$

şeklinde tanımlanan bazdır. Ayrıca burada $\pi, \pi(0) = 0$ olacak şekilde tam

fonksiyon, $\{\gamma_{n,m}(k)\}_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}}$

$$\begin{cases} \frac{\gamma_{n,m}(k+1)}{\gamma_{n,m}(k)} = \frac{(-n+mk)_m}{(k+1)} \frac{N(k)}{c^m D(k)}, & k=0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \\ \gamma_{n,m}(0)=1, \gamma_{n,m}(k)=0, & k \notin \left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \right\} \end{cases} \quad (7.3)$$

şeklinde tanımlanan dizi, D ve N negatif olmayan tamsayı köklerine sahip aralarında asal iki polinomdur ve c kompleks bir sayıdır.

$N=D=1$, $\pi \equiv 0$, $m=2$ durumunda Eş.7.3 den

$$\frac{\gamma_{n,2}(k+1)}{\gamma_{n,2}(k)} = -\frac{(-n+2k)_2}{(k+1)c^2}$$

bulunur. Ayrıca Eş.7.2 den

$$B_k(x) = \prod_{r=0}^{k-1} (x + \pi(r)) = \prod_{r=0}^{k-1} x = x^k$$

olur. Buradan

$B_{n-2k}(x) = x^{n-2k}$ olup bunlar Eş. 7.1 de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \gamma_{n,2}(k) B_{n-2k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \gamma_{n,2}(k) x^{n-2k} \\ &= H_n(x) \end{aligned}$$

Hermite polinomuna dönüşür.

Amaç, Eş. 7.1 ile tanımlanan polinomların d -ortogonalliği için gerek ve yeter şart olan N , D , π , c nin değerlerini bulmaktır.

Eş. 7.1. ile tanımlanan polinomlar kümesi yalnız $N=D=1$ için ve π polinom olmak üzere

$$d = \begin{cases} m \text{ der } \pi, \text{ der } \pi \geq 1 \\ m-1, \pi \equiv 0 \end{cases}$$

durumunda d -ortogonaldır [20].

$d=1$ durumunda $m=2$, $\pi \equiv 0$ olur ve bu sonuç Hermite polinomlarına karşılık gelir.

$$P_n(\lambda(x); c, m, (a_p), (b_q)) = [\lambda_s(x)]_n \times {}_{m+p}F_{sm+q} \left(\Delta(m, -n), (a_p); \Delta(m, 1 - (\lambda_s(x)) - n), (b_q); \left(\frac{(-1)^s}{cm^{s-1}} \right)^m \right) \quad (7.5)$$

$$P_n(x; c, m, (a_p), (b_q)) = x^n {}_{m+p}F_q \left(\Delta(m, -n), (a_p); (b_q); \left(\frac{m}{cx} \right)^m \right) \quad (7.6)$$

hipergeometrik polinomlar verilsin. Burada

$\{\lambda_i(x), i=1, \dots, s\}$ kümesi s -ayrılabilir küme ve $\lambda(x) = \prod_{i=1}^s \lambda_i(x)$, $s \geq 1$,

(a_p) ile $\{a_1, \dots, a_p\}$ kümesi, $[a_r]_p = \prod_{i=1}^r (a_i)_p$,

$\Delta(m, 1 - (\lambda_s(x)) - n)$ ile $\Delta(m, 1 - \lambda_1(x) - n), \dots, \Delta(m, 1 - \lambda_s(x) - n)$ sıralısı gösterilmektedir.

7.1. Tanım

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$, $s \geq 1$ olmak üzere derecesi 1 olan s tane polinomdan oluşan küme olsun.

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ kümesinin s -ayrılabilir küme olarak adlandırılması için gerek ve yeter şart

$$\prod_{i=1}^s (\lambda_i(x) + y) = \left(\prod_{i=1}^s \lambda_i(x) \right) + \pi(y)$$

olacak şekilde π polinomunun var olmasıdır. Bu durumda boş kümeye 0 - ayrılabilir küme denir. Ayrıca

$$\pi(y) = \prod_{i=1}^s (y + \lambda_i(0)) - \prod_{i=1}^s \lambda_i(0)$$

olduğu açıktır. Buradan π , s . dereceden $\pi(0) = 0$ olan monik polinomdur.

7.1. Charlier Tipi d - Ortogonal Polinomlar

$$e^{H_d(t)}(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (7.7)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısına sahip d -ortogonal $\{P_n\}_{n \geq 0}$ polinomlar kümesi I. tip Charlier polinomları olarak adlandırılır.

$$P_n(\lambda(x); c, (a_k), (b_s)) = {}_{1+r+k}F_s \left(-n, (\lambda_r(x)), (a_k); (b_s); \frac{1}{c} \right)$$

ile verilen $\{P_n\}_{n \geq 0}$ polinomları $s=0, r=1, k=0$ ve $\lambda_1(x) = ax+b$ olmak üzere, II. tip Charlier polinomları olarak adlandırılır.

7.1.1. Teorem

Eş. 7.5. formundaki polinomlar kümesi yalnızca $p=q=0$ ve $sm=d$ durumunda d -ortogonal polinomlar kümesi olur.

İspat

Eş. 7.5, Eş. 2.7 ve Eş. 2.9 den

$$\begin{aligned} P_n(\lambda(x); c, m, (a_p), (b_q)) &= [\lambda_s(x)]_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^m \left(\frac{-n+j-1}{m} \right)_k [a_p]_k}{\prod_{j=1}^m \left(\frac{1-(\lambda_s(x)-n)+j-1}{m} \right)_k [b_q]_k k!} \left(\frac{(-1)^s}{cm^{s-1}} \right)^{mk} \\ &= [\lambda_s(x)]_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^{mk} \prod_{j=0}^{m-1} \left(\frac{-n+j}{m} \right)_k [a_p]_k}{\prod_{j=0}^{m-1} m^{mks} \left(\frac{1-(\lambda_s(x)-n)+j}{m} \right)_k [b_q]_k k!} \left(\frac{(-1)^s}{c} \right)^{mk} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_{mk} [\lambda_s(x)]_n [a_p]_k}{[1-\lambda_s(x)-n]_{mk} [b_q]_k k!} \left(\frac{(-1)^s}{c} \right)^{mk} \\ &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m} \right]} \frac{(-n)_{mk} [a_p]_k}{[b_q]_k k!} \frac{(\lambda_1(x))_n (-1)^{mk}}{(1-(\lambda_1(x))-n)_{mk}} \cdots \frac{(\lambda_s(x))_n (-1)^{mk}}{(1-(\lambda_s(x))-n)_{mk}} \left(\frac{1}{c} \right)^{mk} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor} \frac{(-n)_{mk} [a_p]_k}{[b_q]_k k!} \frac{(\lambda_1(x))_{n-mk} \dots (\lambda_s(x))_{n-mk}}{c^{mk}} \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor} \frac{(-n)_{mk} [a_p]_k}{[b_q]_k k!} \frac{[\lambda_s(x)]_{n-mk}}{c^{mk}} \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor} \frac{(-n)_{mk} [a_p]_k}{[b_q]_k k! c^{mk}} \prod_{r=1}^s (\lambda_r(x))_{n-mk} \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor} \frac{(-n)_{mk} [a_p]_k}{[b_q]_k k! c^{mk}} \prod_{r=1}^s \lambda_r(x) (\lambda_r(x)+1) \dots (\lambda_r(x)+n-mk-1) \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor} \frac{(-n)_{mk} [a_p]_k}{[b_q]_k k! c^{mk}} \lambda_1(x) (\lambda_1(x)+1) \dots (\lambda_1(x)+n-mk-1) \dots \\
&\quad \times \lambda_s(x) (\lambda_s(x)+1) \dots (\lambda_s(x)+n-mk-1) \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor} \frac{(-n)_{mk} [a_p]_k}{[b_q]_k k! c^{mk}} \lambda_1(x) (\lambda_1(x)+1) \dots (\lambda_1(x)+n-mk-1) \dots \\
&\quad \times \lambda_s(x) (\lambda_s(x)+1) \dots (\lambda_s(x)+n-mk-1) \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor} \frac{(-n)_{mk} [a_p]_k}{[b_q]_k k! c^{mk}} \prod_{i=1}^s (\lambda_i(x)+0) \prod_{i=1}^s (\lambda_i(x)+1) \dots \prod_{i=1}^s (\lambda_i(x)+n-mk-1) \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor} \frac{(-n)_{mk} [a_p]_k}{[b_q]_k k! c^{mk}} \left(\left(\prod_{i=1}^s \lambda_i(x) \right) + \pi(0) \right) \left(\left(\prod_{i=1}^s \lambda_i(x) \right) + \pi(1) \right) \dots \left(\left(\prod_{i=1}^s \lambda_i(x) \right) + \pi(n-mk-1) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor} \frac{(-n)_{mk} [a_p]_k}{[b_q]_k k! c^{mk}} (\lambda(x) + \pi(0)) (\lambda(x) + \pi(1)) \dots (\lambda(x) + \pi(n-mk-1)) \\
&= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor} \frac{(-n)_{mk} [a_p]_k}{[b_q]_k k! c^{mk}} \prod_{r=0}^{n-mk-1} (\lambda(x) + \pi(r))
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 7.1 ve Eş. 7.2 ile karşılaştırılırsa,

$$\lambda(x) = x \text{ ve } \gamma_{n,m}(k) = \frac{(-n)_{mk} [a_p]_k}{[b_q]_k k! c^{mk}}$$

olup,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{n,m}(k+1)}{\gamma_{n,m}(k)} &= \frac{(-n)_{m(k+1)} [a_p]_{k+1}}{c^{(k+1)m} (k+1)! [b_q]_{k+1}} \frac{c^{km} k! [b_q]_k}{(-n)_{mk} [a_p]_k} \\ &= \frac{(-n)_{mk} (-n+mk)_m [a_p]_k [a_p+k]_1}{c^m (k+1) [b_q]_k [b_q+k]_1} \frac{[b_q]_k}{(-n)_{mk} [a_p]_k} \\ &= \frac{(-n+mk)_m [a_p+k]}{c^m (k+1) [b_q+k]} \end{aligned}$$

bulunur. Eş. 7.3 den

$$N(k) = \prod_{j=1}^p (a_j + k), \quad D(k) = \prod_{j=1}^q (b_j + k) \text{ dir. Teorem 7.1. den } \{P_n\}_{n \geq 0} \text{ polinomlarının}$$

d -ortogonal olması için gerek ve yeter şart $N=D=1$ yani $p=q=0$ ve $d\pi=s$ olduğundan $d=ms$ olmasıdır. $\square$

7.1.1. Tanım

$$P_n(\lambda(x); c, m) = [\lambda_s(x)]_n {}_m F_{sm} \left(\Delta(m, -n); \Delta(m, 1 - (\lambda_s(x)) - n); \left(\frac{(-1)^s}{cm^{s-1}} \right)^m \right) \quad (7.8)$$

polinomlar kümesi $s \neq 1$ için Teorem 7.1.1 den d - ortogonal polinomlar kümesidir.

Bu polinomlar III. tip Charlier polinomları olarak adlandırılır.

$s=1, \alpha = \frac{-1}{c^m}$ ve $Q_n(x; \alpha, m) = (-1)^n P_n(-x; c, m)$ olmak üzere Eş.7.5 formundaki d -

ortogonal polinomlar kümesi,

$$\begin{aligned} Q_n(x; \alpha, d) &= (-1)^n P_n(-x; c, d) \\ &= (-1)^n [-x]_n {}_d F_d \left(\Delta(d, -n); \Delta(d, 1 + x - n); \left(\frac{(-1)}{cm^0} \right)^d \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^n (-x)(-x+1)\dots(-x+n-1) {}_dF_d \left(\Delta(d, -n); \Delta(d, 1+x-n); \frac{(-1)^d}{\frac{-1}{\alpha}} \right) \\
&= (x)(x-1)\dots(x-n+1) {}_dF_d \left(\Delta(d, -n); \Delta(d, 1+x-n); \alpha(-1)^{d-1} \right) \\
&= x^{[n]} {}_dF_d \left(\Delta(d, -n); \Delta(d, 1+x-n); \alpha(-1)^{d-1} \right) \tag{7.9}
\end{aligned}$$

dir. Burada $x^{[n]} = x(x-1)\dots(x-i+1)$ dir. Eş. 7.9 dan, $s=1$ olmak üzere Eş.7.5 ile tanımlanan 2 -ortogonal polinomlar,

$$\begin{aligned}
Q_n(x; \alpha, 2) &= x^{[n]} {}_2F_2 \left(\Delta(2, -n); \Delta(2, 1+x-n); \alpha(-1)^1 \right) \\
&= x^{[n]} {}_2F_2 \left(\frac{-n}{2}, \frac{-n+1}{2}; \frac{1+x-n}{2}, \frac{2+x-n}{3}; -\alpha \right) \tag{7.10}
\end{aligned}$$

dir.

$4 = sm$ olduğunda $(s, m) = (1, 4)$ veya $(s, m) = (2, 2)$ olabileceğinden Eş.7.5 ile tanımlanan 4-ortogonal polinomlar,

$$\begin{aligned}
P_n(x; c, 4) &= (x)_n {}_4F_4 \left(\Delta(4, -n); \Delta(4, 1-x-n); \left(\frac{(-1)^1}{c4^0} \right)^4 \right) \\
&= (x)_n {}_4F_4 \left(\frac{-n}{4}, \frac{-n+1}{4}, \frac{-n+2}{4}, \frac{-n+3}{4}; \frac{1-x-n}{4}, \frac{2-x-n}{4}, \frac{3-x-n}{4}, \frac{4-x-n}{4}; \frac{1}{c^4} \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
P_n(x(b-x); c, 2) &= (x)_n (b-x)_n \\
&\quad \times {}_2F_4 \left(\Delta(2, -n); \Delta(2, 1-x-n), \Delta(2, 1-(b-x)-n); \left(\frac{(-1)^2}{c2^1} \right)^2 \right) \\
&= (x)_n (b-x)_n {}_2F_4 \left(\frac{-n}{2}, \frac{-n+1}{2}; \frac{1-x-n}{2}, \frac{2-x-n}{2}; \frac{1-b+x-n}{2}, \frac{2-b+x-n}{2}; \frac{1}{4c^4} \right)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

7.2. Genelleştirilmiş Hermite Polinomları

Hermite polinomlarının Gould- Hopper genellemesi,

$$g_n^{d+1}(x; h) = x^n {}_{d+1}F_0 \left(\Delta(d+1, -n); -; h \left(\frac{-(d+1)}{x} \right)^{d+1} \right) \quad (7.11)$$

şeklindedir.

7.2.1. Teorem

Eş. 7.6 formundaki d -ortogonal polinomlar $m = d + 1$ için Gould- Hopper polinomlarını verir.

Teorem 7.2.1 in ispatı Teorem 7.1.1 dekine benzer olarak yapılır.

Teorem 7.2.1 den Eş. 7.6 formundaki 2 -ortogonal polinomlar,

$$\begin{aligned} P_n(x; c, 3) &= x^n {}_3F_0 \left(\Delta(3, -n); -; \left(\frac{3}{cx} \right)^3 \right) \\ &= x^n {}_3F_0 \left(\frac{-n}{3}, \frac{-n+1}{3}, \frac{-n+2}{3}; -; \frac{27}{(cx)^3} \right) \end{aligned} \quad (7.12)$$

olarak yazılabilir.

7.3. Doğurucu Fonksiyon

Eş. 7.8 ile tanımlanan III. tip Charlier polinomları için bir doğurucu fonksiyon bağıntısı

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\lambda(x); c, m) \frac{t^n}{n!} = e^{\left(\frac{-t}{c} \right)^m} {}_sF_o \left((\lambda_s(x)); -; t \right) \quad (7.13)$$

şeklindedir. Gerçekten,

$$P_n(\lambda(x); c, m) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m} \right]} \frac{(-n)_{km}}{c^{km} k!} [\lambda_s(x)]_{n-km}$$

olup bu eşitliğin her iki tarafı $\frac{t^n}{n!}$ ile çarpılır ve $n=0$ dan ∞ a toplam alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\lambda(x); c, m) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_{km}}{c^{km} k!} [\lambda_s(x)]_{n-km} \frac{t^n}{n!}$$

olur. Burada eşitliğin sağ tarafında $n \rightarrow n+mk$ yazılıp sonra

$(-n-mk)_{mk} = (-1)^{mk} \frac{(n+mk)!}{n!}$ bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\lambda(x); c, m) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n-mk)_{km}}{c^{km} k!} [\lambda_s(x)]_n \frac{t^{n+mk}}{(n+mk)!} \\ &= \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{mk} (n+mk)!}{c^{km} k! n!} [\lambda_s(x)]_n \frac{t^{n+mk}}{(n+mk)!} \\ &= \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{t^{n+mk}}{(-c)^{km} k! n!} [\lambda_s(x)]_n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{mk}}{(-c)^{km} k!} \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda_s(x)]_n \frac{t^n}{n!} \\ &= e^{\left(\frac{-t}{c}\right)^m} {}_sF_o\left((\lambda_s(x)); -; t\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

7.4. Limit İlişkisi

$C_n^{(a)}(x)$ Charlier polinomları ve $H_n(x)$ Hermite polinomları arasında

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} (2\xi)^{\frac{1}{2}n} C_n^{(\xi)}\left((2\xi)^{\frac{1}{2}}x + \xi\right) = (-1)^n H_n(x) \quad (7.14)$$

şeklinde bir limit bağıntısı vardır [21]. Ayrıca Teorem 7.1.1 in ispatında görüldüğü gibi

$$P_n(x; c, m) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]} \frac{(-n)_{mk}}{c^{km} k!} B_{n-mk}(x) \quad (7.15)$$

olup buradan,

$$\begin{aligned}
\xi^{-n} P_n \left(\xi x; \frac{c}{\xi}, m \right) &= \xi^{-n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m} \right]} \frac{(-n)_{mk}}{\left(\frac{c}{\xi} \right)^{km} k!} B_{n-mk}(\xi x) \\
&= \xi^{-n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m} \right]} \frac{(-n)_{mk}}{\left(\frac{c}{\xi} \right)^{km} k!} \prod_{r=0}^{n-mk-1} (\xi x + \pi(r)) \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m} \right]} \frac{(-n)_{mk}}{c^{km} k!} \xi^{-n-km} \prod_{r=0}^{n-mk-1} (\xi x + \pi(r)) \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m} \right]} \frac{(-n)_{mk}}{c^{km} k!} \prod_{r=0}^{n-mk-1} \left(x + \frac{\pi(r)}{\xi} \right), \xi \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

olur.

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \prod_{r=0}^{n-mk-1} \left(x + \frac{\pi(r)}{\xi} \right) = x^{n-mk}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^{-n} P_n \left(\xi x; \frac{c}{\xi}, m \right) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m} \right]} \frac{(-n)_{mk}}{c^{km} k!} x^{n-mk} \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m} \right]} \frac{m^{mk} \prod_{j=0}^{m-1} \left(\frac{-n+j}{m} \right)_k}{c^{km} k!} x^{n-mk} \\
&= x^n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{m} \right]} \frac{\prod_{j=0}^{m-1} \left(\frac{-n+j}{m} \right)_k}{k!} \left(\frac{m}{cx} \right)^{mk} \\
&= x^n {}_mF_0 \left(\Delta(m, -n); -; \left(\frac{m}{cx} \right)^m \right) \\
&= x^n {}_mF_0 \left(\Delta(m, -n); -; \left(\frac{-1}{c} \right)^m \left(\frac{-m}{x} \right)^m \right) \\
&= g_n^m \left(x; \left(\frac{-1}{c} \right)^m \right)
\end{aligned} \tag{7.16}$$

bulunur. Buradan da görüldüğü gibi $\{g_n^m(.,h)\}_{n \geq 0}$ Gould- Hopper polinomları ile Eş. 7.15 ile verilen $\{P_n(.,c,m)\}_{n \geq 0}$ polinomları arasında da bir limit bağıntısı vardır. Eş.7.5 de $\lambda(x) = \sum_{i=0}^s A_i x^i$ alınırsa $\xi \rightarrow \infty$ için $\lambda(\xi x)$ ile $A_s(\xi x)^s$ birbirine denk olur. Buradan ve Eş. 7.16 dan

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^{-sn} P_n \left(\lambda(\xi x); \frac{c}{\xi^s}, m \right) &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} (\xi^s)^{-n} P_n \left(\xi^s (A_s x^s); \frac{c}{\xi^s}, m \right) \\ &= g_n^m \left(A_s x^s; \left(\frac{-1}{c} \right)^m \right) \end{aligned} \quad (7.17)$$

elde edilir. Eş. 7.17 bağıntısı da Gould- Hopper polinomları ile Eş. 7.8 ile verilen III. tip Charlier polinomları arasındaki limit durumudur.

7.4.1. Teorem

$\{g_n^{d+1}(x;h)\}_{n \geq 0}$ Gould- Hopper polinomlar kümesi $u = {}^t(u_0, u_1, \dots, u_{d-1})$ fonksiyonel vektörüne göre aşağıdaki iç çarpımla d -ortogonaldır [20].

$$\text{Eğer } n < r \text{ ise } \langle u_r, x^n \rangle = 0$$

ve $n \geq r$ için

$$\langle u_r, x^n \rangle = \delta_{r,i} \int_0^\infty \xi^n \psi_{r,d}(\xi) d\xi, \quad (7.18)$$

burada $n = i + (d+1)k$, $k \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, \dots, d$, $r = 0, 1, \dots, d-1$ ve

$$\psi_{r,d}(\xi) = \frac{(d+1)}{\prod_{j=1}^{d+1} \Gamma\left(\frac{r+j}{d+1}\right)} \xi^{-(r+1)} G_{1,d+1}^{d+1,0} \left(\frac{-\xi^{d+1}}{h(d+1)^{d+1}} \middle| \begin{matrix} 1 \\ \frac{r+1}{d+1}, \dots, \frac{r+(d+1)}{d+1} \end{matrix} \right)$$

dir. $d=1$, $h=-1$ durumunda Eş. 7.11 ile verilen Gould- Hopper polinomları

$$\begin{aligned} g_n^2(x; -1) &= x^n {}_2F_0 \left(\Delta(2, -n); -; -\left(\frac{-2}{x}\right)^2 \right) \\ &= x^n {}_2F_0 \left(\frac{-n}{2}, \frac{-n+1}{2}; -; -\frac{4}{x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-n}{2}\right)_k \left(\frac{-n+1}{2}\right)_k}{k!} \left(\frac{-4}{x^2}\right)^k \\
&= x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^1 \left(\frac{-n+j}{2}\right)_k 2^{2k}}{2^{2k} k!} \left(\frac{-4}{x^2}\right)^k \\
&= x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_{2k} (-1)^k 2^{2k}}{2^{2k} k! x^{2k}} \\
&= x^n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{2k} n! (-1)^k}{(n-2k)! k! x^{2k}} \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n! (-1)^k}{(n-2k)! k!} x^{n-2k} \\
&= H_n \left(\frac{x}{2} \right)
\end{aligned}$$

şekline dönüşür. Teorem 7.4.1 den $d=1$ durumunda $\left\{ H_n \left(\frac{x}{2} \right) \right\}_{n \geq 0}$ pominomlar

kümesi için ağırlık fonksiyonu $-\infty < \xi < +\infty$ aralığında,

$$\begin{aligned}
\psi_{0,1}(\xi) &= \frac{2}{\prod_{j=1}^2 \Gamma\left(\frac{j}{2}\right)} \xi^{-1} G_{1,2}^{2,0} \left(\frac{\xi^2}{4} \middle| \frac{1}{2}, 1 \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \xi^{-1} G_{0,1}^{1,0} \left(\frac{\xi^2}{4} \middle| \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\xi^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} G_{0,1}^{1,0} \left(\frac{\xi^2}{4} \middle| \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} G_{0,1}^{1,0} \left(\frac{\xi^2}{4} \middle| 0 \right)
\end{aligned}$$

şeklindedir. [22] de verilen

$$G_{p,q+1}^{1,p} \left(-z \left| \begin{matrix} 1-\alpha_1, \dots, 1-\alpha_p \\ 0, 1-\beta_1, \dots, 1-\beta_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(\alpha_j)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(\beta_j)} {}_pF_q \left((\alpha_p); (\beta_q); z \right) \quad (7.19)$$

bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \psi_{0,1}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} {}_0F_0 \left(-; -; \frac{-\xi^2}{4} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\xi^2}{4} \right)^k \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{-\xi^2}{4}} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $\left\{ H_n \left(\frac{x}{2} \right) \right\}_{n \geq 0}$ polinomları için $d=1$ durumunda iç çarpım ise

$$\langle u_0, x^n \rangle = \delta_{0,i} \int_0^{\infty} \xi^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{-\xi^2}{4}} d\xi$$

şeklindedir. Bu eşitlikte $\xi \rightarrow 2t$ dönüşümü yapılırsa,

$$\langle u_0, x^n \rangle = \delta_{0,i} 2 \int_0^{\infty} \xi^n \frac{2^n t^n}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt$$

bulunur. Sonuç olarak $\left\{ H_n \left(\frac{x}{2} \right) \right\}_{n \geq 0}$ polinomları,

$$\left\langle u_0, \left(\frac{x}{2} \right)^n \right\rangle = \delta_{0,i} 2 \int_0^{\infty} \xi^n \frac{t^n}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt$$

iç çarpımıyla 1-ortogonaldır.

7.4.2. Teorem

$$l_n^{(\alpha_d)}(x) = l_n^{(\alpha_1, \dots, \alpha_d)}(x) = {}_1F_d(-n; (\alpha_d + 1); x) \quad (7.20)$$

ile tanımlanan $\left\{ l_n^{(\alpha_d)}(x) \right\}_{n \geq 0}$ Laguerre tipi polinomlar $u = {}^t(u_0, u_1, \dots, u_{d-1})$ d -boyutlu

fonksiyonel vektörüne göre aşağıdaki iç çarpımla d -ortogonaldır [20].

Eğer $n < r$ ise $\langle u_r, x^n \rangle = 0$

ve $n \geq r$ için

$$\langle u_r, x^n \rangle = \int_0^\infty \xi^n \phi_{r,d}(\xi) d\xi. \quad (7.21)$$

Burada $r = 0, 1, \dots, d-1$ ve

$$\phi_{r,d}(\xi) = \frac{(-1)^r}{r! \prod_{j=1}^d \Gamma(1 + \alpha_j)} G_{1,d+1}^{d+1,0} \left(\xi \middle| \begin{matrix} -r \\ \alpha_1, \dots, \alpha_d, 0 \end{matrix} \right)$$

dir. $d=1$ durumunda $\left\{ \frac{n!}{(\alpha+1)_n} L_n^\alpha(x) \right\}_{n \geq 0}$ Laguerre polinomlar kümesi elde edilir.

Ağırlık fonksiyonu $\alpha > -1$ için $0 \leq \xi < +\infty$ aralığında

$$\begin{aligned} \phi_{0,1}(\xi) &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} G_{1,2}^{2,0} \left(\xi \middle| \begin{matrix} 0 \\ \alpha, 0 \end{matrix} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} G_{0,1}^{1,0} \left(\xi \middle| \begin{matrix} - \\ \alpha \end{matrix} \right) \\ &= \frac{\xi^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} G_{0,1}^{1,0} \left(\xi \middle| \begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \right) \\ &= \frac{\xi^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} {}_0F_0(-; -; -\xi) \\ &= \frac{\xi^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^k}{k!} \\ &= \frac{\xi^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} e^{-\xi} \end{aligned}$$

şeklindedir.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada d -ortogonalite ve bazı uygulamaları incelenmiştir. Polinomlar arasında genel bir sınıf olan Humbert polinomlarının d -ortogonalite gösterilmiş ve buna bağlı farklı özelliklerine de değinilmiştir. Özel tipten bazı polinomların Humbert polinomları ile ilişkileri verilerek, bunların da d -ortogonalite incelenmiştir. Son olarak da bazı klasik ortogonal polinomların d -ortogonalite ve bunların özel durumları verilmiştir.

Bu tezde çalışılan konuların ışığı altında, gelecekte ortogonalite bilinmeyen polinomların d -ortogonalite incelenebilir ve bunların doğurucu fonksiyon, rekürans bağıntısı gibi farklı özellikleri de elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Van Iseghem, J., "Vector orthogonal relations. Vector QD- algorithm", **J. Comput. Appl. Math.** 19: 141-150 (1987).
2. Maroni, P., "Semi-classical character and finite-type relations between polynomial sequences", **Appl. Numer. Math.** 31: 295-330 (1999).
3. Douak, K., Maroni, P., "Les polynomes orthogonaux "classiques" de dimension deux", **Analysis** 12: 71-107 (1992).
4. Maroni, P., "L'orthogonalite et les recurrences de polynomes d'ordre superieur a deux", **Ann. Fac. Sci. Toulouse** 10: 105-139 (1989).
5. Ben Cheikh, Y., Douak, K., "On the classical d - orthogonal polynomials defined by certain generating functions I", **Bull. Belg. Math. Soc.** 7: 107-124 (2000).
6. Ben Cheikh, Y., Chaggara, H., "Connection coefficients between Boas- Buck polynomial sets", **J. Math. Anal. Appl.** 319: 665-689 (2006).
7. Ben Cheikh, Y., Douak, K., "On the classical d - orthogonal polynomials defined by certain generating functions II", **Bull. Belg. Math. Soc.** 8: 591-605 (2001).
8. Maroni, P., "Two- dimensional orthogonal polynomials, their associated sets and the co- recursive sets", **Numer. Algorithms** 3: 299-312 (1992).
9. Luke, Y. L., "The Special Functions and Their Approximations, vol. I", **Academic Press**, New York, (1969).
10. Maroni, P., Humbert, "Some extentions of Pincherle's polynomials", **Proc. Edinb. Math. Soc.** 39: 21-24 (1920).
11. Gould, H. W., "Inverse series relations and other expansions involving Humbert polynomials", **Duke Math. J.** 32: 697-711 (1965).
12. Lamiri, I., Ouni, A., " d - Orthogonality of Humbert and Jacobi type polynomials", **J. Math. Anal. Appl.** 341: 24-51 (2008).
13. Jain, R. N., "A generalized hypergeometric polynomials", **Ann. Polon. Math.** 19: 177-184 (1967).
14. Ben Cheikh, Y., Douak, K., "A generalized hypergeometric d -orthogonal polynomial set", **C. R. Acad. Sci. t.** 331: 349-354 (2000).

15. Rainville, E. D., "Certain generating functions and associated polynomials", ***Amer. Math. Monthly*** 52: 239-250 (1945).
16. Rainville, E. D., "Special Functions", ***Macmillan Company***, New York, (1960).
17. Ben Cheikh, Y., Douak, K., "On two- orthogonal polynomials related to Betaman's $J_n^{u,v}$ - function", ***Meth. and Appl. Anal.*** (2001).
18. Brafman, F., "Generating functions of Jacobi and related polynomials", ***Proc. Amer. Math. Soc.*** 2: 942-949 (1951).
19. Toscano, L., "Una generalizzazione dei polinomi di Laguerre", ***Giorn. Mat. Battaglini*** (5) 4 (84): 123-138 (1956).
20. Lamiri, I., Ouni, A., " d - Orthogonality of Hermite type polynomials", ***App. Math and Computation*** 202: 24-43 (2008).
21. Koekoek, R., Swarrtow, R. F., "The Askey- Scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q - Analogue", no. 98-17, ***Faculty of the Technical Matematics and Informatics***, (1998).
22. Srivastava, H. M., Manocha, H. L., "A Treatise on Generating Functions", ***John Wiley and Sons***, New York , (1984).
23. Altın, A., "Uygulamalı Matematik", ***Gazi Kitabevi***, Ankara 131-133, 273-274 (2011).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ORUCOVA, Gülşen
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 20.10.1988 BAKÜ
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (553) 422 05 81
e-mail : gorucova@konya.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi / Matematik Bölümü	2010
Lise	Sivas Fen Lisesi	2006

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2011-	Konya Necmettin Erbakan Üniversitesi	Arş. Gör.

Yabancı Dil

İngilizce