

**DALGAKILAVUZUNDA YAYILAN ELEKTROMANYETİK DALGANIN
DALGACIK DÖNÜŞÜMÜ İLE MODELLENMESİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Sitem FİDAN

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Mayıs 2006**

ÖZET

Bu tez çalışmasında bir dalgakılavuzu içinde yayılan elektromanyetik dalgalar Dalgacık Dönüşümü ile modellenmiştir. Elektromanyetik dalgalar çeşitli tekniklerle modellenebilmektedirler. En temel modelleme tekniklerinden biri olan Fourier Dönüşümü sadece frekans bilgisini içerir. Ancak, durağan olmayan dalgaların analizi için frekans bilgisi kadar zaman bilgisi de gereklidir. Bunun için geliştirilmiş olan tekniklerden biri olan Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü (KZFD) hem zaman hem de frekans bilgisini içermektedir. Bu yöntemde analiz sabit uzunlukta bir pencerenin kaydırılmasıyla gerçekleştirilmekte ancak pencerenin sabit uzunluğundan dolayı çoğu zaman istenilen frekans çözünürlüğü elde edilememektedir. Bu tür sorunlardan kurtulmak için Dalgacık Dönüşümü geliştirilmiştir. Dalgacık Dönüşümü, modellenen elektromanyetik dalgaların incelenmesini kolaylaştırır, zaman kazandırır, ve bellek kazancı sağlar. Dalgacık dönüşümünün esnek yapısı analiz sonuçlarının optimizasyonu için çeşitli seçenekler sunmaktadır. Bu çalışmada, bir dalgakılavuzunun başına ve sonuna, sırasıyla, bir dalgacık dönüşümü filtresi ve ters dalgacık dönüşümü filtresi yerleştirilmiştir. Elektromanyetik dalgaların dalgakılavuzu içindeki davranışları Zaman Alanında Sonlu Farklar (ZASF) yöntemi kullanılarak simüle edilmiştir. Dalgakılavuzu

içerisinde uyarılan modların grafiksel gösterimi için Matlab yazılımı kullanılmıştır. Farklı dalgakılavuzu modları ve frekansları için çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Farklı dalgacık türleri için elde edilen sonuçların karşılaştırılmasıyla optimal bir çözümün elde edilebileceği gösterilmiştir.

Bilim Kodu	: 905.1.034
Anahtar Kelime	: Dalgacık dönüşümü, Dalga kılavuzu, Elektromanyetik dalga, Matlab
Sayfa Adedi	: 92
Tez Yöneticisi	: Yrd. Doç. Dr. Erkan AFACAN

WAVELET TRANSFORM MODELING OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A WAVEGUIDE

(M.Sc. Thesis)

Sitem FİDAN

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

April 2006

ABSTRACT

In this thesis, electromagnetic waves radiating in a waveguide are modeled by Wavelet Transform. Electromagnetic waves can be modeled by using several techniques. One of the basic techniques, Fourier Transform, includes only the frequency information of the signal. On the other hand, for non-stationary signals time information is as necessary as frequency information. One of the developed techniques for this purpose, Short Time Fourier Transform (STFT) can give both frequency and time information. In this method analysis is realized with the shift of a constant length window and since the length of the window is constant the desired frequency resolution cannot be obtained generally. To overcome these problems Wavelet Transform is developed. Wavelet Transform facilitates the investigation of the modeled electromagnetic waves, saves time and memory storage. The flexible structure of wavelet transform offers many options for the optimization of analysis results. In this work, a transform filter and an inverse transform filter is applied to the entry and end of the waveguide, respectively. The behaviour of electromagnetic waves in the waveguide is simulated by using Finite Differences Time Domain (FDTD) method. For the graphical visualization of the modes excited in the waveguide Matlab software is used. For different waveguide modes and frequencies

several results are obtained. It is shown that an optimal analysis can be obtained by comparing the results of different wavelet types.

Science Code	: 905.1.034
Key words	:Wavelet transform, Waveguide, Electromagnetic wave, Matlab
Page Number	: 92
Adviser	: Yrd. Doç. Dr. Erkan AFACAN

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren değerli akademisyen Yrd. Doç. Dr. Erkan AFACAN'a, yüksek lisans eğitimim süresince zaman konusunda bana anlayış gösteren Güney İletişim Bilgi Teknolojileri Tic. Ltd. Şti. değerli yöneticilerine, bilgi ve deneyim birikimi ile bana yol gösteren nişanlım Volkan ÇALIŞKAN'a ve manevi desteği ile beni hiç bir zaman yalnız bırakmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR	xiv
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BAĞINTILAR	4
2.1. Maxwell Eşitlikleri	4
2.1.1 Bünye eşitlikleri	5
2.1.2. Sınır koşulları	10
2.1.3. Maxwell eşitliklerinin fazör formu	12
2.2. Dalga Kılavuzları	14
2.2.1. Enine boyuna ayrışım	15
2.2.2. TEM, TE ve TM modları	21
2.2.3. Dikdörtgen dalga kılavuzları	24
2.2.4. Yüksek seviye TE ve TM modları	27
3. ZAMAN ALANINDA SONLU FARKLAR – ZASF (FINITE DIFFERENCES TIME DOMAIN – fdtd)	31
3.1. ZASF Yönteminin Çalışma Şekli	31
3.2. ZASF Yönteminin Zayıf Noktaları	34
4. SPEKTRUM ANALİZ YÖNTEMLERİ	36
4.1. Fourier Analizi	36

	Sayfa
4.1.1. Fourier serileri.....	37
4.1.2. Fourier dönüşümü	38
5. DALGACIK ANALİZİ.....	43
5.1. Dalgacıkların Özellikleri.....	43
5.2. Dalgacık Dönüşümleri	44
5.2.1. Sürekli dalgacık dönüşümü (Continuous wavelet transform – CWT)	44
5.2.2. Ayırık dalgacık dönüşümü	46
5.3. Bazı Temel Dalgacık Çeşitleri	55
5.3.1. Haar dalgacığı	56
5.3.2. Meksika şapkası (Mexican hat) dalgacığı.....	57
5.3.3. Littlewood – Paley dalgacığı.....	57
5.3.4. Morlet dalgacığı	58
5.3.5. Daubechies dalgacığı	59
5.3.6. Biortogonal dalgacıklar.....	60
5.3.7. Coiflet dalgacıkları.....	60
5.3.8. Simetrili (symlet) dalgacıklar.....	61
5.3.9. Meyer dalgacığı.....	62
6. DİELEKTRİK DALGA KILAVUZLARI.....	63
6.1. Dielektrik Dalga Kılavuzlarının Teorisi	63
6.1.1. TEM düzlem dalgası	69
6.2. Yapılan Simülasyon Çalışması	76
6.2.1. Filtreler olmadan dalga kılavuzunda elektromanyetik dalga yayılımı	77

	Sayfa
6.2.2. Filtrelerle dalga kılavuzu modellemesi	80
7. SONUÇ	86
KAYNAKLAR	88
EKLER.....	90
EK-1 Dalga kılavuzu simulasyonunun akış şeması	91
ÖZGEÇMİŞ	92

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. İki ortam arasındaki elektromanyetik alanlar için sınır koşulları	10
Şekil 2.2. Sınırlardaki alanların yönleri	11
Şekil 2.3. Dikdörtgen dalga kılavuzu.....	25
Şekil 2.4. Dikdörtgen bir dalga kılavuzunun içindeki elektrik alan.....	27
Şekil 3.1. Bir hücredeki elektrik ve manyetik alanların konfigürasyonu.....	32
Şekil 4.1. KZFD’nde zaman – frekans pencereleri	41
Şekil 5.1. Dalgacık dönüşümünde zaman – frekans penceresi	45
Şekil 5.2. Bir sinyalin zaman-bazlı, frekans-bazlı, KZFD ve ölçek-bazlı görünüşleri.	46
Şekil 5.3. Ayrık dalgacıkların ölçek (s) – zaman (τ) düzlemine yerleştirilmesi	47
Şekil 5.4. ADD’de ilk 4 seviye için dalgacık fonksiyonu.....	48
Şekil 5.5. ADD’de ilk 3 seviye için ölçek ve dalgacık fonksiyonları.....	49
Şekil 5.6. İki kanallı altbant kodlayıcı	51
Şekil 5.7. Aşağı örnekleme	53
Şekil 5.8. f sinyali yaklaşım vektörü c_1 ve detay vektörü d_1 ’e ayrılmıştır.....	53
Şekil 5.9. Alçak ve yüksek geçiren filtrelerden geçen d ve c sinyalleri.	53
Şekil 5.10. Yeniden yapılandırma adımı.....	55
Şekil 5.11. Haar dalgacığı.....	56
Şekil 5.12. Haar dalgacığı’nın ölçek ve dalgacık fonksiyonları	56
Şekil 5.13. Meksika şapkası (Mexican Hat) dalgacığı.....	57
Şekil 5.14. Littlewood – Paley dalgacığı	57
Şekil 5.15. Morlet dalgacığı.....	58
Şekil 5.16. Daubechies 4 ve 8 dalgacıkları	59

Şekil	Sayfa
Şekil 5.17. Daubechies 4 dalgacığının ölçek ve dalgacık fonksiyonları.....	60
Şekil 5.18. Bior 5.5 (biortogonal) dalgacığın ölçek ve dalgacık fonksiyonları	60
Şekil 5.19. Coif3 (coiflet) dalgacığının ölçek ve dalgacık fonksiyonu.....	61
Şekil 5.20. Sym8 (simetrili) dalgacığının ölçek ve dalgacık fonksiyonu	61
Şekil 5.21. Meyer Dalgacığının ölçek ve dalgacık fonksiyonu	62
Şekil 6.1. Dielektrik dilim dalga kılavuzu	63
Şekil 6.2. J=2 için uzaysal örnekleme.....	70
Şekil 6.3. Filtreleme işleminin bir adımı.....	71
Şekil 6.4. D^j türev matrisi (a) j=0, (b) j=1, (c) j=2.....	74
Şekil 6.5. Programa uyarlanan dalga kılavuzu.....	77
Şekil 6.6. TE modlarını bulurken $\alpha - \beta$ grafiği inceleme yöntemini kullanma.....	77
Şekil 6.7. Dalga kılavuzunun teorik ve pratik karşılaştırılması	78
Şekil 6.8. Dalga kılavuzunun 1 ve 2 modu	79
Şekil 6.9. Dalga kılavuzunun 4 modu	79
Şekil 6.10. Filtrelerin dalga kılavuzuna uygulanışı.....	80
Şekil 6.11. Haar ile yapılan analiz sonrası dalga kılavuzunda katsayılar	81
Şekil 6.12. Haar dalgacığında analiz ve sentezin karşılaştırılması	81
Şekil 6.13. Daub4 ile yapılan analiz sonrası dalga kılavuzunda katsayılar	82
Şekil 6.14. Daub4 dalgacığında analiz ve sentezin karşılaştırılması	82
Şekil 6.15. Bior6.8 ile yapılan analiz sonrası dalga kılavuzunda katsayılar	83
Şekil 6.16. Bior6.8 dalgacığında analiz ve sentezin karşılaştırılması.....	83
Şekil 6.17. Sym5 i ile yapılan analiz sonrası dalga kılavuzunda katsayılar.....	84
Şekil 6.18. Sym5 dalgacığında analiz ve sentezin karşılaştırılması.....	84

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$ f(t) $	$f(t)$ fonksiyonunun normu
a	Ölçek
$\mathbf{A}(t)$	$\mathbf{A}(t)$ vektörünün zaman ortalaması
b	Öteleme
$\mathbf{B}$	Manyetik akı yoğunluğu
$\mathbf{B}(t)$	$\mathbf{B}(t)$ vektörünün zaman ortalaması
$\mathbf{B}_{1n}$	Birinci ortamdaki manyetik akı yoğunluğunun paralel bileşeni
$\mathbf{B}_{2n}$	İkinci ortamdaki manyetik akı yoğunluğunun paralel bileşeni
χ	Maddenin elektrik kutuplanma özelliğinin bir ölçüsü
$c(k)$	Ayrık dalgacık dönüşümü yaklaşım katsayıları
χ_m	Maddenin manyetik kutuplanma özelliğinin bir ölçüsü
$\mathbf{D}$	Elektrik akı yoğunluğu
$d(k)$	Ayrık dalgacık dönüşümü ayrıştırma katsayıları
$\mathbf{D}_{1n}$	Birinci ortamdaki elektrik akı yoğunluğunun paralel bileşeni
$\mathbf{D}_{2n}$	İkinci ortamdaki elektrik akı yoğunluğunun paralel bileşeni
dB	Desibel
$\mathbf{E}$	Elektrik alan yoğunluğu
ε	Geçirgenlik
$\mathbf{E}^*$	Elektrik alan yoğunluğu vektörünün eşleniği
$\mathbf{E}_1$	Birinci ortamdaki elektrik alan yoğunluğu

Simgeler**Açıklama** E_{1t}

Birinci ortamdaki elektrik alan yoğunluğunun dik bileşeni

 E_{2t}

İkinci ortamdaki elektrik alan yoğunluğunun dik bileşeni

 E_2

İkinci ortamdaki elektrik alan yoğunluğu

 $f(t)$ $f(t)$ fonksiyonunun kompleks eşleniği $F(\omega)$ $f(t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $G(t, \omega)$

Kısa zamanlı Fourier dönüşümü

 $g_0(n)$

Ayrık dalgacık dönüşümü alçak-geçiren sentez filtresi

 $g_1(n)$

Ayrık dalgacık dönüşümü yüksek-geçiren sentez filtresi

 H

Manyetik alan yoğunluğu

 η

Karakteristik empedans

 H^*

Manyetik alan yoğunluğu vektörünün eşleniği

 $h_0(n)$

Ayrık dalgacık dönüşümü alçak-geçiren analiz filtresi

 $h_1(n)$

Ayrık dalgacık dönüşümü yüksek-geçiren analiz filtresi

 H_{1t}

Birinci ortamdaki manyetik alan yoğunluğunun dik bileşeni

 H_{1t}

Birinci ortamdaki manyetik alan yoğunluğu

 H_{2t}

İkinci ortamdaki manyetik alan yoğunluğunun dik bileşeni

 H_{2t}

İkinci ortamdaki manyetik alan yoğunluğu

Hz

Hertz

 J

Elektrik akım yoğunluğu

 J_{mag}

Manyetizasyon akım yoğunluğu

 J_{pol}

Kutuplanmaya bağlı akım yoğunluğu

kHz

Kilohertz

 μ

Nüfuz edilebilirlik

Simgeler m ms N n $\hat{n}$ **P** s **W** $w(t)$ Δt $\Delta\omega$ ρ ρ_0 ρ_{pol} $\varphi(t)$ $\Psi(t)$ $\psi(t)$ **Açıklama**

Metre

Milisaniye

Newton

Kırılma indisi

Birim vektör

Ponyting Vektörü

Saniye

Watt

Pencere fonksiyonu

Zaman penceresi

Frekans penceresi

Hacimsel yük

Ortam yoğunluğu (Ns/m^3)

Kutuplanmaya bağlı yük yoğunluğu

Ölçek fonksiyonu

Ana dalgacık fonksiyonu

Dalgacık fonksiyonu

Kısaltmalar**ADD****AFD****FDTD****KZFD****HFD****SDD****TAFD****ZASF****Açıklama**

Ayrık Dalgacık Dönüşümü

Ayrık Fourier Dönüşümü

Finite Differences Time Domain (ZASF)

Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü

Hızlı Fourier Dönüşümü

Sürekli Dalgacık Dönüşümü

Ters Ayrık Fourier Dönüşümü

Zaman Alanında Sonlu Farklar (FDTD)

1.GİRİŞ

Gün geçtikçe haberleşme alanında önemli gelişmeler kaydedilmektedir. Ancak yeni üretilen haberleşme ve mikrodalga yapıları hem sahip oldukları teknolojilerle hem de işlevleriyle kimi zaman entegre edilen ortama uyum sağlayamamakta ve çeşitli sistem sorunları çıkarabilmektedir [1]. Günümüz mühendisliğinin bir görevi de bu sorunları önceden tesbit edip, mümkün olduğunca azaltmaktır.

Bu aşamada tasarım, düzenli işleyen bir sistemin sağlanması için önemli bir aşama olmaktadır. Bu durumda yapılacak en iyi uygulama cihazları ve haberleşme için gerekli yazılımları sistem ortamı oluşturulmadan önce modellemektir. Modelleme, çoğu zaman bilgisayar ortamında cihazlar ve sistemler arasındaki haberleşmenin özelliklerinin önceden tahmin edilip grafiklerle veya elde edilen verilerle sonuçlarının görülüp uygunluğunun test edilmesidir. Özellikle elektronik alanındaki modellemelerde bilgisayarlar daha çok kullanılmaktadır.

Bilgisayar teknolojisi de gün geçtikçe gelişmektedir. İşlemlerin daha doğru ve hızlı yapılabilmesi için bilgisayar kapasiteleri, işlemci güçleri arttırılmakta, dolayısıyla halihazırdaki modellemeler buna uyum sağlayamamaktadır.

Son yıllarda, aynı zamanda hem bilgisayarlardaki bu hıza hem de haberleşme cihazlarındaki gelişime uyum sağlamak için hızlı bir şekilde çok çeşitli modelleme teknikleri geliştirilmiştir. Bu modelleme teknikleri genellikle zamana göre ifade edilen yayılan sinyalin farklı değişkenlere dönüştürülüp uygun düzenlemelerle ifade edilmesiyle sağlanır. Sinyal işlemesi bu açıdan da farklı bir önem kazanmaktadır.

Sinyal işleme yöntemlerinin en temeli *Fourier Analizi*'dir. Zaman alanındaki bir sinyal bu durumda frekans bölgesinde ifade edilir. Ancak bu dönüşümle sinyal, zaman bilgisini kaybeder. Fourier analizinin bu sorununu gidermek için *Kısa Zamanlı Fourier*

Dönüşümü (KZFD) geliştirilmiştir. Bu yöntemde de sinyalin *pencere* adı verilen ve zamanla kaydırılan bir aralıkla Fourier dönüşümü alınır. Pencerenin konumu zaman bilgisini, hesaplanan Fourier katsayıları da frekans bilgisini verir. Ancak KZFD’de pencere büyüklüğü sabit olduğu için istenilen zaman – frekans çözünürlüğü elde edilemez. Pencere genişliği istenilen alandaki çözünürlüğü arttırmak için düzenlenebilse de bu diğer alanı olumsuz etkiler.

Son zamanlarda çok kullanılan yöntemlerden biri de *Zaman Alanında Sonlu Farklar Yöntemi (ZASF)*’dur. Bu yöntem düzensiz, homojen olmayan ortamların basit ve verimli olarak modellenmesini sağlar. Ancak zamanla ZASF yönteminde de modellenen alan genişledikçe simülasyonun zorlaştığı ve ciddi derecede hataların arttığı görülmüştür. Yöntem zamanla geliştirilmeye çalışılsa da, bilgisayar konfigürasyonlarına uyum sorunu yaşanmıştır.

En son ve en yeni geliştirilmiş yöntem *Dalgacık Analizi*’dir. Dalgacık analizinde de KZFD’de olduğu gibi pencereler vardır. Ancak burada pencere genişliği analiz sırasında kendiliğinden değişir ve istenilen zaman – frekans çözünürlüğünü verir. Dalgacık dönüşümü, sinyalleri değişik genişlikteki ve ölçekteki dalgacık fonksiyonları toplamı şeklinde ifade eder. Küçük ölçekli dalgacıklar yüksek frekanslı bileşenleri (hızlı değişimleri), dar pencereler ile büyük ölçekli dalgacıklar ise alçak frekanslı bileşenleri (yavaş değişimleri) geniş pencereler ile analiz ederek istenilen zaman – frekans çözünürlüğünü verir.

Dalgacık analizi, diğer yöntemlere göre bu durumda daha avantajlı bir yöntemdir.

Tezin ikinci bölümünde temel bağıntılar, elektromanyetik dalga yayılımı, Maxwell eşitlikleri ve dalga kılavuzları ile ilgili teorik bilgilere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde Zaman Alanlı Sonlu Farklar (ZASF) (Finite Differences in Time Domain–FDTD) yöntemi, formülasyonu, nasıl çalıştığı ve zayıf noktaları belirtilmiştir.

Dördüncü bölümde spektrum analizi yöntemlerine girilmiş, zaman ve frekans bölgeleri ayrı ayrı incelenmiştir. Fourier analizi, ayrık ve hızlı Fourier dönüşümleri, kısa zamanlı Fourier dönüşümü, bunlarla beraber dalgacık dönüşümüne de girilmiş, teorik incelemeleri yapılmıştır.

Beşinci bölümde detaylı bir biçimde dalgacık analizi üzerinde durulmuştur. Sürekli ve ayrık dalgacık dönüşümleri, ölçekleme, öteleme, altbantlara ayırma kavramları ve dalgacık çeşitleri bu bölümde ele alınmıştır.

Altıncı bölümde dikdörtgen bir dalga kılavuzu, MATLAB programı kullanılarak ZASF yöntemiyle ve dalgacık dönüşümü eklenerek görsel olarak modellenmiştir. Bu aşamada elde edilen sonuçlar da ortaya konularak değerlendirilmiştir.

Yedinci bölümde modellemenin sonuçları açıklanmış, buna göre gelecekte yapılacak çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

2. TEMEL BAĞINTILAR

2.1. Maxwell Eşitlikleri

Klasik elektromanyetiğin tamamını açıklayan Maxwell Eşitlikleri

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
 \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\
 \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde verilir. Birinci eşitlik Faraday'ın endüksiyon yasası, ikinci eşitlik yer değiştirme akımı $\partial \mathbf{D} / \partial t$ 'yi içeren Amper yasası, üçüncü ve dördüncü eşitlikler de elektrik ve manyetik alanlar için Gauss yasalarıdır.

Amper yasasındaki yer değiştirme akımı $\partial \mathbf{D} / \partial t$, ortamda yayılan elektromanyetik dalgaların var olup olmadığını anlayabilmek için önemlidir.

Bu eşitlikler SI birimleri cinsindendir. $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ nicelikleri *elektrik ve manyetik alan yoğunlukları* olup [volt/m] ve [amper/m] birimleriyle ölçülmektedir. $\mathbf{D}$ ve $\mathbf{B}$ nicelikleri *elektrik ve manyetik akı yoğunlukları* olup [coulomb/m²] ve [weber/m²] veya [tesla] birimleriyle ölçülmektedir. $\mathbf{B}$ 'ye ayrıca *manyetik endüksiyon* da denilebilir [2].

ρ ve $\mathbf{J}$ nicelikleri herhangi bir dış yükün *hacimsel yük ve elektrik akım yoğunluklarıdır*. [coulomb/m³] ve [amper/m³] birimleri ile ölçülürler. Dördüncü eşitliğin sağ tarafı sıfıra eşittir, çünkü tek kutuplu tek bir manyetik yük yoktur.

Yük ve akım yoğunlukları ρ ve $\mathbf{J}$ elektromanyetik alanların *kaynakları* olarak da görülebilir. Dalga yayılım problemleri için bu yoğunluklar uzayda yerleştirilmiş, örneğin, bir anten üzerinde akmaya sınırlandırılmıştır. Üretilen elektrik ve manyetik alanlar bu kaynaklardan dışarı, alıcı antenlere doğru yayılır. Kaynakların dışında, kaynaksız uzayda Maxwell eşitlikleri daha basit bir forma girer:

2.1.1. Bünye eşitlikleri

Elektrik ve manyetik akı yoğunlukları $\mathbf{D}$ ve $\mathbf{B}$, *bünye eşitlikleri* olarak bilinen eşitliklerle alan yoğunlukları $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ 'la ilişkilendirilmişlerdir. Tam formu alanın bulunduğu maddeye bağlıdır. Boşlukta en basit halini alırlar:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H}\end{aligned}\tag{2.2}$$

ϵ_0 ve μ_0 boşluk için *geçirgenlik* ve *nüfuz edilebilirlik* değerleridir.

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= 8.854 \times 10^{-12} \text{ farad/m} \\ \mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7} \text{ henry/m}\end{aligned}\tag{2.3}$$

ϵ_0 ve μ_0 değerlerinin birimleri $\mathbf{D} / \mathbf{E}$ ve $\mathbf{B} / \mathbf{H}$ oranlarıdır,

$$\frac{\text{coulomb/m}^2}{\text{volt/m}} = \frac{\text{coulomb}}{\text{volt} \cdot \text{m}} = \frac{\text{farad}}{\text{m}}, \quad \frac{\text{weber/m}^2}{\text{ampere/m}} = \frac{\text{weber}}{\text{ampere} \cdot \text{m}} = \frac{\text{henry}}{\text{m}}$$

İki nicelik ϵ_0 ve μ_0 'dan diğer fiziksel sabitler tanımlanabilir. Boşlukta *ışık hızı* ve boşluğun *karakteristik empedansı*:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/sec}$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ ohm}$$
(2.4)

olarak verilir. Bünye bağıntılarının bir sonraki formu dielektrikler ve manyetik maddeler için geçerlidir:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$
(2.5)

Bunlar düşük frekanslar için geçerlidir. Geçirgenlik ϵ ve nüfuz edilebilirlik μ maddelerin *elektrik ve manyetik duyarlılığına* bağlıdır:

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi)$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$$
(2.6)

Duyarlılıklar χ ve χ_m maddenin elektrik ve manyetik kutuplanma özelliklerinin bir ölçüsüdür. Örneğin elektrik akı yoğunluğu için:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$
(2.7)

olarak verilir. Burada $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ maddenin dielektrik kutuplanmasını belirtir. Madde içindeki ışık hızı ve karakteristik empedans:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$
(2.8)

ile verilir. Maddenin *bağıl geçirgenliği ve kırılma indisi* şu şekilde tanımlanır:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi \quad , \quad n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_r} \quad (2.9)$$

Burada $\epsilon_r = n^2$ ve $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0 n^2$ dır. Eş. 2.6'daki tanım kullanılarak ve manyetik olmayan maddeler için ($\mu = \mu_0$) ışık hızı ve karakteristik empedans bunlara karşılık gelen boşluk değerleri ile ilişkilendirilebilir.

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c_0}{n} \\ \eta &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\eta_0}{n} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Benzer olarak bir manyetik maddede $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ eşitliği geçerlidir. Burada $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ manyetizasyon, yani her birim hacim için ortalama manyetik momenttir. Kırılma indisi :

$$n = \sqrt{\epsilon \mu / \epsilon_0 \mu_0} = \sqrt{(1 + \chi)(1 + \chi_m)}$$

ile tanımlanır.

Daha genel olarak bünye bağıntıları *inhomojen, doğrusal olmayan, izotropik*, frekans bağımlı (*dispersif*) özelliklerden herhangi birini veya hepsini gösterebilir. Homojen olmayan maddelerde geçirgenlik ϵ maddenin konumuna da bağlıdır.

$$\mathbf{D}(r, t) = \epsilon(r) \mathbf{E}(r, t)$$

İzotropik olmayan maddelerde ϵ , x , y , ve z 'ye bağlıdır ve bünye bağıntıları bileşenler cinsinden matris formunda (*tensör*) yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Anizotropi dielektriğin atomik – moleküler yapısının doğal bir özelliğidir. Bu özellik dış etkenlerden da kaynaklanabilir. (Dünya'nın elektrik alanıyla iyonosferin anizotropik özellik göstermesine benzer şekilde, sabit bir elektrik alanın varlığında iletkenler ve plazmalar anizotropik hale gelir.)

Doğrusal olmayan maddelerde ϵ , uygulanan elektrik alanı $\mathbf{E}$ 'nin büyüklüğüne bağlı olabilir:

$$D = \epsilon(\mathbf{E})E \quad \epsilon(\mathbf{E}) = \epsilon + \epsilon_2 E + \epsilon_3 E^2 + \dots \quad (2.12)$$

Doğrusal olmayan maddeler ışık – faz modülatörleri ve değişen kutuplanmalar için kullanılan faz geciktiricileri gibi bazı uygulamalarda tercih edilebilir. Ancak diğer uygulamalarda istenmeyen bir durumdur.

Frekans – bağımlı bir dielektrik sabiti $\epsilon(\omega)$ 'ne sahip olan maddeler dispersif maddelerdir. Zamanla değişen bir elektrik alanı uygulandığında frekans bağımlılığı ortaya çıkar. Bu dinamik yanıt, düzenlenen katlanma eşitliğiyle gösterilebilir:

$$\mathbf{D}(r, t) = \int_{-\infty}^t \epsilon(t - t') \mathbf{E}(r, t') dt'$$

Frekans bölgesinde bu eşitlik:

$$\mathbf{D}(r, \omega) = \epsilon(\omega) \mathbf{E}(r, \omega) \quad (2.11)$$

şeklini alır. Ohm kuralı:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.12)$$

ile verilir. Kutuplanma $\mathbf{P}$ ve manyetizasyon $\mathbf{M}$ kurulan bağıntılarla Maxwell eşitliklerinde yerine konularak:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{D} + \nabla \times \mathbf{M}) = \mu_0 (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{J} + \mathbf{P} + \nabla \times \mathbf{M})$$

elde edilir. Bu düzenleme Eş. 2.1'e uygulanarak $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{B}$ cinsinden yazılabilir:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \left[\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right] \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Kutuplanmaya bağlı akım ve yük yoğunlukları:

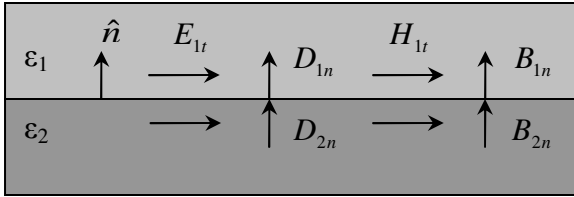
$$J_{pol} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \rho_{pol} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (2.15)$$

ile verilir. Benzer olarak manyetizasyon $\mathbf{J}_{mag} = \nabla \times \mathbf{M}$ ($\rho_{mag} = 0$) akım yoğunluğu cinsinden yazılabilir:

$$\begin{aligned}
 J_{tot} &= J + J_{pol} + J_{mag} = J + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \\
 \rho_{tot} &= \rho + \rho_{pol} = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

2.1.2. Sınır koşulları

Farklı iki ortamı birbirinden ayıran birbirinden ayıran bir arayüzey ve bu iki ortamdaki elektromanyetik alan Şekil 2.1’de olduğu gibi gösterilebilir:



Şekil 2.1. İki ortam arasındaki elektromanyetik alanlar için sınır koşulları

Burada verilen vektörler aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}
 E_{1t} - E_{2t} &= 0 \\
 H_{1t} - H_{2t} &= J_s \times \hat{n} \\
 D_{1n} - D_{2n} &= \rho_s \\
 B_{1n} - B_{2n} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

$\hat{n}$, ikinci ortamdan birinci ortama geçişte sınıra normal birim vektördür. ρ_s ve J_s büyüklükleri sınırdaki *yüzey yük yoğunluğu* ve *yüzey akım yoğunluğu* olarak adlandırılır, [coulomb/m²] ve [amper/m] ile ölçülürler.

Arayüz boyunca elektrik alanın teğet bileşenleri ve manyetik akı $\mathbf{B}$ 'nin dik (*normal*) bileşenleri sürekli olup, manyetik alanın teğet bileşenlerinin farkı yüzey akım yoğunluğuna, elektrik akı yoğunluğu $\mathbf{D}$ 'nin dik (*normal*) bileşenlerinin farkı yüzey yük yoğunluğuna eşittir.

$\mathbf{D}_n$ sınır koşulu kutuplanma yüzey yükleri cinsinden de yazılabilir:

$$(\epsilon_0 E_{1n} + P_{1n}) - (\epsilon_0 E_{2n} + P_{2n}) = \rho_s \quad \rightarrow \quad \epsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}) = \rho_s - P_{1n} + P_{2n} = \rho_{s,tot}$$

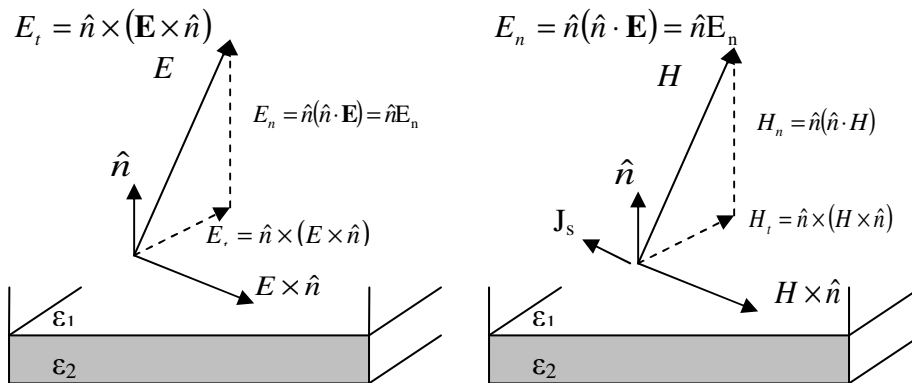
Toplam yüzey yük yoğunluğu $\rho_{s,tot} = \rho_s + \rho_{1s,pol} + \rho_{2s,pol}$ ile ifade edilebilir. Kutuplanma yüklerinin yüzey yük yoğunlukları ($\mathbf{n} \rightarrow$ dielektriğin dış normali):

$$\rho_{s,tot} = P_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} \quad (2.18)$$

olarak gösterilebilir. Alan vektörlerinin bağıl yönleri Şekil 2.2'deki gibi tanımlanmıştır. Her vektör bir miktarı yüzeye teğet bir miktarı yüzeye dik olarak ayrıştırılabilir. $\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_n$ olarak gösterilir. Vektör bağıntıları kullanılarak:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) + \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{E}_t - \mathbf{E}_n \quad (2.19)$$

iki parçaya ayrılarak ifade edilebilir.



Şekil 2.2. Sınırlardaki alanların yönleri

Bu sonuçları kullanarak ilk iki sınır koşulu düzenlenebilir:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times (E_1 \times \hat{n}) - \hat{n} \times (E_2 \times \hat{n}) &= 0 \\ \hat{n} \times (H_1 \times \hat{n}) - \hat{n} \times (H_2 \times \hat{n}) &= J_s \times \hat{n} \end{aligned} \quad \text{veya} \quad \begin{aligned} \hat{n} \times (E_1 - E_2) &= 0 \\ \hat{n} \times (H_1 - H_2) &= J_s \end{aligned} \quad (2.20)$$

Eş. 2.17'deki sınır koşulları Maxwell eşitliklerinin integral formu kullanılarak çıkartılabilir. Arayüzlerdeki yüzey yük yoğunluğu ve yüzey akım yoğunluğu sıfır ise sınır koşulları:

$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ H_{1t} &= H_{2t} \\ D_{1n} &= D_{2n} \\ B_{1n} &= B_{2n} \end{aligned} \quad (2.21)$$

şeklini alır.

2.1.3. Maxwell eşitliklerinin fazör formu

Ters Fourier dönüşümü alınarak Maxwell eşitlikleri frekans bölgesine uygulanabilir:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\omega)) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.22)$$

Tüm alanların $e^{j\omega t}$ ile zamana bağlı olduğu varsayılır.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}$$

$\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ değerleri kompleksdir. Zaman türevleri yerine $\partial_t \rightarrow j\omega$ yazılacak olursa:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega \mathbf{B} \\
\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} \\
\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

elde edilir. Fazörlere ve zaman ortalamalarına göre bazı düzenlemeler yapılırsa:

$$\mathbf{A}(t) = |\mathbf{A}| \cos(\omega t + \theta) \quad \rightarrow \quad A(t) = A e^{j\omega t} \tag{2.24}$$

bulunur. Burada $\mathbf{A} = |\mathbf{A}| e^{j\theta}$ ile ifade edilir. Dolayısıyla $A(t) = \text{Re}[A(t)] = \text{Re}[A e^{j\omega t}]$ dir. $A(t)$ 'nin bir periyot boyunca ($T = 2\pi / \omega$) zaman ortalaması sıfırdır.

İki harmonik nicelik $A(t) = \text{Re}[A e^{j\omega t}]$ ve $B(t) = \text{Re}[B e^{j\omega t}]$ 'nin çarpımlarının zaman ortalaması fazörlerle şu şekilde gösterilebilir:

$$\overline{\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t) dt = \frac{1}{2} \text{Re}[AB^*] \tag{2.25}$$

Kare ortalaması ise:

$$\overline{\mathbf{A}^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{A}^2(t) dt = \frac{1}{2} \text{Re}[Aa] = \frac{1}{2} |A|^2 \tag{2.26}$$

olur. Elektromanyetik dalga problemlerinde Poynting vektörü (enerji akısı) ve ohmik güç kayıpları önemli zaman ortalamalarıdır:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \quad (\text{Poynting vektörü}) \tag{2.27}$$

$$\frac{dP_{\text{loss}}}{dV} = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{J}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{E}^*] \quad (\text{ohmik kayıplar})$$

Burada $\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}$ Amper yasasının sağ tarafındaki toplam akımdır ve hem iletim hem de dielektrik kayıplarını tanımlar.

2.2. Dalga Kılavuzları

Dalga kılavuzları, uzayda bir noktadan başka bir noktaya elektromanyetik gücün verimli olarak iletilmesini sağlar. Bunlar tipik koaksiyel kablo, iki telli ve mikroşerit iletim hatları, içi boş iletken dalga kılavuzları ve fiber optik kablolar olarak bilinirler.

Pratikte, yapının seçimi çalışması istenilen frekans bandına, transfer edilen güce ve tolere edilebilecek iletim kayıplarına bağlıdır.

Koaksiyel kablolar çoğunlukla RF (Radyo Frekansı) bileşenleri bağlamak için kullanılır. 3 GHz'den düşük frekanslardaki işlemler için daha uygundur. Ancak özel yapım kısa dalga kılavuzları 40 GHz frekansa kadar çıkabilir.

Yüksek frekanslarda yüksek modların çalışmaya başlanmasının önlenmesi için koaksiyel iletkenlerin çapları düşürülür, bu da iletilen güç miktarını azaltır.

Genellikle TV setlerinde ve antenlerde kullanılan iki telli iletim hatları, kalkanlamaya (shielding) ve korumaya sahip olmadığı için mikrodalga iletiminde kullanılmazlar. Mikroşerit hatlar da mikrodalga entegre devrelerinde çok sık kullanılır.

Dikdörtgen dalga kılavuzları 3 GHz'den büyük frekanslarda, çok büyük miktarlardaki mikrodalga güçlerini taşımak için kullanılır. Örneğin 5 Ghz'de bir megawatt kadar güç taşıırken zayıflama 100m'de sadece 4dB'dir.

Optik kablolar çok geniş bir bant aralığında, optik ve kızıl ötesi frekanslarda çalışır. Kayıpları çok düşük, tipik olarak 0.2 dB/km, iletilen güç miliwattlar seviyesindedir.

2.2.1. Enine boyuna ayrışım

Bir dalga kılavuzunda, kılavuz yönünde (z yönü) yayılan ve kılavuz çevresinde sınırlandırılan dalgaların Maxwell çözümleri araştırılır. Dolayısıyla elektrik ve manyetik alanların şu formda oldukları kabul edilir:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x,y,z,t) &= \mathbf{E}(x,y)e^{j\alpha x - j\beta z} \\ \mathbf{H}(x,y,z,t) &= \mathbf{H}(x,y)e^{j\alpha x - j\beta z}\end{aligned}\tag{2.28}$$

Burada β kılavuz yönündeki yayılım dalga numarasıdır. Buna bağlı, *kılavuz dalgaboyu* olarak adlandırılan dalgaboyu $\lambda_g = 2\pi / \beta$ ile ifade edilir. ω ile β arasındaki ilişki dalga kılavuzunun yapısına ve yayılma moduna bağlıdır.

Yayılım z – yönünde olduğu için Maxwell eşitliklerinin z – yönünde olan ve x,y yönündeki *enine* bileşenlerini ayırmak gerekir. Dolayısıyla:

$$\mathbf{E}(x,y) = \hat{x}E_x(x,y) + \hat{y}E_y(x,y) + \hat{z}E_z(x,y) = E_T(x,y) + \hat{z}E_z(x,y)\tag{2.29}$$

benzer biçimde:

$$\nabla = \hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y + \hat{z}\partial_z = \nabla_T + \hat{z}\partial_z = \nabla_T - j\beta\hat{z}\tag{2.30}$$

z – yönüne bağlı bir eşitlik olduğu için $\partial_z \rightarrow -j\beta$ dönüşümü yapılmıştır. Bu açılımlar kaynaksız Maxwell eşitliklerine uygulanırsa:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} & (\nabla_T - j\beta\hat{z}) \times (E_T + \hat{z}E_z) &= -j\omega\mu(H_T + \hat{z}H_z) \\
\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} & (\nabla_T - j\beta\hat{z}) \times (H_T + \hat{z}H_z) &= j\omega\epsilon(E_T + \hat{z}E_z) \\
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & (\nabla_T - j\beta\hat{z}) \cdot (E_T + \hat{z}E_z) &= 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 & (\nabla_T - j\beta\hat{z}) \cdot (H_T + \hat{z}H_z) &= 0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

elde edilir. ϵ ve μ dalgaların yayıldığı ortamın geçirgenliklerini tanımlar. Burada ortamın kayıpsız olduğu kabul edilmiştir.

Ayrıca, $\hat{z} \cdot \hat{z} = 1$, $\hat{z} \times \hat{z} = 0$, $\hat{z} \cdot E_T = 0$, $\hat{z} \cdot \nabla_T E_z = 0$ olarak alınmış ve $\hat{z} \times E_T$ ile $\hat{z} \times \nabla_T E_z$ enine, $\nabla_T \times E_T$ de boyuna olduğu hesaba katılmıştır. Ayrıca:

$$\begin{aligned}
\hat{z} \times E_T &= \hat{z} \times (\hat{x}E_x + \hat{y}E_y) = \hat{y}E_x - \hat{x}E_y \\
\nabla_T \times E_T &= (\hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y) \times (\hat{x}E_x + \hat{y}E_y) = \hat{z}(\partial_x E_y - \partial_y E_x)
\end{aligned}$$

özellikleri de ele alınmıştır. Bu özellikleri kullanarak ve Eş. 2.32'nin iki tarafındaki enine ve boyuna bölümler eşitlenerek Maxwell eşitlikleri:

$$\begin{aligned}
\nabla_T E_z \times \hat{z} - j\beta\hat{z} \times E_T &= -j\omega\mu H_T \\
\nabla_T H_z \times \hat{z} - j\beta\hat{z} \times H_T &= -j\omega\epsilon E_T \\
\nabla_T \times E_T + j\omega\mu\hat{z}H_z &= 0 \\
\nabla_T \times H_T - j\omega\epsilon\hat{z}E_z &= 0 \\
\nabla_T \cdot E_T - j\beta E_z &= 0 \\
\nabla_T \cdot H_T - j\beta H_z &= 0
\end{aligned} \tag{2.32}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Boyuna bileşenlerden her ikisinin, birisinin veya hiçbirinin sıfıra eşit olup olmamasına göre çözümler enine elektrik ve manyetik (TEM), enine elektrik (TE) ve enine manyetik (TM) veya hibrit olarak adlandırılır.

$$E_z = 0, H_z = 0, \text{TEM}$$

$$E_z = 0, H_z \neq 0, \text{TE/H}$$

$$E_z \neq 0, H_z = 0, \text{TM/E}$$

$$E_z \neq 0, H_z \neq 0, \text{HE/EH/Hibrit}$$

İki iletkeninden oluşan iletim hatlarında daha çok kullanılan TEM modunda, alanlar yalnızca enine olup Eş. 2.32'deki eşitlikler iki boyutlu elektrostatik probleme dönüşür. Diğer durumlarda boyuna bileşenlerden E_z , H_z 'den en az biri sıfırdan farklıdır. Enine alan bileşenleri E_T ve H_T böylece E_z , H_z cinsinden ifade edilebilir.

Eş. 2.32'nin ikincisi $\hat{z}$ ile vektörel çarpılıp, vektörel özdeşlikler:

$$\hat{z} \times (\hat{z} \times H_T) = \hat{z}(\hat{z} \cdot H_T) - H_T(\hat{z} \cdot \hat{z}) = -H_T \text{ ve } \hat{z} \times (\nabla_T H_z \times \hat{z}) = \nabla_T H_z$$

ile düzenlenirse şu sonuçlar ortaya çıkar:

$$\nabla_T H_z + j\beta H_T = j\omega\epsilon\hat{z} \times E_T$$

dolayısıyla, Eş. 2.32'nin ilk ikisi $\hat{z} \times E_T$ ve H_T bilinmeyenleri için bir eşitlik sistemi olarak alınabilir. Böylece:

$$\begin{aligned} \beta\hat{z} \times E_T - \omega\mu H_T &= j\hat{z} \times \nabla_T E_z \\ \omega\epsilon\hat{z} \times E_T - \beta H_T &= -j\nabla_T H_z \end{aligned} \quad (2.33)$$

elde edilir. Çözüm sistemi:

$$\begin{aligned}
\hat{z} \times E_T &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \hat{z} \times \nabla_T E_z - \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \nabla_T H_z \\
H_T &= -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \hat{z} \times \nabla_T E_z - \frac{j\beta}{k_c^2} \nabla_T H_z
\end{aligned} \tag{2.34}$$

ile ifade edilebilir. Burada k_c iyi bilinen kesim dalga numarasıdır ve

$$k_c^2 = \omega^2 \epsilon \mu - \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 = k^2 - \beta^2 \tag{2.35}$$

ile verilir. $k = \omega/c = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ niceliği ϵ ve μ özelliklerine sahip yayılım ortamında yayılan düzgün dalganın dalga numarasıdır. k_c^2 , $\omega^2 \epsilon \mu - \beta^2$ farkını ifade etse de, her dalga kılavuzu tipi için, sınır koşulları k_c^2 pozitif, negatif veya sıfır gibi yayılım modunu ifade eden belli değerler alır. Örneğin, dielektrik bir dalga kılavuzu için k_c^2 kılavuzun içinde pozitif, dışında negatif, boş, iletken bir dalga kılavuzu için k_c^2 belli niceliklerde pozitif değerler alır. TEM hattında da k_c^2 sıfırdır. *Kesim frekansı* ve *kesim dalgaboyu* da şu şekilde tanımlanabilir:

$$\omega_c = ck_c \quad \lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} \tag{2.36}$$

β 'yı ω ve ω_c türünden veya ω 'yı β ve ω_c türünden ifade etmek mümkündür. Eş. 2.35'in karekökü alınarak:

$$\beta = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \quad \text{ve} \quad \omega = \sqrt{\omega_c^2 + \beta^2 c^2} \tag{2.37}$$

yazılabilir. $\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$, $\lambda_c = 2\pi/k_c$ ve $\lambda_g = 2\pi/\beta$ dönüşümleri ve $k^2 = k_c^2 + \beta^2$ sonucuyla:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{1}{\lambda_g^2} \quad \rightarrow \quad \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}}} \quad (2.38)$$

çıkarılabilir. Burada boşluktaki dalgaboyu $\lambda_0 = 2\pi c_0/\omega = c_0/f$ ve dielektrik madde için $\lambda = \lambda_0/n$ alınır. TE ve TM modları için enine empedanslar:

$$\eta_{TE} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \eta \frac{\omega}{\beta c} \quad \eta_{TM} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = \eta \frac{\beta c}{\omega} \quad (2.39)$$

olarak tanımlanır. Burada $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ olup $\eta/c = \mu$ ve $\eta c = 1/\epsilon$ 'dir. Şu özellikler de çıkarılabilir:

$$\eta_{TE}\eta_{TM} = \eta^2 \quad , \quad \frac{\eta_{TE}}{\eta_{TM}} = \frac{\omega^2}{\beta^2 c^2} \quad (2.40)$$

$\beta c/\omega = \sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}$ olduğu için:

$$\eta_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} \quad , \quad \eta_{TM} = \eta \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \quad (2.41)$$

bulunur. Bu tanımlarla Eş. 2.34 tekrar yazılabilir:

$$\begin{aligned} \hat{z} \times E_T &= -\frac{j\beta}{k_c^2} (\hat{z} \times \nabla_T E_z + \eta_{TE} \nabla_T H_z) \\ H_T &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \left(\frac{1}{\eta_{TM}} \hat{z} \times \nabla_T E_z + \nabla_T H_z \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$\hat{z} \times (\hat{z} \times E_T) = -E_T$ sonucuyla E_T ve H_T çözülebilir:

$$\begin{aligned} E_T &= -\frac{j\beta}{k_c^2} (\nabla_T E_z - \eta_{TE} \hat{z} \times \nabla_T H_z) \\ H_T &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \left(\nabla_T H_z + \frac{1}{\eta_{TM}} \hat{z} \times \nabla_T E_z \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Bu eşitlikler de doğrusal bir biçimde yazılabilir:

$$\begin{aligned} H_T - \frac{1}{\eta_{TM}} \hat{z} \times E_T &= \frac{j}{\beta} \nabla_T H_z \\ E_T - \eta_{TE} H_T \times \hat{z} &= -\frac{j}{\beta} \nabla_T E_z \end{aligned} \quad (2.44)$$

Şimdiye kadar Eş. 2.32'deki Maxwell eşitliklerinin ilk ikisi kullanılarak E_T ve H_T , E_z ve H_z türünden ifade edildi. Eş. 2.32 eşitliklerinin geri kalanlarıyla şu sonuçlar çıkarılabilir:

$$\begin{aligned} \nabla_T \times E_T + j\omega\mu\hat{z}H_z &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \hat{z} (\nabla_T^2 H_z + k_c^2 H_z) \\ \nabla_T \times H_T - j\omega\epsilon\hat{z}E_z &= -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \hat{z} (\nabla_T^2 E_z + k_c^2 E_z) \\ \nabla_T \cdot E_T - j\beta E_z &= -\frac{j\beta}{k_c^2} (\nabla_T^2 E_z + k_c^2 E_z) \\ \nabla_T \cdot H_T - j\beta H_z &= -\frac{j\beta}{k_c^2} (\nabla_T^2 H_z + k_c^2 H_z) \end{aligned}$$

∇_T^2 iki – boyutlu Laplace operatörüdür:

$$\nabla_T^2 = \nabla_T \cdot \nabla_T = \partial_x^2 + \partial_y^2 \quad (2.45)$$

Burada $\nabla_T \times \nabla_T E_z = 0$, $\nabla_T \times (\hat{z} \times \nabla_T H_z) = \hat{z} \nabla_T^2 H_z$, $\nabla_T \cdot (\hat{z} \times \nabla_T H_z) = 0$ eşitlikleri kullanılmıştır.

Eş. 2.32'deki Maxwell eşitliklerinden $E_z(x, y)$ ve $H_z(x, y)$ için:

$$\begin{aligned}\nabla_T^2 E_z + k_c^2 E_z &= 0 \\ \nabla_T^2 H_z + k_c^2 H_z &= 0\end{aligned}\tag{2.46}$$

ile verilen Helmholtz eşitlikleri elde edilir.

Yayılan alanların tam x, y, z, t bağlantısı sonuçların $e^{j\omega t - j\beta z}$ terimleriyle bulunur.

2.2.2. TEM, TE ve TM modları

Bütün modlardaki ortak bir özellik enine alanlar E_T ve H_T 'nin birbirine z – yönünde yayılan düzgün dalgada olduğu gibi bağlı olmasıdır. z – yönündeki vektörel çarpımları:

$$H_T = \frac{1}{\eta_T} \hat{z} \times E_T\tag{2.47}$$

ile verilir. η_T burada özel bir mod tipinin enine empedansıdır, diğer bir deyişle TEM, TE ve TM modları için η , η_{TE} , η_{TM} 'dir.

Eş. 2.47'deki eşitlikten dolayı birim kesit alandaki güç akışı her üç mod için Poynting vektörü P_z ile tanımlanabilir:

$$P_z = \frac{1}{2} \text{Re}(E_T \times H_T^*) \cdot \hat{z} = \frac{1}{2\eta_T} |E_T|^2 = \frac{1}{2} \eta_T |H_T|^2\tag{2.48}$$

TEM modu

TEM modunda E_z ve H_z yok olur ve alanlar tümten enine bir özellik gösterir. Eş. 2.32'deki Maxwell eşitliklerinde, veya Eş. 2.43 veya Eş. 2.44'deki eşitliklerde $E_z = H_z = 0$ alınarak sonuçlar bulunabilir.

Eş. 2.44'ten $\eta_{TE} = \eta_{TM}$, buradan da $k_c^2 = 0$ $\omega = \beta c$ bulunur. Ayrıca η_{TE} ve η_{TM} 'nin ortam empedansı η 'ye eşit olmaları gerektiği sonucu çıkar. Dolayısıyla elektrik ve manyetik alanlar şu koşulları sağlamalıdır:

$$H_T = \frac{1}{\eta_T} \hat{z} \times E_T \quad (2.49)$$

Elektrik alanı E_T Maxwell eşitliklerinin geri kalanlarıyla hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} \nabla_T \times E_T &= 0 \\ \nabla_T \cdot E_T &= 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Bu eşitlikler iki boyutlu elektrostatik problemin alan eşitlikleri olarak da bilinir. Elektrostatik sonuç $E_T(x,y)$ bulunduğunda Eş. 2.49'dan manyetik alan hesaplanabilir. Zamanla değişen yayılan alanlarda $\omega = \beta c$ uygulanabilir. Ters yöne hareket eden nesnelerde β yerine $-\beta$ konulur.

E_T ve H_T arasındaki bağıntılardan dolayı Poynting vektörü $\mathbf{P}_z$

$$\mathbf{P}_z = \frac{1}{2} \text{Re}(E_T \times H_T^*) \cdot \hat{z} = \frac{1}{2\eta} |E_T|^2 = \frac{1}{2} \eta |H_T|^2 \quad (2.51)$$

şeklini alır.

TE Modu

TE modunda $E_z = 0$ ve $H_z \neq 0$ koşulları geçerlidir. Eş. 2.44'ten $E_T = \eta_{TE} H_T \times \hat{z}$ bulunabilir. H_T de Eş. 2.43 ile bulunabilir. Dolayısıyla TE modu için bütün alan bileşenlerini bir arada ifade etmek mümkündür:

$$\begin{aligned}\nabla_T^2 H_z + k_c^2 H_z &= 0 \\ H_T &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \nabla_T H_z \\ E_T &= \eta_{TE} H_T \times \hat{z}\end{aligned}\tag{2.52}$$

E_T ve H_T arasındaki bağlantı düzgün dalgalardaki gibidir, ancak burada dalga empedansı η_{TE} ile ifade edilir. Poynting vektörü şu hale dönüşür:

$$\mathbf{P}_z = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_T \times \mathbf{H}_T^*) \cdot \hat{z} = \frac{1}{2\eta_{TE}} |\mathbf{E}_T|^2 = \frac{1}{2} \eta_{TE} |\mathbf{H}_T|^2 = \frac{1}{2} \eta_{TE} \frac{\beta^2}{k_c^4} |\nabla_T H_z|^2\tag{2.53}$$

Eş. 2.52'den kartezyen koordinatlardaki ifadesi:

$$\begin{aligned}(\partial_x^2 + \partial_y^2) H_z + k_c^2 H_z &= 0 \\ H_x &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \partial_x H_z, & H_y &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \partial_y H_z \\ E_x &= \eta_{TE} H_y, & E_y &= -\eta_{TE} H_x\end{aligned}\tag{2.54}$$

Silindirik koordinatlardaki ifadesi:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + k_c^2 H_z = 0$$

$$H_\rho = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}, \quad H_\phi = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \quad (2.55)$$

$$E_\rho = \eta_{TE} H_\phi, \quad E_\phi = -\eta_{TE} H_\rho$$

olur. Burada $H_T \times \hat{z} = (\hat{\rho}H_\rho + \hat{\phi}H_\phi) \times \hat{z} = -\hat{\phi}H_\rho + \hat{\rho}H_\phi$ dönüşümleri yapılmıştır.

TM modu

TM modunda $E_z \neq 0$ ve $H_z = 0$ koşulları geçerlidir. TM eşitlikleri, TE eşitliklerine benzer olarak Eş. 2.43'ten bulunabilir:

$$\nabla_T^2 E_z + k_c^2 E_z = 0$$

$$E_T = -\frac{j\beta}{k_c^2} \nabla_T E_z \quad (2.56)$$

$$H_T = \frac{1}{\eta_{TM}} \hat{z} \times E_T$$

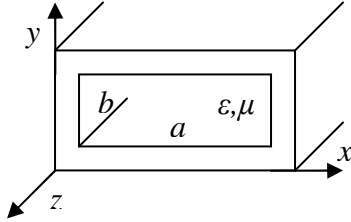
Yine, E_T ve H_T arasındaki bağlantı z – yönünde ilerleyen düzgün dalgaya benzer, ancak burada dalga empedansı η_{TM} 'dir. Poynting vektörü de şu şekilde ifade edilir:

$$P_z = \frac{1}{2} \text{Re}(E_T \times H_T^*) \cdot \hat{z} = \frac{1}{2\eta_{TM}} |E_T|^2 = \frac{1}{2\eta_{TM}} \frac{\beta^2}{k_c^4} |\nabla_T E_z|^2 \quad (2.57)$$

2.2.3. Dikdörtgen dalga kılavuzları

Bu bölümde şekilde gösterildiği gibi iletken duvarlara sahip boş, dikdörtgen dalga kılavuzları üzerinde durulacaktır. a ve b uzunluklarının arasında $a \geq b$ ilişkisi olduğu

varsayılacaktır. Kılavuzun içi hava ile doldurulmuştur ancak ε ve μ özellikli herhangi başka bir dielektrik madde de bulunabilir.



Şekil 2.3. Dikdörtgen dalga kılavuzu

En basit ve baskın yayılım modu çok bilinen TE_{10} modu olup, sadece x – koordinatına (uzun kenar) bağlıdır. Dolayısıyla Eş. 2.56'dan x bileşenleri incelenecektir. Bu durumda Helmholtz eşitlikleri şu hale dönüşür:

$$\partial_x^2 H_z(x) + k_c^2 H_z(x) = 0$$

En genel çözüm $\cos k_c x$ ve $\sin k_c x$ 'in doğrusal bir bileşenidir. Buna rağmen sadece $\cos k_c x$ sınır koşullarını sağlar. Dolayısıyla çözüm:

$$H_z(x) = H_0 \cos k_c x \quad (2.58)$$

şeklinde. Burada H_0 kompleks değerli bir sabittir. y – eksenine herhangi bir bağımlılık olmadığı için Eş. 2.56'dan $\partial_x H_z = 0$ sonucu dolayısıyla $E_x = 0$ ve $H_y = 0$ sonuçları çıkar. Ayrıca:

$$H_x(x) = -\frac{j\beta}{k_c^2} \partial_x H_z = -\frac{j\beta}{k_c^2} (-k_c) H_0 \sin k_c x = \frac{j\beta}{k_c} H_0 \sin k_c x \equiv H_1 \sin k_c x$$

olup, buna bağlı elektrik alanı:

$$E_y(x) = -\eta_{TE} H_x(x) = -\eta_{TE} \frac{j\beta}{k_c} H_0 \sin k_c x \equiv E_0 \sin k_c x$$

ile ifade edilir. Burada şu sabitler tanımlanır:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{j\beta}{k_c} H_0 \\ E_0 &= -\eta_{TE} H_1 = -\eta_{TE} \frac{j\beta}{k_c} H_0 = -j\eta \frac{\omega}{\omega_c} H_0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Ayrıca $\eta_{TE} = \eta\omega/\beta c$ eşitliği de kullanılmıştır. Sonuçta sıfırdan farklı alan bileşenleri:

$$\begin{aligned} H_z(x) &= H_0 \cos k_c x & H_z(x, y, z, t) &= H_0 \cos k_c x e^{j\alpha x - j\beta z} \\ H_x(x) &= H_1 \sin k_c x & H_x(x, y, z, t) &= H_1 \sin k_c x e^{j\alpha x - j\beta z} \\ E_y(x) &= E_0 \sin k_c x & E_y(x, y, z, t) &= E_0 \sin k_c x e^{j\alpha x - j\beta z} \end{aligned} \quad (2.60)$$

olarak ifade edilebilirler. Duvarlar mükemmel iletken kabul edilirse sınır koşulları herhangi bir duvara teğet elektrik alan olmamasını gerektirir. Elektrik alan $y -$ yönünde olduğu için taban ve tavan kenarlarına dik, sağ ve sol kenarlara paraleldir. Sol kenarda $x = 0$ olup, $\sin k_c x$ yok olduğu için $E_y(x)$ de yok olur. Sağ kenarda $x = a$ olup, sınır koşullarından:

$$E_y(a) = E_0 \sin k_c a = 0 \quad \rightarrow \quad \sin k_c a = 0$$

elde edilir. Bu da $k_c a$ 'nın π 'nin bir katı olması gerektiğini gösterir:

$$k_c a = n\pi \quad \rightarrow \quad k_c = \frac{n\pi}{a} \quad (2.61)$$

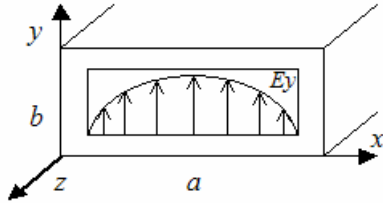
Bunlar çok bilinen TE_{n0} modlarıdır. Buna bağlı kesim frekansı $\omega_c = ck_c$, $f_c = \omega_c/2\pi$ ve dalgaboyu $\lambda_c = 2\pi/k_c = c/f_c$:

$$\omega_c = \frac{cn\pi}{a}, \quad f_c = \frac{cn}{2a}, \quad \lambda_c = \frac{2a}{n} \quad (2.62)$$

biçiminde ifade edilebilir. Baskın mod en düşük kesim frekansına sahip olan, veya en uzun kesim dalgaboyuna sahip olan moddur. Burada TE_{10} modu için $n = 1$ 'dir.

$$k_c = \frac{\pi}{a}, \quad \omega_c = \frac{c\pi}{a}, \quad f_c = \frac{c}{2a}, \quad \lambda_c = 2a \quad (2.63)$$

Şekil 2.4 bu moddaki elektrik alanı $E_y(x) = E_0 \sin k_c x = E_0 \sin(\pi x/a)$ 'ı x 'in bir fonksiyonu olarak göstermektedir.



Şekil 2.4. Dikdörtgen bir dalga kılavuzunun içindeki elektrik alan

2.2.4. Yüksek seviye TE ve TM modları

Daha yüksek seviyedeki modlar için çözüm ararken Helmholtz eşitliğinin x 'e ve y 'ye olan bağımlılığı incelenmelidir:

$$H_z(x, y) = F(x)G(y)$$

Eş. 2.54 şu hale dönüşür:

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) + k_c^2 F(x)G(y) = 0 \rightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)} + k_c^2 = 0 \quad (2.64)$$

Bu eşitliğin bütün x ve y değerleri için geçerli olması gerekir. Bu yüzden F ve G terimleri sabit olmalıdır. Dolayısıyla:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = k_x^2, \quad \frac{G''(y)}{G(y)} = -k_y^2 \quad \text{veya}$$

$$F''(x) + k_x^2 F(x) = 0, \quad G''(y) + k_y^2 G(y) = 0 \quad (2.65)$$

yazılabilir. k_x^2 ve k_y^2 şu şartı sağlamalıdır:

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (2.66)$$

Eş. 2.65'in TE sınır koşullarını sağlayan en genel çözümü $\cos k_x x$ ve $\cos k_y y$ 'dir. Dolayısıyla boyuna manyetik alan:

$$H_z(x, y) = H_0 \cos k_x x \cos k_y y \quad (\text{TE}_{\text{nm}}) \quad (2.67)$$

biçiminde yazılabilir. Eş. 2.54'ten:

$$\begin{aligned} H_x(x, y) &= H_1 \sin k_x x \cos k_y y & E_x(x, y) &= E_1 \cos k_x x \sin k_y y \\ H_y(x, y) &= H_2 \cos k_x x \sin k_y y & E_y(x, y) &= E_2 \sin k_x x \cos k_y y \end{aligned} \quad (2.68)$$

Elde edilir. Sabitler şu şekilde tanımlanır:

$$H_1 = \frac{j\beta k_x}{k_c^2} H_0 \quad , \quad H_2 = \frac{j\beta k_y}{k_c^2} H_0 \quad (2.69)$$

$$E_1 = \eta_{TE} H_2 = j\eta \frac{\omega k_y}{\omega_c k_c} H_0 \quad , \quad E_2 = -\eta_{TE} H_1 = -j\eta \frac{\omega k_x}{\omega_c k_c} H_0$$

Sınır koşullarından sağ duvarda $x = a$ iken E_y yok olur, üst duvarda $y = b$ iken E_x yok olur:

$$E_y(a, y) = E_{0y} \sin k_x a \cos k_y y = 0 \quad E_x(x, b) = E_{0x} \cos k_x x \sin k_y b = 0$$

$k_x a$ ve $k_y b$ π 'nin tamsayı katsayılarıdır:

$$k_x a = n\pi \quad , \quad k_y b = m\pi \quad \rightarrow \quad k_x = \frac{n\pi}{a} \quad , \quad k_y = \frac{m\pi}{b} \quad (2.70)$$

Bunlar TE_{nm} modlarına karşılık gelir. Dolayısıyla kesim dalga numaraları:

$$k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

olur. Bu modlar için k_c şu şekilde düzenlenebilir:

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \quad (2.71)$$

Kesim frekansları $f_{nm} = \omega / 2\pi = ck_c / 2\pi$ ve dalgaboyları $\lambda_{nm} = c / f_{nm}$:

$$f_{nm} = c \sqrt{\left(\frac{n}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m}{2b}\right)^2} \quad \lambda_{nm} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m}{2b}\right)^2}} \quad (2.72)$$

olarak yazılabilir. TE_{0m} modu TE_{n0} moduna benzer ama x ve a y ve b ile yer değiştirmiştir. TM modu ailesi de bunlara benzer biçimde çıkarılabilir.

$E_z(x, y) = F(x)G(y)$ olduğu farz edilerek aynı deklemler elde edilebilir. E_z duvarlara paralel olduğu için $\sin k_x a$ ve $\sin k_y b$ çözümleri bulunmalıdır. Dolayısıyla boyuna elektrik alan:

$$E_z(x, y) = E_0 \sin k_x x \cos k_y y \quad (\text{TM}_{nm}) \quad (2.73)$$

olarak bulunur. Alan bileşenlerinin geri kalanı Eş. 2.68'den çıkarılabilir ve bu eşitliklerin Eş. 2.69'a benzediği görülebilir. Ancak bu sefer sabitler E_0 ile gösterilmiştir:

$$E_1 = -\frac{j\beta k_x}{k_c^2} E_0, \quad E_2 = -\frac{j\beta k_y}{k_c^2} E_0$$

$$H_1 = -\frac{1}{\eta_{TM}} E_2 = \frac{j\omega k_y}{\omega_c k_c} \frac{1}{\eta} E_0, \quad H_2 = -\frac{1}{\eta_{TM}} E_1 = \frac{j\omega k_x}{\omega_c k_c} \frac{1}{\eta} H_0$$

Burada $\eta_{TM} = \eta \beta c / \omega$ olarak kullanılmıştır. E_x , E_y üzerindeki sınır koşulları daha öncekilerle aynı olup bunlara ek olarak E_z duvarlarda yok olmalıdır. n ve m sıfıra eşit olursa E_z yok olur. Kesim frekansları ve dalga boyları Eş. 2.72'le aynıdır.

İstenilen dalga modunu oluşturması için dalga kılavuzlarının başına küçük problemler eklenerek çalıştırılabilir.

3. ZAMAN ALANINDA SONLU FARKLAR – ZASF (FINITE DIFFERENCES TIME DOMAIN – FDTD)

Zaman Alanında Sonlu Farklar – ZASF popüler bir elektromanyetik modelleme tekniğidir. Kolay anlaşılır, yazılıma kolay uygulanabilir ve zaman alanı yöntemi olduğundan tek bir simülasyonun çalışmasıyla geniş bir frekans bölgesini kapsayabilir.

ZASF yöntemleri genel olarak nümerik zaman alanı fark yöntemlerini kapsar. Diferansiyel formdaki Maxwell eşitlikleri merkezi farklar eşitliklerine uygulanır, ayrıklaştırılır ve yazılıma uygulanır. Eşitlikler adım adım ilerler, belli bir zamanda elektrik alanı hesaplanır, bir sonraki basamakta manyetik alan, diğer basamakta tekrar elektrik alan hesaplanarak böylece devam edilir [3].

3.1. ZASF Yönteminin Çalışma Şekli

Maxwell eşitlikleri kartezyen koordinatlarda şu şekilde ifade edilebilir [6]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{H} = -\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3.2)$$

Burada $\mathbf{E}$: elektrik alan, $\mathbf{H}$: Manyetik alan, ρ : yük yoğunluğu, ε : geçirgenlik , μ : nüfuz edilebilirlik, σ : iletkenliktir. Analiz uzayı çok küçük bir uzunluk olan Δs ile örneklenerek bir kenarı Δs boyunda “hücre” adı verilen küplere ayrılabilir. Analiz uzayının x koordinatı N_x , y koordinatı N_y , z koordinatı N_z adet küplere bölünmüş olsun. Analiz uzayı şu aralıkta gösterilir:

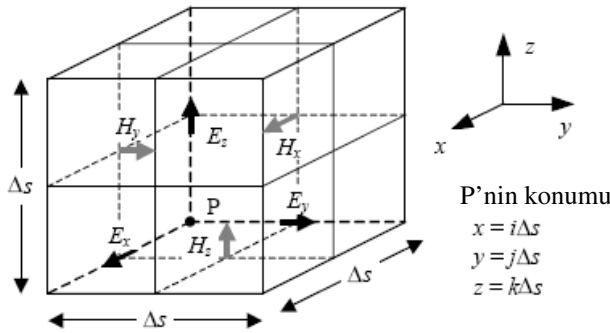
$$\begin{aligned}
x &= i\Delta s, (0 \leq i \leq N_x) \\
y &= j\Delta s, (0 \leq j \leq N_y) \\
z &= k\Delta s, (0 \leq k \leq N_z)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Eş. 3.1, türevlerin x , y , z konumları ve t zamanı ile gösterilmesini sağlar. ZASF formüllerinde elektrik ve manyetik alanların gösterimi Şekil 3.1'deki gibidir, ve bu da y ve z 'ye göre türevlerin merkezi farklarla şu şekilde ifade edilmesini sağlar:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \cong \frac{f(x + \Delta s/2) - f(x - \Delta s/2)}{\Delta s} \tag{3.4}$$

Yukarıdaki eşitlikte f , E ve H 'nin bir bileşenidir. Bu eşitlik y ve z için de geçerlidir. Aşağıda gösterilen aynı merkezi fark zamana göre türevlerin yerine geçer. Burada elektrik alanların $t = n \times t$ ($n = 0, 1, \dots$) zaman aralıklarıyla, manyetik alanların $t = (n + 1/2) \times t$ ($n = 0, 1, \dots$) zaman aralıklarıyla hesaplandığı varsayılmaktadır.

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} \cong \frac{f(t + \Delta t/2) - f(t - \Delta t/2)}{\Delta t} \tag{3.5}$$



Şekil 3.1. Bir hücredeki elektrik ve manyetik alanların konfigürasyonu [6]

Eş. 3.4 ve Eş. 3.5, Eş. 3.1'e uygulanacak olursa aşağıdaki fark eşitlikleri elde edilir [5]. (Örneğin $E_x^n(i + 1/2, j, k)$ eşitliği, $x = (i + 1/2)\Delta s$, $y = j\Delta s$, $z = k\Delta s$ konumunda ve $t = n\Delta t$

zamanında elektrik alanın x bileşenini temsil etmektedir. Diğer bileşenler de bu şekilde hesaplanabilir.)

$$E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) = K_1 E_x^{n-1}(i + \frac{1}{2}, j, k) + K_2 \{H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k) - H_y^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) + H_y^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2})\} \quad (3.6)$$

$$E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) = K_1 E_y^{n-1}(i, j + \frac{1}{2}, k) + K_2 \{H_x^{n-1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n-1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}) - H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) + H_z^{n-1/2}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)\} \quad (3.7)$$

$$E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) = K_1 E_z^{n-1}(i, j, k + \frac{1}{2}) + K_2 \{H_y^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n-1/2}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n-1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) + H_x^{n-1/2}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})\} \quad (3.8)$$

$$H_x^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = H_x^{n-1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) + K_3 \{-E_z^n(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) + E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) + E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k)\} \quad (3.9)$$

$$H_y^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) = H_y^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) + K_3 \{-E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k + 1) + E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) + E_z^n(i + 1, j, k + 1) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2})\} \quad (3.10)$$

$$H_z^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) = H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) + K_3 \{-E_y^n(i + 1, j + \frac{1}{2}, k) + E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) + E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + 1, k) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k)\} \quad (3.11)$$

Yukarıdaki eşitliklerin türetilmesinde $\sigma E^{n-1/2} \approx \sigma \{E^{n-1} + E^n\} / 2$ yaklaşımı kullanılmış ve K_1 , K_2 ve K_3 aşağıda verildiği gibi tanımlanmıştır:

$$K_1 = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} \quad K_2 = \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta s} \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\varepsilon}} \quad K_3 = \frac{\Delta t}{\mu \Delta s} \quad (3.12)$$

Eş. 3.6 ile Eş. 3.11 arasında verilen eşitlikler Maxwell eşitliklerinin Zaman Alanlı Sonlu Farklar yöntemine dönüştürülmüş biçimleri olup, süreksiz alanlar, elektrik ve manyetik alanların $\Delta t/2$ zaman aralıklarıyla hesaplanmasıyla elde edilir.

Eş. 3.6 ile Eş. 3.11 arasındaki eşitliklerin kararlı bir integrasyon özelliği sağlamaları için aşağıdaki şartı sağlamaları gerekmektedir (Courant şartı) [5]:

$$\Delta t / \sqrt{\mu\epsilon} \leq \Delta s / \sqrt{3} \quad (3.13)$$

Δt zaman aralığı, Δs uzay aralığı olmak üzere, Eş. 3.6 ile Eş. 3.11 arasındaki eşitliklerde oluşabilecek yuvarlama hatalarına karşı tanımlanan küçük bir α pozitif değeri ile eşitlik:

$$\Delta t = \Delta s \sqrt{\mu\epsilon / 3} (1 - \alpha) \quad (3.14)$$

halini alır.

3.2. ZASF Yönteminin Zayıf Noktaları

Her modelleme yönteminin güçlü ve zayıf noktaları vardır. ZASF çok yönlü bir yöntemdir. Öngörülü bir modeldir, yani kullanıcılar kolaylıkla nasıl kullanılacağını anlayabilir ve verilen modelden ne bekleyeceğini bilebilir.

ZASF bir zaman – alan tekniğidir ve ne zaman bir zaman – alan darbesi (Gauss darbesi gibi) kaynak darbe olarak kullanılırsa, o zaman sadece bir simülasyonla geniş bir frekans aralığı ölçülebilir. Bu, rezonans frekanslarının kesin olarak bilinmediği veya geniş bant sonuçlarının arandığı uygulamalarda son derece kullanışlıdır.

Ancak, ZASF sadece ızgara aralıkları sıfıra eşit olduğu veya yaklaştığı zaman kesinlik kazanır. Courant şartının da belirttiği gibi, küçük zaman aralıkları için küçük uzay aralıkları gerekir. Sınırlı sayıda ızgaralara ayrılmış hücreler, kenarlardaki sınır koşullarında simülasyon hesabının doğruluğunu tehlikeye sokar. Yüksek frekans çözünürlüğü Fourier dönüşümü ile ilişkisinden dolayı çok fazla zaman aralığı gerektirir. Tüm ızgaralanmış alan her bir zaman aralığında güncelleştirilmelidir.

Bu faktörlerin sonucunda yüksek bir doğruluk sağlaması istenen ZASF simülasyonu çok fazla bilgisayar hafızası kullanır, ve çalışması çok uzun sürer.

4. SPEKTRUM ANALİZ YÖNTEMLERİ

4.1. Fourier Analizi

Fourier analizi, bir sinyali zaman alanından frekans bölgesine dönüştüren bir yöntemdir. Bu analizde hem Fourier dönüşümü, hem de Fourier serileri vardır. Fourier serileri periyodik fonksiyonlar için kullanılır. Periyot sonsuza yaklaştırarak Fourier dönüşümü elde edilebilir [4].

Fourier dönüşümünde sinyalin zaman bilgisinin kaybolması gibi bir dezavantaj vardır. Bu tür dezavantajlar dalgalarındaki değişimler incelenirken sorun yaratır. Çünkü, durgun olmayan dalgalar zamanla değişen dalgalar demektir. Gerçek hayatta kaydedilen sinyallerin birçoğu durgun olmayan veya akışı, ani değişiklikleri, başlangıç ve bitişleri gibi farklı geçiş karakteristikleri olan dalgalardır [5].

Herhangi bir $f(t)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi bir seri açılımı şeklinde gösterilebilir:

$$f(t) = \sum_j a_k g_k(t) \quad (4.1)$$

Bu açılımda a_k katsayıları açılım katsayıları, $g_k(t)$ fonksiyonları ise açılım fonksiyonlarıdır. $f(t)$ fonksiyonu için bu açılım tek ise bu açılım kümesine *baz* denir. Bu durumda baz fonksiyonları $g_k(t)$ birbirlerinden doğrusal bağımsızdırlar. Matematiksel dönüşümlerin (Fourier, KZFD, Dalgacık...) analiz kısmında bu açılım katsayıları bulunmakta, sentez kısmında ise bu katsayılar ve baz fonksiyonlarının oluşturduğu doğrusal bileşim hesaplanmaktadır.

4.1.1. Fourier serileri

T periyotlu $f(t)$ fonksiyonun Fourier serisi açılımı aşağıdaki gibidir:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\frac{j2\pi kt}{T}} \quad (4.2)$$

$\{e_k\} = \{e^{j2\pi kt/T}\}$ fonksiyon kümesi ortogonal bir baz oluşturmaktadır. Bu ortogonallik özelliğinden faydalananarak a_k Fourier katsayıları:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{j2\pi kt}{T}} dt \quad (4.3)$$

biçiminde elde edilir. Sinüs ve kosinüs fonksiyonları kullanılarak:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \quad (4.4)$$

yazılabilir. Seri açılımındaki a_0 , a_k ve b_k Fourier katsayıları ise aşağıdaki gibidir:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (4.5)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \quad (4.6)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \quad (4.7)$$

4.1.2. Fourier dönüşümü

Sürekli Fourier dönüşümü

Fourier serisi açılımındaki katsayıların yerine açık ifadesi yazılır:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t') \frac{-j2\pi kt}{T} dt' \right] e^{\frac{j2\pi kt}{T}} \quad (4.8)$$

Fourier serisinde iki frekans bileşeni arasındaki uzaklık $\Delta\omega = 2\pi/T$ olarak tanımlanarak:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t') e^{-jt\Delta\omega} dt \right] e^{-jt\Delta\omega} \quad (4.9)$$

yazılabilir. T periyodu sonsuza götürüldüğünde $\Delta\omega$ $d\omega$ 'ya, $k\Delta\omega$ ise ω 'ya yaklaşacaktır ve seri toplamı:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-jt'\omega} dt' \right] e^{-jt\omega} d\omega \quad (4.10)$$

şeklini alacaktır. Köşeli parantez içindeki integral ifadesi $F(\omega)$ ile gösterilirse:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.11)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.12)$$

Fourier dönüşüm çifti elde edilir. Yukarıdaki ilk eşitlik $f(t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü, ikincisi ise ters Fourier dönüşümüdür.

Ayrık Fourier dönüşümü

Sinyaller bilgisayar ortamlarında hesaplanırken sayısal örneklemler kullanılır. Bu nedenle birçok dönüşümün olduğu gibi Fourier dönüşümünün de örneklenmiş hali geliştirilmiştir. Buna *Ayrık Fourier Dönüşümü* denilir.

T periyotlu bir $f(t)$ sinyali:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \quad (4.13)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt \quad (4.14)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \quad (4.15)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$f(t)$ fonksiyonu periyodiktir. Böylece integral sınırları $[-T/2, T/2]$ 'den $[0, T]$ 'ye değiştirilebilir. Burada Fourier serisi F_k ile tanımlanmıştır:

$$F_k = a_k - b_k \quad (4.16)$$

$$e^{-j\frac{2\pi kt}{T}} = \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \quad (4.17)$$

$$F_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j\frac{2\pi kt}{T}} dt \quad (4.18)$$

Sonuçta, N adet örneğe sahip $f(t)$ fonksiyonunun ayrık Fourier dönüşümün serilerle gösterimi:

$$F(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-\frac{j2\pi kt}{N}} \quad (4.19)$$

şeklini, ters dönüşümü ise:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{\frac{j2\pi kt}{N}} \quad (4.20)$$

şeklini alır.

Kısa zamanlı Fourier dönüşümü

Fourier dönüşümü, sadece genlik-frekans bilgisi içerir, zaman bilgisi içermez. Eğer incelenen sinyalin frekans içeriği zamanla değişmiyorsa (durgun ise) Fourier dönüşümü analiz için yeterlidir. Ama işaretin frekans içeriği zamanla değişiyorsa (durgun değilse) Fourier dönüşümü analiz için yeterli değildir.

Bu sorunlardan dolayı *Kısa – Zamanlı Fourier Dönüşümü – KZFD* (Short Time Fourier Transform – STFT) geliştirilmiştir. Sinyal analizine uygulanan bu yaklaşım pencereleme yöntemini kullanır. Bu yöntemde bir pencere seçilir, böylece belli bir zaman aralığında sinyalin küçük bir parçası incelenir. Seçilen bu pencere kaydırılarak sinyalin parça parça tüm zaman eksenini boyunca Fourier dönüşümü alınır. Dönüşüm, sinyali zaman – frekans grafiğiyle ifade eder.

KZFD'nün ifade edilebilmesi için tanımlanacak pencere fonksiyonu $w(t)$ olmak üzere, dönüşümü alınacak $f(t)$ fonksiyonunun kısa zamanlı Fourier dönüşümü [4]:

$$G(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)w(t-b)e^{-j\omega t} dt \quad (4.21)$$

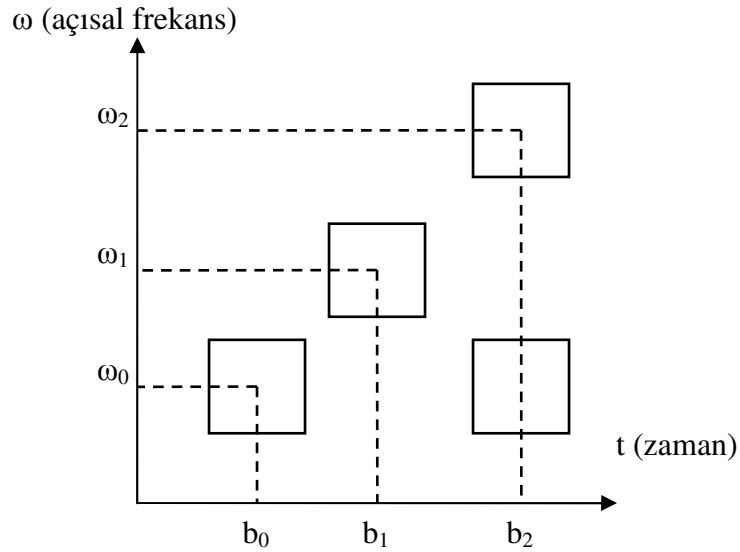
ile verilir. Burada, b parametresi Fourier dönüşümü katsayılarının hesaplandığı pencerenin büyüklüğünü belirler ve zaman bilgisini verir.

$f(t)$ fonksiyonunu tekrar elde etmek için:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\|w(t)\|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \omega)\overline{w}(t-b)dt \quad (4.22)$$

ifadesi kullanılır.

Heisenberg Belirsizlik İlkesi



Şekil 4.1. KZFD’nde zaman – frekans pencereleri [13]

Şekil 4.1’de KZFD’nin pencere büyüklükleri verilmiştir. KZFD’de hem yüksek hem de düşük frekansta aynı büyüklükteki pencereler kullanılmaktadır. Pencere büyüklüğü analiz

boyunca sabittir. Pencerenin ebatları küçülürse, zaman çözünürlüğü artar, ama frekans bilgisi kaybolur. Tersisi durumda da frekans çözünürlüğü iyi, zaman çözünürlüğü düşük olacaktır. Pencere geniş tutulduğunda düşük frekanslı bileşenler, dar tutulduğunda ise yüksek frekanslı bileşenler başka bir deyişle ayrıntılar görülebilir.

Fourier dönüşümünde pencere büyüklüğü sonsuzdur ve dönüşüm tüm sinyal süresince uygulanır. Frekans çözünürlüğü çok iyidir fakat zaman çözünürlüğü yoktur. Her iki tür bileşen de aynı anda istenilen çözünürlükte görülemez. Pencere büyüklüğünün sabit olması KZFD'nün bir dezavantajıdır. Bu dezavantaj *Heisenberg belirsizlik ilkesi* ile açıklanabilir [4]:

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2} \quad (4.23)$$

5. DALGACIK ANALİZİ

KZFD'nin sabit uzunluklu pencereler kullanması ve belirsizlik ilkesi kısıtlaması nedeniyle istenilen eş zamanlı zaman-frekans çözünürlüğü sağlayamaması gibi temel eksiklerle pencere uzunluğu değişken, çeşitli frekanslarda seviye seviye çözünürlük sağlayabilen ve hem zaman bilgisini hem de frekans bilgisini gösteren bir çözüm araştırılmaya başlanmıştır. Bulunan çözümlerden biri *Dalgacık Dönüşümü*'dür.

Dalgacık Analizi, sinyali analiz için bileşenlerine ayırırken, diğer bir deyişle sinyali *ayrıştırırken* (decomposition) baz fonksiyonları ile ifade etmesiyle Fourier analizine benzer. Fourier dönüşümünde sinyal değişik frekanslardaki sinüzoidal serilere ayrılır, dalgacık dönüşümünde sinyal “ana dalgacık”ın ölçeklendirilmiş ve kaydırılmış versiyonları olan kendi “dalgacıklarına” ayrılır. Dalgacık analizinin avantajı baz fonksiyonuna *ölçekleme* (dilation, scaling) ve *öteleme* (translation) özelliği kazandırmasıdır. Dalgacık dönüşümünde sinyaller analiz edilirken analiz penceresinin uzunluğu ve konumu kendiliğinden değişir. KZFD'nde ise analiz penceresi kaydırılabildiği halde uzunluğu analiz boyunca sabit kalır.

Ana dalgacığa uygulanan dönüşüm ve genişleme işlemleri, dalgacık ile analiz edilen sinyalin belirlenen bölümü ile arasındaki bağlantıyı gösteren dalgacık katsayılarını hesaplamak için uygulanır.

5.1. Dalgacıkların Özellikleri

Sinüzoidler ve dalgacıklar arasında belirgin farklar vardır. Düzgün ve sonlu uzunluğu olan sinüzoidler ile karşılaştırılınca dalgacıkların düzensiz bir şekli ve sınırlı bir yapısı vardır. Bu düzensiz şekil ve sınırlı yapı durgun olmayan dalgaları analiz etmek için daha uygundur.

5.2. Dalgacık Dönüşümleri

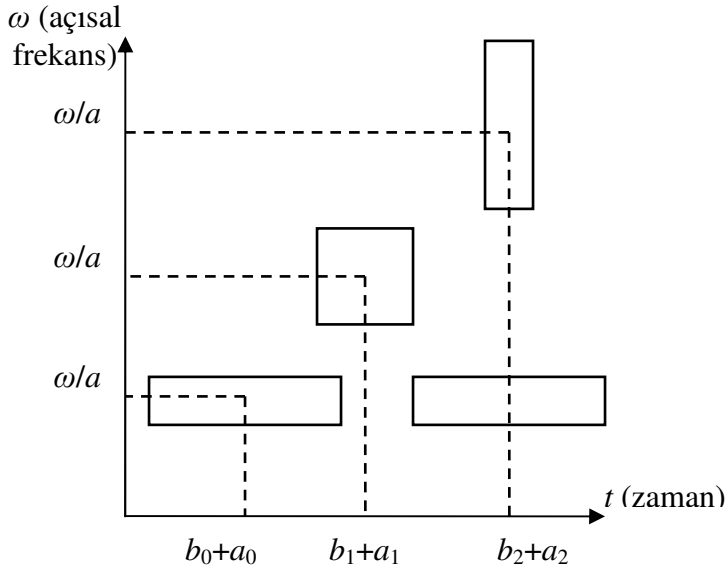
Dalgacık dönüşümleri analiz yöntemlerine göre Sürekli Dalgacık Dönüşümü (SDD) ve Ayırık Dalgacık Dönüşümü (ADD) olarak ikiye ayrılmaktadır. Sayısal uygulamalarda ayırık dalgacık dönüşümü, analog uygulamalarda da sürekli dalgacık dönüşümü kullanılmaktadır.

5.2.1. Sürekli dalgacık dönüşümü (Continuous Wavelet Transform – CWT)

Dalgacık Analizinde iki çeşit dönüşüm vardır, Sürekli Dalgacık Dönüşümü (Continuous Wavelet Transform – CWT) ve Ayırık Dalgacık Dönüşümü (Discrete Wavelet Transform –DWT). Her iki dönüşüm dalgacık katsayıları olarak da bilinen sınırlı sayıdaki katsayıları üretirler. Sürekli durum için ana dalgacık şöyle tanımlanır [12]:

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (5.1)$$

Burada $a \in \mathbb{R}^+$ ve $b \in \mathbb{R}$ 'dir. ψ sinyal süresi boyunca dönüştürülmüş ve ölçeklendirilmiş analiz dalgacıdır. a ve b ölçeklendirmeyi ve ötelemeyi sağlarlar. $a^{-1/2}$ farklı ölçekler için enerji normalizasyonu yapar. Büyük bir indis bağlantının güçlü olduğunu, küçük indis bağlantının az olduğunu gösterir.



Şekil 5.1. Dalgacık dönüşümünde zaman – frekans penceresi [13]

Sürekli dalgacıklar için dönüşüm ve ters dönüşüm şu şekilde ifade edilir:

$$\gamma(a, b) = \int f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \quad (5.2)$$

$$f(t) = \iint \gamma(s, t) \psi_{a,b}(t) db da \quad (5.3)$$

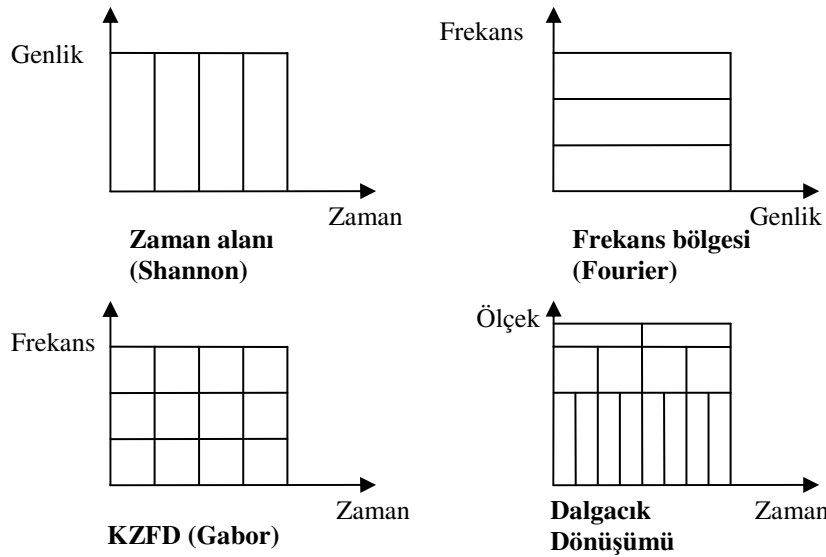
Ölçeklendirme analiz dalgacığ ψ 'nin sıkıştırılması veya genişletilmesidir. Daha önce de bahsedildiği gibi, ψ sonlu enerji içerir ve ψ 'nin integrali sıfırdır ($\int \psi(t) dt = 0$). Bir sonraki eşitlik bu iki özellikten ikincisini gösterir. Ölçeğin değişimi şu şekilde verilir:

$$\text{Ölçek değişimi} = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t}{a}\right) \quad (5.4)$$

Eş. 5.4'ten görülebileceği üzere, a ölçek faktörü ne kadar büyükse bir dalgacık da o kadar genişler. Tersisi de geçerlidir.

Burada dalgacıkların baz fonksiyonları tanımlanmamıştır. Dalgacık dönüşümünü Fourier'den ayıran da budur. Dalgacık dönüşümünün teorisi dalgacıkların ve dalgacık dönüşümünün genel özellikleriyle ilgilenir. Dalgacık seçimi ve tasarımı problemi çözenlere bırakılır.

Dönüşüm bir dalgacık veya genel bir fonksiyon başlangıcının gecikmiş bir örneğidir. b sabiti kadar gecikmiş bir dalgacık $\psi(t)$, $\psi(t-b)$ ile ifade edilir [8].



Şekil 5.2. Bir sinyalin zaman-bazlı, frekans-bazlı, KZFD ve ölçek-bazlı görünüşleri [8].

5.2.2. Ayrık dalgacık dönüşümü

Ayrık Dalgacık Dönüşümü, dalgacık dönüşümünü bilgisayar ortamına aktarmak için geliştirilmiştir. Ayrık dalgacık dönüşümünde ölçek değerleri 2'nin kuvvetleri biçiminde seçilir. Bu dyadik seçim belli noktalarda katsayıları hesaplar, böylece işlem sayısı azalır. Ayrık olarak adlandırılmasına rağmen dönüşüm sürekli bir fonksiyondur.

Sürekli dalgacık dönüşümü eşitliğinde a ölçek katsayısı yerine 2^j ve b öteleme katsayısı yerine de $k2^j$ konulursa:

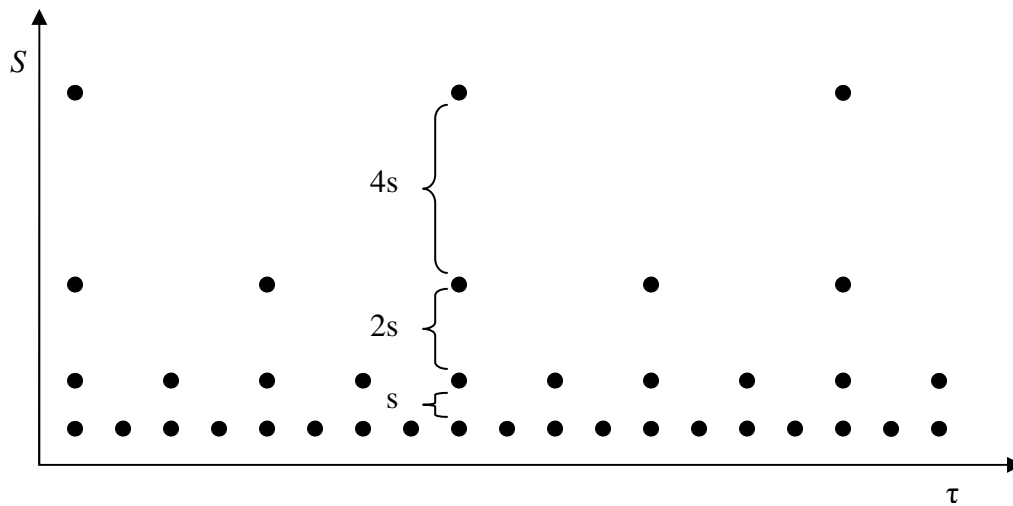
$$\Psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2^{-j}}} \psi\left(\frac{t-2^{-j}}{2^{-j}}\right)$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^{-j}t - k) \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (5.5)$$

elde edilir. Ters dönüşümün seri açılımı da:

$$f(t) = \sum_{j,k} \alpha_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^{-j}t - k) \quad (5.6)$$

şeklini alır. j indisi dalgacığın ölçeğini (büyüklüğünü) belirlemektedir, j arttıkça ölçek azalmaktadır. Dönüşüm seviye seviye yapılmaktadır, bu seviye j indisi ile ters orantılıdır. Dönüşüm seviyesi ilerledikçe dalgacığın ölçeği 2 kat artmaktadır. Zaman eksenini de aynı şekilde örneklenmektedir. Seviye her arttırıldığında dalgacık fonksiyonu iki kat genişlemekte ve hesaplanacak katsayı miktarı yarıya düşmektedir. Şekil 5.3'te ayrık dalgacık dönüşümünün ölçek ve zaman eksenlerinin örneklenmesi grafik halinde gösterilmiştir [12].



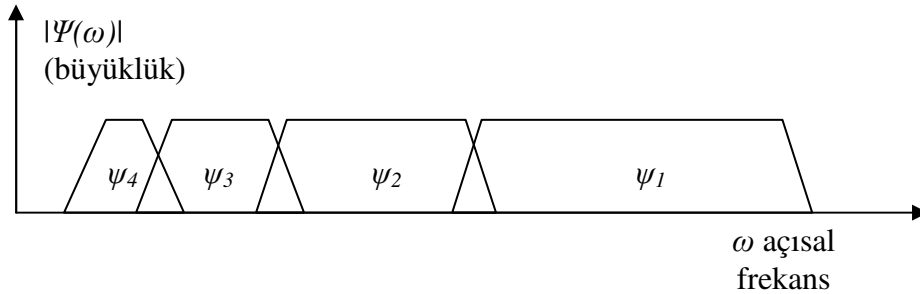
Şekil 5.3. Bir ızgarada ayrık dalgacıkların ölçek (s) – zaman (τ) düzlemine yerleştirilmesi [12]

Ölçek ve dalgacık fonksiyonları

Dalgacık fonksiyonları bant geçiren bir özellik gösterirler. Fourier dönüşümünün aşağıda Eş. 5.7 ile verilen özelliğine göre, bir işareti zaman tanım bölgesinde genişletme frekans tanım bölgesinde aynı oranda daraltmaya karşılık gelmektedir [4] :

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (5.7)$$

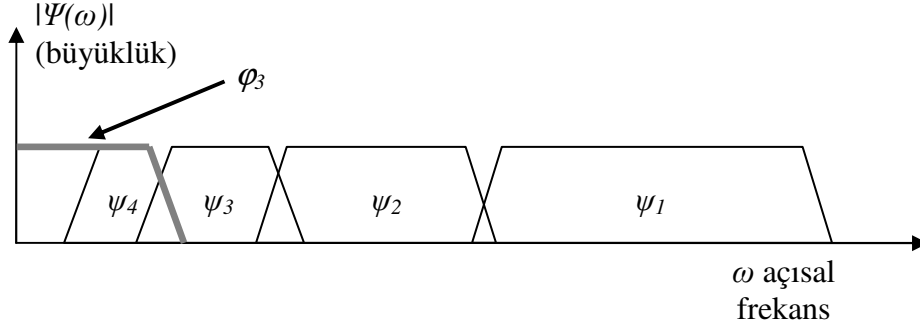
Ayrık dalgacık dönüşümünde her seviye arttırımında dalgacık 2 kat genişlemekte ve Eş. 5.7'ye göre frekans bandı yarıya düşmektedir. Bu şekilde dönüşüm seviyesi arttırılarak (j indisi azaltılarak), Eş. 5.6'da tanımlanmış olan açılımdaki gibi bir işaretin tüm frekans spektrumu bantlar halinde kaplanabilir [12].



Şekil 5.4. ADD'de ilk 4 seviye için dalgacık fonksiyonu ile frekans bandının kaplanması [12]

Ancak bu yöntemde tüm spektrumu kaplamak için sonsuz sayıda dalgacık gerekir. Çünkü her seferinde dalgacık fonksiyonunun bandı yarıya düşer ve sifıra ulaşmak mümkün olmaz. Bu sorunu gidermek ve analizde kullanılacak dalgacık fonksiyonu sayısını düşük tutmak için alçak-geçiren frekans karakteristiği olan ölçek fonksiyonu geliştirilmiştir. Bu özellik kullanılarak belirli bir seviyede analiz kesilerek sinyalin tüm frekans bandı kullanılan dalgacık fonksiyonu sayısını sonsuza götürmeye gerek kalmadan kaplanabilir. Şekil 5.5'te görüldüğü gibi dalgacık fonksiyonu tarafından analiz

3. seviyeye kadar götürülür ve geri kalan kısım ölçek fonksiyonu tarafından tamamlanır ($f \approx \varphi_4 + \psi_3 + \psi_2 + \psi_1$) [12].



Şekil 5.5. ADD’de ilk 3 seviye için ölçek ve dalgacık fonksiyonları ile frekans bandının kaplanması [12]

Bu sorunlar nedeniyle ayrık dalgacık dönüşümünde $\psi_{j,k}(t)$ dalgacık fonksiyonun yanında, ikinci bir baz fonksiyonu olarak $\varphi_k(t)$ ölçek fonksiyonu da tanımlanır. Bu iki baz fonksiyonu kullanılarak $f(t)$ işaretinin ayrık dalgacık açılımı:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) \varphi_k(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(j,k) \psi_{j,k}(t) \quad (5.8)$$

$$f(t) = \sum_k c_{j_0}(k) 2^{j_0/2} \varphi(2^{j_0} t - t) + \sum_k \sum_{j=j_0}^{\infty} d_j(k) 2^{j/2} \psi_{j,k}(2^{j/2} t - k) \quad (5.9)$$

şeklinde yazılır. Yukarıdaki açılımdaki katsayılar ayrık dalgacık dönüşümü katsayılarıdır. Burada $d(j,k)$ *ayrıntı* (detail) katsayıları, $c(k)$ ise *yaklaşım* (approximation) katsayıları olarak adlandırılır. j indisi ölçeği (frekans bilgisini), k indisi ise konumu (zaman bilgisini) vermektedir. Açılımda yaklaşıklık katsayıları sadece j_0 ölçeği (son seviyeye ait ölçek değeri) için hesaplanmakta, ayrıntı katsayıları ise j_0 ’dan sonraki tüm ölçekler (son seviyeye kadarki tüm ölçek değerleri) için hesaplanmaktadır.

$\varphi_k(t)$ ölçek ve $\psi_{j,k}(t)$ dalgacık fonksiyonları aşağıda verilen ortogonallik koşulunu sağlıyorsa dönüşüm katsayılarını hesaplamak kolaylaşacaktır. Bu fonksiyonlar için ortogonallik koşulu aşağıdaki gibi verilir:

$$\langle \varphi_k(t), \psi_l(t) \rangle = \int \varphi_k(t) \overline{\psi_l(t)} dt = \delta_{k,l} \quad (5.10)$$

Eş. 5.6'nın her iki tarafı ayrı ayrı $\varphi_k(t)$ ve $\psi_{j,k}(t)$ ile çarpılarak ve dalgacık baz kümelerinin ortogonallik özelliği kullanılarak açılım katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$c_j(k) = \langle f(t), \varphi_k(t) \rangle = \int f(t) \overline{\varphi_k(t)} dt \quad (5.11)$$

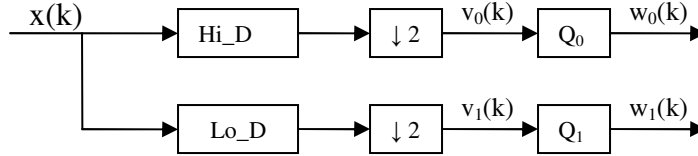
$$d_{j,k}(k) = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int f(t) \overline{\psi_{j,k}(t)} dt \quad (5.12)$$

Altbantlara ayırma

Eş. 5.7 ile verilmiş olan ayrık dalgacık dönüşümünde amaç $d_j(k)$ ve $c(k)$ katsayılarını bulmaktır. Bu katsayıları bulmak için alçak geçiren ve yüksek geçiren filtrelerin kullanıldığı *altbantlara ayırma* yöntemi kullanılır. Sinyal alçak geçiren filtreden geçirildiğinde hala gerçek sinyale benzediği için $c(k)$ 'ya yaklaşım katsayıları denir. Amaç, bu katsayılardan *alçak geçiren* filtreler elde etmektedir. Bir sinyalin ana hatları düşük frekans bileşenlerinde gizlidir. $d_j(k)$ ayrıştırma katsayıları yüksek frekans bileşenlerini (hızlı değişimleri, ayrıntıları) göstermektedir ve *yüksek geçiren* filtreler ile elde edilir.

Farklı ölçek çözünürlükleri elde etmek için sürekli dalgacık dönüşümünde dalgacığın ölçeği değiştirilir. Ayrık dalgacık dönüşümünde farklı ölçek çözünürlükleri için filtreler kullanılır. Değişik kesim frekanslı filtreler ile değişik ölçek çözünürlükleri elde edilir.

Sinyal işlemede ayrık dalgacık dönüşümünü elde etmek için en çok kullanılan yol Mallat algoritmasıdır. Bu, iki-kanallı altbant kodlama tekniğine dayanır. Bir altbant kodlayıcının temel yapısı Şekil 5.6’da gösterilmiştir [8].



Şekil 5.6. İki kanallı altbant kodlayıcı [8]

N uzunluğundaki bir $x(k)$ sinyali ideal bir alçak geçiren (Lo_D) ve yüksek geçiren (Hi_D) filtrelerinden geçirilmiştir. Filtrelerden geçen bu iki sinyalin de uzunluğu N kadardır. Başlangıçtaki veri miktarının iki katıyla uğraşmamak için filtrelenen sinyaller bir sonraki örneği yok eden aşağı örnekleme sisteminden geçirilir. Son aşama sinyali sayısal değerlere dönüştüren niceleme basamağıdır.

Spektrumun en alt bandını ölçek fonksiyonu kaplar. Üçüncü seviye ölçek fonksiyonu φ_3 , üçüncü seviyeden sonraki tüm dalgacık fonksiyonlarını kapsamaktadır. Eğer φ_3 ölçek fonksiyonuna aynı ölçek değerindeki ψ_3 dalgacık fonksiyonu ilave edilirse bir üst seviyedeki φ_4 ölçek fonksiyonu elde edilir ($\varphi_3 \approx \varphi_4 + \psi_4$). Ölçek ve dalgacık fonksiyonları arasındaki ilişki, *iteratif* (yinelemeli) olarak [8]:

$$\varphi_k(t) = \sum_n h_0(n) \sqrt{2} \varphi_k(2t - n) \quad (5.13)$$

$$\psi_{j,k}(t) = \sum_n h_1(n) \sqrt{2} \varphi_k(2t - n) \quad (5.14)$$

biçiminde verilir. Ayırma seviyesi j istenilen kesim frekansına göre seçilebilir. Şekil 5.7 bu yöntemi göstermektedir.

Eş. 5.13'e *çoklu çözünürlük analiz* (multi-resolution analysis) eşitliği ya da *ölçekleme* (dilation) eşitliği denilir. Buradaki $h_0(n)$ katsayıları ölçek filtresidir. İkinci eşitlik ise *dalgacık eşitliği*, $h_1(n)$ katsayıları dalgacık filtresidir. $h_0(n)$ filtresi alçak geçiren, $h_1(n)$ ise yüksek geçiren filtredir.

Ayrık dalgacık dönüşümü katsayıları Eş. 5.11 ve Eş. 5.12'de tanımlanmış olan filtreler cinsinden aşağıdaki gibi gösterebilir [8]:

$$c_j(k) = \sum_m h_0(m-2k)c_{j+1}(m) \quad (5.15)$$

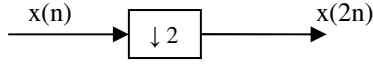
$$d_j(k) = \sum_m h_1(m-2k)c_{j+1}(m) \quad (5.16)$$

Görüldüğü gibi $c_j(k)$ katsayıları bilindikten sonra diğer seviyelere ait $c_j(k)$ ve $d_j(k)$ katsayıları $h_0(n)$ ve $h_1(n)$ filtreleri kullanılarak hesaplanabilir.

$c_j(k)$ ve $d_j(k)$ dalgacık katsayılarını hesaplamak için verilen Eş. 5.13 ve Eş. 5.14 sayısal işaret işlemede çok yaygın olarak kullanılan ve

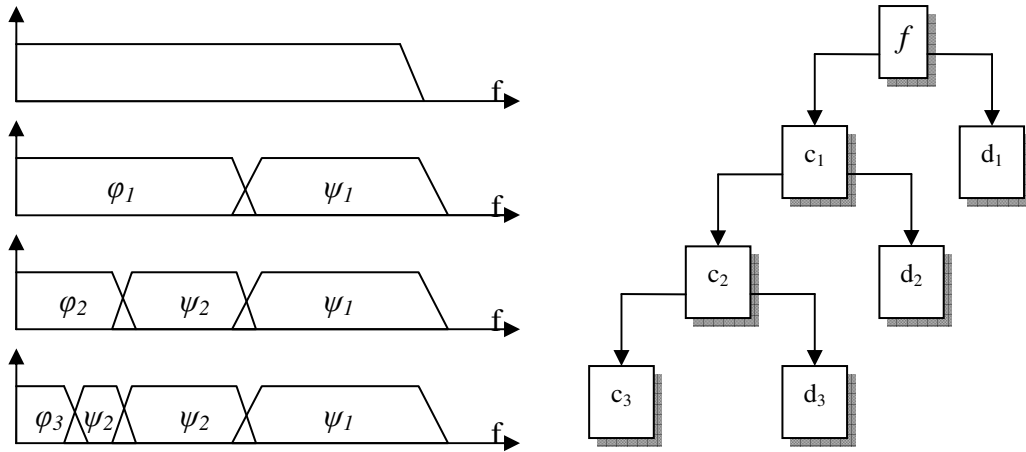
$$y(n) = x(2n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \quad (5.17)$$

ile verilen filtreleme eşitliğine benzemektedir [4]. $x(n)$ giriş dizisi, $h(n)$ filtre katsayıları olmak üzere filtrelenmiş çıkış dizisi $y(n)$ 'dir. $c_j(k)$ ve $d_j(k)$ katsayılarının eşitlikleri *aşağı-örnekleme* (down-sampling) eşitliğidir. Şekil 5.7'de gösterildiği gibi aşağı-örnekleme işleminde $x(n)$ giriş dizisi $y(n)=x(2n)$ gibi bir çıkış dizisi oluşmakta, eleman sayısı yarıya düşmektedir. Bu işlemin frekans tanım bölgesindeki karşılığı frekans spektrumunun alt yarısını seçip almaktır. Eleman sayısının yarıya düşmesi örnekleme frekansını da yarıya düşürecektir, dolayısıyla, işaretin sahip olduğu en yüksek frekansın yarı değerine kadarki tüm frekanslar kalacaktır.



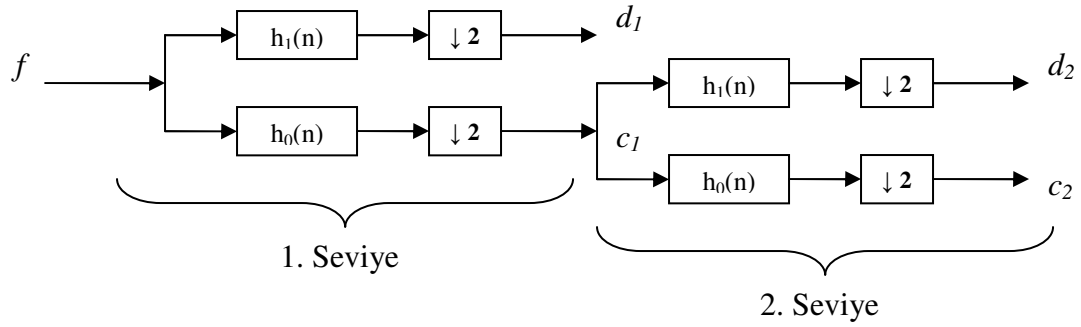
Şekil 5.7. Aşağı örnekleme [8]

Ayrık dalgacık dönüşümünde de bir çeşit aşağı-örnekleme yapılmaktadır. İşaret alçak ve yüksek geçiren filtrelerden geçirilerek örneklenmekte ve frekans bantlarına ayrılmaktadır. Bu süreç Şekil 5.8’de gösterilmiştir.



Şekil 5.8. f sinyali yaklaşım vektörü c_1 ve detay vektörü d_1 ’e ayrılmıştır. İşlem c_1 ’in giriş sinyali gibi çalışmasıyla kendini tekrar eder [8]

Her j seviyesinde sonuç j -seviye c_j yaklaşımı ve d_j detay sapması olarak bulunur. Sinyaldeki düşük frekans bilgisi genelde sinyalin en önemli bölümüdür ve bu yaklaşım bilgisini taşıyan bölümdür. Yüksek frekans bilgisi genelde sinyalin istenmeyen kısımlarıdır [8].



Şekil 5.9. Alçak geçiren $h_1(n)$ ve yüksek geçiren $h_2(n)$ filtrelerinden geçen d ve c sinyalleri [8]

Çoklu seviye durumunda bir önceki yaklaşım cA_{j-1} bir sonraki j basamağındaki ayrışma seviyesi için giriştir. Bu aşamalar böyle devam eder. Dönüşümde seviye ilerledikçe aşağı örnekleme nedeniyle veri sayısı ve kaplanan frekans bandı yarıya düşmektedir.

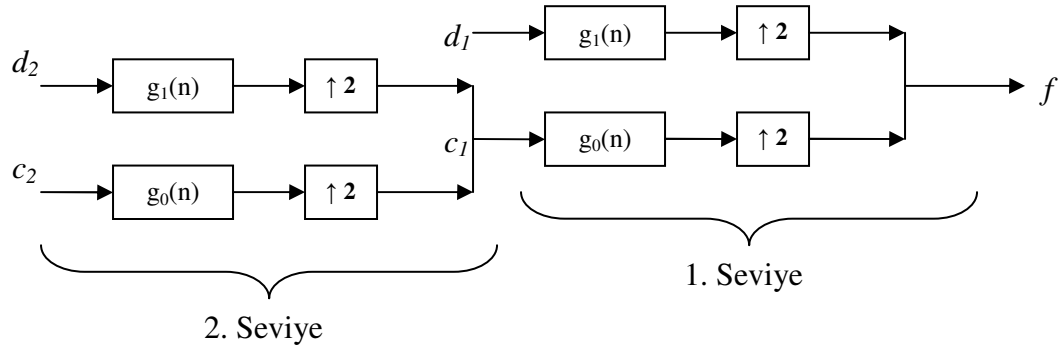
Ayrık dalgacık sentezi

Ayrık dalgacık dönüşümünün sentez kısmı da aynı şekilde alçak ve yüksek geçiren filtreler ile yapılmaktadır. Sentez filtrelerinin tek farkı, analiz filtrelerinin zaman eksenine göre tersi (time reversal) olmalarıdır. İşareti ayrık dalgacık dönüşümü katsayılarından sentezlemek için yaklaşıklık katsayıları alçak geçiren filtreden ve ayrıştırma katsayıları yüksek geçiren filtreden geçirilerek bir önceki seviyenin yaklaşıklık katsayıları elde edilir. Aynı işlem sonraki seviyeler için de tekrarlanır ve işarete ulaşılır. Bu sürece ait eşitlik aşağıda verilmiştir:

$$c_{j+1}(k) = \sum_m g_0(k-2m)c_j(m) + \sum_m g_1(k-2m)d_j(m) \quad (5.14)$$

Sentez (yeniden yapılandırma), analizin (ayrışmanın) tersidir. Sinyalin ayrışan bileşenlerinin toplanması ve orijinal sinyalin tekrar elde edilmesidir

Sentez filtreleri *yukarı-örnekleme* (up-sampling) yapmaktadır, yani eleman sayısını iki katına çıkarmaktadır. Analizde olduğu gibi sentezde de süreç yaklaşıklık katsayıları üzerinden yapılmaktadır. 2. seviye katsayıları c_2 ve d_2 filtrelenerek 1. seviye yaklaşıklık katsayıları c_1 elde edilir. Aynı şekilde 1. seviye katsayıları c_1 ve d_1 filtrelenerek işaret elde edilir [8].



Şekil 5.10. Yeniden yapılandırma adımı. Üst örnekleme işlemi ayrıştırmada uygulanan aşağı örnekleme adımını düzeltmek için kullanılır. Üst örnekleme işlemi her bir diğer örneğe 0 ekleyerek yapılır [8]

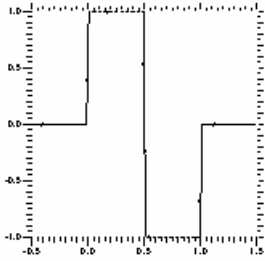
Yeniden yapılandırma basamağında filtre seçimi orijinal sinyalin tam olarak elde edilebilmesinde önemlidir. Bir sinyalin aşağı örnekleme yapılrken anlamsız bilgiler içeren bir örneği oluşur. Bunu önleyebilmek için ayrışma ve yeniden yapılandırma için birbirlerine benzeyen filtreler seçilmelidir. Şekil 5.9'daki alçak geçiren ve yüksek geçiren ayrışma filtreleri ve Şekil 5.10'daki alçak geçiren ve yüksek geçiren yapılandırma filtreleri birlikte *dörtlü ayna filtreleri* denilen yapıyı oluşturur.

5.3. Bazı Temel Dalgacık Çeşitleri

Fourier analizinde baz fonksiyonu olarak sinüsler kullanılır. Dalgacık analizinde ise bu amaçla dalgacıklar kullanılır. Dalgacık analizinin avantajı baz fonksiyonuna *ölçekleme* (dilation, scaling) ve *öteleme* (translation) özelliği kazandırmasıdır. Dalgacık dönüşümünde işaretler analiz edilirken analiz penceresinin uzunluğu ve konumu kendiliğinden değişmektedir. Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü'nde analiz penceresi

kaydırılabildiği halde pencere uzunluğu analiz boyunca sabit kalmaktadır. Matlab programındaki dalgacık fonsiyonları şu şekilde verilmektedir:

5.3.1. Haar dalgacığı

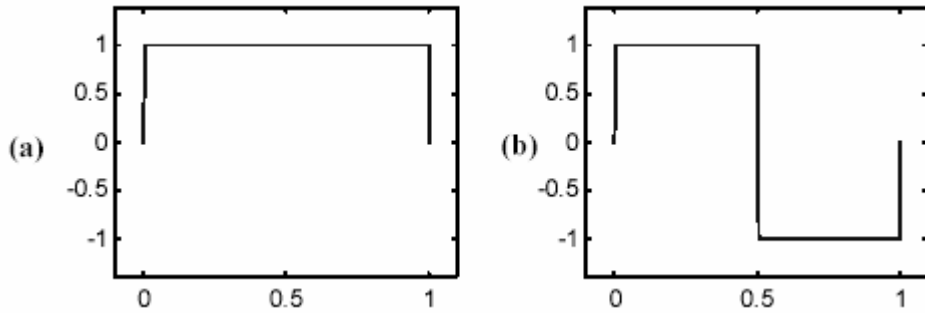


Şekil 5.11. Haar dalgacığı

Haar dalgacığı sınırlı bir alandaki basamak fonksiyonudur. Bu simetrik ana fonksiyon kare dalga olarak da bilinir. Hem sürekli hem de ayırık dalgacık dönüşümü yapılabilir.

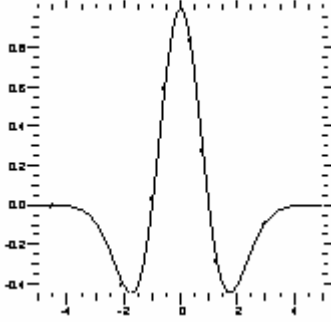
$$\Psi(t) = \begin{cases} 1 \rightarrow 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 \rightarrow \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 \rightarrow t \notin [0,1] \end{cases}$$

Bu baz tek bit sinyal işleme uygulamalarında yaygındır ve dalgacık dönüşümünün özelliklerini meydana çıkarmak açısından yararlıdır.



Şekil 5.12. Haar dalgacığının ölçek ve dalgacık fonsiyonları

5.3.2. Meksika şapkası (Mexican hat) dalgacı



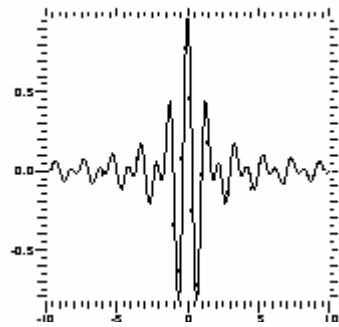
Şekil 5.13. Meksika şapkası (Mexican hat) dalgacı

Şekil 5.13'teki fonksiyona Meksika şapkası dalgacı denir. Bu simetrik ana fonksiyon Gauss dağılım fonksiyonunun ikinci türevidir. Ölçek fonksiyonu olmadığı için ayrık dalgacık dönüşümü yapılamaz.

$$\Psi(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} \right) (1 - x^2) e^{-x^2/2}$$

Bu fonksiyon görüntü işleme uygulamalarında daha çok kullanılır.

5.3.3. Littlewood – Paley Dalgacı



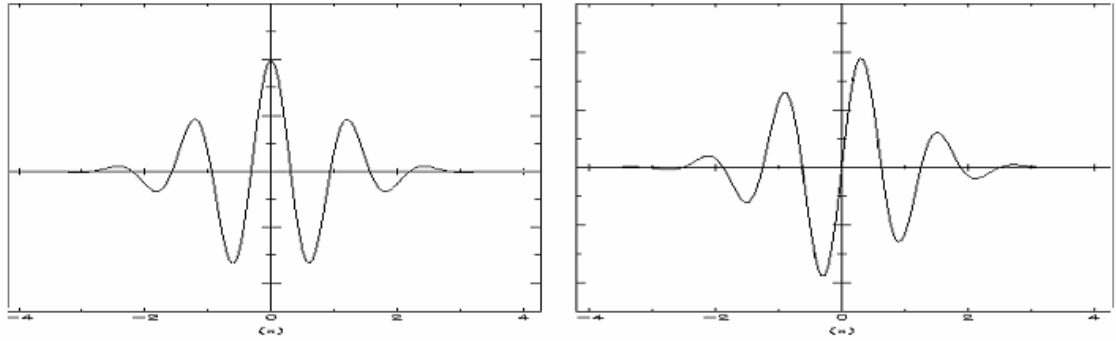
Şekil 5.14. Littlewood – Paley dalgacı

Littlewood – Paley bir ana fonksiyondan üretilmiştir. Simetriktir ve şu şekilde gösterilir:

$$\Psi(t) = (\sin 2\pi t - \sin \pi t) / \pi t$$

Littlewood – Paley fonksiyonu daha az yerelleştirilmiş olduğu için ayrık dönüşümde daha az kullanışlıdır.

5.3.4. Morlet dalgacı



Şekil 5.15. Morlet dalgacı: solda gerçel bölüm ve sağda sanal bölüm görülmektedir.

Morlet dalgacı şu şekilde tanımlanır:

$$\hat{g}(\omega) = e^{-2\pi (v-v_0)^2}$$

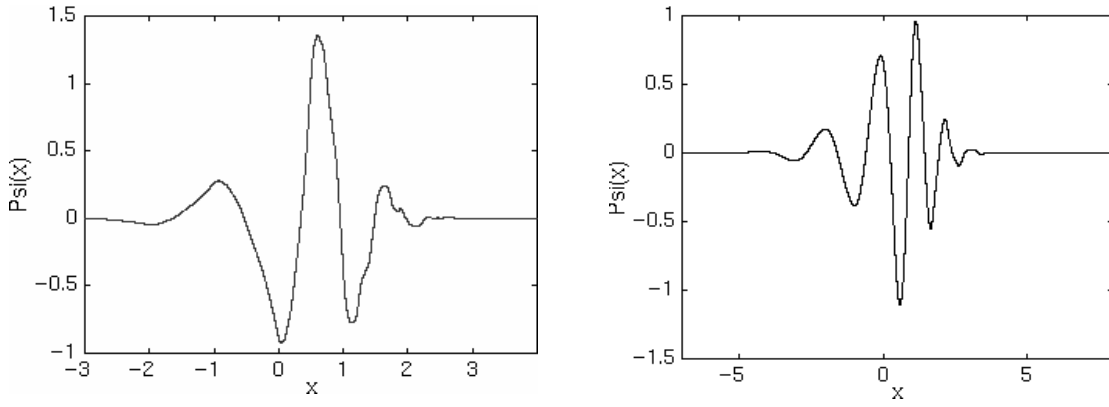
Bir gerçel bir de sanal bölüm olmak üzere iki parçaya ayrılmış karmaşık bir yapısı vardır:

$$g_r(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(2\pi v_0 x)$$

$$g_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(2\pi v_0 x)$$

burada v_0 sabittir. Uygunluk şartı $v_0 > 0.8$ ile tanımlanır. Şekil 5.15 bu iki fonksiyonu göstermektedir. Simetriktir, ölçek fonksiyonu olmadığı için ayrık dalgacık dönüşümü yapılamaz.

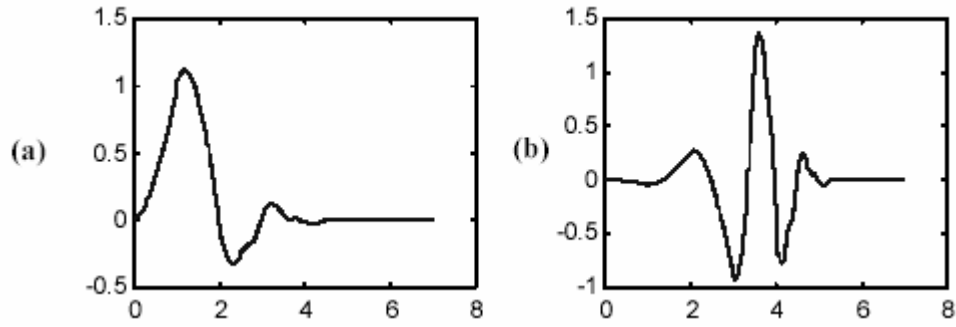
5.3.5. Daubechies dalgacı



Şekil 5.16. Daubechies 4 ve 8 dalgacıları

Şekillerde görülen fonksiyonlar, dalgacık fonksiyonlarının içinde çok bilinen Daubechies dalgacık fonksiyonlarıdır. Bu dalgacık fonksiyonlarının açık ifadeleri yoktur. Simetrik değildir. N derece olmak üzere Daubechies dalgacığının uzunluğu $2N-1$ kadardır. 1.derece Daubechies dalgacı (db1) kare dalgacı vermektedir. Hem sürekli hem de ayrık dalgacık dönüşümü yapılabilir.

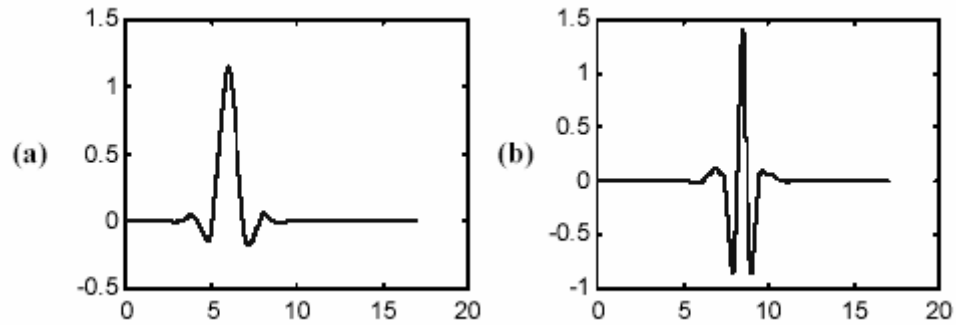
Dalgacık fonksiyonlarının tanımlandığı kaydırma ölçekli uzaydaki ızgara yapısına *dyadik ızgara* denilir.



Şekil 5.17. Daubechies 4 dalgacığının ölçek ve dalgacık fonksiyonları

5.3.6. Biortogonal dalgacıklar

Biortogonal dalgacıkların açık ifadeleri yoktur. Simetrikler, bu dalgacıklarla sentez tam olarak mümkündür. N_s sentez derecesi, N_a analiz derecesi olmak üzere biortogonal dalgacığının uzunluğu $2N+1$ kadardır. Hem sürekli hem de ayrık dalgacık dönüşümü yapılabilir. Şekil 5.18’de ‘bior5.5’ (biortogonal 5. derece) dalgacığının ölçek ve dalgacık fonksiyonu verilmiştir.

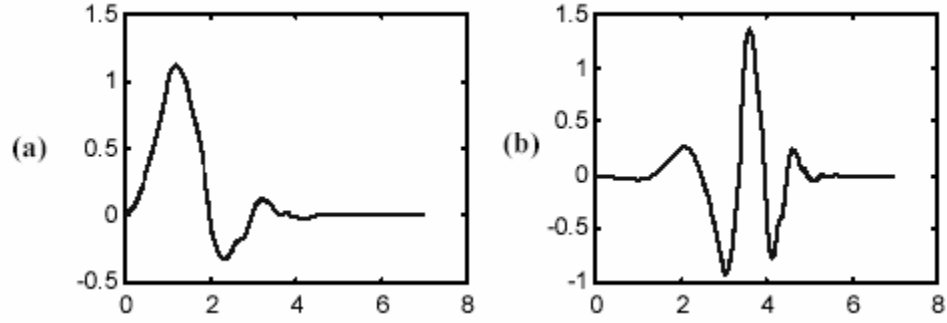


Şekil 5.18. Bior 5.5 (biortogonal) dalgacığın ölçek ve dalgacık fonksiyonları

5.3.7. Coiflet dalgacıkları

Coiflet dalgacıklarının açık ifadeleri yoktur. Simetriye yakındırlar. N derece olmak üzere Coiflet dalgacığının uzunluğu $6N-1$ kadardır. Hem sürekli hem de ayrık dalgacık

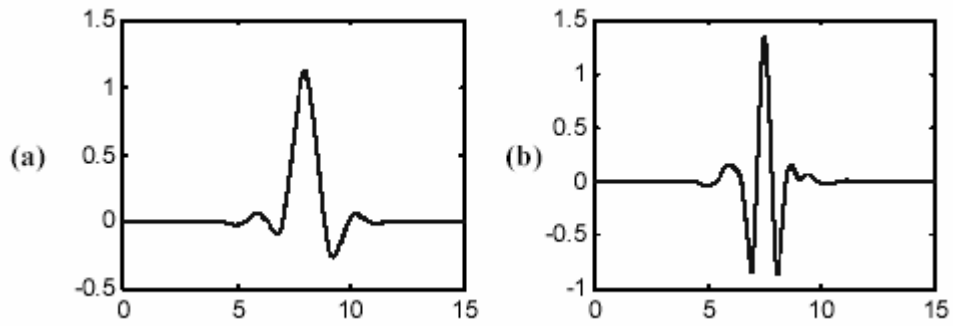
dönüşümü yapılabilir. Şekil 5.19'da 'coif3' (Coiflet 3. derece) dalgacığının ölçek ve dalgacık fonksiyonu verilmiştir.



Şekil 5.19. Coif3 (coiflet) dalgacığının ölçek ve dalgacık fonksiyonu

5.3.8. Simetrlili (symlet) dalgacıklar

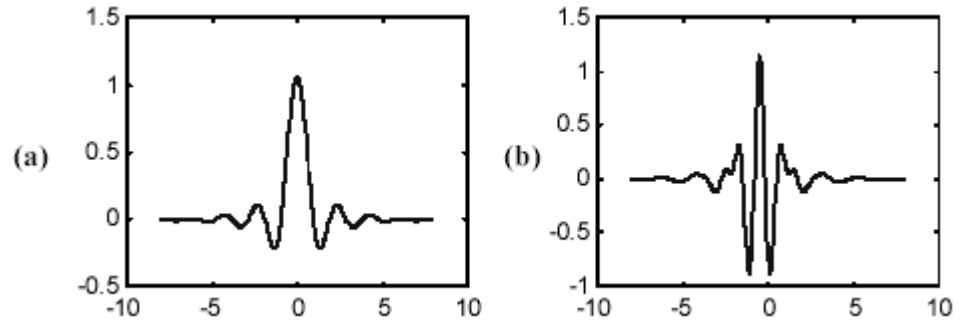
Bu dalgacıkların da açık ifadeleri yoktur. Simetriye yakındırlar. N derece olmak üzere simetrlili dalgacığın uzunluğu $2N-1$ kadardır. Hem sürekli hem de ayrık dalgacık dönüşümü yapılabilir. Şekil 5.20'de 'sym4' (simetrlili 4. derece) dalgacığının ölçek ve dalgacık fonksiyonu verilmiştir.



Şekil 5.20. Sym8 (simetrlili) dalgacığının ölçek ve dalgacık fonksiyonu

5.3.9. Meyer dalgacı

Açık ifadeleri yoktur. Simetriktir, hem sürekli hem de ayrık dalgacık dönüşümü yapılabilir. Şekil 5.21’de Meyer dalgacığının ölçek ve dalgacık fonksiyonu verilmiştir.



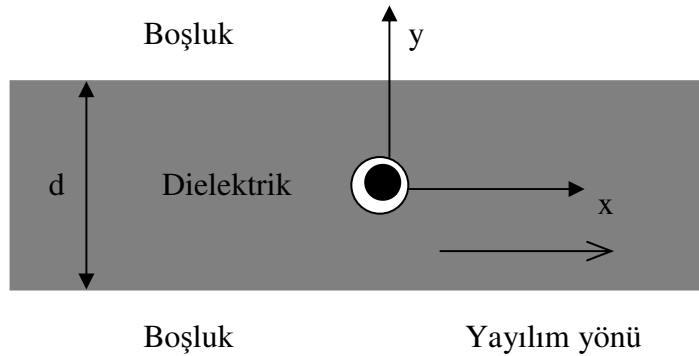
Şekil 5.21. Meyer dalgacığının ölçek ve dalgacık fonksiyonu

6. DİELEKTRİK DALGA KILAVUZLARI

Bu bölümde iki boyutlu bir dalga kılavuzu Zaman Alanlı Sonlu Farklar (Finite Differences Time Domain – FDTD) yöntemi ile modellenerek simüle edilmiştir. Amaç, dalga kılavuzu içinde dalgacık filtrelerinin uygulanarak sinyalin kılavuzun bir ucundan diğerine taşınabileceğini ve geliştirmeler yapılarak elektromanyetik alanların ifade edilebileceğini göstermektir.

6.1. Dielektrik Dalga Kılavuzlarının Teorisi

Burada z-yönünde değişmeyen, iki tarafı boşlukla sandviçlenmiş dielektrik dilim dalga kılavuzu ele alınmıştır. Dalga kılavuzunun konfigürasyonu ve koordinat eksenleri Şekil 6.1’de gösterildiği gibidir. Bu analizde dalgaların +x yönünde yayıldığı varsayılmaktadır [10].



Şekil 6.1. Dielektrik dilim dalga kılavuzu [10]

Genelde kayıplı maddeler için aşağıdaki eşitlikler kullanılmaktadır:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + j\omega\epsilon\mathbf{E} = j\omega\epsilon_{eff}\mathbf{E} \quad (6.2)$$

Burada:

$$\epsilon_{eff} = \frac{\sigma}{j\omega} + \epsilon$$

olarak verilmektedir. Burada incelenmiş olan TM simülasyonunda E_z , H_x ve H_y kullanılmıştır. Elektrik alan her yerde yayılım yönüne dik durumdadır.

Kapalı alan çözümleri için $\sigma = 0$ ve $\epsilon_{eff} = \epsilon$ olarak alınmıştır. Doğrusal, dispersif olmayan bir ortamda $\epsilon = \epsilon(x, y)$ 'dir. Dolayısıyla Şekil 6.1 için:

$$\epsilon(x, y) = \begin{cases} \epsilon_d = \epsilon_{r,d} \epsilon_0 & |y| \leq d/2 \\ \epsilon_0 & |y| \geq d/2 \end{cases}$$

geçerlidir. Boşluk dışında farklı bir dielektrik madde ile sandviçlenen dielektrik dalga kılavuzları için belirlenen geçirgenlik (*permittivity*) ϵ_0 ile değiştirilir.

Sadece E_z , H_x ve H_y terimlerini sabit tutarak ve $\partial(E, H) / \partial z = 0$ olmak üzere

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -j\omega\mu H_x \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \quad (6.5)$$

elde edilir. x 'e bağlı, $\gamma = \alpha + j\beta$ olmak üzere, $e^{-\gamma x}$ terimini içeren çözümler aranmaktadır (dalgaın yayıldığı çözümlerde $\gamma = j\beta$ 'ya eşittir.)

$$H_y(x, y) = H_y^0(y) e^{-\gamma x} \quad (6.6)$$

$$H_x(x, y) = H_x^0(y)e^{-\gamma x} \quad (6.7)$$

$$E_z(x, y) = E_z^0(y)e^{-\gamma x} \quad (6.8)$$

Eş. 6.6 ve Eş. 6.8 arasındaki eşitlikler Eş. 6.3 ve Eş. 6.5'e yerleştirilirse:

$$H_y^0(y) = \frac{-\gamma}{h^2} \frac{\partial H_x^0(y)}{\partial y} \quad (6.9)$$

$$E_z^0(y) = \frac{j\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_x^0(y)}{\partial y} \quad (6.10)$$

elde edilir. Böylece sadece $H_x^0(y)$ çözülerek sonuç bulunabilir.

Dalga eşitliğinde H_x terimini sabit tutarak :

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{H} = 0 \quad (6.11)$$

ve

$$\frac{\partial^2 H_x(x, y)}{\partial z^2} = 0 \text{ ve } \frac{\partial^2 H_x(x, y)}{\partial x^2} = \gamma^2 H_x(x, y) \text{ ile } e^{-\gamma x} \text{ terimlerini yok ederek:}$$

$$\frac{\partial^2 H_x^0(y)}{\partial z^2} + \gamma^2 H_x^0(y) + \omega^2 \mu \epsilon H_x^0(y) = 0 \quad (6.12)$$

bulunur. Uygunluk için Eş. 6.12 yeniden:

$$\frac{\partial^2 H_x^0(y)}{\partial z^2} + h^2 H_x^0(y) = 0 \quad (6.13)$$

şeklinde yazılabilir. Burada dilimin içinde ve dışındaki durumlar:

$$h^2 = \begin{cases} h_d^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_d \\ h_0^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Dielektrik içinde Eş. 6.13 şu çözümü sağlamaktadır:

$$H_x^0(y) = C_0 \sin(\beta_y y) + C_e \cos(\beta_y y) \quad (6.14)$$

Eş. 6.14'ü Eş. 6.13'e yerleştirerek ve yayılan çözümler için $\gamma^2 = (j\beta)^2 = -\beta^2$ alınarak:

$$\beta_y^2 = h_d^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_d - \beta^2 \quad (6.15)$$

bulunur. Dielektrik dilimin dışında:

$$H_x^0(y) = \begin{cases} C_a e^{-\alpha_y(y-d/2)}, y \geq d/2 \\ C_e e^{\alpha_y(y+d/2)}, y \leq -d/2 \end{cases} \quad (6.16)$$

alınır, Eş. 6.16, Eş. 6.13'e yerleştirilerek yayılan çözümler için:

$$\alpha_y^2 = -h_0^2 = \beta^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \quad (6.17)$$

bulunur. α_y dielektrik dilimin dışındaki bozulma oranına denk gelmektedir.

Eş. 6.17 ile Eş. 6.15 birleştirilirse

$$\alpha_y^2 + \beta_y^2 = \omega^2 (\mu_0 \epsilon_d - \mu_0 \epsilon_0) \quad (6.18)$$

sonucu bulunur. Eş. 6.18'i şu şekilde yazmak daha yararlıdır:

$$\left(\alpha_y \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\beta_y \frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi f d}{c}\right)^2 (\epsilon_{r,d} - \epsilon_{r,0}) \quad (6.19)$$

c, ışığın boşluktaki hızı olup, boşluk için $\epsilon_{r,0} = 1$ 'dir.

Eş. 6.14'teki ilk terim “tek” TE modu, ikinci terim “çift” TE modu olarak ifade edilebilir. Alt indisler bu isimlendirmeyi desteklemektedir.

İlk önce tek TE modları için alanların çözümlemesi yapılacaktır. $H_x^0(y) = C_0 \sin(\beta_y y)$ ve Eş. 6.16 ile başlanarak Eş. 6.9 ve Eş. 6.10 ile $H_y^0(y)$ ve $E_z^0(y)$ için çözüm yapılabilir. H_x 'in dielektrik dilim sınırlarındaki devamlılığı kullanılarak $C_a = C_0 \sin(\beta_y d/2) = -C_b$ olarak bulunur. Sonunda $E_0 \equiv (j\omega\mu C_0)/\beta_y$ yerleştirmesi yapılarak, dilimin içinde $|y| \leq d/2$:

$$E_z^0(y) = E_0 \cos(\beta_y y) \quad (6.20)$$

$$H_x^0(y) = -\frac{\beta_y E_0}{\omega\mu} \sin(\beta_y y) \quad (6.21)$$

$$H_y^0(y) = -\frac{\beta E_0}{\omega\mu} \cos(\beta_y y) \quad (6.22)$$

bulunur. Dilimin aşağısında ve yukarısında:

$$E_z^0(y) = \begin{cases} \frac{E_0 \beta_y}{\alpha_y} \sin(\beta_y d/2) e^{-\alpha_y (y-d/2)}, & y \geq \frac{d}{2} \\ \frac{E_0 \beta_y}{\alpha_y} \sin(\beta_y d/2) e^{\alpha_y (y+d/2)}, & y \leq -\frac{d}{2} \end{cases} \quad (6.23)$$

sonucu ortaya çıkar.

Eş. 6.20'nin Eş. 6.23'e $y = d/2$ şartı ile yerine konulmasıyla:

$$\frac{\alpha_y \frac{d}{2}}{\beta_y \frac{d}{2}} = \tan(\beta_y \frac{d}{2}) \quad (6.24)$$

bulunur. Buradan β_y ve α_y için Eş. 6.24, Eş. 6.19 ile çözülebilir. β_y dielektrik dilim dalga kılavuzu için enine yönde (y-) dalga sayısı ve α_y dalga kılavuzu dışındaki bozulma oranıdır.

$H_x^0(y) = C_0 \sin(\beta_y y)$ 'in çift modları için benzer bir işlem yapılır:

$$E_z^0(y) = \begin{cases} E_e \sin(\beta_y y) & |y| \leq -\frac{d}{2} \\ \frac{E_e \beta_y}{\alpha_y} \sin(\beta_y d/2) e^{-\alpha_y (y-d/2)} & y \geq \frac{d}{2} \\ \frac{E_e \beta_y}{\alpha_y} \sin(\beta_y d/2) e^{\alpha_y (y+d/2)} & y \leq -\frac{d}{2} \end{cases} \quad (6.25)$$

Sınırlarda E_z 'nin sürekli olduğu varsayılır:

$$\frac{\alpha_y \frac{d}{2}}{\beta_y \frac{d}{2}} = -\cot(\beta_y \frac{d}{2}) \quad (6.26)$$

Tekrar β_y ve α_y için Eş. 6.26 Eş. 6.19 ile çözülebilir.

Yayılm sabiti için verilen Eş. 6.17 şu şekilde düzenlenebilir:

$$\beta = \sqrt{\alpha_y^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \quad (6.27)$$

Yayılm yönü doğrultusunda elektromanyetik dalganın dalgaboyu (x-yönü):

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_y^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}} \quad (6.28)$$

olarak verilir.

6.1.1. TEM düzlem dalgası

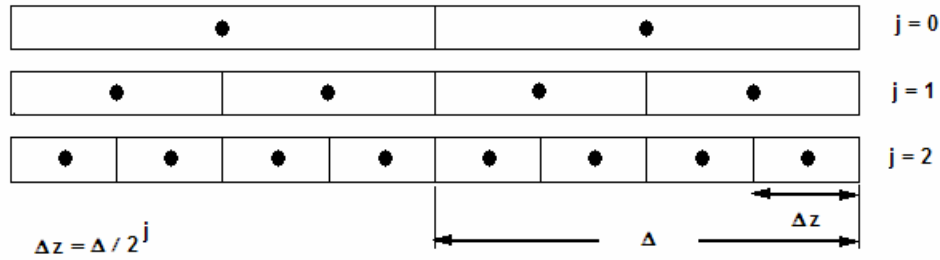
Bu bölümde TEM düzlem dalgasının homojen, düzlemsel izotropik ve dağılmadan ilerleyen en basit hali analiz edilmiştir. Çözülmesi gereken eşitlikler:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.29)$$

olarak verilmektedir [10]. Her alan bileşeni Eş. 6.30'da görüldüğü gibi ölçekleme ve dalgacık bileşenlerine ayrılır. Burada düşük çözünürlük seviyesindekiler ölçekleme (ϕ) fonksiyonuyla, yüksek çözünürlüktekiler dalgacık (ψ) fonksiyonuyla verilirler [11]:

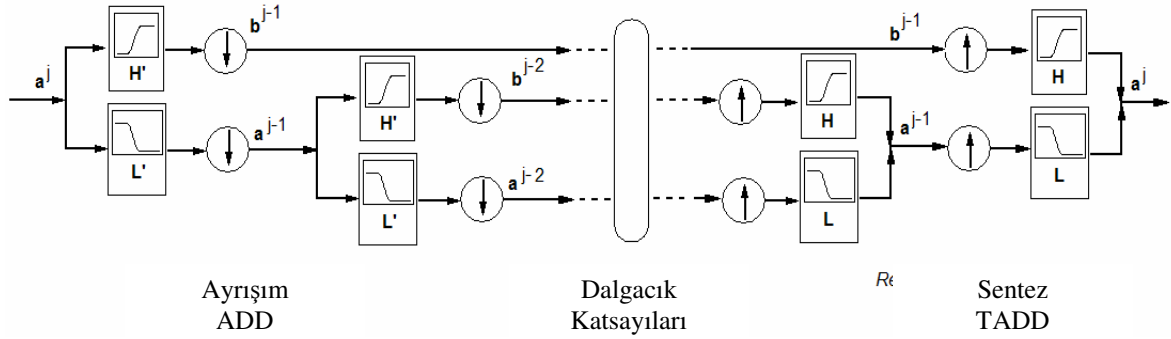
$$F^n(z) = \sum_k^n a_k^J \phi_k^J(z) = \begin{cases} \sum_k^n a_k^0 \phi_k^0(z) \\ + \sum_k \sum_{j=0}^{J-1} b_k^J \psi_k^J(z) \end{cases} \quad (6.30)$$

Uzaysal kesiklendirme (*discretization*), alanı Δ genişliğinde N tane hücreye bölüp, her hücrenin merkezini örnekleme noktası olmak üzere N adet örnekleme noktası almaktır. Buna 0 çözünürlük seviyesi denir. Eğer her hücre 2^j noktaya ayrılırsa istenilen çözünürlüğün maksimum seviyesi J 'ye ulaşılır ve simülasyon alanında aralarında Δz mesafe olan $N \times 2^j$ örnekleme noktası bulunur [11].



Şekil 6.2. J=2 için uzaysal örnekleme [11]

a_k^j , ayrık dalgacık dönüşümünün kapsadığı ayrıştırma işlemindeki ilk ve son basamak olup, katsayıları gerçek alan değerlerini göstermek için yeterlidir. Dalgacık dönüşümü ile yapılan çoklu çözünürlük analizi, bir sinyalin biri düşük frekansları, ölçekleme fonksiyonlarını (φ), diğeri yüksek frekansları, dalgacık fonksiyonlarını (ψ) kapsayan iki parçaya ayrıldığı sayısal filtreleme işlemi olarak düşünülebilir. Ayrık Dalgacık Dönüşümü (Discrete Wavelet Transform – DWT) kapsamında çoklu çözünürlük analizi, birbirini izleyen, her biri bir alçak geçiren ve yüksek geçiren ve darbe yanıtları $L(m)$ ve $H(m)$ olan ($m \in \mathbb{Z}$) filtreye sahip filtreleme aşamalarıyla sağlanır. Filtreleme işlemi alanın katlanmanın ardından filtre katsayılarının, sadece çift indisli katsayıların kalmasını sağlayacak şekilde yok edilmesidir (*decimation*). Ters Dalgacık Dönüşümü (Inverse Discrete Wavelet Transform – IDWT) art arda yapılan, araya yerleştirmeleri (*interpolation*) izleyen katlanmalarla, önceki aşamada ayrıştırmaya girmiş alan katsayılarını elde eder [11].



Şekil 6.3. Filtreleme işleminin bir adımı: düşük ve yüksek geçiren filtreler a^j ve b^j katsayılarını çıkartmaktadır [11]

Böylece Eş. 6.1 ve Eş. 6.2 zaman türevleri için merkezi farklarla ve uzaysal türevler için ADD ile hesaplanan uzaysal türev operatörüyle ayrıklaştırılabilirler. Dolayısıyla her katsayı, bir önceki zaman basamağında aynı nokta için ve o zaman aralığı için diğer alan bileşenlerinin katsayılarından elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
 H^{n+\frac{1}{2}} &= H^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu} \frac{1}{\Delta} D^J (E)^n \\
 E^{n+1} &= E^n - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \frac{1}{\Delta} D^J (H)^{n+\frac{1}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{6.31}$$

Burada Δt ve Δ zaman ve uzay aralıkları ve $\mathbf{D}^J$, J seviyesindeki uzaysal türev operatörüdür. Bu operatör a ve b katsayıları için alan dönüşümünü sağlar ve $\mathbf{D}$ ile gösterilen bir matris oluşturur. Bu eşitlikler keyfi bir seviye olan J çözünürlük seviyesiyle şu şekilde tekrar yazılabilir:

$$\begin{aligned}
 {}^{n+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} H^{\psi_j} \\ H^{\phi^0} \end{bmatrix}^J &= {}^{n-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} H^{\psi_j} \\ H^{\phi^0} \end{bmatrix}^J - \frac{\Delta t}{\mu} \frac{1}{\Delta} D^J {}^n \begin{bmatrix} E^{\psi_j} \\ E^{\phi^0} \end{bmatrix}^J \\
 {}^{n+1} \begin{bmatrix} E^{\psi_j} \\ E^{\phi^0} \end{bmatrix}^J &= {}^n \begin{bmatrix} E^{\psi_j} \\ E^{\phi^0} \end{bmatrix}^J - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \frac{1}{\Delta} D^J {}^{n+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} H^{\psi_j} \\ H^{\phi^0} \end{bmatrix}^J
 \end{aligned}
 \tag{6.32}$$

$j=0,\dots,J-1$ ' dir. $\mathbf{D}$ matrisi, Daubechies dalgacıklarının sonlu yapısından dolayı sınırlı bir bantgenişliğine sahiptir, ve bu genişlik filtrenin genişliği arttıkça atmaktadır. Bileşenleri ölçekleme ve dalgacık fonksiyonlarının birer integrali olup, birinci türevlerinin ayrık uzaysal dönüşümleridir. Çoklu çözünürlük yüzünden bu matris daha düşük çözünürlükteki alt matrislere ayrılabilir. Böylece eğer en yüksek seviyedeki orijinal matrise $\mathbf{D}^J$ denilecek olursa, $\mathbf{D}^J$ birer seviye daha düşük $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{D}$ matrislerinden bulunabilir:

$$\mathbf{D}^J = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{J-1} & \mathbf{B}^{J-1} \\ \mathbf{r}^{J-1} & \mathbf{D}^{J-1} \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

Burada $\mathbf{A}^j = \{ \alpha_{il}^j \}$, $\mathbf{B}^j = \{ \beta_{il}^j \}$, $\mathbf{r}^j = \{ \gamma_{il}^j \}$ ve $\mathbf{D}^j = \{ d_{il}^j \}$ dir. Matris bileşenleri:

$$\begin{aligned} \alpha_{il}^j &= 2^j \alpha_{i-l} \\ \beta_{il}^j &= 2^j \beta_{i-l} \\ \gamma_{il}^j &= 2^j \gamma_{i-l} \\ d_{il}^j &= 2^j d_{i-l} \end{aligned} \quad (6.34)$$

olarak ifade edilir. Daha detaylı olarak:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \int \psi(z-1) \cdot \frac{d}{dz} \psi(z) \cdot dz & \beta_1 &= \int \phi(z-1) \cdot \frac{d}{dz} \psi(z) \cdot dz \\ \gamma_1 &= \int \psi(z-1) \cdot \frac{d}{dz} \phi(z) \cdot dz & d_1 &= \int \phi(z-1) \cdot \frac{d}{dz} \phi(z) \cdot dz \end{aligned} \quad (6.35)$$

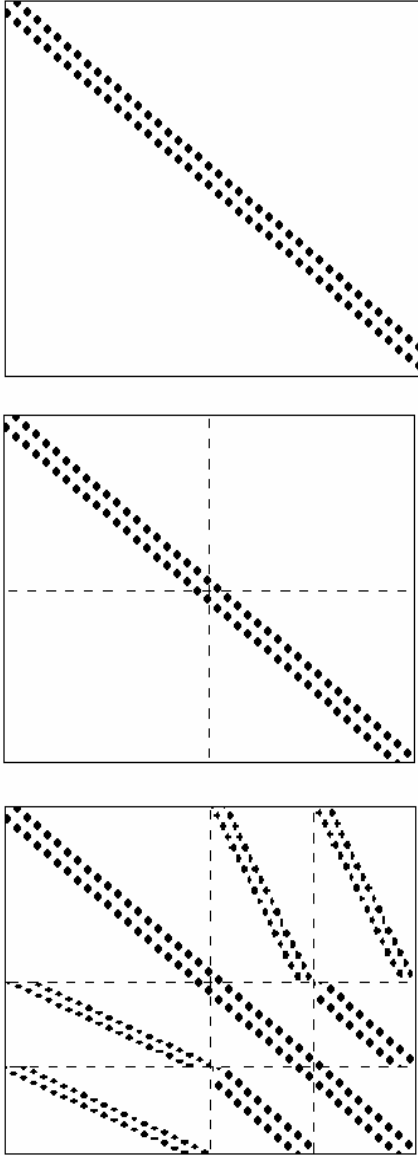
yazılabilir. Ölçekleme ve dalgacık fonksiyonları her durumda alçak geçiren ve yüksek geçiren filtreler $L(m)$ ve $H(m)$ ile bulunur:

$$\phi(t) = \sum_{m=0}^{L_f-1} L(m) \sqrt{2} \phi(2t - m) \quad (6.36)$$

$$\psi(t) = \sum_{m=0}^{L_f-1} H(m) \sqrt{2} \phi(2t - m) \quad (6.37)$$

Burada L_f filtre uzunluğudur. Şekil 6.3'te **D** türev matrisini, üç çözünürlük seviyesi için sadece sıfırdan farklı bileşenleri çizilerek gösterilmiştir [11]

Bu türev matrisinin kullanılması algoritmada modifikasyon yapılmadan herhangi bir seviyede çözümü sağlar. Dahası, simülasyonun başında, hangi tip dalgacık fonksiyonunun kullanılacağı ve yüksek çözünürlükte simülasyon alanının hangi bölgelerinin kullanılacağı belirlenir.



Şekil 6.4. D^j türev matrisinin üç değişik çözünürlük seviyesi için üç değişik görüntüsü:
(a) $j=0$, (b) $j=1$, (c) $j=2$ [11]

Sınır koşulları

D türev matrisi her sınırdaki sürekli gibi davranan bir yapıya sahiptir. Uzayda, sonsuz ve sınırsız bir özellik taşır. Ancak simülasyon alanı sınırsız olmadığından, sınırlarla bağlantılı komşu sütunlar ekleyerek düzenlenmelidir [11].

$$\begin{aligned}
\{\alpha_{i1}\} &= \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_{-1} & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} \\ \alpha_{-1} & 0 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix} \\
&\downarrow \\
\{\alpha_{i1}\} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} & 0 \\ 0 & \alpha_{-1} & 0 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{-1} \end{pmatrix} \\
\\
\{\gamma_{i1}\} &= \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_{-1} & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_{-1} & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_{-1} \\ \gamma_{-1} & 0 & \gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix} \\
&\downarrow \\
\{\gamma_{i1}\} &= \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_{-1} & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_{-1} & 0 \\ 0 & \gamma_{-1} & 0 & \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_{-1} \end{pmatrix} \\
\\
\{\beta_{i1}\} &= \begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_{-1} & 0 & \beta_1 \\ \beta_1 & \beta_0 & \beta_{-1} & 0 \\ 0 & \beta_1 & \beta_0 & \beta_{-1} \\ \beta_{-1} & 0 & \beta_1 & \beta_0 \end{pmatrix} \\
&\downarrow \\
\{\beta_{i1}\} &= \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_0 & \beta_{-1} & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \beta_0 & \beta_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & \beta_0 & \beta_{-1} & 0 \\ 0 & \beta_{-1} & 0 & \beta_1 & \beta_0 & \beta_{-1} \end{pmatrix} \\
\\
\{d_{i1}\} &= \begin{pmatrix} d_0 & d_{-1} & 0 & d_1 \\ d_1 & d_0 & d_{-1} & 0 \\ 0 & d_1 & d_0 & d_{-1} \\ d_{-1} & 0 & d_1 & d_0 \end{pmatrix} \\
&\downarrow \\
\{d_{i1}\} &= \begin{pmatrix} d_1 & d_0 & d_{-1} & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & d_1 & d_0 & d_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & d_0 & d_{-1} & 0 \\ 0 & d_{-1} & 0 & d_1 & d_0 & d_{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Uzaysal alan

Uzaysal alan görüntü uzayıdır. Gerçek ortamda uzaklık metre biriminden ölçülürken burada piksel cinsinden ve çözünürlük olarak ifade edilir.

Dolayısıyla çözünürlük analizinde ve bu gibi görüntü simülasyonlarında uzaysal alan üzerinde çalışmalar yapılır. Çeşitli dönüşümler uzaysal alandan frekans bölgesine geçişi sağlarlar.

Buna bağılı terimlerden biri de *uzaysal frekanstır*. Uzaysal frekans belli bir zaman aralığında değışen görüntü yoğunluğudur. Kenarlarda yüksek bir uzaysal frekans varken kısa görüntü aralıklarında düşük bir uzaysal frekans vardır. *Uzaysal türev* de görüntü pozisyonundaki her değışim için ne kadar görüntü yoğunluğunun değıştiğini gösterir.

Mükemmel uyumlu katman (PML – perfectly matched layer)

Mükemmel Uyumlu Katman (MUK) Maxwell eşitlikleriyle uyumlu bir yöntemdir. ZASF yöntemi ile kullanılan bir uygulamadır. Kısmi Türevler Eşitlikleri ile çalışan (Partial Differential Equations – PDE) yöntemler (ZASF ve Sonlu Elemanlar yöntemleri gibi) açık alan problemlerinde zorluk çıkarırlar. Bu yöntemlerde hesap alanı kabul edilebilir şartlarda tutulmalıdır [12].

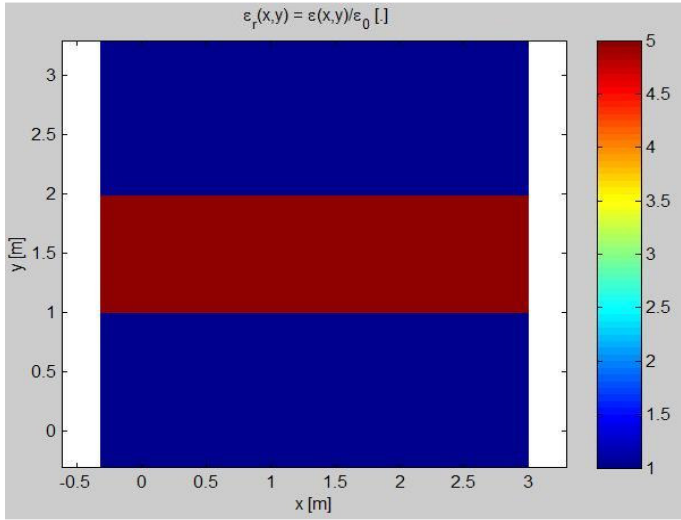
Çeşitli yöntemler geliştirildikten sonra bulunan MYK yöntemi bütün geliş açılarında ilgilenilen alan ve MYK tabakaları arasında yansımaz bir arayüz oluşturur. Tabakaların kendileri kayıplıdır, böylece birkaç tabaka sonra dalga zayıflar. MYK çoğunlukla ZASF yöntemi için kullanılır [12].

6.2. Yapılan Simülasyon Çalışması

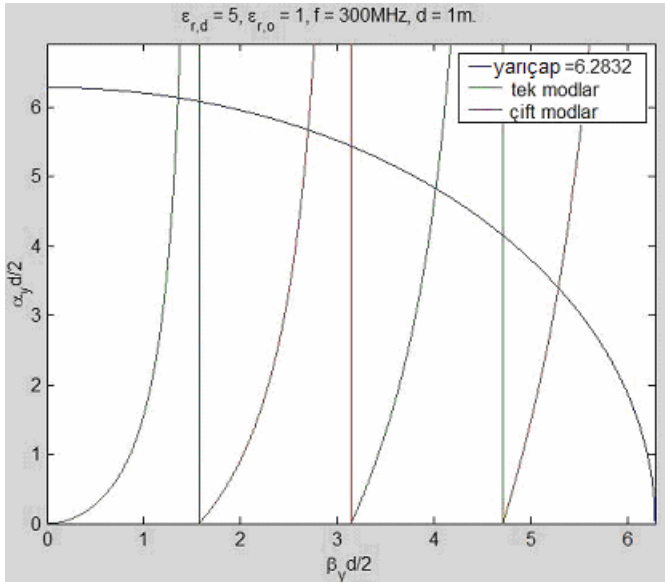
Bu araştırma kapsamında bir dalga kılavuzu ZASF yöntemiyle modellenmiştir. Dalga kılavuzu TE modu ile simüle edilerek, dalganın kılavuzdaki yayılımı, modlara göre teorik ve pratik görüntüleri elde edilmiştir. Kılavuzun içinde yayılan dalgaya dalgacık dönüşümü uygulanmıştır. Kılavuzun başına bir adet analiz filtresi, sonuna da bir adet sentez filtresi eklenerek simülasyon modellenmiş, dönüşüm ve ters dönüşüm sonuçları alınmıştır.

6.2.1. Filtreler olmadan dalga kılavuzunda elektromanyetik dalga yayılımı

Programa uyarlanan dalga kılavuzu Şekil 6.5'teki gibidir. Kırmızı bölgeler dalganın yayıldığı dielektrik bölgeleri, mavi bölgeler dış bölgeyi (hava, boşluk) göstermektedir.

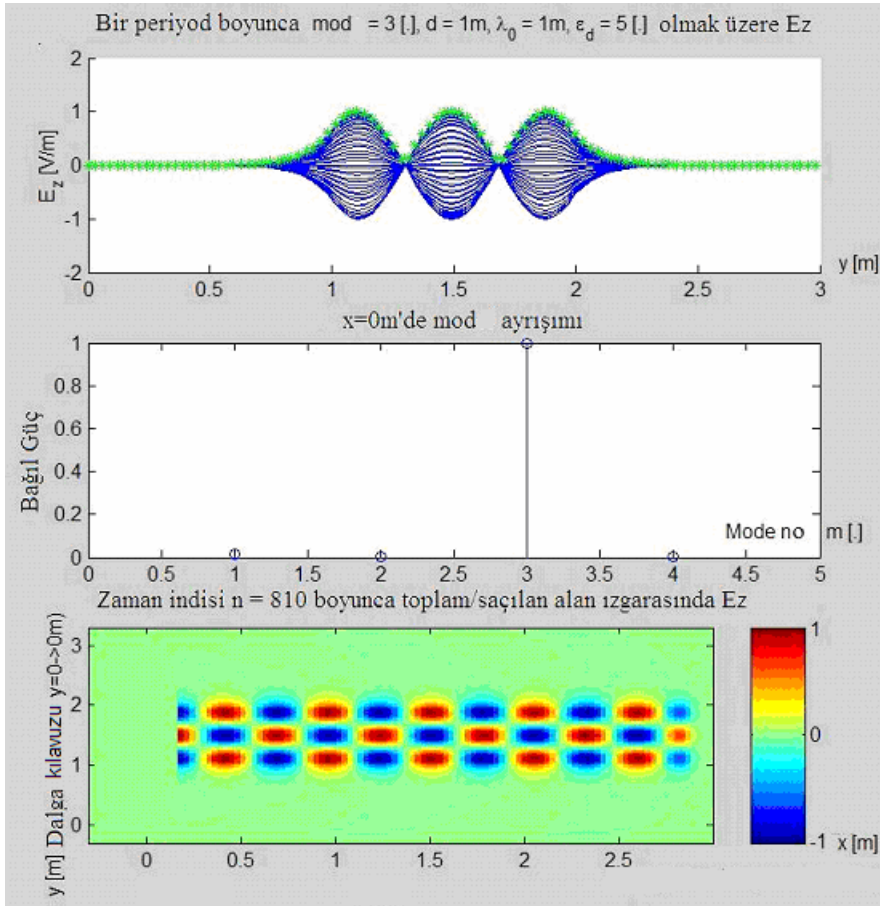


Şekil 6.5. Programa uyarlanan dalga kılavuzu



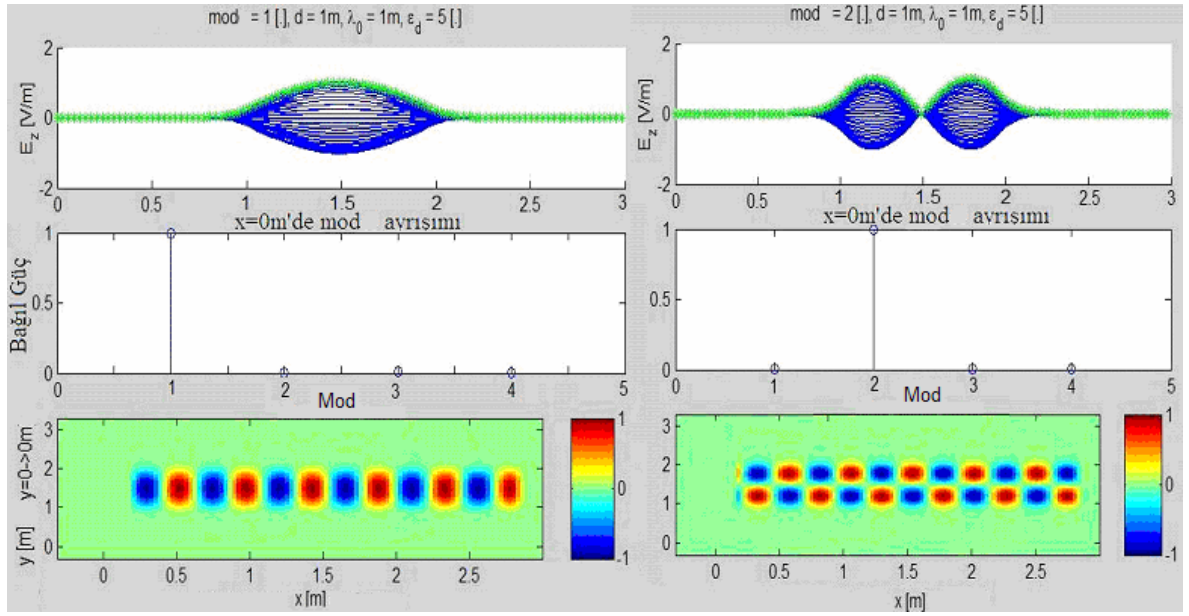
Şekil 6.6. TE Modlarını bulurken $\alpha - \beta$ grafiği inceleme yöntemini kullanma

Eş. 6.18'deki α ve β ayrı bir programla bulunmuş, bu iki değişkenin oluşturduğu grafik Şekil 6.7'deki gibi çizilerek değişik TE modları için α ve β 'nin kolaylıkla görülebilmesi sağlanmıştır. Bu grafik değişik frekans değerleri için değişik değerler vermektedir.

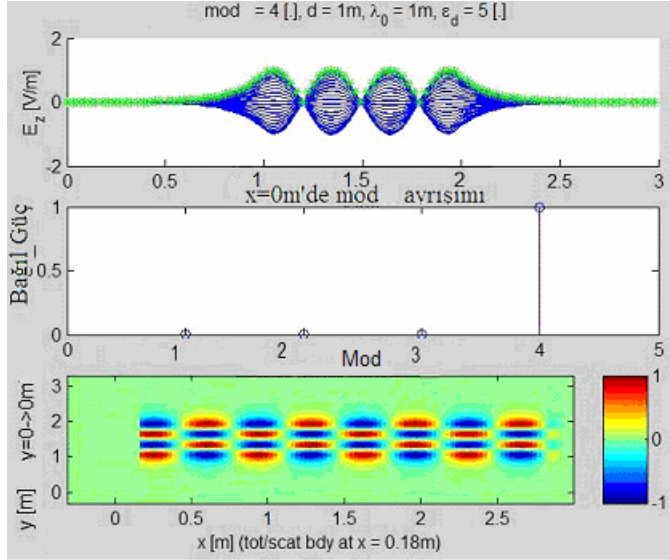


Şekil 6.7. Dalga kılavuzunun teorik ve pratik karşılaştırılması

Şekil 6.7'de kılavuzun içindeki yayılımın sonuçları verilmiştir. Birinci grafik bir periyot boyunca E_z alanını (Teorik zarf yeşille, simülasyon yayılımı mavi ile gösterilmektedir), ikinci grafik mod numarasına göre bağıl gücü, üçüncü grafik de dalga kılavuzundaki üç boyutlu yayılımı görsel olarak ifade etmektedir. Yapılan modelleme $m=3$ moduna göre düzenlenmiştir. Şekil 6.8 ve Şekil 6.9 farklı modlar için yayılımları karşılaştırmaktadır.



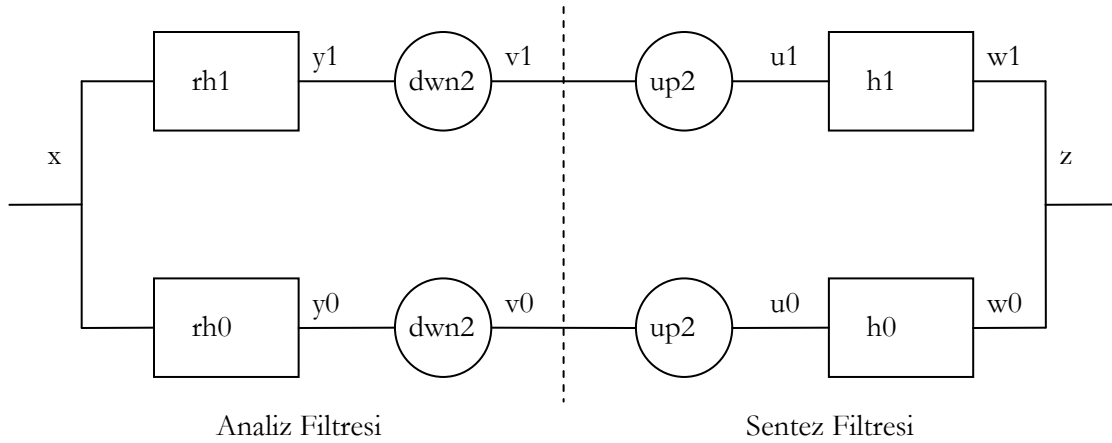
Şekil 6.8. Dalga Kılavuzunun 1 ve 2 modu



Şekil 6.9. Dalga kılavuzunun 4 modu

6.2.2. Filtrelerle dalga kılavuzu modellemesi

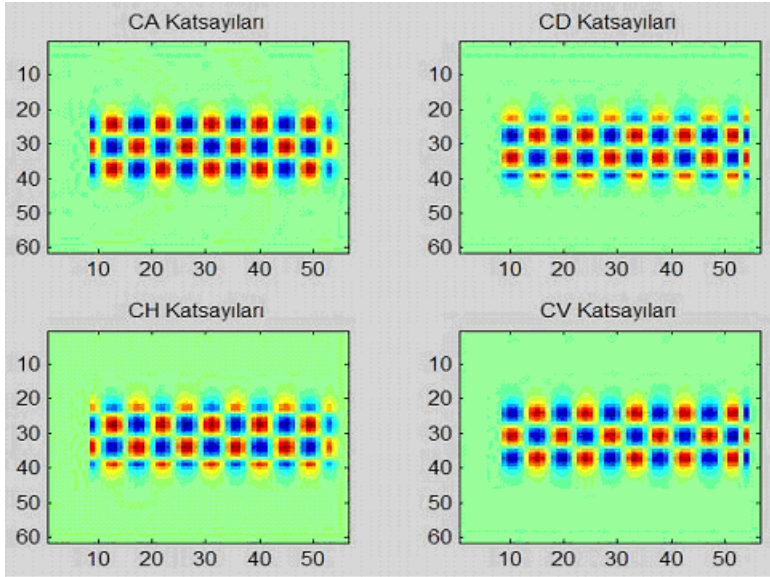
Dalga kılavuzunun başına va sonuna uygulanan birer analiz ve sentez filtresiyle dalgacık dönüşümü elektromanyetik dalgalar üzerinde uygulanabilir. Uygulama çeşitli dalgacık tipleriyle yapılabilir. Haar tipi kolay uygulanabilir bir dalgacıktır. Daubechies dalgacığı daha hassas sonuçlar verir.



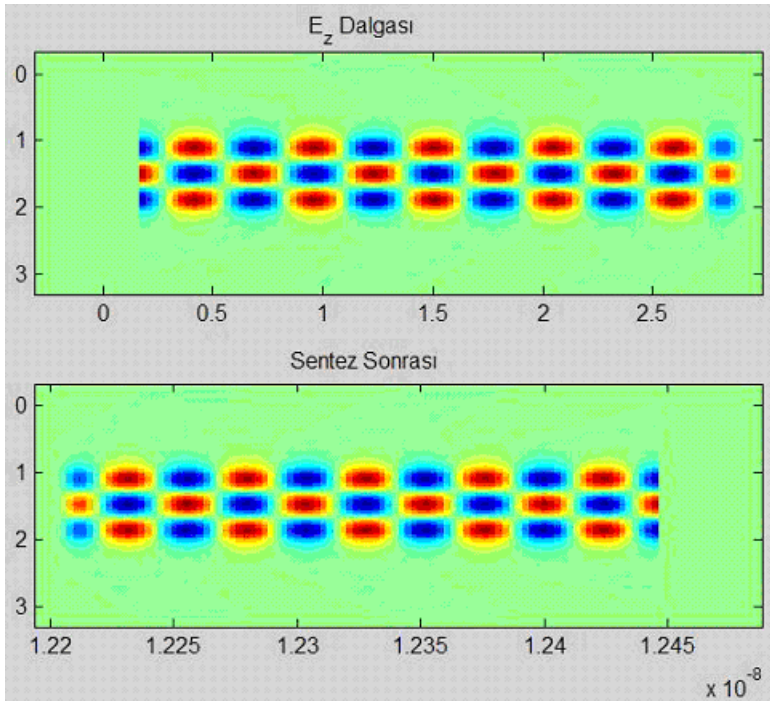
Şekil 6.10. Filtrelerin dalga kılavuzuna uygulanışı

Bu uygulamada haar ve db4 dalgacıklarıyla yapılan uygulamalar incelenmiş, sonuçlar karşılaştırılmıştır. Haar tipinin sonuçları Şekil 6.11 ve Şekil 6.12’de verilmiştir. Db4 dalgacığı da Şekil 6.13 ve Şekil 6.14’teki sonuçları vermiştir. Ayrıca karşılaştırmak için değişik dalgacık tipleri olarak Şekil 6.15 ve Şekil 6.16’da bior6.8 (biortogonal dalgacık), Şekil 6.17 ve Şekil 6.18’de sym5 (symlet dalgacığı) ile incelemeler gösterilmiştir.

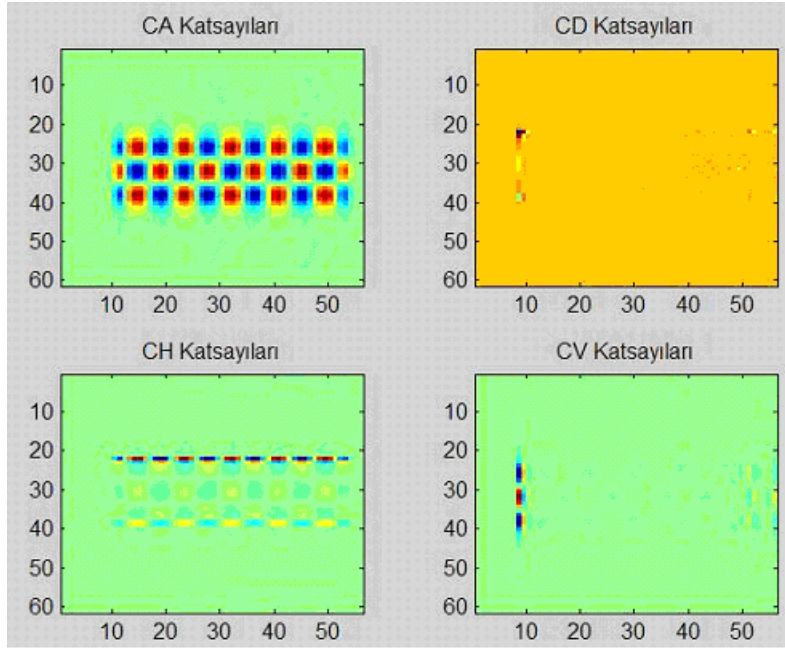
Analiz sonrası iki boyutlu dalga dört tip katsayıya ayrılır. CA, yaklaşım katsayıları, CD, CH ve CV ayrıntı katsayıları olarak bilinir.



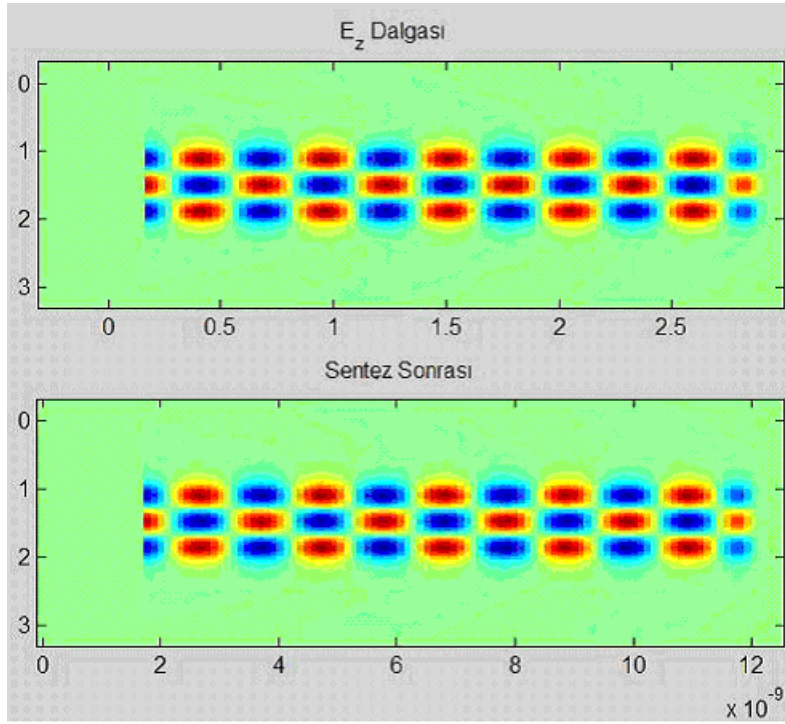
Şekil 6.11. Haar ile yapılan analiz sonrası dalga kılavuzunda katsayılar



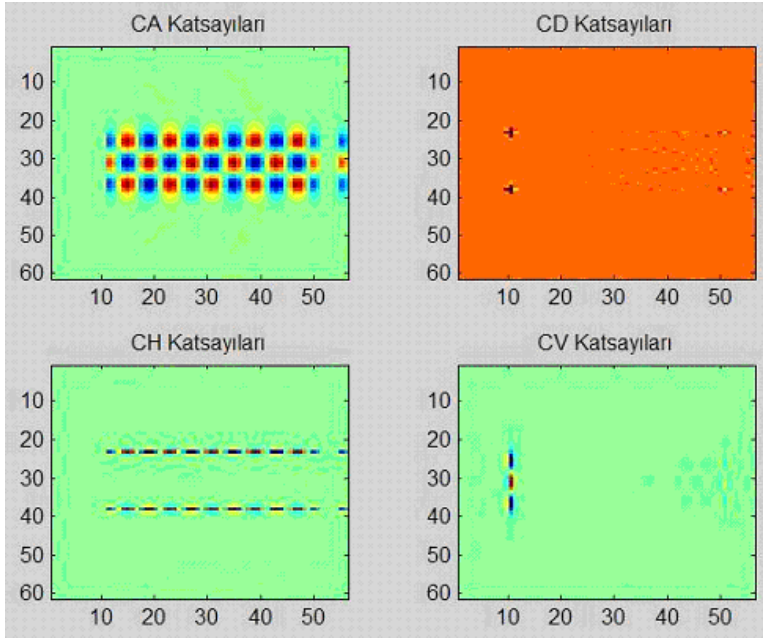
Şekil 6.12. Haar dalgacığında analiz ve sentezin karşılaştırılması



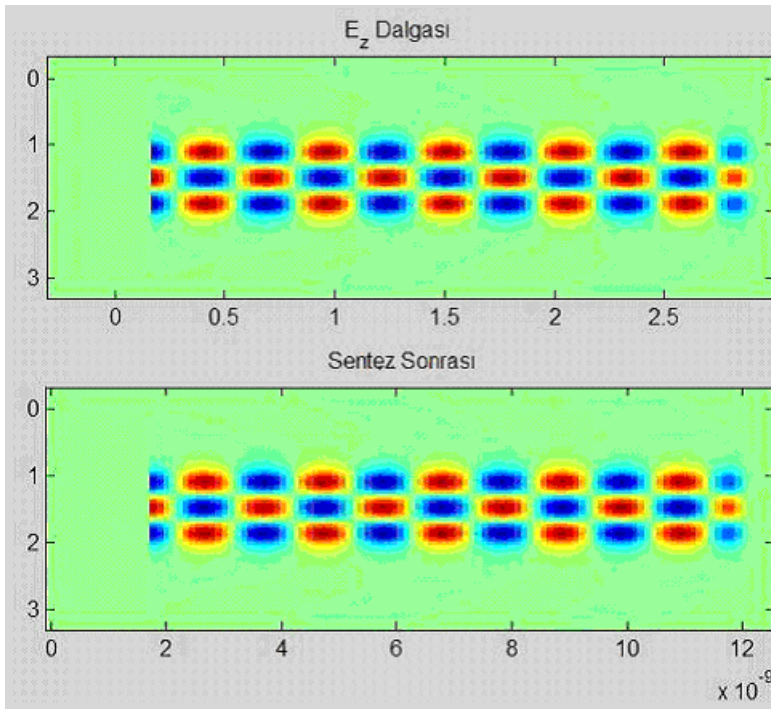
Şekil 6.13. Daub4 ile yapılan analiz sonrası dalga kılavuzunda katsayılar



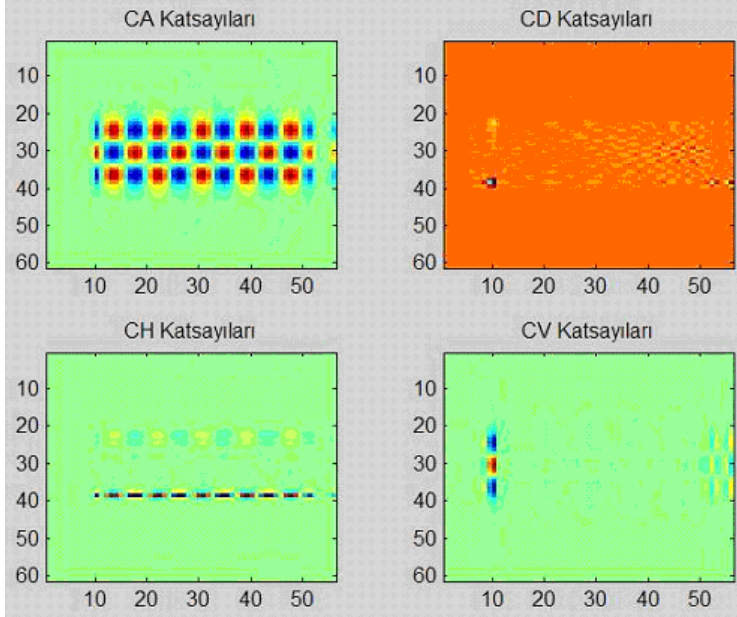
Şekil 6.14. Daub4 dalgacığında analiz ve sentezin karşılaştırılması



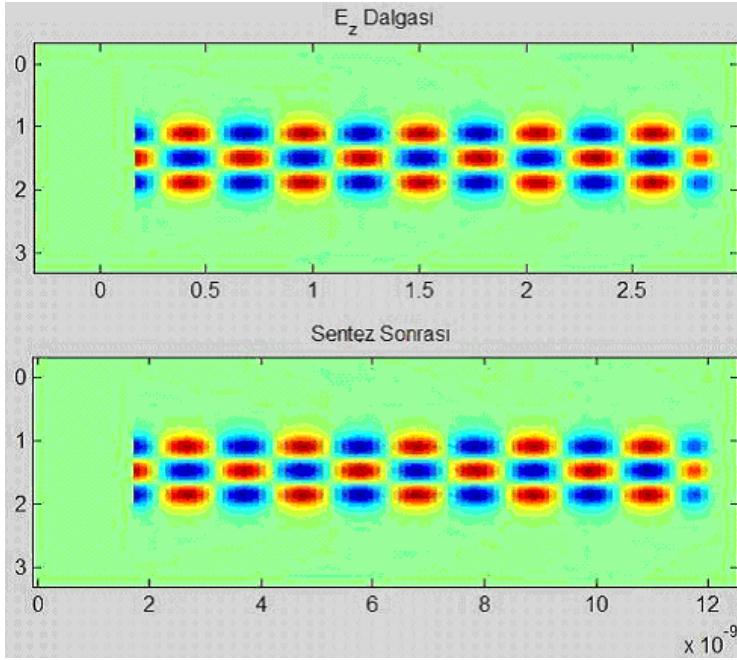
Şekil 6.15. Bior6.8 ile yapılan analiz sonrası dalga kılavuzunda katsayılar



Şekil 6.16. Bior6.8 dalgacığında analiz ve sentezin karşılaştırılması



Şekil 6.17. Sym5 ile yapılan analiz sonrası dalga kılavuzunda katsayılar



Şekil 6.18. Sym5 dalgacığında analiz ve sentezin karşılaştırılması

Analizde elde edilen bu katsayılar daha sonraki basamaklarda sentez için kullanılmaktadır. E_z dalgasının analizden önce ve sentezden sonra elde edilen görüntüleri bütün dalgacık çeşitleri için benzer bir yapı göstermektedir. Ancak x – eksenindeki değerler karşılaştırılacak olursa haar dalgacığının daha kolay dönüşüm sağlamasına rağmen daub4, bior 6,8 ve sym5’den sentez sonrası elde edilen sonucun analiz öncesi elde edilen sonuca daha yakın bir özellik taşıdığı görülmektedir.

Böylece, dalgacık tiplerinin incelenen dalgaya göre simetrik olup olmamasının, dalgacığın yapısının detayının ve sürekliliğinin, analizin ve sentezin kararlılığı üzerinde etkili olduğu ortaya çıkmaktadır.

7. SONUÇ

Yapılan çalışmada yeni geliştirilmekte olan sinyal işleme yöntemlerinden “Dalgacık Dönüşümü” incelenmiştir. Dalgacık dönüşümü elektromanyetik alanlara uygulanmış ve ayrıca Zaman Alanlı Sonlu Farklar yöntemiyle modelleme ve diğer sinyal işleme yöntemleri; Fourier dönüşümü, Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü ile diğer yöntemlerle bağlantısı incelenmiştir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar şu şekilde özetlenebilir: Dalgacık dönüşümü analiz yaparken zaman bilgisini kaybetmemesi açısından Fourier yöntemine göre, dalgacık penceresinin uzunluğunun ve dalgacığın değişebilmesi açısından Kısa Zamanlı Fourier dönüşümüne göre daha avantajlıdır. Dalgacık dönüşümüne bağlı olarak geliştirilen sinyal ve görüntü inceleme yöntemlerinden biri olan çoklu çözünürlük analizi ve filtre uygulamaları sinyal incelemelerinin kolaylaşmasını sağlar. Sonuçlar daha verimlidir.

Çoklu çözünürlük analizinin çok çeşitli çözünürlükleri birarada gösterme özelliği, alanları araştırılmakta olan bölgelerin incelenmesini sağlar. Bu da hesaplamalar sırasında kaynakların gereksiz yere işgal edilmesini, gereksiz yere bilgisayar hafızasının kullanılmasını önler. Sonlu uzunluktaki dalga incelemelerinde dalgacık baz fonksiyonlarının seçiminin ve tasarımının analizi yapan kişiye bırakılması tasarım aşamasının geliştirilmesini ve en uygun sonucun elde edilmesini sağlar. Dalgacık dönüşümü ve çoklu çözünürlük analizi alan düzensizliklerini daha kolay tesbit eder.

Tez kapsamında yapılan uygulamadan elde edilen sonuca göre, dalgacık dönüşümünde kullanılan dalgacık çeşidi, dalgacığın incelenen dalgaya göre simetrik olup olmaması, dalgacığın yapısının detayı ve sürekliliği analizin ve sentezin kararlılığını etkilemektedir.

İleride yapılabilecek olan çalışmalar için aşağıdaki öneriler sunulmuştur: Uzaysal alanda matrisler ve uzaysal türevler kullanılarak görüntü ve sinyaller üzerindeki sinyal

bozuklukları incelenebilir. Düzgün olmayan bölgelerde elektromanyetik dalgaların yayılımı ve yansımaları çoklu çözünürlük analizi ile incelenebilir.

Dalga kılavuzları içindeki düzensizlikler dalgacık dönüşümüyle bulunabilir, bunu sağlayan filtrelerle simülasyon uygulamalarının yanında gerçek ortamda da çalışmalar yapılabilir.

Burada yapılan analiz iki boyutludur. İleride geliştirilecek çalışmalarda üç boyutlu inceleme de yapılabilir. Dalga kılavuzundaki farklı dielektrikler için farklı dalgacıklarla yapılan incelemelerle analiz optimizasyonu ve hangi dielektrik için hangi tip dalgacığın analizi en iyi şekilde yaptığı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

1. İnternet: Electromagnetic Waves and Antennas, in ECE Department Rutgers University <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa> (2004).
2. Bushyager N., Dalton E., Tentzeris M. “Modeling Of Complex RF/Wireless Structures Using Computationally Optimized Time-Domain Techniques” *Georgia Institute of Technology*, Atlanta 17: 223-236, (2005).
3. İnternet: Finite Difference Time Domain (FDTD) Technique, in University of Rochester. <http://www.pas.rochester.edu/~icpark/Vinos/> (2004).
4. Goswami J. C., Chan A. K., “Fundamental of Wavelets, Theory, Algoritms, and Applications”, *John Wiley & Sons*, New York: 1-306, (1999).
5. Noda T., Yokoyama S., “Development of Surge Simulation Code Based on Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Approximation of Maxwell's Equations” *IPST 2001 Conference Papers*, Rio de Janeiro, Brazil, 10: 1-6, (2001).
6. Yee K. S., "Numerical Solution Of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations In Isotropic Media" *IEEE Trans. Antennas & Propag.*, AP-14-3: 302 – 307, (1966).
7. Torr sani B., “An overview of wavelet analysis and time – frequency analysis,” *Proceedings of the International Workshop on Self Similar Systems*, Dubna, Russia: 9-34 (1999).
8. İnternet: Wavelet Theory, in Aalborg University Department of Science and Technology, <http://www.miba.auc.dk/~04gr701/arbejdsblade/theoryWAVE.pdf> (2004)
9. İnternet: EM Theory 55.070, in The University of IOWA College of Engineering, <http://www.engineering.uiowa.edu/~emtheory/> (2005).
10. İnternet: EE256 Final Project: Dielectric Waveguide, in Stanford University <http://www.stanford.edu/~rsaid/FTP/Archive/EE256Projec> (2005).
11. Represa C., Pereira C., Cabaceira A.C.L., Barba I., Represa J., “An Approach to Multi-Resolution in Time Domain Based on the Discrete Wavelet Transform”, *The Applied Computational Electromagnetics Society (ACES) Journal*, 18(3): 210-218, (2003).
12. İnternet: Perfectly Matched Layers <http://www.emclab.umn.edu/emap4/PML.html> (2005).

13. Internet: A Really Friendly Guide to Wavelets in TechOnLine.
http://www.techonline.com/community/ed_resource/tech_paper/22461 (1999).
14. Daubechies I., “Recent results in wavelet applications”, *Journal of Electronic Imaging*, 7(4): 719-724, (1998).
15. Daubechies I., “Ten Lectures on Wavelets” , *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philedelphia, Pennsylvania: 1-313, (1992).
16. Taflove A., “Computational Electrodynamics, The FDTD Method” *Artech House*, Boston, London: 1-410, 569-701, (2005).

EKLER

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : FİDAN, Sitem
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 01.01.1982 Eskişehir
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 (312) 271 60 26
 Faks :
 e-mail : sitemfidan@yahoo.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Ünv. /Elektrik Elektronik Müh.	2006
Lisans	Gazi Ünv. /Elektrik Elektronik Müh.	2003
Lise	S. Demirel Anadolu Lisesi	1999

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2004-2005	İnteltek A.Ş.	Sistem Uyg. Uzmanı
2005-...	Güney İletişim Bilgi Tek. Tic. Ltd. Şti.	Sistem Mühendisi

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Müzik, Bilim Teknik, Bilgisayar ve İnternet teknolojileri, Basketbol