



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DALGACIK DÖNÜŞÜMLÜ UZAYLARIN MULTİLİNEER
ÇARPANLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İREM ADIYAMAN

OCAK

İREM ADIYAMAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK 2024

DALGACIK DÖNÜŞÜMLÜ UZAYLARIN MULTİLİNEER ÇARPANLARI

İrem ADIYAMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİMDALI

Danışman
Prof. Dr. Öznur KULAK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2024

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

İrem ADIYAMAN tarafından hazırlanan “Dalgacık Dönüşümlü Uzayların Multilineer Çarpanları” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Öznur KULAK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Prof. Dr. İsmail AYDIN

Matematik Anabilim Dalı, Sinop Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 24/01/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

İrem ADIYAMAN

(Tarih)

DALGACIK DÖNÜŞÜMLÜ UZAYLARIN MULTİLİNEER ÇARPANLARI
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

İrem ADIYAMAN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
OCAK 2024

ÖZET

Bu çalışmada, bilineer çarpanlar teorisinde O. Blasco ve F. Villarroya'nın uyguladıkları ispat yöntemleri kullanılarak dalgacık dönüşümü Lorentz uzayında olan fonksiyon uzaylarının multilineer çarpanlar uzayı tanımlanmıştır. Bu uzayların temel özellikleri incelenip öteleme ve modülasyon operatörleri altındaki davranışları incelenmiştir. Ayrıca, multilineer çarpanlar için bazı örnekler verilmiştir.

Sayfa adedi : 37
Anahtar kelimeler : Bilineer çarpan, Dalgacık dönüşümü, Lorentz uzayı, Multilineer çarpan
Danışman : Prof. Dr. Öznur KULAK

MULTILINEAR MULTIPLIERS OF SPACES WITH WAVELET TRANSFORM
(M. Sc. Thesis)

İrem ADIYAMAN

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
JANUARY 2024

ABSTRACT

In this paper, using the proof methods of O. Blasco and F. Villarroya in the theory of bilinear multipliers, the multilinear multiplier spaces of function spaces whose wavelet transform is in Lorentz space are defined. The basic properties of these spaces are studied and their behavior under translation and modulation operators is investigated. Also, some examples for multilinear multipliers are given.

Number of pages : 37

Keywords : Bilinear multiplier, Wavelet transform, Lorentz space, Multilinear multiplier

Supervisor : Prof. Dr. Öznur KULAK

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında ilgi ve desteğini esirgemeyen, bilgi ve birikiminden yararlandığım, yönlendirmeleri ile çalışmama her türlü bilimsel desteği sağlayan çok kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Öznur KULAK' a ve aldığım tüm kararlarda yanımda olup beni destekleyen sevgili, annem Zehra ADIYAMAN ve babam Bedri ADIYAMAN' a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
3. BULGULAR.....	13
4.SONUÇ VE ÖNERİLER.....	33
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ.....	37

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^d$	d-boyutlu Öklid uzayı
$\text{supp } f$	f fonksiyonun desteği
$f * g$	f ve g fonksiyonlarının girişim işlemi
$\hat{f}$	f fonksiyonun Fourier dönüşümü
T_x	Öteleme operatörü
M_x	Karakter (Modülasyon) operatörü
D_s	Açılma (Dilation) operatörü
$W_g f$	f fonksiyonu g fonksiyonuna göre dalgacık (wavelet) dönüşümü
$C_c(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, sürekli ve tıkHz destekli fonksiyonların uzayı
$C_0(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, sürekli ve sonsuzda sıfır olan fonksiyonların uzayı
$C_c^\infty(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı her mertebeden türevlenebilen, tıkHz destekli fonksiyonların uzayı
$L^p_\omega(\mathbb{R})$	Ağırlıklı Lebesgue uzayı
f^*	f fonksiyonunun rearrangement fonksiyonu
f^{**}	f fonksiyonunun ortalama fonksiyonu
$\hat{\mu}$	μ ölçümünün Fourier-Stieltjes dönüşümü
$\omega \leq \vartheta$	$\omega(x) \leq \vartheta(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1. GİRİŞ

M. T. Lacey ve C. Thiele (1999) çalışmalarında, $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty, p_3 > \frac{2}{3}$ olmak üzere $m(\xi, \eta) = \text{sign}(\xi + \alpha\eta), (\xi, \eta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\})$ biçiminde tanımlanan m fonksiyonunun bir (p_1, p_2, p_3) tipinde bilineer çarpan olduğunu göstermişlerdir. Yine Blasco (2005; 2009), Blasco ve diğ. (2005) tarafından yapılan çalışmalarda $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty, 0 < p_3 \leq \infty$ olmak üzere (p_1, p_2, p_3) tipindeki bilineer çarpanların bazı özelliklerini araştırmışlardır. Sonrasında Blasco (2009) tarafından yapılan çalışmada $M, \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere özel olarak $m(\xi, \eta) = M(\xi - \eta), (\xi, \eta \in \mathbb{R})$ şeklinde tanımlanan bilineer çarpanları incelemiştir. Ayrıca Villarroya (2008) ve Blasco (2005) tarafından yapılan çalışmalarda Lorentz uzayını kullanarak elde ettikleri bilineer çarpanlar uzayının değişik özelliklerini incelemiştir.

Lorentz uzayı ile ilgili olarak Hunt (1966), Yap (1969; 1972), O'Neil (1963), Chen ve Lai (1975), Gürkanlı (2004), Chung ve diğ. (1982), Hunt ve Kurtz (1983), Duyar ve Gürkanlı (2003) gibi birçok yazar tarafından çalışmalar yapılmıştır. Ephremidze ve diğ. (2008) tarafından yapılan çalışmada da değişken üslü Lorentz uzayları üzerinde çalışılmıştır.

Gürkanlı ve Kulak (2016), Kulak (2013; 2014; 2017), Kulak ve Gürkanlı (2017) tarafından literatürde çeşitli fonksiyon uzaylarının bilineer çarpanları çalışılmış olsa da dalgacık dönüşümü ve kesirli dalgacık dönüşümü ile bazı fonksiyon uzaylarının bilineer çarpanları da Çakır ve Kulak (2023), Kulak (2017) tarafından araştırılmıştır. Bilineer çarpan teorisi sınırlılığı göz önünde bulundurmaya yardımcı olan çeşitli operatörlerin Kulak (2019; 2021) çalışmasından da anlaşılacağı üzere mükemmel bir çalışma alanıdır. Bu nedenle bu çalışmada ağırlıklı Lorentz uzaylarının multilineer çarpanları tanımlandı ve örnekleri incelendi. Ayrıca $\mathbb{R}$ üzerinde $1 \leq p_i, q_i, r_i < \infty, s_i \in \mathbb{R}^+$ ve ω_i, v_i ($i = 1, \dots, d + 1$) ağırlık fonksiyonu olmak üzere $L_{s_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}(\mathbb{R})$ uzayı dalgacık dönüşümleri ağırlıklı Lorentz uzayında olan fonksiyonların uzayını göstermektedir (Kulak, 2022). Bu çalışmada $m(\xi_1, \dots, \xi_d), \mathbb{R}^d$ üzerinde sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$B_m(f_1, \dots, f_d)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) m(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d$$

B_m multilineer operatörü,

$$L_{S_1}(W)_{\omega_1, v_1}^{p_1, q_1, r_1}(\mathbb{R}) \times \dots \times L_{S_d}(W)_{\omega_d, v_d}^{p_d, q_d, r_d}(\mathbb{R})$$

uzayından $L_{S_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}(\mathbb{R})$ uzayına sınırlı olarak hangi koşullarda ve hangi m fonksiyonları için genişletilebileceği incelenmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda yararlanacağımız tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Tanım $\mathbb{R}$ üzerine dx Lebesgue ölçümü verilsin. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir f fonksiyonlarının (denklik sınıflarının) oluşturduğu vektör uzayı $L^p(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Ayrıca $L^p(\mathbb{R})$ uzayı $f \in L^p(\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Eğer $p = \infty$ ise $L^\infty(\mathbb{R})$ uzayı $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve hemen hemen her yerde sınırlı olan ölçülebilir f fonksiyonlarının (denklik sınıflarının) uzayıdır. Bu uzay $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ için

$$\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Yine özel olarak $p = 2$ olduğunda $L^2(\mathbb{R})$ uzayı

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

iç çarpımının oluşturduğu

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

normuna göre bir Hilbert uzayıdır (Rudin, 1966: 452).

2.2. Tanım $f, \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı karmaşık değerli bir fonksiyon olsun. O halde

$$M = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}$$

kümesinin kapanışına f fonksiyonun desteği denir ve bu $\text{supp } f$ ile gösterilir. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı karmaşık değerli, sürekli, tıkHz destekli fonksiyonların vektör uzayı $C_c(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $C_c(\mathbb{R})$ nin $L^p(\mathbb{R})$ uzayında her yerde yoğun olduğu biliniyor. Ayrıca $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli, tıkHz destekli, sürekli ve her mertebeden türevlenebilen fonksiyonların vektör uzayı $C_c^\infty(\mathbb{R})$ ile gösterilir (Rudin, 1973: 397). Yine $C_c^\infty(\mathbb{R})$ uzayında $L^p(\mathbb{R})$ uzayında her yerde yoğundur (Rudin, 1973: 397).

2.3. Tanım $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli ölçülebilir ω fonksiyonu aşağıda belirtilen koşulları sağlıyor ise bu ω fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir (Reither, 1968: 200).

- (i) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\omega(x) \geq 1$,
- (ii) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\omega(x + y) \leq \omega(x)\omega(y)$,
- (iii) ω yerel sınırlı.

2.4. Tanım Her $x \in \mathbb{R}$ için $s \geq 0$ olmak üzere;

$$v_s(x) = (1 + |x|)^s$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna polinom tipli ağırlık fonksiyonu denir (Reither, 1968).

2.5. Tanım $1 \leq p < \infty$ ve ω fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere $L_\omega^p(\mathbb{R})$ uzayı

$$L_\omega^p(\mathbb{R}) = \{f | f \omega \in L^p(\mathbb{R})\}$$

şeklinde tanımlanır. $L_\omega^p(\mathbb{R})$ bir vektör uzayı olup,

$$\|f\|_{p,\omega} = \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \omega(x)^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır (Reither, 1968: 200).

2.6.Tanım Herhangi bir $f \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonun Fourier dönüşümü herhangi $x, \omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx$$

şeklinde tanımlanır.

Fourier dönüşümü $f(x)$ fonksiyonu ile bulunabilen fiziksel etkiyi (Örneğin, bir ses veya bir elektrik sinyali) e^{itx} dalgalarının toplamı olarak yazabilmemizi sağlar. Mühendislikte ω frekansı, $\hat{f}(\omega)$ de ω frekansının genliğini verir. Fourier dönüşümünün önemli bir uygulaması da kuantum teorisindedir. Bu sistemdeki durum $f(x)$ dalga fonksiyonu ile belirlenir. $|f(x)|^2$ ise x-konumlu bir yerde parçacığın bulunma olasılık yoğunluğudur. $f(x)$ in Fourier dönüşümü olan $\hat{f}(\omega)$ aynı sistemi momentum uzayında tanımlayan dalga fonksiyonudur: $|\hat{f}(x)|^2$ parçacığın momentumunun ω değerini alma olasılığıdır (Karaoğlu, 1998; Bracewell, 1965: 38; Katznelson, 1968: 264; Reither, 1968: 200).

2.7. Tanım $\hat{f}$ Fourier dönüşümünü göstermek üzere

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{-2\pi i \omega x} d\omega$$

ifadesine f nin ters Fourier dönüşümü denir. Burada $C_0(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ olduğundan bu integralin tanımlı olması için $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ kabul edilecektir (Katznelson, 1968: 264; Rudin, 1966: 452).

2.8. Tanım Sınırlı, düzenli (regüler) ve karmaşık değerli Borel ölçümlerinin uzayı $M(\mathbb{R})$ ile gösterilir. ω , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonu ve $|\mu|$, μ ölçümünün total varyasyonu olmak üzere bir $M(\omega)$ uzayı

$$M(\omega) = \left\{ \mu \in M(\mathbb{R}) : \|\mu\|_{\omega} = \int_{\mathbb{R}} \omega d|\mu| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Rudin, 1962).

2.9. Tanım Herhangi bir $\mu \in M(\mathbb{R})$ ölçümünün Fourier-Stieltjes dönüşümü

$$\hat{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \langle x, t \rangle} d\mu(t)$$

biçiminde tanımlanır (Rudin, 1962).

2.10. Tanım f , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T_x f(y) &= f(y - x), \\ M_x f(y) &= e^{2\pi i xy} f(y), \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan operatörlere sırasıyla öteleme ve karakter (modülasyon) operatörleri denir (Gröchenig, 2001: 359).

2.11. Tanım $s \neq 0, s \in \mathbb{R}$ ve $f, \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir fonksiyon olmak üzere,

$$D_s f(t) = |s|^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{t}{s}\right)$$

operatörüne f fonksiyonunun açılma (dilation) operatörü denir. Eğer f fonksiyonu desteği $E \in \mathbb{R}$ olan tıkız destekli bir fonksiyon ise s sabit olmak üzere $D_s f$ fonksiyonu da desteği sE olan tıkız destekli bir fonksiyon olur. Ayrıca $f \in L^2(\mathbb{R})$ ise,

$$(D_s f)^\wedge(\omega) = D_{\frac{1}{s}} \hat{f}(\omega)$$

eşitliği sağlanır (Gröchenig, 2001).

2.12. Yardımcı Teorem $f \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonu ve $x, \omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} (\widehat{T_x f}) &= M_{-x} \hat{f}, \\ (\widehat{M_\omega f}) &= T_\omega \hat{f}, \end{aligned}$$

ifadeleri sırasıyla T_x ve M_ω operatörlerinin Fourier dönüşümleridir (Gröchenig, 2001:359).

2.13. Tanım $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $g \neq 0$ sabitleyelim. Her $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için f fonksiyonunun g ye bağlı dalgacık dönüşümü;

$$W_g f(x, s) = |s|^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \bar{g}(s^{-1}(t - x)) dt \quad (2.1)$$

biçiminde verilir (Daubechies, 1992; Gröchenig, 2001). Burada her $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \left| |s|^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \bar{g}(s^{-1}(t - x)) dt \right| &\leq |s|^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| |g(s^{-1}(t - x))| dt \\ &= |s|^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| |T_s D_s g(t)| \\ &\leq |s|^{\frac{d}{2}} \|f\|_2 \|T_x D_s g\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty \end{aligned}$$

olup, böylece dalgacık dönüşümünün $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ için iyi tanımlı olduğu söylenir. Dalgacık dönüşümü, sabit bir $0 \neq g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ dalga fonksiyonu ve herhangi bir $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ fonksiyonu için de (2.1) eşitliğindeki gibi tanımlanabilir (Chuong ve Tri, 2002).

Eğer $\text{supp } g \subseteq E$ ve E kümesi orjin merkezli bir küme ise $T_x D_s g$ fonksiyonun desteği $\text{supp } T_x D_s g \subseteq x + sE$ olur. Buradan $W_g f(x, s)$ fonksiyonunun x anındaki yerel bilgiyi ve s büyüklüğünün de yerel detayların gözlenmesini sağladığı sonucunu çıkarırız. Öte yandan sabit bir x anında $s \rightarrow 0$ ise $W_g f(x, \cdot)$ dönüşümü x anındaki yerel detayları gösteren bir mikroskop gibi davranır (Gröchenig, 2001). Dalgacık dönüşümü açık bir zaman frekans gösterimi değildir. Ancak $\text{supp } \hat{g} \subseteq \Omega$ ise,

$$W_g f(x, s) = \langle \hat{f}, M_{-x} D_{1/s} \hat{g} \rangle$$

olacağından $W_g f$ dönüşümü sadece $\frac{1}{s} \Omega = \text{supp } D_{1/s} \hat{g}$ frekans bandındaki bilgiyi verir (Gröchenig, 2001).

2.14. Tanım μ , $\mathbb{R}$ üzerinde Lebesgue ölçümü, f fonksiyonunda $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, μ -ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Her $y \geq 0$, $t \geq 0$ için,

$$\begin{aligned} \lambda_f(y) &= \mu\{x \in \mathbb{R}: |f(x)| > y\} \\ f^*(t) &= \inf\{y: y \geq 0, \lambda_f(y) > t\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara sırasıyla f fonksiyonunun dağılım ve rearrangement fonksiyonu denir. Bu fonksiyonla ilgili olarak

$$(fg)^*(t) \leq f^*\left(\frac{t}{2}\right) g^*\left(\frac{t}{2}\right)$$

eşitsizliği biliniyor (Blozinski, 1972:165-255; Hunt, 1966:249-276; Hunt ve Kurtz, 1983:155-158). Her $t > 0$ için bir f^{**} fonksiyonu da

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(x) dx$$

olacak şekilde tanımlanır. Bu f^{**} fonksiyonuna f fonksiyonunun ortalama fonksiyonu denir. Ayrıca λ_f, f^* ve f^{**} fonksiyonları artmayan ve sağdan sürekli fonksiyonlardır (Blozinski, 1972:165-255; Hunt, 1966:249-276; Hunt ve Kurtz, 1983:155-158).

$L(p, q, \mu)(\mathbb{R})$ kümesi,

$$\|f\|_{pq}^* = \begin{cases} \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} (f^*(t))^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, & 0 < p < \infty, \quad 0 < q < \infty \\ \sup_{t \geq 0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & 0 < p \leq \infty, \quad q = \infty \end{cases}$$

olmak üzere $\|f\|_{pq}^* < \infty$ olan $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, ölçülebilir f fonksiyonlarının (denklik sınıflarının) vektör uzayıdır. Bu şekilde tanımlanan $\|\cdot\|_{pq}^*$ fonksiyonu $L(p, q, \mu)(\mathbb{R})$ üzerinde bir norm değildir. Ancak $L(p, q, \mu)(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde,

$$\|f\|_{pq} = \begin{cases} \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} (f^{**}(t))^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, & 0 < p < \infty, \quad 0 < q < \infty \\ \sup_{t > 0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t), & 0 < p \leq \infty, \quad q = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\|\cdot\|_{pq}$ fonksiyonu bir normdur. Bu $L(p, q, \mu)(\mathbb{R})$ vektör uzayına Lorentz uzayı denir. Burada eğer $p = q$ ise $L(p, q, \mu)(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$ olur (Blozinski, 1972:165-255; Hunt, 1966:249-276; Hunt ve Kurtz, 1983:155-158). Ayrıca $1 < p < \infty$ ve $1 \leq q \leq \infty$ ise $L(p, q, \mu)(\mathbb{R})$ Lorentz uzayı bu norma göre bir Banach uzayı olup her $f \in L(p, q, \mu)(\mathbb{R})$ için,

$$\|f\|_{pq}^* \leq \|f\|_{pq} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{pq}^*$$

eşitsizliği vardır. Diğer bir deyişle $\|\cdot\|_{pq}$ ve $\|\cdot\|_{pq}^*$ fonksiyonları denktir (Blozinski, 1972:165-255; Hunt, 1966:249-276; Hunt ve Kurtz, 1983:155-158).

2.15. Tanım $\omega, \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu ve $\omega d\mu, \mathbb{R}$ üzerinde bir ölçüm olmak üzere f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Her $y \geq 0, t \geq 0$ için f fonksiyonunun dağılım ve rearrangement fonksiyonları sırasıyla

$$\lambda_f(y) = \omega(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > y\}) = \int_{\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > y\}} \omega(x) dx$$

$$f^*(t) = \inf\{y : y \geq 0, \lambda_f(y) \leq t\} = \sup\{y : y \geq 0, \lambda_f(y) > t\}$$

biçiminde tanımlanır. Yine her $t > 0$ için bir f^{**} ortalama fonksiyonu da

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(x) dx$$

biçiminde verilir. Yine λ_f, f^* ve f^{**} fonksiyonları artmayan ve sağdan sürekli fonksiyonlardır (Chung ve diğ., 1982), (Duyar ve Gürkanlı, 2003).

$L(p, q, \omega d\mu)(\mathbb{R})$ kümesi

$$\|f\|_{p,q,\omega}^* = \begin{cases} \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} (f^*(t))^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, & 0 < p < \infty, \quad 0 < q < \infty \\ \sup_{t \geq 0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & 0 < p \leq \infty, \quad q = \infty \end{cases}$$

olmak üzere $\|f\|_{p,q,\omega}^*$ olan $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, ölçülebilir f fonksiyonlarının (denklik sınıflarının) vektör uzayıdır. Buna ağırlıklı Lorentz uzayı denir (Duyar ve Gürkanlı, 2003).

$L(p, q, \omega d\mu)(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde

$$\|f\|_{p,q,\omega} = \begin{cases} \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} (f^{**}(t))^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, & 0 < p < \infty, \quad 0 < q < \infty \\ \sup_{t > 0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t), & 0 < p \leq \infty, \quad q = \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\| \cdot \|_{p,q,\omega}$ fonksiyonu bir normdur. Eğer $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ ise bu uzay bu norma göre bir Banach uzayıdır. Burada $\omega \geq 1$ olduğundan $L(p, q, \omega d\mu)(\mathbb{R}) \subset L(p, q, \mu)(\mathbb{R})$ kapsamı vardır (Chung ve diğ., 1982), (Duyar ve Gürkanlı, 2003).

2.16. Tanım $1 \leq p, q, r < \infty$ ve $\omega_1, \omega_2, \mathbb{R}$ üzerinde ağırlık fonksiyonları olsun. Kabul edelim ki $0 \neq g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ olsun. Bir $s \in \mathbb{R}^+$ için

$$L_s(W)_{\omega_1, \omega_2}^{p,q,r}(\mathbb{R}) = \{f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) : W_g f \in L(q, r, \omega_2, d\mu)(\mathbb{R})\}$$

uzayı tanımlanmaktadır. $L_s(W)_{\omega_1, \omega_2}^{p,q,r}(\mathbb{R})$ uzayı aşağıdaki norm ile birlikte bir Banach uzayıdır (Kulak, 2022).

$$\|f\|_{L_s(W)_{\omega_1, \omega_2}^{p,q,r}} = \|f\|_{p, \omega_1} + \|W_g f\|_{qr, \omega_2}$$

$C_c^\infty(\mathbb{R})$ uzayının $L_s(W)_{\omega_1, \omega_2}^{p,q,r}(\mathbb{R})$ uzayında her yerde yoğun olduğu bilinmektedir (Kulak, 2022).

2.17. Tanım V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $V \times V \rightarrow V, (x, y) \rightarrow xy$ işlemi verilsin. Eğer

- i) Her $x, y, z \in V$ için $x(yz) = (xy)z$,
- ii) Her $x, y, z \in V$ için $x(y + z) = xy + xz$,
- iii) Her $x, y, z \in V$ için $\alpha, \beta \in K$ için $(\alpha\beta)(xy) = (\alpha x)(\beta y)$.

koşulları sağlanıyorsa V, K üzerinde bir cebirdir denir. Eğer her $x \in V$ için $ex = xe = x$ olacak şekilde bir $e \in V$ var ise V cebirine birimli cebir, e elemanına da cebirin birimi denir. Ayrıca her $x, y \in V$ için $xy = yx$ ise bu V cebirine değişmeli cebir denir.

V, K cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer $(V, \| \cdot \|)$ bir Banach uzayı ve her $x, y \in V$ için

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

oluyorsa V, K cismi üzerinde bir Banach cebiridir (Larsen, 1971), (Larsen, 1973).

2.18. Tanım $(E, \|\cdot\|_E)$ bir Banach uzayı ve $(F, \|\cdot\|_F)$ de bir Banach cebiri olsun. Bir $\otimes$ işlemi için,

i) Her $f, g \in F$ ve her $h, k \in E$ için

$$\begin{aligned}(f + g) \otimes h &= f \otimes h + g \otimes h, \\ f \otimes (h + k) &= f \otimes h + f \otimes k\end{aligned}$$

ii) Her $f, g \in F$ ve her $h \in E$ için $(f * g) \otimes h = f \otimes g \otimes h$, ($*$ işlemi F uzayındaki çarpma işlemidir).

iii) Her $f \in F$, her $h \in E$ ve her $a \in \mathbb{C}$ için $a(f \otimes h) = (af) \otimes h = f \otimes (ah)$,

iv) Her $f \in F$ ve her $h \in E$ için $\|f \otimes h\|_E \leq \|f\|_F \|h\|_E$

özellikleri sağlanıyorsa E, F üzerinde bir Banach modülü veya Banach F –modülü denir (Wang, 1977).

3. BULGULAR

3.1. Dalgacık Dönüşümlü Uzayların Multilinear Çarpanları

3.1.1. Tanım $1 \leq p_i, q_i, r_i < \infty$, $s_i \in \mathbb{R}^+$ ve ω_i, v_i ($i = 1, \dots, d+1$) fonksiyonlarda $\mathbb{R}$ üzerinde ağırlık fonksiyonu olsunlar. $m(\xi_1, \dots, \xi_d), \mathbb{R}^d$ üzerinde sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $x \in \mathbb{R}$ ve $f_1, \dots, f_d \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ için,

$$B_m(f_1, \dots, f_d)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) m(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{2\pi i(\xi_1 + \dots + \xi_d, x)} d\xi_1 \dots d\xi_d$$

şeklinde tanımlansın. Eğer her $f_i \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ($i = 1, \dots, d$) için

$$\|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}} \leq C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ değeri varsa m fonksiyonuna $L(W)(p_i, q_i, r_i, \omega_i, v_i, s_i)$ tipinde (kısaca $L(W)$) multilinear (çoklu doğrusal) çarpan denir. Diğer bir ifade ile m multilinear çarpan ise B_m multilinear operatörünün,

$$L_{s_1}(W)_{\omega_1, v_1}^{p_1, q_1, r_1}(\mathbb{R}) \times \dots \times L_{s_d}(W)_{\omega_d, v_d}^{p_d, q_d, r_d}(\mathbb{R})$$

uzayından $L_{s_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}(\mathbb{R})$ uzayına sınırlı olarak genişletilebilmesi anlamına gelir. Bu multilinear çarpanların uzayı $BM[L(W)(p_i, q_i, r_i, \omega_i, v_i, s_i)]$ (kısaca $BM[L(W)]$) ile gösterilir. $BM[L(W)]$ uzayı üzerine aşağıdaki normu koyalım:

$$\|m\|_{L(W)} = \|B_m\|$$

$$= \sup \left\{ \frac{\|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}}}{\prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}}} : \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \leq 1 \ (i = 1, \dots, d) \right\}$$

3.1.2. Yardımcı Teorem (Hölder Eşitsizliği) Eğer $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_d} = \frac{1}{p}$ eşitliği var ve

$f_i \in L_{s_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}$ ($i = 1, \dots, d$) ise,

$$\left\| \prod_{i=1}^d f_i \right\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{\omega, \omega}^{p, p, p}} \leq C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}}$$

olacak biçimde bir $C > 0$ sayısı vardır.

İspat Kabul edelim ki p_i, q_i, r_i ($i = 1, \dots, d$) olsun. Öte yandan

$$W_g \left(\prod_{i=1}^d f_i \right) = \left(\prod_{i=1}^d f_i \right) * D_{s_{d+1}} g^*$$

$g^*(x) = \overline{g(-x)}$ eşitliği biliniyor (Gröchenig, 2001). Bu son eşitlik ve Lebesgue uzayları için Hölder eşitsizliği kullanılır ise;

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{i=1}^d f_i \right\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{\omega, \omega}^{p, p, p}} &= \left\| \prod_{i=1}^d f_i \right\|_{p, \omega} + \left\| W_g \prod_{i=1}^d f_i \right\|_{pp, \omega} \\ &\leq \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{p_i, \omega} + \left\| \left(\prod_{i=1}^d f_i \right) * D_{s_{d+1}} g^* \right\|_{pp, \omega} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca $L_{\omega}^p(\mathbb{R})$ uzayı $L_{\omega}^1(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde bir Banach modülü olduğundan,

$$\left\| \prod_{i=1}^d f_i \right\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{\omega, \omega}^{p, p, p}} \leq \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{pp, \omega} + \left\| \prod_{i=1}^d f_i \right\|_{p, \omega} \|D_{s_{d+1}} g^*\|_{1, \omega}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{p_i, \omega} + \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{p_i, \omega} \|D_{s_{d+1}} g^*\|_{1, \omega} \\
&= \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{p_i, \omega} (1 + \|D_{s_{d+1}} g^*\|_{1, \omega}) \\
&\leq \left(\prod_{i=1}^d (\|f_i\|_{p_i, \omega} + \|W_g f_i\|_{q_i r_i, v_i}) \right) (1 + \|D_{s_{d+1}} g^*\|_{1, \omega}) \\
&= C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega_i v_i}^{p_i, q_i, r_i}}
\end{aligned}$$

elde edilir $(C = 1 + \|D_{s_{d+1}} g^*\|_{1, \omega})$.

3.1.3. *Örnek* Kabul edelim ki $m = (\xi_1, \dots, \xi_d) = a$ bir sabit fonksiyon ve $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_d}$ olsun. Her $f_i \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ($i = 1, \dots, d$) için,

$$\begin{aligned}
B_m(f_1, \dots, f_d)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) m(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\
&= a \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1, x \rangle} \dots e^{2\pi i \langle \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\
&= a \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}_1(\xi_1) e^{2\pi i \langle \xi_1, x \rangle} d\xi_1 \right) \dots \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}_d(\xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_d, x \rangle} d\xi_d \right) \\
&= a \prod_{i=1}^d f_i(x)
\end{aligned}$$

olup Yardımcı Teorem 3.1.2 kullanılır ise,

$$\|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_S(W)_{\omega, \omega}^{p,p,p}} \leq |a|C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}}$$

olacak biçimde $C > 0$ sayısı bulunur. O halde $m \in BM[L(W)]$ elde edilir.

3.1.4. Teorem $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_d}$ olsun. Eğer $K \in L_v^1(\mathbb{R})$ ise $v(y) = \omega_1(y) \prod_{i=2}^d \omega_i(-y)$, $\omega_1 = \max\{\omega, v_1\}$ ve $\omega_i = \max\{\omega, v_i\}$ ($i = 2, \dots, d$) olmak üzere

$$m(\xi_1, \dots, \xi_d) = \widehat{K}(\xi_1 - \xi_2 - \dots - \xi_d) \in BM[L(W)]$$

olur. Bundan başka

$$\|m\|_{L(W)} \leq C \|K\|_{1,v}$$

olacak biçimde bir $C > 0$ sayısı vardır.

İspat Herhangi bir $f_i \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ($i = 1, \dots, d$) olsun. O halde,

$$\begin{aligned} B_m(f_1, \dots, f_d)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) m(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) \widehat{K}(\xi_1 - \xi_2 - \dots - \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) \left(\int_{\mathbb{R}} K(y) e^{-2\pi i \langle \xi_1 - \xi_2 - \dots - \xi_d, y \rangle} dy \right) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) K(y) e^{-2\pi i \langle \xi_1 - \xi_2 - \dots - \xi_d, y \rangle} e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) K(y) e^{2\pi i \langle x-y, \xi_1 \rangle} e^{2\pi i \langle x-y, \xi_2 \rangle} \dots e^{2\pi i \langle x-y, \xi_d \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d dy \quad (3.1) \end{aligned}$$

Eğer (3.1) eşitliğine Fubini Teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} B_m(f_1, \dots, f_d)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}_1(\xi_1) e^{2\pi i \langle x-y, \xi_1 \rangle} d\xi_1 \right) \dots \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}_d(\xi_d) e^{2\pi i \langle x-y, \xi_d \rangle} d\xi_d \right) K(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) f_2(x+y) \dots f_d(x+y) K(y) dy \end{aligned} \quad (3.2)$$

elde edilir. Ayrıca (Kulak, 2022) çalışmasından $T_y f_1 \in L_{s_1}(W)_{\omega, v_1}^{p_1, q_1, r_1}(\mathbb{R})$, $T_{-y} f_i \in L_{s_i}(W)_{\omega, v_i}^{p_i, q_i, r_i}(\mathbb{R})$ ($i = 1, \dots, d$) ve aşağıdaki eşitsizlikler biliniyor,

$$\|T_y f_1\|_{L_{s_1}(W)_{\omega, v_1}^{p_1, q_1, r_1}} \leq \omega(y) \|f_1\|_{p_1, \omega} + v_1(y)^{\frac{1}{q_1}} \|W_g f_1\|_{q_1 r_1, v_1} \quad (3.3)$$

$$\|T_{-y} f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \leq \omega(-y) \|f_i\|_{p_i, \omega} + v_i(-y)^{\frac{1}{q_i}} \|W_g f_i\|_{q_i r_i, v_i} \quad (i = 2, \dots, d) \quad (3.4)$$

Eğer Yardımcı Teorem 3.1.2, (3.2) eşitliği ve (3.3), (3.4) eşitsizlikleri kullanılır ise,

$$\begin{aligned} \|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{\omega, \omega}^{p, p, p}} &\leq \int_{\mathbb{R}} \|T_y f_1 T_{-y} f_2 \dots T_{-y} f_d K(y)\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{\omega, \omega}^{p, p, p}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|T_y f_1 T_{-y} f_2 \dots T_{-y} f_d\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{\omega, \omega}^{p, p, p}} |K(y)| dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} \|T_y f_1\|_{L_{s_1}(W)_{\omega, v_1}^{p_1, q_1, r_1}} \prod_{i=2}^d \|T_{-y} f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} |K(y)| dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} \left(\omega(y) \|f_1\|_{p_1, \omega} + v_1(y)^{\frac{1}{q_1}} \|W_g f_1\|_{q_1 r_1, v_1} \right) \times \\ &\quad \times \prod_{i=2}^d \left(\omega(-y) \|f_i\|_{p_i, \omega} + v_i(-y)^{\frac{1}{q_i}} \|W_g f_i\|_{q_i r_i, v_i} \right) |K(y)| dy \end{aligned} \quad (3.5)$$

olur. Yine $\omega_1 = \max\{\omega, v_1\}$ ve $\omega_i = \max\{\omega, v_i\}$ ($i = 2, \dots, d$) olduğundan ve (3.5) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& \|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{\omega, \omega}^{p,p,p}} \\
& \leq C \int_{\mathbb{R}} \omega_1(y) \|f_1\|_{L_{s_1}(W)_{\omega, v_1}^{p_1, q_1, r_1}} \prod_{i=2}^d \omega_i(-y) \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} |K(y)| dy \\
& = C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \int_{\mathbb{R}} |K(y)| \omega_1(y) \prod_{i=2}^d \omega_i(-y) dy \\
& = C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \|K\|_{1,v}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

bulunur. Böylece $m(\xi_1, \dots, \xi_d) = \widehat{K}(\xi_1 - \xi_2 - \dots - \xi_d)$ multilineer çarpan olur. Son olarak (3.6) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
\|m\|_{L(W)} &= \sup \left\{ \frac{\|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{\omega, \omega}^{p,p,p}}}{\prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega, v_i}^{p_i, q_i, r_i}}} : \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \leq 1 \ (i = 1, \dots, d) \right\} \\
&\leq C \|K\|_{1,v}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.5. Tanım $1 \leq p_i, q_i, r_i < \infty$, $s_i \in \mathbb{R}^+$ ve ω_i, v_i ($i = 1, \dots, d+1$) $\mathbb{R}$ üzerinde birer ağırlık fonksiyonu olsun. Eğer $M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonu için,

$$m(\xi_1, \dots, \xi_d) = M(\xi_1 - \xi_2 - \dots - \xi_d) \in BM[L(W)(p_i, q_i, r_i, \omega_i, v_i, s_i)]$$

ise diğer bir ifade ile

$$B_m(f_1, \dots, f_d)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) M(\xi_1 - \xi_2 - \dots - \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d$$

multilineer operatörü, $L_{s_1}(W)_{\omega_1, v_1}^{p_1, q_1, r_1}(\mathbb{R}) \times \dots \times L_{s_d}(W)_{\omega_d, v_d}^{p_d, q_d, r_d}(\mathbb{R})$ uzayından $L_{s_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}(\mathbb{R})$ uzayına sürekli olarak genişletilebiliyorsa bu M fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $\tilde{M}[L(W)(p_i, q_i, r_i, \omega_i, v_i, s_i)]$ kısaca $\tilde{M}[L(W)]$ ile gösterilir. Bu uzay,

$$\|M\|_{L(W)} = \|B_m\|$$

normu ile donatılır.

3.1.6. Teorem $\frac{1}{p_{d+1}} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_d}$ ve v polinom tipli ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\omega_{d+1} \leq v, v_i \leq v \ (i = 1, \dots, d)$$

ve $\omega(x) = (1 + |x|)^{Nd}$, ($N \in \mathbb{N}$) olsun. Eğer $\mu \in \mathcal{M}(\omega)$ ve $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, d$) için $m(\xi_1, \dots, \xi_d) = \hat{\mu}(\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_d \xi_d) \in BM[L(W)]$ olur. Bundan başka

$$\|m\|_{L(W)} \leq C \|\mu\|_{\omega}$$

olacak biçimde bir $C > 0$ sayısı vardır.

İspat Herhangi bir $f_i \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ($i = 1, \dots, d$) verilsin. O halde,

$$\begin{aligned} B_m(f_1, \dots, f_d)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}_1(\xi_1) \dots \hat{f}_d(\xi_d) m(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}_1(\xi_1) \dots \hat{f}_d(\xi_d) \hat{\mu}(\alpha_1 \xi_1, \dots, \alpha_d \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}_1(\xi_1) \dots \hat{f}_d(\xi_d) \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \langle \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_d \xi_d, t \rangle} d\mu(t) \right\} e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \langle \alpha_1 \xi_1, t \rangle} \dots e^{-2\pi i \langle \alpha_d \xi_d, t \rangle} d\mu(t) \right\} e^{2\pi i \langle \xi_1, x \rangle} \dots e^{2\pi i \langle \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}_1(\xi_1) e^{2\pi i \langle x - \alpha_1 t, \xi_1 \rangle} d\xi_1 \right) \dots \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}_d(\xi_d) e^{2\pi i \langle x - \alpha_d t, \xi_d \rangle} d\xi_d \right) d\mu(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_1(x - \alpha_1 t) \dots f_d(x - \alpha_d t) d\mu(t). \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Diğer yandan, Teorem 2.3 (Kulak, 2021:740), için aşağıdaki eşitsizlikler yazılır:

$$\|T_{\alpha_i t} f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \leq \omega_{d+1}(\alpha_i t) \|f_i\|_{p_i, \omega_{d+1}} + v_i(\alpha_i t)^{\frac{1}{q_i}} \|W_g f_i\|_{q_i r_i, v_i} \quad (i = 1, \dots, d)$$

Böylece (3.7) eşitsizliği ve Yardımcı Teorem 3.1.2 kullanılır ise,

$$\begin{aligned}
&\|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{S_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, \omega_{d+1}}^{p_{d+1}, p_{d+1}, p_{d+1}}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \|f_1(x - \alpha_1 t) \dots f_d(x - \alpha_d t)\|_{L_{S_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, \omega_{d+1}}^{p_{d+1}, p_{d+1}, p_{d+1}}} d|\mu|(t) \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d \|f_i(x - \alpha_i t)\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} d|\mu|(t) \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d \left\{ \omega_{d+1}(\alpha_i t) \|f_i\|_{p_i, \omega_{d+1}} + v_i(\alpha_i t)^{\frac{1}{q_i}} \|W_g f_i\|_{q_i r_i, v_i} \right\} d|\mu|(t) \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d v_i(\alpha_i t) \left\{ \|f_i\|_{p_i, \omega_{d+1}} + \|W_g f_i\|_{q_i r_i, v_i} \right\} d|\mu|(t) \\
&= C \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d v_i(\alpha_i t) \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} d|\mu|(t)
\end{aligned}$$

$$= C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d v(\alpha_i t) d|\mu|(t) \quad (3.8)$$

elde edilir.

İlk olarak $|\alpha_i| \leq 1$ ($i = 1, \dots, d$) olsun. v ağırlık fonksiyonları polinom tipli olduğundan,

$$v(t) = (1 + |t|)^N \quad (3.9)$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca (3.8) ve (3.9) ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{S_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, \omega_{d+1}}^{p_{d+1}, p_{d+1}, p_{d+1}}} &\leq C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d (1 + |\alpha_i t|)^N d|\mu|(t) \\ &\leq C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d (1 + |t|)^N d|\mu|(t) \\ &= C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \int_{\mathbb{R}} (1 + |t|)^{Nd} d|\mu|(t) \\ &= C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \|\mu\|_{\omega}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Burada $\omega(t) = (1 + |t|)^{Nd}$ dir. Böylece (3.10) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} &\|m\|_{L(W)} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{S_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, \omega_{d+1}}^{p_{d+1}, p_{d+1}, p_{d+1}}}}{\prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}}} : \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \leq 1 \ (i = 1, \dots, d) \right\} \\ &\leq C \|\mu\|_{\omega} \end{aligned}$$

sonucu bulunur.

Şimdi de $|\alpha_i| > 1$ ($i = 1, \dots, d$) olsun. Dolayısıyla (2.8) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{S_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, \omega_{d+1}}^{p_{d+1}, p_{d+1}, p_{d+1}}} &\leq C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d (1 + |\alpha_i t|)^N d|\mu|(t) \\
&< C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d (|\alpha_i| + |\alpha_i t|)^N d|\mu|(t) \\
&= C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d |\alpha_i|^N (1 + |t|)^N d|\mu|(t) \\
&= C \prod_{i=1}^d |\alpha_i|^N \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \int_{\mathbb{R}} (1 + |t|)^N d|\mu|(t) \\
&= C \prod_{i=1}^d |\alpha_i|^N \|\mu\|_{\omega} \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (3.11) eşitsizliği ile,

$$\begin{aligned}
&\|m\|_{L(W)} \\
&= \sup \left\{ \frac{\|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{S_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, \omega_{d+1}}^{p_{d+1}, p_{d+1}, p_{d+1}}}}{\prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}}} : \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \leq 1 \ (i = 1, \dots, d) \right\} \\
&< C \prod_{i=1}^d |\alpha_i|^N \|\mu\|_{\omega}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$|\alpha_{i_0}| > 1$ için $i_0 \in \mathbb{N}$ olsun. O halde (3.8) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{S_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, \omega_{d+1}}^{p_{d+1}, p_{d+1}, p_{d+1}}} \leq C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_{d+1}, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d (1 + |\alpha_i t|)^N d|\mu|(t)$$

$$\begin{aligned}
&= C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)}^{p_i q_i r_i} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\alpha_{i_0} t|)^N \prod_{i=1}^{i_0-1} (1 + |\alpha_{i_0} t|)^N \prod_{i=i_0+1}^d (1 + |\alpha_i t|)^N d|\mu|(t) \\
&< C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)}^{p_i q_i r_i} \int_{\mathbb{R}} (|\alpha_{i_0}| + |\alpha_{i_0} t|)^N \prod_{i=1}^{i_0-1} (1 + |t|)^N \prod_{i=i_0+1}^d (1 + |t|)^N d|\mu|(t) \\
&= C |\alpha_{i_0}|^N \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)}^{p_i q_i r_i} \int_{\mathbb{R}} (1 + |t|)^{Nd} d|\mu|(t) \\
&= C |\alpha_{i_0}|^N \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)}^{p_i q_i r_i} \|\mu\|_{\omega} \tag{3.12}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.12) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
&\|m\|_{L(W)} \\
&= \sup \left\{ \frac{\|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{S_{d+1}}(W)}^{p_{d+1}, p_{d+1}, p_{d+1}}}{\prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)}^{p_i q_i r_i}} : \|f_i\|_{L_{S_i}(W)}^{p_i q_i r_i} \leq 1 \ (i = 1, \dots, d) \right\} \\
&< C |\alpha_{i_0}|^N \|\mu\|_{\omega}
\end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca diğer durumlar içinde benzer biçimde ispat yöntemi kullanılır. O halde $m \in BM[L(W)]$ ve $C > 0$ için

$$\|m\|_{L(W)} \leq C \|\mu\|_{\omega}$$

elde edilir.

3.1.7. Teorem $m \in BM[L(W)]$ olmak üzere $v_i \leq \omega_i$ ($i = 1, \dots, d$) olsun. Bu durumda $M_{(a_1, \dots, a_d)} m \in BM[L(W)]$ olup $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ olmak üzere,

$$\|M_{(a_1, \dots, a_d)} m\|_{L(W)} \leq \|m\|_{L(W)} \prod_{i=1}^d \omega_1(-a_i)$$

olur.

İspat Herhangi bir $f_i \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ($i = 1, \dots, d$) ve $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} B_{M_{(a_1, \dots, a_d)} m}(f_1, \dots, f_d)(x) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) M_{(a_1, \dots, a_d)} m(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) e^{2\pi i \langle (a_1, \dots, a_d)(\xi_1, \dots, \xi_d) \rangle} m(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) e^{2\pi i a_1 \xi_1} \dots e^{2\pi i a_d \xi_d} m(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (T_{-a_1} \widehat{f}_1)(\xi_1) \dots (T_{-a_d} \widehat{f}_d)(\xi_d) m(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\ &= B_m(T_{-a_1} f_1, \dots, T_{-a_d} f_d)(x) \end{aligned} \tag{3.13}$$

bulunur. Ayrıca

$$\|T_{-a_i} f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \leq \omega_i(-a_i) \|f_i\|_{p_i, \omega_i} + v_i(-a_i)^{\frac{1}{q_i}} \|W_g f_i\|_{q_i, r_i, v_i} \quad (i = 1, \dots, d) \tag{3.14}$$

eşitsizlikleri biliniyor (Kulak, 2022). Eğer $m \in BM[L(W)]$ olacak şekilde (3.13) ve (3.14) ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left\| B_{M(a_1, \dots, a_d)} m(f_1, \dots, f_d) \right\|_{L_{S_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}} \leq \|B_m\| \prod_{i=1}^d \|T_{-a_i} f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \\
& \leq \|m\|_{L(W)} \prod_{i=1}^d \left\{ \omega_i(-a_i) \|f_i\|_{p_i, \omega_i} + v_i(-a_i)^{\frac{1}{q_i}} \|W_g f_i\|_{q_i r_i, v_i} \right\} \\
& \leq \|m\|_{L(W)} \prod_{i=1}^d \left\{ \omega_i(-a_i) \|f_i\|_{p_i, \omega_i} + \omega_i(-a_i) \|W_g f_i\|_{q_i r_i, v_i} \right\} \\
& = \|m\|_{L(W)} \prod_{i=1}^d \omega_i(-a_i) \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \tag{3.15}
\end{aligned}$$

olup $M_{(a_1, \dots, a_d)} m \in BM[L(W)]$ bulunur.

Böylece (3.15) eşitsizliği kullanılır ise

$$\begin{aligned}
& \|M_{(a_1, \dots, a_d)} m\|_{L(W)} = \\
& = \sup_{\|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \leq 1, (i=1, \dots, d)} \left\{ \frac{\left\| B_{M(a_1, \dots, a_d)} m(f_1, \dots, f_d) \right\|_{L_{S_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}}}{\prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}}} \right\} \\
& \leq \|m\|_{L(W)} \prod_{i=1}^d \omega_i(-a_i)
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.8. Teorem $m \in BM[L(W)]$ olsun. O halde $T_{(a_1, \dots, a_d)} m \in BM[L(W)]$ ve $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ için

$$\|T_{(a_1, \dots, a_d)} m\|_{L(W)} = \|m\|_{L(W)}$$

olur.

İspat Herhangi bir $f_i \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ($i = 1, \dots, d$) ve $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ verilsin. Eğer $\xi_i - a_i = u_i$ ($i = 1, \dots, d$) değişken değiştirmesi yapılırsa $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}
& B_{T_{(a_1, \dots, a_d)}m}(f_1, \dots, f_d)(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) T_{(a_1, \dots, a_d)}m(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) m(\xi_1 - a_1, \dots, \xi_d - a_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(u_1 + a_1) \dots \widehat{f}_d(u_d + a_d) \times \\
&\quad \times m(u_1, \dots, u_d) e^{2\pi i \langle a_1 + \dots + a_d, x \rangle} \dots e^{2\pi i \langle u_1 + \dots + u_d, x \rangle} du_1 \dots du_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} T_{-a_1} \widehat{f}_1(u_1) \dots T_{-a_d} \widehat{f}_d(u_d) e^{2\pi i \langle a_1 + \dots + a_d, x \rangle} \dots e^{2\pi i \langle u_1 + \dots + u_d, x \rangle} du_1 \dots du_d \\
&= e^{2\pi i \langle a_1 + \dots + a_d, x \rangle} \int_{\mathbb{R}^d} (\widehat{M_{-a_1} f_1})(u_1) \dots (\widehat{M_{-a_d} f_d})(u_d) e^{2\pi i \langle u_1 + \dots + u_d, x \rangle} du_1 \dots du_d \\
&= e^{2\pi i \langle a_1 + \dots + a_d, x \rangle} B_m(M_{-a_1} f_1, \dots, M_{-a_d} f_d)(x) \tag{3.16}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca her $(i = 1, \dots, d)$ için $f_i \in L_{s_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}$ olması, $m \in BM[L(W)]$ ve (3.16) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left\| B_{T_{(a_1, \dots, a_d)}m}(f_1, \dots, f_d) \right\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}} \\
&= \left\| e^{2\pi i \langle a_1 + \dots + a_d, x \rangle} B_m(M_{-a_1} f_1, \dots, M_{-a_d} f_d) \right\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|B_m(M_{-a_1}f_1, \dots, M_{-a_d}f_d)\|_{L_{S_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}} \\
&\leq \|m\|_{L(W)} \prod_{i=1}^d \|M_{-a_i}f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \\
&= \|m\|_{L(W)} \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}}
\end{aligned}$$

elde edilir ve $T_{(a_1, \dots, a_d)}m \in BM[L(W)]$ olur.

Son olarak,

$$\begin{aligned}
&\|T_{(a_1, \dots, a_d)}m\|_{L(W)} = \\
&= \sup_{\|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \leq 1, (i=1, \dots, d)} \left\{ \frac{\|B_{T_{(a_1, \dots, a_d)}}m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{S_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}}}{\prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}}} \right\} \\
&= \|m\|_{L(W)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.9. Teorem $m \in BM[L(W)]$ ve $v_i \leq \omega_i$ ($i = 1, \dots, d$) olsun. Eğer $\omega(y_1, \dots, y_d) = \prod_{i=1}^d \omega_i(-y_i)$ olmak üzere $\Phi \in L^1_\omega(\mathbb{R}^d)$ ise $\widehat{\Phi}m \in BM[L(W)]$ olur. Ayrıca,

$$\|\widehat{\Phi}m\|_{L(W)} \leq \|\Phi\|_{1, \omega} \|m\|_{L(W)}$$

eşitsizliği vardır.

İspat Kabul edelim ki $\Phi \in L^1_\omega(\mathbb{R}^d)$ ve $f_i \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ($i = 1, \dots, d$) olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$B_{\widehat{\Phi}m}(f_1, \dots, f_d)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) (\widehat{\Phi}m)(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y_1, \dots, y_d) e^{-2\pi i \langle (\xi_1, \dots, \xi_d), (y_1, \dots, y_d) \rangle} dy_1 \dots dy_d \right) \times \\
&\quad \times m(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y_1, \dots, y_d) e^{2\pi i \langle (-y_1, \dots, -y_d), (\xi_1, \dots, \xi_d) \rangle} dy_1 \dots dy_d \right) \times \\
&\quad \times m(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y_1, \dots, y_d) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) e^{2\pi i \langle (-y_1, \dots, -y_d), (\xi_1, \dots, \xi_d) \rangle} \times \right. \\
&\quad \times m(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \Big) dy_1 \dots dy_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y_1, \dots, y_d) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(\xi_1) \dots \widehat{f}_d(\xi_d) \times \right. \\
&\quad \times M_{(-y_1, \dots, -y_d)} m(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \Big) dy_1 \dots dy_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y_1, \dots, y_d) B_{M_{(-y_1, \dots, -y_d)}} m(f_1, \dots, f_d)(x) dy_1 \dots dy_d \tag{3.17}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $m \in BM[L(W)]$ ve Teorem 3.1.7 kullanılırsa,

$$M_{(-y_1, \dots, -y_d)} m \in BM[L(W)]$$

olup,

$$\|M_{(-y_1, \dots, -y_d)} m\|_{L(W)} \leq \|m\|_{L(W)} \prod_{i=1}^d \omega_i(-y_i) \tag{3.18}$$

bulunur. O halde (3.17) ve (3.18) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned}
& \|B_{\widehat{\Phi}m}(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{S_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}} \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(y_1, \dots, y_d) B_{M(-y_1, \dots, -y_d)} m(f_1, \dots, f_d)(x) dy_1 \dots dy_d \right\|_{L_{S_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left\| \Phi(y_1, \dots, y_d) B_{M(-y_1, \dots, -y_d)} m(f_1, \dots, f_d)(x) \right\|_{L_{S_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}} dy_1 \dots dy_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi(y_1, \dots, y_d)| \left\| B_{M(-y_1, \dots, -y_d)} m(f_1, \dots, f_d)(x) \right\|_{L_{S_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}} dy_1 \dots dy_d \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi(y_1, \dots, y_d)| \|M(-y_1, \dots, -y_d)m\|_{L(W)} \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} dy_1 \dots dy_d \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi(y_1, \dots, y_d)| \|m\|_{L(W)} \prod_{i=1}^d \omega_i(-y_i) \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} dy_1 \dots dy_d \\
&= \|m\|_{L(W)} \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi(y_1, \dots, y_d)| \prod_{i=1}^d \omega_i(-y_i) dy_1 \dots dy_d \\
&= \|m\|_{L(W)} \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{S_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \|\Phi\|_{1, \omega}
\end{aligned}$$

olup $\widehat{\Phi}m \in BM[L(W)]$ bulunur ve

$$\|\widehat{\Phi}m\|_{L(W)} \leq \|m\|_{L(W)} \|\Phi\|_{1, \omega}$$

elde edilir.

3.1.10. *Sonuç* $v_i \leq \omega_i$ ($i = 1, \dots, d$) ve $\Phi \in L^1_\omega(\mathbb{R}^d)$ olsun. Bu durumda $\omega(y_1, \dots, y_d) = \prod_{i=1}^d \omega_i(-y_i)$ olmak üzere $m = 1$ fonksiyonu $L_{s_1}(W)_{\omega, v_1}^{p_1, q_1, r_1}(\mathbb{R}) \times \dots \times L_{s_d}(W)_{\omega, v_d}^{p_d, q_d, r_d}(\mathbb{R})$ uzayından $L_{s_{d+1}}(W)_{\omega, v}^{p_{d+1}, p_{d+1}, p_{d+1}}$ uzayına bir multilineer çarpan tanımlandığından $\hat{\Phi}$ fonksiyonu $L_{s_1}(W)_{\omega_1, v_1}^{p_1, q_1, r_1}(\mathbb{R}) \times \dots \times L_{s_d}(W)_{\omega_d, v_d}^{p_d, q_d, r_d}(\mathbb{R})$ uzayından $L_{s_{d+1}}(W)_{\omega, v}^{p_{d+1}, p_{d+1}, p_{d+1}}$ bir multilineer çarpan tanımlanır.

İspat Örnek 3.1.3 ve Teorem 3.1.9 kullanılarak ispat kolayca elde edilir.

3.1.11. Teorem $h \in BM[L(W)]$ olsun. Eğer Q_i ($i = 1, \dots, d$) $\mathbb{R}$ üzerinde ölçülebilir bir küme ise,

$$h(\xi_1, \dots, \xi_d) = \frac{1}{\mu(Q_1 \times \dots \times Q_d)} \int_{Q_1 \times \dots \times Q_d} m(\xi_1 + u_1, \dots, \xi_d + u_d) du_1 \dots du_d$$

fonksiyonu bir multilineer çarpandır.

İspat $f_i \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ($i = 1, \dots, d$) olsun. Dolayısıyla her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} B_h(f_1, \dots, f_d)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}_1(\xi_1) \dots \hat{f}_d(\xi_d) h(\xi_1, \dots, \xi_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \\ &= \frac{1}{\mu(Q_1 \times \dots \times Q_d)} \int_{Q_1 \times \dots \times Q_d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}_1(\xi_1) \dots \hat{f}_d(\xi_d) \times \right. \\ &\quad \times m(\xi_1 + u_1, \dots, \xi_d + u_d) e^{2\pi i \langle \xi_1 + \dots + \xi_d, x \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_d \Big) du_1 \dots du_d \\ &= \frac{1}{\mu(Q_1 \times \dots \times Q_d)} \int_{Q_1 \times \dots \times Q_d} B_{T(-u_1, \dots, -u_d)} m(f_1, \dots, f_d)(x) du_1 \dots du_d \end{aligned} \quad (3.19)$$

elde edilir. O halde (3.19) eşitliği ve Teorem 3.1.9 kullanılır ise,

$$\begin{aligned}
& \|B_h(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}} \\
& \leq \frac{1}{\mu(Q_1 \times \dots \times Q_d)} \int_{Q_1 \times \dots \times Q_d} \|B_{T(-u_1, \dots, -u_d)} m(f_1, \dots, f_d)(x)\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}} du_1 \dots du_d \\
& \leq \frac{1}{\mu(Q_1 \times \dots \times Q_d)} \int_{Q_1 \times \dots \times Q_d} \|T_{(-u_1, \dots, -u_d)} M\|_{L(W)} \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} du_1 \dots du_d \\
& = \frac{1}{\mu(Q_1 \times \dots \times Q_d)} \int_{Q_1 \times \dots \times Q_d} \|m\|_{L(W)} \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} du_1 \dots du_d \\
& = \frac{1}{\mu(Q_1 \times \dots \times Q_d)} \|m\|_{L(W)} \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \mu(Q_1 \times \dots \times Q_d) \\
& = \|m\|_{L(W)} \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $h \in BM[L(W)]$ elde edilir.

3.1.12. Teorem Eğer $\omega_i < u_i, v_i \leq m_i$ ($i = 1, \dots, d$) ve $u_{d+1} \leq \omega_{d+1}, m_{d+1} \leq v_{d+1}$ ise

$$BM[L(W)(p_i, q_i, r_i, \omega_i, v_i, s_i)] \subset BM[L(W)(p_i, q_i, r_i, u_i, m_i, s_i)]$$

kapsaması vardır.

İspat Herhangi $m \in BM[L(W)(p_i, q_i, r_i, \omega_i, v_i, s_i)]$ verilsin. O halde,

$$\|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}} \leq C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \quad (3.20)$$

olacak biçimde bir $C > 0$ sayısı vardır. Eğer hipotez ve Teorem 3.3 (Kulak, 2022) kullanılırsa,

$$L_{s_i}(W)_{u_i, m_i}^{p_i, q_i, r_i}(\mathbb{R}) \subset L_{s_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}(\mathbb{R}), \quad (i = 1, \dots, d)$$

ve

$$L_{s_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}(\mathbb{R}) \subset L_{s_{d+1}}(W)_{u_{d+1}, m_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}(\mathbb{R})$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{u_{d+1}, m_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}} \leq C \|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{\omega_{d+1}, v_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}} \quad (3.21)$$

ve

$$\|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \leq C_i \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{u_i, m_i}^{p_i, q_i, r_i}} \quad (3.22)$$

olacak biçimde $C, C_i > 0$ ($i = 1, \dots, d$) sayıları bulunur. O halde (3.20), (3.21) ve (3.22) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned} \|B_m(f_1, \dots, f_d)\|_{L_{s_{d+1}}(W)_{u_{d+1}, m_{d+1}}^{p_{d+1}, q_{d+1}, r_{d+1}}} &\leq C \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{\omega_i, v_i}^{p_i, q_i, r_i}} \\ &\leq C \prod_{i=1}^d C_i \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{u_i, m_i}^{p_i, q_i, r_i}} \\ &= C_0 \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L_{s_i}(W)_{u_i, m_i}^{p_i, q_i, r_i}} \end{aligned}$$

($C_0 = C \prod_{i=1}^d C_i$) olur. Böylece $m \in BM[L(W)(p_i, q_i, r_i, u_i, m_i, s_i)]$ elde edilir. Son olarak buradan,

$$BM[L(W)(p_i, q_i, r_i, \omega_i, v_i, s_i)] \subset BM[L(W)(p_i, q_i, r_i, u_i, m_i, s_i)]$$

kapsaması yazılır.

4.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın bulgular kısmında tanımlanan, $BM[L(W)]$ multilineer çarpan uzayı, Kulak (2017) çalışmasında incelenen bilineer çarpan uzaylarının sahip olduğu birtakım özellikleri belirli koşullar altında sağladığı gözlemlenmiştir. Blasco (2005) ve Villarroya (2008) $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty, 0 < p_3 \leq \infty$ olmak üzere Lebesgue uzaylarını kullanarak (p_1, p_2, p_3) tipindeki bilineer çarpanlar uzayını ve özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca Lorentz uzaylarında kullanarak oluşturdukları bilineer çarpanlar uzayının özelliklerini incelemişlerdir. Kulak ve Gürkanlı (2014) çalışmasında Wiener amalgam uzayları, ağırlıklı Lorentz uzayları ve değişken üslü Lorentz uzayları için bilineer çarpanlar uzayını tanımlamış ve bu uzayların bazı özelliklerini incelemiştir. Bu çalışmada dalgacık dönüşümü kullanılarak tanımlanan $L_s(W)_{\omega, v}^{p, q, r}(\mathbb{R})$ uzayının multilineer çarpan uzayları araştırıldı. Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar zaman-frekans analizi alanında da katkı sağlayacaktır. Ayrıca $L_s(W)_{\omega, v}^{p, q, r}(\mathbb{R})$ uzayının tanımında kullanılan Lorentz uzayı yerine farklı uzaylar kullanılarak bu uzaylar genişletilebilir. Bu uzayların da multilineer çarpanları incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Adıyaman, İ. and Kulak, Ö. (2024). Multilinear multipliers of function spaces with wavelet transform in Lorentz spaces, *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6(3), 34-47.
- Blasco O. (2005). Bilinear multipliers and transference, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 4, 545-554.
- Blasco O., Carro M. and Gillespie T. A., (2005). Bilinear Hilbert transform on measure spaces, *Journal Fourier Analysis Applied*, 11, 4, 458-470.
- Blasco O. (2009). Notes on the spaces of bilinear multipliers, *Revista de la Union Matematica Argentina*, 50, 2, 23-27.
- Blozinski, A. P. (1972). On a convolution theorem for $L(p,q)$ spaces, *Transaction of the American Mathematical Society*, 164, 255–165.
- Bracewell, R. (1965). *The Fourier Transform and It's Applications*. Mc Graw-Hill, Inc., New York, 381.
- Chen Y. K. and Lai H. C. (1975). Multipliers of Lorentz spaces, *Hokkaido Mathematical Journal*, 4, 247-260.
- Chung H. M., Hunt R. A. and Kurtz, D. S. (1982). The Hardy-Littlewood maximal function on $L(p,q)$ spaces with weights, *Indiana Universty Mathematic Journal*, 31, 1, 109-120.
- Chuong, N. M. and Tri, N. M., (2002). The Integral Wavelet Transform in Weighted Sobolev Spaces. *Abstract and Applied Analysis*, 7:3, 135-142.
- Çakır, H. and Kulak, Ö. (2023). Bilinear multipliers theory on some function spaces, *Montes Taurus Journal of Pure Applied Mathematics*, 5 (3), 95–104.
- Daubechies.I. (1992). *Ten lectures on wavelets*. CBMS-NSF, SIAM, Philadelphia.
- Duyar C. and Gürkanlı A.T. (2003). Multipliers and relative completion in weighted Lorentz space, *Acta Mathematica Scientia*, 23B-4, 467-476.
- Ephremidze L., Kokilashvili V. and Samko S. (2008). Fractional, maximal and singular operators in variable exponent Lorentz spaces, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 11, 4, 1- 14
- Gröchenig, K. (2001). *Foundations of time-frequency analysis*, Birkhauser, Boston.
- Gürkanlı A. T. (2004). On the inclusion of some Lorentz spaces, *Kyoto Universty Mathematics Journal*, 44, 2, 441-450.

- Gürkanlı, A. T., Kulak Ö. and Sandıkcı, A. (2016). The spaces of bilinear multipliers of weighted Lorentz type modulation spaces, *Georgian Mathematics Journal*, 23 (3), 351–362.
- Hunt, R. A. (1966). On $L(p,q)$ spaces, *Extrait de L'Enseignement Mathématique*, XII, 4, 249–276.
- Hunt, R. A. and Kurtz, D. S. (1983). The Hardy-Littlewood maximal function on $L(p, 1)$, *Indiana University Mathematics Journal*, 32 (1), 155–158.
- Karaoğlu, B. (1998). *Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler*. 3.baskı, Güven yayınları, İstanbul
- Katznelson, Y. (1968). *An Introduction to Harmonic Analysis*. Dover Publications, Inc., New York, 264.
- Kulak, Ö. and Gürkanlı, A. T. (2011). On function spaces with wavelet transform in $L^p_\omega(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$, *Hacettepe Journal of Mathematics ve Statistics*, 40 (2), 163-177.
- Kulak, Ö. (2017). Bilinear multipliers of function spaces with wavelet transform in $L^p_\omega(\mathbb{R}^n)$, *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 20 (1), 81-94.
- Kulak, Ö. (2019). The bilinear Hardy-Littlewood Maximal Function and Littlewood-Paley Square Function on Weighted Variable Exponent Wiener Amalgam Space, *Çankaya University Journal of Science and Engineering* 16 (1), 63–80.
- Kulak, Ö. (2021). *On the multilinear fractional transforms*, *Symmetry* 13 (5).
- Kulak, Ö. (2022). Compact embedding and inclusion theorems for weighted function spaces with wavelet transform, *Lectures of Pure Mathematics on Algebra Analysis and Geometry*, Artikel Academy.
- Kulak, Ö. and Gürkanlı, A. T. (2011). On function spaces with wavelet transform in L , *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 40 (2), 163–177.
- Kulak, Ö. and Gürkanlı, A. T. (2013). Bilinear multipliers of weighted Lebesgue spaces and variable exponent Lebesgue spaces, *Journal of Inequalities and Applications*, 259.
- Kulak, Ö. and Gürkanlı, A. T. (2014). Bilinear multipliers of weighted Wiener amalgam spaces and variable exponent Wiener amalgam spaces, *Journal of Inequalities and Applications*, 476.
- Kulak, Ö. and Gürkanlı, A. T. (2017). Bilinear multipliers of weighted Lorentz spaces and variable exponent Lorentz spaces, *Mathematics and Statistics* 5 (1), 5–18.
- Kulak, Ö. and Gürkanlı, A. T. (2017). Bilinear multipliers of small Lebesgue spaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 45 (5), 1959–1984.

- Lacey M. and Thiele C. (1999). On Caldéron's conjecture. *Annals of Mathematics Journal*, (2), 149, 2, 475-496.
- Larsen R., (1971). *Introduction to the theory of multipliers*. Springer-Verlag, BerlinHeidelberg-New York.
- Larsen R., (1973). *Banach algebras an introduction*. Marcel Dekker Inc., New York.
- O' Neil R., (1963). Convolution operators and $L(p, q)$ spaces, *Duke Mathematical Journal*, 30, 1, 129-142.
- Reiter, H. (1968). Classical harmonic analysis and locally compact group, *Oxford Universty Pres*, Oxford.
- Rudin, W. (1962). *Fourier analysis on groups*. Interscience: New York.
- Rudin, W. (1966). *Real and Complex Analysis*. Mc Graw-Hill, New York, 452s.
- Rudin, W. (1973). *Functional Analysis*. Mc Graw-Hill, Inc., 397s.
- Villarroya F. (2008). Bilinear multipliers on Lorentz spaces, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 58, 133, 1045-1057.
- Treves, F. (1967). Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. *Academic Pres*, New York, 565s.
- Wang H. C., (1977). *Homogeneous Banach algebras*. Marcel Dekker Inc., New York.
- Yap L. Y. H. (1969). Some remarks on convolution operators and $L(p, q)$ spaces, *Duke Mathematical Journal*, 36, 647-658.
- Yap L. Y. H. (1972). On two classes of subalgebras of $L^1(G)$, *Proceedings of the Japan Acedemy*, 48, 5, 315-319.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı: İrem ADIYAMAN

Lisans: Mersin Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

- 1-) Adıyaman, İ. ve Kulak, Ö. (2024). Multilinear multipliers of function spaces with wavelet transform in Lorentz spaces, *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6(3), 34-47.
- 2-) Adıyaman, İ. ve Kulak, Ö. (2023, 11-13 Mart) *Multilinear multipliers of function spaces with wavelet transform*. The 13th Symposium on Generating Functions of Special Numbers and Polynomials and their Applications, Antalya-Turkey.