

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DALGACIK DÖNÜŞÜMÜNÜN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ İLE
KARŞILAŞTIRILMASI VE UYGULAMA**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra DEMREN

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Makina Dinamiği, Titreşim ve Akustiği Yüksek Lisans Programı

OCAK 2015

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DALGACIK DÖNÜŞÜMÜNÜN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ İLE
KARŞILAŞTIRILMASI VE UYGULAMA**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra DEMREN

(503101405)

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Makine Dinamiği, Titreşim ve Akustiği Yüksek Lisans Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Kenan Yüce ŞANLITÜRK

OCAK 2015

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 503101405 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Esra DEMREN**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **“DALGACIK DÖNÜŞÜMÜNÜN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ İLE KARŞILAŞTIRILMASI VE UYGULAMA”** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Kenan Yüce ŞANLITÜRK**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Metin GÜRGÖZE**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Dr. Faruk BAYRAKTAR
Arçelik A.Ş.

Teslim Tarihi : **15 Aralık 2014**

Savunma Tarihi : **14 Ocak 2014**

Aileme,

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca beniengin tecrübesiyle doğru yönlendiren, yardımcı olmak için fedakarca vakit yaratan danışmanım Prof. Dr. Kenan Yüce Şanlıtürk’e çalışmamın her aşamasındaki desteği için çok teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmam esnasında imkanlarını esirgemeyen Ford Otosan A.Ş.’ye teşekkür ederim.

Son olarak, hayatımda attığım adımlarda bana daima destek olan, zor zamanlarımda elimden tutup devam etme gücü veren ve sonsuz sevgilerini sunan aileme teşekkürü borç bilirim.

Aralık 2014

Esra DEMREN
(Makine Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
ÖZET.....	xvii
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ	1
1.1 Giriş ve Problem Tanımı	1
1.2 Literatür Araştırması	2
1.3 Amaç ve Kapsam	9
2. TEORİ.....	11
2.1 Dalgacık Dönüşümü'nde Kullanılan Bazı Temel Matematiksel Konseptler ...	11
2.1.1 İç çarpım uzayları.....	11
2.1.2 Ortogonallik, ortonormallik ve Gram-Schmidt ortogonalizasyonu	13
2.1.3 Yakınsama.....	16
2.1.4 Konvolüsyon	18
2.2 Fourier Analizi	19
2.2.1 Fourier dönüşümü	19
2.2.2 Ayrık Fourier dönüşümü	25
2.2.3 Kısa süreli Fourier dönüşümü (KSFD)	28
2.3 Çoklu Çözünürlük ve Dalgacık Analizi	34
2.3.1 Çoklu çözünürlük.....	34
2.3.2 Dalgacık dönüşümü.....	36
2.3.3 Sürekli dalgacık dönüşümü	46
2.3.4 Ayrık dalgacık dönüşümü	50
2.4 Bazı Dalgacık Operatörlerinin Özellikleri	54
2.4.1 Haar dalgacığı	55
2.4.2 Daubechies dalgacıkları	57
2.4.3 Symlet dalgacıkları	60
2.4.4 Morlet dalgacığı	61
2.4.5 Mexican Hat dalgacığı	62
2.4.6 Meyer dalgacığı.....	63
3. DALGACIK DÖNÜŞÜMÜNÜN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ İLE	
KARŞILAŞTIRILMASI	67
3.1 Durağan Sinyaller İçin Karşılaştırılması	67
3.2 Durağan Olmayan Sinyaller İçin Karşılaştırılması	84
3.3 Sonuçlar.....	97
4. DALGACIK DÖNÜŞÜMÜNÜN KISA SÜRELİ FOURIER DÖNÜŞÜMÜ	
İLE KARŞILAŞTIRILMASI.....	99
4.1 Durağan Sinyaller İçin Analizler ve Sonuçların Karşılaştırılması	99
4.2 Durağan Olmayan Sinyaller İçin Analizler ve Sonuçların Karşılaştırılması .	110
4.3 Sonuçlar.....	116

5. DALGACIK DÖNÜŞÜMÜNÜN ARAÇ TİTREŞİM VE GÜRÜLTÜ SİNYALLERİNE UYGULANMASI.....	119
5.1 Titreşim Sinyallerinin Dalgacık Analizi.....	119
5.2 Gürültü Sinyallerinin Dalgacık Analizi.....	130
5.3 Sonuçların Fourier ve Kısa Süreli Fourier Analizleri ile Karşılaştırılması	145
6. GENEL DEĞERLENDİRME VE GELECEK ÇALIŞMALAR İÇİN ÖNERİLER.....	147
6.1 Genel Değerlendirme	147
6.2 Gelecek Çalışmalar İçin Öneriler	149
KAYNAKLAR.....	151
EKLER.....	153
ÖZGEÇMİŞ.....	157

KISALTMALAR

AFD	: Ayrık Fourier Dönüşümü
KSFD	: Kısa Süreli Fourier Dönüşümü
SDD	: Sürekli Dalgacık Dönüşümü
ADD	: Ayrık Dalgacık Dönüşümü
NVH	: Otomotiv Gürültü ve Titreşimi

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 : Heisenberg belirsizlik kutucuğu.	4
Şekil 2.1 : Gram-Schmidt ortogonalizasyonu.	15
Şekil 2.2 : Ortalamada yakınsaklık.	17
Şekil 2.3 : Noktasal yakınsaklık.	17
Şekil 2.4 : Düzgün yakınsaklık.	18
Şekil 2.5 : Bir sinyalin adım fonksiyonlar ile temsili.	26
Şekil 2.6 : Kayan pencere fenomeni.	29
Şekil 2.7 : (a)Bir konuşma sinyali örneği. (b)KSFD görünümü.	30
Şekil 2.8 : Hanning pencere fonksiyonu.	30
Şekil 2.9 : (a)Durağan bir sinüs sinyali. (b)Hanning pencere fonksiyonu uygulandıktan sonraki görünümü.	31
Şekil 2.10 : KSFD’de örtüşme.	32
Şekil 2.11 : Fourier dönüşümünün çözünürlüğünün temsili.	33
Şekil 2.12 : KSFD’nin çözünürlüğünün temsili.	33
Şekil 2.13 : Çoklu çözünürlük gösterimi.	35
Şekil 2.14 : $f_j(x)$ sinyalinin yüksek ve alçak geçişli filtrelerden geçip her bir çözünürlük kademesi için bir katsayı vermesi.	37
Şekil 2.15 : Bir sinyalin Haar dalgacığı ile 3 kademe ayrıştırılması.	38
Şekil 2.16 : Frekans ve ölçek ilişkisi.	42
Şekil 2.17 : Örnek sinyal.	43
Şekil 2.18 : Örnek sinyalin 4 seviye ayrıştırılması için yaklaşıklık fonksiyonları. ...	44
Şekil 2.19 : Örnek sinyalin 4 seviye ayrıştırılması için detay fonksiyonları.	45
Şekil 2.20 : Örnek sinyal.	47
Şekil 2.21 : Daubechies 4 dalgacığının 3. ölçekteki görünümü.	48
Şekil 2.22 : Daubechies 4 dalgacığının 3. ölçekte örnek sinyal üzerinde ötelenmesi.	48
Şekil 2.23 : Daubechies 4 dalgacığının 6. ölçekteki görünümü.	48
Şekil 2.24 : Daubechies 4 dalgacığının 6. ölçekte örnek sinyal üzerinde ötelenmesi.	49
Şekil 2.25 : Daubechies 4 dalgacığının 10. ölçekteki görünümü.	49
Şekil 2.26 : Daubechies 4 dalgacığının 10. ölçekte örnek sinyal üzerinde ötelenmesi.	49
Şekil 2.27 : Daubechies 4 dalgacığı ile 10 ölçekte yapılan dönüşümün katsayıları.	50
Şekil 2.28 : Ayrıştırma işlemini.	52
Şekil 2.29 : Örnek sinyal.	53
Şekil 2.30 : Örnek sinyalin ayrık ve sürekli dönüşümleri.	53
Şekil 2.31 : Dalgacıkların genel sınıflandırılması.	54
Şekil 2.32 : Haar ölçek fonksiyonu.	56
Şekil 2.33 : Haar dalgacık fonksiyonu.	56
Şekil 2.34 : Daubechies 2 (a)Ölçeklendirme fonksiyonu. (b)Dalgacık fonksiyonu.	59
Şekil 2.35 : Daubechies 3 (a)Ölçeklendirme fonksiyonu. (b)Dalgacık fonksiyonu.	59
Şekil 2.36 : Daubechies 4 (a) Ölçeklendirme fonksiyonu (b) Dalgacık fonksiyonu.	59
Şekil 2.37 : Symlet 3 (a)Ölçeklendirme fonksiyonu. (b)Dalgacık fonksiyonu.	60
Şekil 2.38 : Symlet 4 (a)Ölçeklendirme fonksiyonu. (b)Dalgacık fonksiyonu.	61
Şekil 2.39 : Morlet dalgacık fonksiyonu.	62

Şekil 2.40 : Mexican Hat dalgacığı.....	63
Şekil 2.41 : Meyer dalgacığı (a)Ölçeklendirme fonksiyonu. (b)Dalgacık fonksiyonu.64	
Şekil 3.1 : Tek harmonik içeren örnek sinyal s_0	67
Şekil 3.2 : Örnek sinyal s_0 'ın Fourier dönüşümü.....	68
Şekil 3.3 : 1.ölçekteki dalgacığıın sinyal üzerine düşümü.....	69
Şekil 3.4 : 10.ölçekteki dalgacığıın sinyal üzerine düşümü.....	69
Şekil 3.5 : 40.ölçekteki dalgacığıın sinyal üzerine düşümü.....	70
Şekil 3.6 : 60 ölçek ile görünüm.....	71
Şekil 3.7 : 80 ölçek ile görünüm.....	71
Şekil 3.8 : Ölçek 80.....	72
Şekil 3.9 : Ölçek 200.....	73
Şekil 3.10 : Ölçek 100.....	73
Şekil 3.11 : Ölçek 125.....	74
Şekil 3.12 : Ölçek 140.....	74
Şekil 3.13 : Dalgacığıın sinyal üzerinde ilerlemesi.....	75
Şekil 3.14 : (a)Tek bir anda 1 değerine sahip bir sinyal. (b)Sinyalin dalgacık dönüşümü sonunda yoğunluk noktası.....	76
Şekil 3.15 : Pseudo frekans tanımlanması.....	77
Şekil 3.16 : Frekans ve ölçek ilişkisi.....	78
Şekil 3.17 : s_0 sinyalinin dalgacık dönüşümünün (a)Ölçek gösterimi. (b)Pseudo-frekans gösterimi.....	79
Şekil 3.18 : Dönüşümün yakından pseudo-frekans görünümü.....	80
Şekil 3.19 : Dönüşümün farklı bir açıdan görünümü.....	80
Şekil 3.20 : Dönüşümün mutlak değerler ile gösterimi.....	81
Şekil 3.21 : Dönüşümün mutlak değerler ile ifadesinin farklı bir açıdan görünümü.....	81
Şekil 3.22 : Farklı harmonikler içeren örnek sinyal s_1	82
Şekil 3.23 : Örnek sinyal s_1 'in Fourier dönüşümü.....	83
Şekil 3.24 : s_1 'in dalgacık dönüşümü.....	83
Şekil 3.25 : s_1 'in dalgacık dönüşümünün pseudo-frekans gösterimi.....	84
Şekil 3.26 : Durağan olmayan örnek sinyal s_2	85
Şekil 3.27 : s_2 'nin Fourier dönüşümü.....	85
Şekil 3.28 : s_2 'nin Fourier dönüşümünün yakından görünümü.....	86
Şekil 3.29 : s_2 'nin dalgacık dönüşümü.....	87
Şekil 3.30 : s_2 'nin dalgacık dönüşümünün pseudo-frekans gösterimi.....	87
Şekil 3.31 : Örnek sinyal s_3	88
Şekil 3.32 : s_3 'ün Fourier dönüşümü.....	89
Şekil 3.33 : s_3 'ün dalgacık dönüşümü.....	89
Şekil 3.34 : s_3 'ün dalgacık dönüşümünün pseudo-frekans gösterimi.....	90
Şekil 3.35 : s_3 sinyalinin yakından görünümü.....	90
Şekil 3.36 : Örnek sinyal s_4	91
Şekil 3.37 : Örnek sinyal s_4 'ün Fourier dönüşümü.....	91
Şekil 3.38 : s_4 'ün dalgacık dönüşümü.....	92
Şekil 3.39 : s_4 'ün dalgacık dönüşümünün pseudo-frekans gösterimi.....	92
Şekil 3.40 : Dönüşümün farklı bir açıdan görünümü.....	93
Şekil 3.41 : s_4 'ün 1.2. saniyesinin yakından görünümü.....	93
Şekil 3.42 : Haar dalgacığı ile s_4 sinyalinin dalgacık dönüşümü.....	94
Şekil 3.43 : Symlet 4 dalgacığı ile s_4 sinyalinin dalgacık dönüşümü.....	95
Şekil 3.44 : Morlet dalgacığı ile s_4 sinyalinin dalgacık dönüşümü.....	96
Şekil 4.1 : (a) s_0 sinyali. (b) s_0 sinyaline Hanning penceresi uygulanması.....	100
Şekil 4.2 : Pencere ile tanımlanan keside Fourier dönüşümü uygulanması.....	101

Şekil 4.3 : (a) s_0 sinyali. (b) s_0 sinyalinin KSFD'si.	103
Şekil 4.4 : Pencere genişliği 25, örtüşme %50.	104
Şekil 4.5 : Pencere genişliği 100, örtüşme %50.	104
Şekil 4.6 : Pencere genişliği 50, örtüşme %10.	105
Şekil 4.7 : Pencere genişliği 50, örtüşme %90.	106
Şekil 4.8 : Ölçüm periyodu ve örnek sayısı arttırılmış sinyalin KSFD.	107
Şekil 4.9 : (a) s_0 sinyali. (b) s_0 sinyalinin dalgacık dönüşümü.	107
Şekil 4.10 : (a) s_1 sinyali. (b)Pencere boyu 50, örtüşme %50 KSFD.	109
Şekil 4.11 : s_1 'in pseudo-frekans cinsinden dalgacık dönüşümü.	109
Şekil 4.12 : s_1 'in ölçek cinsinden dalgacık dönüşümü.	110
Şekil 4.13 : (a) s_2 sinyali. (b)Pencere boyu 50, örtüşme %50 KSFD.	111
Şekil 4.14 : s_2 'nin dalgacık dönüşümü.	112
Şekil 4.15 : s_3 sinyalinin zaman-genlik gösterimi.	112
Şekil 4.16 : s_3 sinyalinin pencere boyu 50, örtüşme %50 KSFD.	113
Şekil 4.17 : s_3 'ün dalgacık dönüşümü.	113
Şekil 4.18 : s_4 sinyalinin zaman-genlik gösterimi.	114
Şekil 4.19 : s_4 sinyalinin pencere boyu 50, örtüşme %50 KSFD.	114
Şekil 4.20 : s_4 'ün dalgacık dönüşümü.	115
Şekil 4.21 : s_3 'ün 6 kademe ayrıştırılması.	116
Şekil 5.1 : Titreşim sinyali 1.	120
Şekil 5.2 : Örnek sinyal 1'in yakından görünümü.	121
Şekil 5.3 : (a)Haar ölçeklendirme fonksiyonu. (b)Dalgacık fonksiyonu.	122
Şekil 5.4 : Haar dalgacığı ile sinyal 1'in dönüşümü.	122
Şekil 5.5 : Daubechies 4 (a)Ölçeklendirme fonksiyonu. (b)Dalgacık fonksiyonu.	123
Şekil 5.6 : Daubechies 4 dalgacığı ile sinyal 1'in dönüşümü.	123
Şekil 5.7 : Symlet 3 (a)Ölçeklendirme fonksiyonu. (b)Dalgacık fonksiyonu.	123
Şekil 5.8 : Symlet 3 dalgacığı ile sinyal 1'in dönüşümü.	124
Şekil 5.9 : Morlet dalgacık fonksiyonu.	124
Şekil 5.10 : Morlet dalgacığı ile sinyal 1'in dönüşümü.	125
Şekil 5.11 : Mexican Hat dalgacığı ile sinyal 1'in dönüşümü.	125
Şekil 5.12 : Mexican Hat dalgacığı ile sinyal 1'in dönüşümü.	126
Şekil 5.13 : Morlet dalgacığı ile sinyal 1'in dönüşümünün farklı bir açıdan görünümü.	126
Şekil 5.14 : Morlet dalgacığı ile sinyal 1'in dönüşümünün pseudo-frekanslar ile 3 boyutlu görünümü.	127
Şekil 5.15 : Örnek titreşim sinyalinin Fourier dönüşümü ile karşılaştırmalı olarak gösterimi.	128
Şekil 5.16 : Örnek titreşim sinyalinin KSFD ile karşılaştırmalı olarak gösterimi.	129
Şekil 5.17 : Gürültü sinyali.	130
Şekil 5.18 : Örnek sinyal 2'nin yakından görünümü.	131
Şekil 5.19 : Morlet dalgacığı ile sinyal 2'nin dönüşümü.	131
Şekil 5.20 : Mexican Hat dalgacığı ile sinyal 2'nin dönüşümü.	132
Şekil 5.21 : Morlet dalgacığı ile ölçek cinsinden sinyal 2'nin dönüşümü.	132
Şekil 5.22 : Örnek gürültü sinyalinin Fourier dönüşümü ile karşılaştırmalı olarak gösterimi.	133
Şekil 5.23 : Örnek gürültü sinyalinin KSFD ile karşılaştırmalı olarak gösterimi.	135
Şekil 5.24 : Örnek gürültü sinyalinin KSFD ile karşılaştırmalı olarak gösterimi.	136
Şekil 5.25 : Titreşim sinyalinin 5 kademeli ayrıştırılması.	138
Şekil 5.26 : Gürültü sinyalinin 5 kademeli ayrıştırılması.	138
Şekil 5.27 : Örnek sinyal 3'ün zaman uzayında görünümü.	139

Şekil 5.28 : Örnek gürültü sinyalinin Fourier dönüşümü ile karşılaştırmalı olarak gösterimi.	140
Şekil 5.29 : Sinyal 3'ün 1000 Hz altı (a) dalgacık dönüşümü (b) Fourier dönüşümü.	141
Şekil 5.30 : Örnek gürültü sinyalinin KSFD ile karşılaştırmalı olarak gösterimi....	142
Şekil 5.31 : Örnek sinyal 3'ün 5 kademeli ayrıştırılması.	143
Şekil 5.32 : Örnek sinyal 3'ün 8 kademeli ayrıştırılması.	144

DALGACIK DÖNÜŞÜMÜNÜN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ İLE KARŞILAŞTIRILMASI VE UYGULAMA

ÖZET

Günümüzde, mühendislikte ilgilenilen gürültü ve titreşim sinyalleri içerisinde, karmaşık ve değişken yapılu sinyal tipleri oldukça geniş bir yer kaplamaktadır. Otomotiv gürültü ve titreşim alanında yapılan araştırma ve geliştirme çalışmaları çerçevesinde incelenen sinyallerin de çoğu bu tiptedir. Otomotiv sektöründeki gürültü ve titreşim sinyallerinin incelenmesi için pratikte gerçekleştirilen uygulamalarda Fourier temelli dönüşüm yöntemleri tercih edilmektedir.

Fourier dönüşümü, yüzyılı aşkın süredir kullanım alanı bulan, sinyal işleme dünyasının temel taşı niteliğinde bir dönüşümdür. Bu dönüşüm, sinyallerin frekans içeriklerini ayırtmaya yarayan bir dönüşüm tipidir. Dönüşüm sonucu elde edilen frekans içeriği bilgisi, dönen parçaların oluşturduğu çeşitli dinamiklerin bulunduğu motor sistemlerinin gürültü ve titreşim özelliklerini incelemek için çok değerlidir. Ancak bu sistemlerde, durağan sinyallerin yanında ani değişimler gösteren sinyal tipleri de mevcuttur ve bu tip sinyallerin incelenebilmesi için, hem zaman hem frekans bilgisi veren dönüşümlere ihtiyaç duyulmaktadır.

Fourier temelli dönüşümlerden Kısa Süreli Fourier Dönüşümü, Fourier dönüşümünden farklı olarak zaman-frekans analizi yapabilmektedir. Ancak bu dönüşüm, yalnızca sabit frekans çözünürlüğünde gerçekleştirebilmekte, aynı anda hem yüksek frekans çözünürlüğü, hem de yüksek zaman çözünürlüğünü sağlayamamaktadır. Buna rağmen, motor sistemlerinde, Kısa Süreli Fourier Dönüşümü'nün bir çok durumda sinyallerden gerekli bilgiyi almak için yeterli olduğu bilinmektedir. Ancak, yüksek genlikli patlamalar gibi ani değişimlerin birbirine olan farklarının önem kazandığı veya ani değişiklikler ile sürekli olayların bir arada gerçekleştiği bazı durumlarda, Kısa Süreli Fourier Dönüşümü'nün sabit çözünürlükte çalışması, dezavantaj haline gelmektedir.

Hem ani değişimlerin, hem de durağan bileşenlerin birarada olduğu sinyallerin, hem yüksek frekans çözünürlüğü hem de yüksek zaman çözünürlüğü ile incelenebilmesini sağlayabilecek bir sinyal işleme yöntemine gereksinim olduğu görülmüştür. Bu sebeple bu çalışmada, frekans-zaman analizi yapan bir diğer yöntem olan “Dalgacık Dönüşümleri” araştırılmış ve otomotiv gürültü ve titreşim sinyallerine uygulanabilirliği örnekler üzerinden incelenmiştir.

Dalgacık dönüşümü yaklaşık son 30 yılda popüler olmuş bir dönüşüm yöntemidir ve konu ile ilgili varolan kaynakların çoğu, makine mühendisliği dallarındaki pratik kullanıma yönelik değildir. Çalışma, bu açığın giderilmesini sağlamak üzere, dalgacık dönüşümlerinin teorik alt yapısını temellerden başlayarak açıklamak ve dalgacık dönüşümlerinin pratik mühendislik uygulamalarında etkili bir şekilde kullanılabileceğini göstermek amacını da taşımaktadır.

COMPARISON OF WAVELET TRANSFORM AND FOURIER TRANSFORM AND ITS APPLICATIONS

SUMMARY

Today, majority of the signals dealt in engineering noise and vibration studies are observed to be complex, non-stationary signals sometimes with discontinuities. In the field of automotive noise, vibration and harshness (NVH) development studies, most of the signals are of this type as well. For the investigation of the signals in the NVH field, most common practice is using Fourier transform based techniques for post processing algorithms.

Fourier transforms have been around longer than a century and since the day they were publicized; they have met a well-deserved, great attention from many disciplines. It owes its fame to its talent of decomposing the signals into their harmonic components and representing the frequency spectrum. For the automotive vibration and noise signals coming from the engine systems, where many rotating components and related complex dynamics takes place, this spectral information is rather valuable. However, spectral information is not sufficient for signals composing of not only stationary components but also non-stationary components with abrupt changes. In order to detect the instantaneous incidents in the signal, a method that provides both frequency and time information is required.

A Fourier transform based approach Short Time Fourier Transform (STFT) method, generates the time-frequency representation of the signals. Major drawback of STFT is that it uses a fixed resolution property. This may result in incomplete information extraction from the signals with both intermittent high frequency content and dominant low frequency content, just like most of the signals in the NVH field. Although the fixed resolution may not reveal all the information simultaneously, in most cases, this is not a crucial loss as it is not required to know all the details in a signal. However, fixed resolution becomes a disadvantage if the abrupt changes from the engine combustion related vibration or noise signals or such phenomenon are to be investigated.

Realization of the need for a signal processing method that can provide both good frequency resolution and good time resolution simultaneously has led to searches to find another method. For this purpose, wavelet transforms and their applicability to the NVH signals are investigated in this study.

Wavelet transforms have become popular only within the last 3 decades and most of the literature resources on this topic are not straightforward for practical usage in mechanical engineering field studies. Thus, this study aims to provide an understanding of basics of the wavelet transform, starting from the fundamentals, and investigate if the wavelet transforms can be used effectively in the engineering applications as well.

In line with the purpose of this study, a section including some mathematical concepts is provided to ensure comprehension of the full text. This section includes vital concepts in wavelet theory such as inner space productions -which are the core of mathematical transforms used in wavelet functions-, orthogonality –the property wavelets should have for unique transformation- and convolution -the operation that enables wavelets to slide over the whole signal duration and gives a comparison coefficient-.

Subsequent to these explanations, a detailed description and properties of Fourier transform is given since the Fourier transform is a good starting point for comprehension of wavelet theory. Fourier transform uses infinite harmonic bases, namely sine and cosine functions. A signal can be represented as a linear sum of sine and cosine functions with this transform. Unless the signal is non-stationary, this transform provides an elegant way of presentation and provides much valuable information about the analysed signal. When it is non-stationary, time information becomes very valuable which can not be extracted through sole Fourier transform. To overcome this disadvantage, an approach using windowing functions to create a sense of time is developed; Short Time Fourier Transform. STFT gives time, frequency and amplitude information at the same time. However, due to constraints stated by Heisenberg uncertainty principle, the time resolution property of STFT is limited by frequency resolution. A multiresolution transformation that enables both high time and frequency resolution is required for non-stationary, multi-frequency content and irregular type of signals.

Wavelet transforms are multiresolution transforms and they provide fine frequency and time resolution with amplitude information. Just like the Fourier transform decomposes signals into harmonic components, wavelet transform decomposes signals into scaled and shifted versions of a chosen mother wavelet. They compare the wavelets with the signal and give wavelet coefficients to reveal the properties of the signal. There are many different types of wavelets and this study introduces some of the most popular ones.

In order to understand the applicability of the wavelet transforms instead of Fourier based transforms, both Fourier transform and wavelet transform is applied to basic functions created in MATLAB software. Results discussed in this thesis include Fourier transforms applicability to stationary signals with success and the presence of lowest and highest frequency dependent limits in scale selection of wavelet transform. The same basic example functions are also subjected to STFT for better comparison of the three mentioned transformation types. Analysis results discussions include the trade-off between time resolution and frequency resolution, the identification of time dependent features in the analysed signal and wavelet transforms superiority in this detection.

With the deductions gained from observations on basic signals, complex vibration and noise data taken from real automotive systems are analysed. It is also emphasized that the wavelet type should be selected to suit the application. This is done through observing the time-amplitude representation of the analysed signal. Conclusions from the analyses of the NVH signals are found to be parallel to the results seen on previous chapters. Moreover, the time dependent feature detection capability of wavelet transforms are observed to be more efficient than of STFT and Fourier transforms. Another valuable observation gained from these inspections is that, the wavelet transform can distinguish the source of the feature in the signal if data is taken from multiple locations. This property is especially valid for discrete

wavelet transform performed with enough levels of decomposition. This means, if transducers are located in multiple locations in the powertrain and vehicle, the source of a signal can be tracked down by means of comparison of the discrete wavelet transform results of these signals at the sufficient decomposition level. This result is rather valuable for the studies in NVH field as such fault source detection methods are highly desirable for efficient usage of the resources.

This study inspires the usage of wavelet transform based signal analysis in NVH applications. Further studies are also possible such as the opportunities on software tool coding that is flexible and specialized for NVH usage.

1. GİRİŞ

1.1 Giriş ve Problem Tanımı

Sinyal işleme, gerek birçok farklı mühendislik alanı tarafından, gerek matematikçiler tarafından kullanılarak, tıp sektöründen sismolojiye, iletişim sistemlerinden arkeolojiye uzanan bir yelpazede kullanım alanı bulan ve her gün daha da gelişen bir araç olmaktadır. Sinyal işlemenin temelleri sayısal analiz yöntemlerinde yatıyor olsa da, bu alandaki esas atılım 1960'lerden sonra dijital bilgisayarların ve işlemcilerin gelişmesi ile analog sistemlerden dijital sistemlere geçişin gerçekleşmesi ile meydana gelmiştir [1]. 1800'lerde Fransız matematikçi Joseph Fourier tarafından ortaya atılan Fourier serileri ile yapılan analizler ise işlemi daha hızlı yapmaya olanak sağlayan algoritmaların da geliştirilmesiyle birlikte günümüzde hala sinyal işlemede en çok kullanılan araçtır.

Fourier serileri ve Fourier analizi üzerinde 19. yüzyıldan beri çalışılmakta ve Fourier dönüşümü ile yapılabilecekler hakkında bir çok farklı makale, kitap ve benzeri kaynak bulunmaktadır.

Fourier dönüşümü sinyal işlemede çığır açmış bir yöntem olmasına rağmen, dönüşümde kullanılan temel birimleri sonlu olmayan harmonik fonksiyonlardan oluştuğu için, esas olarak sürekli sinyaller için uygundur. Zamana bağlı değişimler gösteren sinyalleri incelemeye duyulan ihtiyaç ise, Fourier dönüşümünün sinyalin belli zaman aralıklarında alınması yoluyla yapılan Kısa Süreli Fourier Dönüşümü'nü getirmiştir.

Kısa Süreli Fourier Dönüşümü (KSFD), Fourier dönüşümü gibi frekans bilgisi vermenin yanı sıra, frekans bileşenlerinin ne zaman oluştuğu bilgisini de taşımaktadır. Bu özelliği ile, sinyalin bir zaman-frekans ifadesini sunmaktadır. Ancak, zaman bilgisi, KSFD'de kullanılan pencere fonksiyonunun destek (support) genişliğine bağlıdır. Yani, sinyaldeki yüksek ve düşük frekanslı bileşenler aynı analiz parametreleri ile hem frekans ekseninde hem de zaman ekseninde aynı netlikte tespit edilememektedir. Bu durum bir çözünürlük problemi meydana getirmektedir.

1900'lerin başında ilk ve en basit hali ile ortaya atılan dalgacık dönüşümü (Wavelet Dönüşümü, WT) çoklu çözünürlük özelliği ile hem frekans hem de zaman uzayında iyi çözünürlük sağlayabilmektedir.

Otomotiv sektöründeki gürültü ve titreşim çalışmaları, yukarıda bahsedilen sıralama ekseninde gerçekleştirilmektedir. Fourier dönüşümü ve KSFD bu disiplindeki en temel araçlar olmaya devam etmektedir. Ancak bazen sinyallerdeki çok ani değişimler ve süreksizlikler KSFD ile dahi yakalanamamaktadır.

Motor aksamında yer alan bilyeli yataklardaki, valflerdeki, pistonlardaki ve benzeri sistemlerdeki düzensizliklerden kaynaklanabilecek ani değişimlerin ve dolayısıyla böyle değişimlere sebep olan kaynağın tespiti, söz konusu sistemlerin araştırma ve geliştirme çalışmalarında çok önemlidir. Dalgacık dönüşümleri hakkındaki bilgi, makine mühendisliği alanında henüz yeterince yaygın olmadığı için, endüstriyel uygulamalarda hangi koşullarda Fourier dönüşümü, hangi koşullarda dalgacık dönüşümünün kullanılmasının daha avantajlı olacağı, pek çok makina mühendisi için net değildir. Bu sebeple, dalgacık dönüşümlerinin üstün zaman çözünürlüğü özelliklerinin, otomotiv gürültü ve titreşim verilerinin incelenmesine uygulanabilirliğinin araştırılması gerekmektedir.

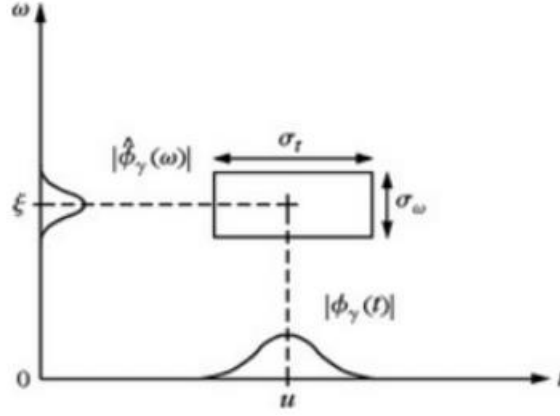
1.2 Literatür Araştırması

Sinyaller ham veri olarak toplandıkları halleriyle zaman-genlik uzayında ifade edilebilirler. Bu verilerin anlamlı bilgiler haline dönüşmesi için sinyallerin işlenmesi gerekmektedir. Sinyal işlemede yüzyıllardan beri etkili şekilde kullanılan yöntem ise, temelleri sayısal analize dayanan Fourier serileri ile yapılan analizdir. “Fourier serileri” olarak bilinen açılım, 1807’de Fransız matematikçi ve fizikçi Joseph Fourier tarafından ortaya konulmuştur ve herhangi bir 2π periyodik fonksiyonun harmonik fonksiyonlar olan kosinüs ve sinüslerin toplamı şeklinde ifade edilebildiğini belirtir. Böylece bir fonksiyon, farklı frekanslardaki harmoniklerin katsayılarla açılımı şeklinde yazılabilir [2]. Bu açılım, herhangi bir periyodik fonksiyonun, sonsuz sayıda üstel karmaşık fonksiyonun toplamı cinsinden ifade edilebileceğini belirtmektedir [3]. Böylece, söz konusu fonksiyon veya sinyal, zaman uzayından frekans uzayına yansıtılmaktadır. Fourier dönüşümü, periyodik ve karmaşık bir fonksiyonu, açılımı oluşturan tüm alt harmonik fonksiyonların katsayıları olarak ifade etmektedir. Bu

katsayılar, Fourier katsayıları olarak adlandırılmaktadır. Her katsayı, temsil ettiği frekans bileşeninin sinyale katkısını temsil etmektedir.

Fourier dönüşümünün dezavantajı, Fourier serilerinin temel yapıtaşlarının sonsuza kadar devam eden periyodik sinüs ve kosinüs fonksiyonları olmasıdır. Bu yaklaşım, zamandan bağımsız dalga formu sinyallerin filtrelenmesi ve sıkıştırılması gibi işlemlere uygun olsa da, zamanda lokalize olmuş sinyaller ve sinüs, kosinüs gibi fonksiyonların doğru şekilde modelleyemediği özellikler barındıran sinyaller için uygun olamamaktadır [4]. Bu tip durumlardan ötürü sinyale hem frekans uzayında, hem de zaman uzayında çözünürlük veren bir analiz yöntemine ihtiyaç duyulmuştur. Bu ihtiyaca, temellerini Gabor dönüşümünden alan Kısa Süreli Fourier Dönüşümü (KSFD) ile cevap verilebilmiştir. 1946 yılında Dennis Gabor tarafından ortaya atılan Fourier temelli analiz yöntemine göre, pencere fonksiyonları aracılığıyla sinyalin küçük bir kesiti ele alınarak bu kesit frekans ve zaman boyutları ile ifade edilir [3]. Gabor dönüşümü, sinyalin küçük kesitlerinin frekans içeriklerini incelerken Gauss tipi pencereler kullanılmaktadır [5]. Bu dönüşüm, KSFD'ye temel oluşturmuştur.

KSFD'de de, Gabor dönüşümünde olduğu gibi, sinyaller, pencere fonksiyonları aracılığıyla küçük kesitlere ayrılıp Fourier dönüşümüne tabi tutulurlar. Seçilen pencere fonksiyonu, sinyal üzerinde zaman eksenini boyunca kaydırılır ve pencere genişliği içerisinde kalan her bir kesitin ayrı ayrı Fourier dönüşümleri alınarak bir zaman-frekans matrisi elde edilir. Sinyaldeki değişimler, pencere fonksiyonunun başında ve sonunda sıfıra yakınsadığı için görülebilir hale gelir [6]. KSFD'nin dezavantajının temelleri, kuantum mekaniğinde geçen "Heisenberg Belirsizlik İlkesi" olarak bilinen bir olguya dayanmaktadır. Bu ilke, esasında hareketli parçacıkların momentum ve pozisyonları ile ilgilidir ve sinyallerdeki zaman-frekans bilgisine uygulanmıştır [7]. Kuantum mekaniğinde bu ilke, bir parçacığın pozisyon ve momentumunun belirsizliğinin istenildiği gibi azaltılamayacağını belirtir. Mallat'ın çalışmasında, parçacığın sahip olduğu ortalama pozisyon zaman ile, ortalama momentum ise frekans ile ilişkili gösterilmiştir. Bu ilişki zaman-frekans ekseninde Heisenberg kutucukları ile gösterilmiş ve zaman-frekans gösterimini oluşturan birim dalgacık yapılar çözünürlük hücreleri şeklinde, şekil 1.1'deki gibi ifade edilmiştir [8].



Şekil 1.1 : Heisenberg belirsizlik kutucuğu.

Şekil 1.1’de gösterilen şeklin yatay eksenini zamanı, dikey eksenini de frekansı göstermektedir. Her hangi bir parçacığın bulunduğu andaki yeri ve o anda sahip olduğu momentumu aynı anda bilinmemektedir. Bu iki bilgi, Heisenberg ilkesi uyarınca ancak ve ancak belli bir aralık içerisinde bilinebilir. Yani bir parçacığın u genişliğinde bir zaman diliminde sahip olduğu frekans içeriği, ξ genişliğinde bir frekans bandı içerisinde yer almaktadır. Özetle, Heisenberg belirsizlik ilkesi sinyalde varolan bir değişimin zamandaki ve frekans uzayındaki çözünürlüğünü sınırlar. Bu sınırlama, sabit pencere boyutlu KSFD’de çözünürlük problemini ortaya koymaktadır. Seçilen pencere boyutu, ya zaman uzayında ya da frekans uzayında iyi çözünürlüğe imkan verebilmektedir. Bu sebeple matematikçiler ve fizikçiler her iki uzayda da çözünürlüğün iyi olduğu bir yöntem arayışına girmişlerdir. Burada da dalgacık dönüşümleri devreye girmiştir.

Her ne kadar 1930’lardan önce de dalgacık dönüşümleri ile ilgili yapılmış çalışmalar bulunsa da, dalgacık terimi 1982’de Fransız jeofizikçi Jean Morlet tarafından kullanılan “ondelette” (dalgacık, wavelet) ile ifade bulana kadar, yapılan çalışmalar tek bir başlık altında toplanabilecek bir teoriyi oluşturamamaktaydı [6,9,10]. Bu sebeple dalgacık teorisinin gelişiminde, birbirinden habersiz, farklı dallarda yapılan benzer çalışmalar bulunmaktadır ve yaklaşık yüzyıl önce yapılmış bazı çalışmaların ancak son çeyrek yüzyılda dalgacık dönüşümünün temellerini oluşturduğu anlaşılabilmektedir. Bu durum, yıllar sonra bazı kavramların yeniden keşfine sebep olmuştur [2].

Bilinen ilk dalgacık benzeri yapı, 1909'da Alman matematikçi Alfred Haar tarafından ortaya konulmuştur. Haar, ötelemek ve ölçeklendirmek suretiyle birbirine dik (ortogonal) bir taban oluşturmayı başarmıştır [11].

Haar'ın çalışmasından sonra, 1930'larda dalgacık dönüşümüne yakın birçok çalışma yapılmıştır. Paul Lévy, türevi beyaz gürültü (white noise) olarak bilinen Brownian hareketini incelemiş ve fonksiyondaki lokal değişimlerin, Schauder tabanları (Haar tabanlarının farklı bir formu) kullanılarak Fourier tabanları olan harmonik fonksiyonlar kullanılmasına nispeten daha iyi yakalanabildiğini ortaya koymuştur [2,12,13].

Harmonik tabanların sinyalin lokal özelliklerini belirlemede yetersiz kaldığı, yine 1930'larda yapılan bir diğer çalışmada, fonksiyonların enerjilerinin lokalizasyonunu yapmaya çalışan İngiliz matematikçiler Littlewood ve Paley tarafından gözlenmiştir. Littlewood ve Paley, yaptıkları çalışmalar sırasında bir fonksiyonun enerjisinin, lokal birkaç nokta etrafında toplanması veya genel dağılımlı olmasına bağlı olarak, Fourier katsayıları ile hesaplanan ortalama enerji hesabından farklı sonuçlar aldıklarını görmüşlerdir. Bu durum, enerjinin korunamadığına işaret ettiği için matematikçileri rahatsız etmiştir. Bunun üzerine, diyadik blokları geliştiren ikilinin çalışmalarına Polonyalı matematikçi Zygmund ve arkadaşlarının çalışmaları da eklenince, bir ana dalgacık formülü ortaya çıkmıştır. Bu çalışma, Belçikalı matematikçi Stein'in katkıları ile de birleşerek, ana dalgacığın Littlewood-Paley'in diyadik blokları ile yer değiştirmiş ve ifadenin konvolüsyonunun alınması ile de Littlewood-Paley-Stein fonksiyonu ortaya atılmıştır. Bu fonksiyon, ölçeklendirilebilen ve enerji korunumunu sağlayabilen bir fonksiyon olduğu için oldukça önemli bir gelişme sayılmaktadır [2,6].

1930'lardaki bir diğer çalışma ise Philip Franklin tarafından yapılmıştır. Franklin'in çalışması Schauder tabanlarından Gram-Schmidt yöntemiyle ortogonal bir taban çıkarma üzerinedir. Bu sistem, ilk ortonormal tabanı oluşturmaktadır ve hem Haar tabanlarının, hem de Schauder tabanlarının avantajlarını taşımasına rağmen, basit bir algoritması olmadığı için uzun süre kullanılmamış, ancak 1963'te Polonyalı matematikçi Ciesielski'nin yeniden incelemesi ile hayata dönmüştür [2,14].

Yine 1930'lu yıllarda yapılan önemli bir çalışma ise Rus matematikçi Luzin'in, ortaya attığı "atom" veya "temel elemanlar" ile yapılan analiz ve sentez çalışmalarıdır [2].

1960'lara gelindiğinde ise, Weiss ve Coifmann'ın Luzin'in “atom”ları ile yaptığı ayrıştırma çalışmaları, ayrıştırılan sinyalin yeniden oluşturulmasını sağlayan kuralların bulunmasını sağlamıştır [6].

İlginçtir ki, matematik dünyasındaki bu gelişmeler, 1980'lere kadar genel ve tek bir tanım altında toplanacak nitelikte olmamıştır.

Dalgacık dönüşümleri, ilk olarak jeofizikteki sismik araştırmalardan elde edilen verileri incelemek için kullanılmıştır. Söz konusu sismik çalışmalar, fosil yakıt ve mineral arama çalışmalarında kullanılan, yeryüzünün üst katmanının altında yer alan kaya yüzeylerinin haritasını çıkarmak için yapılmaktadır. Yeryüzünün üst katmanına bir çizgi üzerinde eş aralıklar ile yerleştirilen ve mikrofon görevi gören jeofonlar aracılığıyla, jeofonların dizildiği sismik çizginin bir ucundan patlatılan dinamitin yarattığı dalgalar toplanarak, yerin altındaki kaya yüzeyinin iki boyutlu resimleri elde edilmektedir. Jeofonlardan alınan ilk veri, direk olarak patlamanın oluşturduğu dalga olduğu için önemli bir veri oluşturmamakta ancak artçı dalgaların verileri, kaya yüzeyinden yansıyan titreşimler olduğu için yüzey hakkında bilgi vermektedir ve çalışmada önem arz eden dalgalar bu artçı dalgalardır. Bir sismik çizgiye dizilmiş tüm jeofonlardan toplanan bilgiler birleştirilerek, alttaki kaya tabakası hakkında detaylı bilgi edinilebilmektedir. Sismik çalışmalardan toplanan bilgileri işlemede, Fourier dönüşümü uygun bir yöntem teşkil edememektedir, çünkü sinyalin frekans içeriğinden ziyade ne zaman oluştuğu önemlidir. KSFD ise, ani dalgalanmaların oluştuğu zaman dilimlerini tam olarak tespit edememektedir. Dalgacık dönüşümü ise, zaman ve frekans bilgisini vermek üzere, yüksek frekanslı içerikler için sinyalin ilgili bölgelerine yaklaşarak, düşük frekanslı içerikler için ise incelenen bölgeyi genişleterek, olayları uygun ölçeklerde tespit edebilmektedir [4]. Sonuçta, geniş dalga boylu düşük frekansların, sinyalin geniş bir bölgesini, yüksek frekansların ise çok daha dar bir alanı kapladığı düşünülürse, sinyalden uzaklaşarak ormanın, yaklaşarak da ağaçların görülebileceği şeklinde bir analogi yapılabilir [6].

Morlet, 1980lerde, yaptığı sismik çalışmalarda yeraltına gönderilen dalgaların, dalga boylarının çok büyük olması sebebiyle kaya yüzeyindeki ince detayların yeterince iyi ayırt edilemediğini görünce, daha kısa süreli ve yüksek frekanslı dalgalar göndererek, yeraltı haritalarını birbirine daha yakın ve detaylı bir şekilde çıkarabilmiştir. Bunu da ana bir dalgacığı ölçeklendirip kullanarak yapmıştır. Dalgacık analizinin ismi de buradan gelmektedir [8].

spektrumlu bu tip sinyallerin incelenmesinde dalgacık dönüşümünü diğer zaman-frekans analizi yöntemlerinden daha etkili bulmuştur [17].

Motor patlama gürültüsü ve piston duvarından alınan ivme değerleri kullanılarak pistonun ikincil hareketinin tespiti üzerine yapılan 1997 tarihli bir çalışma, dalgacık dönüşümlerinin bu hareketin tespitinde, klasik Fourier temelli yöntemlerden daha başarılı olduğunu ortaya koymuştur [18].

Zhu ve Kim'in yaptığı 2007 tarihli çalışmada ise analitik dalgacık dönüşümlerinin, ani değişimli gürültü sinyallerine karşı yapılan gürültü azaltma çalışmalarında kullanılabilirliği incelenmiştir [19].

Dizel motorlardaki vuru fenomenini inceleyen bir çalışma da, 2009'da Gerardin ve arkadaşları tarafından yapılmıştır. Çalışma, vuru fenomenini Fourier ve KSFD yöntemleri ile karşılaştırarak incelemiş ve dalgacık yönteminin, vurunun hangi silindirde ve hangi yoğunlukta olduğunu tespit etmek için en uygun yöntem olduğunu göstermiştir [20].

Motor ve güç aktarma organları üzerinde yapılan 2010 tarihli bir çalışmada, dalgacık yönteminin düşük frekanslı sinyalleri iyi tespit etmesinin yanısıra, motor ve şanzımanın eşlenik modlarının tespitinde kullanılabileceği belirtilmiştir. Bu çalışmada farklı dalgacık tiplerinin, sinyallerin farklı özelliklerini ortaya çıkardığı da gösterilmiştir. [21]. Sinyalin tipine göre dalgacık tipinin seçilmesinin önemi bu çalışmada açıkça görülebilmektedir.

Zhang ve arkadaşları, kamyon sürücü kabini titreşimlerinin ana kaynağını bulmak için yaptıkları bir çalışmada ise, kabinin zemininden, motor takozlarından, şanzımandan ve şasiden alınan ivme verilerini ayırık dalgacık dönüşümü ile detay ve yakınsama fonksiyonlarına ayırarak etkili biçimde kaynağın tespit edilebildiğini göstermişlerdir [22].

Güncel çalışmalardan bir diğeri ise Aly'nin 2013'te yaptığı çalışmadır. Aly, bu çalışmada, benzinli bir motordan alınan titreşim sinyallerini, dalgacık paket dönüşümleri aracılığıyla hata modlarının tespitinde kullanmak üzere bir algoritma geliştirmiş ve deneysel olarak göstermiştir [23].

Bahsedilen çalışmalar dışında, bu tez kapsamında özellikle teori bölümünde oldukça faydalanılmış olan önemli kaynaklar, başta Mallat'ın görkemli çalışması olmak üzere, Michael Weeks'in dalgacık dönüşümlerini MATLAB ticari paket programı ile

incelediği kitabı, dalgacık dönüşümlerinin matematiksel alt yapısının en temelden ve ayrıntıyla anlatıldığı Bogges ve Narcowich'in kitabı, dijital sinyal işlemenin temellerini veren Smith'in kitabı, Kreyszig'in kitabı, Daubechies'in ve Charles Chui'nin çalışmasıdır [4,8,24-28]. Ayrıca, kullanılan web kökenli bazı ders notları da kaynaklarda verilmiştir [29,30,31].

İncelenen kaynaklar dalgacık dönüşümlerinin kısa süreli geçmişlerinden dolayı fazla tanınmadığını, buna karşılık bir çok alanda etkili şekilde kullanılabilir olduğunu göstermiştir. Özellikle otomotiv alanındaki gürültü ve titreşim sinyalleri ile yapılan motor araştırma ve geliştirme çalışmalarında, klasik yöntemlerle kıyaslanınca hangi sinyallerde genel kullanıma uygun olduğu konusunda yeterli bilgi bulunmamaktadır.

1.3 Amaç ve Kapsam

Otomotiv sektöründeki NVH çalışmaları artan rekabet koşulları içerisinde son yıllarda gittikçe önem kazanmıştır. Bu çalışmalar, geleneksel Fourier temelli yöntemler ile yürütülmekte ve söz konusu rekabet ortamında en kısa sürede sorunların doğru şekilde tespitini ihtiyaç haline getirmektedir.

Dalgacık dönüşümleri ile ilgili yapılan çalışmalar bu dönüşümlerin NVH alanında etkili bir şekilde kullanılabileceğinin haberini vermektedir. Ancak dalgacık dönüşümleri, yüzyılı aşkındır geçmişi olan Fourier temelli yöntemler ile kıyaslandığında, NVH alanında çalışanlar tarafından fazla tanınmamaktadır. Yapılan çalışmalar akademik seviyededir ve NVH araştırma geliştirme bölümlerinin rutin sinyal işleme yöntemleri arasına henüz girememiştir.

Bu çalışmada amaç, dalgacık dönüşümlerinin tanıtılması ve NVH sinyallerinin işlenmesinde geleneksel Fourier yöntemleri ile karşılaştırıldığında avantaj ve dezavantajlarının ortaya konulmasıdır.

Amaç doğrultusunda, Fourier serisi temelli Fourier dönüşümü ve KSFD ve sonra dalgacık dönüşümü teori bölümünde temellerden başlayarak incelenecek, ilerleyen üçüncü ve dördüncü bölümlerde de farklı tiplerde basit sinyaller üzerinde yapılan örnekler ile bu dönüşümlerin özellikleri ve birbirlerine göre avantaj ve dezavantajları incelenecektir. Sonraki bölümde ise otomotiv sektöründen alınan titreşim ve gürültü verileri üzerinde bu yöntemlerin karşılaştırılması yapılacaktır. Son bölümde ise elde edilen bulgular ortaya konacak ve genel bir değerlendirme verilerek, NVH

alışmalarında dalgacık dönüşümlerinin pratiğe uyarlanması konusunda geleceğe yönelik yapılabilecek çalışmalar belirtilecektir.

2. TEORİ

2.1 Dalgacık Dönüşümü'nde Kullanılan Bazı Temel Matematiksel Konseptler

2.1.1 İç çarpım uzayları

Dalgacık dönüşümlerinde iç çarpım, iki vektörün veya fonksiyonun birbirine ne kadar benzer olduğunu anlamak için kullanılır.

İç çarpım uzaylarının daha kolay tanımlanması için vektörel uzaydan başlanmıştır.

İç çarpım, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3)$, standart Öklid uzayında tanımlı üç boyutlu iki vektör olmak üzere;

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad (2.1)$$

Şeklinde tanımlanır. Daha genel bir ifade ile, reel uzayda n boyutlu olarak denklem (2.2)'deki gibi ifade edilebilir.

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j \quad (2.2)$$

Kompleks vektör uzayları için ise iç çarpım, vektörlerden birisinin, diğerinin eşleniği ile çarpımı şeklindedir. Vektörün eşleniği ile çarpılmasındaki amaç, sonucun normunun, negatif olmayan gerçek bir sayı olmasını sağlamaktır.

Matematiksel olarak bu, $\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayında, $\mathbf{z} = x + iy$, eşleniği $\bar{\mathbf{z}} = x - iy$ olan kompleks sayılar, $\mathbf{Z} = (z_1, z_2 \dots z_n)$ ve $\mathbf{W} = (w_1, w_2 \dots w_n)$ kompleks vektörler olmak üzere;

$$\langle \mathbf{Z}, \mathbf{W} \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j \quad (2.3)$$

şeklinde gösterilebilir.

V kompleks vektör uzayında tanımlı iç çarpım $\langle ., . \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ aşağıdaki özellikleri sağlamalıdır:

- Pozitiflik:

- ❖ Sıfırdan farklı her vektör $v \in V$ için $\langle v, v \rangle > 0$

- Eşlenik simetrisi:

- ❖ Her vektör $v, w \in V$ için $\overline{\langle v, w \rangle} = \langle w, v \rangle$

- Homojenlik:

- ❖ Her vektör $v, w \in V$ ve skaler $c \in \mathbb{C}$ için $\langle cv, w \rangle = c \langle v, w \rangle$

- Dağılma özelliği:

- ❖ Her vektör u, v ve $w \in V$ için $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

Bu özellikleri sağlayan vektör uzaylarına da iç çarpım uzayı denir.

Vektörel olarak tanımlı verilen iç çarpım uzayı, fonksiyonlar için de tanımlanmalıdır.

Kompleks fonksiyon uzaylarında iç çarpım en genel haliyle şöyle tanımlanır:

$f(t)$ ve $g(t)$, t 'ye bağlı, en az iki kez integre edilebilir fonksiyonlar ve $g(t)^*, g(t)$ 'nin kompleks eşleniği olmak üzere,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)^* dt \quad (2.4)$$

bu iki fonksiyonun iç çarpımını ifade eder. $f(t)$ fonksiyonu, bir sinyalin karşılığı olarak düşünülebilir. Gerçek hayatta bu tip sinyallerin çoğu limitlidir. Buradan yola çıkarak, tanımın limitli bir aralığa oturtulması, gelecek bölümlerdeki uygulamalar için mantıklıdır. $a \leq x \leq b$ olmak üzere, bu aralıkta tanımlı tüm iki kez integre edilebilir fonksiyonların kümesi $L^2([a, b])$ olsun. $f(t)$ bu kümede tanımlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_a^b f(t)^2 dt < \infty \quad (2.5)$$

olur. (2.5) ifadesinde görüldüğü üzere bu fonksiyonun enerjisinin ifadesi sonsuz değerler alamamakta, yani limitli olmaktadır. Bu koşulu sağlayan fonksiyonların iç çarpımı ise $f(t), g(t) \in L^2([a, b])$ olmak üzere,

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(t)g(t)^* dt \quad (2.6)$$

olarak ifade edilir.

Vektörel olarak belirtilen pozitiflik, eşlenik simetrisi, homojenlik ve dağılma özellikleri, iç çarpım fonksiyon uzaylarında da geçerlidir.

2.1.2 Ortogonallik, ortonormallik ve Gram-Schmidt ortogonalizasyonu

Ortogonallik, bir iç çarpım uzayında tanımlı iki vektörün geometrik olarak birbirine dik olması durumudur. Dalgacık analizi için ilerleyen bölümlerde bahsedilecek taban fonksiyonların (basis functions) ortogonal olması istenilen bir özelliktir.

Ortogonallik, kosinüs kuralının özel bir durumu olarak da tarif edilebilir;

$\| \mathbf{v} \|$, $\mathbf{v}$ 'nin normu ve θ iki vektör arasındaki açı olmak üzere kosinüs kuralı,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \| \mathbf{v} \| \| \mathbf{w} \| \cos \theta \quad (2.7)$$

şeklindeir. θ açısının 90° olması, vektörlerin birbirine ortogonalliğini ifade eder.

İki vektörün ortogonal olup olmadığına iç çarpımlarına bakılarak karar verilebilir. İki vektörün iç çarpımı 0 ise, bu ortogonal oldukları anlamına gelir. (2.8) denklemi bunu ifade etmektedir.

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum_i v_i w_i^* = 0 \quad (2.8)$$

Benzer şekilde V vektör uzayının alt uzayları olan V_1 ve V_2 şeklinde iki alt uzay mevcut ve bu alt uzayların birisindeki her bir vektör, diğesindeki her vektöre ortogonal ise, bu alt uzaylar da birbirine ortogonaldır denilir. Fonksiyon uzayında, sonlu bir aralıkta bu özellik denklem (2.9)'daki gibi ifade edilir:

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(t)g(t)^* dt = 0 \quad (2.9)$$

Ortonormal ise, normu 1 olan yani birim uzunluktaki ortogonal vektörlere denilmektedir. Matematiksel olarak ortonormallik, $\| \mathbf{e}_i \| = 1$, $\| \mathbf{e}_j \| = 1$ ve $i \neq j$ iken aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij} \quad (2.10)$$

(2.10) ifadesindeki Kronecker deltası (δ) ise aşağıdaki şekilde tarif edilmektedir.

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.11)$$

Fonksiyon uzaylarında da ortonormallik için aynı koşul geçerlidir. ϕ_i ve ϕ_j şeklinde iki fonksiyon için ortonormallik denklem (2.12)'deki gibi yazılabilir:

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int \phi_i(t) \phi_j(t)^* dt = \delta_{ij} \quad (2.12)$$

İç çarpım uzayına ait her vektör ya da fonksiyon, bu ortonormal vektörlerin veya fonksiyonların lineer bir kombinasyonu cinsinden ifade edilebilir. Bu özellik, yine taban fonksiyonlarda oldukça işe yarayan bir özelliktir ve kanıtı vektörel ifadeler aracılığıyla aşağıda gösterilmiştir.

$\mathbf{e}_i$, $i = 1 \dots n$ şeklinde V_0 iç çarpım uzayında tanımlı ortonormal vektörler ve $\mathbf{v} \in V_0$, olmak üzere, bir $\mathbf{v}$ vektörü (2.13) ifadesindeki gibi tanımlanır:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i \quad (2.13)$$

Bu tanımdaki sabit a_k terimini bulmak için iki tarafın da $\mathbf{e}_k$ ile iç çarpımı alınır.

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle = \sum_{i=1}^n \langle a_i \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \rangle \quad (2.14)$$

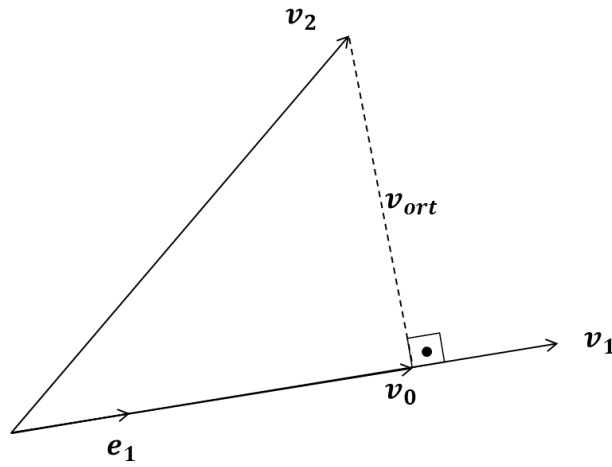
$\mathbf{e}_i$ 'ler ortonormal olduğu için ve ortonormal iki vektörün çarpımı (2.8) ifadesi uyarınca sıfır olduğu için, sıfır olmayan tek terim $i = k$ iken oluşacaktır. Buna dayanarak (2.14) iç çarpımı şu şekilde yazılabilir;

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle = a_k \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k \rangle = a_k \quad (2.15)$$

Bu ifade, v gibi herhangi bir vektörün, lineer olarak ortonormal vektörler cinsinden ifade edilebildiğini göstermektedir.

Taban fonksiyonların ortonormal seçilmesi istenmektedir ancak seçilememeleri durumunda ise bu taban fonksiyonları ortogonal yapabilmek için uygulanabilecek yöntemlerden biri Gram-Schmidt ortogonalizasyonudur.

$v_j, j = 1 \dots n$ olmak üzere, V_0 iç çarpım uzayında ortonormal olmayan bir taban fonksiyonlar kümesi olsun. (2.14) denkleminde bilindiği üzere, bu iç çarpım uzayına ait her vektör, ortonormal bir taban vektör cinsinden ifade edilebilir. Gram-Schmidt ortogonalizasyonu da bunu, herhangi bir v_j vektörünü, ortonormal olan $e_i, i = 1 \dots m$ şeklindeki birim vektörler üzerine izdüşürölüp, bu noktadaki ortogonal vektörü yeni tabanı kabul ederek yapar. $e_i, i = 1 \dots m$ V_0 uzayında, ortonormal bir vektör kümesi, $v_j, j = 1 \dots n$ bu uzaydaki herhangi bir vektör kümesi olmak üzere, v_j 'lerin Gram-Schmidt otogonalizasyonu görsel olarak şekil 2.1'deki gibi ifade edilebilir.



Şekil 2.1 : Gram-Schmidt ortogonalizasyonu.

e_i 'lerin birim vektör oldukları (2.16) ile belirtilerek ortogonalizasyona başlanır.

$$e_i = \frac{v_j}{\|v_j\|} = 1 \quad (2.16)$$

Önce v_j 'ler e_i 'ler üzerine izdüşürölür.

$$proj(v_j) = \sum_{i=1}^m \frac{v_j e_i}{e_i e_i} e_i \quad (2.17a)$$

$$v_0 = \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = \frac{v_2 e_1}{e_1 e_1} e_1 \quad (2.17b)$$

Sonra bu izdüşürülmüş vektörlerin bitiş noktası ile v_j arasındaki ortogonal vektör v_{ort} elde edilir.

$$v_{ort} = v_2 - v_0 \quad (2.18a)$$

$$v_{ort} = v_2 - \frac{v_2 e_1}{e_1 e_1} e_1 \quad (2.18b)$$

Bu yeni v_{ort} vektörü ile v_1 'in ortogonalitesi kontrol edilirse;

$$\langle v_{ort}, e_1 \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1, e_1 \rangle = \langle v_2, e_1 \rangle - \langle v_2, e_1 \rangle \langle e_1, e_1 \rangle = 0 \quad (2.19)$$

bulunur. Bu iç çarpımın sonucunun sıfır olması, yeni bulunan v_{ort} vektörünün gerçekten e_1 birim vektörüne ortogonal olduğunu kanıtlar.

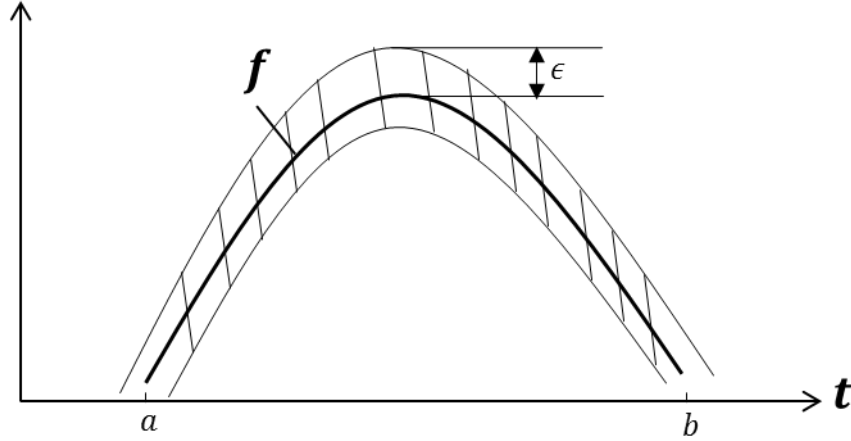
2.1.3 Yakınsama

Bir sinyal, aynı uzaydaki taban fonksiyonlar tarafından temsil edilebilir. Bu temsil, taban fonksiyonların çeşitli katsayılar ile çarpımlarının toplamı şeklinde yapılmaktadır. Ancak taban fonksiyonlar ile oluşturulan temsil, yeterince katsayı ve taban fonksiyon bileşeni içermiyorsa sinyalin birebir aynısı olarak gösterilemeyebilir. Günümüzdeki çoğu uygulamada, sinyallerin tüm ayrıntılarının temsil edilmesi her zaman önemli değildir, hatta bazı uygulamalarda ayrıntıların belli tolerans aralıklarında, özellikle elenmesi istenir. Taban fonksiyonlar ile oluşturulmuş bir sinyal temsilinin, gerçek sinyale benzerliğine yakınsama denir. Yakınsama ne kadar büyük ise, temsili fonksiyon gerçek fonksiyona o kadar benzemektedir.

Fonksiyonlarda en çok kullanılan üç tip yakınsama vardır.

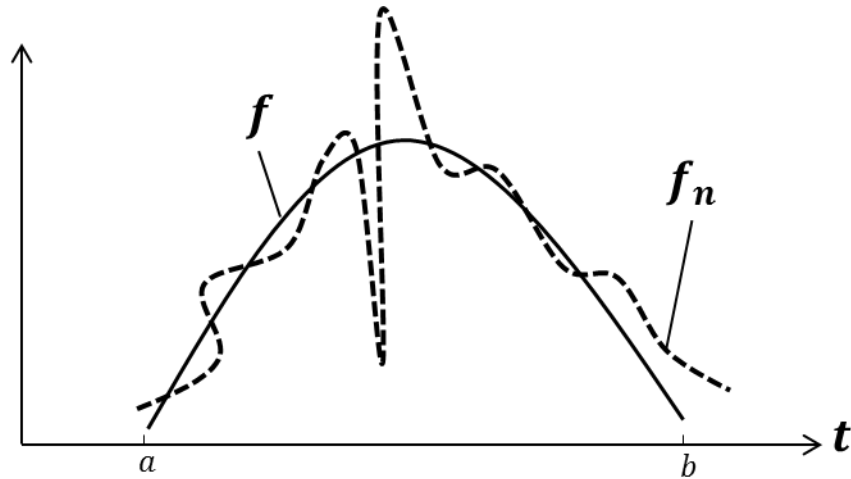
- Ortalamada yakınsama
- Noktasal yakınsama
- Düzgün yakınsama

Ortalamada Yakınsaklık: $f(t)$, V_0 uzayında tanımlı, herhangi bir fonksiyon, $\epsilon, \epsilon > 0$ olacak şekilde seçilen küçük herhangi bir tolerans ve $n \rightarrow \infty$ iken, $a \leq t \leq b$ aralığında, $N, n \geq N$ şeklinde bir pozitif bir tam sayı bulunur ve $\|f(t) - f_n(t)\| < \epsilon$ 'dir. Aşağıda, şekil 2.2'de taralı alan içerisinde kalan herhangi bir fonksiyon kümesi $f(t)$ fonksiyonuna ortalamada yakınsaktır.



Şekil 2.2 : Ortalamada yakınsaklık.

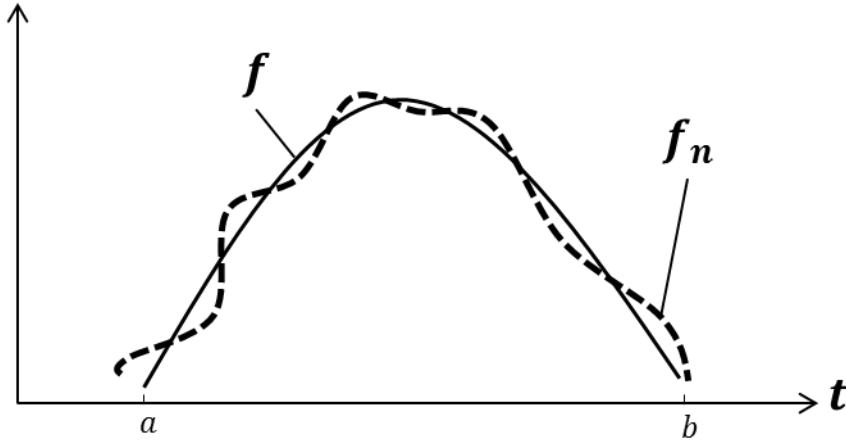
Noktasal Yakınsaklık: $f(t)$, V_0 uzayında tanımlı, herhangi bir fonksiyon, $\epsilon, \epsilon > 0$ olacak şekilde seçilen küçük herhangi bir tolerans ve $n \rightarrow \infty$ iken, $a \leq t \leq b$ aralığında her $t \in [a, b]$ için, $N, n \geq N$ şeklinde bir pozitif bir tam sayı bulunur ve $\|f(t) - f_n(t)\| < \epsilon$ 'dir. Örnek olarak şekil 2.3'teki iki fonksiyon gösterilebilir.



Şekil 2.3 : Noktasal yakınsaklık.

Düzgün Yakınsaklık: $f(t)$, V_0 uzayında tanımlı, herhangi bir fonksiyon, $\epsilon, \epsilon > 0$ olacak şekilde seçilen küçük herhangi bir tolerans ve $n \rightarrow \infty$ iken, $a \leq t \leq b$

aralığında, $N, n \geq N$ şeklinde bir pozitif bir tam sayı bulunur ve tüm $a \leq t \leq b$ için $\|f(t) - f_n(t)\| < \epsilon$ 'dir. Örnek olarak şekil 2.4'teki gibi iki fonksiyon gösterilebilir.



Şekil 2.4 : Düzgün yakınsaklık.

2.1.4 Konvolüsyon

Dalgacık dönüşümünde kullanılacak taban fonksiyonlar, ilerleyen bölümlerde anlatılacağı üzere sinyal fonksiyonu üzerinde kayan bir pencere gibi hareket etmektedir. Bu sebeple, konvolüsyonun tanımını burada hatırlatmak uygun olacaktır.

Sürekli fonksiyonlar için konvolüsyonun en genel tanımı şöyledir;

$f(t)$ ve $g(t)$, herhangi iki fonksiyon ve τ değişken olmak üzere,

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau).d\tau \quad (2.20)$$

Fiziksel olarak bu tanımın anlamı şudur; bu iki fonksiyon birbirlerine en benzer oldukları zamanlarda, konvolüsyon fonksiyonu da maksimum değerleri alır. Benzer şekilde, iki fonksiyon birbirinden farklılaştıkça ya da sifıra yakınsadıkça minimum değerler alır. Yani, bu çarpımın sonucunda çıkan konvolüsyon fonksiyonu, bu iki fonksiyonun benzerlik derecesini gösterir.

Konvolüsyonun sonlu bir aralıktaki tanımı da (2.20) ifadesine benzer şekildedir ve (2.21) denklemi ile verilmiştir.

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau).d\tau \quad (2.21)$$

Konvolüsyonun özellikleri ise aşağıdaki gibi verilebilir:

- Değişme Özelliği:
 - ❖ f ve g integre edilebilir fonksiyonlar olmak üzere $f * g = g * f$
 - Yani: $\int_0^t f(\tau)g(t - \tau).d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t - \tau).d\tau$
- Çarpma Üzerine Dağılma Özelliği:
 - ❖ h fonksiyonu integre edilebilir olmak üzere $f * (g * h) = (f * g) * h$
 - ❖ s bir skaler sayı olmak üzere $s(f * g) = (sf) * g$
- Toplama Üzerine Dağılma Özelliği:
 - ❖ $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
- Eşleniğinin alınması:
 - ❖ Konvolüsyonun eşleniği, iki fonksiyonun ayrı ayrı eşleniklerinin konvolüsyonunun alınmasına eşittir. $\overline{f * g} = \bar{f} * \bar{g}$

2.2 Fourier Analizi

2.2.1 Fourier dönüşümü

Yüzyılı aşkındır bilinen ve sinyal işleme alanında en çok kullanılan dönüşüm olan Fourier dönüşümü, sinyallerin temsili için, trigonometrik taban fonksiyonlarını kullanmaktadır. Sinyalleri temsil eden fonksiyonların trigonometrik bir seri cinsinden açılabilmesi, o sinyal hakkında anlamlı bilgiler elde edilmesini sağlamaktadır.

Bu trigonometrik seriye açılım şöyle ifade edilebilir;

$f(x)$, x değişkenine bağlı $2a$ periyotlu periyodik bir fonksiyon, a_n, b_n ve $n = 1, 2, 3 \dots$ sabit katsayılar olmak üzere denklem (2.22)'deki gibi ifade edilir:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right] \quad (2.22)$$

Bu trigonometrik açılıma Fourier serisi açılımı denmektedir.

Fourier dönüşümü problemi ise, denklem (2.22)'de verilen açılımın katsayıları olan ve Fourier katsayıları denilen a_n ve b_n katsayılarını tayin etme problemidir. Bu katsayılar için Euler formülü yardımıyla elde edilen genel formül ise şöyledir;

$$a_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx \quad (2.23a)$$

$$a_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (2.23b)$$

$$b_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (2.23c)$$

$f(x)$ 'in, pratikteki uygulamalarda en sık rastlanılan sinyaller gibi, zamana bağlı ve 2π periyotlu bir fonksiyon olduğu durumlarda, bu formüller şu şekle dönüşür;

$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$ iken aşağıdaki formüller geçerlidir:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad (2.24a)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad (2.24b)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (2.24c)$$

Fourier katsayıları, bir fonksiyonun, $\sin(nt)$ ve $\cos(nt)$ taban fonksiyonlarını içeren fonksiyon uzayına izdüşürülmüş halini verir. Bu işlem, denklem grupları (2.23) ve (2.24)'ten görülebileceği gibi, iç çarpımlar aracılığıyla yapılır ve işlem sonunda, fonksiyonu harmonik taban fonksiyonları cinsinden ifade edecek katsayılar elde edilir.

Fourier açılımının pratikte kolaylık sağlayan önemli bir özelliği de, dönüşüm katsayılarının, fonksiyonun tek ya da çift olması durumunda sadece tek bir harmonik

cinsinden hesaplanabilmesidir. Yani, $f(x)$ 'in çift fonksiyon olması durumunda sadece kosinüslü terimlerden oluşması, benzer şekilde, $f(x)$ 'in tek fonksiyon olması durumunda ise sadece sinüslü terimlerden oluşmasıdır. Bunlara sırasıyla, “Fourier kosinüs açılımı” ve “Fourier sinüs açılımı” denilmektedir. Matematiksel olarak bu ifadeler aşağıdaki gibi gösterilebilir:

- $f(x)$ çift fonksiyon: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ ise;

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right] \quad (2.25)$$

ve

$$a_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \quad (2.26a)$$

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (2.26b)$$

- $f(x)$ tek fonksiyon: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ ise;

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right] \quad (2.25)$$

ve

$$a_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \quad (2.26a)$$

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (2.26b)$$

Fourier açılımının kompleks halininin tanımı ise, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının Taylor serilerine açılımı ve Euler formülüne konulması ile bulunabilmektedir.

$$e^{it} = 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \dots, \quad i = \sqrt{-1} \quad (2.27a)$$

$$e^{it} = \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots\right) + i \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right) \quad (2.27b)$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad (2.27c)$$

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \quad \text{ve} \quad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \quad (2.27d)$$

(2.27) ifadesindeki terimler, Fourier açılımına yerleştirip düzenlenirse, Fourier kompleks açılımına ulaşılır.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (2.28a)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \mp 1, \mp 2 \dots \quad (2.28b)$$

(2.28) denklemlerinin $-l \leq x \leq l$ aralığında tanımlı ve sürekli türevlenebilir bir $f(x)$ fonksiyonu için düzenlenmesi ile aşağıdaki ifadelere ulaşılır.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l} \quad (2.28a)$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-in\pi t/l} dt, \quad n = 0, \mp 1, \mp 2 \dots \quad (2.28b)$$

Fourier kompleks dönüşümüne ulaşmak için bir takım düzenlemeler yapılır. c_n , $f(x)$ 'in içine yerleştirilip, limiti alınarak başlanır.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-in\pi t/l} dt \right) e^{in\pi x/l} \right] \quad (2.29a)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{in\pi(x-t)/l} dt \right] \quad (2.29b)$$

Burada notasyon kolaylığı için $\omega = \frac{n\pi}{l}$ ve $\omega_{n+1} - \omega_n = \Delta\omega$ alınarak **(2.30)** ifadesine ulaşılır.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(t) e^{\omega_n i(x-t)} dt \right) \Delta\omega \right] \quad (2.30)$$

Parantez içindeki ifade $\hat{f}(\omega)$ ile tanımlanarak, **(2.30)** denklemi **(2.31)**'deki halini alır.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \Delta\omega \quad (2.31)$$

(2.31) ifadesi, bir Riemann toplamı ifadesidir. Riemann toplamı ile ilgili ayrıntılı bilgi eklerde bulunabilir. Riemann kuralı uyarınca, l sonsuza giderken, toplam 0'a yakınsar. Bu durumda $\Delta\omega = d\omega$ haline gelir.

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) d\omega \quad (2.32)$$

Buradan, ilgili düzenlemeler yapıldıktan sonra Fourier dönüşümünün $[\hat{f}(\cdot)]$ kompleks ifadesine ulaşılır;

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.33)$$

Fourier dönüşümünün tersi (invers) de **(2.34)** denklemiyle ifade edilir.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.34)$$

Açıklandığı gibi, Fourier dönüşümü, farklı frekanslar içeren periyodik bir sinyalin, sinüs ve kosinüs harmonik fonksiyonları cinsinden ifade edilebilmesini sağlar. Bu,

sinyal işleme dünyasında bulunduğu zaman çığır açmış, neredeyse mükemmel bir dönüşüm tanımıdır. Bu dönüşüm,

- Yüksek frekanslı gürültünün ortadan kaldırılabilmesini sağlar,
- Verinin sıkıştırılabilmesini sağlar,
- Sinyalin fiziksel özellikleri hakkında ayrıntılı bilgi verir,
- Bir sorun söz konusu ise, bakılması gereken yerleri sınırlandırarak sorunun kaynağını bulmak üzere yapılacak işlemleri azaltır.

Fourier dönüşümünün bir diğer notasyonu $\hat{f}(t) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ şeklindedir. Buradan, Fourier dönüşümünün özellikleri, $f(t)$ ve $g(t)$, reel ekseninde tanımlı, sürekli türevlenebilir iki fonksiyon ve t 'nin büyük değerleri için $f(t) = 0$ koşulu olmak üzere aşağıdaki ifadeler ile tanımlanabilir.

1- Fourier dönüşümü ve tersi lineer operatörlerdir. c bir sabit sayı olmak üzere;

$$(\hat{f} + \hat{g})(t) = \hat{f}(t) + \hat{g}(t) \quad (2.35)$$

$$\hat{f}(ct) = c\hat{f}(t) \quad (2.36)$$

$$(\hat{f} + \hat{g})^{-1}(t) = \hat{f}^{-1}(t) + \hat{g}^{-1}(t) \quad (2.37)$$

$$\hat{f}^{-1}(ct) = c\hat{f}^{-1}(t) \quad (2.38)$$

2- $f(t)$ 'nin t^n şeklinde bir sayı ile çarpımının Fourier dönüşümü;

$$\mathcal{F}\{t^n f(t)\} = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} [\hat{f}(t)] \quad (2.39)$$

3- $f(t)$ 'nin λ^n şeklinde bir sayı ile çarpımının invers Fourier dönüşümü ise;

$$\mathcal{F}^{-1}\{\omega^n f(\omega)\} = (-i)^n \frac{d^n}{dt^n} [\hat{f}^{-1}(t)] \quad (2.40)$$

4- $f(t)$ 'nin n 'inci türevinin Fourier dönüşümü;

$$\mathcal{F}\{t^n\} = (i\omega)^n \hat{f}(t) \quad (2.41)$$

5- $f(n)$ 'nin n 'inci türevinin Fourier dönüşümü;

$$\mathcal{F}^{-1}\{f^n(t)\} = (-it)^n \hat{f}^{-1}(t) \quad (2.42)$$

6- Ötelemenin Fourier dönüşümü;

$$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-i\omega a} \hat{f}(t) \quad (2.43)$$

7- Ölçeklendirmenin Fourier dönüşümü;

$$\mathcal{F}\{f(bt)\} = \frac{1}{b} \hat{f}\left(\frac{\omega}{b}\right) \quad (2.44)$$

8- $t < 0$ iken $x(t) = 0$ ve $\mathcal{L}\{f(t)\}$, $f(t)$ 'nin Laplace dönüşümünü ifade etmek üzere, Fourier dönüşümünün Laplace dönüşümü ile ilişkisi;

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.44)$$

ifadeleri geçerlidir.

2.2.2 Ayrık Fourier dönüşümü

Önceki bölümde gösterildiği üzere, Fourier dönüşümü sürekli bir dönüşümdür. Ancak, pratikteki uygulamalarda, ayrık veri noktaları ile çalışılmaktadır. Yani, bir sinyal, o sinyalin belli noktalarında alınmış değerleri ile temsil edilir. Bu sebeple, “Ayrık Fourier Dönüşümü” ortaya konulmuştur.

Ayrık Fourier dönüşümünün tanımı, f , 0 'dan N 'ye kadar giden bir dizi, f_n , f 'nin $t = t_n$ anındaki değeri ve k bir tamsayı olmak üzere denklem (2.45a)'daki gibi verilir:

$$\hat{f}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i n k / N} \quad (2.45a)$$

Ayrık Fourier dönüşümünün de tersi (inversi) Fourier dönüşümünün tersine benzerdir ve (2.45b)'de verilmiştir:

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k e^{2\pi i n k / N} \quad (2.45b)$$

Ayrık Fourier dönüşümünün özellikleri ise Fourier dönüşümünün özellikleri ile benzerdir. Bunlar aşağıdaki maddeler ile belirtilebilir:

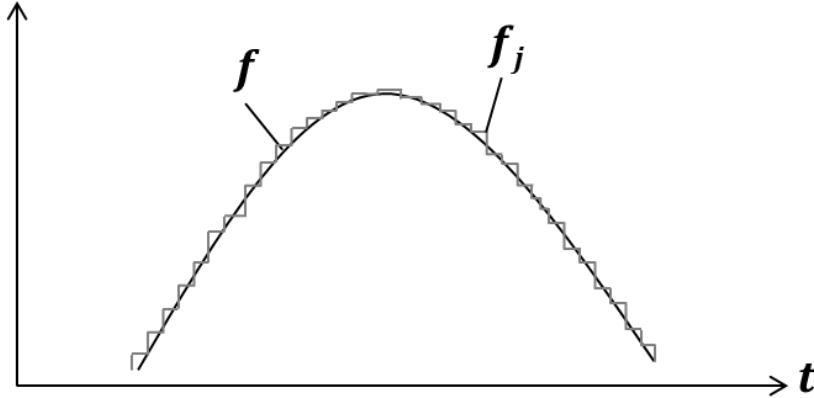
- 1- Ayrık Fourier dönüşümü ve tersi lineer operatörlerdir.
- 2- Ötelemenin Ayrık Fourier dönüşümü $g_k = f_{k+1}$ olmak üzere şöyledir:

$$\hat{g}_k = e^{2\pi i/N} \hat{f}_k \quad (2.46)$$

- 3- Konvolüsyonun ayrık Fourier dönüşümü de şöyledir:

$$\hat{f}_k * \hat{g}_k = \hat{f}_k \hat{g}_k \quad (2.47)$$

Bir dönüşümün ayrık sinyallerle çalışmaya uygun olup olmadığının en basit göstergesi, sürekli veriden toplanan örneklerin oluşturduğu ayrık veri noktaları, tekrar bir araya getirilip birleştirildiğinde, orjinal sinyali ne kadar doğru temsil edebildiğidir. Aşağıda şekil 2.5'te, bir fonksiyonun analog görüntüsü ve veri örneklerinden tekrar adım fonksiyonlar ile oluşturulmuş yaklaşık temsilinin görüntüsü verilmiştir.



Şekil 2.5 : Bir sinyalin adım fonksiyonlar ile temsili.

Analog bir sinyalden toplanan örnek veri noktalarının, tekrar yanyana getirilip birleştirilerek, bu noktalardan bir fonksiyon oluşturulması sırasında, bilgi kaybı yaşanmaması önemlidir. Bunu sağlamak için “**Örnekleme Teoremi**” (Nyquist Teoremi, Shannon Teoremi) ortaya konulmuştur.

Bu teoreme göre, sinyalden toplanan örnek veri noktalarının örnekleme frekansı, örneklenecek sinyalin içindeki en yüksek frekansın 2 katı veya daha büyüğü olmalıdır. Böylece, toplanan veri, özgün bir şekilde yalnızca söz konusu sinyali

temsil eder. İncelenen sinyal, Nyquist frekansı da denilen örnekleme frekansının yarısından daha yüksek frekanslar içeriyorsa, aynalama (aliasing) denilen fenomen oluşur. Bu sinyal örnek noktalardan tekrar oluşturulduğunda nyquist frekansına kadar olan kısımdan sonrası, nyquist frekansına kadar olan kısmın tersi şeklinde gözlenir.

Nyquist teoreminden yola çıkılarak oluşturulmuş, sinyalin doğru ve özgün bir şekilde yeniden sürekli haline getirilmesini sağlayacak formül ise “**Shannon-Whittaker Teoremi**” ile verilmektedir. Bu teorem şu şekilde ifade edilir:

Fourier dönüşümü $\hat{x}$ olan, T gibi belli bir frekans aralığında sürekli olarak tanımlı, bir $x(t)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifade geçerlidir.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n\pi}{T}\right) \frac{\sin(Tt - n\pi)}{Tt - n\pi} \quad (2.48)$$

(2.48) ifadesi, ayrık şekilde toplanacak (dijitalleştirilecek) verinin, sadece formüldeki büyük toplam işaretinden sonra belirtilen frekanslarda toplanmasının, sinyali tekrardan doğru bir şekilde oluşturmak için yeterli olduğunu belirtmektedir. Analog dünyadan dijital dünyaya geçişte, bu ifadenin büyük önemi vardır.

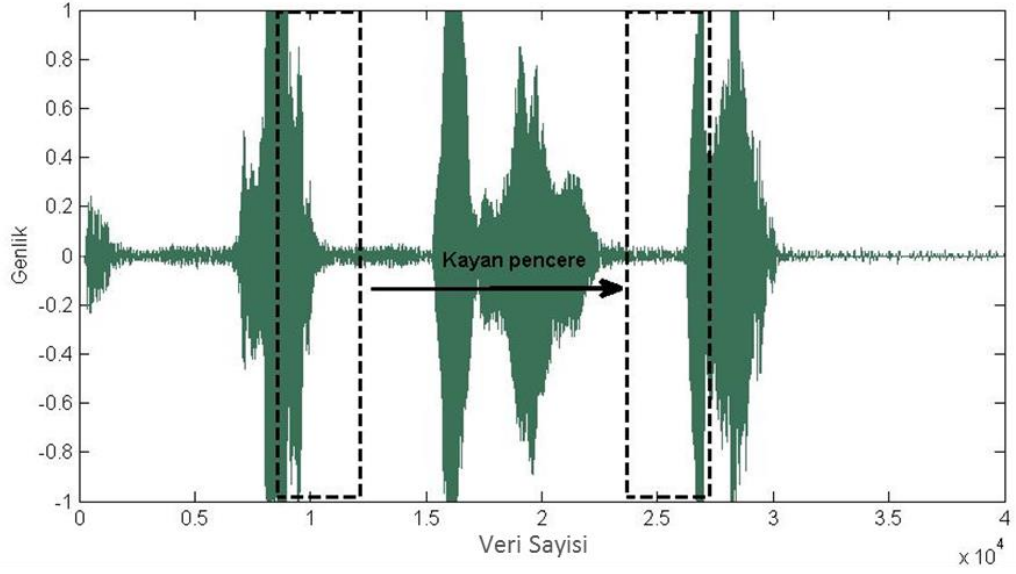
Ayrık Fourier dönüşümünün pratikte kullanılan şekli ise Hızlı Fourier Dönüşümü’dür (HFD, Fast Fourier Transform - FFT). Günümüzde sinyal işleme, bilgisayar işlemcileri aracılığıyla yapıldığı için, dönüşümde yapılan hesaplama sayısını azaltmak ve işlemcilerin kapasitesi elverdiğince zamandan tasarruf etmek önem kazanmıştır. Ayrık Fourier dönüşümünde, örneklenen fonksiyonların oluşturduğu n adet örnekten oluşan bir dizi, $n \times n$ bir matris ile çarpılmakta ve dolayısı ile n^2 kadar işlem yapılması gerekmektedir. HFD, bu çarpımları en aza indirgeyecek şekilde boşluklu bir matris yapısı oluşturan, bir hızlı dönüşüm algoritmasıdır. Bu dönüşüm için çift sayıda veri noktası gerekmektedir. Cooley-Tukey HFD algoritması, N uzunluğundaki bir dönüşümü $N/2$ uzunluğunda dönüşümlere bölmektedir ve bu algoritma aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} &= \sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} a_{2n} e^{-\frac{2\pi i (2n) k}{N}} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} a_{2n+1} e^{-2\pi i (2n+1) k / N} \\
&= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} a_n^{çift} e^{-2\pi i (2n) k / N} + e^{-2\pi i k / N} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} a_n^{tek} e^{-2\pi i n k / (\frac{N}{2})}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Fourier dönüşümü açıklandıktan sonra, temellerinin yine Fourier dönüşümünden alan KSFD açıklanmıştır.

2.2.3 Kısa süreli Fourier dönüşümü (KSFD)

Fourier dönüşümü, önceki bölümde anlatıldığı üzere, bir sinyali etkili bir şekilde, o sinyalin içerdiği frekanslara ayrıştırabilir. Ancak, bu teori, sinyalin periyodik ve durağan olduğu varsayımı üzerine kuruludur. Sinyallerin durağan olmadıkları durumlarda ise, Fourier dönüşümünün ne kadar etkili olduğu sorusuna yanıt, KSFD ile gelmiştir. KSFD, en yalın anlamda, sinyali belli zaman dilimlerine bölerek, her ayrı zaman dilimi için Fourier dönüşümünü uygular. Her ayrı zaman dilimindeki frekans içeriği yanyana konularak, tüm sinyalin zamana bağlı olarak gösterdiği frekans değişimleri görülebilir. KSFD, zamanı küçük aralıklara bölme işlemini pencere fonksiyonları aracılığıyla gerçekleştirir. Bölme işleminin tüm sinyal boyunca gerçekleşmesini de, literatürde en sık rastlanan benzetmesi ile “kayan pencereler” aracılığıyla yapar. Yani KSFD, bir pencere fonksiyonunu (windowing function), sinyalin ölçüm periyodu boyunca öteleyip, her öteleme adımında pencere fonksiyonunun içinde kalan sinyal kesitine de Fourier dönüşümünü uygulamaktadır. Sabit aralıklar ile adım adım yapılan bu işlem, sinyalin zamana bağlı frekans ve faz değişimlerini ortaya koymaktadır. Aşağıdaki şekil 2.6, KSFD’nin işlevini açıklamaktadır.



Şekil 2.6 : Kayan pencere fenomeni.

$x(t)$, t üzerinde tanımlı bir fonksiyon, τ , t üzerinde öteleme miktarı ve ω , pencere fonksiyonu olmak üzere sürekli KSFD'nin matematiksel ifadesi, (2.50) denklemi ile tanımlanır:

$$KSFD\{x(t)\}(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \omega(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \quad (2.50)$$

Burada söz konusu pencere fonksiyonunu τ aralıklı t üzerinde kaydırılarak her seferinde pencere içerisinde kalan kısma Fourier dönüşümü uygulandığı açıkça görülebilmektedir. Bu pencereler bandpass- den pratikte en çok kullanılanları Hamming, Hanning, Bessel, Butterworth ve Chebyshev sayılabilir. KSFD'nin pratikte kullanıldığı ayrık formu, n ayrık sinyaldeki değerlerin sayacı olmak üzere, (2.51) denklemindeki şekliyle ifade edilir.

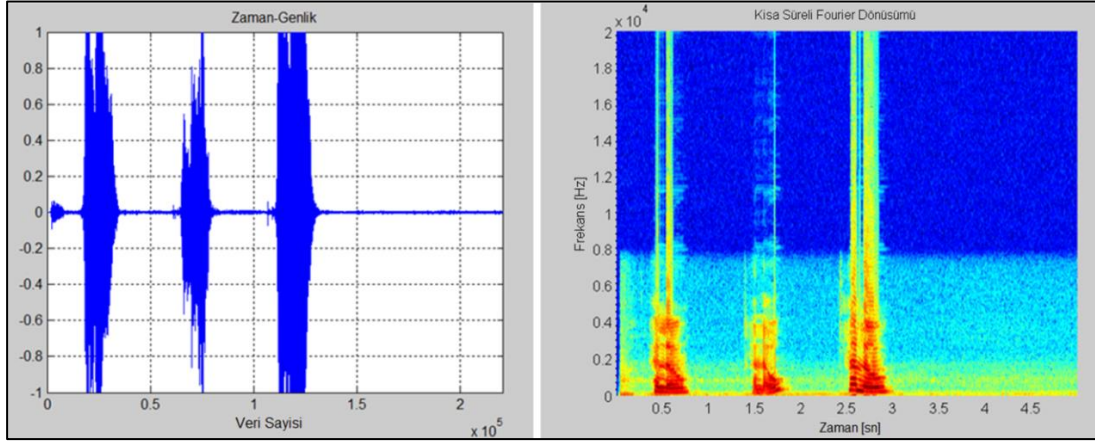
$$KSFD\{x[n]\}(m, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \omega[n - m] e^{-j\omega n} \quad (2.51)$$

KSFD, görüldüğü üzere sinyallerin zaman-frekans içeriğini ortaya koyar. Bunu görselleştirmek üzere “Spektrogram”lar kullanılır. Spektrogramlar, KSFD'nin tanımına uygun şekilde, zaman ekseninde alınıp Fourier dönüşümüne uğratılmış sinyal kesitlerinin, bir eksen frekans, diğeri zaman olacak şekilde yanyana konulması ile elde edilir. Ancak bu görsel, ancak negatif ve kompleks

bileşenlerinden ayrılarak anlamlı bir şekilde ifade edilebilir. Bunun için spektrogram şu ifade ile tanımlanır:

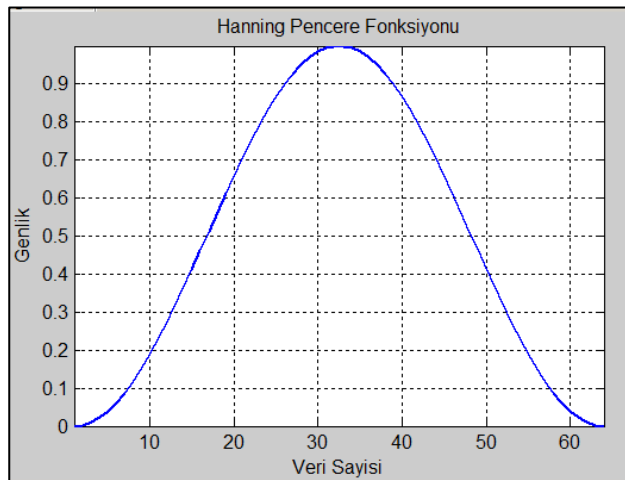
$$\text{spektrogram}\{x(t)\}(\tau, \omega) = |\text{KSFD}\{x[n]\}(m, \omega)|^2 \quad (2.52)$$

Aşağıdaki şekil 2.7’de, bir konuşmanın zaman uzayındaki görünümü ve ona ait spektrogram gösterilmiştir.



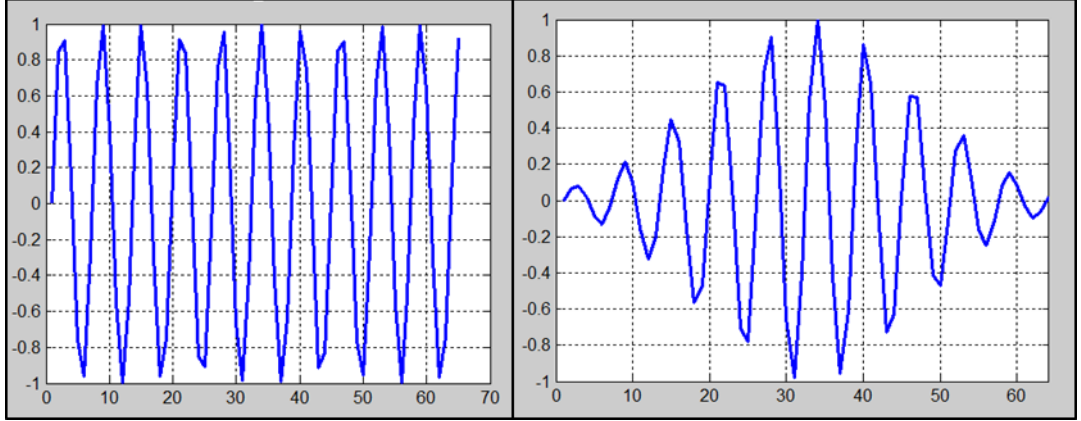
Şekil 2.7 : (a) Bir konuşma sinyali örneği. (b) KSFD görünümü.

KSFD her ne kadar zamana bağlı değişimleri tespit etmede etkili bir araç olsa da, matematiksel ifadesinden de görülebileceği üzere, zamanı böldüğü aralıklar, kullanılan pencerenin zaman eksenindeki genişliğine ve sinyaldeki veri sayısına bağlıdır. Bu, şu anlama gelmektedir, sinyal içerisinde var olabilecek ani bir değişim, ancak pencerenin izin verdiği zaman dilimlerinde ayırt edilebilir. Aşağıdaki şekil 2.8, bir pencere fonksiyonunun (Hanning) zaman uzayındaki görünümünü vermektedir.



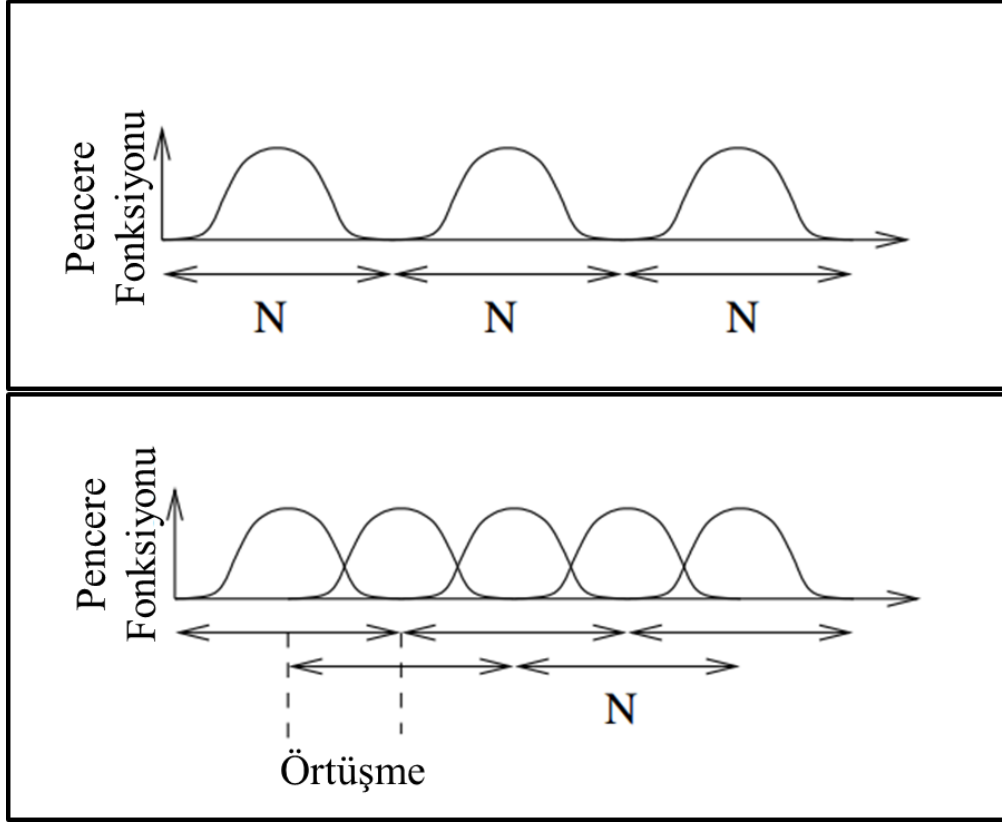
Şekil 2.8 : Hanning pencere fonksiyonu.

Bu şekildeki yatay eksen, pencerenin destek (support) genişliğidir ve 64 veri noktasını kapsayacak uzunlukta, örnekleme aralığının 64 katı genişliğindedir. Bu pencere, aşağıdaki şekil 2.9 (a)'daki gibi durağan bir sinüs sinyaline uygulandığında, pencere dışında kalan yerler sıfır olur (şekil 2.9 (b)). Böylece, artık sinyal işlendiğinde, elde edilen bulguların sadece o pencerenin izin verdiği zaman diliminde gerçekleştiği bilinebilir.



Şekil 2.9 : (a)Durağan bir sinüs sinyali. (b)Hanning pencere fonksiyonu uygulandıktan sonraki görünümü.

KSFD uygulamalarında kullanılan diğer bir özellik, örtüşmedir. Pencere, tüm pencere desteği uzunluğu kadar değil, bu desteğin uzunluğu içinde kalan verilerin belli bir kısmı, bir sonraki pencerenin içinde de kalabilecek şekilde ötelenir. Bu işlemin amacı, pencere fonksiyonunun sıfıra yaklaştığı yerlerdeki şekil değişiminden dolayı, pencere fonksiyonunun uç kısımlarına denk gelen veri noktalarının hesabın dışında kalması önlemektir. Örtüşme, şekil 2.10'da görselleştirilmiştir.



Şekil 2.10 : KSFD’de örtüşme.

Şekil 2.10’den görülebileceği gibi, N genişliğinde desteğe sahip pencere fonksiyonları, pencerelerin başlarında ve sonlarında sinyalden veri kaybına sebep olabilecek şekilde azalmaktadır. Örtüşme yapılarak, pencere baş ve sonlarına denk gelen veri noktalarının, pencere fonksiyonunun maksimum değerler aldığı bölgelere denk getirilmeleri suretiyle hesaba katılmaları sağlanır.

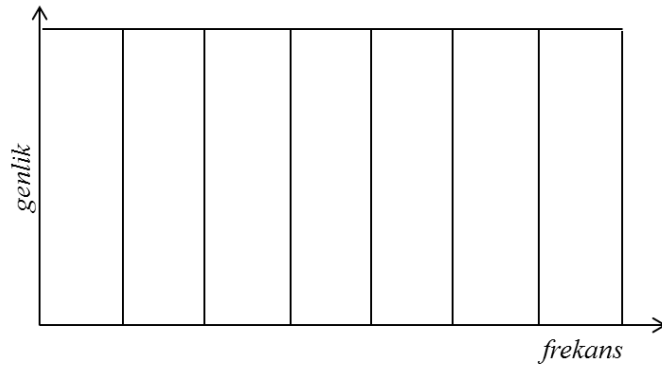
Yukarıda bahsedildiği üzere, sinyalde ani bir değişim olması durumunda, KSFD bu değişimi pencere içinde kalan zaman dilimi boyunca olmuş gibi gösterir ve olayın gerçekleştiği esas zaman dilimi hakkında kesin bir bilgi veremez. Sadece, ilgili zaman dilimi içerisinde hangi frekansların olduğuna dair bilgi verir. Pencere boyutları ise ne kadar küçük tutulursa tutulsun, Heisenberg belirsizlik ilkesini gereği, belli bir değerin altına düşemez.

Heisenberg belirsizlik ilkesi, Alman fizikçi Werner Heisenberg tarafından 1927’de ortaya atılmış, esas olarak kuantum mekaniğinde önemli bir yeri olan, hareket halindeki parçacıkların momentum ve uzaydaki yerleri hakkındaki belirsizliği ortaya koyan bir ilkedir. Bu ilke, kısaca şunu ifade eder;

Tek boyutlu hareket eden bir parçacığın uzaydaki hareketi bir dalga denklemi ile ifade edilirse, bu hareketi yaparken hangi *anda* hangi frekansta hareket ettiği kesin olarak bilinemez, sadece bir *zaman dilimi* içerisinde, hangi frekanslara sahip olduğu bilinebilir. “Heisenberg Belirsizlik İlkesi” ile ilgili daha ayrıntılı bilgi Ek-1’de verilmiştir.

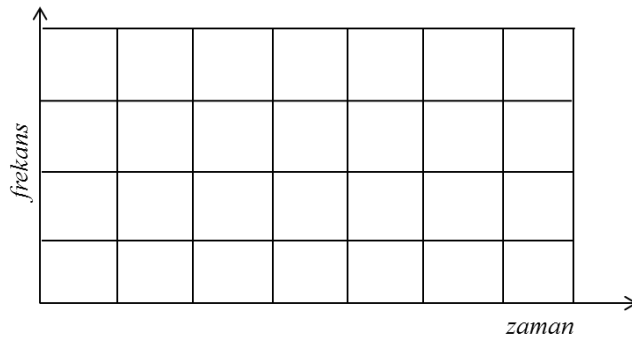
KSFD’de pencere genişliği tüm analiz boyunca sabit olduğu için, belirsizlik ilkesi ile verilen belirsizlik kutucukları da zaman-frekans düzleminde ötelenen eş boyutlu belirsizlik kutucukları olarak ifade edilebilir. Bu kutucuklar, fonksiyonun söz konusu pencere ile ne kadar iyi ifade edilebildiğini, yani çözünürlüğü belirler.

Aşağıdaki şekil 2.11’den görüleceği üzere, Fourier dönüşümünde zaman çözünürlüğü sıfırdır. Yani, dönüşüm sonunda bulunan frekansların, sinyalin her anında var olduğu kabul edilir.



Şekil 2.11 : Fourier dönüşümünün çözünürlüğünün temsili.

KSFD’de ise zamana bağlı çözünürlük mevcuttur ancak frekans çözünürlüğü gibi, o da sabittir. Bu durum da şekil 2.12’deki gibi sabit çözünürlük kutucukları ile görselleştirilmiştir.



Şekil 2.12 : KSFD’nin çözünürlüğünün temsili.

Sinyaldeki ani değişimleri yakalamak için Heisenberg belirsizlik ilkesi elverdiğince küçük pencereler ile çalışılması, sabit çözünürlük sorununa bir çözüm olarak görülebilir. Bunun için pencere fonksiyonunun destek genişliğini küçültmek yeterli olacaktır. Ancak, bu durumda sinyal içerisindeki düşük frekanslı sinyallerin yok olması söz konusudur. Yani, pencere desteği daraldıkça zaman çözünürlüğü artarken, frekans çözünürlüğü azalır, pencere desteği genişledikçe frekans çözünürlüğü artar ancak zaman çözünürlüğü azalır. Oysa durağan olmayan sinyaller için gerekli olan, sinyalin gerekli yerlerinde yüksek, gerekli yerlerinde düşük frekanslara adapte olabilen bir fonksiyondur. Dalgacık fonksiyonları da tam olarak bunu sağlamaktadır; çoklu çözünürlük.

2.3 Çoklu Çözünürlük ve Dalgacık Analizi

2.3.1 Çoklu çözünürlük

R^2 'de tanımlı f gibi bir fonksiyonun, ayrık veri noktaları aracılığıyla tekrardan temsil edilebildiği örnekleme teoremi aracılığıyla verilmiştir. Örnekleme frekansı büyüdükçe çözünürlük artmakta, sinyalin daha iyi temsil edilmesi sağlanabilmektedir. Önceki bölümde değinildiği üzere, Fourier dönüşümü tek bir çözünürlükte çalışmaktadır. Yani, iki veri noktasının toplanması arasındaki süre Δt , örnekleme frekansı $f_s=1/\Delta t$, N toplam veri noktası sayısı ve T ölçüm periyodu olan bir sinyalde frekans çözünürlüğü (2.53) ile ifade edilir.

$$\Delta\omega = \frac{1}{T} = \frac{f_s}{N} \quad (2.53)$$

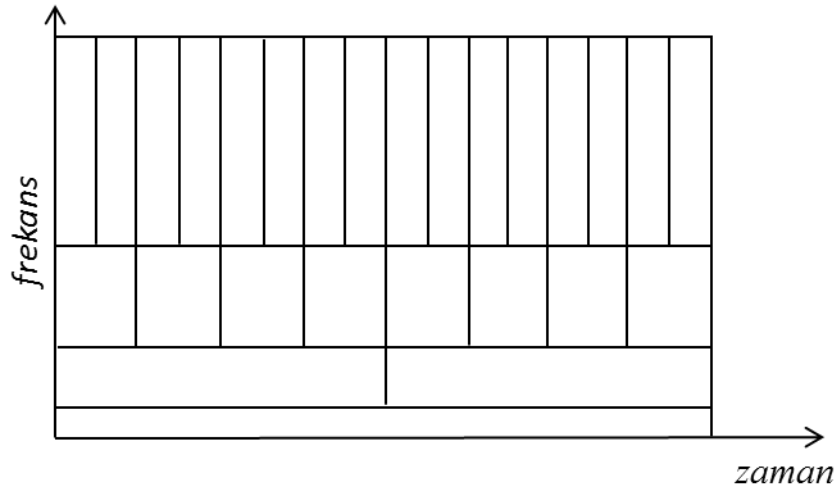
KSFD de benzer şekilde, sadece pencereler aracılığıyla sinyali daha küçük parçalara bölmesi dışında Fourier dönüşümü ile aynı işi yapar ve yine tek bir çözünürlükte çalışır. Ancak KSFD'nin çözünürlüğünü pencere genişliği belirler. Geniş destekli pencereler iyi frekans çözünürlüğü fakat düşük zaman çözünürlüğü sağlarken, dar destekli pencereler iyi zaman çözünürlüğü fakat düşük frekans çözünürlüğü sağlar.

Otomotiv sektörü dahil pratikte karşılaşılan çoğu karmaşık sinyal ise, yüksek frekanslarda ani değişimler içeren -örneğin, otomotiv sektöründe karşılaşılan ticking/tıkırtı, knock/vuruntu gibi motor kaynaklı gürültü fenomenleri- ve düşük frekanslarda sürekliliği olan -örneğin moan/uğultu, boom/gürleme gibi motor ve güç aktarma organları kaynaklı gürültü fenomenleri- tiptedir. Bu sebeple, sinyalin

durağan bölgelerinde farklı, ani değişimlerin olduğu bölgelerinde farklı çözünürlükte çalışan bir analiz yöntemine ihtiyaç duyulmuştur. Mallat'ın bu konudaki görüşü şöyledir:

Önce, örnekleme teoremi aracılığıyla bir sinyal bant sınırlı filtre görevi gören uygun fonksiyonlar ile temsil edilir, sonra bu fonksiyonlar, çözünürlüğü ve ölçeklendirmesi uygun şekilde ayarlanmış aynı uzayın alt fonksiyonları ile analiz edilir. Yani f gibi bir fonksiyonun 2^j çözünürlüğündeki yaklaşık temsili, f 'in lokal ortalamalarından oluşan 2^j boyutuna yakın kümecikler veya kutucuklar aracılığıyla sağlanır. Bu süreç çoklu çözünürlüğü tarif eder [8].

Çözünürlük kutucukları gösterimi ile bu, aşağıdaki şekil 2.13 ile verilebilir.



Şekil 2.13 : Çoklu çözünürlük gösterimi.

Bu ifadenin matematiksel olarak daha net bir tarifi ise şöyle verilebilir;

f 'in 2^j çözünürlüğündeki yaklaşık temsili $V_j \subset L^2(R)$ uzayı üzerine yapılan bir ortogonal izdüşüm ile sağlanır. V_j uzayı 2^j çözünürlüğünde mümkün olan tüm yaklaşık temsilleri kapsar. f 'in ortogonal izdüşümü $f_j \in V_j$, $\|f - f_j\|$ minimum olacak şekilde seçilir. $V_j, j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ $L^2(R)$ uzayının bir altkümesi olmak üzere, aşağıdaki koşullar sağlandığı takdirde bir çoklu çözünürlük yaklaşımı olarak değerlendirilir:

$$\bullet \quad \forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2 \text{ iken } f(t) \in V_j \leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j \quad (2.54)$$

Bu ifade, V_j 'nin, 2^j 'nin katı olan tüm öteleme hareketlerinden bağımsız olduğunu belirtir.

$$\bullet \quad \forall j \in \mathbb{Z} \text{ iken } V_{j+1} \subset V_j \quad (2.55)$$

Bu ifade 2^j çözünürlüğündeki bir yaklaşık temsili, bir alt seviyede daha kaba bir çözünürlükteki tüm bilgileri içerdiğini belirtir.

$$\bullet \quad \forall j \in \mathbb{Z} \text{ iken } f(t) \in V_j \leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1} \quad (2.56)$$

Bu ifade, fonksiyonun 2 ile genişletilmesinin detayları 2 katına çıkardığını ve daha kaba bir çözünürlükte (yani 2^j yerine 2^{j-1} çözünürlükte) bir yaklaşık temsili belirtir.

$$\bullet \quad \lim_{j \rightarrow \infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\} \quad (2.57)$$

Bu ifade, çözünürlüğün sıfıra yaklaştıkça tüm detayların yok olduğunu belirtir.

$$\bullet \quad \lim_{j \rightarrow \infty} V_j = \overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L^2(R) \quad (2.58)$$

Bu ifade, çözünürlüğün sonsuza gittikçe yaklaşık temsili fonksiyonun orjinal fonksiyona yakınsayacağını belirtir.

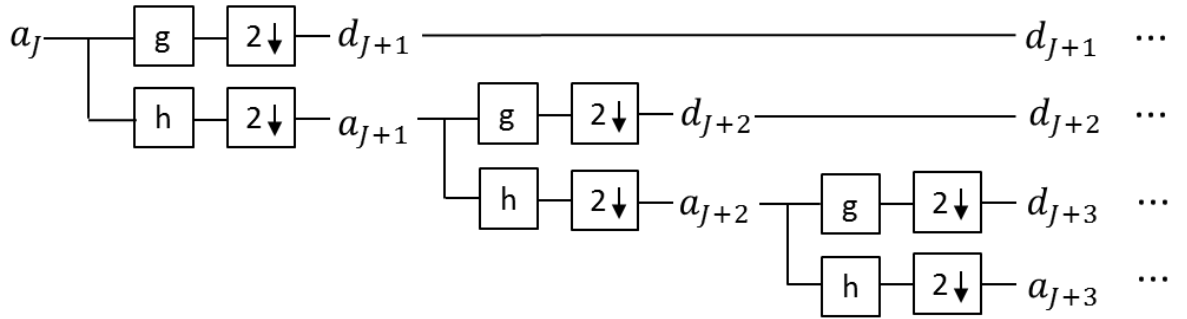
Dalgacık dönüşümleri çoklu çözünürlük sağlar. Yani yukarıda verildiği gibi, her farklı V_j katmanında çözünürlüğü değiştirerek fonksiyonu istenildiği kadar detayla ifade edebilirler. Dalgacık fonksiyonlarının bu özelliği sağlamak için nasıl bir algoritma kullandığı bir sonraki bölümde anlatılmıştır.

2.3.2 Dalgacık dönüşümü

Dalgacık dönüşümü, zaman içerisinde değişen sinyalleri doğru şekilde temsil edebildiği için, mühendislik dallarının yanı sıra, bu tip sinyallerin olduğu bir çok farklı disiplinde kullanılmaktadır. Bunun başlıca sebepleri arasında önceki bölümlerde bahsedildiği gibi çoklu çözünürlük özelliği sayesinde sinyalleri daha kesin inceleyebilmek, sinyali bozan gürültüyü elimine edebilmek ve veriyi oldukça küçük boyutlarda saklayabilmek gibi özellikleri vardır.

Dalgacık dönüşümü, sinyaller ve dijital sistemler söz konusu olduğunda, bir filtre bankası gibi düşünülebilir. Dönüşüm, ana sinyali bir çok yüksek geçişli (high-pass) ve alçak geçişli (low-pass) filtreden geçirerek, her bir filtreye ait katsayılar ile temsil eder. Bu filtre bankası yüksek geçişli filtrelerin sayısına (çözünürlüğe) bağlı olarak, sinyali her kademede o kademenin boyutlarında detaylarına ayırır. Dalgacık dönüşümünün temel yapıtaşları işte bu filtrelerdir. Alçak geçişli filtreye ölçeklendirme fonksiyonu (scaling function, ϕ), yüksek geçişli filtrelere ise dalgacık fonksiyonları (wavelet function, ψ) denir.

Bu fonksiyonlar, aşağıdaki görselden de takip edilebileceği üzere, örnekleme frekansı 2^j olan $f_j(x)$ gibi bir sinyali en yüksek çözünürlük basamağından başlayıp alt ve üst bileşenlerine ayırır. Her kademede alçak geçişli filtre ile elde edilen kısım, sinyalin o kademeye ait ana hattını verirken, yine her kademede o kademeye ait yüksek geçişli filtre ile elde edilen kısımlar sinyalin o çözünürlükteki detaylarını verirler. Bu sebeple, bu alçak ve yüksek geçişli filtrelerden elde edilen katsayı dizilerine sırasıyla, yaklaşıklık ve detay katsayıları (veya fonksiyonları) da denilmektedir. Bu ifade şekil 2.14 ile görselleştirilmiştir.



Şekil 2.14 : $f_j(x)$ sinyalinin yüksek ve alçak geçişli filtrelerden geçip her bir çözünürlük kademesi için bir katsayı vermesi.

Şekil 2.14'te dijital hali $f_j(x)$ ile verilmiş bir sinyalin yüksek ve alçak geçişli filtrelerden geçip her çözünürlük kademesi için bir katsayı verdiği gösterilmiştir. g ile gösterilen kutucuklar yüksek geçişli filtreleri, h içeren kutucuklar alçak geçişli filtreleri temsil etmektedir. Ok içeren kutucuklar, örnek veri noktalarının sayısının azaltıldığını (downsampling) temsil etmektedir. Bu gösterimde, a_j katsayıları kümesi yaklaşıklık fonksiyonunu, d_j katsayıları dizisi de dalgacık fonksiyonlarını tanımlayan dizilerdir. Bu diziler, $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ve $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, V_j ve W_j uzaylarının

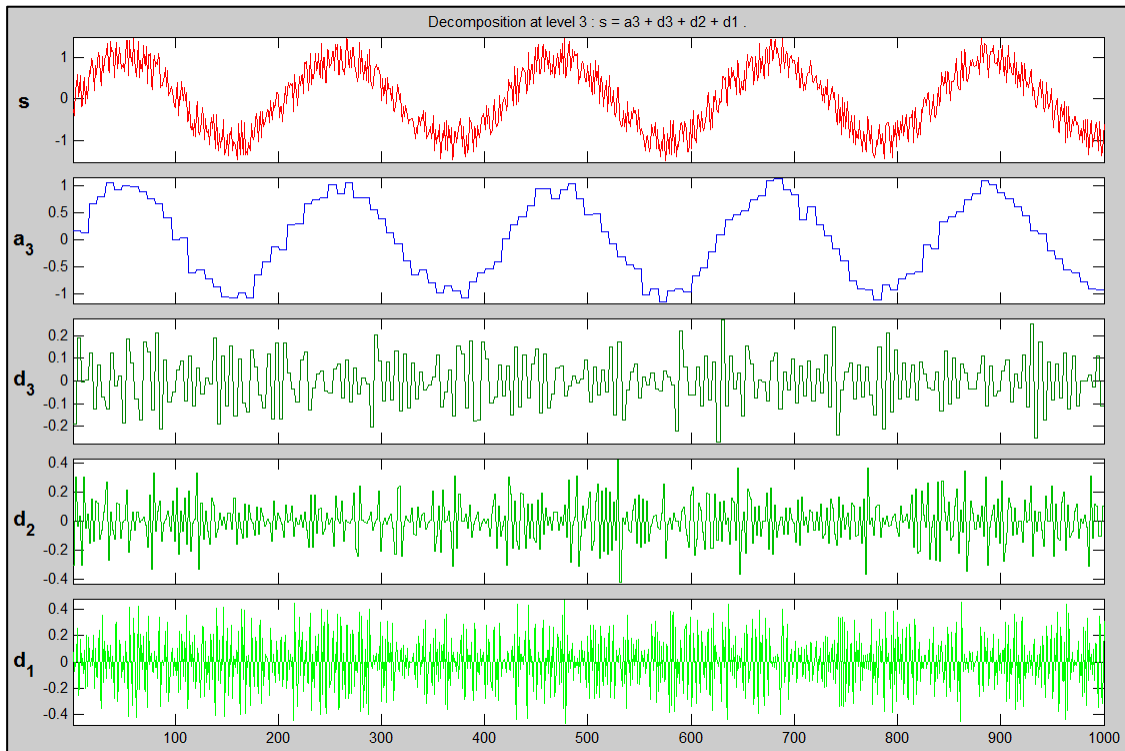
ortonormal tabanları olmak üzere, f gibi bir fonksiyonun bu uzaylara izdüşümünden elde edilir. Bu (2.59) denklemleri ile ifade edilmektedir.

$$a_j[n] = \langle f, \phi_{j,n} \rangle \quad (2.59a)$$

$$d_j[n] = \langle f, \psi_{j,n} \rangle \quad (2.59b)$$

$$d_j[n] = \langle f, \psi_{j,n} \rangle \quad (2.59c)$$

Şekil 2.14 ile verilen temsilin ne anlama geldiği, aşağıdaki görselle daha iyi anlaşılmaktadır. Şekil 2.15'te genliği 1 olan rastgele gürültülü bir sinüs sinyalinin kendisi s , ve kademe kademe ayrıntılarına ayrıştırılmış hali gösterilmiştir. Buradaki detay fonksiyonları d_i ile ve yaklaşıklık fonksiyonu a_i ile gösterilmiştir. Artan çözünürlük basamakları ile tespit edilebilen ayrıntıların kaba bir hal aldığı açıkça görülmektedir. Bu dönüşüm, ilerleyen bölümlerde anlatılacak olan Haar dalgacığı ile yapılmıştır. Yapılan dönüşümün yaklaşıklık fonksiyonu ve tüm 3 kademe ayrıntıları toplandığında tekrar ana sinyali verdiği vurgulanmalıdır.



Şekil 2.15 : Bir sinyalin Haar dalgacığı ile 3 kademe ayrıştırılması.

Açıklandığı üzere, dalgacık dönüşümü filtre bankası özelliği ile bir çoklu çözünürlük dönüşümüdür. Bu özelliği sağlayabilen ölçeklendirme ve dalgacık fonksiyonlarının matematiksel tanımları ve sağlamaları gereken koşullar incelenmiştir.

Ölçeklendirme fonksiyonu - ϕ

f in 2^j çözünürlüğündeki yaklaşık temsilinin $V_j \subset L^2(R)$ üzerine yapılan bir ortogonal izdüşüm ile sağlandığı belirtilmişti. Bu izdüşümün hesaplanması için V_j üzerinde bir ortonormal taban bulmak gerekmektedir. (2.54) ifadesi bu ortogonalizasyonun, ϕ gibi bir ölçeklendirme fonksiyonunun V_j üzerinde ötelenerek ve ölçeklendirerek yapıldığını belirtir. Tanım olarak ölçeklendirme fonksiyonu şöyle verilmiştir:

$\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ şeklinde bir çoklu çözünürlük analizi ve ϕ bir ölçeklendirme fonksiyonu olmak üzere;

$$\phi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-n}{2^j}\right) \quad (2.60)$$

$\{\theta(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ bir Riesz tabanı ve ϕ 'nin Fourier dönüşümü

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\hat{\theta}(\omega)}{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\hat{\theta}(\omega) + 2k\pi\|^2\right)^{1/2}} \quad (2.61)$$

şeklindedir.

Bu koşullarda $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ölçeklendirme fonksiyonları ailesi V_j için bir ortonormal taban oluşturur. Riesz tabanı hakkında daha ayrıntılı bilgi eklerde verilmiştir. Bu tanım detaylı incelenerek ortonormal bir taban oluşturması için V_0 uzayında bir Riesz tabanından oluşturulabilen bir ϕ fonksiyonu aranmıştır.

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n]\theta(t-n) \quad (2.62)$$

Bu ifadenin Fourier dönüşümü;

$$\hat{\phi}(\omega) = \hat{a}(\omega)\hat{\theta}(\omega) \quad (2.63)$$

şeklindedir. $\hat{a}$, burada periyodu 2π olan sonlu bir seridir. $\hat{a}$ 'yı hesaplayabilmek için $\phi(t-n)$ 'nin Fourier domeninde de ortogonal olduğunu göstermek gerekir:

$$\langle \phi(t-n), \phi(t-n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-n) \overline{\phi(t-n)} dt = \phi * \overline{\phi(p-n)} \quad (2.64)$$

Ortonormallik şartı (2.64) çarpımının sonucunun ancak ve ancak δ olması durumunda iki fonksiyonun ortonormal olduğunu belirtir. Buradan Plancherel teoreminden de yararlanarak (2.65) ifadesi yazılabilir.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)\|^2 = 1 \quad (2.65)$$

$\hat{a}(\omega) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)\|^2 \right)^{-1/2}$ formunda olması durumunda yukarıdaki ifade gerçekleşir.

Bir fonksiyonun 2^j ölçeğindeki yaklaşık temsili ise, ölçeklendirme fonksiyonun aracılığıyla o fonksiyonun V_j uzayına izdüşürülmesiyle bulunur.

$$proj_{V_j} f = \langle f, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j,n} \quad (2.66)$$

Bu iç çarpım $a_j[n] = \langle f, \phi_{j,n} \rangle$ için, f 'in 2^j çözünürlüğündeki yaklaşık temsilini verir. Daha açık bir ifadeyle, yaklaşık temsiliin katsayılar kümesinin ifadesi şöyledir;

$$a_j[n] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) dt \quad (2.67)$$

Ölçeklendirme ve dalgacık fonksiyonlarının birer filtre bankası gibi düşünülebileceği belirtilmişti. (2.55) ifadesinden $\frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right) \in V_1 \subset V_0$ ve $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ V_0 'da bir ortonormal taban olmak üzere, $h[n] = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \rangle$ şeklinde bir filtre için (2.68) yazılabilir.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \phi(t-n) \quad (2.68)$$

$h[n]$, aşağıdaki şartları sağlıyorsa eşlenik ayna filtreler olarak adlandırılır.

- $\forall \omega \in R$ için $\|h(\omega)\|^2 + \|h(\omega + \pi)\|^2 = 2$ (2.69)

(2.69) şartı, fonksiyonun ayrıştırıldıktan sonra mükemmel bir şekilde geri oluşturulabilmesini sağlayan bir filtre oluşturmak için gereklidir.

- $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$ (2.70)

Bu ifadelerin kanıtları için (2.62) ve $h[n]$ 'nin Fourier dönüşümünden yararlanılabilir.

Dalgacık fonksiyonu - ψ

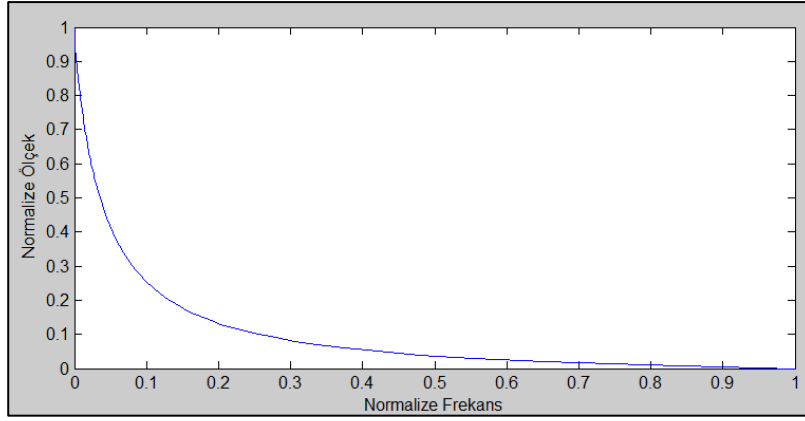
V_j, V_{j-1} 'in bir alt kümesi olduğu belirtilmişti. Fonksiyonların V_{j-1} 'e izdüşümlerinin V_j 'in ortogonal toplamları şeklinde yazılabildiği (2.55) ve (2.66) ile gösterilmiştir. Bu ayrıştırmanın yapılabilmesi V_j seti ve onun ortogonal bileşeni W_j seti aracılığıyla yapılır. İki fonksiyonun ortogonal çarpımı şeklinde bu ifade yazılabilir.

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad (2.71a)$$

$$proj_{V_{j-1}} f = proj_{V_j} f + proj_{W_j} f \quad (2.71b)$$

V_j seti, f fonksiyonunun 2^j çözünürlüğündeki yaklaşık temsilini veren ifadeyi içerirken, W_j seti, fonksiyonun bu çözünürlükteki detaylarını içerir. Fonksiyonun W_j üzerine izdüşürülen kısmı, 2^{j-1} ölçeğinde görülebilen ancak 2^j ölçeğinde kaybolan ayrıntıları verir. Filtre bankası analogisindeki yüksek geçişli filtreyi oluşturan kısım, dalgacık fonksiyonları cinsinden ifade edilen kısımdır.

Hem ölçeklendirme fonksiyonlarının hem de dalgacık fonksiyonlarının, ölçek arttıkça destekleri genişlemektedir. Desteği genişleyen dalgacık fonksiyonu, daha düşük frekanslı sinyalleri yakalayabilir. Yani, ölçek ile frekans ters orantılıdır. Bu ifade şekil 2.16'da verilmiştir.



Şekil 2.16 : Frekans ve ölçek ilişkisi.

Aynı ölçeklendirme fonksiyonunda olduğu gibi, her çözünürlük değeri için dalgacık fonksiyonları da ölçeklendirilip, ötelenerek uygun ortonormal tabanı oluşturmak üzere ayarlanabilir. Dalgacık fonksiyonları matematiksel olarak şöyle tanımlanır;

Fourier dönüşümü

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{2} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.72)$$

olarak tanımlı bir dalgacık fonksiyonu,

$h[n] = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t - n) \rangle$ ve $\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \overline{\hat{h}(\omega + \pi)}$ olmak üzere (2.73) genel formundadır:

$$\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \quad (2.73)$$

(2.73) ifadesi incelenerek bazı çıkarımlar yapılabilir. $\psi\left(\frac{t}{2}\right) \in W_{j+1} \subset V_j$ olduğu için, V_j 'de ortogonal bir taban teşkil eden $\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ cinsinden ayrıştırılıp yazılabilir:

$$g[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t - n) \rangle \quad (2.74)$$

olmak üzere, dalgacık fonksiyonları (2.75) denklemindeki gibi yazılabilir.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] \phi(t - n) \quad (2.75)$$

(2.75) ifadesinin iki tarafının da Fourier dönüşümü alınırsa,

$$\hat{\psi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega) \hat{\phi}(\omega) \quad (2.76)$$

elde edilir. Bu, (2.72) ifadesi ile aynıdır.

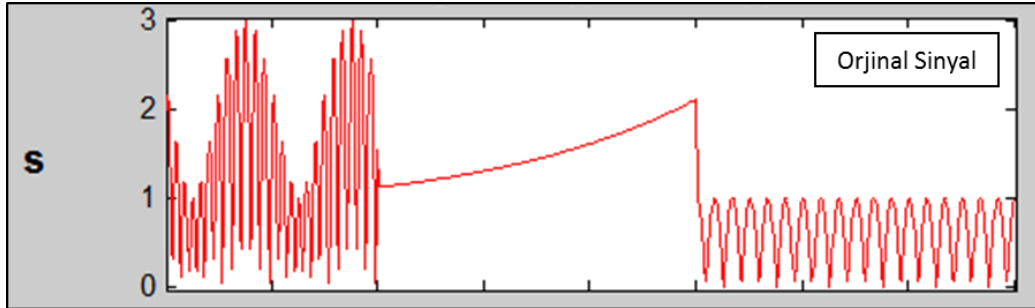
$g[n]$ fonksiyonunun da $h[n]$ gibi, eşlenik ayna filtre özelliğinde ve ortogonal olması için aşağıdaki ifadeleri sağlaması gerekmektedir:

$$\bullet \quad \|\hat{g}(\omega)\|^2 + \|\hat{g}(\omega + \pi)\|^2 = 2 \quad (2.77)$$

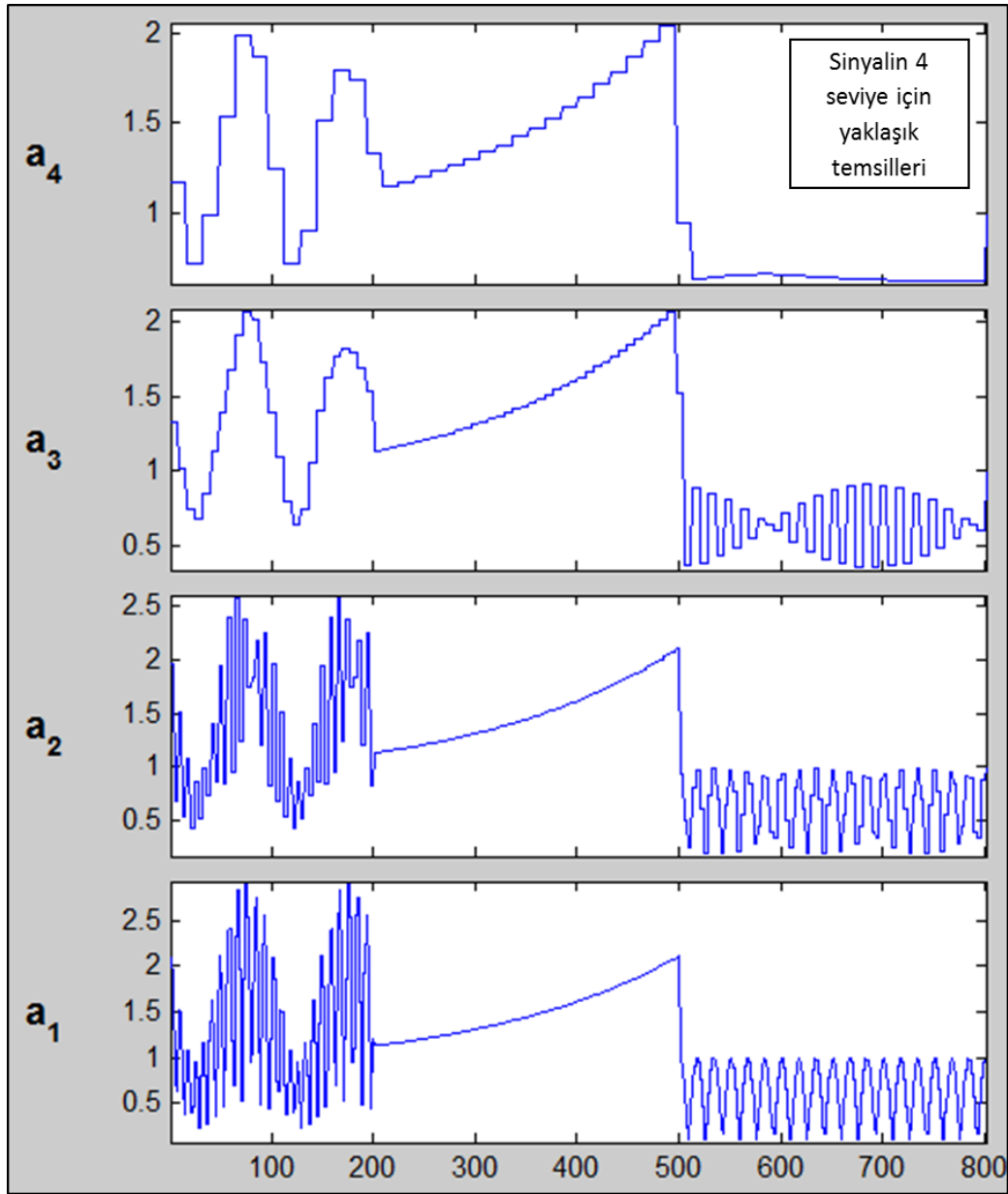
$$\bullet \quad \hat{g}(\omega) \overline{\hat{h}(\omega)} + \hat{g}(\omega + \pi) \overline{\hat{h}(\omega + \pi)} = 0 \quad (2.78)$$

Bu ifadelerin kanıtı için ise, Plancherel teoreminden yararlanılarak (2.65) gibi bir formun varlığı $\hat{\psi}$ için de yazılarak bulunabilir.

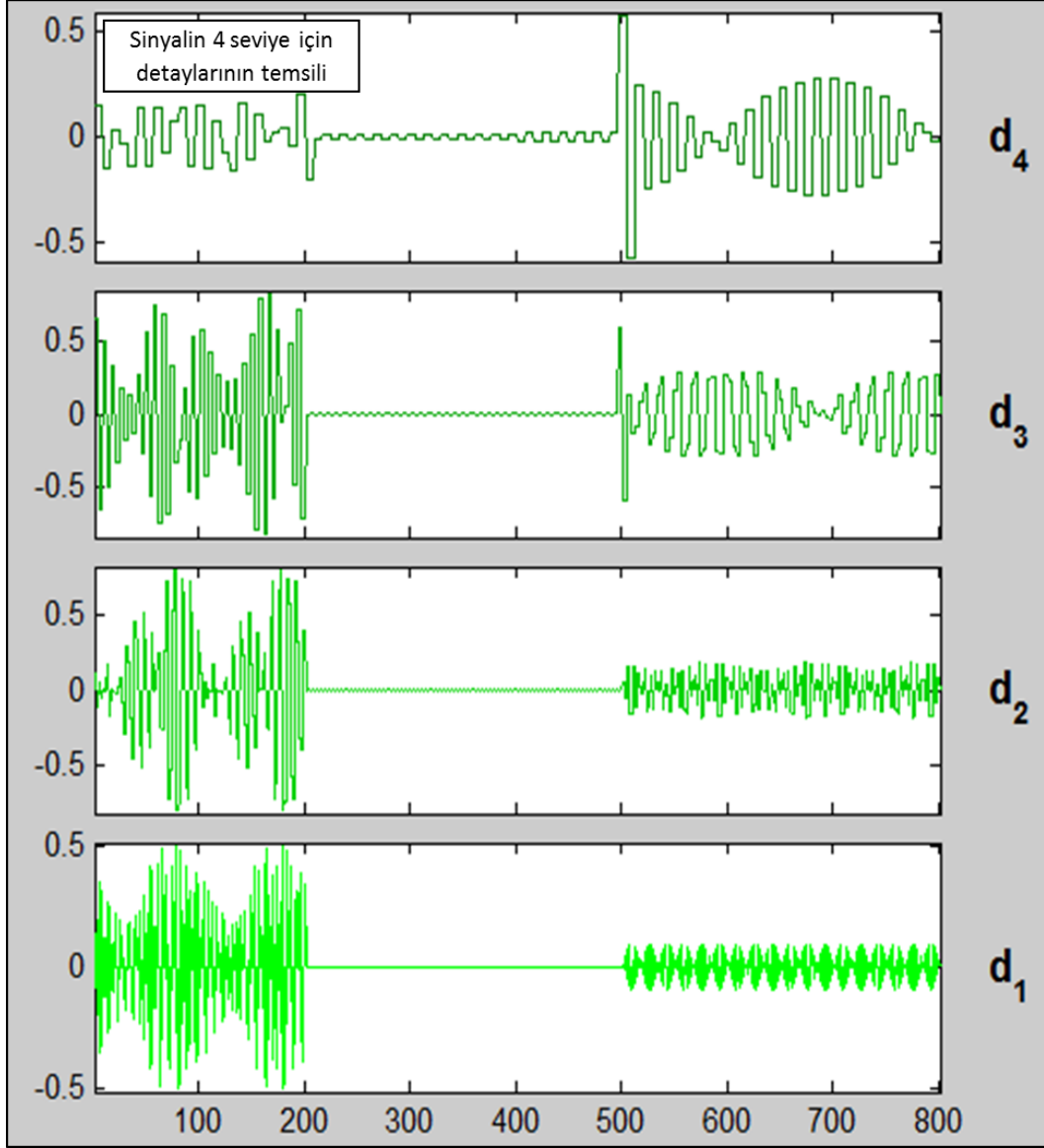
Aşağıdaki şekiller 2.17, 2.18 ve 2.19’da, örnek bir s sinyal fonksiyonunun, farklı ölçeklerde oluşturulan yaklaşıklık ve detay fonksiyonları gösterilmiştir. Görüldüğü üzere, yaklaşıklık fonksiyonları, her yeni seviyede sinyalin bir kaba formunu meydana getirmekte, detay fonksiyonları da her yeni seviyede, o seviyeye ölçeğe ait daha kaba detayları göstermektedir.



Şekil 2.17 : Örnek sinyal.



Şekil 2.18 : Örnek sinyalin 4 seviye ayrıştırılması için yaklaşıklık fonksiyonları.



Şekil 2.19 : Örnek sinyalin 4 seviye ayrıştırılması için detay fonksiyonları.

Dalgacık dönüşümleri bir sinyali ayrıştırıp, gürültüden kurtarma, boyut küçültme vesaire gibi işlemlerden sonra tekrar geri oluşturabilir. Dalgacık dönüşümü, bu ayrıştırma işlemini, anlatıldığı üzere, Fourier dönüşümündeki gibi harmonik bileşenlere ayırmak yerine, belli koşulları sağlayan dalgacık fonksiyonlarına ayırarak yapar. Yani bir dalgacık dönüşümü sonucunda elde edilenler, dalgacık katsayıları ve o katsayılarla karşılık gelen ağırlıklı dalgacık fonksiyonlarıdır.

Dalgacık olarak kabul edilebilmek için, yukarıda bahsedilen dalgacık fonksiyonlarının karşılaması gereken iki önemli parametre bulunmaktadır.

- M ve C gibi iki sabit sayı için, dalgacık fonksiyonu $\psi(t)$ sürekli

ve eksponansiyel inişli olmalı;

$$\psi(t) \leq Me^{-c|t|} \quad (2.79)$$

- Dalgacık fonksiyonu $\psi(t)$ 'nin yatay ekseninin alt ve üstünde kalan kısımlar eşit olmalı yani ortalaması 0 olmalıdır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.80)$$

Dalgacık fonksiyonu normalize olmalı ve $t=0$ civarında tanımlı olmalıdır. Böylece, dalgacık fonksiyonu ötelenip ve ölçeklendirilerek uygun zaman-frekans eksenlerinde tanımlanabilir. Böylece, u kadar ötelenmiş ve s ile ölçeklendirilmiş bir dalgacık fonksiyonu,

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (2.81)$$

olarak ifade edilebilir. Dalgacık fonksiyonlarının ölçeklendirme ve öteleme yapılmamış ilk haline “ana dalgacık” denir. Ötelemeler ve ölçeklendirmeler sonucu oluşan dalgacıklar ana dalgacığın farklı versiyonlarıdır. Farklı ölçekleri ve zaman dilimlerini temsil eden yavru dalgacıklar, (2.81) ifadesi kullanılarak, bu ana dalgacık fonksiyonundan türetilir.

2.3.3 Sürekli dalgacık dönüşümü

Sürekli dalgacık dönüşümü (SDD, continuous wavelet transform-CWT), daha çok matematikçiler ve fizikçiler tarafından kullanılmaktadır. Dönüşüm, $f(t)$ gibi bir fonksiyon için, o fonksiyonun dalgacık fonksiyonu ile iç çarpımı olarak tanımlanır:

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)} dt \quad (2.82)$$

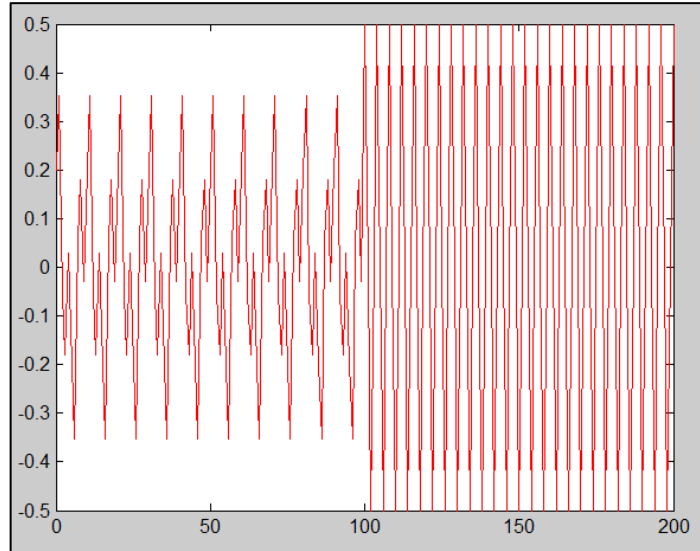
Bu ifade, dalgacık dönüşümü mantığının temelini vermekle birlikte, pratik uygulamalarda hesaplama yükü getirdiği için mühendislikte daha çok ayrık dönüşüm kullanılır. Sürekli dalgacık dönüşümü ise, sinyaldeki süreksizliklerin tespitinde ve bir sinyalden alınan verinin ne kadarının gürültü ne kadarının sinyalin karakteristiği olduğunu tespit etmede kullanılabilir.

Önceki bölümde bahsedildiği üzere, dalgacık dönüşümü ile elde edilen ayrıştırma sonrasında, sinyalin veri kaybı olmadan tekrar oluşturulabilmesi için, dalgacık fonksiyonlarının kabul edilebilme kriterini sağlamaları gerekmektedir. Bunlardan biri dalgacığın sonlu olması gerektiğini ifade eden **(2.83)** eşitsizliğidir:

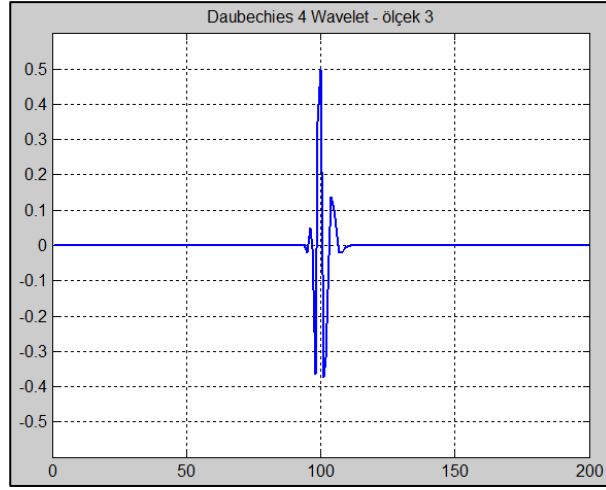
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) \frac{d\omega}{|\omega|} < \infty \quad (2.83)$$

Bir diğer şart da daha önce de verilen ve ana dalgacık fonksiyonunun 0'daki değerinin sıfır olduğunu ifade eden **(2.80)** şartıdır.

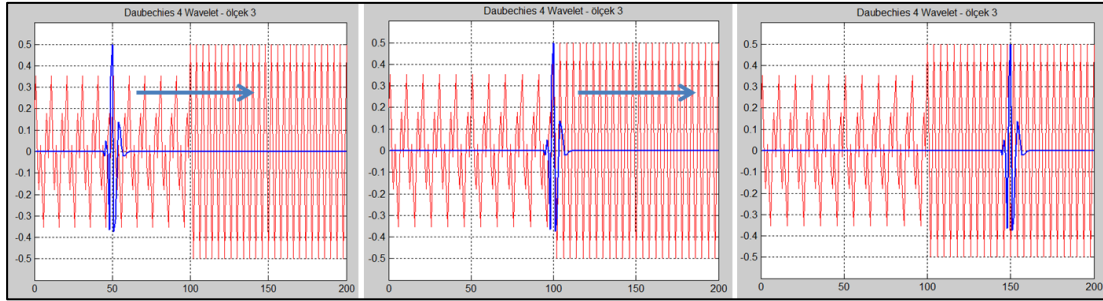
Sürekli dalgacık dönüşümünün mantığı görseller yardımı ile daha net açıklanmaya çalışılmıştır. Şekil 2.20 ile verilen bir sinyal, şekil 2.21'de gösterilen Daubechies 4 dalgacığı ile incelenmiştir. Daubechies 4 dalgacığı en düşük ölçekten (yani en yüksek frekansa denk gelen dalgacıktan) başlayarak tüm sinyali o ölçekteki dalgacığı öteleyerek şekil 2.22'de gösterildiği gibi tarar (şekilde kolay görülebilmesi için 3. ölçekten başlatılmıştır.).



Şekil 2.20 : Örnek sinyal.

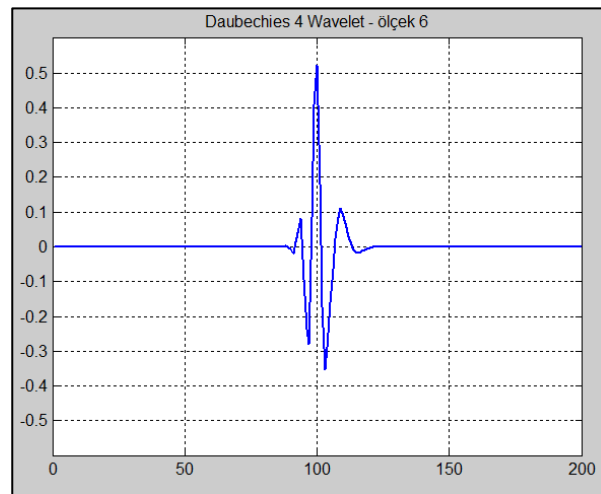


Şekil 2.21 : Daubechies 4 dalgacığının 3. ölçekteki görünümü.

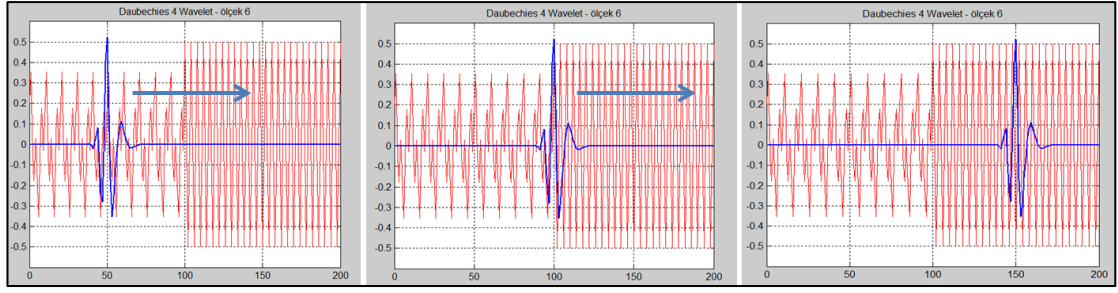


Şekil 2.22 : Daubechies 4 dalgacığının 3. ölçekte örnek sinyal üzerinde ötelenmesi.

Tüm sinyal tarandıktan sonra bir üst seviye ölçeğe geçilir. Bu her büyüyen ölçekle dalgacık fonksiyonu daha geniş bir desteğe sahip formuyla sinyali tarar. Yani daha düşük frekansları ifade eden sinyal parçalarını işleyebilir. Şekil 2.23 ve 2.24'te Daubechies 4 dalgacığının 6. ölçekteki hali ve sinyalde ötelenmesi gösterilmiştir.



Şekil 2.23 : Daubechies 4 dalgacığının 6. ölçekteki görünümü.

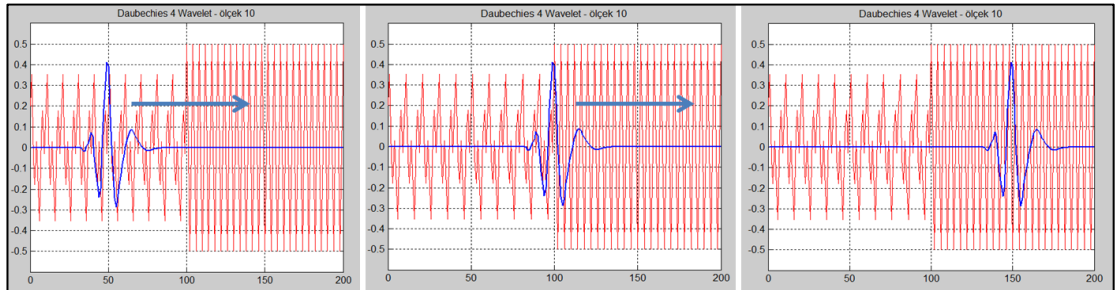


Şekil 2.24 : Daubechies 4 dalgacığının 6. ölçekte örnek sinyal üzerinde ötelenmesi.

10 ölçekle yapılmış bu örnekte, son ölçekteki -10. ölçekteki Daubechies 4 dalgacığının desteğinin ilk ölçeklerdekine göre oldukça genişlemiş olduğu şekil 2.25'ten gözlenebilir. Şekil 2.26'da gösterildiği gibi son aşamada da tüm sinyal tarandıktan sonra, her bir ölçek için, sinyalin o ölçekteki dalgacık formu ile ne kadar yakın olduğunu belirten katsayılar elde edilmiş olur.



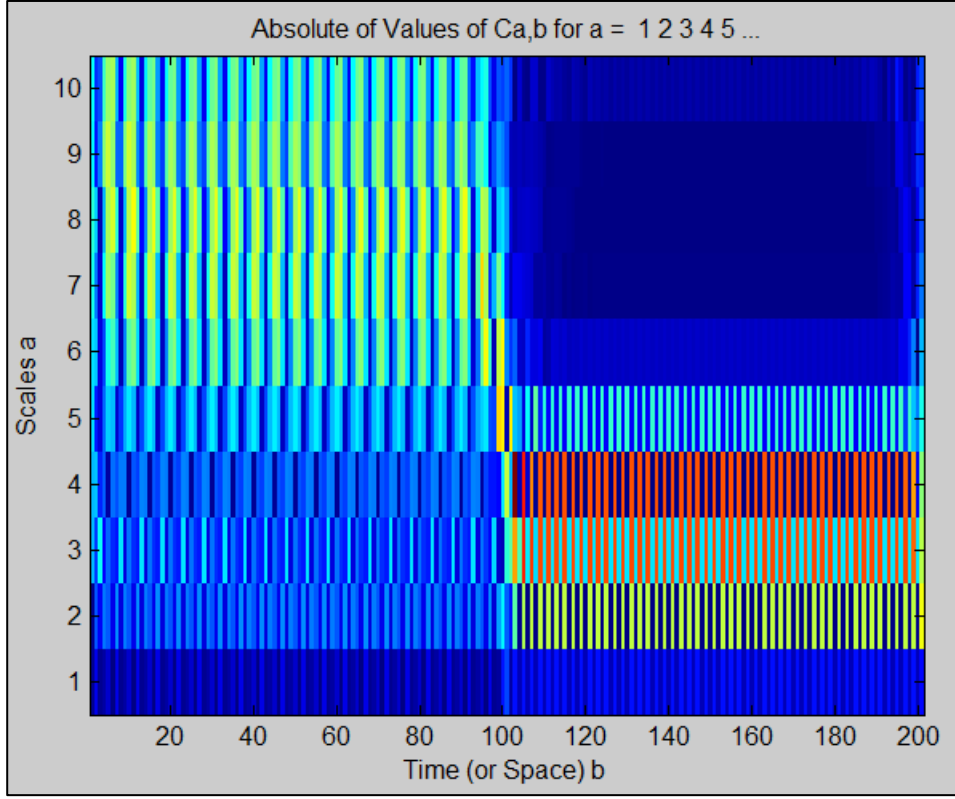
Şekil 2.25 : Daubechies 4 dalgacığının 10. ölçekteki görünümü.



Şekil 2.26 : Daubechies 4 dalgacığının 10. ölçekte örnek sinyal üzerinde ötelenmesi.

Tüm ölçeklerde işlem tamamlandıktan sonra elde edilen katsayılar üç boyutlu bir grafiğe yerleştirilerek o sinyale ait, Daubechies 4 dalgacığı ile toplam 10 ölçekte

yapılan dalgacık dönüşümünün grafiği şekil 2.27'deki gibi elde edilmiş olur. Dikkat edilmesi gereken nokta ise bu grafikte, artan ölçek değerlerinin, sinyaldeki düşük frekanslı bileşenleri, düşük ölçek değerlerinin ise yüksek frekanslı bileşenleri temsil ettiğidir.



Şekil 2.27 : Daubechies 4 dalgacığı ile 10 ölçekte yapılan dönüşümün katsayıları.

Popüler sürekli dalgacıklar arasında Mexican Hat, Morlet, Gaussian, Meyer, Symmlets vb. verilebilir. Bunlardan bazılarının özellikleri bu bölümün son kısmında verilmiştir.

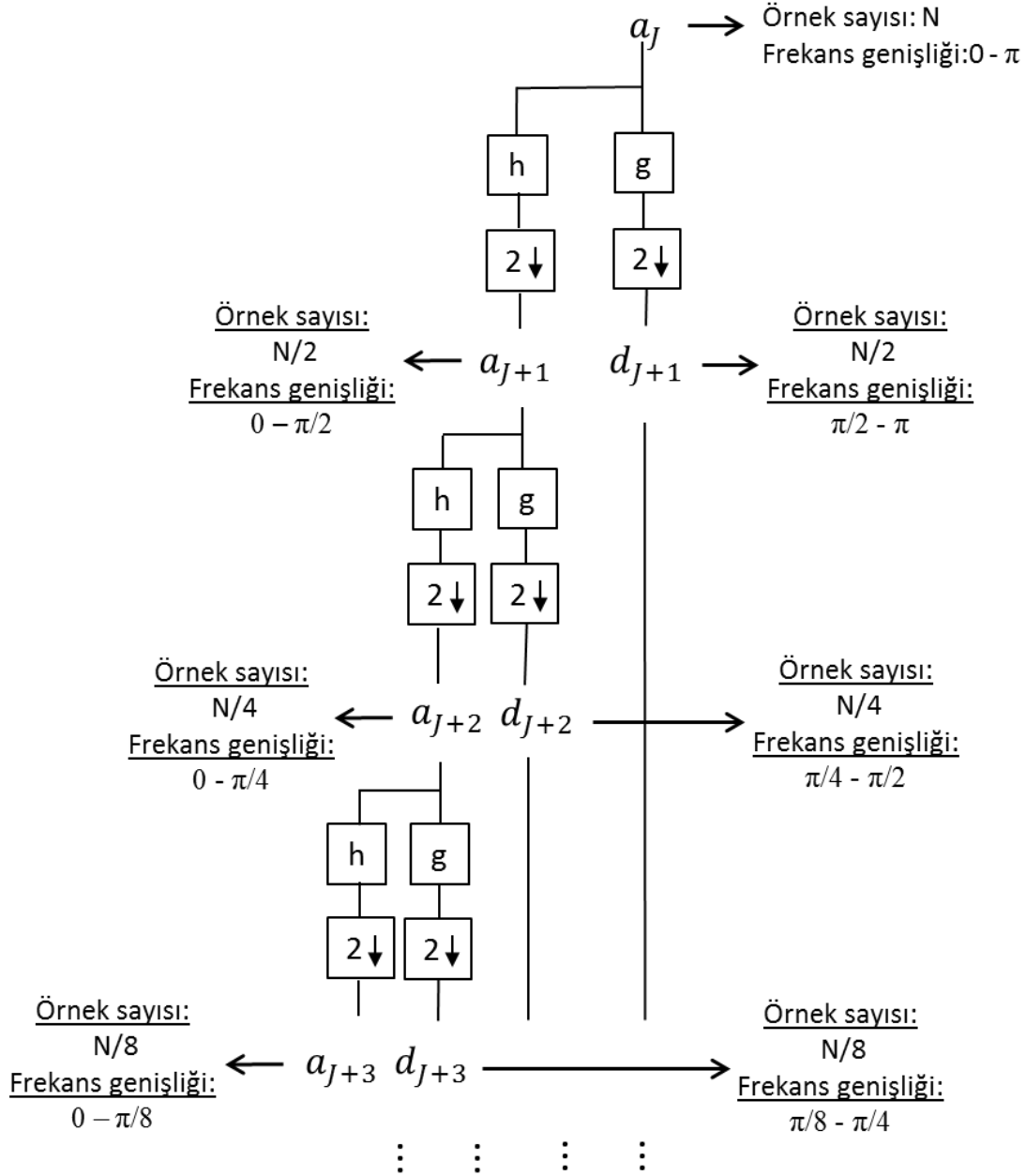
2.3.4 Ayırık dalgacık dönüşümü

Ayrık dalgacık dönüşümü (ADD, discrete wavelet transform-DWT), sürekli dalgacık dönüşümü ile aynı mantık ile çalışır, ancak dalgacık dönüşümünü farklı bir yöntemle yapmaktadır. Sürekli dönüşümdeki dalgacık fonksiyonunun ölçeklendirilip ötelenmesi işi ADD'de, dalgacık dönüşümünde anlatılan yüksek geçişli ve alçak geçişli filtreler aracılığı ile yapılır. Bu durum sinyalin ayrık veri noktaları olarak, diğer bir deyişle dijital olarak depolanıp işlenmesinin sonucudur. Bu sebeple, sinyal işleme, görüntü işleme ve sayısal analiz gibi alanlarda ayrık dalgacık dönüşümü kullanılır. Yani, mühendislikte esas olarak kullanılan dalgacık dönüşümü, ayrık

dalgacık dönüşümüdür. Sürekli dönüşümün işlemciler ile yapılan hali de, özünde ayırık veri noktaları ile yapılan sürekli dönüşümdür. Ayırık dalgacık dönüşümü, dijital olarak toplanan verilerin, dönüşüm sonrası katsayıları matrislerle ifade edilebilen, gürültüden temizleme, sıkıştırma gibi işlemlerin yapılabilmesine olanak sağlayan dalgacık dönüşümü tipidir.

Ayırık dalgacık dönüşümü filtreler aracılığıyla, sinyali farklı frekans bantları içinde inceleyen, yaklaşıklık ve detay katsayı dizilerine ayıran dönüşümdür. Dönüşümde kullanılan alçak ve yüksek geçişli filtrelerin sayısı sabit değildir. Örnek veri sayısına bağlı olarak, filtrelerden geçirilerek gittikçe azalan sayıda örnek nokta elde edildiği için, filtreleme işlemine, teorik olarak son kademede tek bir örnek veri noktası kalıncaya kadar devam edilebilir. Ancak, pratikte bu seviyede bir dönüşüm çoğunlukla gerekli değildir. Sinyal üzerinde istenilen işlemi yapmaya yetecek kadar bir çözünürlüğe ulaşılması yeterlidir. Yani istenilen sayıda kademe önceden tanımlanarak zamandan ve hesap yükünden kazanç sağlanabilir.

Bölüm 2.3.2'deki ayrıştırma görseli ele alınarak bazı açıklamalar yapılabilir. Her filtreleme adımı ile, örnek sayısı orjinaldekinin iki katına çıktığı için ($N+N=2N$), her filtreden sonra örnek sayısı Nyquist teoremi de göz önüne alınarak ikiye bölünmektedir. Bu, filtreden sonra zaten varolan maksimum frekansın sadece yarısı bulunduğu için mantıklıdır. Böylece örnek sayısı sabit tutulmuş olur. Örnek sayısını yarıya indirmek, aynı zamanda ölçeği iki katına çıkarmaktır. Şekil 2.28'de bu ifade görselleştirilmiştir.



Şekil 2.28 : Ayırıştırma işlemini.

Bu işlem matematiksel olarak sinyalin, dalgacık ve ölçek fonksiyonlarından teşkil edilen bant geçişli filtreler ile konvolüsyonu şeklinde ifade edilebilir.

$$a[n] = \langle f, \phi \rangle = (f * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h[2n - k] \quad (2.84a)$$

$$d[n] = \langle f, \psi \rangle = (f * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[2n - k] \quad (2.84b)$$

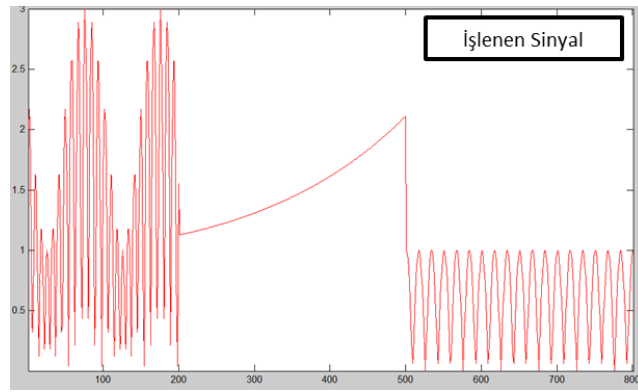
Sürekli dalgacık dönüşümü ile analogi kurularak,

$$\psi_{2^j n, 2^j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \quad (2.85)$$

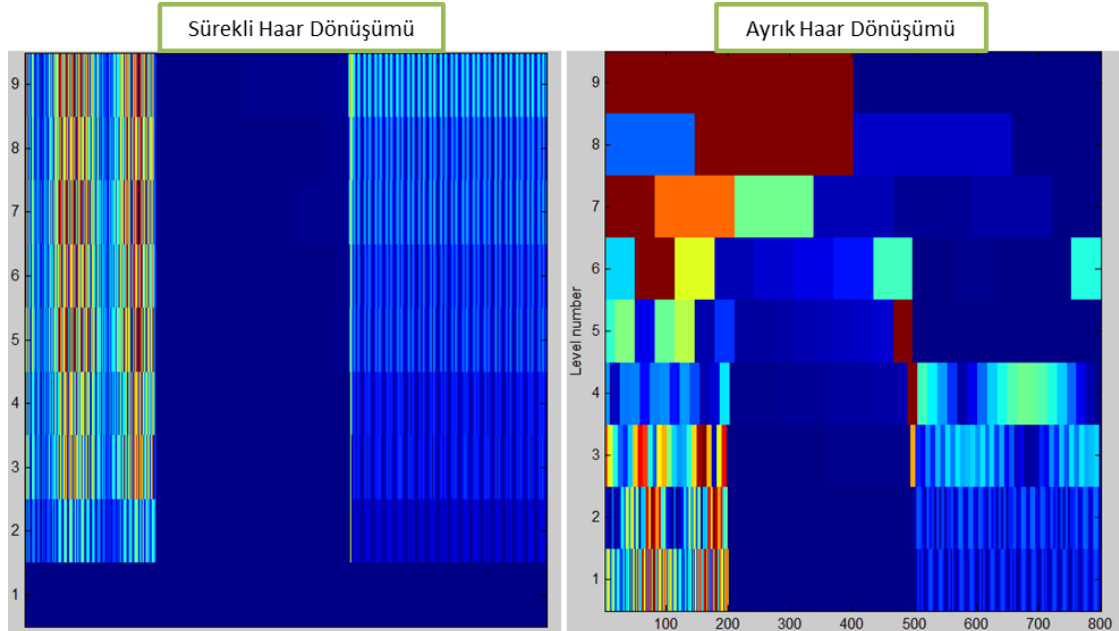
formu, alçak geçişli bir filtre için şöyle yazılabilir:

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{-t}{2^j}\right) \quad (2.86)$$

Bu ana dalgacığın ötelenmesi ve j sayacı ile ölçeklendirilmesi sonucu her kademedede detay ve yaklaşıklık katsayı dizileri elde edilir. Sürekli ve ayrık dönüşümün farkı aşağıda verilen şekil 2.29 ve 2.30 ile daha anlaşılır olmaktadır.



Şekil 2.29 : Örnek sinyal.



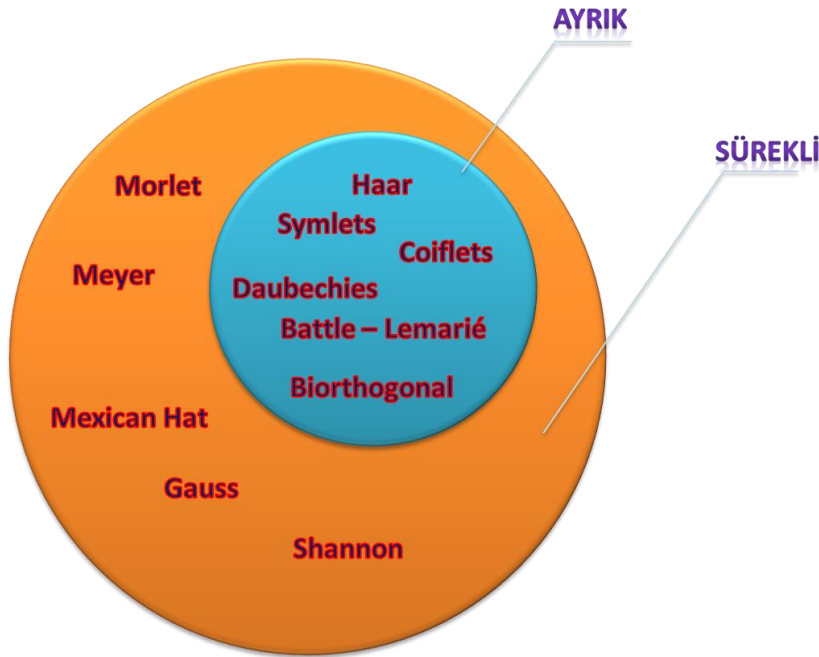
Şekil 2.30 : Örnek sinyalin ayrık ve sürekli dönüşümleri.

Sürekli dönüşümde, sinyalin özelliklerini, süreksizliklerini vb. daha iyi görebilirken, ayrık dönüşüm detay ve yaklaşıklık fonksiyonları şeklinde ayırarak yapılabilecek görüntü temizleme, ses kalitesini artırma gibi işlemler için daha uygundur.

2.4 Bazı Dalgacık Operatörlerinin Özellikleri

Dalgacıkların hepsi aynı özelliklere sahip değildir. Farklı tiplerde dalgacıklar bulunmaktadır. Bu farklar aynı aile içerisindeki dalgacıkların değişen derecelerine bağlı olarak sahip oldukları birleşme noktası sayısı, genişliği gibi farklar olabileceği gibi, daha temel farklar olan ortogonal olup olmama, ölçek fonksiyonu bulundurup bulundurmama, kompleks olma gibi farklardır. Bu bölümde sık kullanılan dalgacıklardan bazılarının özellikleri tanıtılacaktır.

Dalgacıklardaki en temel ayrım aynı dönüşümlerde olduğu gibi “Ayrık Dalgacıklar” ve “Sürekli Dalgacıklar” şeklindedir. Bazı dalgacık tipleri ise hem ayrık dönüşüme hem de sürekli dönüşüme uygundur. Sürekli dalgacıklar içinde ise yine Haar, Daubechies, Symlets, Coiflets, Biorthogonal, Gauss, Mexican Hat, Morlet, Meyer, Shannon dalgacıkları sayılabilir. Bunlardan, ayrık dönüşüme de uygun dalgacıklar Haar, Daubechies, Symlets, Coiflets, Biorthogonal dalgacıklarıdır. Dalgacıklar ile ilgili bir sınıflandırma görseli şekil 2.31’de verilmiştir.



Şekil 2.31 : Dalgacıkların genel sınıflandırılması.

Dalgacıkları birbirlerinden ayıran bir diğer önemli özellik de birleşme noktalarının (vanishing moments) sayısıdır. Birleşme noktaları, dalgacıkların yakınsama mertebesi olarak tanımlanabilir. Bir sinyalin dalgacık dönüşümü sonunda elde edilen katsayıların oluşturduğu polinomun derecesi, en fazla o dalgacığın sahip olduğu birleşme noktalarından 1 az ise, o sinyal tek bir dalgacık katsayısı ile temsil edilebilir. Yani p adet birleşme noktası olan bir dalgacığın, $(p - 1)$ dereceli bir polinomu tek bir katsayı ile temsil etmesi mümkündür. Bir dalgacık ne kadar çok birleşme noktasına sahip ise, o kadar az dalgacık katsayısı ile karmaşık sinyalleri temsil edebilir. Birleşme noktaları matematiksel olarak şu şekilde ifade edilebilir,

$0 \leq k < p$ için,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \quad (2.87)$$

Bu ifade, t üzerinde tanımlı, p 'ye kadar derecesi olan bir fonksiyonun, p adet birleşme noktası olan ψ dalgacığı ile dönüşümünün $(\langle f, \psi_{j,n} \rangle)$, 2^j gibi küçük ölçekler civarlarındaki katsayılarının küçük olacağını belirtmektedir.

En sık kullanılan bazı dalgacıklardan Haar, Daubechies, Symlet, Morlet, Mexican Hat ve Meyer dalgacıkları aşağıda tanıtılmıştır.

2.4.1 Haar dalgacığı

Haar dalgacıkları, Alfred Haar tarafından 1909'da bulunmuş ilk dalgacıklar olmalarına rağmen, bulundukları zamanda dalgacık olarak anılmamaktaydılar. Haar dalgacığı, Daubechies dalgacıklarının özel bir halidir. En az birleşme noktasına sahip, yani birinci derecedeki Daubechies dalgacığıdır.

Haar dalgacığı aşağıdaki ifade ile verilir:

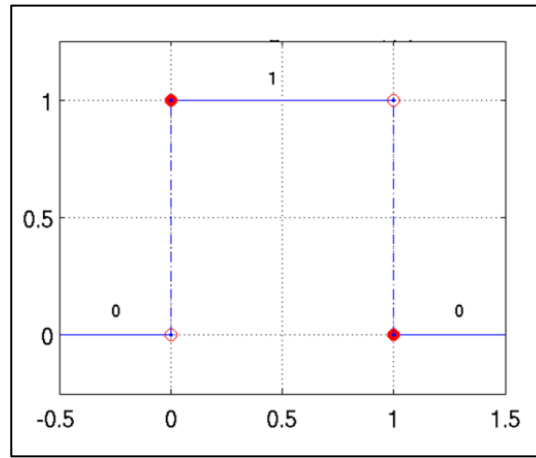
$$\psi(t) = \begin{cases} -1, & \text{eğer } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 1, & \text{eğer } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.88)$$

Bu ifadeye, belli bir aralıkta sürekli fonksiyonlar için yapılan bir çoklu çözünürlük yaklaşımı ile ulaşmak mümkündür. Ölçeklendirme fonksiyonu $\phi = 1_{[0,1]}$ iken ve

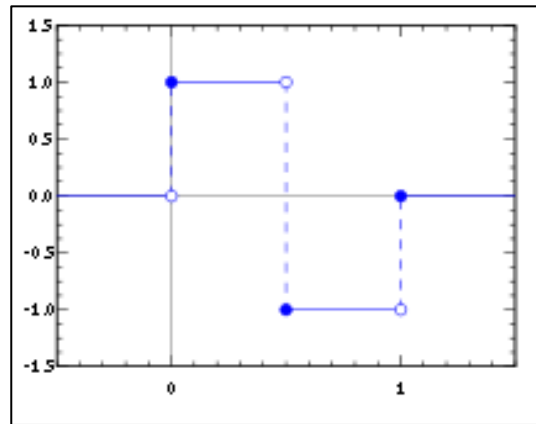
$h[n]$ filtresi $2^{-1/2}$ ye eşit $n=0$ ve $n=1$ 'de olmak üzere 2 adet sıfırdan farklı katsayıya sahip iken aşağıdaki işlemler yapılarak Haar dalgacığına ulaşılabilir.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{1-n}h[1-n]\phi(t-n) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi(t-1) - \phi(t)) \quad (2.89)$$

Haar dalgacığı en küçük desteğe sahip, en basit dalgacıktır. Dezavatajı, sadece bir adet birleşme noktası olduğu için, düzgün ve yumuşak geçişli fonksiyonlar için pek uygun bir sinyal temsili oluşturamamasıdır. Haar dalgacığının ölçeklendirme ve dalgacık fonksiyonları şekil 2.32 ve 2.33'de verildiği gibidir.



Şekil 2.32 : Haar ölçek fonksiyonu.



Şekil 2.33 : Haar dalgacık fonksiyonu.

Haar dalgacıklarının temel özellikleri, aşağıda listelenmiştir.

- En basit, en eski ve en küçük destekli dalgacıktır.
- Ölçek fonksiyonu vardır ve $\phi = 1_{[0,1]}$ olarak tanımlanır

- Dalgacık fonksiyonu $\psi = 1_{[0, 0.5)}, -1_{[0.5, 1)}$ ve diğer durumlarda 0'dır.
- Ortogonal ve biortogonaldır.
- Destek genişliği 1'dir.
- Hem sürekli hem de ayrık dönüşüme uygundur.
- Birleşme noktası sayısı 1'dir.
- Simetriktir.
- Sürekli bir fonksiyon değildir.
- Filtre genişliği 2'dir.

2.4.2 Daubechies dalgacıkları

Daubechies dalgacıkları Ingrid Daubechies tarafından 1990'da üretilmiş, dalgacık dönüşümünün popülerleşmesine önayak olmuş dalgacık ailesidir. Daubechies dalgacıkları derecelerine göre isimlendirilir. Örneğin 3. derece Daubechies dalgacı Daubechies 3 dalgacıdır. Bu dalgacıkların derecesi, birleşme noktalarının sayısıdır. Bu dalgacık ailesi, verilen bir derece için, en küçük desteğe sahip dalgacıkların ailesidir.

Daubechies, dalgacık fonksiyonunun, birleşme noktası sayısının en az 2 katı kadar sıfırdan farklı katsayıya sahip olması gerektiğini belirtir. Yani, bir p birleşme noktası olan bir dalgacık en az 2p adet katsayılı bir polinom ile ifade edilebilmektedir.

Yine, p birleşme noktasına sahip bir Daubechies dalgacık fonksiyonu minimum $[0, 2p-1]$ genişliğinde desteğe sahiptir. Ya da p-1 kadar öteleme ile bu desteğin bulunduğu yer, $[-p+1, p]$ aralığında tanımlanır. Daubechies ölçek fonksiyonu da $[0, 2p-1]$ desteğine sahiptir.

Daubechies dalgacıklarının oluşturulması eşlenik ayna filtre olan H'nin tanımlanması ile başlar. Tüm h_n 'ler reel sayılar kümesinde tanımlı ve sadece çok kısıtlı bir bölgesi sıfırdan farklı olmak üzere şöyle tanımlanır:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-in\omega} \quad (2.90)$$

Buradan ölçek fonksiyonunun Fourier dönüşümü ve dolayısı ile ölçek fonksiyonu tanımlanır:

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\omega} \phi(x) dx \quad (2.91)$$

Daubechies dalgacıklarında, h_n ’de olması gereken özellikler şöyle tanımlanır:

$$\sum_n |h_n| |n|^\varepsilon < \infty, \varepsilon > 0, \quad (2.92a)$$

$$\sum_n h_{n-2k} h_{n-2l} = \delta_{kl} \quad (2.92b)$$

$$\sum_n h_n = \sqrt{2} \quad (2.92c)$$

Buradan $H(\omega)$ ’nin tanımını aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$H(\omega) = \left[\frac{1}{2} (1 + e^{-i\omega}) \right]^N \left[\sum_n f_n e^{-in\omega} \right] \quad (2.93)$$

(2.92a) ifadesi (2.93) denkleminde uygun olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sum_n |f_n| |n|^\varepsilon < \infty, \varepsilon > 0, \quad (2.94a)$$

$$\omega \in R \text{ için } \left| \sum_n f_n e^{-in\omega} \right| < 2^{N-1} \quad (2.94b)$$

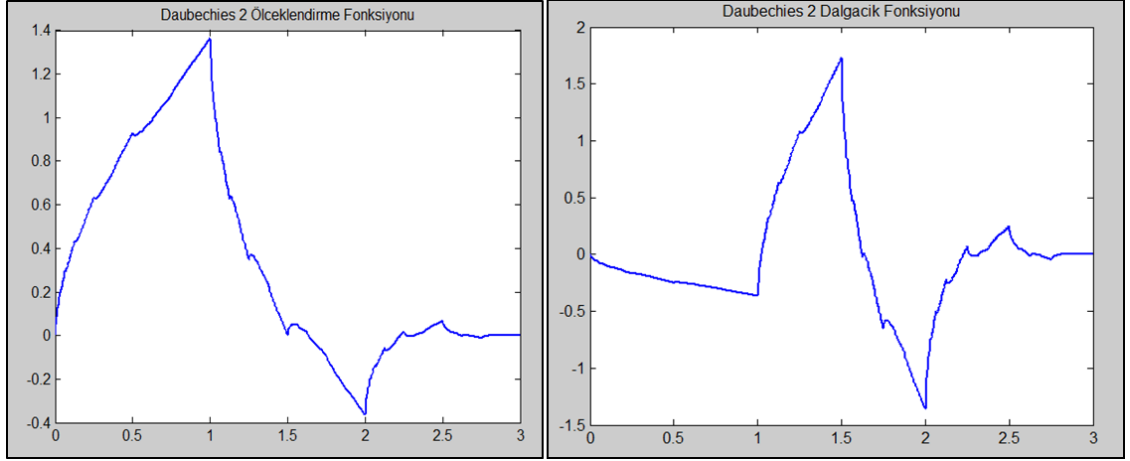
Buradan da Daubechies dalgacığının katsayılarının genel formuna ulaşılabilir.

$$g = (-1)^n h_{1-n} \quad (2.95a)$$

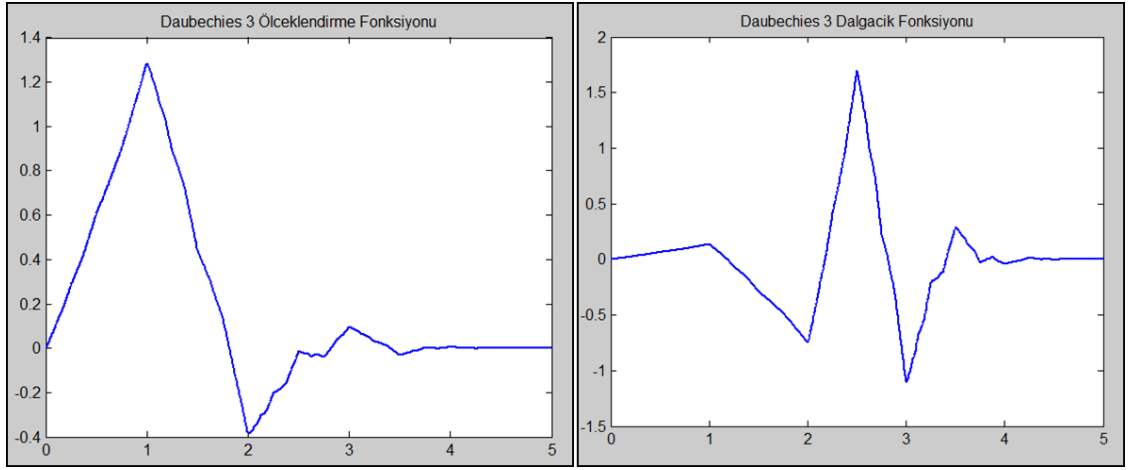
$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\omega) \quad (2.95b)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n g_n \phi(2x - n) \quad (2.95c)$$

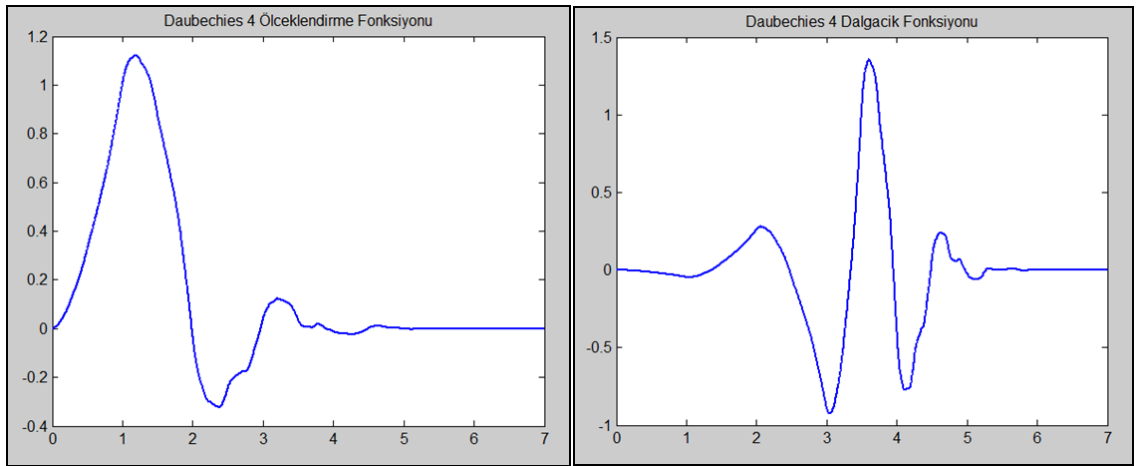
Daubechies dalgacıklarının 2., 3. ve 4. derecelerdeki görünimleri sırasıyla aşağıdaki şekiller 2.34, 2.35 ve 2.36’da verilmiştir.



Şekil 2.34 : Daubechies 2 (a)Ölçeklendirme fonksiyonu. (b)Dalgacık fonksiyonu.



Şekil 2.35 : Daubechies 3 (a)Ölçeklendirme fonksiyonu. (b)Dalgacık fonksiyonu.



Şekil 2.36 : Daubechies 4 (a) Ölçeklendirme fonksiyonu (b) Dalgacık fonksiyonu.

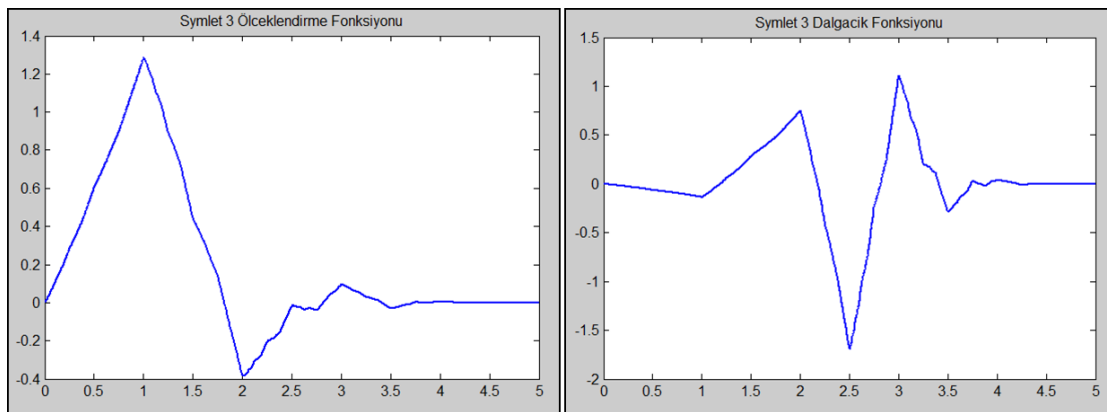
Yukarıdaki şekillerden de görüldüğü gibi, Daubechies dalgacıkları dereceleri yükseldikçe, yumuşak hatlara sahip olmakta ve dolayısı ile yumuşak geçişli fonksiyonları daha iyi temsil eder hale gelmektedir.

Daubechies dalgacıkları ailesinin temel özellikleri aşağıdaki gibidir:

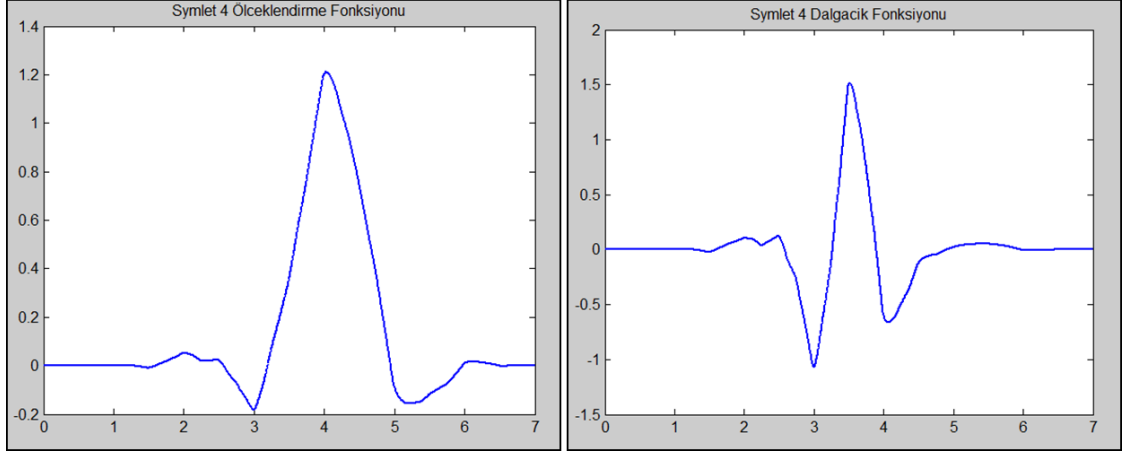
- Ortogonal ve biortogonaldir.
- Ölçeklendirme fonksiyonuna sahiptir.
- Hem sürekli, hem de ayrık dalgacık dönüşümüne uygundur.
- Verilen bir birleşme noktası sayısı N için, olabilecek en küçük desteğe $2N-1$ sahip dalgacıklar ailesidir.
- Simetrik değildir.
- Süreklidir.
- Filtre genişliği $2N$ 'dir.

2.4.3 Symlet dalgacıkları

Symlet dalgacıkları ailesi, yine Daubechies tarafından üretilmiş olup, Daubechies dalgacıklarının neredeyse simetrik halidir. Simetrik dalgacıklarla işlem kimi uygulamalar için bir önem arz etmezken, görüntü işleme, veri sıkıştırma gibi bazı uygulamalarda ise önem kazanmaktadır. Ürettiği dalgacıklarda bu sorunu gören Daubechies, daha simetrik ama yine küçük destekli bir dalgacık üretme ihtiyacı duymuştur. Simetrik olmanın dezavantajı ise, sinyalin ayrıştırılması sonrasında mutlak şekilde yeniden oluşturulmasının her zaman mümkün olmayışıdır. Şekil 2.37 ve 2.38'de symlet ailesinin 3. ve 4. dereceden dalgacıkları verilmiştir.



Şekil 2.37 : Symlet 3 (a)Ölçeklendirme fonksiyonu. (b)Dalgacık fonksiyonu.



Şekil 2.38 : Symlet 4 (a)Ölçeklendirme fonksiyonu. (b)Dalgacık fonksiyonu.

Symlet dalgacıkları ailesinin özellikleri aşağıda verilmiştir.

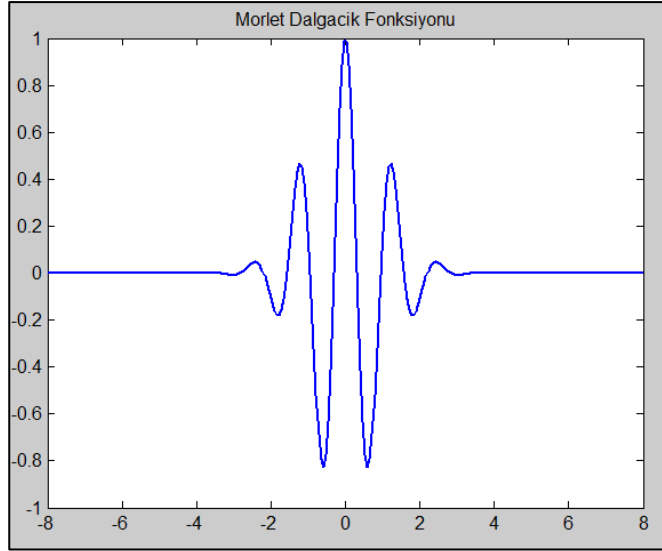
- Ortogonal ve biortogonaldır.
- Ölçeklendirme fonksiyonu vardır.
- Hem sürekli, hem de ayrık dönüşüme uygundur.
- Verilen bir birleşme noktası sayısı N için, destek genişliği $2N-1$ 'dir.
- Filtre genişliği $2N$ 'dir.
- Neredeyse simetriktir.

2.4.4 Morlet dalgacı

Morlet dalgacı, jeofizikçi Jean Morlet'in Gabor dönüşümünü Grossman ile birlikte değiştirerek kullanması sonucu ortaya çıkmıştır. Bu dalgacıya ait bir ölçeklendirme fonksiyonu bulunmamaktadır ve ortogonal değildir. Morlet dalgacı fonksiyonu şu ifade ile verilmiştir:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \cos\left(x\pi \sqrt{\frac{2}{\log(2)}}\right) e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)} \quad (2.96)$$

Şekil 2.39'da ise, Morlet dalgacığının görünümü verilmiştir.



Şekil 2.39 : Morlet dalgacık fonksiyonu.

Bu dalgacığın özellikleri aşağıdaki gibi listelenebilir.

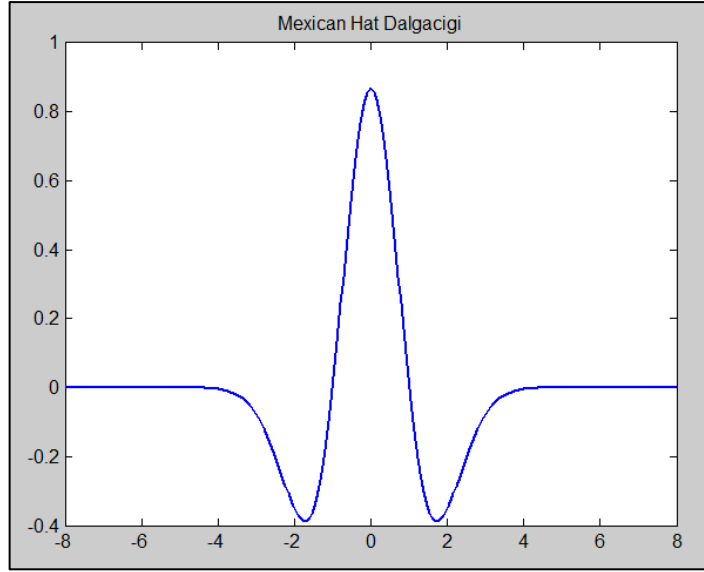
- Ortogonal veya biortogonal değildir.
- Ölçeklendirme fonksiyonu yoktur.
- Sadece sürekli dönüşüme uygundur.
- Simetriktir.
- Desteği küçük değildir ve -4 ile 4 arasında etkilidir.

2.4.5 Mexican Hat dalgacı

Mexican Hat dalgacı, ismini, şeklinin Meksikalı şapkası “sombrero”ya benzemesinden almıştır. Bu dalgacık, Gauss dalgacık ailesinin ikinci dereceden dalgacıdır. İfadesi aşağıda verilmiştir:

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1 - t^2) e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)} \quad (2.97)$$

Bu dalgacığın görünümü ise şekil 2.40’ta verilmiştir.



Şekil 2.40 : Mexican Hat dalgacığı.

Bu dalgacığın özellikleri aşağıdaki gibi listelenebilir:

- Ortogonal veya biortogonal değildir.
- Ölçeklendirme fonksiyonu yoktur.
- Sadece sürekli dönüşüme uygundur.
- Simetriktir.
- Desteği küçük değildir 5 ve -5 ile arasında etkilidir.

2.4.6 Meyer dalgacığı

Meyer dalgacıkları ailesi Yves Meyer tarafından üretilen ve frekans uzayında tanımlı, ortonormal bir dalgacık ailesidir. Meyer dalgacığının tanımı şöyle verilmiştir:

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\omega}{2}} \sin \left[\frac{\pi}{2} v \left(\frac{3}{2\pi} |\omega| - 1 \right) \right], & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\omega}{2}} \cos \left[\frac{\pi}{2} v \left(\frac{3}{4\pi} |\omega| - 1 \right) \right], & \frac{4\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{3}, \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.98)$$

Ve buradaki v fonksiyonu da şu şartları sağlamaktadır:

$$v(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad (2.99)$$

$$v(x) + v(1 - x) = 1 \quad (2.100)$$

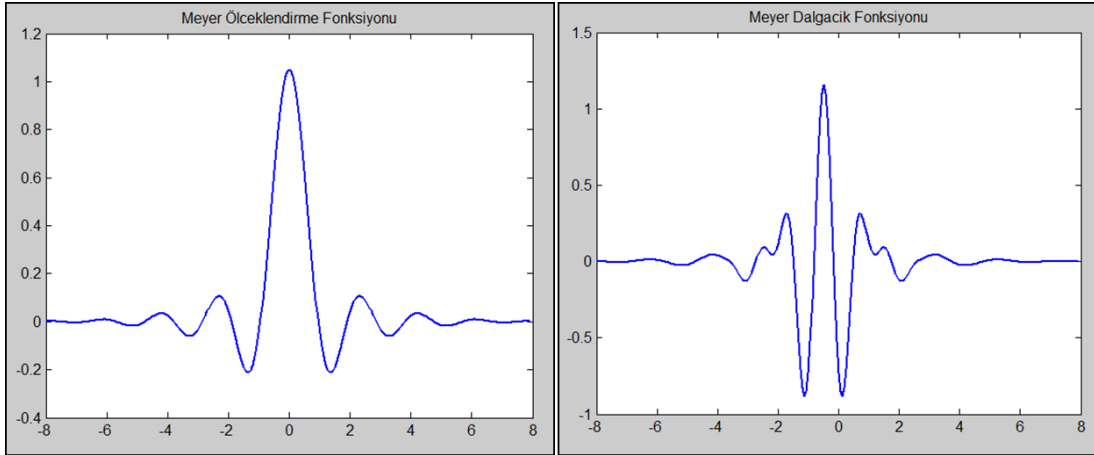
Meyer ölçeklendirme fonksiyonu ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}}, & |\omega| \leq \frac{2\pi}{3}, \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\omega}{2}} \cos \left[\frac{\pi}{2} v \left(\frac{3}{2\pi} |\omega| - 1 \right) \right], & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ 0, & |\omega| \leq \frac{4\pi}{3} \end{cases} \quad (2.101)$$

Bu ifadelerden görülebileceği gibi, bu dalgacık sonlu bir desteğe sahip değildir, ancak v polinomu, $v \in C^\infty$ şeklinde bile olsa, herhangi bir ters polinomdan çok daha hızlı bir şekilde 0'a düşer. Yani $\forall N \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $C_N < \infty$ şeklinde öyle bir sayı bulunabilir ki, aşağıdaki (2.102) denklemi gerçekleşir.

$$|\psi(x)| \leq C_N (1 + |x|^2)^{-N} \quad (2.102)$$

v 'nin, yani yardımcı polinomun değiştirilmesi ile farklı Meyer dalgacıkları üretilebilir. Şekil 2.41'de $v(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$ için Meyer dalgacığının görünümü verilmiştir.



Şekil 2.41 : Meyer dalgacığı (a) Ölçeklendirme fonksiyonu. (b) Dalgacık fonksiyonu.

Bu dalgacığın özellikleri de aşağıda listelenmiştir.

- Desteği sonsuzdur ancak etkili olduğu aralık $[-8 \ 8]$ arasındır.
- Frekans uzayında tanımlıdır.

- Sonsuz türevlenebilirdir, sürekli.
- Simetriktir.
- Sürekli dönüşüme uygundur.
- Sonlu dürtü yanıtı (FIR) filtreler temelli bir yakınsama ile ayrık dönüşüm de yapılabilir.

3. DALGACIK DÖNÜŞÜMÜNÜN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ İLE KARŞILAŞTIRILMASI

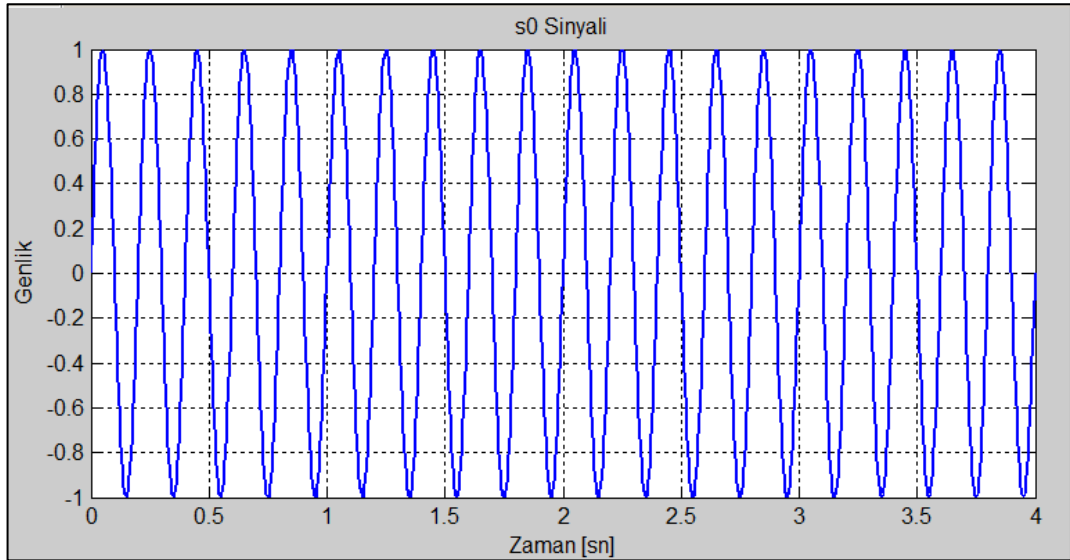
3.1 Durağan Sinyaller İçin Karşılaştırılması

Dalgacık dönüşümünün Fourier dönüşümüne göre avantaj ve dezavantajlarını tespit etmek üzere, ilk önce frekans içeriği bilinen, tek bir harmonikten oluşan bir sinyal ele alınmış ve gerekli analizler yapılmıştır.

Frekansı $f_1=5$ Hz olan bir sinyal, t zamanı temsil etmek üzere aşağıdaki gibi üretilmiştir.

$$s_0 = \sin(2\pi f_1 t) \quad (3.1)$$

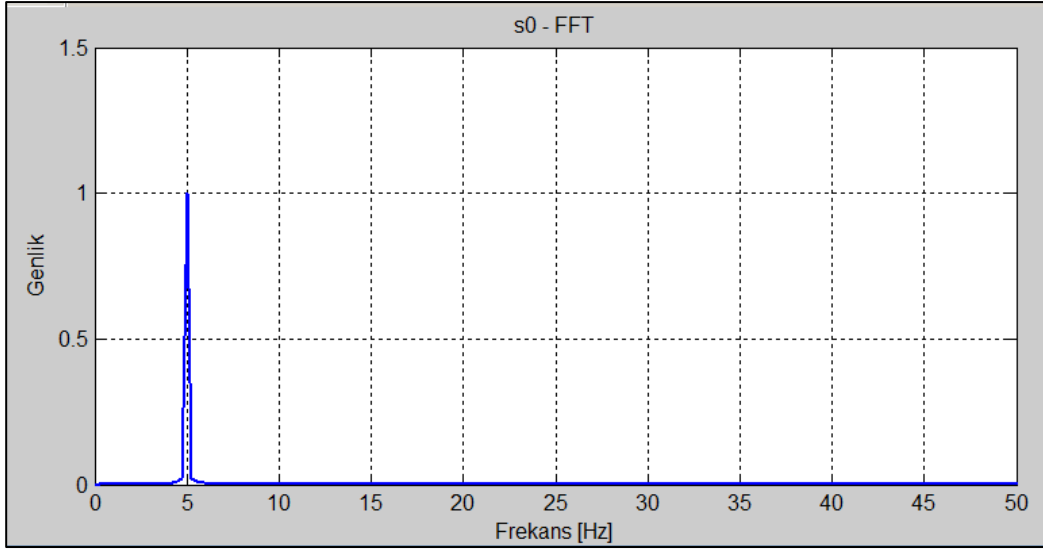
Üretilen sinyalin zaman ekseninde gösterimi şekil 3.1’de verilmiştir.



Şekil 3.1 : Tek harmonik içeren örnek sinyal s_0 .

Şekil 3.1’de görüldüğü üzere, sinyalin ölçüm süresi $T=4$ saniyedir. Veri sayısı $N=1000$ olarak alındığından örnekleme frekansı 250 Hz’tür.

Bu sinyalin Fourier dönüşümü yapılarak Fourier dönüşümü işleminin sinyalin içeriği hakkında ne kadar bilgi verdiği şekil 3.2’de incelenmiştir.

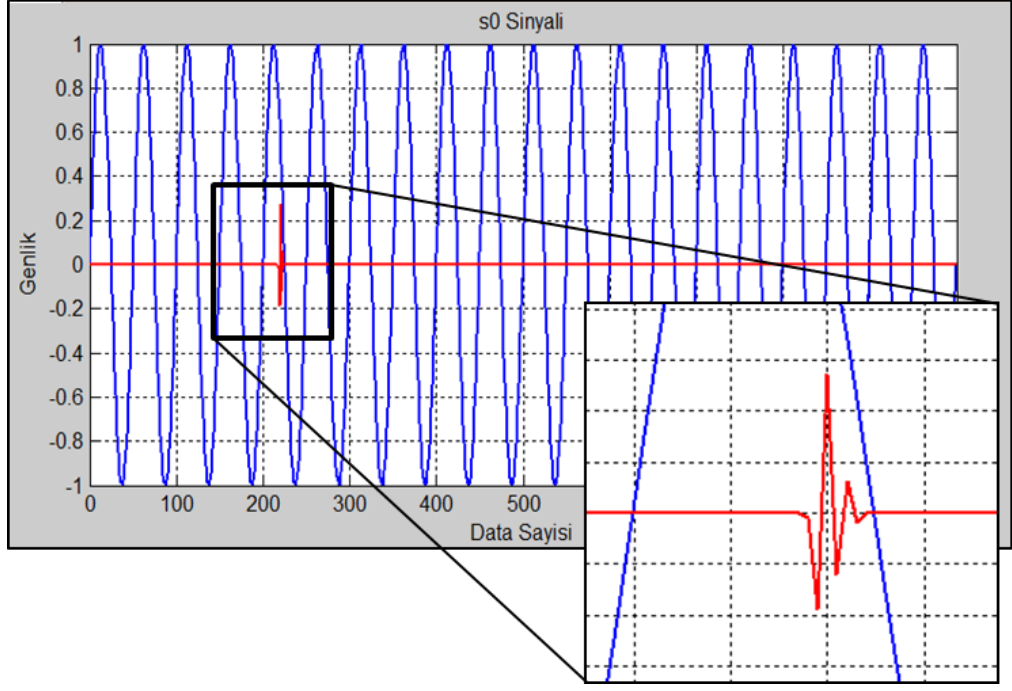


Şekil 3.2 : Örnek sinyal s_0 'ın Fourier dönüşümü.

Fourier dönüşümü, beklenildiği gibi, sinyalin 5 Hz frekansında 1 birim genliği olduğunu açıkça göstermektedir. Bu sonuç, Fourier dönüşümünün sürekli bir sinyal için ne kadar doğru ve kesin bir sonuç verdiğini açıkça ortaya koymaktadır.

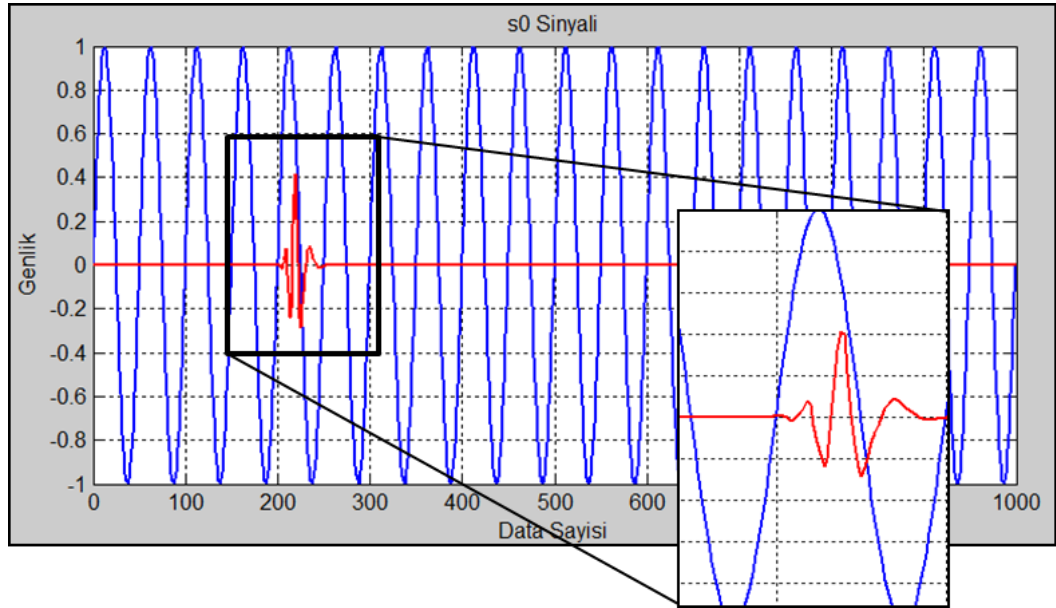
s_0 sinyaline dalgacık dönüşümü de uygulanarak, dalgacık dönüşümünün ne tür bilgileri açığa çıkardığı incelenmiştir. Bu dönüşüm için Daubechies 4 dalgacı kullanılmıştır. Dalgacık dönüşümüne başlamadan önce, ölçek seçilmelidir. Dikkat edilmesi gereken nokta ise, seçilen maksimum ölçeğin desteğinin, sinyaldeki minimum frekansın desteğini kapsayabildiğinden emin olunması gerektiğidir. Destek, dalgacık fonksiyonunun sıfır olmayan kısmının zaman eksenindeki genişliğine denilmektedir. Örnek s_0 sinyali yalnızca 5 Hz'lük bir frekans içerdiği için, seçilecek maksimum ölçek en azından 5 Hz'ün periyodunu kapsayacak şekilde seçilmelidir.

Bu ölçek seçimini daha net anlatabilmek için bazı ölçeklerin sinyal üzerine çizimi gösterilmiştir. Birinci ölçekten başlayarak, yeterli genişliği sağlayan ölçeğe kadar gidilmiştir. Şekil 3.3, birinci ölçekteki dalgacığın sinyal üzerinde yansıtılmasını göstermektedir.



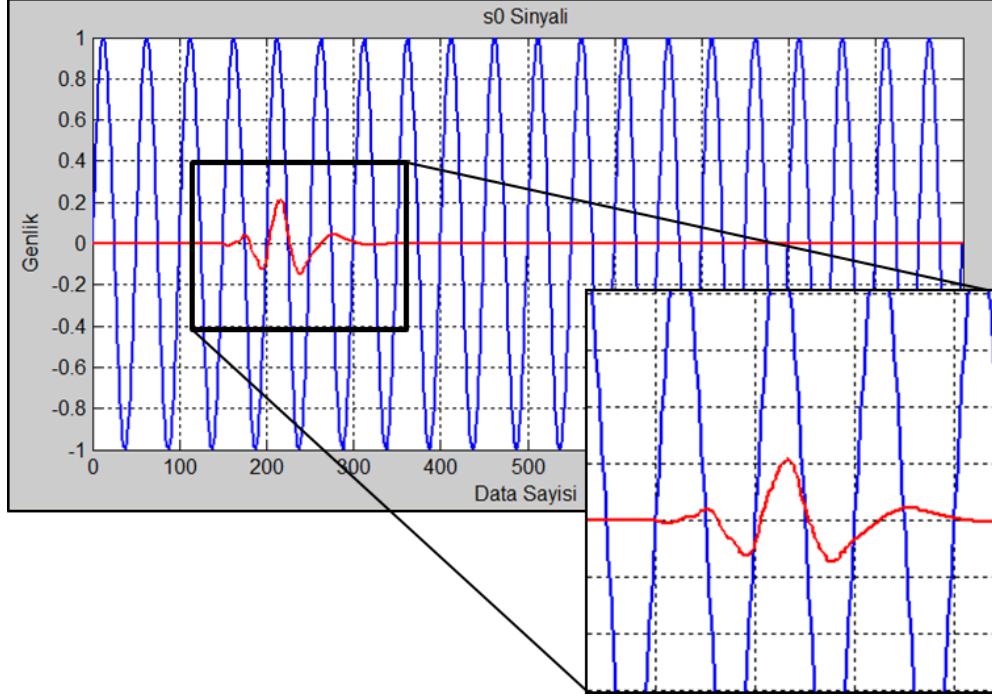
Şekil 3.3 : 1.ölçekteki dalgacığın sinyal üzerine düşümü.

Bu dalgacığın desteği sinyaldeki en büyük –ve tek bileşen- 5 Hz’ün periyodundan oldukça küçüktür. Bu durum aynı zamanda yapılacak dalgacık dönüşümünün, dalgacık fonksiyonlarının desteklerinin genişliğinin bu ölçekte, bu frekans değeri civarındaki değerleri işleyemeyeceği anlamına gelmektedir. Daha büyük bir ölçek olan 10 ile işlem tekrarlanmış, sonuç şekil 3.4’te gösterilmiştir.



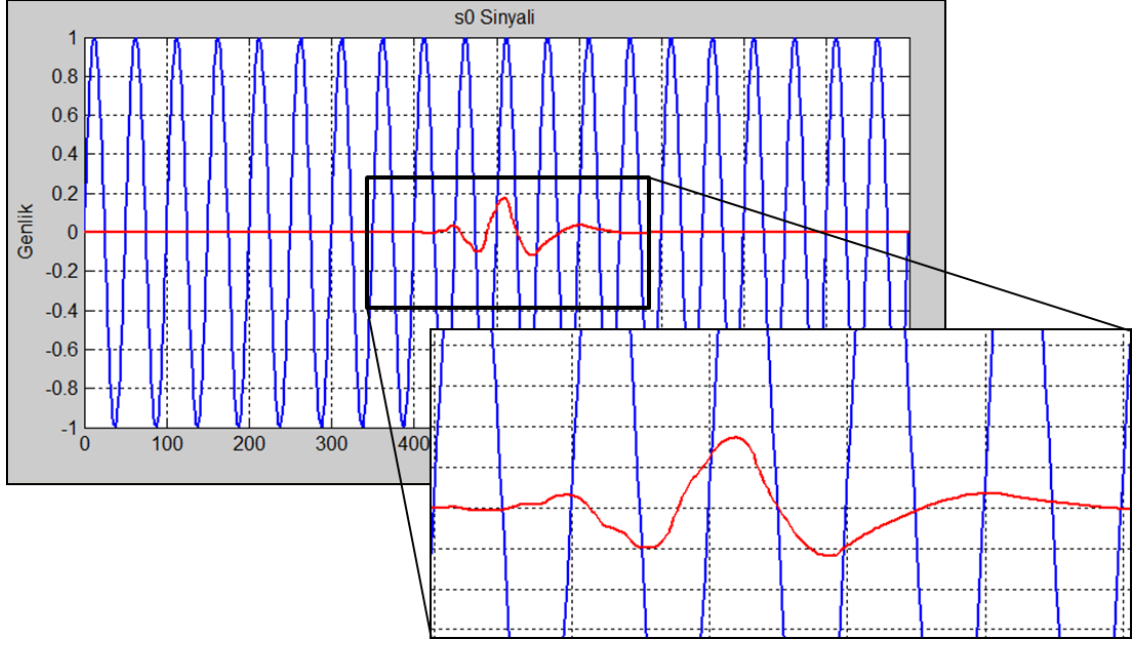
Şekil 3.4 : 10.ölçekteki dalgacığın sinyal üzerine düşümü.

10 ölçeğindeki Daubechies 4 dalgacığı da 5 Hz gibi düşük frekanslı bir sinyali yakalayabilecek kadar geniş bir desteğe sahip değildir. Ölçek yükseltilerek 40'a çıkarılarak şekil 3.5'te gösterilmiştir.

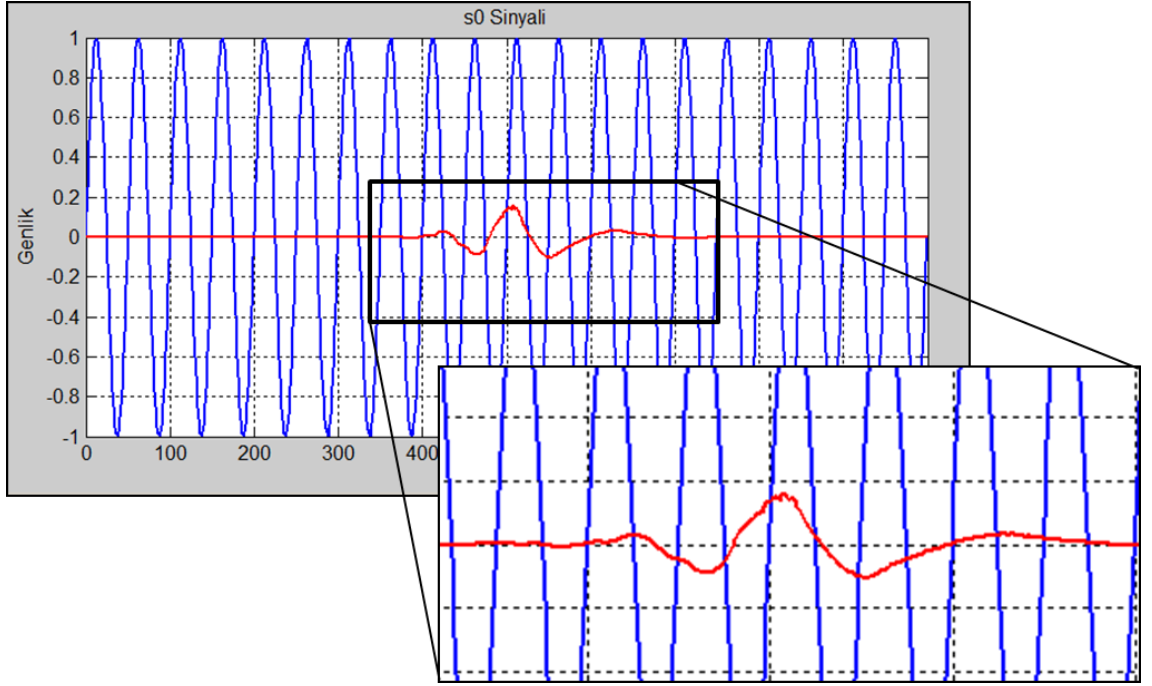


Şekil 3.5 : 40.ölçekteki dalgacığın sinyal üzerine düşümü.

Şekil 3.5'te görüldüğü gibi, ölçek 40'a yükseltilince, dalgacık fonksiyonunun desteği, bu sinyalin desteğini yakalamaya yaklaşmıştır. Kullanılacak maksimum ölçek için, alt limiti seçmek üzere şekil 3.6 ve 3.7'de gösterildiği gibi biraz daha yükseltilerek 60 ve 80'e çıkarılarak denenmiştir.



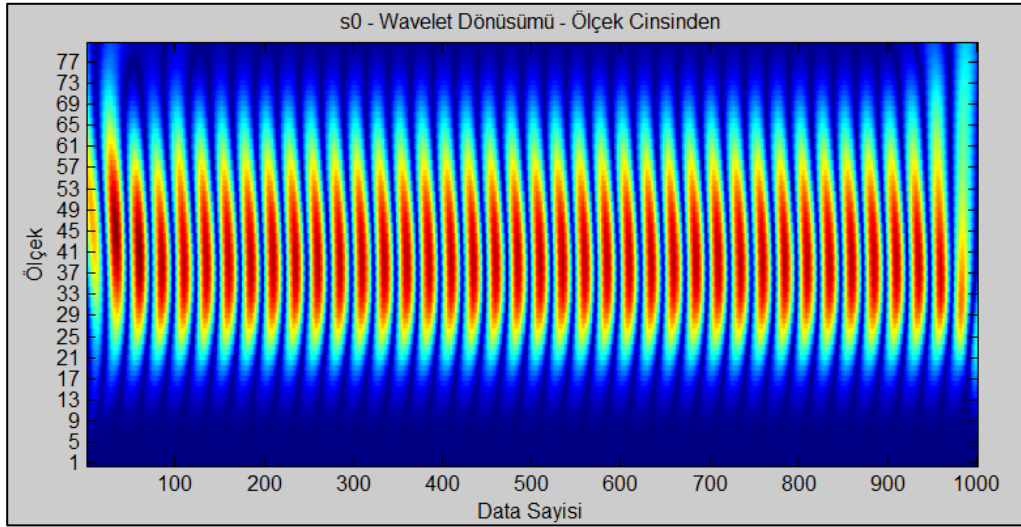
Şekil 3.6 : 60 ölçek ile görünüm.



Şekil 3.7 : 80 ölçek ile görünüm.

Ölçek yükseldikçe dalgacığın destek genişliğinin arttığı ve dolayısı ile sinyalin desteğini rahatça kapsayabildiği gösterilmiştir. Şekillerden, 60'tan sonraki ölçeklerin söz konusu sinyalin desteğini kapsamada yeterli olduğu gözlenmiştir. Bu sebeple, bu dalgacık dönüşümü için ölçek üst sınırı 80 seçilmiştir.

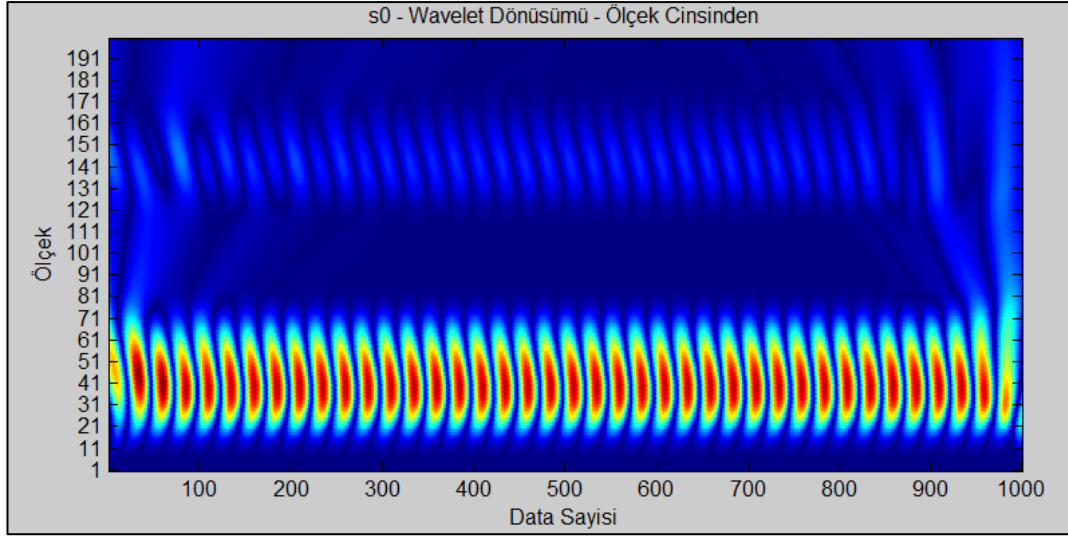
Farklı sinyaller için ölçek seçiminde, minimum en büyük ölçek seçiminin nasıl yapılması gerektiği hakkındaki bu bilgiyi bir sistematığe oturtmak gerekmiştir. Her seferinde tüm ölçeklerin denenmesine gerek yoktur. Yapılan çalışma göstermiştir ki, örnekleme frekansının yaklaşık 3 veya 4'te biri yeterli olmaktadır. s_0 sinyalinin örnekleme frekansı 250 olduğu için, bu örnekte de 60-80 gibi ölçekler uygundur. Ölçeğin gereğinden fazla yüksek seçilmesi ise, aynalama'ya (aliasing) benzer bir fenomen oluşturmaktadır. Bu durum, şekil üzerinde daha iyi anlaşılabilirdiğinden, dönüşümün grafiği üzerinden şekil 3.8'de incelenmiştir.



Şekil 3.8 : Ölçek 80.

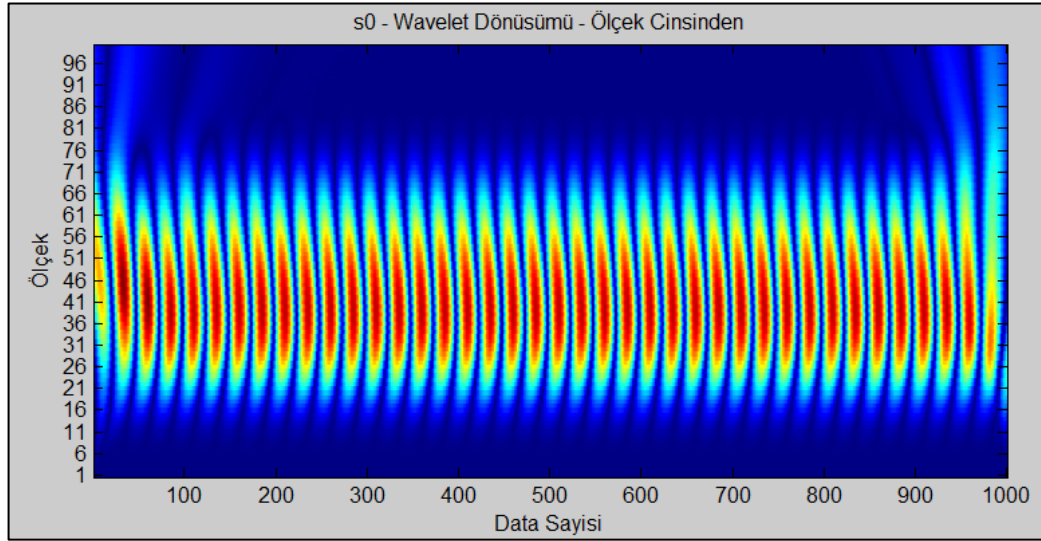
Şekil 3.8, Daubechies 4 dalgacığı ile yapılan dönüşümün 1'den 80'e kadar olan ölçeklerdeki görünümüdür. MATLAB'deki gömülü komut, yatay ekseninde zaman yerine veri sayısı ve dikey ekseninde frekans yerine dalgacık dönüşümünün doğal çıktısı olan ölçekleri vermektedir.

Aynalama fenomeni, aşağıdaki şekil 3.9'da, ölçek sayısı 200'e çıkarılarak yapılan dönüşüm ile açıkça gösterilebilmiştir. Bunun sebebi, dar destekli bir sinyal bileşenini, desteği yeterince genişleyen dalgacıkların da yakalayabilmesidir. Bu durum, seçilecek maksimum ölçeğin yeterince büyük ama yanıltıcı sonuçlar yaratacak kadar da büyük seçilmemesi gerektiğini göstermektedir.

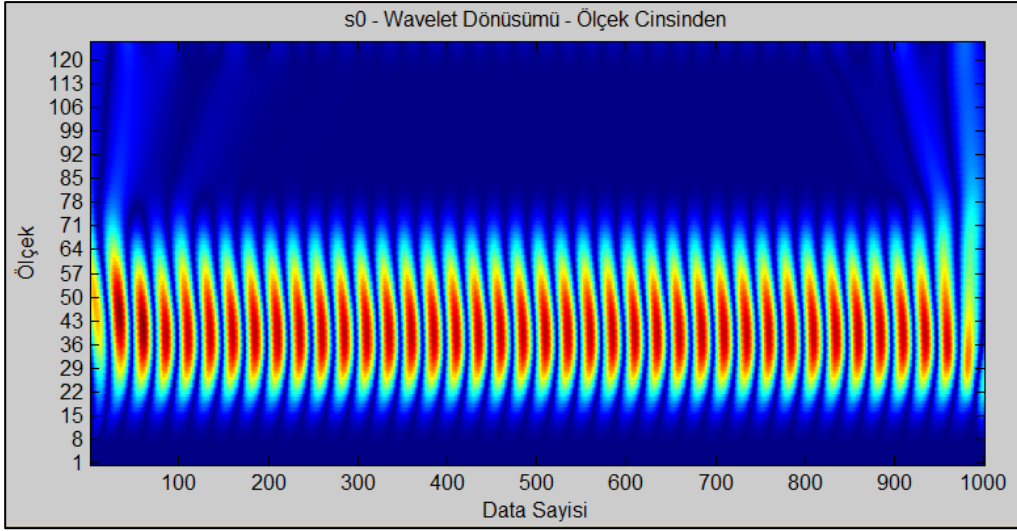


Şekil 3.9 : Ölçek 200.

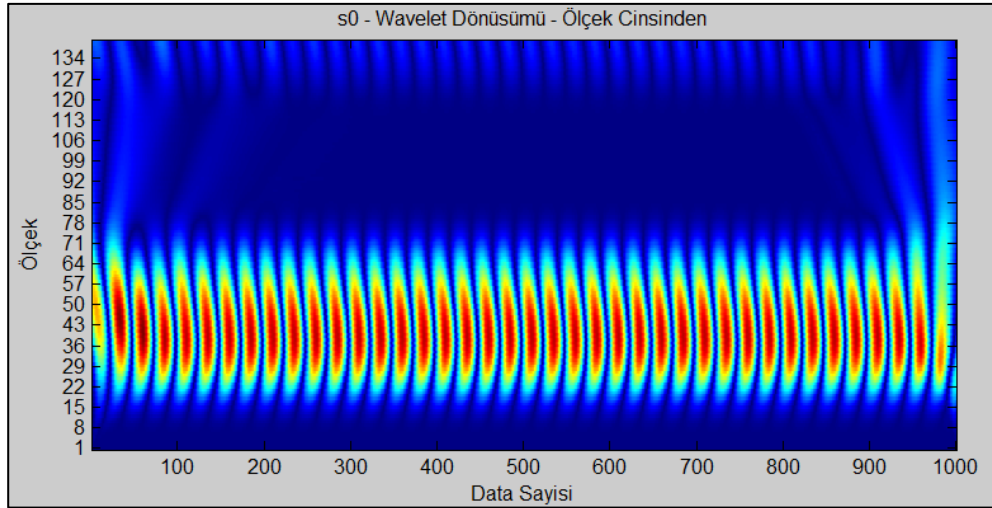
Seçilecek en büyük ölçek değerini kabaca limitlemek için de bazı denemeler yapılmıştır. 80 ölçekten yukarıya 100, 125 ve 140 da denenmiştir. Edinilen sonuçlar aşağıda şekil 3.10, 3.11 ve 3.12’de gösterildiği gibi olmuştur.



Şekil 3.10 : Ölçek 100.



Şekil 3.11 : Ölçek 125.



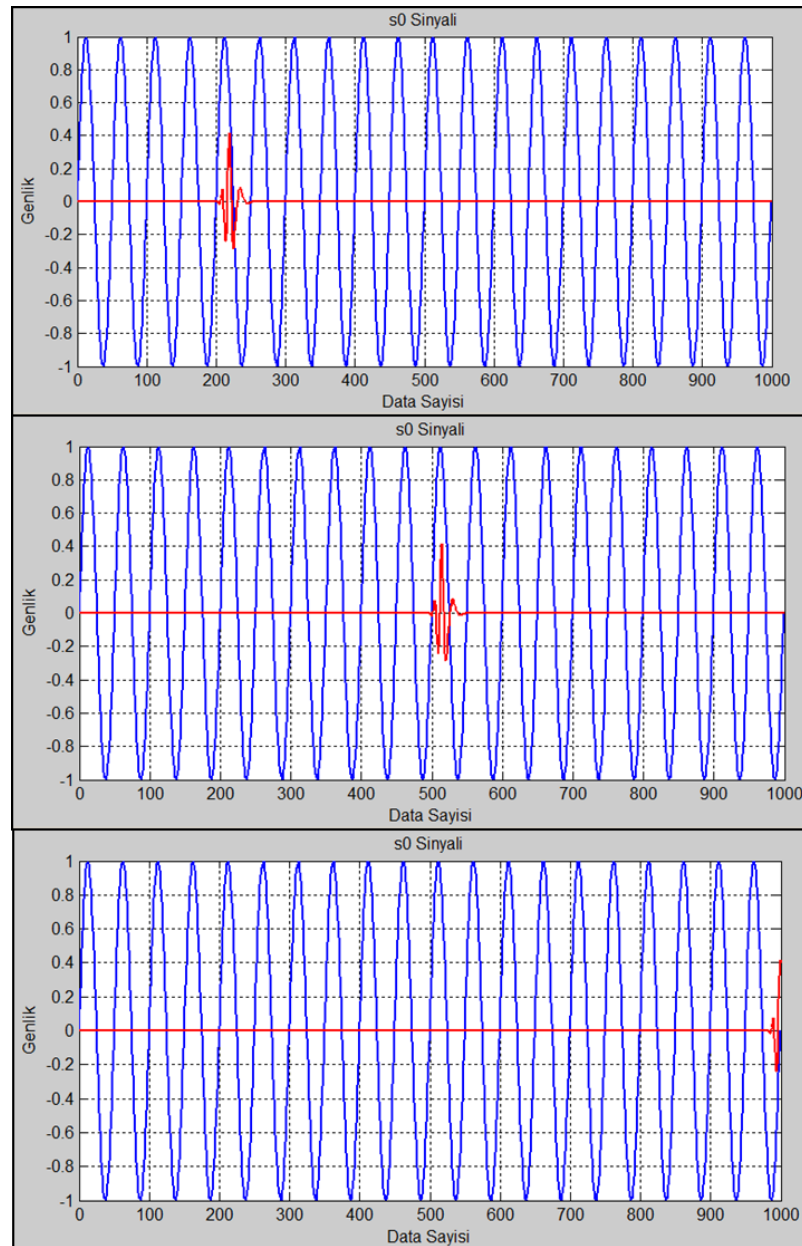
Şekil 3.12 : Ölçek 140.

Denenen ölçeklerden 100, aynalama yaratmadan iyi bir sonuç verebilmiştir. Ölçek 125'e çıkarılınca, grafiğin üst kısımlarında (en büyük ölçeklerde) aynalamanın başlangıçları çok az belirmiştir. Ölçek daha da yükseltip 140'a ve yukarısına çıkarıldığında ise, aynalama izleri görünür olmuştur.

Bu gözlemlerden edinilen sonuç ise, örnek sayısının yaklaşık yarısından daha büyük ölçeklerin aynalama oluşturabileceği, bu sebeple ölçek seçiminde üst limitin örnek sayısının yarısından fazla olmaması gerektiğidir. Bu durum Fourier dönüşümündeki Nyquist kuralına benzerlik göstermektedir. Nyquist teoreminin, Fourier dönüşümü yapılan sinyallerden okunabilecek doğru frekansın, maksimum örnek sayısının yarısı

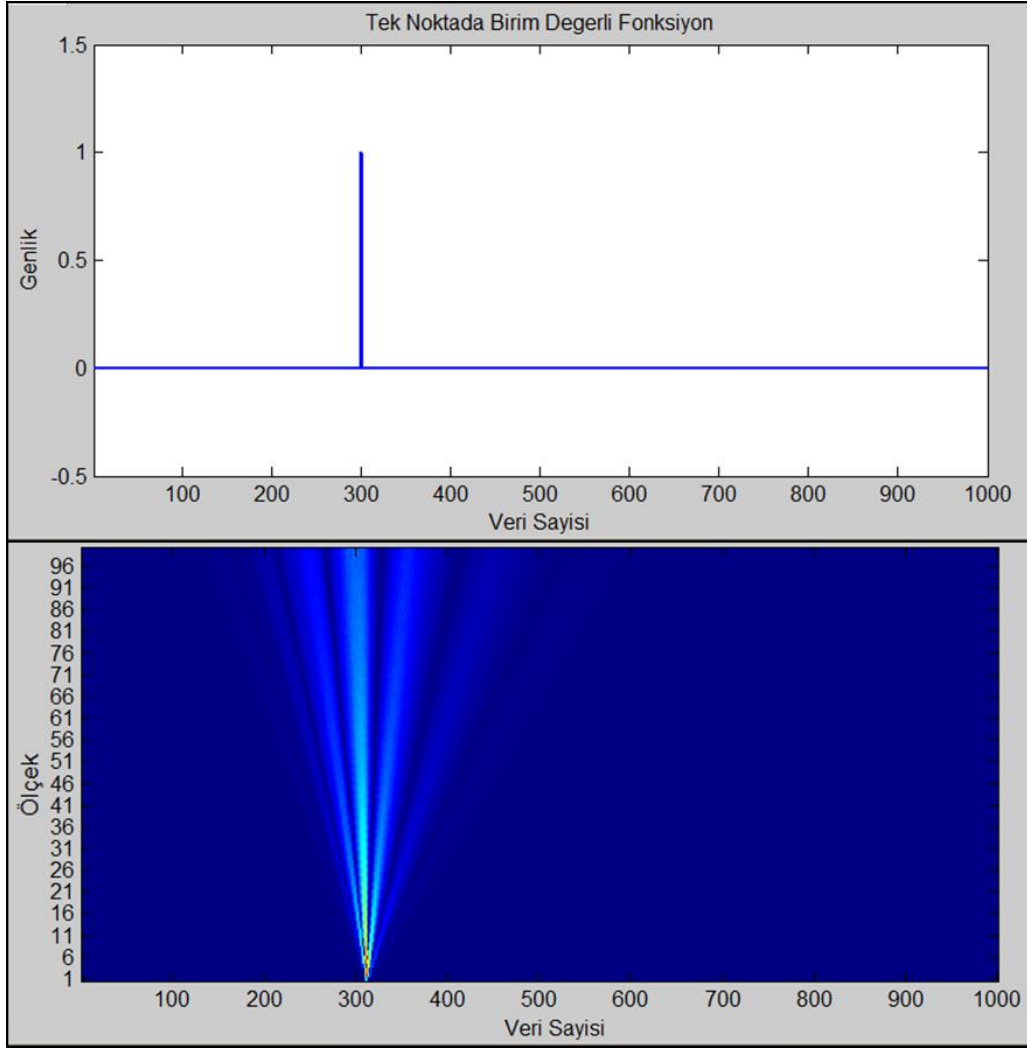
kadar bir değere kadar –hatta pratikte %40’a kadar- olabileceğini belirttiği gibi, dalgacık dönüşümü için de benzer bir limit söz konusudur.

Dalgacık dönüşümü, ilk ölçekten başlayıp dalgacığın ötelenerek sinyali taraması, sonra bir üst seviye ölçeğe geçip sinyali tekrar taraması şeklinde devam eder. Teori bölümünde açıklandığı gibi, farklı ölçeklerdeki dalgacıkların ötelenerek sinyali nasıl taradığı Şekil 3.13’te gösterilmiştir. Görüldüğü gibi, dalgacık fonksiyonunun kendisi, çok kısıtlı bir bölge dışında tamamen sıfırdır. Böylece dalgacık sinyal üzerinde ilerlerken, korelasyon yaptığı kısıtlı bölge dışında başka bir yeri incelemmez. Bu önemli özellik, dalgacıklara zamanda çözünürlüğü sağlayan özelliktir.



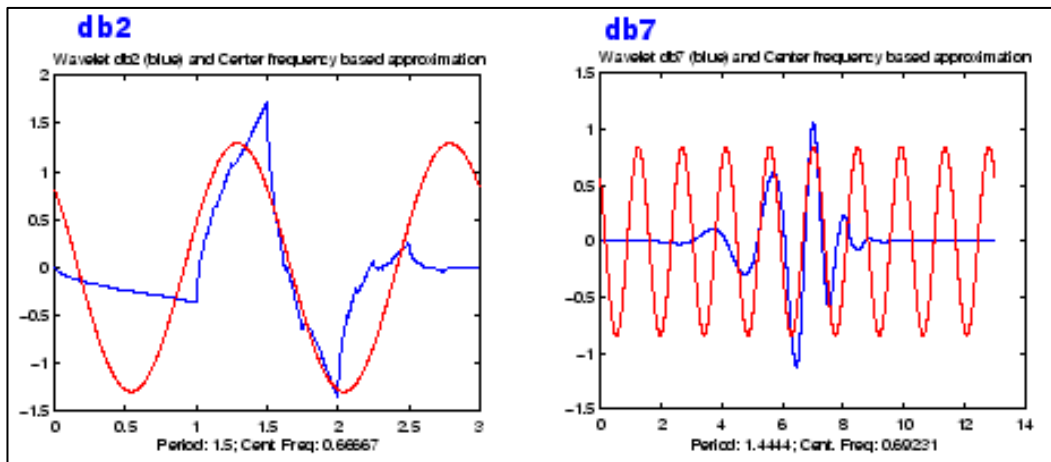
Şekil 3.13 : Dalgacığın sinyal üzerinde ilerlemesi.

Her bir ölçekte dönüşüm sonucu elde edilen katsayılar, ölçek büyüdükçe dalgacık fonksiyonunun desteğinin genişlemesine bağlı olarak, daha alt ölçeklere ait detayları da tekrar içerirler. Bu, şekil 3.14'te zaman ekseninin tek bir anında sinyal değeri 1, geri kalan bütün zamanlarda 0 değerine sahip bir fonksiyon ve onun dalgacık dönüşümü örneği ile gösterilmiştir. Şekil 3.14'ten sinyalin tek bir andaki bileşeninin, ölçek yükseldikçe diğer anlara da ne kadar müdahil olduğu görülebilmektedir. Bunun sebebi, önceki bölümlerde açıklandığı gibi, artan ölçekle birlikte dalgacık desteğinin genişlemesi ve ötelendiği anlardaki bileşene ek olarak bir önceki ve sonraki aralıkları da işleme katar hale gelmesidir. Ancak, anlık değişimin gerçekleştiği an, bir yoğunluk noktası gibi, zaman eksenindeki yerini çok net bir şekilde belli etmektedir. Dalgacık dönüşümünün zamandaki çözünürlüğünün ne kadar iyi olduğu buradan çok net görülebilmektedir.



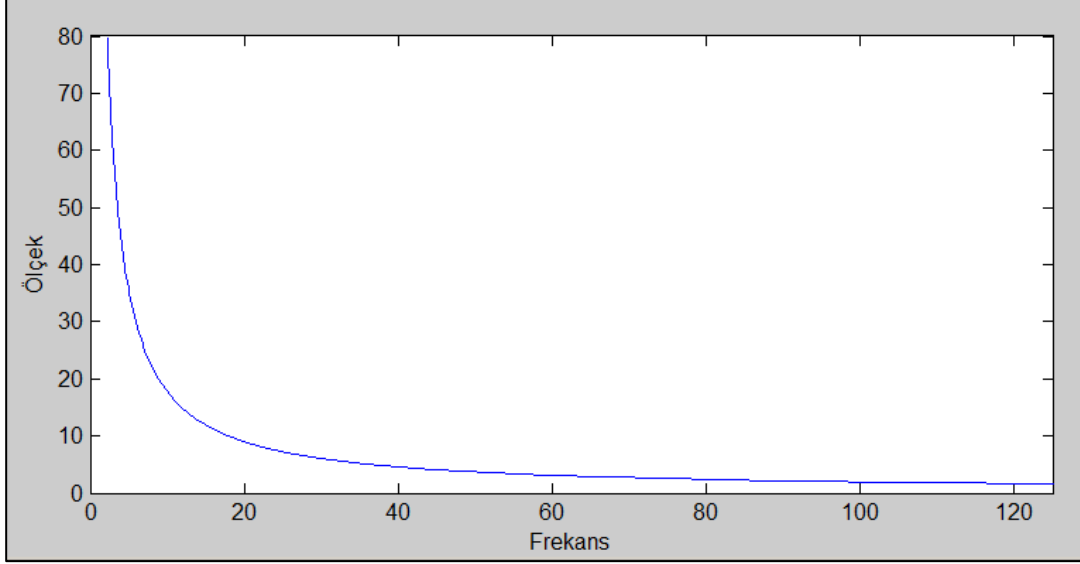
Şekil 3.14 : (a)Tek bir anda 1 değerine sahip bir sinyal. (b)Sinyalin dalgacık dönüşümü sonunda yoğunluk noktası.

Alışlagelmiş pratik, sinyalleri frekans cinsinden göstermek olduğu için, bu çıktıları frekans olarak da ifade etmenin yolları aranmıştır. Ölçekleri frekans cinsinden kesin frekanslar olarak ifade etmek maalesef mümkün değildir. Çünkü dalgacıklar, harmonikler gibi sürekli ve düzenli değildir. Frekans cinsinden ifade, ancak frekans ile ölçek arasında yaklaşık bir bağıntı kurularak yapılabilmektedir. Böyle bir bağıntı, kullanılan dalgacığın şekline en benzer harmoniğin frekansını orta frekans olarak tayin edip, değişen ölçeklere göre ayarlanan dalgacıklar için bu orta frekansları kullanarak yapılabilmektedir. Orta frekanslar ile kastedilen terim, dalgacık fonksiyonunun bir bant-sınırlı filtre gibi davranması özelliği ile analogi kurularak anlaşılabilir. Bir ölçek için tanımlı dalgacık fonksiyonu, o ölçeğe orantılı bir bant-sınırlı filtre ise, bahsedilen orta frekans, bu filtrenin sınırlı bandının ortasındaki frekanstır. Ancak, nasıl ki bir filtre tek bir frekansı değil çevresindeki bir kısım frekanslara sahip sinyalleri de geçirmektedir, aynı durum dalgacık fonksiyonu için de geçerlidir. Kısaca, ölçekten frekansa geçişte bahsedilen frekanslar tek bir frekans değil, o frekans ve civarındaki frekansları temsil eder. Bu yüzden bu yaklaşımla elde edilen frekanslara sahte-frekans (pseudo-frekans) denilir. Bu ifade, daha iyi anlaşılmasını sağlamak üzere aşağıdaki şekil ile açıklanmıştır. Şekil 3.15'te mavi ile gösterilen Daubechies 3 ve Daubechies 7 dalgacıklarının, etkili olduğu bölgelerdeki dalga şekline en uygun harmoniğin kırmızı ile çizilmiş harmonikler oldukları görülmektedir. Kırmızı ile belirtilen harmoniğin frekansı da, pseudo frekans olarak adlandırılmaktadır. Kırmızı ile mavi çizgiler yani dalgacık ile harmonikler tam olarak birbiri üzerinden gitmediği için de, pseudo frekanslar, bir kısım yan frekansları da içeren temsillerdir.



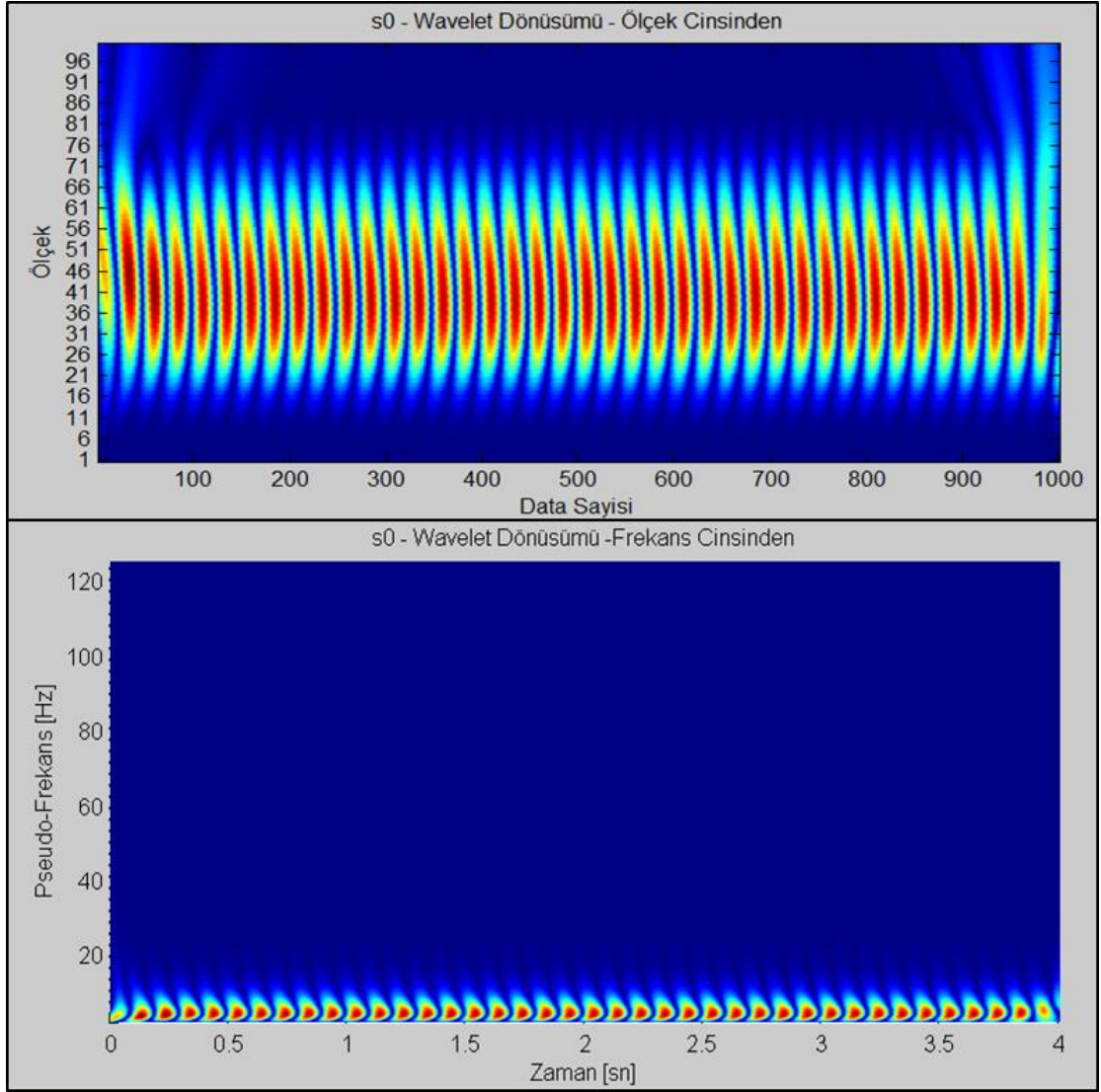
Şekil 3.15 : Pseudo frekans tanımlanması.

Ölçek ile frekansın ters orantılı olduğu, yani büyük ölçeklerin düşük frekansları, küçük ölçeklerin ise yüksek frekansları temsil ettiği önceki bölümde belirtilmişti. Örnek dönüşümümüzdeki ölçeklerin, sinyalin sahte-frekans içeriği ile ilişkisi aşağıda şekil 3.16’da verilmiştir.



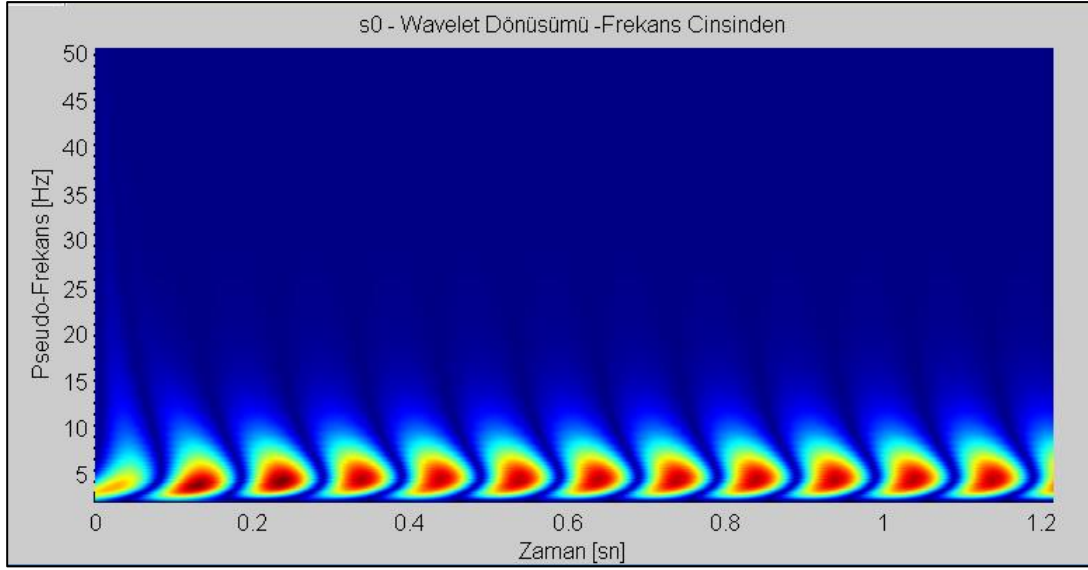
Şekil 3.16 : Frekans ve ölçek ilişkisi.

Şekil 3.16’den da görüldüğü gibi, ölçek ve frekans arasında lineer bir ilişki yoktur. Bu ise, ölçek cinsinden ifade edilen dalgacık dönüşümü grafiklerinde görülen katsayıların *görsel ifadelerinin (resmin)*, frekansa geçildiğinde birebir aynı kalmayacağını, seçilen maksimum ölçeğe ve sinyalin içindeki maksimum frekansa bağlı olarak görselin değişeceğini belirtir. Ancak, bu, katsayıların *değerlerinin* değiştiği anlamına gelmez. Sadece birbirleriyle ilişkilendirilen frekans ve ölçeğin kapsadıkları bölgelerin farklı olması sebebiyle görselin değiştiğini ifade eder. Buradan çıkarılacak sonuç, dalgacık için tanımlanan frekans değerinin ancak pseudo-frekans olarak tanımlanabildiği ve katsayıların 3 boyutlu grafiklerinin, ölçeğin veya frekansın fonksiyonu olarak çizdirildiğinde görseller arasında fark görülmesinin beklenen bir durum olduğudur. Bu bilgiler ışığında yukarıda ölçekler cinsinden çizdirilen grafiklerin, pseudo-frekanslar cinsinden grafikleri oluşturulmuş ve aşağıda şekil 3.17’de ölçek ile karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.



Şekil 3.17 : s_0 sinyalinin dalgacık dönüşümünün (a)Ölçek gösterimi. (b)Pseudo-frekans gösterimi.

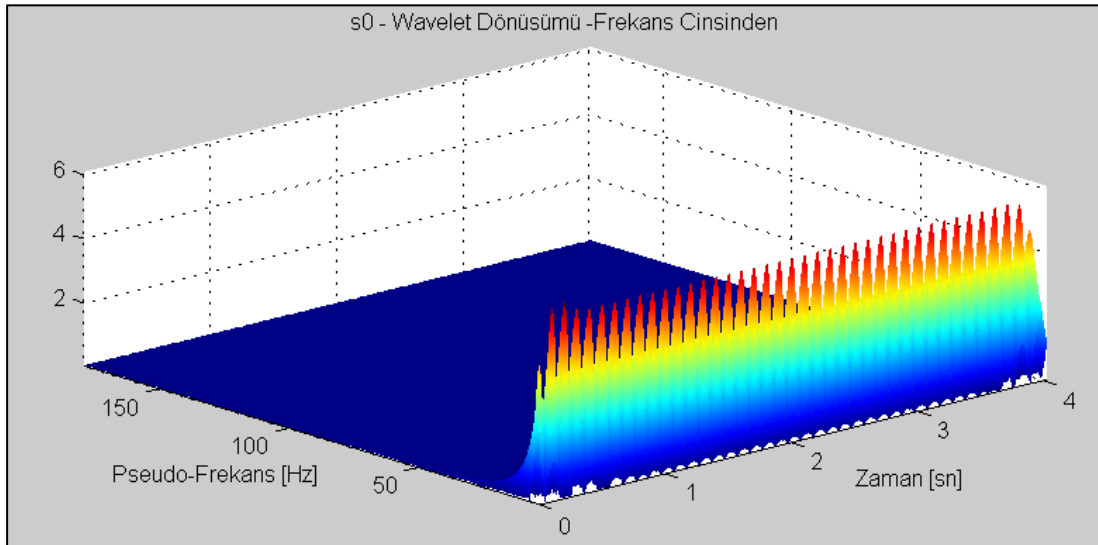
Şekil 3.17, Şekil 3.18’de daha yakından incelenmiştir.



Şekil 3.18 : Dönüşümün yakından pseudo-frekans görünümü.

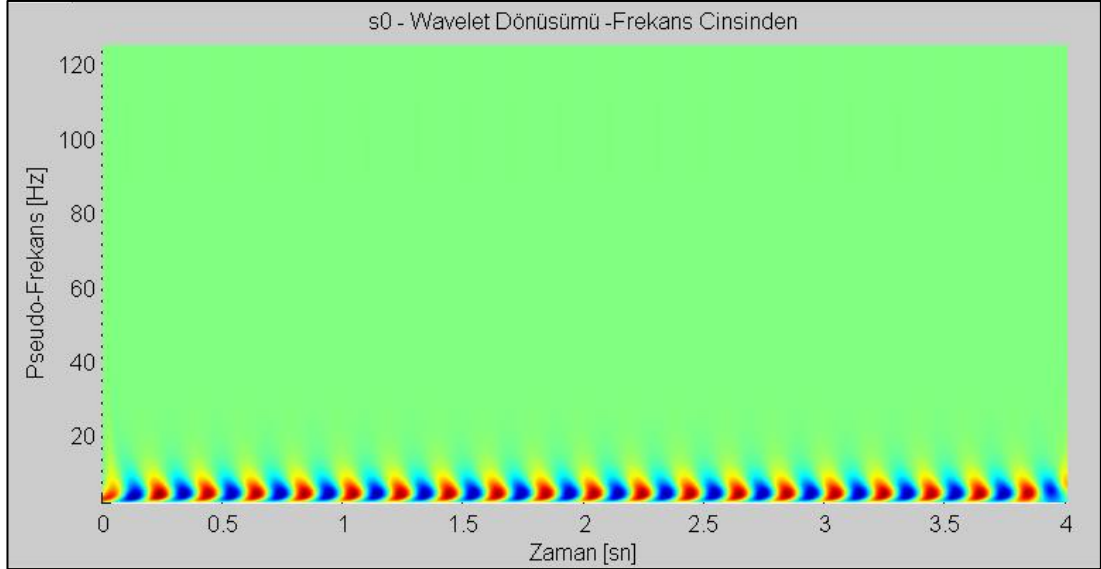
Bu şekil, 5 Hz civarında yoğunlaşmıştır ve sinyalin sürekliliğini ve periyodikliğini zaman ekseninde açık bir şekilde vurgulamaktadır. Ancak, az önce bahsedilen pseudo-frekans özelliğinden dolayı sadece tek bir frekansta değil, çevre frekanslarda da katsayılar oluşmuş gözükmektedir.

Şekil 3.18, aynı zamanda sinüs sinyalinin zaman eksenine tepeden bakılmış hali gibidir. Ayrıca, 1 saniyede 10 adet tepecik şeklinde görülmektedir. Aşağıda şekil 3.19’da bu şeklin farklı bir açıdan görünümü verilmiştir.

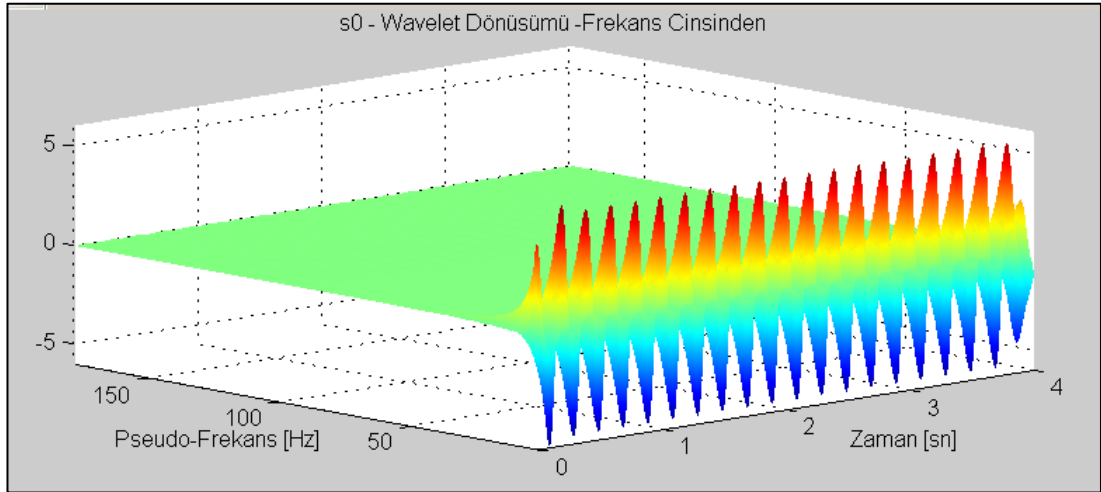


Şekil 3.19 : Dönüşümün farklı bir açıdan görünümü.

Şekil 3.19, sinyalin sadece pozitif eksende katsayıları olduğunu göstermektedir. Bu durum, sinyalin dalgacık dönüşümü alındıktan sonra mutlak değerleri görsel hale getirildiği içindir. Eğer ki mutlak değer alınmadan sonuçlar görsel hale getirilirse, elde edilecek grafikler aşağıda gösterilen şekil 3.20 ve 3.21’deki gibi olur.



Şekil 3.20 : Dönüşümün mutlak değerler ile gösterimi.



Şekil 3.21 : Dönüşümün mutlak değerler ile ifadesinin farklı bir açıdan görünümü.

Bu haliyle harmonik bir sinyalin ne zaman tepe ve dip yaptığı ve gerçekten frekansı 5 Hz olan bir harmonik sinyali temsil ettiği açıkça görülebilmektedir. Mutlak değer almak ise, daha anlamlı ve değerli bilgi edinilmesini sağlamaktadır. Çünkü mutlak değer alınması, katsayıların maksimum değerler aldıkları bölgelerin -sinyalin tepe veya dip olmalarından bağımsız olarak- hangi anda olduğunu tespit etmeye

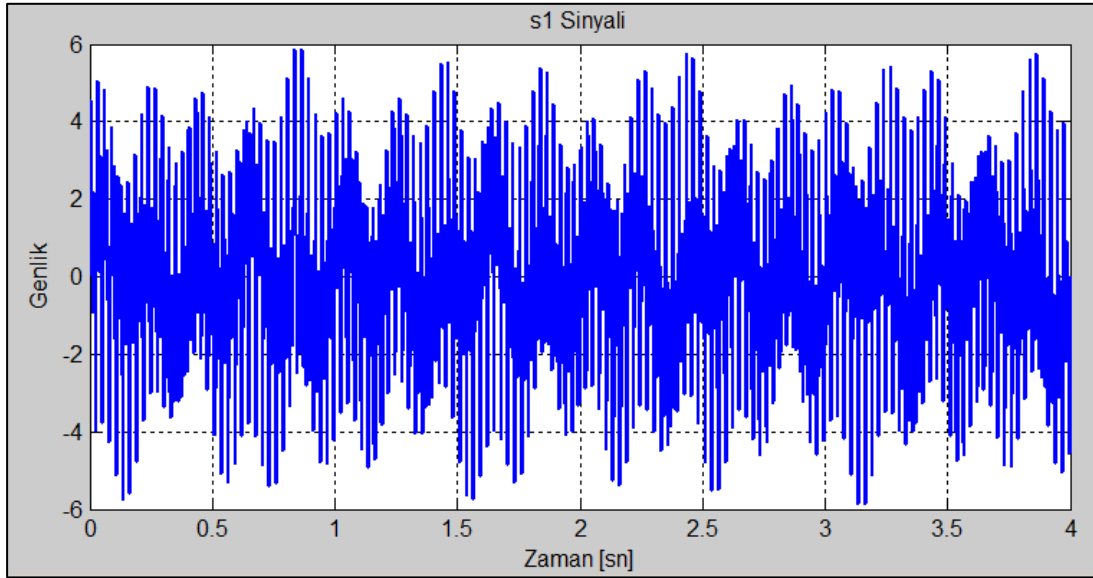
yaramaktadır. Üstelik, sinyaldeki en büyük mutlak genliklerin, sinyalin tamamı ile karşılaştırmalı olarak görülmesini sağlamaktadır.

Buraya kadar tek frekans bileşenli, periyodik ve durağan s_0 sinyali incelenerek dalgacık dönüşümünde ölçek seçimi, dönüşümün işleyişi ve Fourier dönüşümünden farkları ve benzerlikleri gösterildi. Yine periyodik, aynı periyot ve örnekleme sayısına sahip fakat bu sefer içinde farklı frekanslar barındıran bir başka örnek sinyal s_1 üretilip incelenmiştir.

Frekansları $f_1=5$ Hz, $f_2=35$ Hz ve $f_3=72$ Hz olmak üzere periyodik sinyal aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

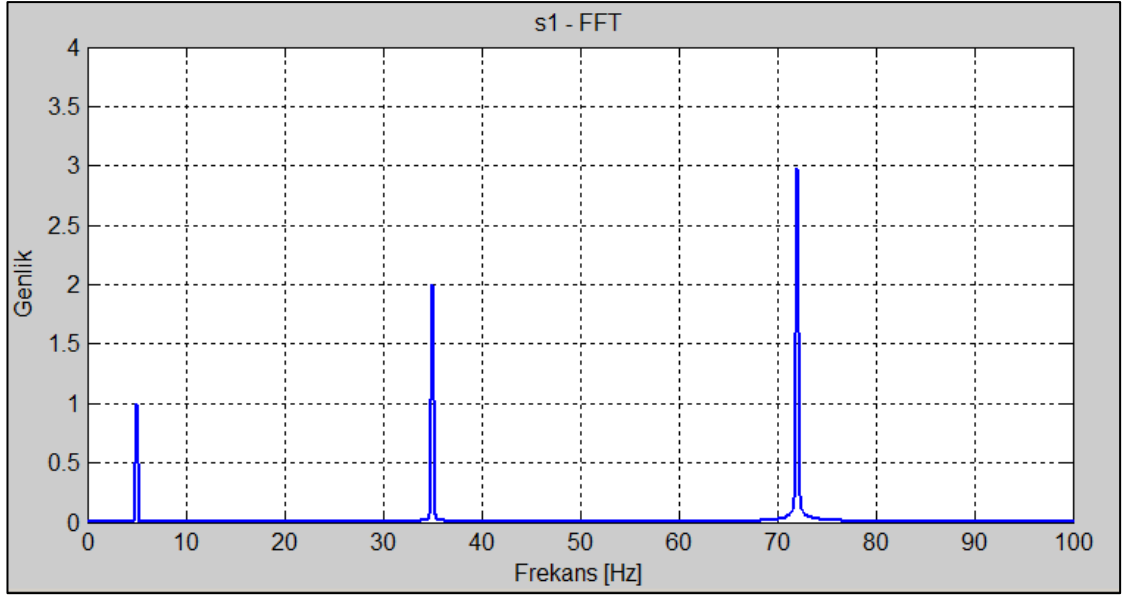
$$s_1 = 1 \sin(2\pi f_1 t) + 2 \sin(2\pi f_2 t) + 3 \sin(2\pi f_3 t) \quad (3.2)$$

Sinyalin zaman ekseninde görünümü şekil 3.22’de, Fourier dönüşümü ise şekil 3.23’te verilmiştir.



Şekil 3.22 : Farklı harmonikler içeren örnek sinyal s_1 .

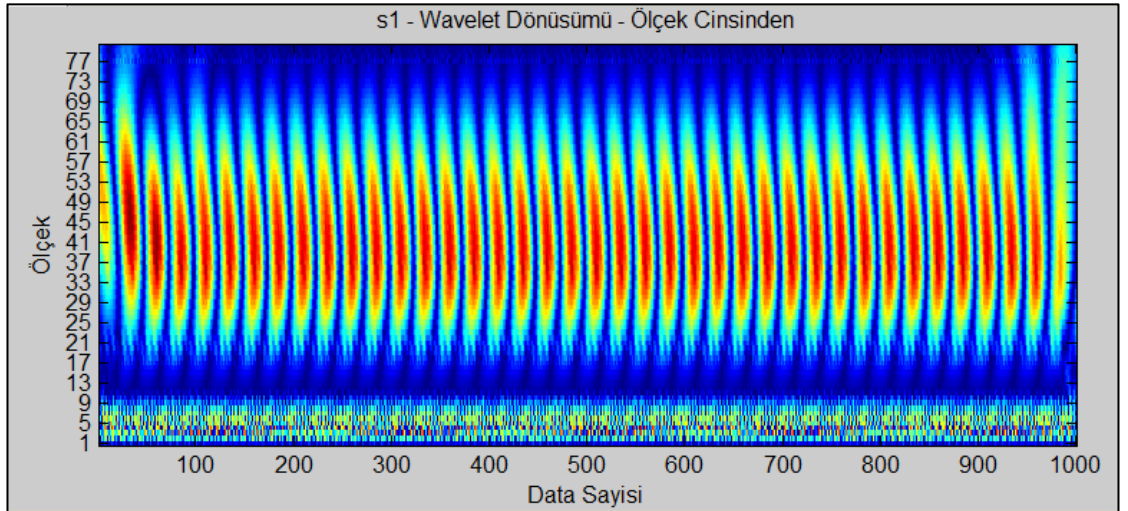
Bu sinyalin Fourier dönüşümü ise şekil 3.23’teki gibidir.



Şekil 3.23 : Örnek sinyal s_1 'in Fourier dönüşümü.

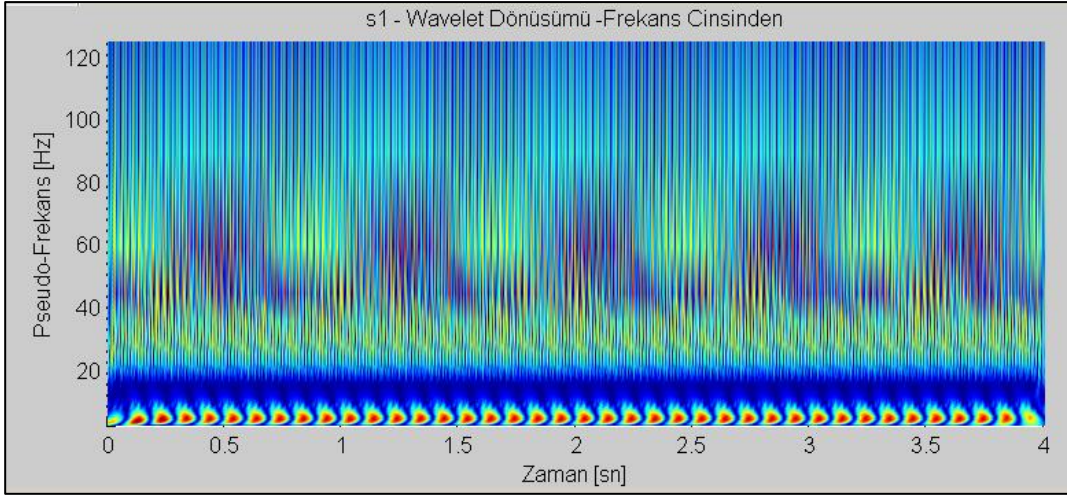
Şekil 3.23'ten görüldüğü üzere, söz konusu periyodik s_1 sinyali de aynı tek bir frekans içeren s_0 sinyali gibi Fourier dönüşümü kullanılarak, içerdiği frekanslar ve genlikleri bakımından kusursuz bir şekilde ayrıştırılabilmektedir. Bu da bir önceki tezi, yani Fourier dönüşümünün durağan/periyodik sinyaller için oldukça etkili bir yöntem olduğunu, bir kez daha doğrulamaktadır.

s_1 sinyali yine Daubechies 4 dalgacı ile de dalgacık dönüşümüne sokulmuştur ve ölçek cinsinden görünümü, şekil 3.24'te verilmiştir.



Şekil 3.24 : s_1 'in dalgacık dönüşümü.

Bu sinyalin pseudo-frekanslar cinsinden görünümü ise şekil 3.25'teki gibidir.



Şekil 3.25 : s_1 'in dalgacık dönüşümün pseudo-frekans gösterimi.

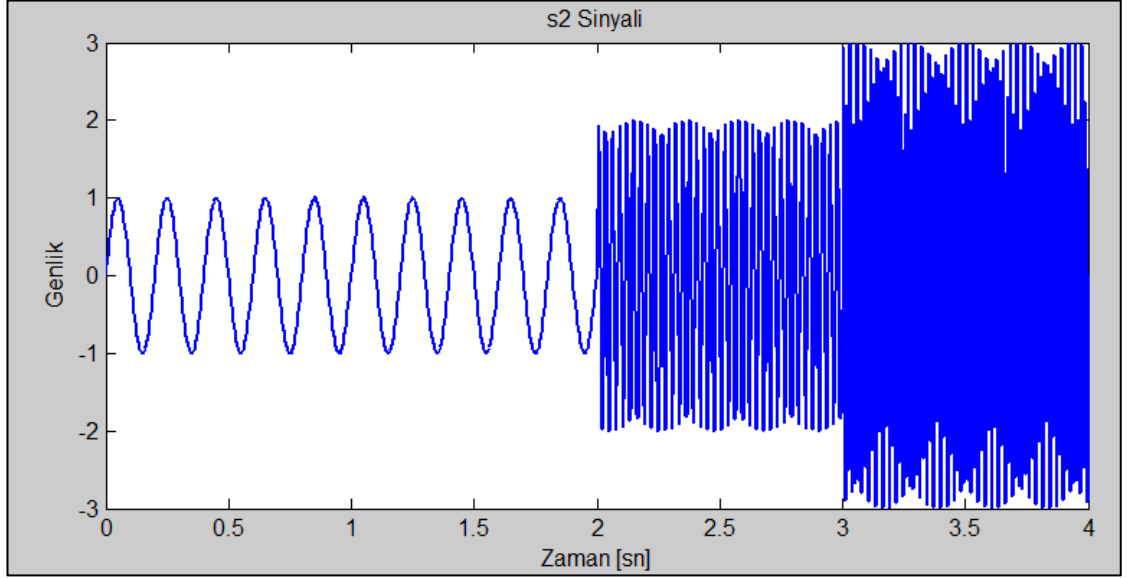
Sinyalde bulunan 3 frekans da ölçek ve frekans dönüşümünden kaynaklanan şekil değişikliğinden dolayı şekil 3.24 ve 3.25'te birbirlerinden oldukça farklı görünmektedir. Şekil 3.24'te oldukça dar bir şekilde görülen düşük ölçekler, pseudo-frekanslara geçildiğinde daha geniş bir bölgede görülmektedir. Buna karşılık, düşük frekansların frekans çözünürlüğü iyileşmiştir. Tekrar vurgulanması gereken nokta ise, pseudo-frekansların Fourier dönüşümündeki frekanslar ile aynı olmadığı, yukarıdaki şekilde $f_3=72$ Hz frekansının yaklaşık 60 Hz üzerinde ifade edilebildiğidir. Ancak şekil 3.25'te sunulan sonuç, zaman eksenini boyunca dikkatlice incelenirse, harmonik sinyallerin frekansı olan 5, 35 ve 72 Hz bilgilerine ulaşmak mümkündür.

Bu örnekten yapılan çıkarım ise, bir sinyal dalgacık dönüşümü ile incelenirken, ilgilenilen frekansa göre gerek ölçekler ile gerek pseudo-frekanslar ile sinyalin gözlenmesinin faydalı olacaktır. Dalgacıklar, sinyalleri esas olarak ölçekler ile çalışarak inceleyen sistemlerdir. Bu sebeple pseudo-frekans temsili, bir yol gösterici olarak dikkate alınmalıdır.

3.2 Durağan Olmayan Sinyaller İçin Karşılaştırılması

Fourier ve Dalgacık dönüşümleri arasındaki fark, farklı anlarda farklı frekans içeriğine sahip örnek bir sinyal için de incelenmiştir. Bu örnek için üretilen sinyal, yine s_1 'de olduğu gibi 4 saniyelik, örnekleme frekansı bir önceki örnekteki gibi 250 Hz olan ve frekans içeriği $f_1=5$ Hz, $f_2=35$ Hz ve $f_3=72$ Hz olan fakat bu sefer bu

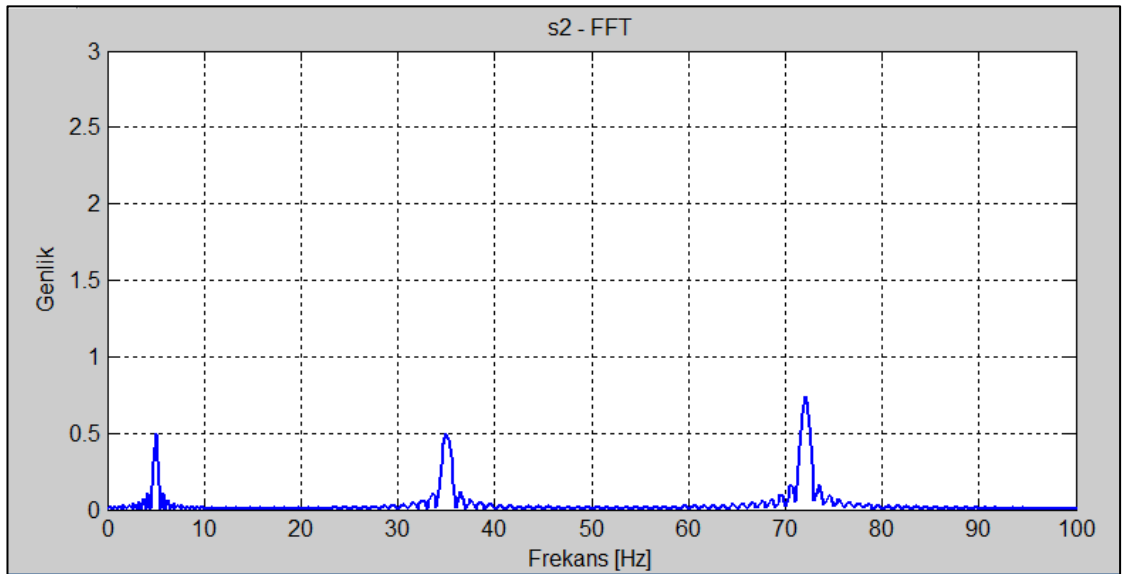
frekansların farklı anlarda sinyalde bulunduğu yani periyodik (durağan) olmayan s_2 sinyalidir. Bu sinyalin zaman ekseninde görünümü şekil 3.26’da verilmiştir.



Şekil 3.26 : Durağan olmayan örnek sinyal s_2 .

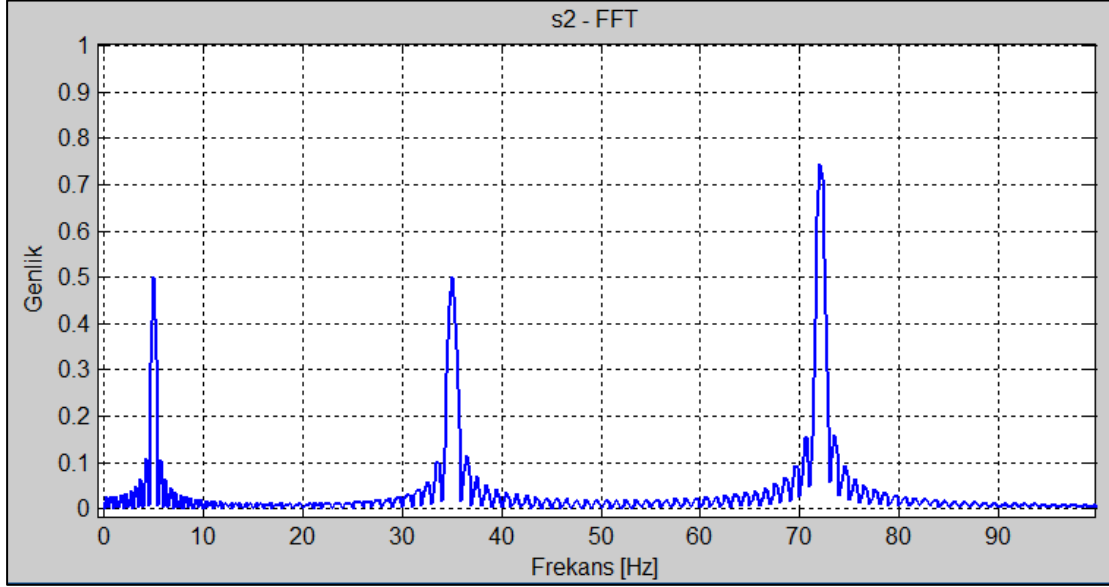
Sinyalin ilk 2 saniyesi 5 Hz, sonraki 1 saniyesi 35 Hz ve son 1 saniyesi de 72 Hz frekanslarına sahip sinyallerden oluşmakta, ayrıca her frekans değişiminde genlikler de değişmektedir.

Sinyale Fourier dönüşümü uygulanarak, hakkında edinilen bilgiler şekil 3.27 üzerinden incelenmiştir.



Şekil 3.27 : s_2 'nin Fourier dönüşümü.

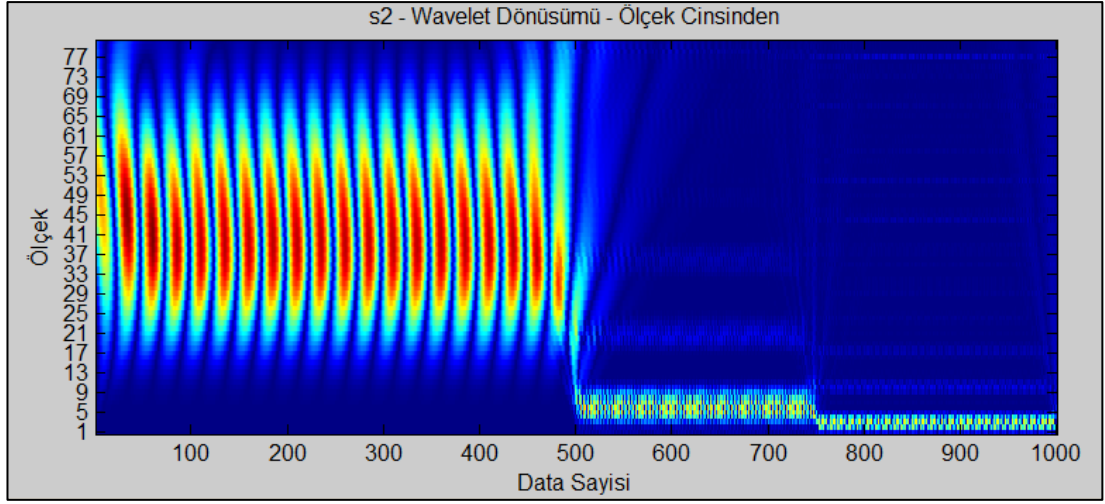
Şekil 3.27’de s_2 sinyalinin Fourier dönüşümü görülmektedir. Ayrıntıların daha iyi görülmesi için yakından görünüme şekil 3.28’de geçilmiştir.



Şekil 3.28 : s_2 ’nin Fourier dönüşümünün yakından görünümü.

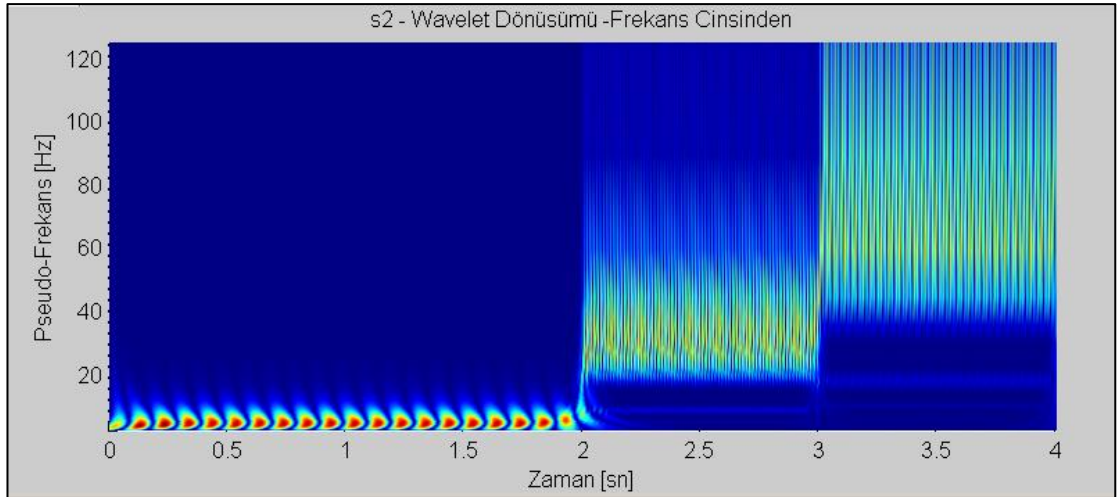
Şekil 3.28’de göze çarpan özellik, gerçekte varolmayan bir çok farklı frekans bileşeninin sinyalde varmış gibi görünmesidir. Bu, Fourier dönüşümünün sonsuza kadar tanımlı harmonik bileşenler cinsinden ifade edilmesinin, yani Fourier dönüşümünde kullanılan taban fonksiyonların desteklerinin sonsuz olması ile ilgilidir. Başka bir deyişle, Fourier dönüşümü, sinyali durağan, sinyalin periyodunu da ölçümün periyodu olarak kabul etmektedir. Fourier dönüşümü, farklı anlardaki farklı frekans bileşenlerini her an varmış gibi göstermekte ve gerçekte varolmayan frekans bileşenlerini de spektruma yansıtmaktadır. Dikkat çeken bir diğer nokta da, frekans bileşenlerinin genliklerinin düştüğüdür. 3 ana frekansta toplanması gereken enerji, başka frekanslara da sızıntı sebebiyle dağıldığı için ve de ilgili sinyaller ölçüm süresince devam etmediği için, bu 3 frekansta görünen genlikler düşmüştür. Buradan Fourier dönüşümünün durağan olmayan bir sinyal için iyi bir inceleme yöntemi olmadığı görülebilir. Bu dönüşüm sonunda, sinyal ile ilgili zamana dair herhangi bir bilgi de edinilememiştir. Söz konusu 3 frekans bileşeni ve hesaplama kaynaklı bileşenler sinyalin tamamı boyunca varmış gibi görünmektedir.

Aynı sinyale bu defa da dalgacık dönüşümü uygulanmıştır. En düşük frekanslı sinyali, s_1 sinyali ile aynı olduğu için dalgacık ve ölçek seçimi yine Daubechies 4 ve 80 alınmıştır ve şekil 3.29’da gösterilmiştir.



Şekil 3.29 : s_2 'nin dalgacık dönüşümü.

Ölçek cinsinden bakıldığında, 3 frekansın da aynı anda varolduğu s_1 sinyalinden daha temiz ve ayırık bir görüntü elde edilmiştir. Sinyalin hangi anında frekansta değişimler olduğu ve söz konusu değişimlerin hangi ölçeklerde (veya düşük frekanslardan daha yüksek frekanslara geçiş şeklinde) olduğu, dalgacık dönüşümüne bakarak söylenebilmektedir. Bu sinyalin pseudo-frekanslar cinsinden de dalgacık dönüşümü incelenmiştir ve sonuç şekil 3.30'da verilmiştir.



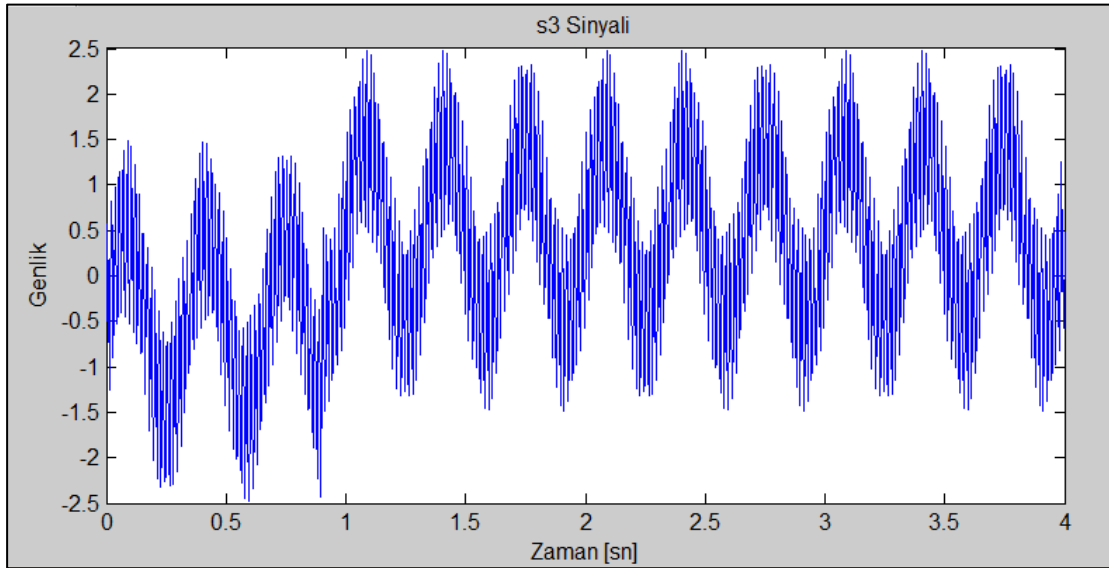
Şekil 3.30 : s_2 'nin dalgacık dönüşümünün pseudo-frekans gösterimi.

Sinyalin dalgacık dönüşümü, gerçekten de sinyalde varolduğu bilinen 3 frekansın olduğu civarlarda maksimum tepelere ulaşmakta, ayrıca bu frekansların farklı zaman aralıklarında ayrı ayrı bulunduğunu, her farklı aralıktaki bileşenin de periyodik olduğunu açıkça göstermektedir. Yakınlaşarak bakıldığında, başlangıçtan tam 2. saniyeye kadar 5 Hz'lük bir sinyal, tam 2 ve 3. saniyeler arası 35 Hz civarında bir

sinyal ve tam 3. saniyede başlayıp 4. saniyeye kadar giden 70 Hz civarında bir sinyal görülmektedir. Sinyal değişimlerinin yaşandığı zamanlarda katsayıların en büyük değerleri aldığı da dikkat çekici bir gözlemdir.

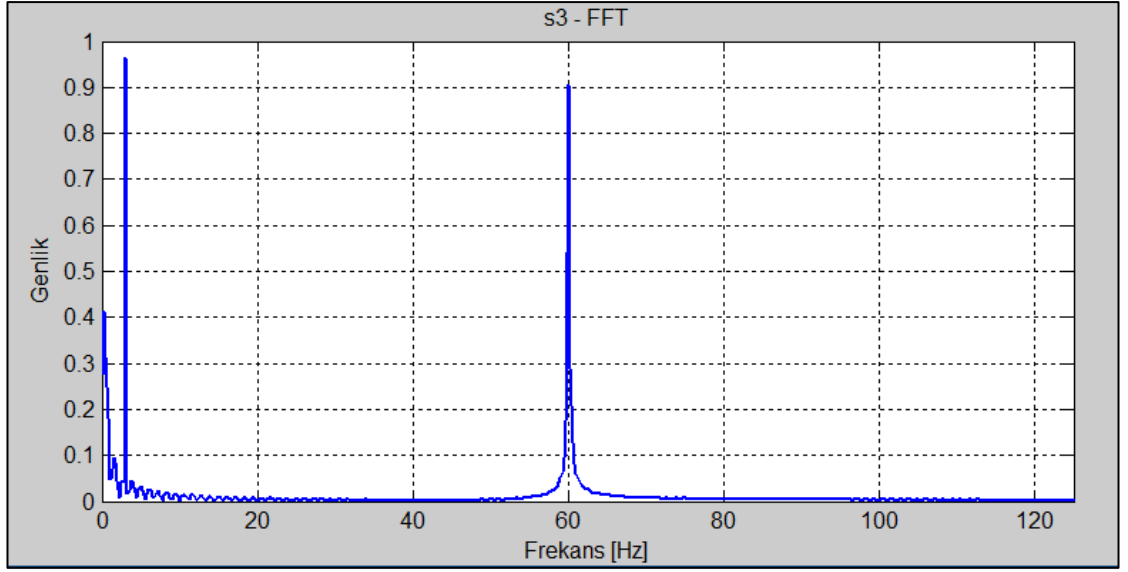
Buradan, dalgacık dönüşümünün, zamana göre değişen sinyallerde, hangi anlarda değişimin gerçekleştiğini oldukça kesin bir şekilde gösterebildiği, hem ölçek hem de pseudo-frekanslara bakarak varolan frekans içeriğinin yaklaşık olarak değerlerinin tayinini yapılabildiğini ve sinyalin değişmeden kaldığı bölgelerde periyodik olup olmadığını gösterebildiği anlaşılabilmektedir.

Değişik sinyaller ile çalışılarak dalgacık dönüşümünün farklı yönlerini ortaya çıkarmak üzere incelemeye devam edilmiştir. Hem düşük hem yüksek bileşenler içeren ve bir de süreksizlik barındıran örnek bir sinyal üretilmiştir. Sinyalin zaman eksenindeki grafiği şekil 3.31 ile verilmiştir.



Şekil 3.31 : Örnek sinyal s_3 .

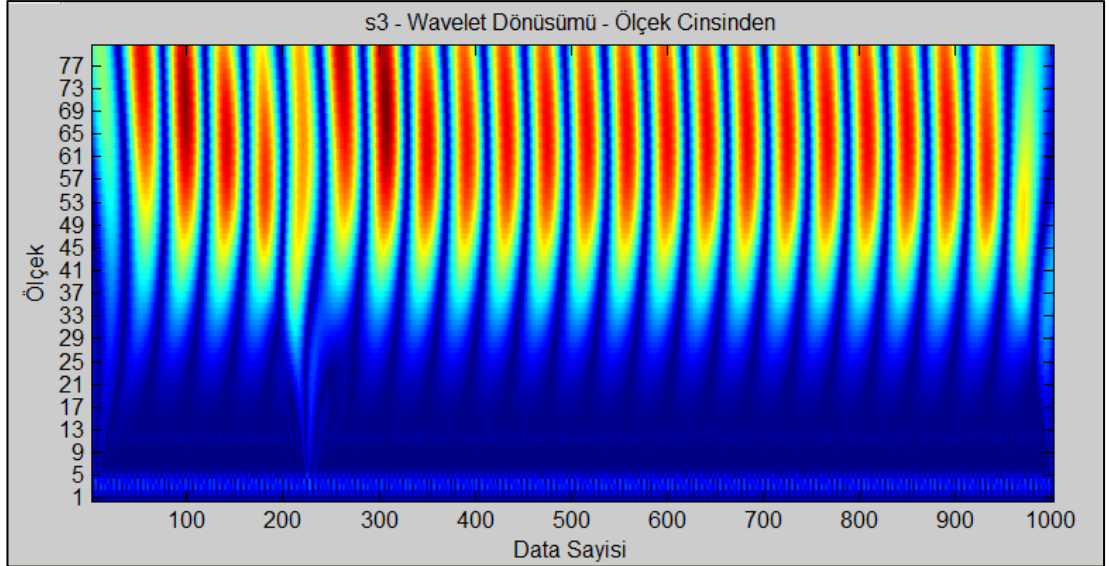
Sinyal 3 Hz ve 60 Hz bileşenlerini içermekte ve 1 saniye civarlarında bir süreksizlik içermektedir. Bu sinyal hakkında daha fazla bilgi Fourier dönüşümü ile aranmıştır. s_3 sinyalinin Fourier dönüşümü sonucunda elde edilen spektrum aşağıdaki şekil 3.32’de verilmiştir.



Şekil 3.32 : s_3 'ün Fourier dönüşümü.

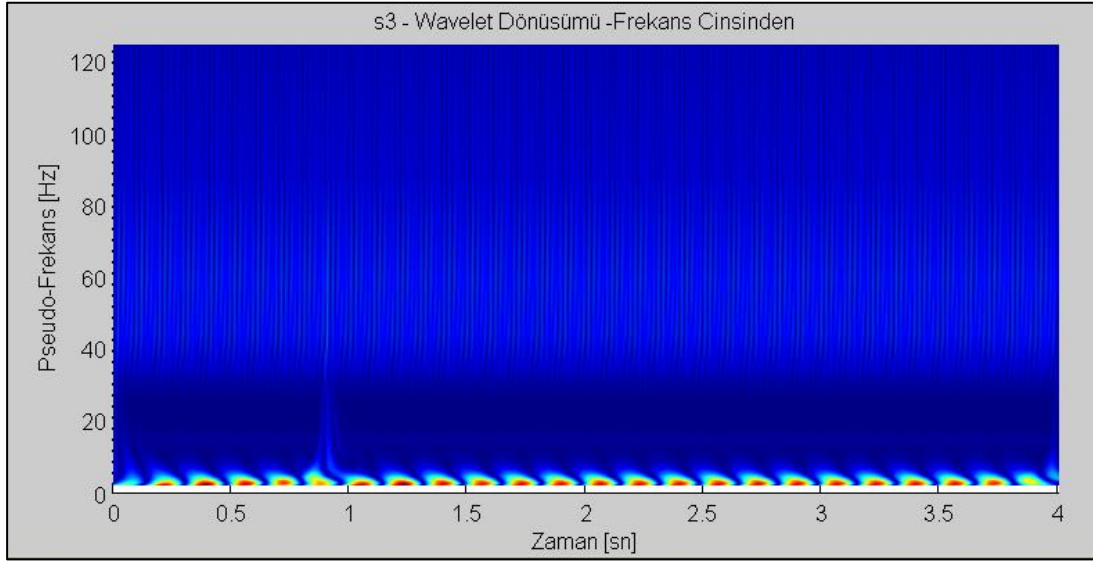
Şekilde, anlık süreksizlikten dolayı 3 ve 60 Hz dışında bir çok düşük genlikli frekans bileşenleri de göze çarpmaktadır. Ayrıca sinyalin ortalamasının sıfırdan farklı olmasından dolayı 0 Hz civarında bir sabit (DC) bileşen oluşturmuştur. Ancak sinyaldeki değişimler hakkında bir bilgi edinilememiştir.

Aynı sinyalin Daubechies 4 dalgacığı ile dönüşümü de aşağıdaki şekil 3.33'te verilmiştir.



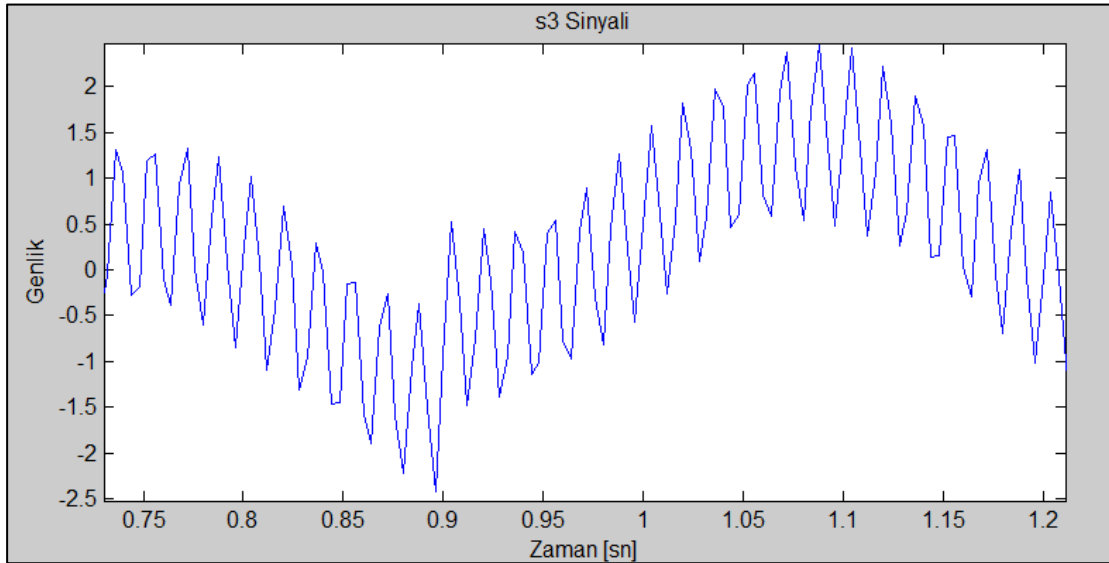
Şekil 3.33 : s_3 'ün dalgacık dönüşümü.

Dalgacık dönüşümü sinyalin düşük ve yüksek frekanslı içeriklerini ayırmış, periyodikliği vurgulamış ve en önemlisi, sinyaldeki anlık değişimi çok keskin bir şekilde yakalamıştır. Aynı grafiğin pseudo-frekans gösterimi şekil 3.34’te verilmiştir.



Şekil 3.34 : s_3 ’ün dalgacık dönüşümünün pseudo-frekans gösterimi.

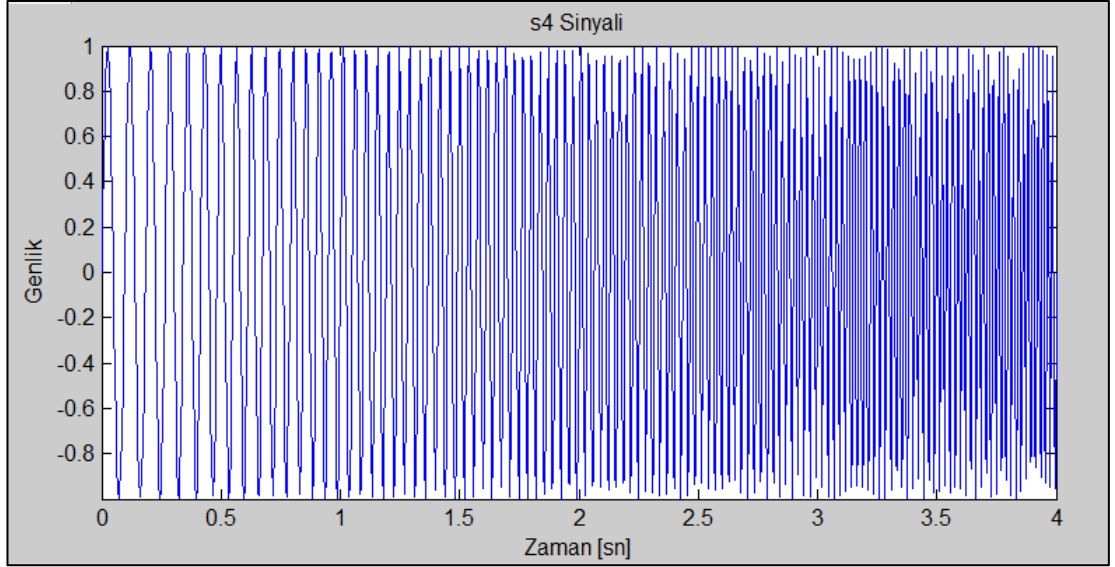
Şekil 3.31’de verilen sinyalin görüntüsünde bile değişimin olduğu an kolayca belirlenilememekte iken, dalgacık dönüşümü değişimin olduğu zamanı açık bir şekilde 0.9 saniye olarak gösterebilmiştir. Gerçekten de sinyalin zaman eksenindeki görüntüsüne dönülüp o bölgeye yaklaşılsa, şekil 3.35’teki gibi değişimin olduğu anın tam olarak 0.9. saniye olduğu görülebilir.



Şekil 3.35 : s_3 sinyalinin yakından görünümü.

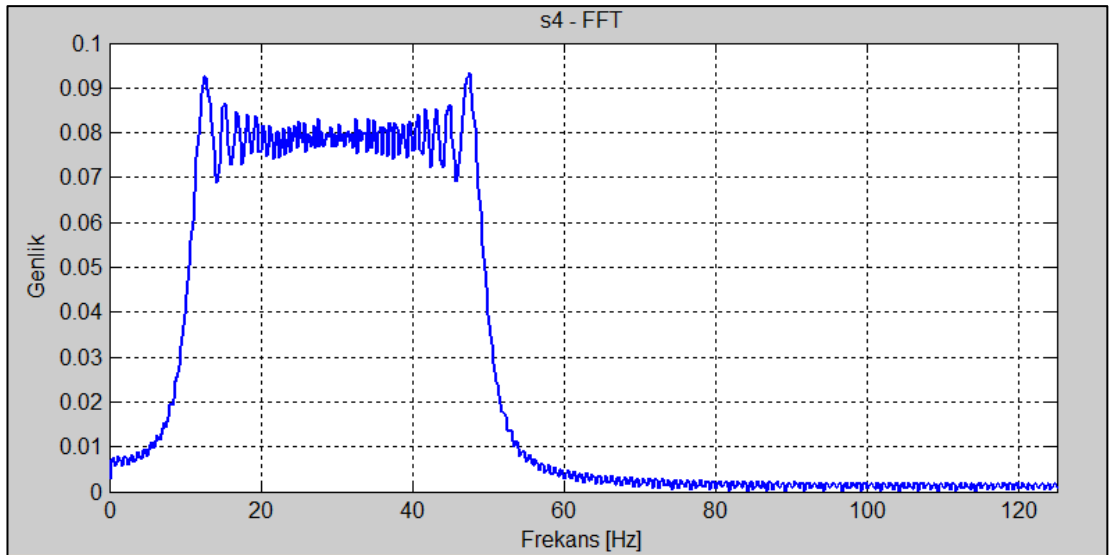
Sinyaldeki zor görülebilecek bir ayrıntıyı çok iyi bir şekilde yakalamış olması dalgacık dönüşümünün üstün yönlerinden biridir.

İncelemeye devam etmek üzere, zamanla frekansı artan türde bir sinyal de üretilip incelenmiştir. Üretilen sinyal s_4 şekil 3.36’da gösterilmiştir.



Şekil 3.36 : Örnek sinyal s_4 .

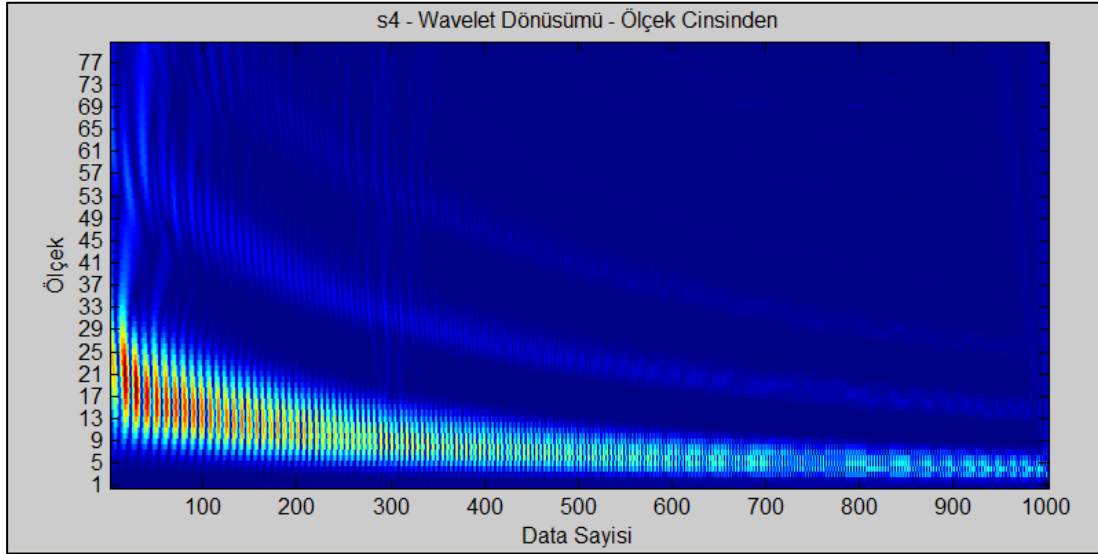
s_4 sinyali, 10 Hz’den başlayıp zamanla frekansı 50 Hz’e kadar artan harmonik bir sinyaldir. Bu sinyalin Fourier dönüşümü şekil 3.37 ile verilmiştir.



Şekil 3.37 : Örnek sinyal s_4 ’ün Fourier dönüşümü.

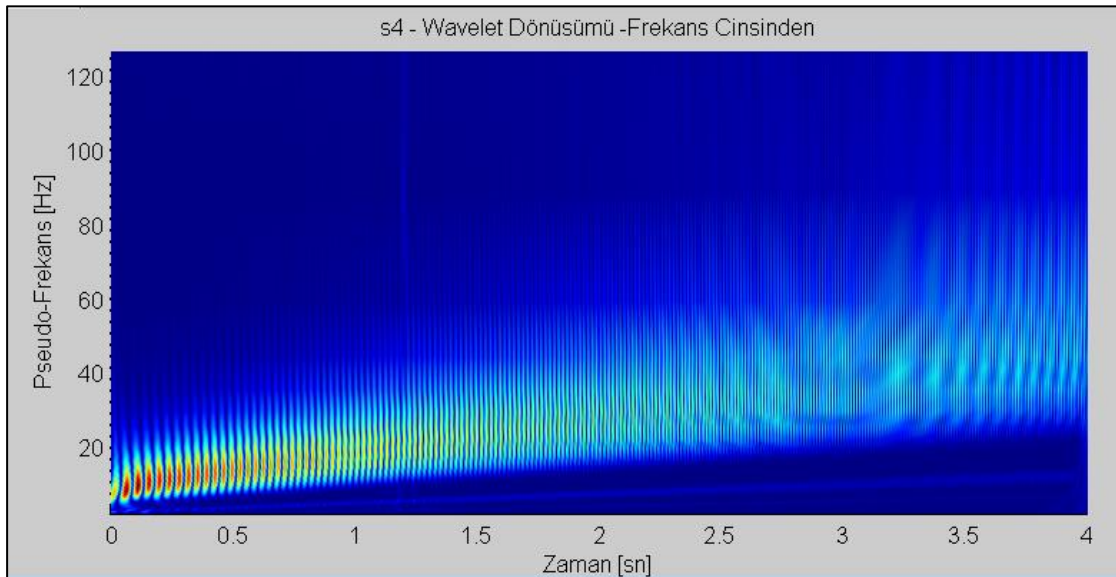
s_4 sinyalinin Fourier dönüşümü, başlangıç ve bitiş frekanslarını gereğinden fazla bir şekilde vurgulamış olmakla beraber, tüm spektruma yayılan ve gerçekten

varolmayan frekanslar oluşturmıştır. Bu durum daha önceki örneklerdeki gibi belli frekanslara ait enerjinin, sinyalde olmayan frekanslara yayılmasından dolayı gerçekleşmiştir. Sinyalin dalgacık dönüşümü de şekil 3.38’de gösterilmiştir.



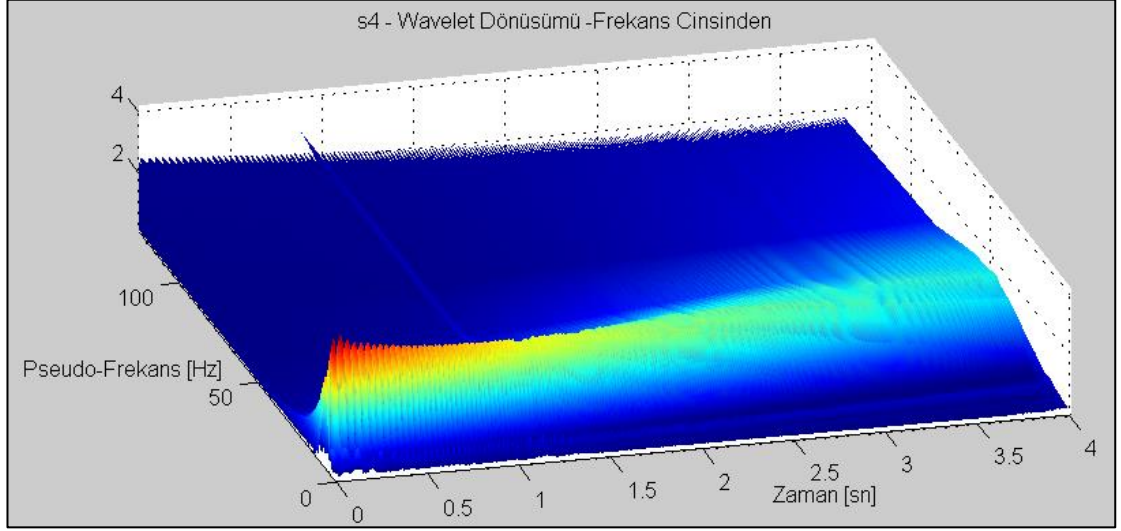
Şekil 3.38 : s_4 ’ün dalgacık dönüşümü.

s_4 ’ün dalgacık dönüşümü sinyaldeki frekansların zamanla arttığını ortaya koymaktadır. Ayrıca sinyalde zaman ekseninde bir anda ufak bir değişim olduğunu da göstermektedir. Değişimi ve frekans içeriklerini daha iyi anlamak için pseudo-frekans cinsinden gösterimine geçilmiş ve şekil 3.39’da verilmiştir.



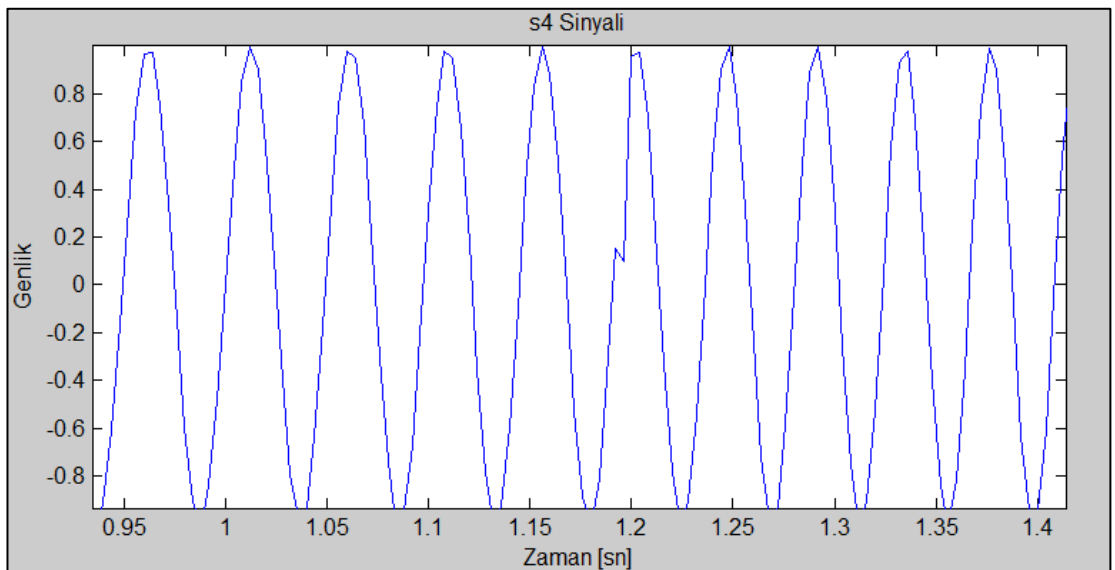
Şekil 3.39 : s_4 ’ün dalgacık dönüşümünün pseudo-frekans gösterimi.

Sinyalin ne zaman eksenindeki görünümüyle ne de Fourier dönüşümüyle görülemeyen, ancak dalgacık dönüşümü sonrasında farkedilebilen ve şekil 3.40'ta gösterildiği gibi 1.2'inci saniyede gerçekleşen bir değişim mevcuttur.



Şekil 3.40 : Dönüşümün farklı bir açıdan görünümü.

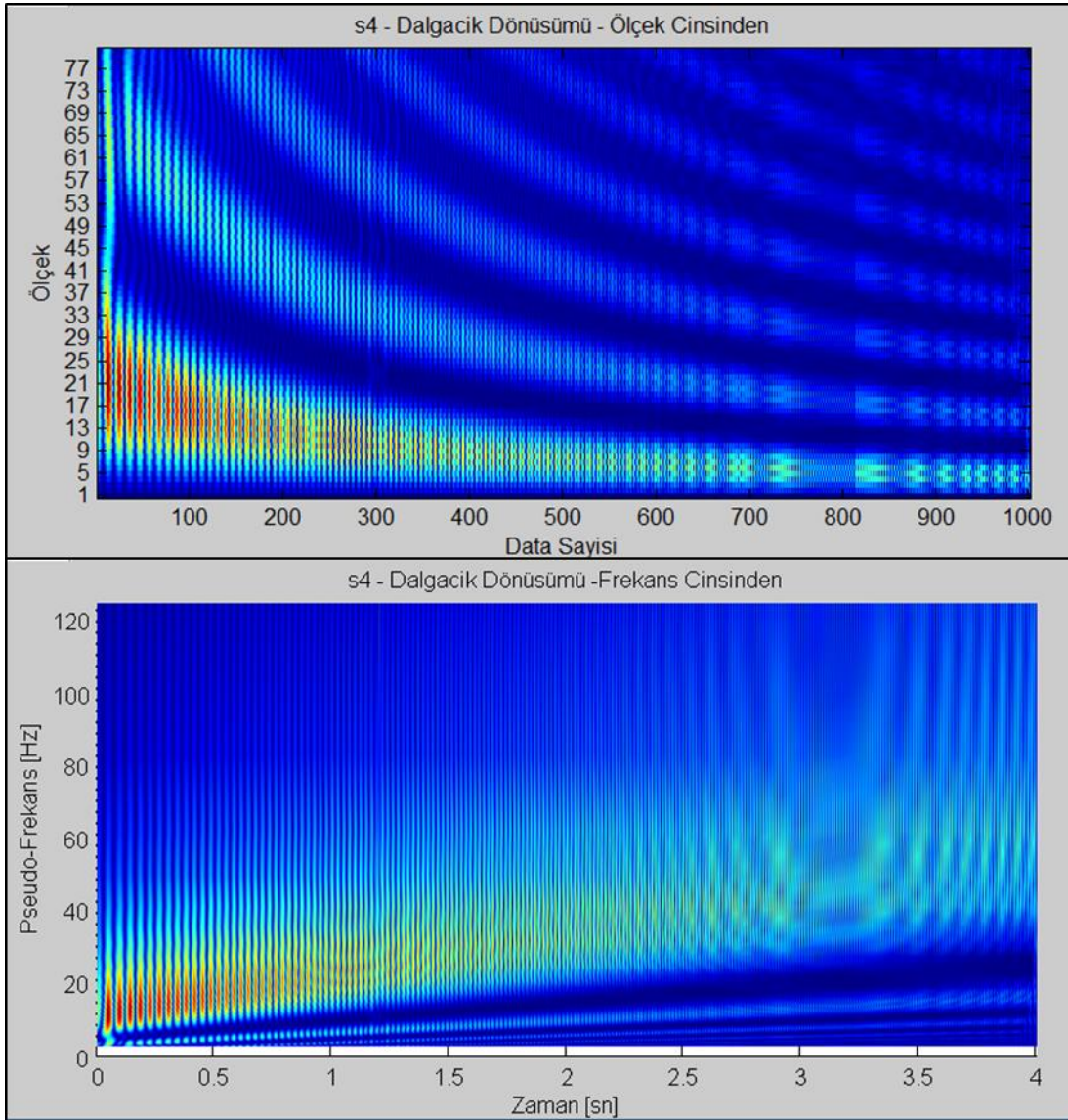
Sinyaldeki değişimin fark edildiğini daha iyi göstermek için dalgacık dönüşümüne şekil 3.40'ta farklı bir açıdan da bakılmıştır. Dönüşüm sonunda farkedilen bu değişim, ana sinyalde geri dönülüp bakıldığında şekil 3.41'de gösterildiği gibi, ne kadar küçük olduğu görülmektedir. Bu kadar küçük bir değişimin bile dalgacık dönüşümü tarafından net bir şekilde yakalanabilmesi dalgacık dönüşümünün zaman çözünürlüğü konusundaki üstünlüğünü açıkça ortaya koymaktadır.



Şekil 3.41 : s_4 'ün 1.2. saniyesinin yakından görünümü.

Son olarak farklı dalgacık çeşitleri ile de sinyallerin dalgacık dönüşümünde nelerin değişebileceğini incelenmiştir. Bu inceleme için frekans içeriği sürekli artan bir karakteristik gösteren s_4 sinyaline uygulanacak farklı tiplerden dalgacıklar seçilmiştir. Seçilen dalgacıklardan biri Haar dalgacığı, diğeri Symlet 4 dalgacığı ve sonuncusu da Morlet dalgacığı olarak seçilmiştir. Dönüşümlerin hepsinde 1’den 80’e kadar olan ölçekleri dönüşüm yapılmıştır.

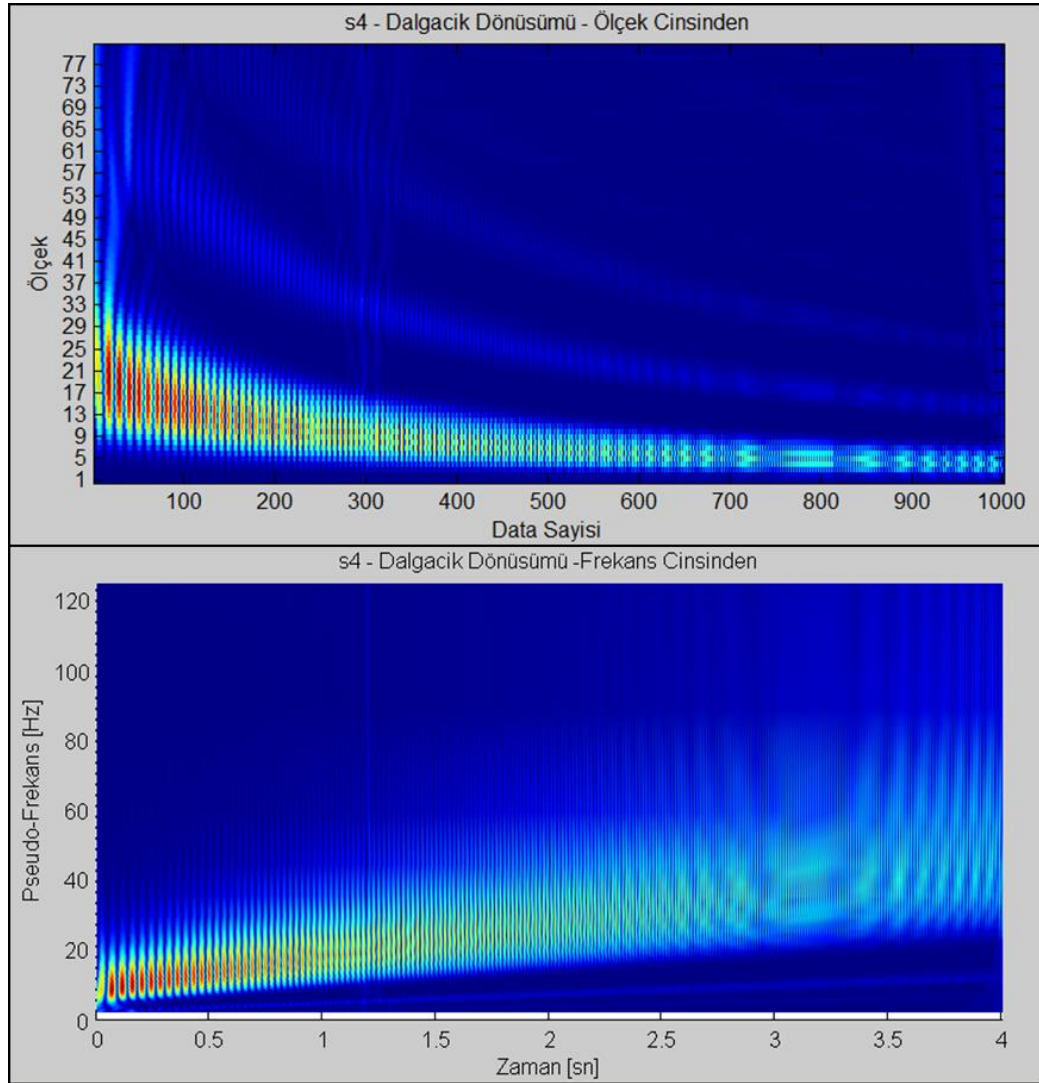
Haar dalgacığı, en küçük destekli, şekil ve birleşme noktası sayısı özellikleri itibarıyla hem ayrık hem de sürekli dönüşüme uygun bir dalgacık tiplerindendir. Haar dalgacığı ile s_4 sinyaline uygulanan dönüşümün sonucu aşağıda şekil 3.42 ile verilmiştir.



Şekil 3.42 : Haar dalgacığı ile s_4 sinyalinin dalgacık dönüşümü.

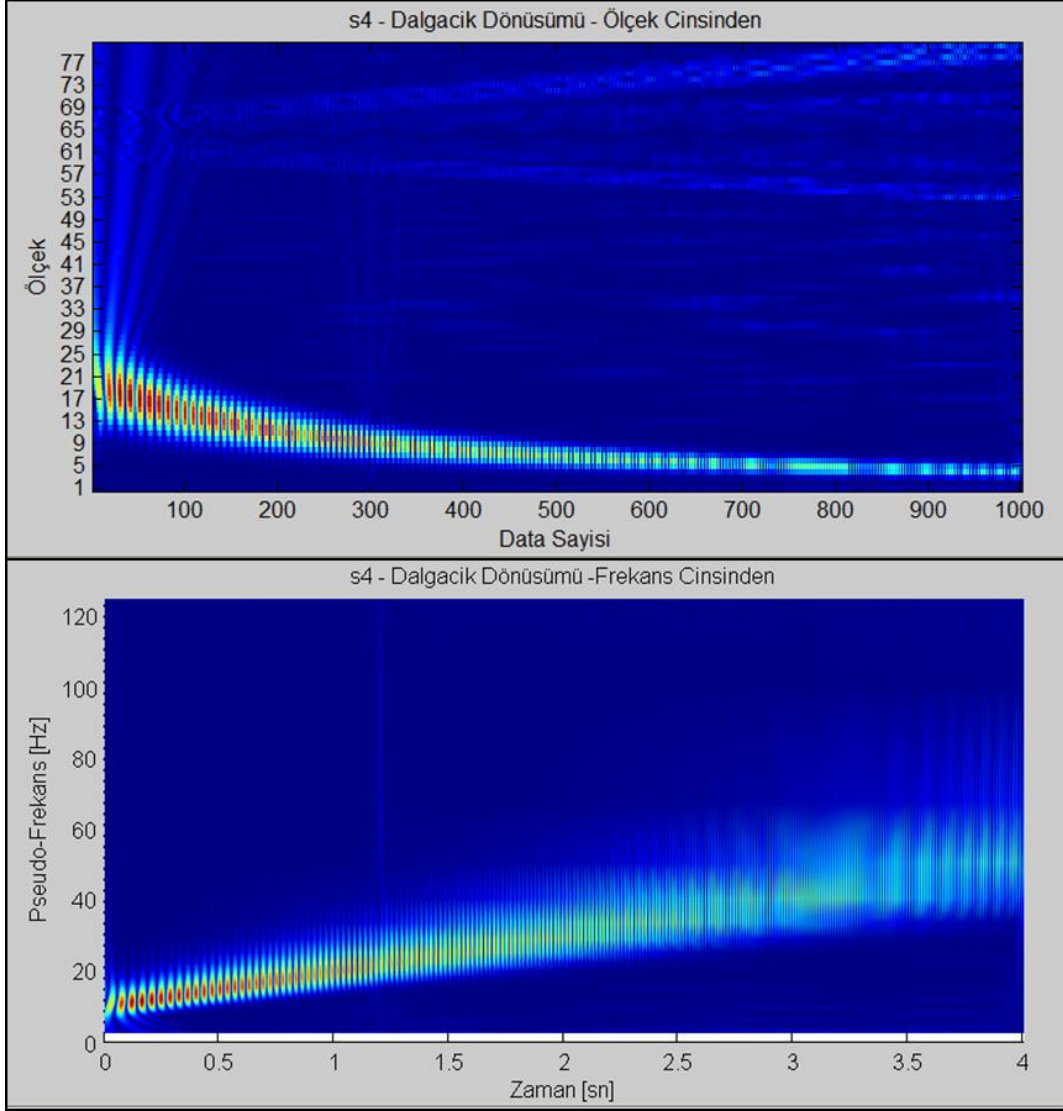
Şekil 3.42’de aynalama sonucu oluşan katsayıların, dönüşümün yoğunluk noktaları açıkça belli olmasına rağmen, oldukça fazla olduğu gözlenmektedir. 0.9. saniyedeki süreksizlik noktası ise rahatça tespit edilebilmektedir.

Şekil 3.43’te ise, s_4 sinyalinin Symlet 4 dalgacığı ile dönüşümü görülmektedir. Bu dalacık da hem ayırık hem de sürekli dönüşüme uygun dalgacıklardandır. Symlet dalgacıkları ailesinin özelliğı, neredeyse simetrik olmalarıdır. Bu sebeple, harmonik tipte sinyaller için daha uygun bir dalgacık dönüşümü sağlayabilmektedirler. Şekil 3.43’te de görüldüğü üzere, aynalama azalmış, dalgacık katsayılarının maksimum değerler aldığı bölgenin ölçek (veya pseudo-frekans) eksenlerindeki dağılımı azalmıştır. Bu, seçilen dalgacığın, Haar dalgacığına nispeten, sinyale daha çok benzediğini göstermektedir. Dolayısı ile korelasyon sonucu edinilen katsayılar, daha kesin bir aralıkta yer bulmuşlardır.



Şekil 3.43 : Symlet 4 dalgacığı ile s_4 sinyalinin dalgacık dönüşümü.

Örnek sinyal s_4 'ün, sadece sürekli dönüşüme uygun Morlet dalgacı ile yapılan dönüşümün sonucu ise, şekil 3.44'te verilmiştir. Morlet dalgacı ile yapılan dönüşüm, Symlet 4 dalgacı ile yapılan dönüşüme kıyasla daha da dar bir ölçek (veya pseudo-frekans) aralığında katsayılar üretmiştir. Bu, işlenen sinyalin şeklinin, Morlet dalgacığının şekline daha çok benzediği anlamına gelmektedir.



Şekil 3.44 : Morlet dalgacı ile s_4 sinyalinin dalgacık dönüşümü.

Farklı dalgacık tipleri ile yapılan 3 ölçüm de sinyaldeki süreksizlik noktasının zaman eksenindeki yerini oldukça etkili bir şekilde tespit edebilmiştir. Ancak dalgacığın sinyalin şekline benzer bir tipte seçilmesi, dönüşüm sonucunun daha net görülmesini sağlamaktadır. Bu durum, işlenecek sinyalin zaman-genlik gösteriminin gözden geçirilerek dalgacık tipine karar verilmesinin, dönüşüm sonucunun daha iyi görünmesinde yarar sağlayacağını göstermektedir.

3.3 Sonuçlar

Bu bölümde farklı sinyaller örnek olarak üretilip hem Fourier dönüşümleri hem de dalgacık dönüşümleri karşılaştırmalı olarak incelenmiştir.

Elde edilen sonuçlar göstermektedir ki dalgacık dönüşümü, zamanla değişen veya ani süreksizlikler taşıyan sinyalleri incelemek için idealdir. Sinyaldeki frekans içeriklerinin birebir karşılığı bulunmamakla birlikte, ilgilenilen frekans aralığına bağlı olarak gerek ölçek cinsinden, gerek pseudo-frekanslar cinsinden ifade edilebilme özelliği sayesinde, farklı aralıkları net bir şekilde görebilme imkanı sağlamaktadır.

Ayrıca dalgacık dönüşümü, incelenilen sinyalin periyodikliği hakkında ayrıntılı bilgi vermektedir. Burada ayrıntıdan kasıt, sinyaldeki ani değişimleri hemen algılayıp, hangi anda sinyalde ani değişikliklerin oluştuğunu gösterebilmesidir.

Fourier dönüşümüyle ise sinyal hakkında sadece periyodik sinyaller söz konusu olduğunda doğru bilgi edinebilmektedir. Periyodik sinyallerin frekans ve genlik bilgileri kesin olarak okunabilmekte, ancak zamana bağlı değişimlerin söz konusu olduğu durumlarda, zaman znrlğ olmadığı için gerçekte varolmayan frekans bileşenleri ortaya çıkabilmektedir.

Bunlara ek olarak, sinyaldeki bilgileri doğru inceleyebilmek için hangi parametrelerin göz önünde bulundurularak ölçek seçimi yapılması gerektiği ve doğru ölçek seçimini yapabilmek için yn gösterici bilgiler de bu bölümde verilmiştir.

4. DALGACIK DÖNÜŞÜMÜNÜN KISA SÜRELİ FOURIER DÖNÜŞÜMÜ İLE KARŞILAŞTIRILMASI

4.1 Durağan Sinyaller İçin Analizler ve Sonuçların Karşılaştırılması

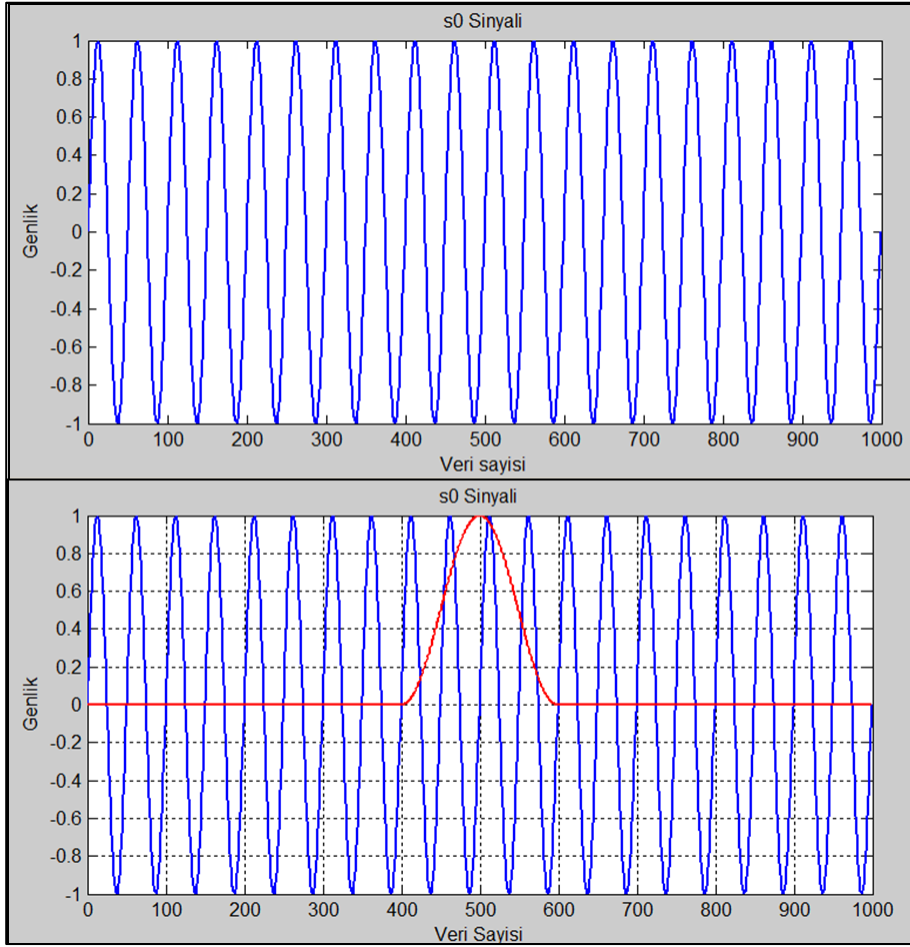
Bölüm 3'te, Fourier dönüşümü kullanıldığında, beklendiği üzere, sinyallerden zamana bağlı bilgi edinilemediği gösterildi. Öte yandan, bu bilgi bir çok uygulamada önemli bir ihtiyaç teşkil etmektedir. Ancak, zamana bağlı değişimlerin bilgisine, dalgacık dönüşümlerinin popüler olmasından çok önce de Kısa Süreli Fourier Dönüşümleri (KSFD) ile ulaşıldığı bilinmektedir [28].

Bu bölümde, neden KSFD varolduğu halde başka bir dönüşüme daha ihtiyaç duyulduğu sorusunun cevabının teori bölümündeki açıklamalarına, örnekler ile somutluk getirilmiştir.

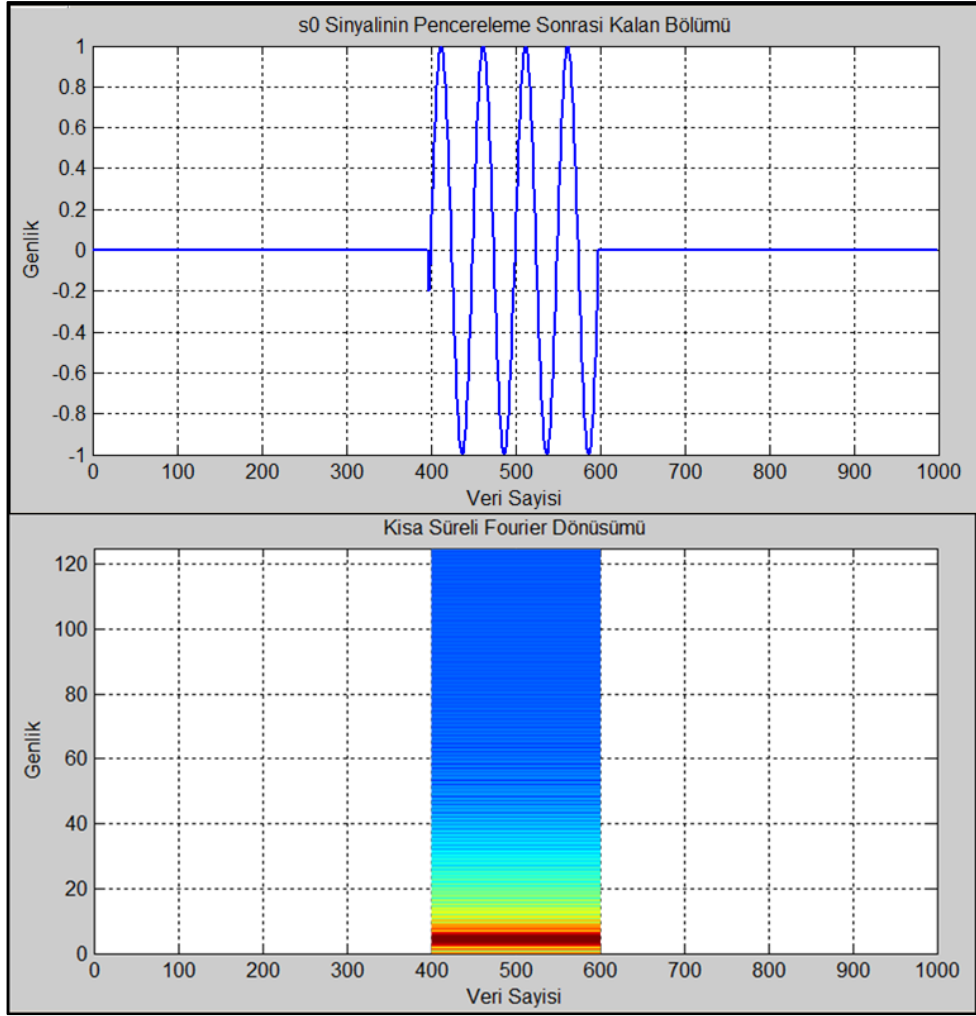
KSFD kapsamında, tanımlı bir pencere ile sinyalin başından sonunda kadar zaman eksenini boyunca sinyalin farklı bölgelerini tarayıp, her seferinde pencere içinde kalan kısma Fourier dönüşümü uygular. Bu bağlamda KSFD, sinyale zaman boyutu katan, yani zamanda çözünürlük oluşturan bir dönüşümdür. KSFD ile dalgacık dönüşümleri arasındaki en temel farklardan birisi, KSFD uygulamalarında zaman eksenindeki çözünürlüğün yalnızca pencere fonksiyonunun desteğinin boyutuna bağlı oluşudur. KSFD'de kullanılan pencereler, daha önce de bahsedildiği gibi, sabit pencere desteğine sahiptir. Bu sebeple, pratikteki bir çok sinyalde olduğu gibi, yüksek ve düşük frekansları birarada içeren sinyaller söz konusu olduğunda, KSFD ile yapılan incelemelerde ya frekans çözünürlüğünden ya da zaman çözünürlüğünden feragat edilmesi gerekmektedir.

Bu bölümde, kıyaslamaları kolaylaştırmak adına, 3. bölümde kullanılan sinyal örnekleri burada da kullanılmıştır. Böylece, her üç dönüşüm arasındaki –Fourier Dönüşümü, KSFD ve Dalgacık Dönüşümü – farklar açıkça gözlenebilecektir.

KSFD'nin pencereler ile nasıl uygulandığına dair açıklamalar şekil 4.1 ve 4.2'de, 100 adet veri noktası olan ve 5 Hz frekans içeriğine sahip örnek s_0 sinyali üzerinde ayrıntılı bir şekilde gösterilerek başlanmıştır.



Şekil 4.1 : (a) s_0 sinyali. (b) s_0 sinyaline Hanning penceresi uygulanması.



Şekil 4.2 : Pencere ile tanımlanan keside Fourier dönüşümü uygulanması.

Şekil 4.1’de KSFD uygulanacak sinyal ve Hanning penceresi örneği 200 verilik bir genişliğe sahip olacak şekilde gösterilmiştir. KSFD’nin ilk adımında şekil 4.1 (b)’de görüldüğü gibi pencere fonksiyonunun sinyalin üzerine geldiği bölge ile çarpılıp sadece pencere fonksiyonunun içinde kalan bölge elde edilmektedir. Daha sonra şekil 4.2(a)’da görülen bu kesite şekil 4.2 (b)’de görüldüğü gibi Fourier dönüşümü uygulanmaktadır. KSFD, pencere fonksiyonu ile sinyalin taranarak kesitler oluşturulması ve bu kesitlere Fourier dönüşümü uygulanması şeklinde yapılır.

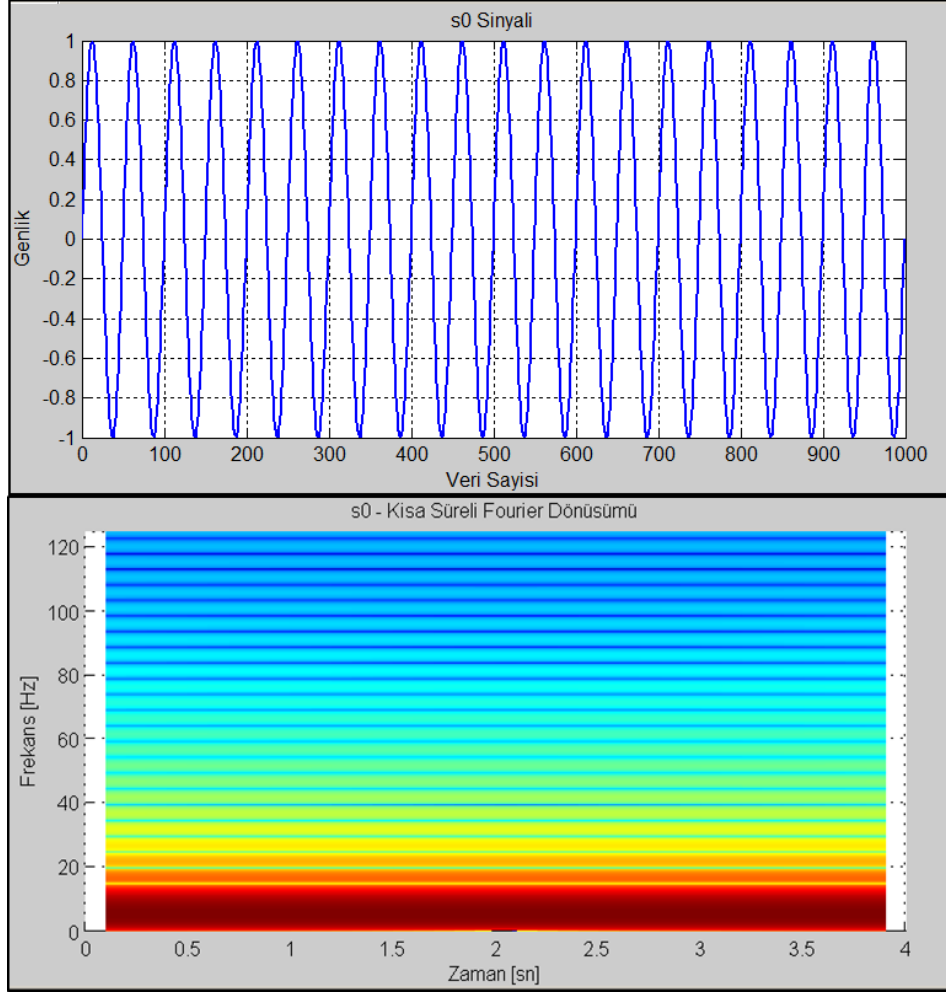
Şekil 4.1(b)’de görülen Hanning penceresinin genişliği, 5 Hz’deki harmonik sinyalin periyodundan daha büyüktür ancak sinyalin bir periyodunun başlangıç noktası ile pencere fonksiyonunun başlangıç noktası aynı olmadığı için, bu Fourier dönüşümünde sızıntılara (leakage) sebep olmuştur.

Sızıntı, harmonik bir bileşenin periyodunun pencere fonksiyonunun başlangıç ve bitiş noktaları içerisinde tamamlanamaması sebebiyle oluşmaktadır. Yani, pencere

fonksiyonu ile çarpım sonrası elde edilen sinyal parçasının içerdiği harmonikler periyotlarını tamamlamayabilirler. Bundan dolayı periyodu tamamlanamayan harmonik, başka frekanslarda da içerik oluşturmuş gibi görünebilmektedir. Fourier dönüşümü, sinyalleri harmonikler olarak kabul ettiği ve harmonikleri periyotları aracılığıyla ayrıştırdığı için yarım periyotlar, gerçekte olmayan frekanslara “sızmış” görünebilmektedirler. Pratikte sinyal işlemede kullanılan sinyallerin tam pencere boyutlarına oturması mümkün olmamaktadır. Çünkü bu sinyaller oldukça farklı karmaşık harmonik bileşenler içermektedirler ve tüm bileşenler aynı fazda oluşmamaktadır. Bundan dolayı, pratikte toplanan sinyallerin ölçüm periyotları yeterince uzun, örnekleme frekansları olabildiğince yüksek –yani toplanan veri noktası sayısı yeterince fazla- tutularak sinyallerin sızıntıdan etkilenmemesi olabildiğince sağlanmaya çalışılır. Günümüzde pratikte kullanılan paket programlar ve veri toplama sistemleri 52100 Hz’ler mertebelerinde örnekleme frekansları ile veri toplayabilmektedir ve bu değer Fourier dönüşümü alındığında 25000 Hz’lere kadar doğru sonuç verebilmektedir. Bu spektrum genişliği, pratikte mühendislerin ilgilendiği frekansları kapsayabilecek yeterliliktedir. Ölçüm periyotlarının yeterince uzun tutulması ile de, sızıntı önlenemese de en büyük genliklerin sinyalde gerçekten varolan harmonik üzerinde oluşmasını ve sızıntı kaynaklı bileşenlerin ihmal edilebilecek düzeyde kalmalarını sağlamaktadır.

Bu bölümdeki örnekler KSFD’nün dezavantajlarını abartılı olarak göstermek üzere pratikteki uygulamalara kıyasla oldukça az olan 1000 adet veri noktası ile ve çok kısıtlı bir zaman diliminde ele alındıkları için sızıntı olayı belirgin bir şekilde gözlemlenebilecektir.

Başlangıç olarak, 5 Hz’de tek bir bileşeni olan s_0 sinyal örneği ile KSFD’nin özellikleri tanıtılmıştır . Şekil 4.3 ile verilen dönüşüm, s_0 sinyalinin KSFD’sidir.



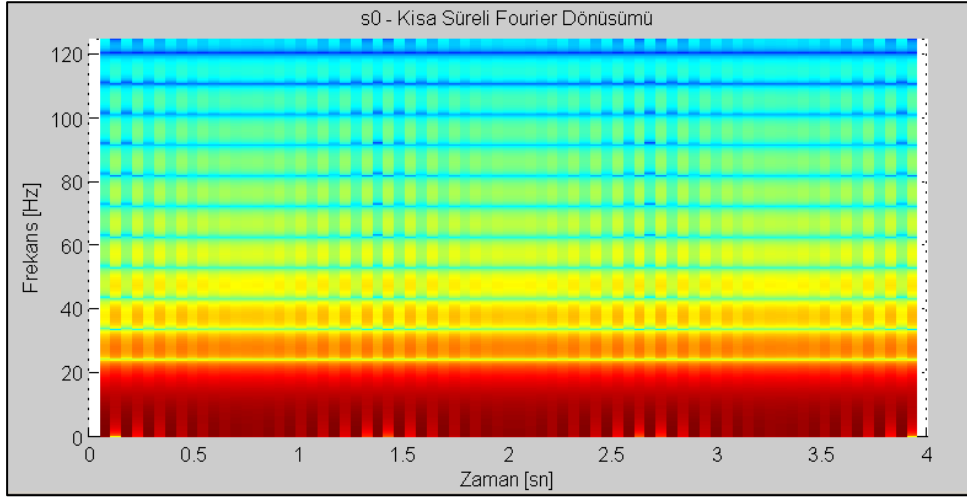
Şekil 4.3 : (a) s_0 sinyali. (b) s_0 sinyalinin KSFD'si.

Bu dönüşümde pencere fonksiyonunun destek genişliği 50 birim seçilmiştir. Bunun sebebi, hem 3. bölümdeki maksimum dalgacık ölçeği seçiminde olduğu gibi, en düşük sinyalin destek genişliğinin tamamını kapsayabilecek bir pencere genişliği yakalamak hem de sinyalde varolabilecek yüksek frekansları makul bir frekans çözünürlüğünde yakalayabilecek bu sırada da zaman eksenindeki çözünürlüğü olabildiğince iyi bir şekilde sunabilecek bir pencere genişliği seçmektir. s_0 sinyali 250 Hz örnekleme frekansı ile oluşturulmuş, 5 Hz frekansı içeren bir sinyaldir. Yani, sinyalin 1 saniyesinde 250 adet veri noktası vardır. Yine 1 saniyede 5 adet harmonik bulunmaktadır. Buradan bir tek harmoniğin destek genişliği boyunca 50 adet veri noktası bulunmaktadır. Bu demektir ki, bir tek harmonik 50 adet veri noktası ile temsil edilmektedir. Bu sebeple, pencere fonksiyonu tek bir harmoniği tam kapsayacak şekilde seçilmiştir. Daha büyük seçilecek bir pencere genişliği ile söz

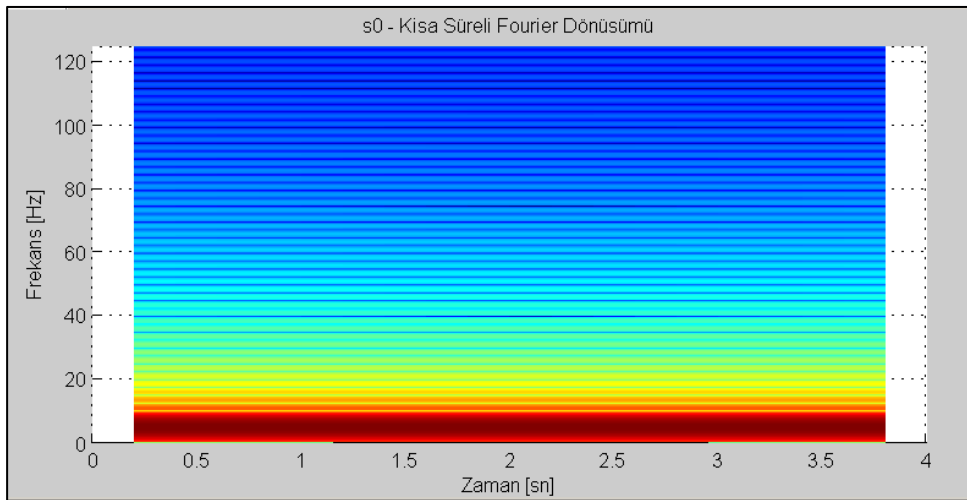
konusu 5 Hz'lük sinyal daha iyi tespit edilebilir ancak yapılan değişimlerin net görülebilmesi için bu bölümde abartılı bir gösterim tercih edilmiştir.

Şekil 4.3'teki dönüşümde, pencerelerin örtüşme yüzdesi (overlap) 50'dir. Yani, bu örnek dönüşüme özel olarak, pencere genişliği 50 veri noktasını ve pencerelerin birbiri üzerine geldiğı yerler ise 25 veri noktasını içerecek şekildedir.

Şekil 4.3'te dikkati çeken bir diğerk nokta ise, sinyalin 4 saniye uzunluğunda olmasına rağmen, dönüşüm sonucunun tam 4 saniyeyi kapsamamasıdır. Bunun sebebini anlamak için aynı dönüşüm, bir pencere boyutu daha küçük -25 birim-, bir de daha büyük -100 birim- seçilerek (örtüşme yüzdesi sabit kalmak şartıyla) aralarındaki farkın gözlemlenebilmesi için aşağıda şekil 4.4 ve 4.5'te tekrar çizdirilmiştir.



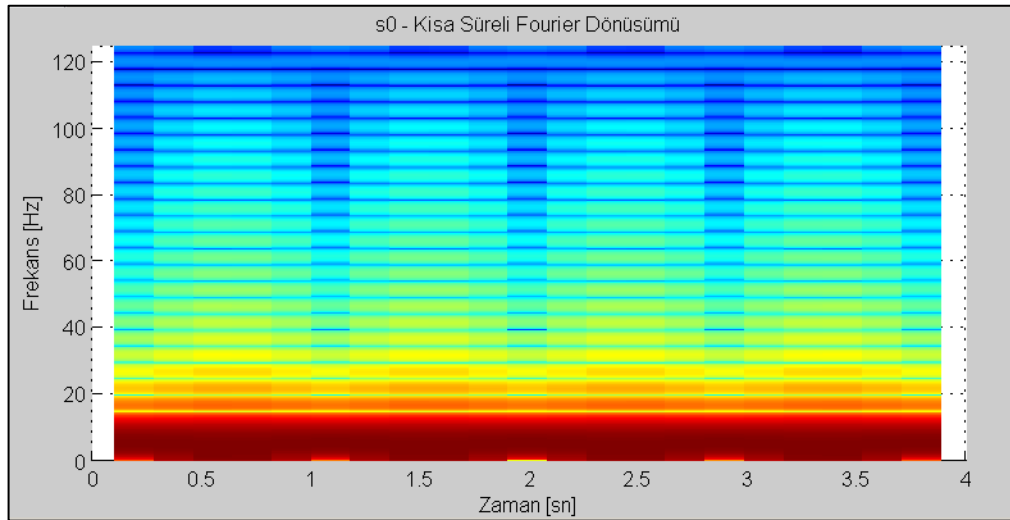
Şekil 4.4 : Pencere genişliği 25, örtüşme %50.



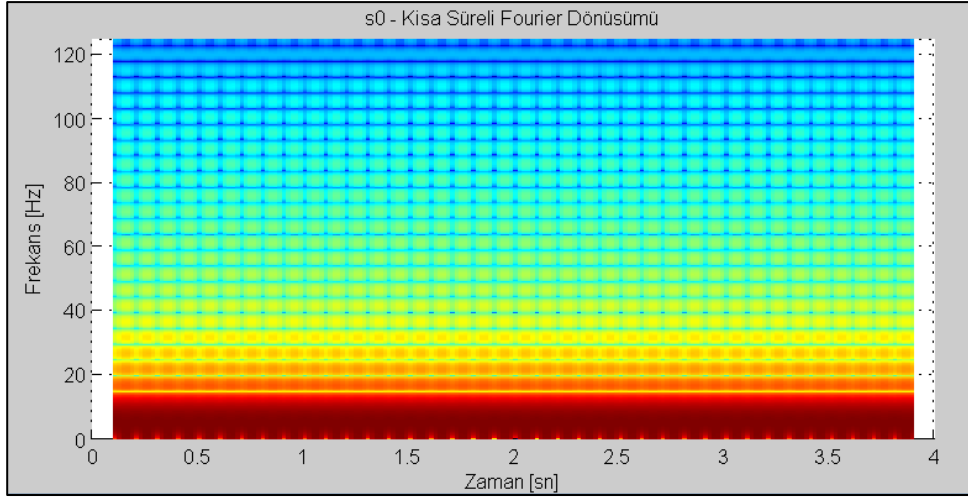
Şekil 4.5 : Pencere genişliği 100, örtüşme %50.

Şekil 4.4'ten görüldüğü üzere, pencere genişliği küçüldükçe dönüşüm sonucunun zaman eksenindeki aralığı büyümüştür. Şekil 4.5'ten görüldüğü üzere de pencere genişliği büyüdükçe dönüşüm sonucunun zaman eksenindeki aralığı küçülmüştür. Bu durumun sebebi, zaman çözünürlüğünün, pencere destek genişliği ile örtüşme genişliğinin arasındaki fark olmasıdır. Ayrıca, pencere genişliğinin artması ile, frekans çözünürlüğü artmış ve sinyaldeki $f_1=5$ Hz bileşeni daha iyi yakalanmıştır. Bu durumun sebebi, pencere genişliğinin artışına bağlı olarak, daha geniş destekli yani düşük frekanslı sinyallerin de yakalanabilmesine olanak sağlanmasıdır. Buna karşılık, zaman bilgisinden ödün verilmiş, toplam süre tam yakalanamamıştır. Bunlara ek olarak, pencere genişliğinin zaman çözünürlüğünü belirleyen en önemli parametre olduğu açıkça gözlenmiştir. Dar pencereler, frekans çözünürlüğünü kötüleştirirken zaman çözünürlüğünü iyileştirmektedirler. Yani, pencere boyu genişledikçe KSFD'nin zaman çözünürlüğü azalmış ancak frekans çözünürlüğü büyümüştür.

KSFD'yi etkileyen bir diğer parametre olan örtüşme yüzdesinin de KSFD'ye etkisine bakmak için pencere boyutu 50'de sabit tutulup, örtüşme %10 ve %90'a çıkarılarak sonuçları şekil 4.6 ve 4.7'de gözlenmiştir.



Şekil 4.6 : Pencere genişliği 50, örtüşme %10.

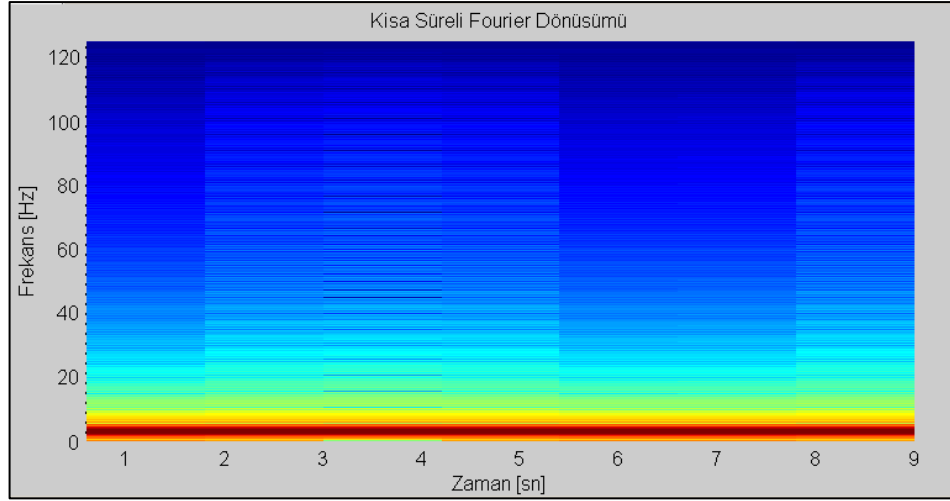


Şekil 4.7 : Pencere genişliği 50, örtüşme %90.

Şekil 4.6 ve şekil 4.7 incelendiğinde, örtüşmenin arttırılması ile frekans çözünürlüğünün ve sinyalin zaman eksenindeki toplam uzunluğunun değişmediği, ancak zamandaki çözünürlüğünün arttığı gözlenmiştir.

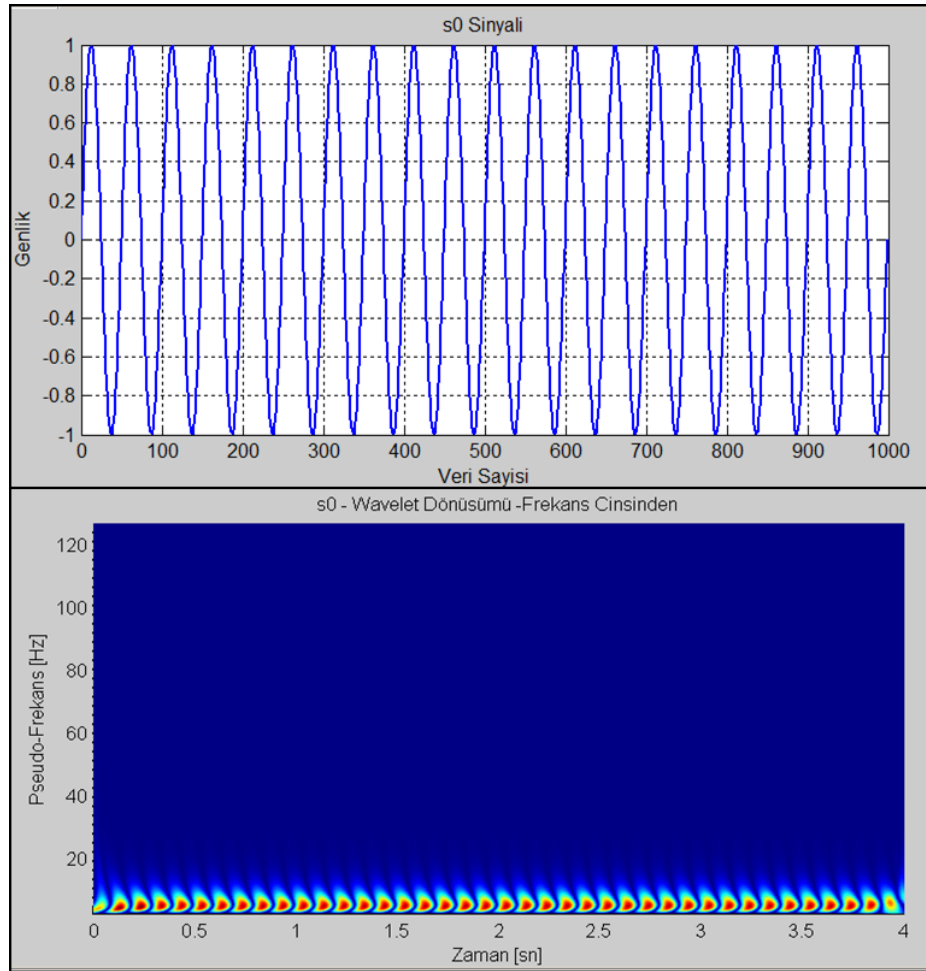
Bu iki gözlem, iyi bir KSFD için hangi frekanslarla ilgilenildiğine göre pencere boyutunun büyük ya da küçük seçilmesinin gerekli olduğunu, ayrıca örtüşme yüzdesinin, pencere boyutundan büyük olmayacak anlamlı bir sayı şeklinde seçilmesi gerektiğini göstermektedir. Ayrıca görülmüştür ki, pencerelerin örtüşme oranını arttırmak da zaman çözünürlüğünü artırma etkisi yaratmakta, ancak çok yüksek oranlarda örtüşme oranı tavsiye edilmemektedir. Pratikte Hanning pencere fonksiyonu için önerilen örtüşme oranları %50 ile %75 arasındadır [32].

Bu abartılı örnekler ile KSFD'nün dezavantajları belirtildikten sonra, yine 5 Hz frekans içerikli ancak daha çok veri sayısı ve daha uzun bir ölçüm periyodu ile oluşturulan bir sinyale Hanning penceresinin boyu 300 birim seçilerek KSFD uygulanmış ve aşağıda şekil 4.8'de verilmiştir. Bu şekilden görüldüğü gibi KSFD, incelenmek istenen frekans içeriğine uygun parametreler seçilirse, sinyalin frekans içeriğini olabildiğince az sızıntı ile gösterebilmektedir. Bu sebeptendir ki, durağan sinyaller için KSFD, hala sinyal işleme uygulamalarında kullanılan en popüler yöntemlerden birisidir.



Şekil 4.8 : Ölçüm periyodu ve örnek sayısı arttırılmış sinyalin KSFD.

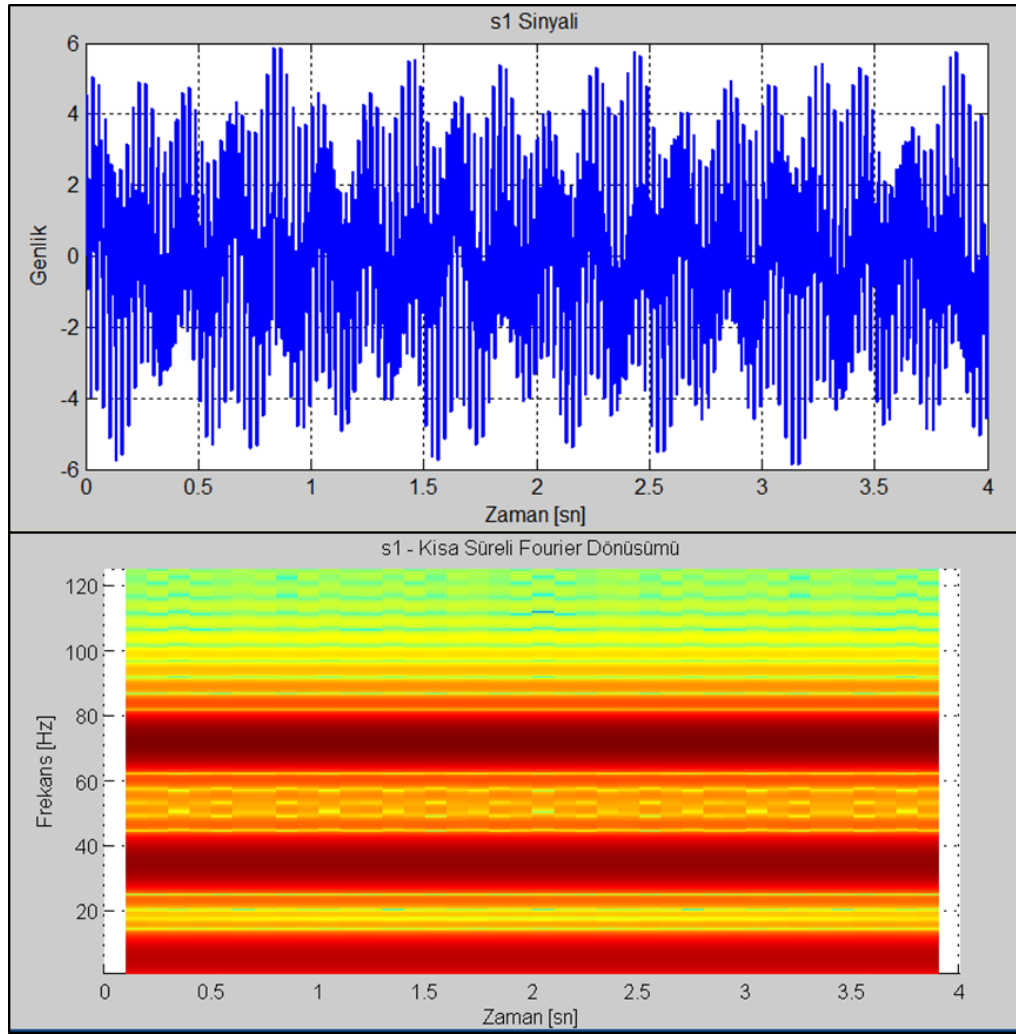
İncelemeye önceki bölüm ile karşılaştırma imkanı sağlamak için yine 1000 adet veri noktalı, 4 saniye ölçüm periyotlu s_0 sinyali ile devam edilmiştir. Bu sinyalin kendisi ve dalgacık dönüşümü ise, aşağıda şekil 4.9’da tekrar verilmiştir.



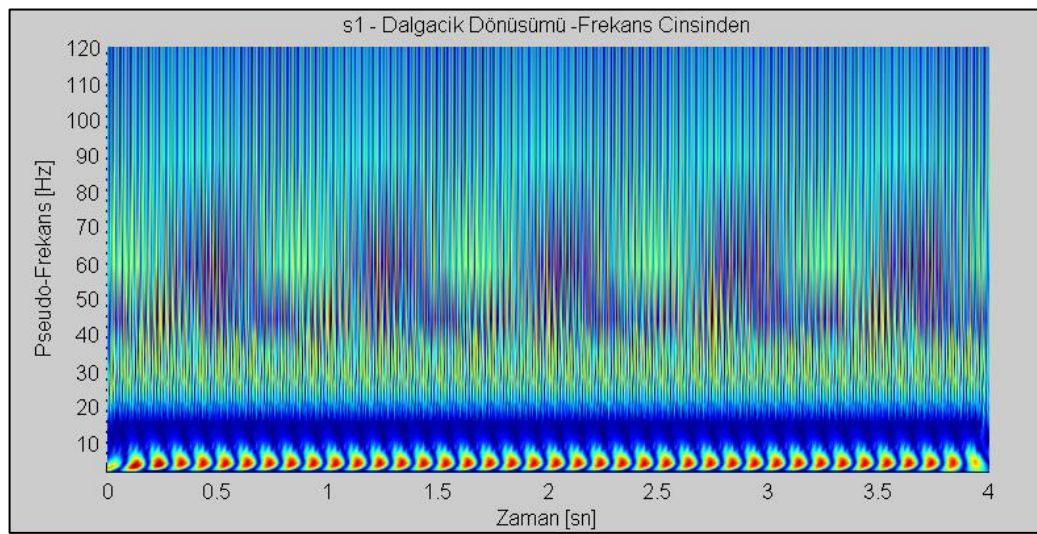
Şekil 4.9 : (a) s_0 sinyali. (b) s_0 sinyalinin dalgacık dönüşümü.

Hem KSFD ile hem de şekil 4.9’da verilen dalgacık dönüşümü söz konusu $f_1=5$ Hz frekansını yakalayabilmiştir. Ancak söz konusu örnek sinyalin frekansının KSFD ile daha net bir şekilde görülebilmesi için zamandaki çözünürlüğünün azalması karşılığında pencere boyutunun arttırılması gerekmektedir. Dalgacık dönüşümünde ise zaman eksenini tam 4 saniye olacak şekilde oluşturulabilmiş ve periyodikliğe dair bilgi de açıkça gözlenebilmiştir. Gerçek hayatta toplanan sinyallerin süresi daha uzun ve örnekleme frekansları daha yüksek olduğu için daha geniş pencereler seçilebilmekte ve durağan sinyaller KSFD ile başarılı bir şekilde işlenebilmektedir. Yukarıdaki örnekte ise 1000 adet veri noktası olan bir örnek ile KSFD’nin dezavantajı abartılı bir şekilde ortaya konmuştur.

Dalgacık dönüşümü ile KSFD’nün karşılaştırılmasına, yine bir önceki bölümde kullanılan 1000 adet veri noktası içeren s_1 sinyali ile devam edilmiştir. Aşağıdaki şekil 4.10, s_1 ’i ve s_1 ’in pencere genişliği 50 birim, örtüşme değeri de %50 olacak şekilde KSFD’yi göstermektedir. Hemen aşağısındaki şekil 4.11 de s_1 ’in pseudo frekanslar cinsinden dalgacık dönüşümüdür.

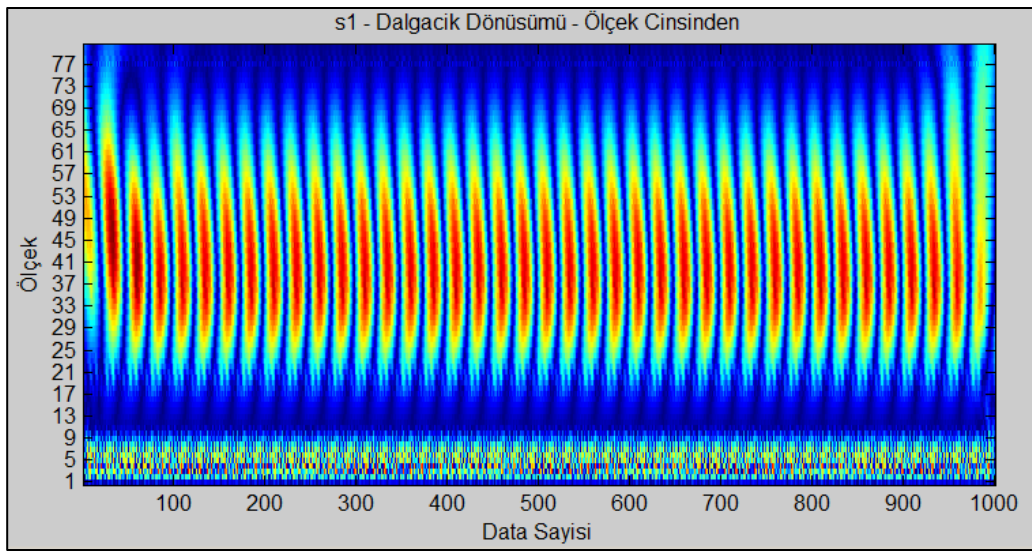


Şekil 4.10 : (a) s_1 sinyali. (b)Pencere boyu 50, örtüşme %50 KSFD.



Şekil 4.11 : s_1 'in pseudo-frekans cinsinden dalgacık dönüşümü.

Şekil 4.7 ile şekil 4.8'in karşılaştırılmasından s_0 örneğinde gözlenenlerden farklı olarak, yüksek frekans içeriklerinin, her iki dönüşümde de düşük bir frekans çözünürlüğü ile gözlenebildiğidir. Ancak, dalgacık dönüşümünde kullanılan frekansların pseudo-frekanslar olduğu göz önünde bulundurularak, bir de ölçek cinsinden ifadesi incelenmiştir. Şekil 4.9'dan görülmektedir ki, söz konusu yüksek frekanslar da dalgacık dönüşümü ile oldukça iyi bir şekilde tespit edilebilmiştir ancak aşağıdaki şekil 4.12'de de görüldüğü gibi frekans-ölçek dönüşümünün ters orantılı olmasından kaynaklanan görsel farktan dolayı, frekans çözünürlüğünün düştüğü şeklinde bir yanılgı oluşmuştur.



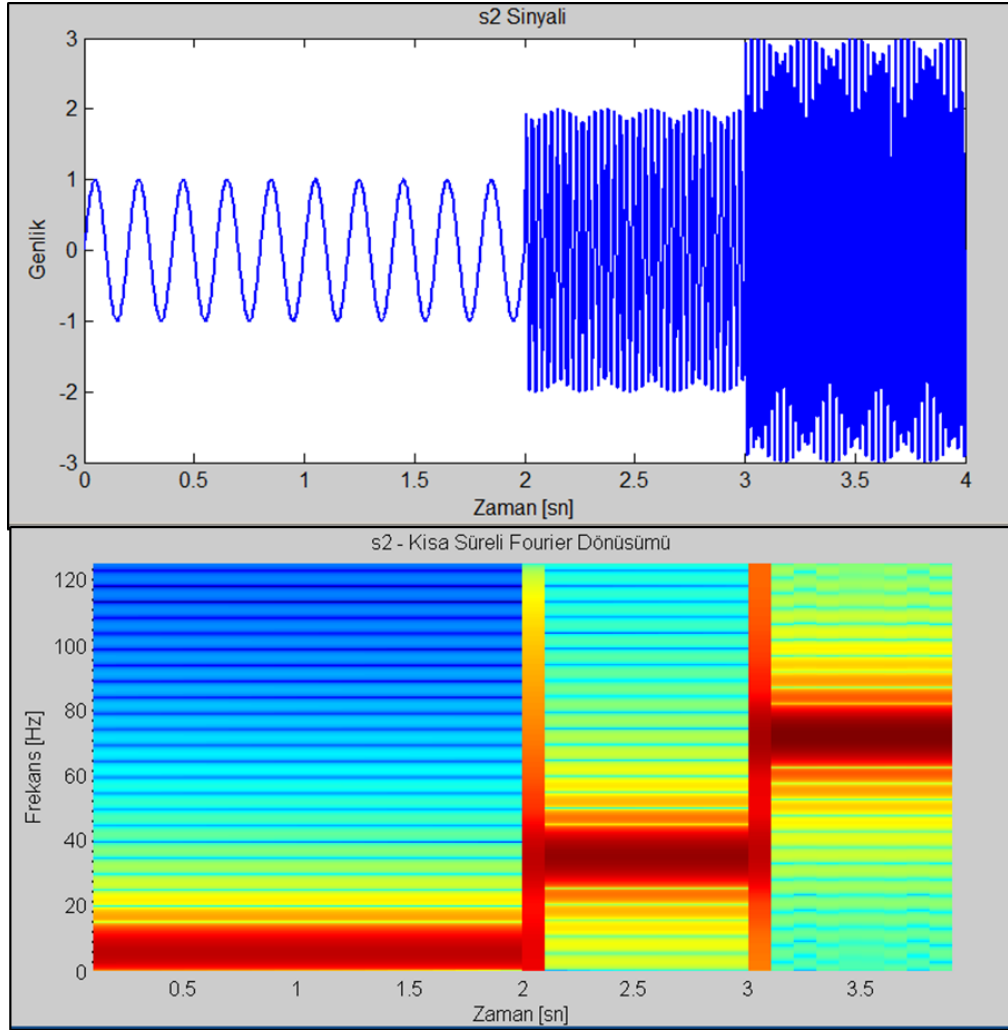
Şekil 4.12 : s_1 'in ölçek cinsinden dalgacık dönüşümü.

Durağan sinyallerin incelenmesinden, dalgacık dönüşümleri ile KSFD arasındaki en önemli farkın, zaman çözünürlüğünün dalgacık dönüşümünde daha iyi olduğu görülmüştür. Ayrıca, frekans çözünürlüğü KSFD'de pencere genişliğine bağlı iken, dalgacık dönüşümünde herhangi bir parametreden bağımsızdır. Yani, KSFD'de pencere genişliği bir kez tayin edildikten sonra tüm dönüşüm, bu sabit genişlikte yapılmaktadır. Buna karşılık, dalgacık dönüşümlerinde değişen destek boyutlarında dalgacıklar ile sinyal tarandığı için, farklı frekans içerikleri açık bir şekilde görülebilmektedir.

4.2 Durağan Olmayan Sinyaller İçin Analizler ve Sonuçların Karşılaştırılması

Durağan olmayan sinyalleri incelemek için, 3. bölümdeki sinyal örnekleri ile çalışılmaya devam edilmiştir. 3. bölümde gösterilen, farklı zaman dilimlerinde farklı

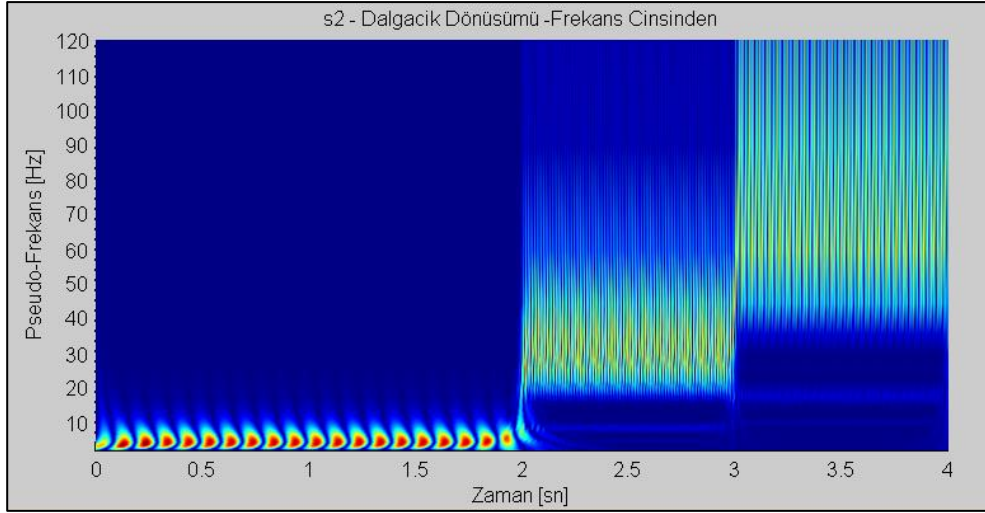
frekans içeriklerine sahip 1000 adet veri noktalı s_2 sinyaline KSFD uygulanmıştır ve dönüşüm sonucu şekil 4.13’de verilmiştir.



Şekil 4.13 : (a) s_2 sinyali. (b)Pencere boyu 50, örtüşme %50 KSFD.

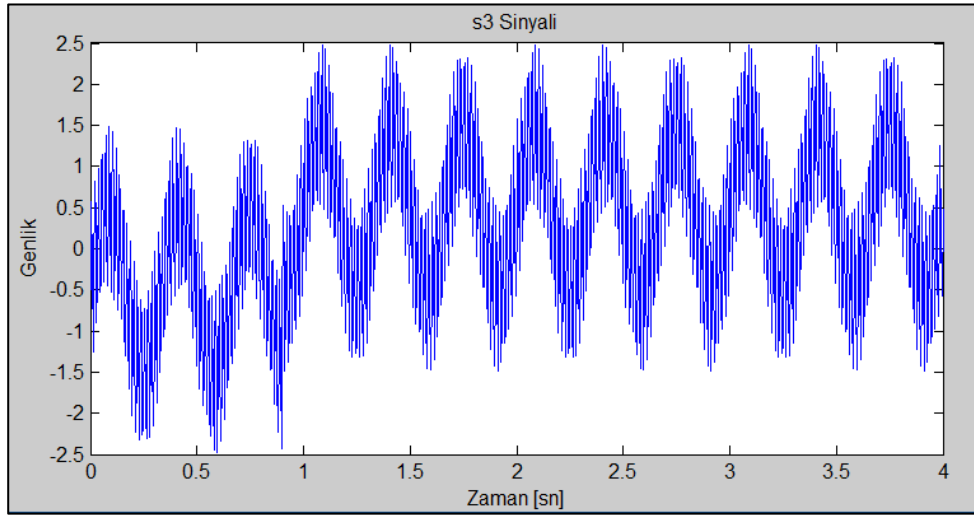
Yukarıdaki dönüşümde ilk göze çarpan özellik sinyalin frekans içeriğindeki değişimlerin tespit edilebilmesine rağmen değişimin olduğu anın kesin bir şekilde tayin edilememesidir.

Şekil 4.14’te de s_2 sinyalinin pseudo-frekans cinsinden dalgacık dönüşümü gösterilmiştir. Bu şekilde, hem sinyalin sahip olduğu frekans içeriği, hem de frekans içeriklerinde yaşanan değişimin olduğu zaman çok daha net bir şekilde belirlenebilmektedir. Şekil 4.13 ile 4.14 karşılaştırıldığında, dalgacık dönüşümünün değişimin olduğu anları KSFD’ne göre çok daha iyi bir şekilde tespit edebilmiş olması, dalgacık dönüşümünün, zaman çözünürlüğündeki üstünlüğünü bir kez daha göstermektedir.



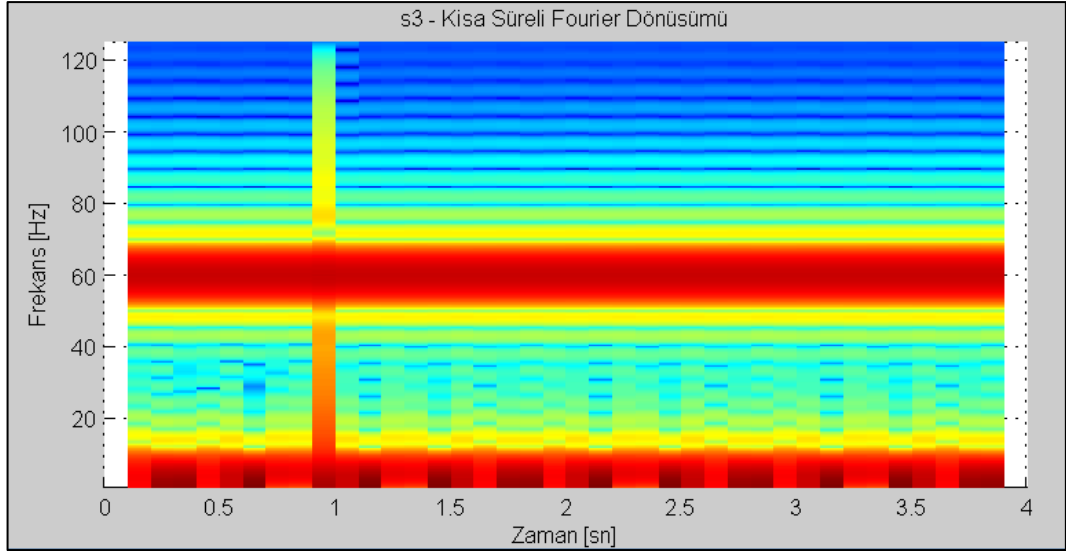
Şekil 4.14 : s_2 'nin dalgacık dönüşümü.

Durağan olmayan bir diğer sinyal örneği s_3 sinyali olup, şekil 4.15'te tekrar gösterilmiştir. Bu sinyal, hem yüksek hem düşük frekanslı harmonikler içermekte, hem de belli bir anda durağanlığı bozacak bir özelliğe sahip bir sinyaldir.

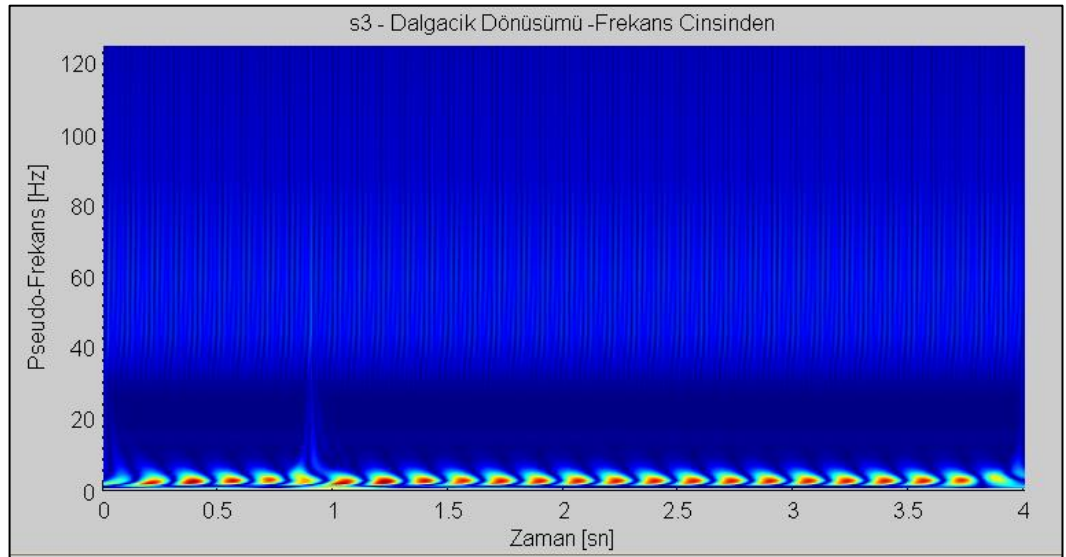


Şekil 4.15 : s_3 sinyalinin zaman-genlik gösterimi.

s_3 sinyalinin KSFD, şekil 4.16 ile verilmiştir ve bu şekil incelendiğinde, sinyaldeki değişimin olduğu anın değil, sadece zaman aralığının tespit edilebildiği gözlenmektedir. Buna ek olarak sinyaldeki iki harmonik de tespit edilebilmiştir.



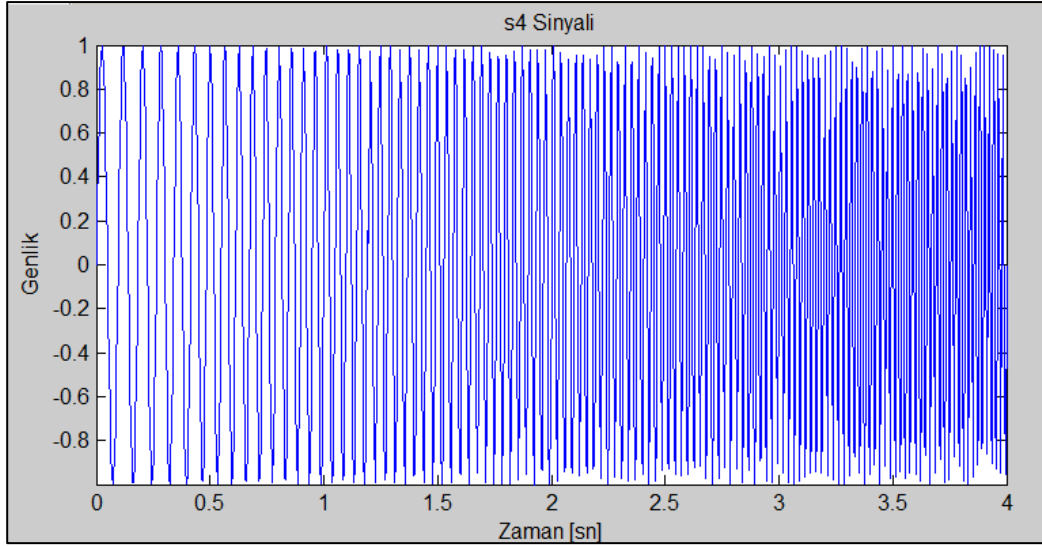
Şekil 4.16 : s_3 sinyalinin pencere boyu 50, örtüşme %50 KSFD.



Şekil 4.17 : s_3 'ün dalgacık dönüşümü.

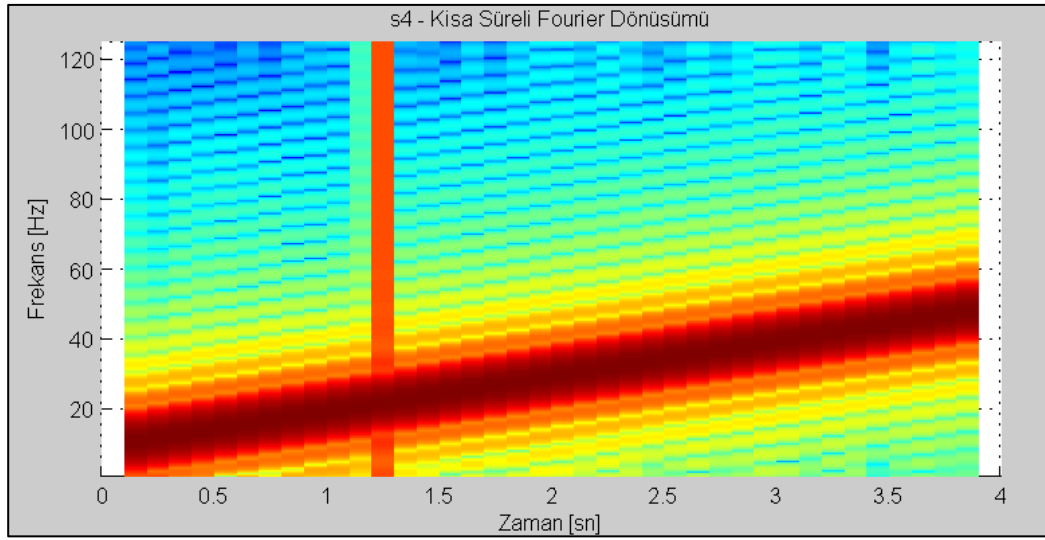
Yukarıdaki şekil 4.17'de de s_3 sinyalinin dalgacık dönüşümü verilmiştir. Bu dönüşümden sinyalde değişimin olduğu zaman, çok iyi bir zaman çözünürlüğü ile tespit edilebilmektedir. Ayrıca sinyaldeki düşük ve yüksek harmonik bileşenler de rahatça görülebilmektedir. Ancak sinyalin zaman genlik gösterimi ile görülebilen genlik artışı ne KSFD ile ne de sürekli dalgacık dönüşümü ile tespit edilememiştir.

KSFD ile dalgacık dönüşümleri arasındaki farkların incelenmesine, yine 3. bölümde kullanılan ve şekil 4.18 ile tekrar verilen 1000 veri noktasından oluşan 4 saniye periyotlu s_4 sinyali ile devam edilmiştir.



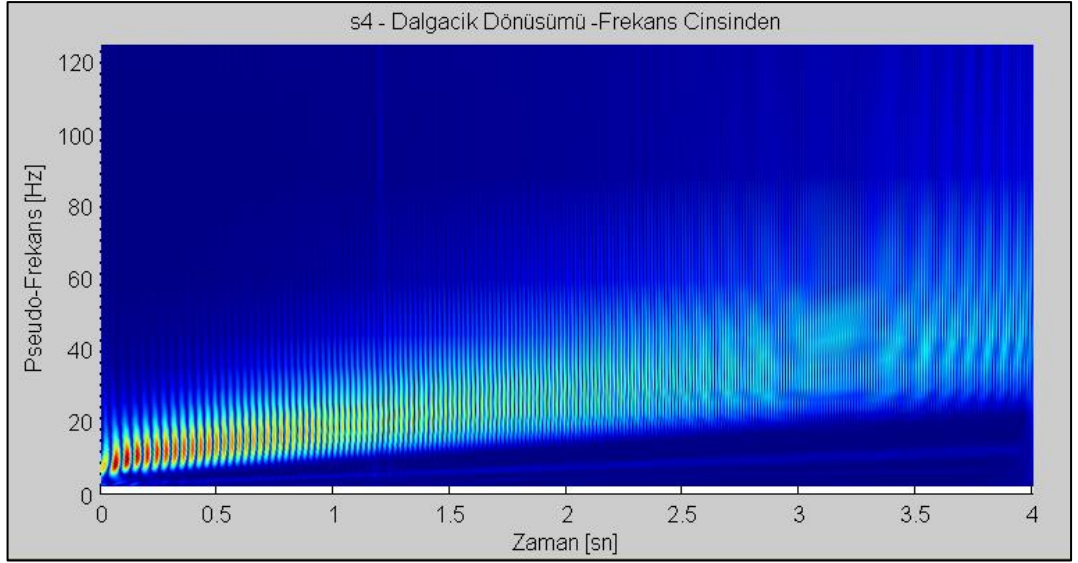
Şekil 4.18 : s_4 sinyalinin zaman-genlik gösterimi.

s_4 'ün KSFD dönüşümü şekil 4.19'da, dalgacık dönüşümü de şekil 4.20'de verilmiştir.



Şekil 4.19 : s_4 sinyalinin pencere boyu 50, örtüşme %50 KSFD.

Şekil 4.19'dan gözlenebildiği üzere, sinyaldeki ani ve küçük değişim tespit edilebilmiştir, ancak hangi anda olduğu çok net değildir. Ayrıca, frekans değişimi oldukça kaba bir aralıkta gözlenmiştir.



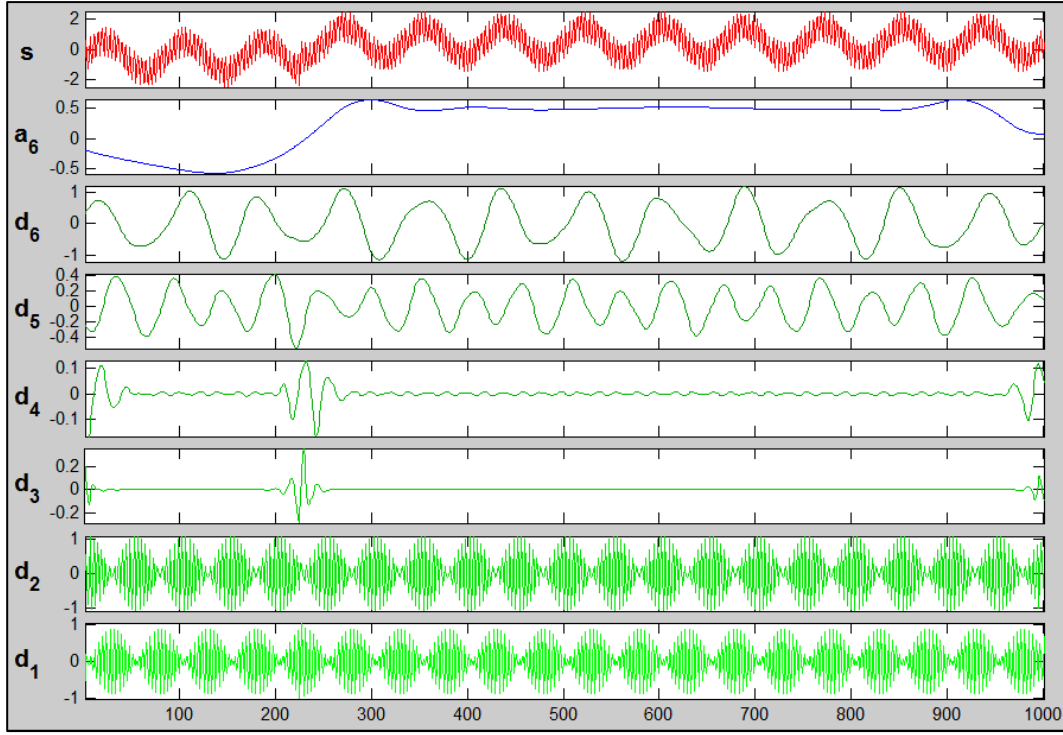
Şekil 4.20 : s_4 'ün dalgacık dönüşümü.

Şekil 4.20 ile verilen s_4 'ün dalgacık dönüşümü incelendiğinde ise, sinyalde 1.2'nci saniyede gerçekleşen ani bir değişim olduğu gözlenmektedir.

Sürekli dönüşümler ile yapılan incelemelerden sonra, bir de ayrık dönüşümler ile yapılan ayrıştırma uygulaması s_3 sinyali üzerinde denenmiş ve dalgacık dönüşümünün sinyal hakkında ortaya koyabildikleri gözlenmiştir.

Ayrık dalgacık dönüşümü, teori bölümünde de açıklandığı gibi dalgacıkları bant sınırlı filtre gibi kullanarak yapılan dalgacık dönüşümüdür. Bu dönüşüm birbirine ortogonal ve ayrık ölçek değerlerine ait katsayıları elde etmek üzere yüksek ve alçak geçişli filtreler ile yapılmaktadır. Bu dönüşüm ile sinyalin farklı özelliklerinin görülüp görülemeyeceği incelenmiştir.

Şekil 4.21, s_3 sinyalinin Daubechies 5 dalgacığı ile 6 kademe ayrıştırılmasını göstermektedir.



Şekil 4.21 : s_3 'ün 6 kademe ayrıştırılması.

Şekil 4.21 incelendiğinde, sinyaldeki değişimin olduğu anın ayrık dönüşüm ile de kolayca tespit edilebildiği görülmüştür. Bu değişim detay fonksiyonlarından d_3 ile açık şekilde tespit edilmiştir. Bu, söz konusu değişimin, 3. seviye ayrıştırma boyutları içerisine girecek kadar küçük bir değişim olduğunu ifade etmektedir. Ayrıca, ne KSFD ile, ne de sürekli dalgacık dönüşümü ile açık şekilde farkedilemeyen 0.5 birimlik genlik artışı, a_6 yaklaşıklık fonksiyonu ile kolayca gözlenebilmiştir. Bu gözlem, dalgacıkların kullanılacağı uygulamanın gerektirdiği şekilde, ayrık veya sürekli dönüşüm şeklinde yapılabileceğini göstermiştir.

4.3 Sonuçlar

Dalgacık dönüşümlerinin, KSFD ile karşılaştırılması, bu iki dönüşüm arasındaki en önemli farkın zaman eksenindeki çözünürlükleri olduğunu ortaya koymuştur. Dalgacık dönüşümü ile sinyaldeki değişimler anlık olarak tespit edilebilmekteyken, KSFD ile değişimlerin olduğu an, ancak geniş bir zaman aralığı içerisinde gösterilebilmektedir. Yani değişimin olduğu an değil, ancak değişimin olduğu zaman aralığı tespit edilebilmektedir. Değişimin olduğu anın net olarak tespitine, pratikte her uygulamada ihtiyaç olmayabilir. Ancak ani ve sürekli değişimlerin olduğu ve her bir değişimin diğerine kıyasla hangi zamanda oluştuğunun bilgisi, makinelerdeki

rulmanlarda hata tespiti, içten yanmalı motorlarda enjeksiyonların düzensizliğinin tespiti gibi çalışmalarda çok önem kazanmaktadır.

KSFD ile pencere genişliğinin dönüşümün frekans çözünürlüğünü belirlediği gösterilmiştir. Pencere destek genişliği, tüm analiz boyunca sabit kalmakta, bu sebeple ya düşük frekansların çözünürlüğü ya da yüksek frekansların çözünürlüğü düşmektedir. Öte yandan dalgacık dönüşümü bir çoklu çözünürlük dönüşümü olduğu için, farklı frekanslara adapte olabilen bir ana dalgacık ile tüm sinyal uygun çözünürlük ile işlenebilmektedir. Dalgacık dönüşümlerinde, hem ölçek cinsinden temsili, hem de pseudo-frekanslar cinsinden temsili incelemek ise, sinyal hakkında daha ayrıntılı bilgi edinmek anlamına gelebilmektedir.

Bunlara ek olarak, dalgacık dönüşümlerinde ayrıştırma ile sinyalin içeriğindeki farklı bileşenlerin etkileri de gözlenebilmektedir. Yaklaşıklık fonksiyonlarının, sinyale genel karakterini veren ve tüm sinyal boyunca yavaş yavaş gelişen olayları temsil ettiğini, detay fonksiyonların ise, sinyaldeki hızlı ve anlık değişimleri yakaladığı gözlenmiştir. Fourier tabanlı dönüşümler ile yakalanması mümkün olmayan çok düşük frekanslı değişimlerin, ayrıştırma ile kolayca ortaya çıkarılabildiği anlaşılmıştır. Bu örnek, çeşitli uygulamalarda ayrık ya da sürekli dönüşüm kullanmanın uygun olabileceğini göstermiştir.

5. DALGACIK DÖNÜŞÜMÜNÜN ARAÇ TİTREŞİM VE GÜRÜLTÜ SİNYALLERİNE UYGULANMASI

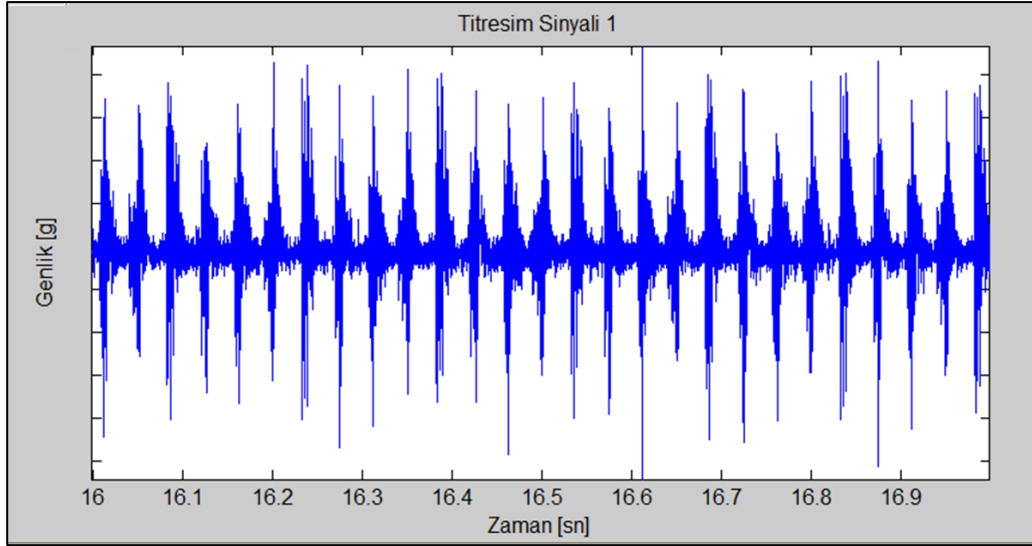
5.1 Titreşim Sinyallerinin Dalgacık Analizi

Önceki bölümlerde özellikleri Fourier dönüşümü ve KSDF ile karşılaştırmalı olarak verilen dalgacık dönüşümü, bu bölümde, otomotiv sektöründeki gürültü ve titreşim çalışmalarından alınan bir takım verilere uygulanarak, bu alandaki pratik kullanıma uygunluğu ve etkin bir yöntem olarak kullanılabilirliği incelenmiştir.

NVH çalışmalarında gürültünün kaynağını bulmak, istenmeyen gürültüyü en aza indirme çalışmalarına başlamanın ilk ve en önemli basamağıdır. Sorunların kaynağının çabuk ve doğru tespiti, NVH çalışmalarında zaman, para, insan gücü ve ekipman kaynaklarının verimli kullanılması açısından çok büyük önem taşımaktadır. Dalgacık dönüşümleri, hem frekans/ölçek cinsinden sinyalleri ayrıştırabilmekte, hem de ayırık dalgacık dönüşümleriyle ayrıştırılıp sinyallerin belli ölçek aralıklarındaki detaylarını ve sinyalin genel yapısını ortaya koyabilmektedir. Gürültü veya titreşimlerin kaynağının tespitinde her iki yöntemin de kullanılabilirliği bu bölümde araştırılmış, Fourier tabanlı dönüşüm yöntemlerine göre farkları incelenip ortaya konulmuştur.

İncelemeye önce bir titreşim sinyali örneği ile başlanmıştır.

Örnek sinyal, 4 silindirli bir dizel motorun yüksek basınçlı ray borusu üzerinden alınan ivme verisi örneğidir. Veri, motor rölanti hızındayken alınmıştır ve ölçüm periyodu 1 saniye, örnekleme frekansı 12800 Hz'dür. Şekil 5.1'de sinyalin zaman ekseninde görünümü verilmiştir.

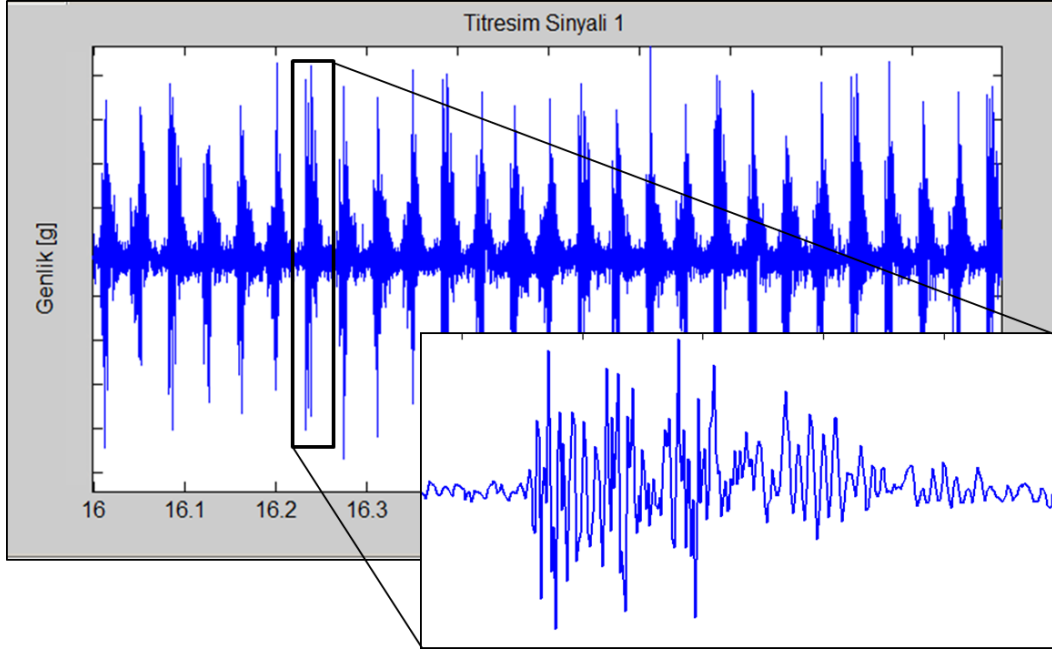


Şekil 5.1 : Titreşim sinyali 1.

Sinyalde, görüldüğü gibi patlamalara bağlı olarak bir çok titreşim tepesi bulunmaktadır. Her bir patlama esnasında oluşan bu titreşim tepelikleri, yarattıkları gürültü tepelikleriyle de birlikte, NVH çalışmalarında önemli bir yer tutan bir fenomen olan motorun impulsif karakterini oluştururlar. Sürekli ani değişimler barındıran bu tip sinyallerin içerdiği düzensizlikler sürücüde rahatsızlık hissi oluşturabilmektedir. Düzensizlik, ani değişimlerden birisinin veya bir kaçının sürekli olarak diğerlerinden daha yoğun veya daha yüksek genlikli olmasıdır. Buna örnek olarak, dört silindirli bir motorda, bir veya iki silindir, diğer silindirlere göre daha şiddetli patlaması veya silindirlerden birindeki bir hasar sebebiyle, o silindirdeki patlamaların, diğer silindirlerdekilere göre daha farklı karakterde olması verilebilir. Bu tip sinyaller, her ne kadar çok kısa süreler içerisinde gerçekleşse de, insan kulağı tarafından hemen ayırt edilebilmekte ve otomotiv müşterileri için rahatsız edici, istenmeyen bir durum oluşturmaktadır. Yapılan NVH çalışmaları da, bu tip istenmeyen durumları ortadan kaldırmak için motorun çeşitli bölgelerine yerleştirilen mikrofön ve ivmeölçerler aracılığıyla toplanılan bilgilerin incelenilerek rahatsız edici ses veya titreşimin nereden geldiğini bulmak ve buna göre önlem almak üzerinedir.

Bu tip inişler ve çıkışlar barındıran karmaşık sinyallerde, ani değişimlerin tam olarak hangi anda gerçekleştiğini görebilmek çok önem kazanmaktadır. Birbiriyle karşılaştırılan sinyallerde görülen eş zamanlı tepeler, sorunun kaynağına işaret etmekte, ancak bu da yeterli gelmemekte, söz konusu tepeliklerin frekans özelliklerinin, dolayısı ile şekillerinin incelenmesi de önem kazanmaktadır.

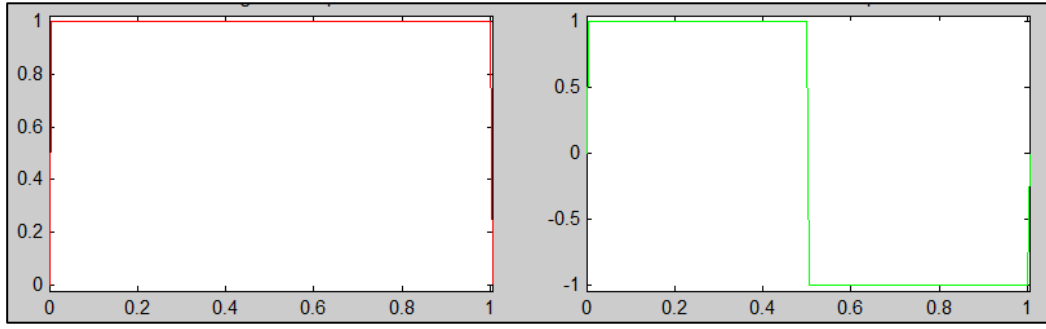
Dalgacık dönüşümü ile ani değişimler içeren sinyallerin başarılı bir şekilde incelenebildiği önceki bölümlerde gösterilmiştir. Ancak, söz konusu karmaşık sinyaller olunca, dalgacık tipinin seçimi de önem kazanmaktadır. Dalgacıklar, işlenecek sinyalin özelliklerine en yakın şekillerde seçildiklerinde işlevlerini en iyi şekilde yerine getirirler. Örnek sinyalin şekil özelliklerini daha iyi görebilmek için şekil 5.2’de daha yakından bakılmıştır.



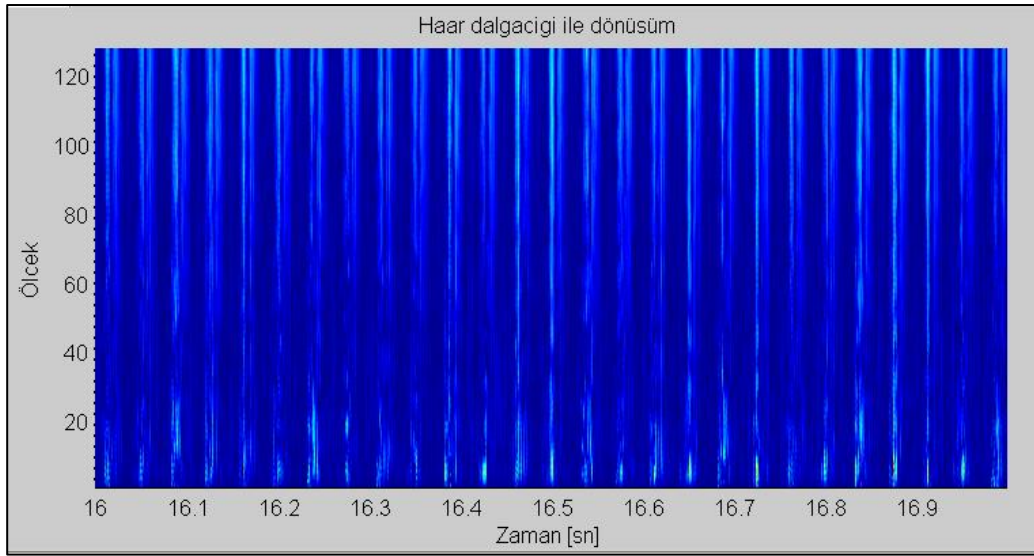
Şekil 5.2 : Örnek sinyal 1’in yakından görünümü.

Sinyal 1, yukarıdaki şekil 5.2’de görüldüğü üzere oldukça sert ve ani tepeler içermektedir. Buna dayanarak, seçilecek dalgacık da benzer ani geçişleri içerecek şekilde seçilmelidir. İkinci bölümde verilen dalgacık tiplerinden bazıları bu sinyale uygunlukları açısından incelenmiştir.

İncelemeye en basit dalgacık Haar dalgacığından başlanmıştır. Şekil 5.3’te verilen Haar ölçeklendirme ve dalgacık fonksiyonları, Bölüm 2’de anlatıldığı gibi Daubechies dalgacıklarının birincisidir. Ortonormal, süreksiz ve küçük desteği ile kare dalga tipi sinyallere uygundur. Örnek sinyal farklı bir yapıya sahip olmasına rağmen, tek bir sinyalde farklı dalgacık tipleri uygulanarak elde edilen sonuçlar arasındaki farkları görmek, sinyaldeki farklı özellikleri yakalayabilmek açısından faydalı bulunmuştur.



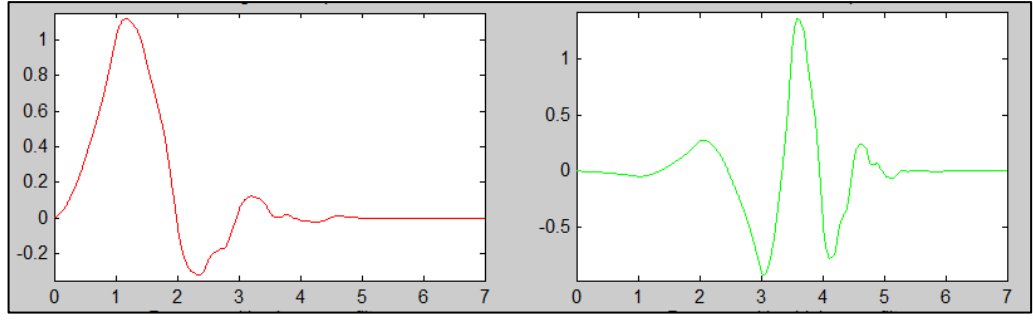
Şekil 5.3 : (a)Haar ölçeklendirme fonksiyonu. (b)Dalgacık fonksiyonu.



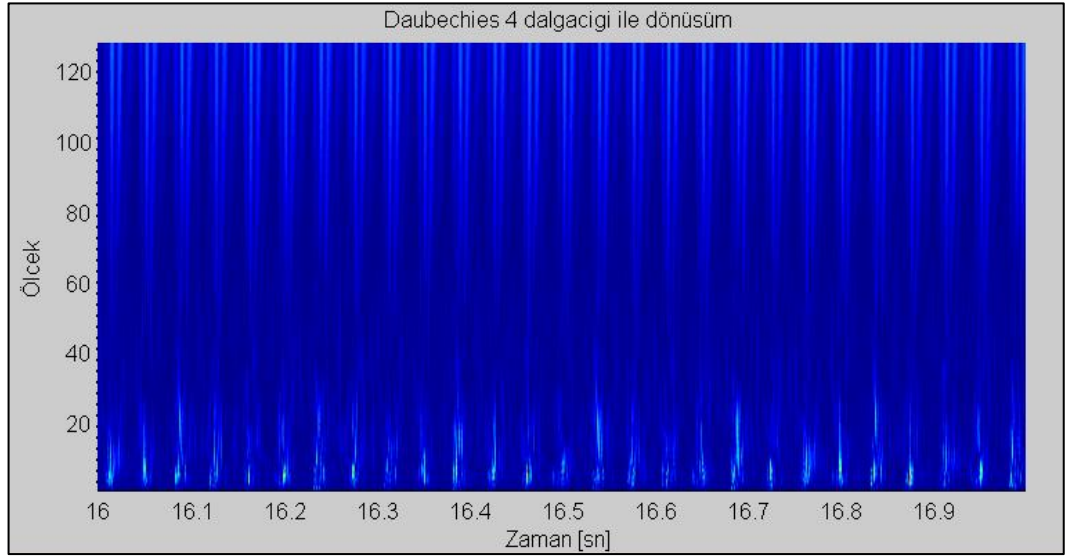
Şekil 5.4 : Haar dalgacığı ile sinyal 1'in dönüşümü.

Şekil 5.4'te verilen Haar dalgacığı dönüşümü, sinyaldeki periyodikliği göstermekte, ayrıca yüksek frekanslarda periyodiklikler arasındaki ince farkları da gösterebilmektedir.

Haar ile benzer özellikler taşıyan Daubechies dalgacıkları ailesinden 4. derecedeki Daubechies ile de sinyale dalgacık dönüşümü uygulanmıştır. Aslında Haar dalgacıkları, Daubechies ailesinin ilk ve tek birleşme noktalı dalgacığıdır. Şekil 5.5 ile verilen Daubechies 4 dalgacığı, Daubechies dalgacıklarının özelliğine uygun olarak, derecesi arttıkça daha yumuşak geçişli bir hal almıştır. Bu dalgacık ile yapılan dönüşümün sonucu ise şekil 5.6'da verilmiştir.



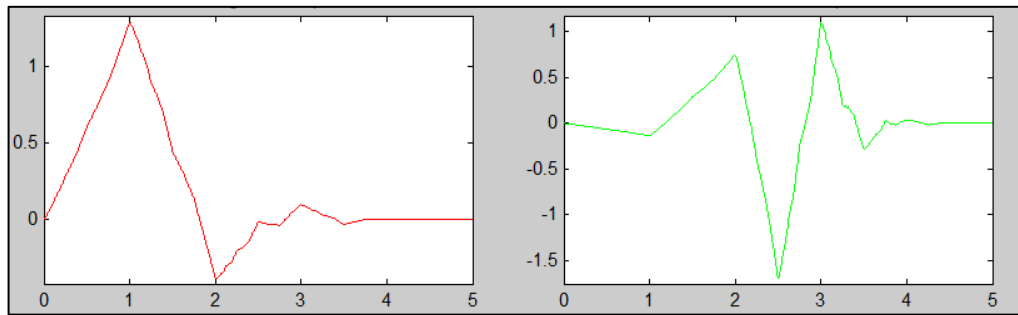
Şekil 5.5 : Daubechies 4 (a)Ölçeklendirme fonksiyonu. (b)Dalgacık fonksiyonu.



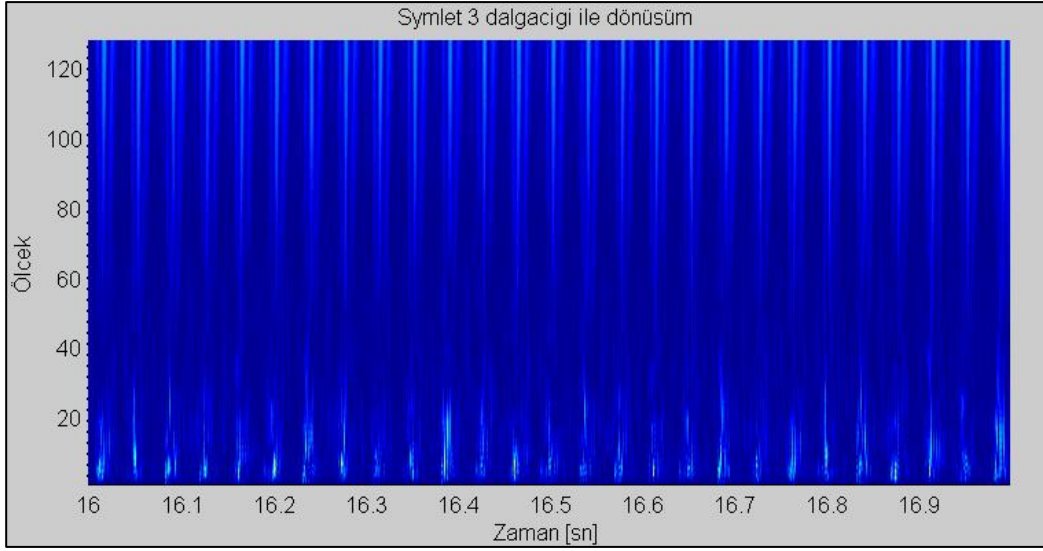
Şekil 5.6 : Daubechies 4 dalgacığı ile sinyal 1'in dönüşümü.

Daubechies 4 ile yapılan dönüşüm, sinyaldeki periyodikliği Haar dalgacığına göre daha net bir şekilde vurgulamıştır.

Şekil 5.7 ile gösterilen, Daubechies dalgacıklarının daha simetrik hali symlet dalgacıkları ailesinden symlet 3 dalgacığı ile yapılan dönüşüm de şekil 5.8'de verilmiştir.



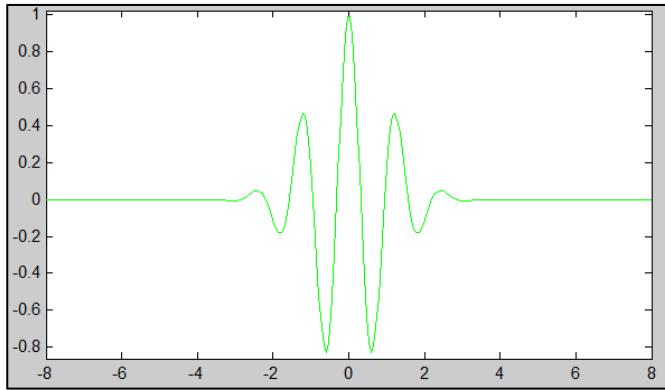
Şekil 5.7 : Symlet 3 (a)Ölçeklendirme fonksiyonu. (b)Dalgacık fonksiyonu.



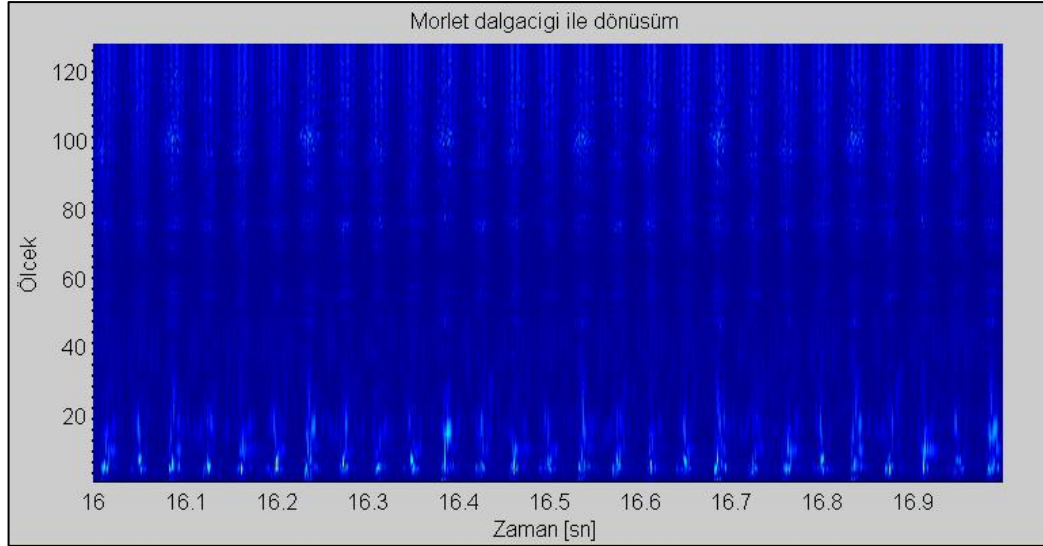
Şekil 5.8 : Symlet 3 dalgacığı ile sinyal 1'in dönüşümü.

Symlet dalgacıkları da düşük ölçekli bileşenlerin aralarındaki farkları işaret edebilmiş ve periyodikliği gösterebilmiştir.

Yukarıda dönüşümü gerçekleştirilen 3 dalgacık çeşidi de hem ölçeklendirme hem de dalgacık fonksiyonlarına sahip dalgacıklardır. Sürekli dalgacık dönüşümüne uygun ve ölçeklendirme fonksiyonu olmayan dalgacıklardan morlet dalgacığı ile de dönüşüm yapılmıştır. Morlet dalgacık fonksiyonu şekil 5.9 ile dönüşüm ise şekil 5.10 ile verilmiştir.



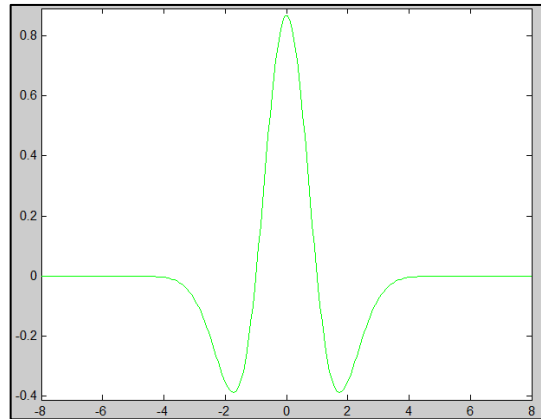
Şekil 5.9 : Morlet dalgacık fonksiyonu.



Şekil 5.10 : Morlet dalgacığı ile sinyal 1'in dönüşümü.

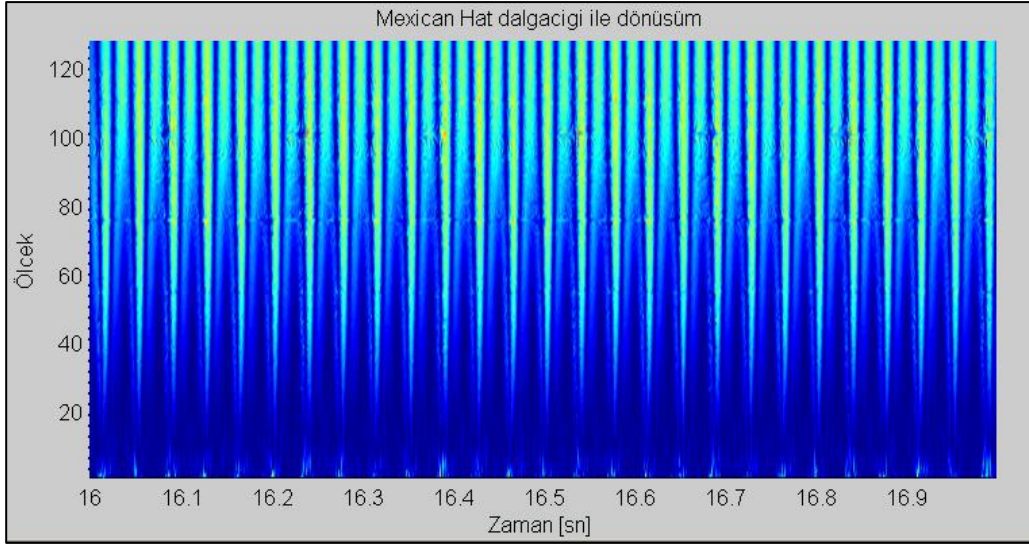
Şekil 5.10'da görüldüğü üzere, morlet dalgacığı ile yapılan dönüşüm 100 ölçek ve 75 ölçek civarlarında da yüksek katsayılar ortaya çıkarmıştır ve düşük ölçekli bileşenlerin aralarındaki farkları görmeye olanak sağlamıştır.

Aynı dönüşüm bir de gauss tipi dalgacıklar ile yapılmıştır. Gauss tipi dalgacıklar da sürekli dönüşüme uygun, ölçek fonksiyonu olmayan analitik dalgacıklardandır. Gauss dalgacıkları ailesinin ikincisi olan Mexican Hat dalgacığı şekil 5.11'deki gibidir.



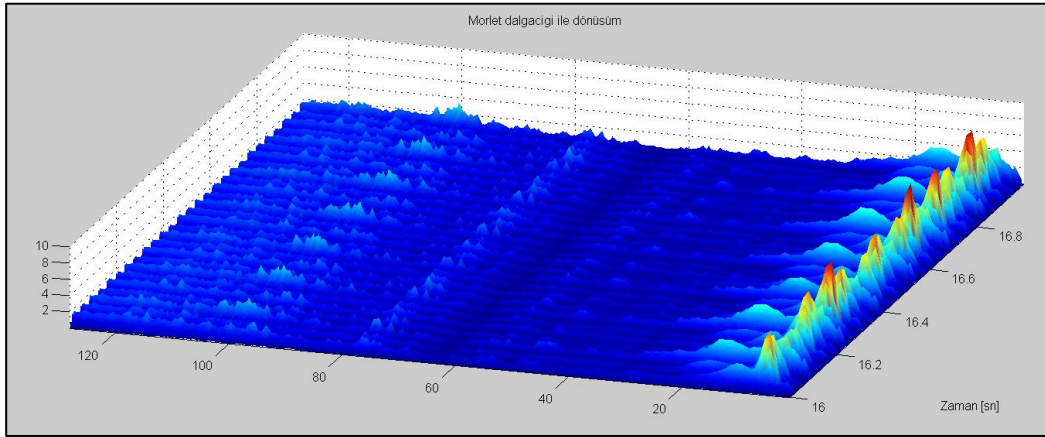
Şekil 5.11 : Mexican Hat dalgacığı ile sinyal 1'in dönüşümü.

Mexican Hat dalgacığı ile yapılan dönüşüm ise şekil 5.12'de görüldüğü gibi oldukça keskin bir şekilde periyodikliği vurgulamış, ancak düşük ölçekli bileşenlerin görünürlüğünü azaltmıştır.

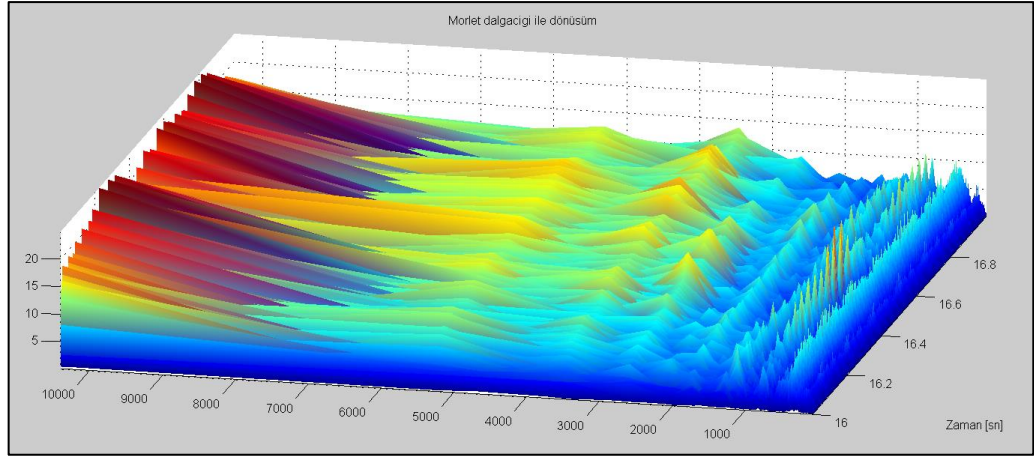


Şekil 5.12 : Mexican Hat dalgacığı ile sinyal 1'in dönüşümü.

Morlet dalgacığının, sinyal 1'deki gibi ani değişimler içerdiği için, titreşim örneğini daha iyi yansıttığı gözlenmiştir. Seçilen dalgacığın sinyale benzerliği arttıkça, dalgacık ile sinyalin korelasyonu sonunda sinyalin yapısı daha yüksek katsayılarla ifade edilebilmiş, böylece sinyalin özellikleri daha görünür olabilmektedir. Aynı dönüşüm, farklı açılardan (şekil 5.13) ve pseudo frekanslar cinsinden (şekil 5.14) birlikte incelendiğinde, sinyalin yapısı daha net anlaşılabilir.



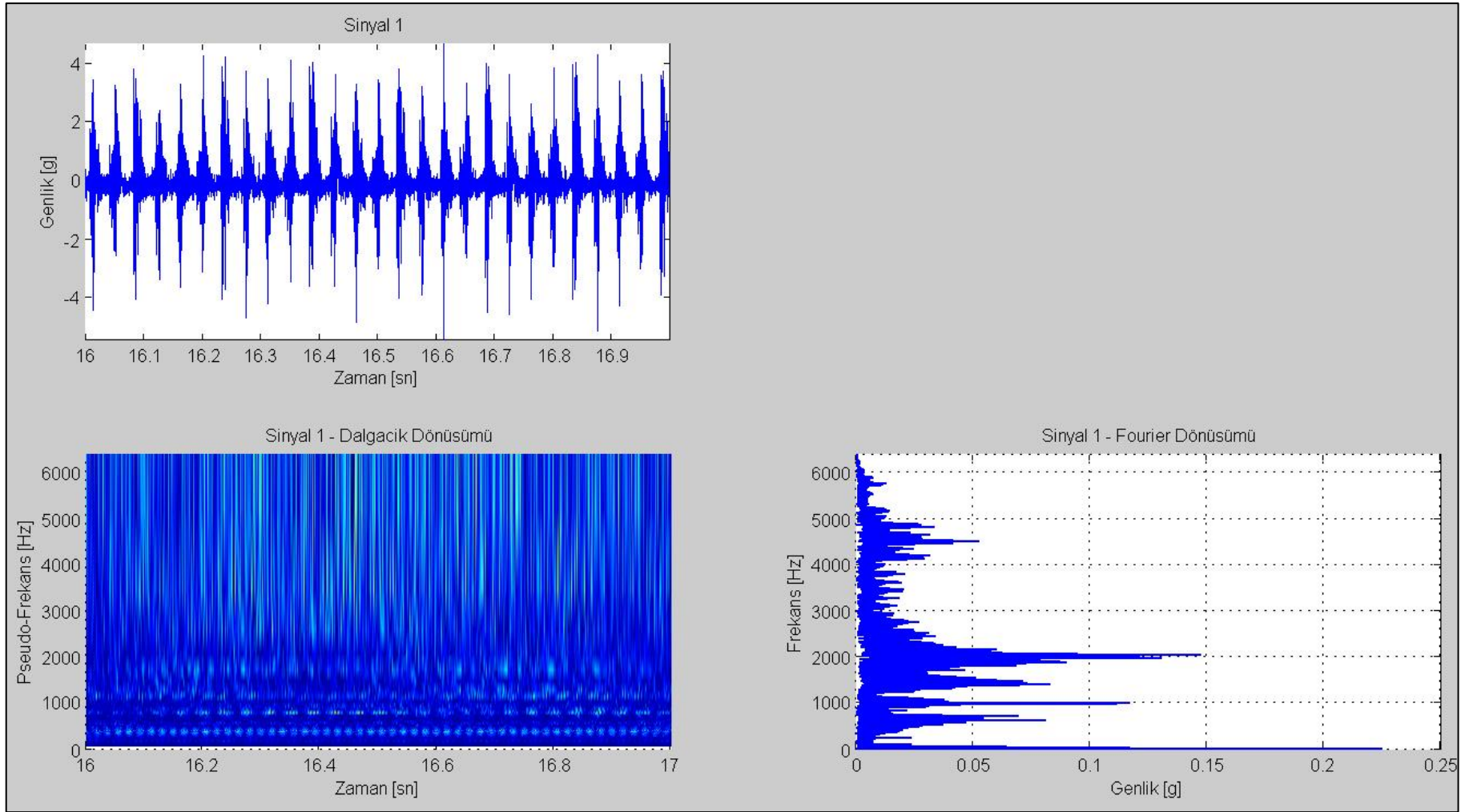
Şekil 5.13 : Morlet dalgacığı ile sinyal 1'in dönüşümünün farklı bir açıdan görünümü.



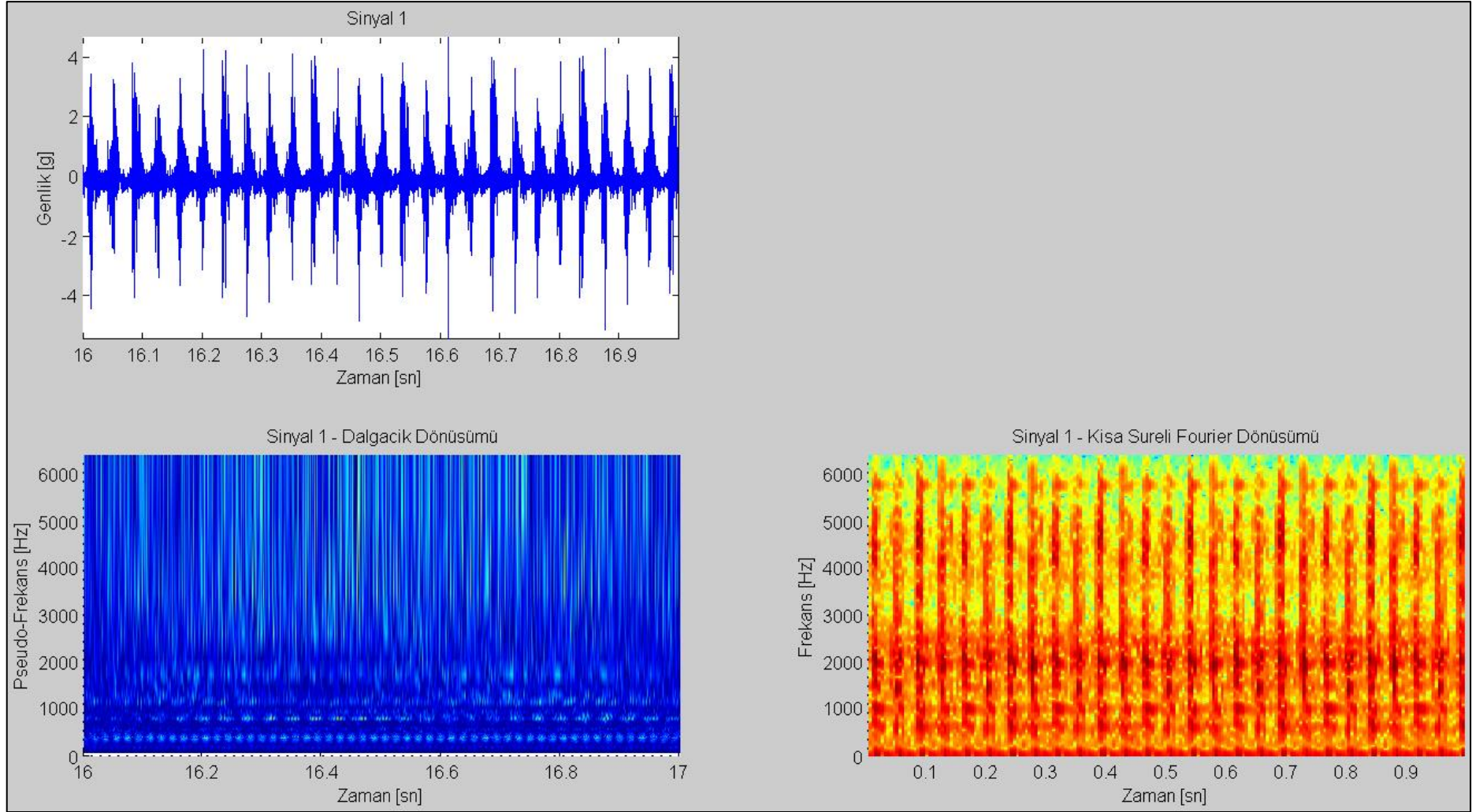
Şekil 5.14 : Morlet dalgacığı ile sinyal 1'in dönüşümünün pseudo-frekanslar ile 3 boyutlu görünümü.

Silindirlerde gerçekleşen her bir patlama sonucu sinyalde oluşan tepeciklerin, her birinin aynı genlikte ve aynı aralıktaki ölçeklerde olmadığı özellikle şekil 5.13'te net olarak görülebilmektedir. Bu, her patlamanın aynı şekilde gerçekleşmediğini, bazı patlamaların – örnek sinyaldeki her dört patlamadan birinin- diğerlerine göre daha güçlü olduğunu ve daha fazla frekans bandında gerçekleştiğini ifade etmektedir. Bu bilgi, NVH bakış açısından çok değerli bir bilgidir. Çünkü, motorlarda gerçekleşen patlamaların homojen olmayışını insan kulağı farkedebilmektedir. Sürekli ve ani gerçekleşen bu sinyal değişimleri de bir süre sonra sürücülerde rahatsızlık oluşturabilmektedir. Söz konusu istenilmeyen durum, NVH alanında impulsif karakter olarak bilinmekte ve NVH ile uğraşan insanların çözmeye çalıştıkları sorunlardan biridir. Dalgacık dönüşümü, sinyaldeki bu özelliği açığa çıkarabilmiştir.

Örnek titreşim sinyalinin, Fourier ve dalgacık dönüşümleri ile karşılaştırmalı olarak gösterimi ise şekil 5.15'da verilmiştir. Dalgacık dönüşümü pseudo-frekanslar cinsinden ifade edilmiştir. Bu şekilden Fourier dönüşümünün sadece sinyaldeki frekanslar hakkında bilgi verebildiği görülmektedir. Sinyaldeki anlık değişimler ya da impulsif karakter hakkında bir bilgi elde edilememektedir. Her iki dönüşüm tipinden görülebilen özellikler ise sinyalde yüksek enerjili bileşenlerin 2500 Hz ve daha düşük frekanslarda toplandığıdır. Şekil 5.16'da da aynı sinyalin KSFD ile karşılaştırmalı görünümü verilmiştir.



Şekil 5.15 : Örnek titreşim sinyalinin Fourier dönüşümü ile karşılaştırmalı olarak gösterimi.



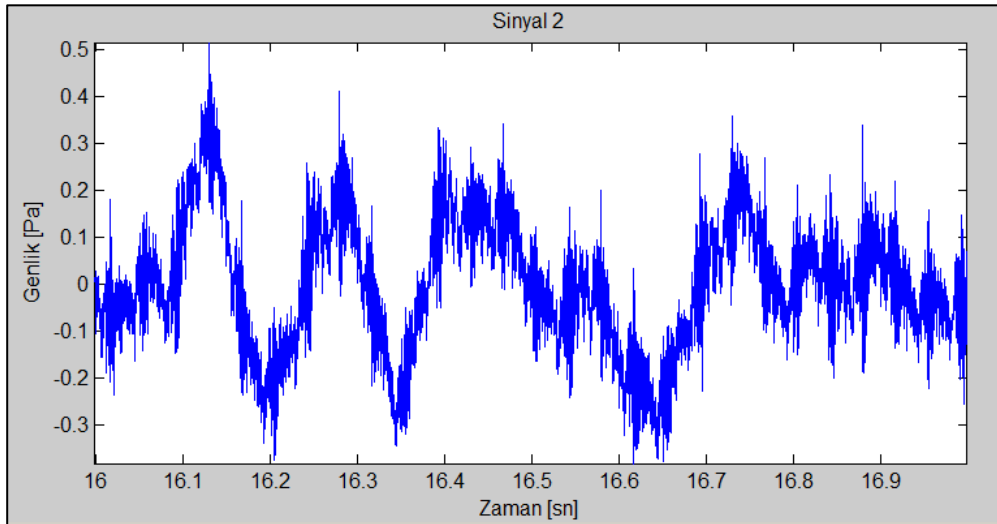
Şekil 5.16 : Örnek titreşim sinyalinin KSFD ile karşılaştırmalı olarak gösterimi.

Şekil 5.16’da görülmektedir ki, KSFD’nin, dalgacık dönüşümü gibi sinyaldeki periyodik ve zamana bağlı değişimleri ortaya koyabildiği görülmüştür. Ancak, dalgacık dönüşümünün ölçeklerle ifadesi olan şekil 5.13’te görülen impulsif karakteri yansıtan bileşenler KSFD ile görünmemektedir. Ayrıca her bir patlamada 2 kere veya daha fazla tekrar eden ve bazı olaylar dalgacık dönüşümü ile görünür hale gelmiştir. Oysa KSFD ile yakalanan detaylar çok daha kaba bir seviyede olduğu için sinyalin özellikleri belirgin değildir. Özellikle 1000 Hz’den aşağısı dalgacık dönüşümü için oldukça net iken, KSDF için oldukça kaba bir düzeyde ifade bulmuştur.

5.2 Gürültü Sinyallerinin Dalgacık Analizi

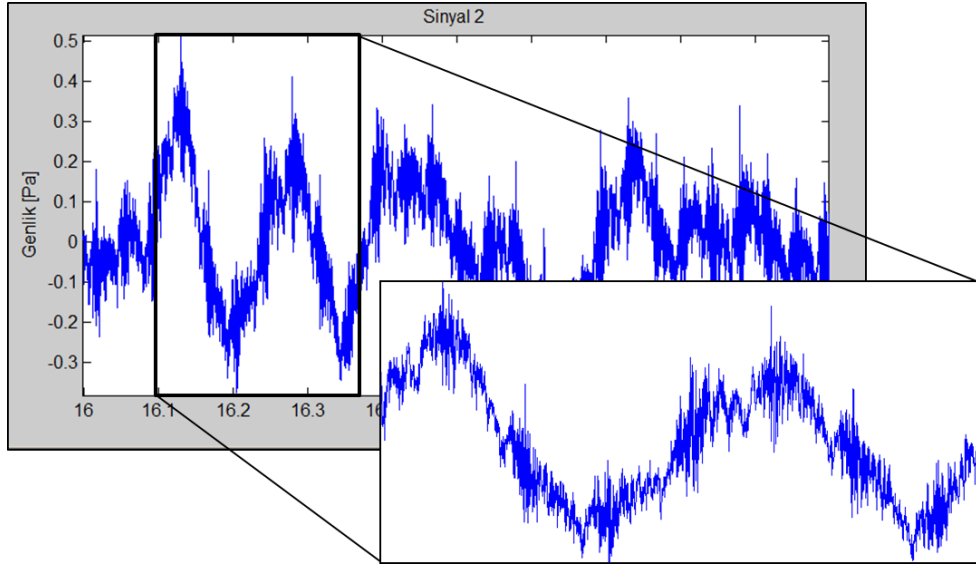
NVH ile ilgili diğer temel araştırma alanı olan akustik sinyaller de incelemeye dahil edilmiştir. NVH çalışmalarında akustik veriler tek başlarına incelenebildiği gibi, titreşim verileri ile eşzamanlı olarak da toplanıp incelenebilmektedir. Bundaki amaç, farklı parçalardan alınan titreşim verileri ile eşzamanlı alınan gürültü verilerini karşılaştırarak, gürültü verilerinin kaynağını tespit etmektir. Bu örnekte, dalgacık analizi gerçekleştirilerek gürültü sinyalleri incelenmiş, titreşim verileri ile karşılaştırılmış ve Fourier tabanlı dönüşümlere göre avantaj ve dezavantajları ortaya konmuştur.

Öncelikle, Şekil 5.17’de verilen akustik sinyal için, önceki bölümde verilen titreşim sinyalinde uygulandığı gibi, uygun dalgacık tipi seçimi yapılmıştır.



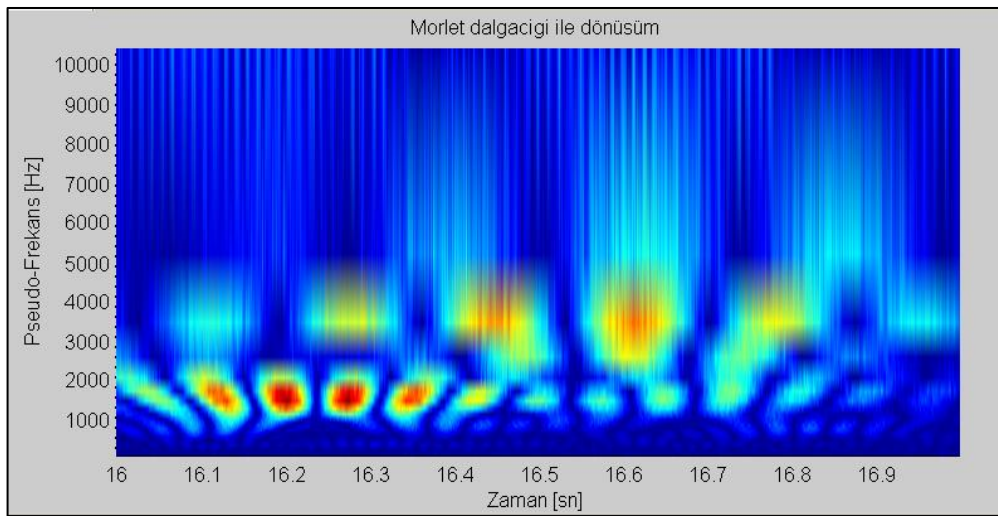
Şekil 5.17 : Gürültü sinyali.

Uygun dalgacık seçimi için sinyal şekil 5.18’de zaman uzayında yakından incelenmiştir.

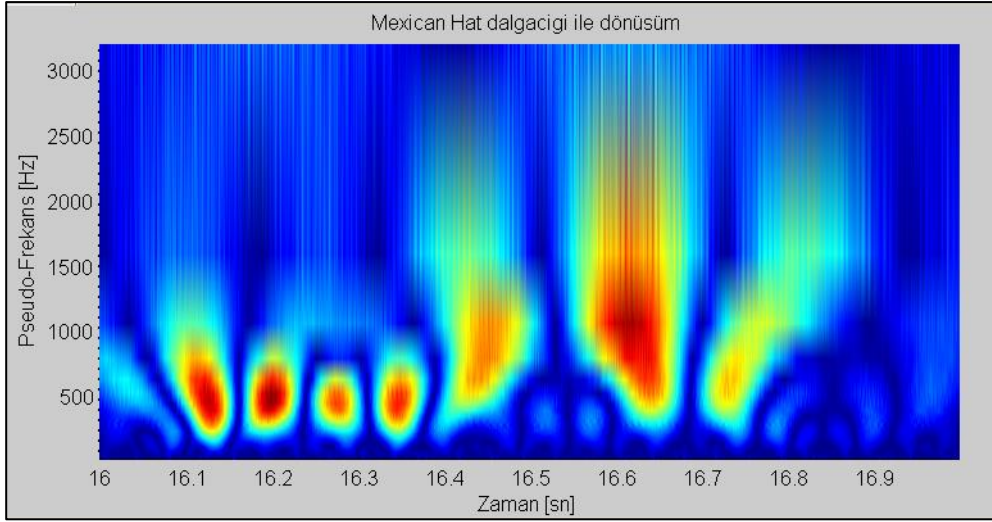


Şekil 5.18 : Örnek sinyal 2’nin yakından görünümü.

Şekil 5.18’de görülen örnek sinyal 2’de göze çarpan özellikler, farklı yüksek frekanslı bileşenler ve sinyalin ana karakterini belirleyen düşük frekanslı bileşenlerdir. Bu yapı örnek sinyal 1’deki yapıdan daha farklıdır ve daha yumuşak geçişleri de içermektedir. Bu sebeple, yumuşak geçişli ve dar destekli dalgacıkları incelemek uygun bulunmuştur. Sürekli dönüşüme uygun dalgacıklardan morlet ve mexican hat ile dönüşüm yapılarak yansıttıkları özellikler gözlenmiştir. Bu dönüşümler sırasıyla şekil 5.19 ve şekil 5.20’de verilmiştir.

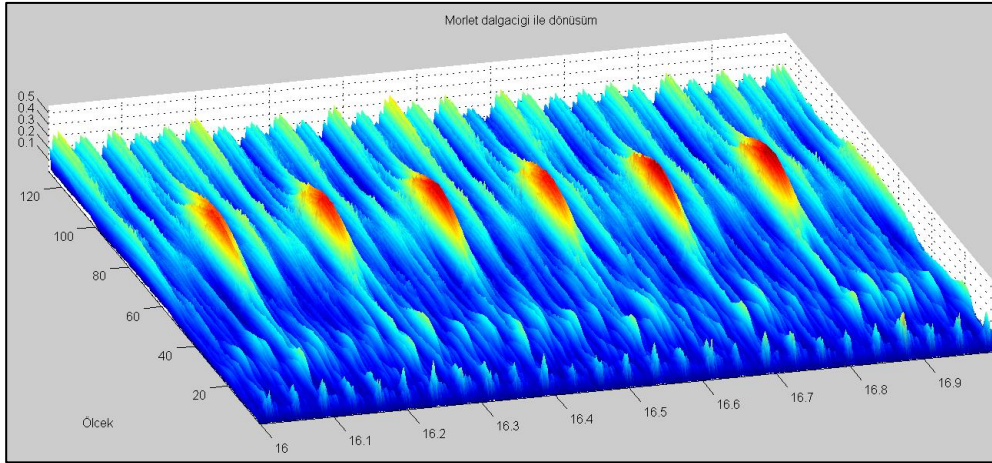


Şekil 5.19 : Morlet dalgacığı ile sinyal 2’nin dönüşümü.



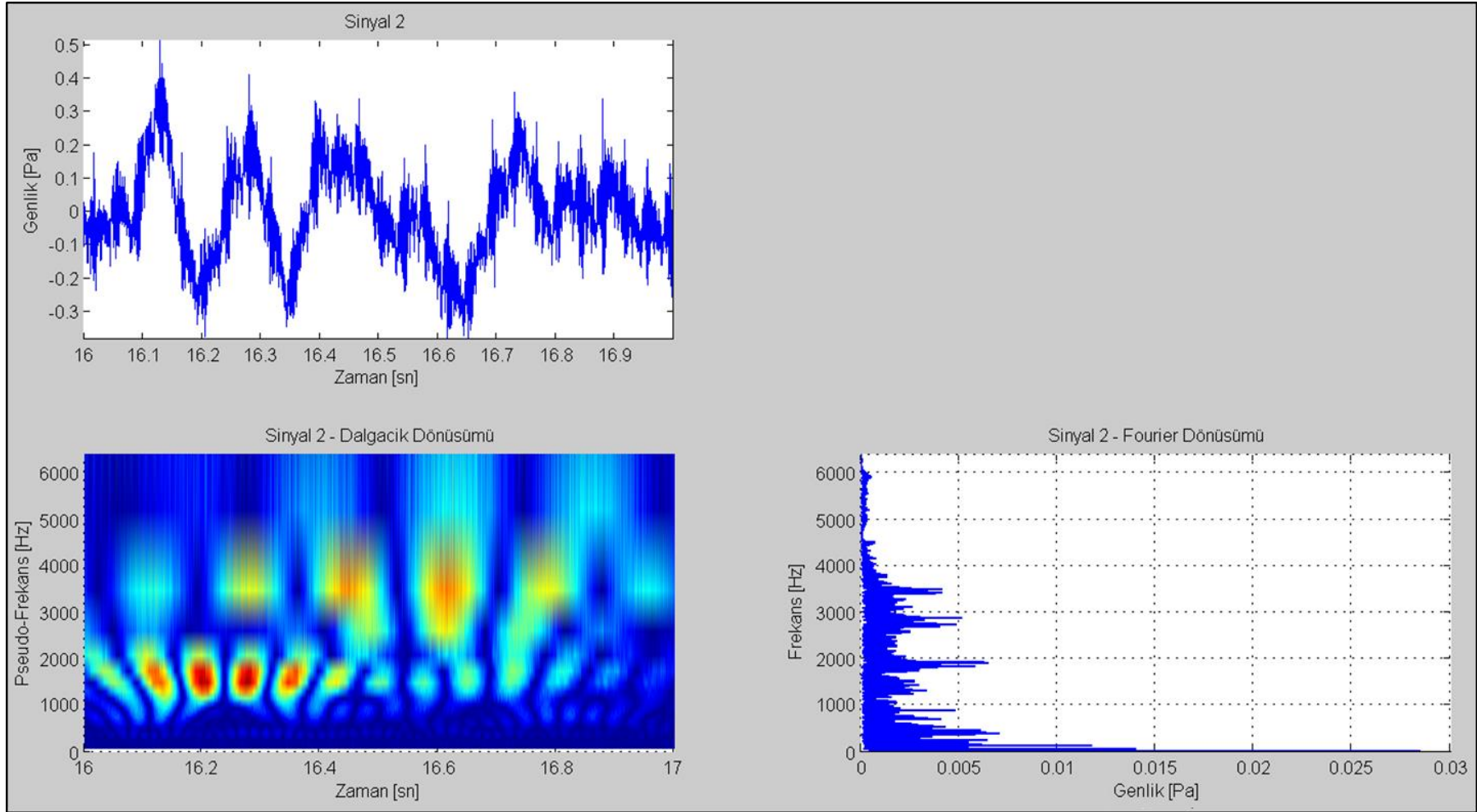
Şekil 5.20 : Mexican Hat dalgacığı ile sinyal 2'nin dönüşümü.

Morlet dalgacığının etkili olduğu aralık, Mexican Hat dalgacığının etkili olduğu aralığa nispeten daha dar olduğu için ve Morlet dalgacığı sinyale daha benzer bir yapıda olduğu için yüksek ölçeklerdeki bileşenleri daha net bir şekilde ayırt etmiştir. Bu sebeplerden dolayı incelemenin Morlet dalgacığı ile yapılması uygun bulunmuştur. Dönüşüm şekil 5.21'de verilmiştir.



Şekil 5.21 : Morlet dalgacığı ile ölçek cinsinden sinyal 2'nin dönüşümü.

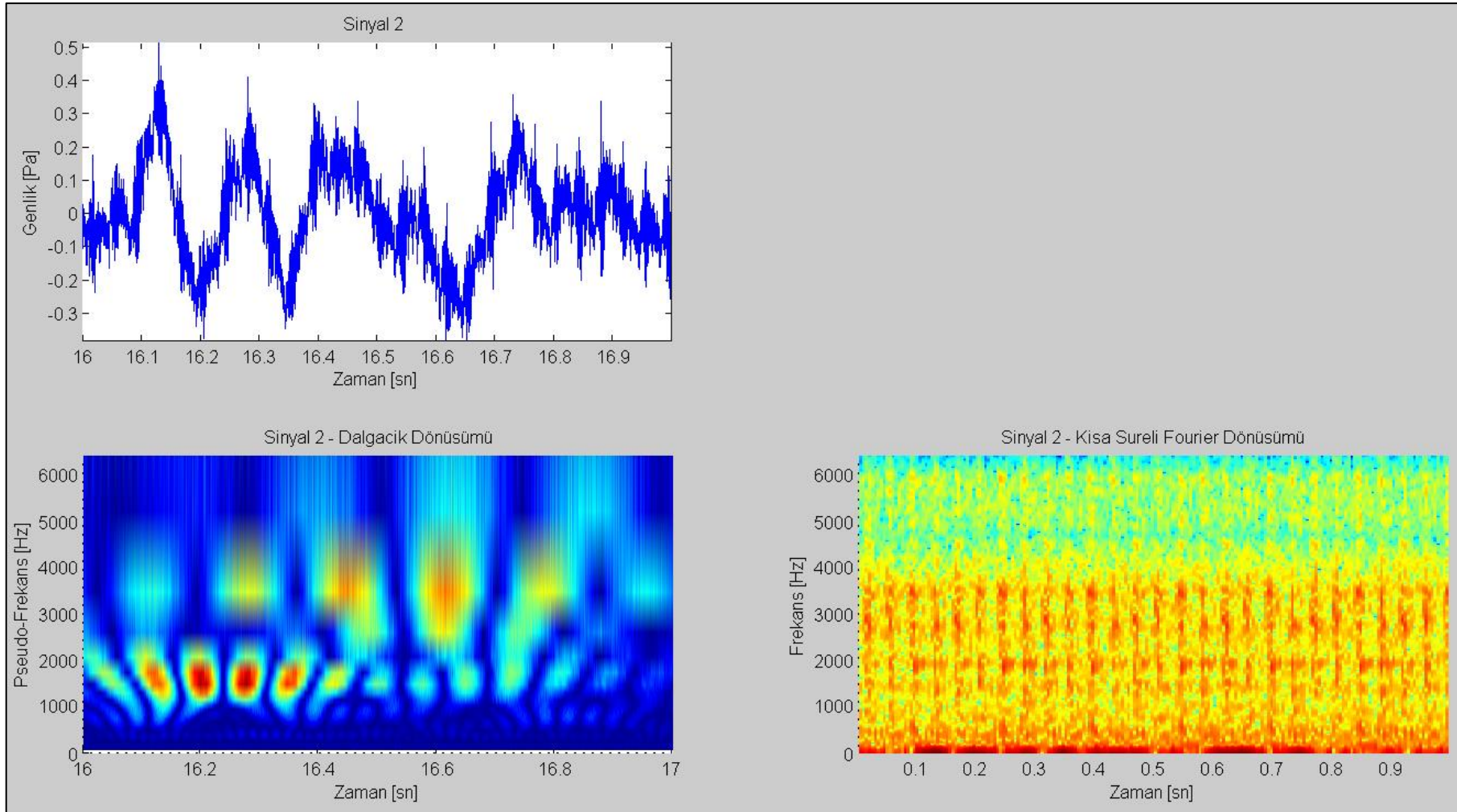
Yukarıdaki şekil 5.21 ile verilen dönüşüm, sinyalin ölçek cinsinden Morlet dalgacığı ile dönüşümüdür. Bu sinyalde ilk göze çarpan ise patlamalar arasında titreşim sinyalinde görülen farkların, akustik sinyalde çok daha belirgin şekilde ortaya çıkmış olduklarıdır. Sinyal, bu gözlemden sonra Fourier dönüşümü ile karşılaştırmalı olarak şekil 5.22'de verilmiştir.



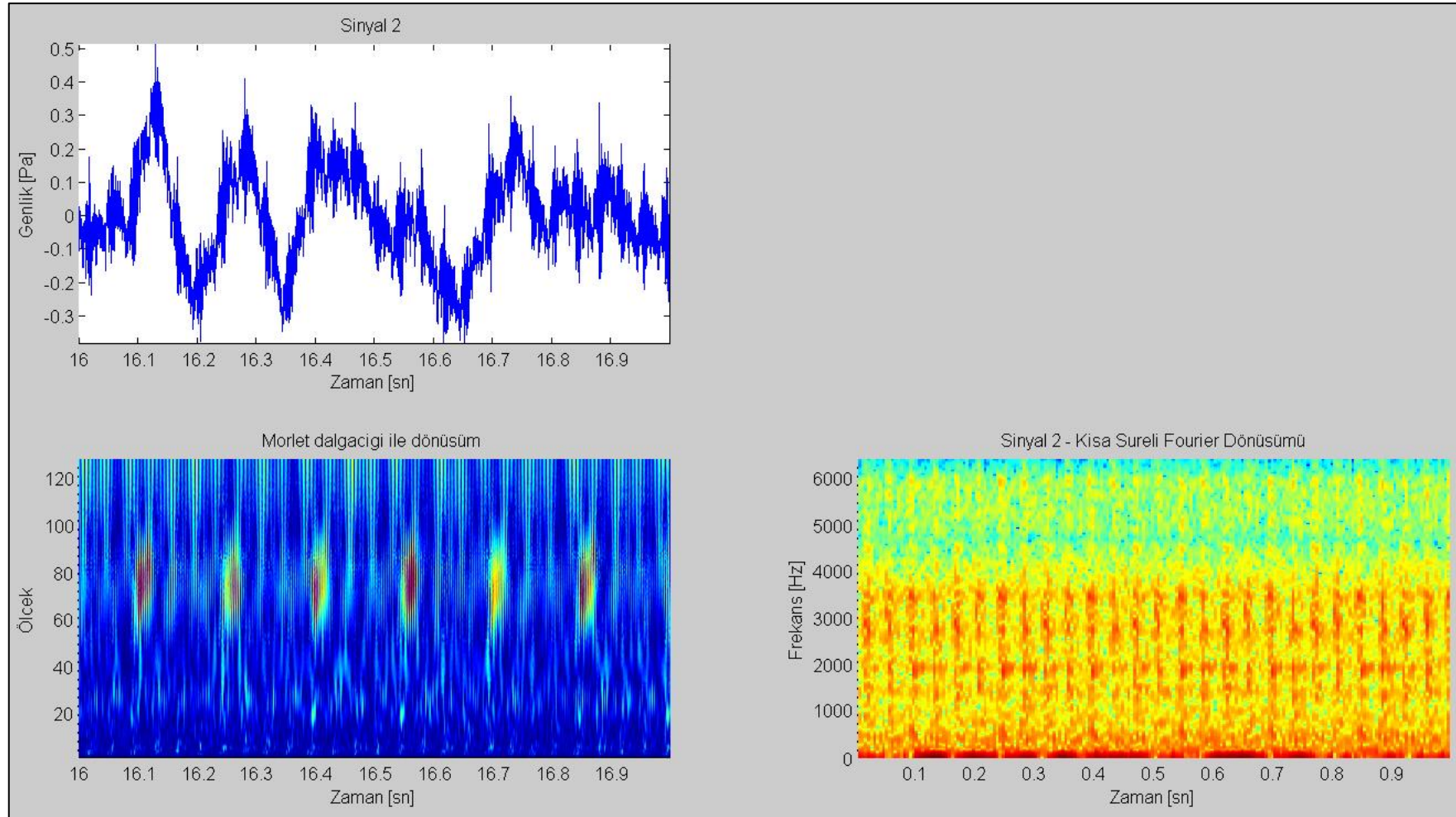
Şekil 5.22 : Örnek gürültü sinyalinin Fourier dönüşümü ile karşılaştırmalı olarak gösterimi.

Akustik sinyalin 2000 Hz civarında ve 3000-4000 Hz aralığında yoğunlaşan yüksek enerjili bileşenleri her iki dönüşümden de okunabilmektedir. Dalgacık dönüşümü ise ayrıca sinyalin zamana bağlı değişimlerini, hem yüksek hem de düşük frekanslar için gösterebilmiştir.

Şekil 5.23'te ise yine titreşim sinyali örneğinde olduğu gibi, akustik sinyalin KSFD ile karşılaştırmalı dalgacık dönüşümü verilmiştir. Bu şekilden, iki dönüşüm arasındaki majör farklar net bir şekilde okunabilmektedir. Öncelikle, dalgacık dönüşümüyle 2000 Hz civarındaki bileşenin sinyalin ilk 0.4 saniyesinde daha yüksek genlikler aldığı, ancak sonrasında biraz düştüğü gözlenebilirken KSFD bu frekanstaki bileşenin varlığını gösterebilmiş, ancak hangi zaman aralığında daha çok gürültülü hangi zaman aralığında daha az gürültülü olduğunu ayırt edememiştir. Bir diğer fark ise, şekil 5.24'te ölçek cinsinden dalgacık dönüşümü ile açıkça görülen patlamalar arasındaki heterojenliğin KSFD ile yakalanamamasıdır. Hem KSFD hem de dalgacık dönüşümleri sinyale ait zaman bilgisini taşımalarına rağmen, KSFD ile yapılan dönüşümlerin sinyaldeki zamana bağlı değişimler açısından, dalgacık dönüşümü ile yapılanlara göre daha az bilgi veya ayrıntı içermekte olduğu gözlenmiştir.



Şekil 5.23 : Örnek gürültü sinyalinin KSFD ile karşılaştırmalı olarak gösterimi.

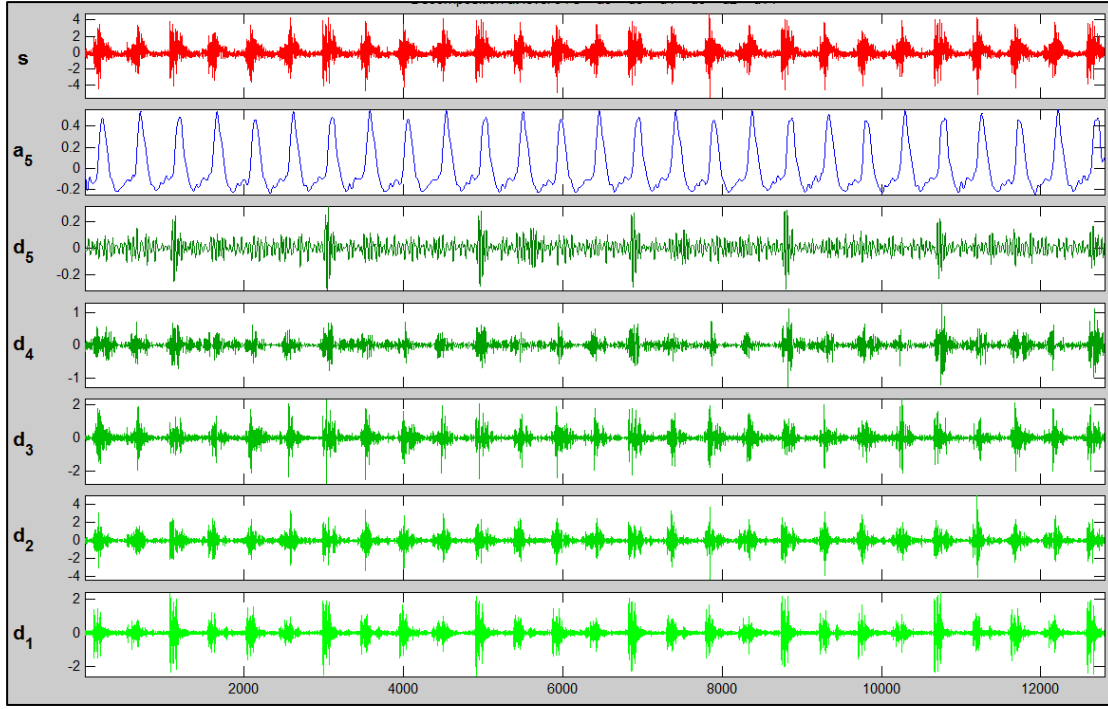


Şekil 5.24 : Örnek gürültü sinyalinin KSFD ile karşılaştırmalı olarak gösterimi.

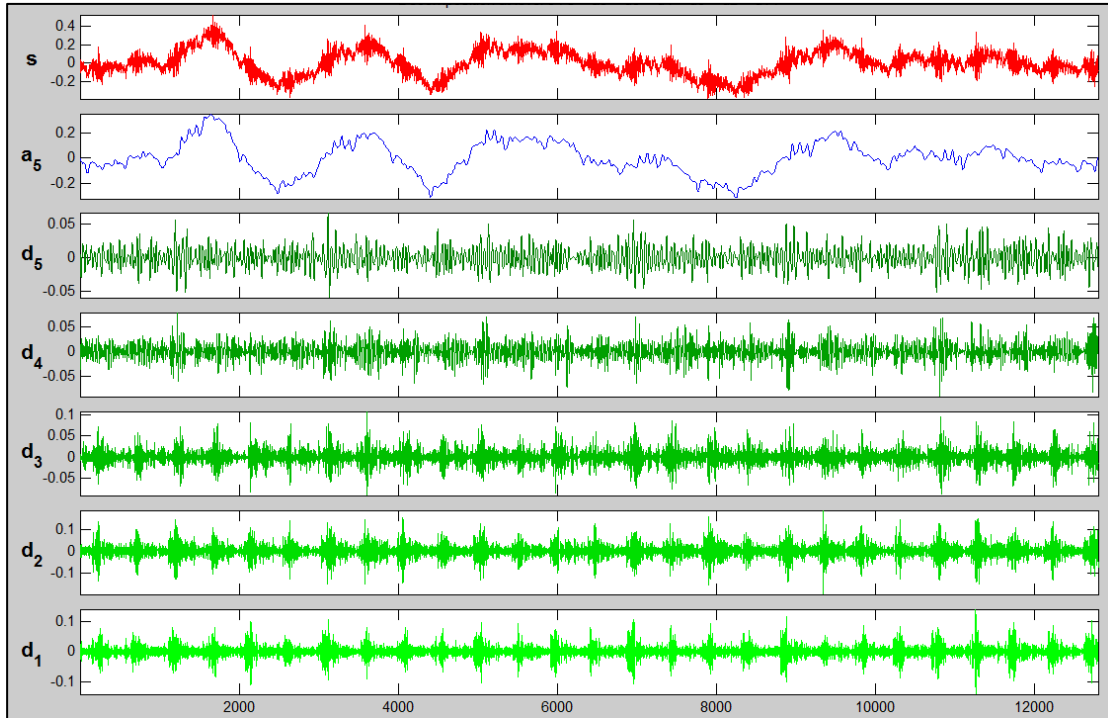
Bölüm 5.1’de kullanılan titreşim sinyali ile bu bölümde kullanılan eşzamanlı akustik sinyal, ayrık dalgacık dönüşümü ile de incelenmiştir. Bu dönüşüm sonucunda sinyallere ait yaklaşıklık ve detay fonksiyonları elde edilecek ve Fourier tabanlı dönüşümlerden edinilebilen bilgiler ile karşılaştırılacaktır.

Ayrık dalgacık dönüşümü, teori bölümünde de anlatıldığı üzere, dalgacıkları bant sınırlı filtre gibi kullanarak yapılan dalgacık dönüşümüdür. Sinyalin ayrık ve ortogonal ölçek bantları içerisinde incelenmesi ile farklı özellikleri görülebilmektedir.

Şekil 5.25’te titreşim sinyalinin ayrık dönüşüme de uygun dalgacıklardan symlet 5 ile 5 kademeli ayrıştırılması, şekil 5.26’da ise gürültü sinyalinin aynı dalgacık ve kademe sayısı ile ayrıştırılması gösterilmiştir. Aşağıdaki gösterimlerde s sinyalin kendisini, d_i ’ler detay fonksiyonlarını ve a_i ’ler yaklaşıklık fonksiyonlarını belirtmektedir. Bu iki ayrıştırma arasında özellikle detay fonksiyonlarının büyük benzerlik gösterdiği görülmektedir. Titreşim sinyaline ana karakterini veren patlamalar, beklendiği gibi yaklaşıklık fonksiyonuna şekil vermiştir. Gürültü sinyalinin ana karakteri ise yaklaşıklık fonksiyonundan görüldüğü gibi oldukça farklı olmasına rağmen, detay fonksiyonlarında titreşim sinyalindekiler gibi impulsif yapılar dikkati çekmektedir. Üstelik, detay fonksiyonları sadece kabaca birbirine benzememekte, patlamalar arasındaki farkları ortaya koyacak şekilde ayrıntılı bir benzerlik göstermektedir. Bu durum, iki sinyal arasındaki net ilişkiyi ortaya koymaktadır ve bu da NVH çalışmalarında gürültü kaynağını bulmak için ayrık dalgacık dönüşümünün oldukça etkili bir yol teşkil edebileceğini göstermektedir.



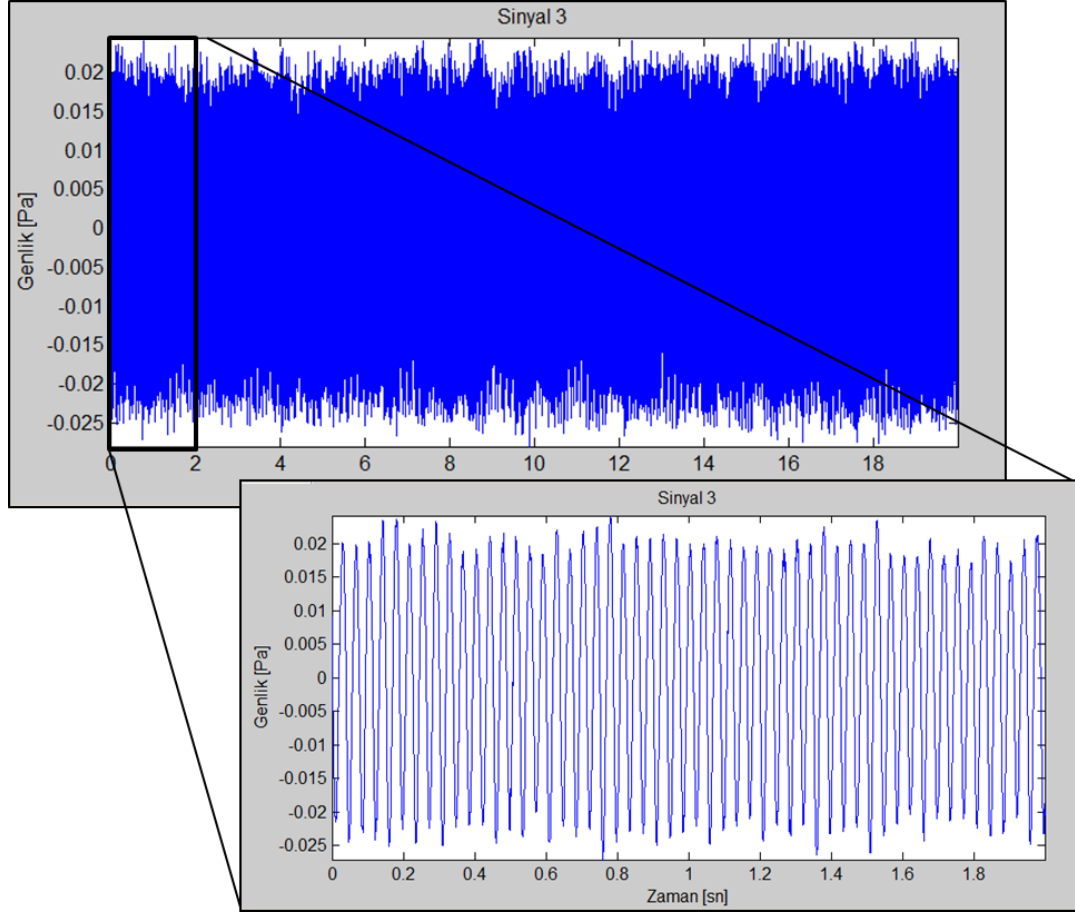
Şekil 5.25 : Titreşim sinyalinin 5 kademeli ayrıştırılması.



Şekil 5.26 : Gürültü sinyalinin 5 kademeli ayrıştırılması.

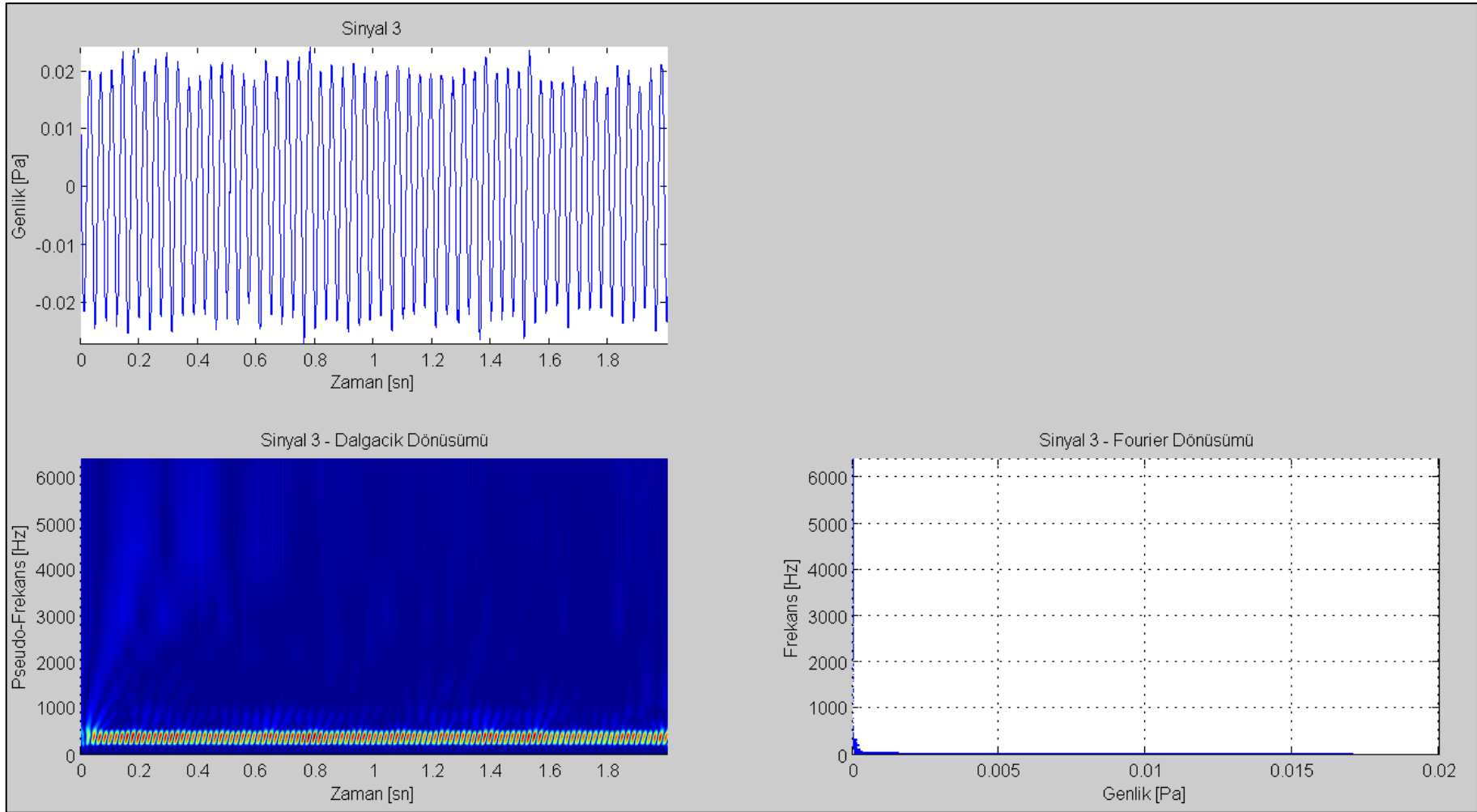
İkinci bir akustik sinyal incelemesi ise bir aracın sürücü kabininden rölanti devrinde alınan bir mikrofön verisi ile yapılmıştır. Sinyalin genel yapısının anlaşılabilmesi için 20 saniyelik bir kesiti verilmiştir ancak sadece ilk 2 saniyesinin dalgacık dönüşümü

ile incelenmesi bu örnek için yeterlidir. Şekil 5.27’de örnek sinyal 3’ün zaman eksenindeki görüntüsü verilmiştir.



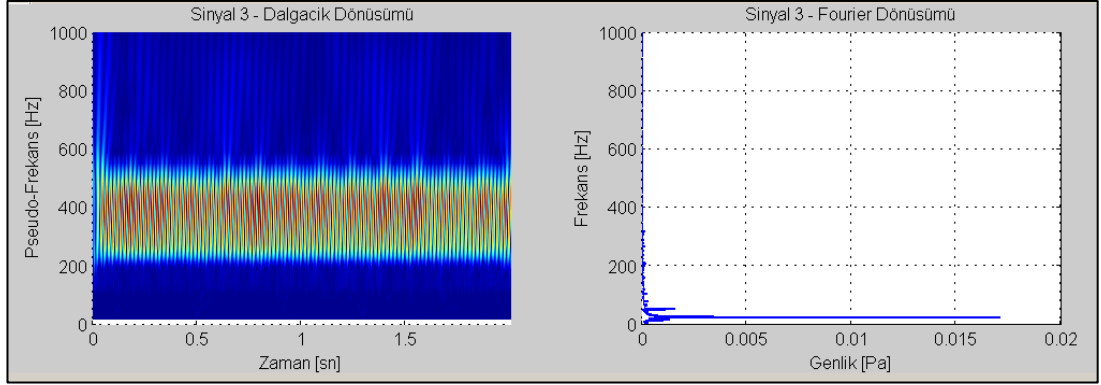
Şekil 5.27 : Örnek sinyal 3’ün zaman uzayında görünümü.

Bu sinyalin dalgacık dönüşümü için Meyer dalgacığı seçilmiş ve Fourier dönüşümü ile karşılaştırmalı görünümü şekil 5.28’de verilmiştir.



Şekil 5.28 : Örnek gürültü sinyalinin Fourier dönüşümü ile karşılaştırmalı olarak gösterimi.

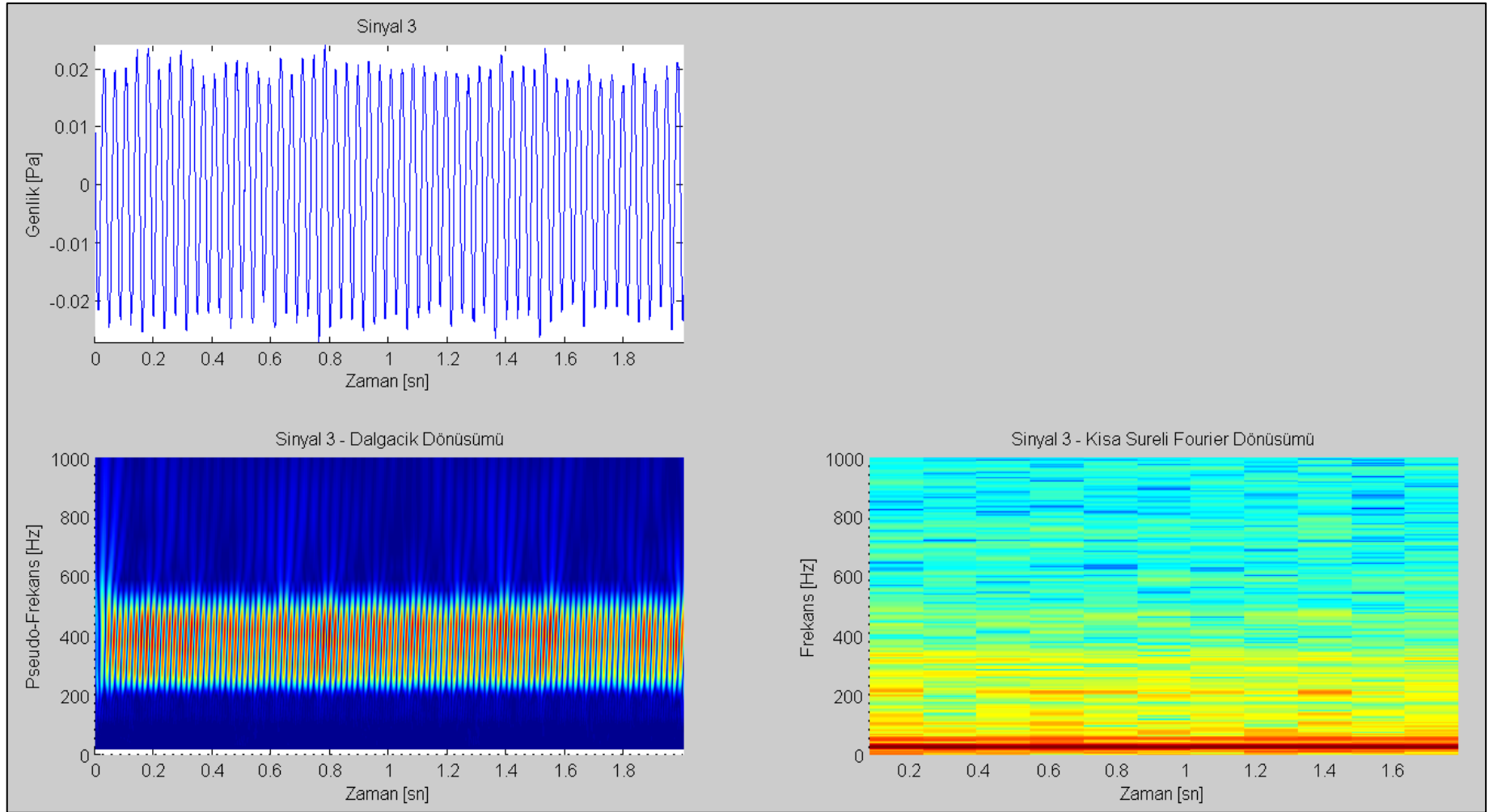
Hem Fourier hem de dalgacık dönüşümünün gösterdiği gibi, sinyalde geniş bir frekans spektrumu bulunmamaktadır. Spektrum 1000 Hz'ün altında toplanmıştır. Bunu daha iyi görmek için 1000 Hz'ün altındaki spektruma şekil 5.19 ile yaklaşmıştır.



Şekil 5.29 : Sinyal 3'ün 1000 Hz altı (a) dalgacık dönüşümü (b) Fourier dönüşümü.

Şekil 5-29 (b) göstermektedir ki, sinyalde 30 Hz civarında sinyale karakterini veren bir sinyal bileşeni mevcuttur. Bu bileşen dalgacık dönüşümünde (a) pseudo-frekanslar cinsinden 400 Hz civarında gösterilebilmiştir. Ancak, dalgacık dönüşümü, sinyalin periyodikliğini vurgulamaktadır ve sinyaldeki harmonik tepeliklerin sayısı, söz konusu sinyalin 28 Hz frekansına sahip olduğunu göstermektedir.

Sinyaldeki baskın bileşenin oldukça düşük frekanslı olduğu bilgisi edinildiği için, bu bilgi ışığında, KSFD için sinyal 1 ve sinyal 2 uygulamalarında kullanılan pencere boyundan daha geniş bir pencere boyu seçilmesi gerektiğine karar verilmiştir. Önceki çalışmalarda 128 olarak kullanılan Hanning penceresinin boyu, düşük frekanslı sinyali daha iyi göstermek amacıyla bu örnek için 2048'e çekilmiştir. Bu dönüşümün dalgacık dönüşümü ile karşılaştırmalı sonucunun anlamlı kısmı olan 1000 Hz altındaki içeriği, şekil 5.30'da gösterilmiştir.

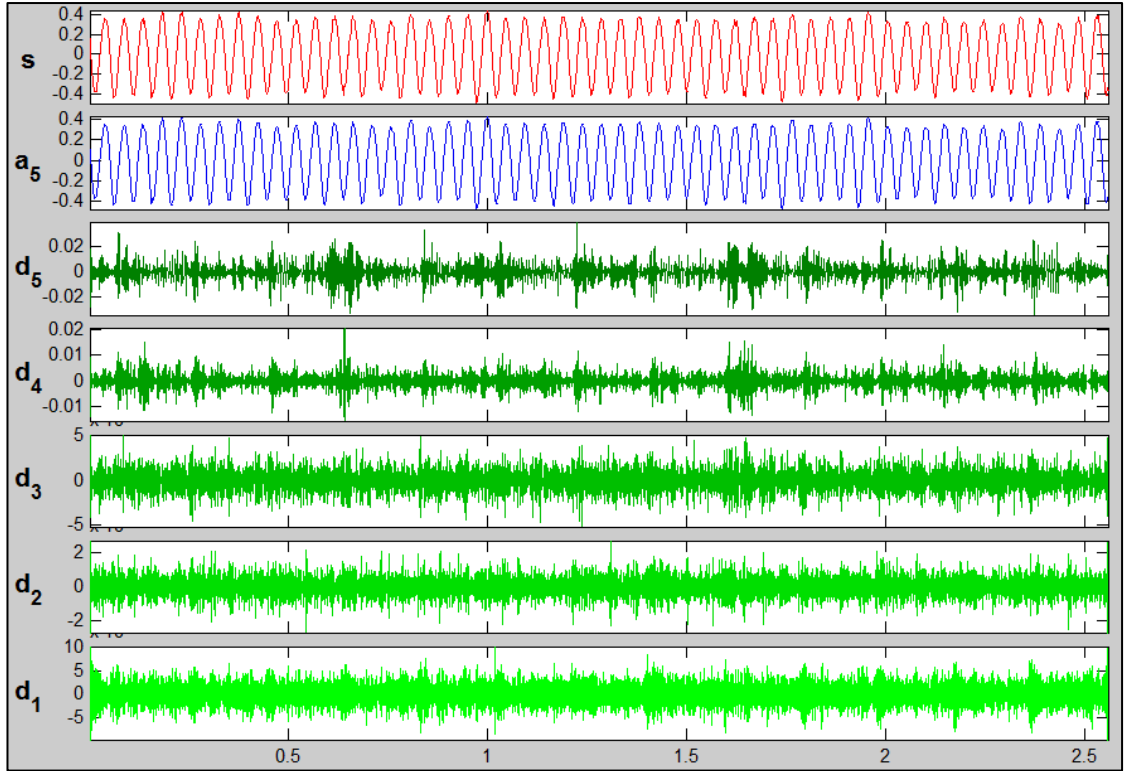


Şekil 5.30 : Örnek gürültü sinyalinin KSFD ile karşılaştırmalı olarak gösterimi.

Şekil 5.30'daki KSFD için pencere boyunun genişletilmesiyle dönüşüm frekans ekseninde iyi bir çözünürlüğe kavuşmuştur. Ancak, pencere büyüdüğü için sinyalin zaman çözünürlüğü oldukça azalmıştır.

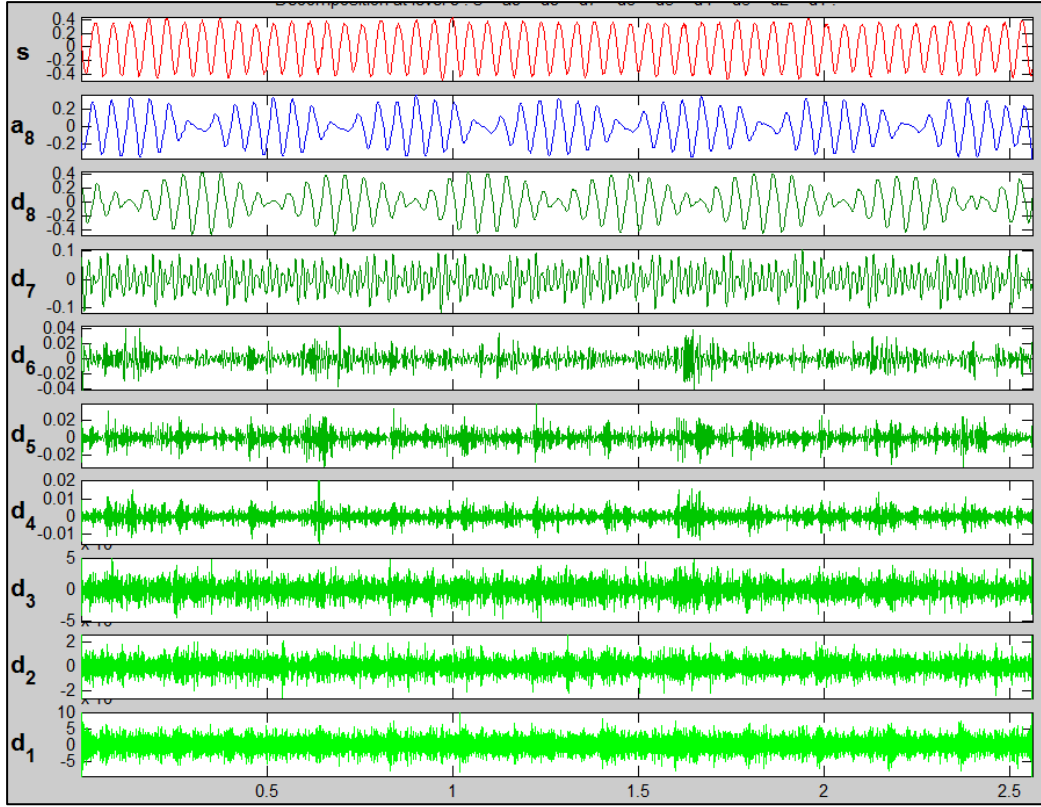
Örnek sinyal 3 için, sürekli dalgacık dönüşümü kullanılarak, Fourier tabanlı yöntemlerin verebildiğinden fazla olarak edinilebilen bilgiler, sinyalin daha belirli bir aralıkta oluşan periyodikliği vurgulanmış olan bileşenlerinin olduğudur. Ancak, bu sinyalin dinlenildiği zaman yukarıda bulunandan daha farklı bir bileşeni daha olduğu insan kulağı tarafından seçilebilmektedir. Bu sebeple, sinyal bir de ayrık dalgacık dönüşümü ile incelenmiştir.

Şekil 5.31'de gösterilen, örnek sinyal 1 ve 2'de yapıldığı gibi 5 kademelidir. Ancak bu sefer Daubechies 4 dalgacığı ile yapılan dönüşümün yaklaşıklık fonksiyonu a_5 , sinyalin zaman eksenindeki görünümünden çok farklı bir görüntü vermemiştir. Ayrıca, sinyalde duyulan periyodik bileşen, ne detay ne de yaklaşıklık fonksiyonlarında görülememektedir.



Şekil 5.31 : Örnek sinyal 3'ün 5 kademeli ayrıştırılması.

Ayrıştırmanın kademesi 8'e yükseltilerek sinyal şekil 5.32'de tekrar incelenmiştir.



Şekil 5.32 : Örnek sinyal 3'ün 8 kademeli ayrıştırılması.

8 kademeli ayrıştırmada 8. detay fonksiyonunda sinyaldeki duyulabilen ancak önceki dönüşümlerde görülemeyen bileşen ortaya çıkmıştır. Bu sinyalin örnekleme frekansı 12800'dir ve görselde 25600 adet nokta görülmektedir. Yani incelenen sinyal parçasının periyodu 2 saniyedir ve bu sürede 6 kez tekrarlanan bir modülasyon göze çarpmaktadır. Gerçekten de, bu verinin toplandığı araçta 3 Hz'te çalışan bir pompanın varlığı bilinmektedir ve bu çok düşük frekanslı bileşen insan kulağının algılayabileceği başka bir frekans modüle etmekte ve dolayısı ile kolayca algılanabilmektedir. Bu modülasyon bileşeni de, ancak ayrık dalgacık dönüşümü ile yakalanabilmiştir.

Bu örnek ile yapılan çalışma, sinyallerdeki farklı bileşenlerin, farklı dalgacık dönüşümü yöntemleri uygulanarak tespit edilebileceğini göstermiştir. Bu sebeple, ilgilenilen frekans bandı, sinyalin genel karakterinin incelenmesi ve dönüşüm sonunda elde edilmek istenen bilgiye göre ayrık veya sürekli dalgacık dönüşümleri tercih edilebilir.

5.3 Sonuçların Fourier ve Kısa Süreli Fourier Analizleri ile Karşılaştırılması

Otomotivde karşılaşılan titreşim ve gürültü sinyalleri bir çok farklı mekanizmadan kaynaklanabilmektedir. İstenmeyen bir titreşim veya gürültü olması durumunda, bu sorunun kaynağının tespiti en önemli adımdır. Sorunun kaynağı doğru olarak tespit edilemezse, yapılan çalışma şikayeti giderememekte ve zaman, insan gücü ve para gibi kayıplara sebep olabilmektedir. Bu sebeple, motor ve güç aktarma elemanları veya araç parçalarından kaynaklanan ve istenmeyen gürültü ve titreşimlerin giderilebilmesi için, bu parçalardan toplanan verilerin doğru ve yeterli şekilde incelenebilmesi gerekmektedir.

Bu bölümde, çeşitli titreşim ve gürültü sinyalleri ele alınmış, içerikleri hem dalgacık dönüşümleri ile hem de Fourier tabanlı dönüşümler ile incelenmiş ve aralarındaki farklar ortaya konmuştur. Böylece geleneksel yöntemler haricinde dalgacık dönüşümlerinin de NVH çalışmalarında kullanılabilirliğı araştırılmıştır.

Sinyallerden ilk ikisi, bir motorun yarı anekoik odada dinamometre kullanılarak yapılan ölçümü sırasında toplanmış, eşzamanlı ivmeölçer ve mikrofon verileridir. Bu sinyaller aynı dinamikler altında toplanmış olmalarına rağmen, titreşim sinyali bu dinamiğın, bulunduğu noktadaki yapısal özelliklerini yansıtacak cinsten, gürültü sinyali ise bu dinamiklerin toplamının akustik olarak yayılan kısmının özelliklerini yansıtacak cinstendir. Bundan dolayı sinyaller zaman-genlik gösteriminde oldukça farklı yapılar taşımalarına rağmen, benzer özelliklere de sahip oldukları bilinmektedir.

İncelemeye başlanırken, önce sinyal için uygun olan dalgacık tipinin tespiti yapılmıştır. Sürekli dalgacık dönüşümü ile Fourier dönüşümü karşılaştırılmış ve 3. bölümde gösterildiğı gibi, Fourier dönüşümü ile sinyalin frekans içeriğı hakkında bilgi edinilebilmiş ancak hangi anlarda hangi frekansların bulunduğu konusunda bir bilgi edinilememiştir. KSFD ile dalgacık dönüşümlerinin birlikte incelenmesi sonucu ise, KSFD'nün silindirlerde gerçekleşen patlamalar gibi zamana bağılı özellikleri hakkında bilgi verebildiğı, ancak bu patlamaların birbirlerinden farklarını tespit edemediğı görülmüştür. Öte yandan dalgacık dönüşümleri ile bu bilginin açıkça ortaya konabildiğı gösterilmiştir. Üstelik, gürültü sinyalindeki düşük frekanslı bileşenler, yüksek frekanslı bileşenleri görebilmek için ayarlanmış pencere boyutlarındaki KSFD ile yakalanamamıştır. Dalgacık dönüşümü ise yüksek ya da

düşük frekanslı olsun, çeşitli frekanslardaki bileşenleri tek bir dönüşüm ile yakalayabilmiştir. Bunlara ek olarak, her iki sinyalin de ayrık dalgacık dönüşümleri alınıp karşılaştırılarak detay fonksiyonlarında gizli benzerlikleri ortaya çıkarılabilmektedir. Bu durum, titreşim veya gürültü sorunların kökeninin tespitinde dalgacık dönüşümünden etkili bir şekilde yararlanılabileceğini kanıtlamaktadır.

İncelenen bir diğer gürültü sinyali de araç kabini içerisinde toplanmış mikrofon verisidir. Bu sinyal, motor rölantide çalışırken alındığı için motor devir sayısının sabit olmasına bağlı sürekli bileşenler barındırmakta, ancak, insan kulağı tarafından ayırt edilebilen ve çok düşük frekanslı bir bileşeni de bulunmaktadır. Bu sinyalin Fourier temelli dönüşümlerinden edinilen bilgi, sadece spektrumun hangi aralıklarda toplandığıdır. Sürekli dalgacık dönüşümüyle de bu frekans içeriklerinden belli bir kısmının varolduğu ve periyodik oldukları net bir şekilde görülebilmektedir. Ancak bahsedilen çok düşük frekanslı bileşen hakkında bir bilgi bu dönüşümlerden elde edilememiştir. Sinyalin ayrık dalgacık dönüşümü ise, yeterli sayıda kademede yapıldığında, bu bileşenin ortaya çıktığı gözlenmiştir. Bu da, incelenen sinyalin veya ilgilenilen frekans aralığının, yapılan çalışmada kullanılan yöntemin seçimini yönlendirmesi gerektiğini ortaya koymuştur.

6. GENEL DEĞERLENDİRME VE GELECEK ÇALIŞMALAR İÇİN ÖNERİLER

6.1 Genel Değerlendirme

Sinyal işlemenin yoğun olarak kullanıldığı alanlardan biri olan NVH çalışmaları, otomotiv sektöründeki rekabetin ilerlemesi ile daha da önem kazanmaktadır. Dolayısıyla, gürültü ve titreşim çalışmalarında kullanılan sinyal işleme yöntemlerinin de iyileştirilmesi kaçınılmaz olmuştur. Günümüzde bir çok ticari paket programın temelinde geleneksel Fourier tabanlı dönüşümler yer almaktadır. Bu yöntemler her ne kadar gelişmiş ve hızlı algoritmalar ile donatılmış olsalar da, incelenecek sinyalin ani değişimler içermesi gibi durumlarda her zaman yeterli ve gerekli bilgiyi sağlayamamaktadırlar.

Bu çalışmada, zaman çözünürlüğü Fourier dönüşümünden ve KSFD'den çok daha üstün olan dalgacık dönüşümleri tanıtılmış, özellikleri Fourier ve KSFD ile karşılaştırmalı olarak verilmiş ve NVH çalışmalarındaki sinyallere uygunluğu verilen örnekler üzerinden incelenmiştir.

Çalışmaya başlanırken görülen bir dezavantaj, dalgacık dönüşümleri ile ilgili bir çok kaynağın pratik kullanıma yönelik olmaması ve bu kaynakların mühendislerden ziyade matematikçilerin anlayabileceği dilde yazılmış olması idi. Bu çalışma, bu dezavantajı ortadan kaldırmayı da hedeflemiş, mühendislikteki uygulamalara yönelik daha anlaşılır bir kaynak oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu sebeple dalgacık dönüşümleri tanıtılmaya başlanmadan önce, bu dönüşümdeki matematiksel alt yapıya hazırlık olması amacıyla bazı tanımlar verilmiştir. Verilen tanımlardan sonra günümüzün en popüler sinyal işleme metotları olan Fourier dönüşümü ve KSFD tanıtılmıştır. Bundan sonra çoklu çözünürlük analizi tanıtılarak, dalgacık dönüşümünün temel mantığı açıklanmış, sürekli ve ayrık sistemler için dönüşüm tanıtılmıştır. Dalgacık dönüşümünün teorisinin açıklanmasından sonra ise çeşitli

dalgacık tiplerinden seçilen bir kaç tanesi daha sonraki bölümlerde kullanılmak üzere verilmiştir.

Dalgacık dönüşümü, MATLAB programı kullanılarak üretilen çeşitli sinyaller üzerinde denenerek, Fourier dönüşümü ile karşılaştırılmıştır. Önce basit sinyaller, daha sonra özellikleri daha karmaşık olan sinyaller bu karşılaştırmada kullanılmıştır. Durağan sinyallerde Fourier dönüşümünün kullanımının uygun olduğu gösterilmiş, ancak sinyallerde zamanla değişen bileşenler olduğu zaman, Fourier dönüşümünün sinyalin içeriği hakkında yeterli bilgi üretemediği, buna karşılık dalgacık dönüşümünün bazen zaman-genlik görünümünde gözle bile görülemeyen bu farkları net bir şekilde ortaya çıkardığı gözlemlenmiştir.

Bir sonraki aşamada, durağan ve durağan olmayan sinyaller, KSFD ile karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. KSFD'nin zaman bilgisi içermesine rağmen, zaman çözünürlüğünün tamamen pencere boyutuna ve pencerelerin birbirlerinin üzerine örtüşme yüzdesine bağlı olduğu teyit edilmiştir. Bu bilgi, düşük frekansları incelemeye uygun olan geniş pencere boyutları ile yüksek frekanslı bileşenlerin iyi bir şekilde yakalanamadığı, benzer şekilde, yüksek frekanslı bileşenleri incelemeye uygun dar pencere boyutları ile de düşük frekanslı bileşenlerin iyi görülemediğini ortaya koymuştur. Dalgacık dönüşümünün ise çoklu çözünürlük özelliği sayesinde, yüksek ve düşük frekanslı bileşenleri aynı anda üstün bir zaman çözünürlüğü ile ayırıştırabildiği gösterilmiştir.

Dalgacık dönüşümlerinin, Fourier ve KSFD ile karşılaştırılması, üretilen basit sinyaller üzerinde incelendikten sonra, otomotiv sektöründen alınan örnek titreşim ve gürültü sinyalleri ile incelemeler yapılarak, dalgacık dönüşümünün faydalı olabileceği durumlar gösterilmiştir. Bu amaca yönelik olarak incelenen sinyaller, NVH çalışmaları sırasında toplanan, yarı anekoik bir odada dinamometre ile döndürülen bir motordan alınan titreşim ve gürültü sinyalleri ve araç kabinlerinde toplanan gürültü ölçümlerinden oluşmaktadır. İnceleme, bu sinyallerden Fourier temelli yöntemler ile edinilen bilgilerden daha fazlasının, sürekli ve ayrık dalgacık dönüşümleri ile elde edilebileceğini göstermiştir. Sinyallerdeki ani değişimler, bu değişimlerin birbirlerine göre büyüklükleri veya benzerlikleri dalgacık dönüşümleri ile ortaya çıkarılmıştır. Bu da benzer NVH çalışmalarında toplanan sinyallerin dalgacık dönüşümleri kullanılarak incelenebileceğini ve sorunların tespit edilebileceğini göstermiştir.

6.2 Gelecek Çalışmalar İçin Öneriler

Dalgacık dönüşümleri, geleneksel Fourier yöntemlerine alternatif oluşturabilecek niteliktedir. Gelecekte, otomotiv sektöründeki gibi bir çok dinamikten etkilenen sinyal tiplerinde sadece hata tespiti için değil, hedef belirleme çalışmalarında da kullanılabilirliği araştırılabilir. Ayrıca, NVH alanındaki gürültü ve titreşim sinyalleri bütünsel olarak incelenip, hangi durumlarda hangi dalgacık tiplerinin kullanımının daha uygun olduğu araştırılıp, pratik kullanıma uygun genel sonuçlar çıkarılabilir ve karşılaşılan sinyalin niteliğine göre dalgacık oluşturulması araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Oppenheim, Alan V.; Schafer, Ronald W.** (1975). Digital Signal Processing. Prentice Hall. p. 5. ISBN 0-13-214635-5.
- [2] **Meyer, Y., Ryan, R.D.** (1993). Wavelets Algorithms & Applications. SIAM. ISBN 0-89871-309-9
- [3] **Altay, Ö.** (2010). Dalgacık Analizi ile Yüksek Gerilim Aygıtlarından Alınan İşaretlerin Değerlendirilmesi. *Doktora Tezi*, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [4] **Bogges, A., Narcowich, F.J.** (2001). A First Course in Wavelets with Fourier Analysis. Prentice Hall. ISBN 0-13-022809-5.
- [5] **Gabor D.** (1952). Lectures On Communication Theory. *Technical Report*, MIT Research Laboratory Of Electronics.
- [6] **Graps, A.** (1995). An Introduction to Wavelets. *Paper*, IEEE Computational Science and Engineering, vol 2, num. 2.
- [7] **Polikar R.** (2001). The WaveletTutorial.
(<http://users.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html>)
- [8] **Mallat, S.** (2009). A Wavelet Tour of Signal Processing – The Sparse Way. Elsevier. ISBN 13:978-0-12-374370-1.
- [9] **Sifuzzaman, M.; Islam, M.R.; Ali, M.Z.** (2009). Application of Wavelet Transform and its Advantages Compared to Fourier Transform. *Paper*, Journal of Physical Sciences, Vol. 13. ISSN: 0972-8791.
- [10] **Williams, J. R.; Amaratunga, K.** Introduction to Wavelets in Engineering. *Paper*, MIT Intelligent Engineering Systems Laboratory.
- [11] **Strang, G.** (1994). Wavelets. *Paper*, American Scientist 82 Appendix 1.
- [12] **Suyundikov, R.; Puechmorel, S.; Ferre, L.** (2009). Wavelet Coefficients of Levy Process. 42emes Journees de Statistique.
- [13] **Zhary, M.** (2006). Wavelets From a Historical Perspective
(<http://www.math.uni-bremen.de/zetem/cms/media.php/250/historicalwavelets.pdf>)
- [14] Franklin system. *Encyclopedia of Mathematics*.
(www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Franklin_system&oldid=16655)
- [15] **Nizam, A.** (2008). Karınca Koloni Optimizasyonuna Dayalı Yeni Bir Aritmi Sınıflama Tekniği. *Doktora Tezi*, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü

- [16] **Chun-Lin, L.** (2010). A Tutorial of The Wavelet Transform.
- [17] **Önsay, T.** (1995). The Use o Wavelet Transform and Frames in NVH Applications. SAE Technical Paper, 951364.
- [18] **Villarroel, G. Z.; Agren, A.** (1997). Wavelet Transorm Analysis of Measurements of Engine Combustion Noise. SAE Techical Paper, 972003.
- [19] **Zhu, X.; Kim, J.** (2007). Application of Analytic Wavelet Transform to Transient Signal Analyses. SAE Technical Paper, 2007-01-2321.
- [20] **Gerardin, R. C.; Huallpa, B. N.; Alves, M.A.F.; Arruda, J.R.F.** (2009). Analysis of Spark Ignition Engine Knock Signals Using Fourier and Discrete Wavelet Transform. SAE Technical Paper, 2009-36-0312.
- [21] **Brol, S.; Mamala, J. J.** (2010). Application of Spectral and Wavelet Analysis in Power Train System Diagnostic. SAE Technical Paper, 2010-01-0250.
- [22] **Zhang, H.; Guo, X.; Fang, Z.** (2012). Application of Wavelet Analysis in Truck Cab Vibration Signal Processing. SAE Technical Paper, 2012-01-2011.
- [23] **Aly, M. F.** (2013). Engine Fault Detection Using Wavelet Packet Transforms.SAE Technical Paper, 2013-01-1705.
- [24] **Weeks, M.** (2007). Digital Signal Processing Using MATLAB and Wavelets. Infinity Science Press LLC. ISBN: 0-9778582-0-0.
- [25] **Smith, S.** (1999). The Scientist and Engineer's Guise to Digital Signal Processing. California Technical Publishing. ISBN: 0-9660176-6-8.
- [26] **Kreyzsig, E.** (2006). Advanced Engineering Mathematics. John Wiley & Sons. ISBN-10: 0-471-72897-7.
- [27] **Daubechies, I.** (1992). Ten Lectures on Wavelets. SIAM. ISBN 10:0-89871-274-2
- [28] **Chui, C.** (1992). An Introduction to Wavelets. Academic Press. Library of Congress Catalog Number: 91-58831.
- [29] **Daalhuis, A.B.** Computing With Daubechies' Wavelets. Centrum Wiskunde & Informatica, Open Archive Initiative 2277A.
- [30] Queens University Math Note,
(<http://www.mast.queensu.ca/~math211/m211oh/m211oh59.pdf>)
- [31] George Mason University Math Note,
(<http://math.gmu.edu/~dwalnut/teach/Math772/Fall11/772f11lec11.pdf>)
- [32] **Gade, S., Herlufsen, H.** (1987). Use of Weighting Functions in DFT/FFT Analysis Part I. Brüel & Kjaer Technical Review No:3.

EKLER

EK A: RIEMANN TOPLAMI

Riemann toplamı, Alman matematikçi Bernhard Riemann tarafından üretilmiş, bir fonksiyonun altında kalan alanın yaklaşık olarak bulunmasını sağlayan bir toplam işlemidir. Bir fonksiyonun altında kalan alanın küçük parçalara bölünüp bu alanları yaklaşık dikdörtgenler olarak ifade ederek, bu dikdörtgenlerin alanlarının toplamının fonksiyonun altındaki alana yaklaşık olarak eşit olduğunu ifade eder. Bunun matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir.

$[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı $f(x)$ gibi bir fonksiyon, $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$ parçalarına bölünmüş ve parçalar arası genişlikler $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ şeklinde olmak üzere, aşağıdaki ifade bir Riemann toplamını ifade eder.

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k \quad (\text{A 1.1})$$

EK B: HEISENBERG BELİRSİZLİK İLKESİ

Heisenberg belirsizlik ilkesi, 1927 yılında ilk defa Alman fizikçi Werner Heisenberg tarafından ortaya atılmıştır. Bu ilke aşağıdaki gibi ifade edilir.

Uzayda tek boyutlu hareket eden bir partikülün hareketi, dalga şeklinde bir fonksiyon $f \in L^2$ ile tanımlanmak üzere, bu parçacığın t anında bulunduğu noktanın olasılık yoğunluğu $\frac{1}{\|f\|^2} |f(t)|^2$ ile ifade edilir. Yine aynı andaki momentumunun ω 'ya eşit olma olasılık yoğunluğu $\frac{1}{2\pi\|f\|^2} |\hat{f}(\omega)|^2$ 'dur. Bu parçacığın ortalama yeri;

$$u = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt \quad (\text{B 1.1})$$

Ortalama momentumu ise;

$$\xi = \frac{1}{2\pi\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{B 1.2})$$

şeklindedir. Bu ortalamaların varyansları ise sırasıyla yer ve momentum için şöyledir;

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - u) |f(t)|^2 dt \quad (\text{B 1.3})$$

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi\|f\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \xi) |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{B 1.4})$$

σ_t^2 ve σ_ω^2 değerleri arttıkça, sırasıyla parçacığın bulunduğu yerin ve momentumunun belirsizliği artar.

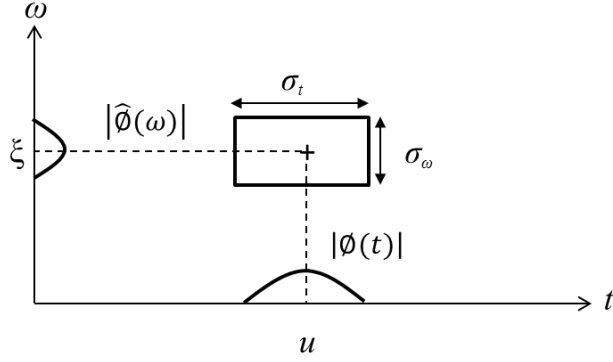
Zamana bağlı varyansın ve frekansa bağlı varyansının sınırları ise şu eşitsizlik ile sınırlanır;

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4} \quad (\text{B 1.5})$$

Bu eşitsizlik $u, \xi, a, b \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{C}^2$ için ancak ve ancak aşağıdaki gibi bir fonksiyonun varlığında eşitlik halini alır.

$$f(t) = ae^{[i\xi t - b(t-u)^2]} \quad (\text{B 1.6})$$

Bu ilke $\emptyset(t)$ gibi bir fonksiyonun u civarında dağılımını ve onun Fourier dönüşümününün ξ frekansı civarında salınımını, zaman-frekans düzleminde aşağıdaki gibi bir kutucuk içerisinde sınırlar. Bu kutucuklara şekil B.1’de gösterildiği gibi Heisenberg kutucukları denilir.



Şekil B.1 : Heisenberg belirsizlik kutucuğu gösterimi.

EK C: RIESZ TABANI

Hilbert uzayında tanımlı $\{x_k\}$ şeklinde bir vektör seti, Hilbert uzayı H için tersinir bir lineer dönüşüm sonrasında ortonormal bir set oluşturuyorsa, bu set bir Riesz tabanıdır. T tersinir bir dönüşüm, $\{e_k\}$ Hilbert uzayında bir ortonormal taban ve $k \in R$ olmak üzere;

$$Te_k = x_k \quad (\text{C 1.1})$$

Riesz tabanı şu özellikleri sağlar:

- $\{x_k\}$ vektör seti, eğer $\{y_k\}$ gibi özgün bir set ile biortogonal ise, $\langle x_k, y_k \rangle = \delta_k$, hem $\{x_k\}$ hem de $\{y_k\}$ bir Riesz tabanı oluşturur.
- $\{x_k\}$ vektör seti bir Riesz tabanı ise, $0 \leq A \leq B$ sağlayan A ve B katsayıları, tüm $x \in H$ için şu eşitsizliği sağlar.

$$A\|x\|^2 \leq \sum_k |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq B\|x\|^2 \quad (\text{C 1.2})$$

EK D: PARSEVAL TEOREMİ VE PLANCHEREL TEOREMİ

Parseval teoremi, bir enerji korunumu teoremidir. V uzayında tanımlı en az iki kez türevlenebilir $f(x)$ şeklinde bir fonksiyon ve bu fonksiyonun Fourier serisine açılımı $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ olmak üzere, fonksiyonun mutlak değerinin karesinin integralinin , fonksiyonun fourier serisinin mutlak değerinin karesinin integraline eşit olduğunu belirtir.

Yani;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \|F(\omega)\|^2 d\omega \quad (\text{D 1.1})$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(x)\|^2 dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (\text{D 1.2})$$

Ortonormal tabanlar için bu denklem f ve g gibi iki fonksiyonun iç çarpım denkleğini sağladığını gösterir.

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_i \rangle \overline{\langle g, e_i \rangle} \quad (\text{D 1.3})$$

Bu formun $f=g$ olması durumunda eşitlik Plancherel teoremini verir.

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\langle f, e_i \rangle\|^2 \quad (\text{D 1.4})$$

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Esra Demren

Doğum Yeri ve Tarihi : İzmir, 1986

E-Posta : demrene@itu.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2011, İstanbul Teknik Üniversitesi (İTÜ), Makine Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü

MESLEKİ DENEYİM:

2011 - ... Ford Otosan Otomotiv Sanayi A.Ş.