

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DARALMA DÖNÜŞÜM SINIFLARI VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS

Ayşin AYDIN

HAZİRAN-2024
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DARALMA DÖNÜŞÜM SINIFLARI VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

CONTRACTION MAPPING CLASSES AND FIXED POINT THEOREMS

YÜKSEK LİSANS

Ayşin AYDIN

**HAZİRAN-2024
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DARALMA DÖNÜŞÜM SINIFLARI VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

CONTRACTION MAPPING CLASSES AND FIXED POINT THEOREMS

YÜKSEK LİSANS

Ayşin AYDIN

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Lale CONA

**HAZİRAN-2024
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Daralma Dönüşüm Sınıfları ve Sabit Nokta Teoremleri**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

27/06/2024

.....
Ayşin AYDIN

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez konusunu belirleme ve hazırlama sürecinde yol gösterici olan, bilgi ve tecrübelerinden faydalanmama izin veren, her türlü görüş ve önerilerini paylaşan çok kıymetli danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Lale CONA'ya; yüksek lisans eğitimim boyunca üzerimde emeği olan Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'ndaki tüm saygıdeğer hocalarıma; desteğini üzerimden hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ayşin AYDIN
GÜMÜŞHANE – 2024

ÖZET

Banach sabit nokta teoremi (Daralma dönüşüm prensibi), matematikte problemlerin çözümünün varlığı ve tekliği için oldukça iyi bir araçtır. Dolayısıyla sabit nokta teorisi birçok araştırmacı tarafından genişletilmiş ve genelleştirilmiştir. Bu gelişmelere paralel olarak literatüre çok sayıda daralma dönüşümü kazandırılmıştır. Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sabit nokta teorisi ve daralma dönüşümleri hakkında genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde fonksiyonel analizin temel tanım ve teoremlerine yer verilmiştir. Üçüncü bölüm ise on üç kısımdan oluşmaktadır. Burada literatürde geniş uygulama alanı olan daralma dönüşüm sınıflarının tanımı örneklerle incelenmiştir. Ayrıca, bu daralma dönüşümleri ile ispatlanan sabit nokta teoremleri verilmektedir. Son bölüm de ise sonuç ve öneriler yer almaktadır.

Anahtar kelimeler: Daralma dönüşümleri, İterasyon yöntemleri, Sabit nokta teoremleri.

SUMMARY

Banach fixed point theorem (Contraction mapping principle) is a very good tool for the existence and uniqueness of the solution of problems in mathematics. Therefore, fixed point theory has been expanded and generalized by many researchers. In parallel with these developments, many contraction mappings have been introduced to the literature. This thesis consists of four chapters. In the first chapter, general information about fixed point theory and contraction mappings is given. In the second chapter, the basic definitions and theorems of functional analysis are given. The third chapter consists of thirteen sections. Here, the definition of contraction mapping classes, which have a wide application area in the literature, is examined with examples. Additionally, fixed point theorems proven by these contraction mappings are given. The last chapter includes conclusions and recommendations.

Keywords: Contraction mappings, Iteration methods, Fixed point theorem.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	X
1. GİRİŞ	1
2. FONKSİYONEL ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARI	3
3. DARALMA DÖNÜŞÜMLERİ	16
3.1. Temel Daralma Dönüşümleri ve Banach Sabit Nokta Teoremi.....	16
3.2. Bazı Daralma Dönüşümleri.....	23
3.3. Berinde Tipi Daralma Dönüşümleri veya φ –Daralma Dönüşümleri.....	27
3.4. Suzuki Tipi Daralma Dönüşümleri	33
3.5. f –Daralma Dönüşümleri.....	36
3.6. Geraghty Daralma Dönüşümleri	38
3.7. İntegral Tipi Daralma Dönüşümleri	39
3.8. F –Daralma Dönüşümleri.....	40
3.9. E –Daralma Dönüşümleri.....	46
3.10. C –Sınıfı Daralma Dönüşümleri.....	49
3.11. θ –Sınıfı Daralma Dönüşümleri.....	50
3.12. $\alpha - \psi$ –Daralma Dönüşümleri	52
3.13. Simülasyon Fonksiyonları.....	54
4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	60
KAYNAKÇA.....	62
ÖZGEÇMİŞ	70

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $T : X \rightarrow X$ daralma dönüşümü	17
Şekil 2. $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünün sabit noktaları x_1, x_2, x_3, x_4, x_5	20
Şekil 3. C, S, P ve N arasındaki ilişki	35
Şekil 4. C, PC, SC ve SPC dönüşümleri arasındaki ilişki	35



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{F}$	: Cisim ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$)
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\exists$	: En az bir, bazı
$\ni$	: Öyle ki
ε	: Epsilon
$\emptyset$	: Boş küme
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
δ	: Delta
φ	: Phi
ψ	: Psi
ζ	: Zeta
$\forall$	: Her, herhangi
$[a, b]$	: Kapalı aralık
(X, d)	: Metrik uzay
Tx	: x noktasının T dönüşümü altındaki görüntüsü
$T : X \rightarrow X$	: X kümesinden X kümesine tanımlı T dönüşümü
T^n	: T dönüşümünün n . iterasyonu
$T^{(m)}(x)$	: T dönüşümünün m . türevi
$F(T)$	: T dönüşümün sabit noktalarının kümesi
vb.	: Ve benzeri
ve ark.	: Ve arkadaşları

1. GİRİŞ

Modern matematikte önem arz eden “Sabit Nokta Teorisi” çalışmaları 20. yy başlarına dayanmaktadır. Sabit nokta teorisi ile ilgili bilimsel incelemeler 1912 de Hollandalı Matematikçi Luitzen Egbertus Jan Brouwer tarafından başlatılmıştır (Brouwer, 1910). L. E. Brouwer bu çalışmasında birim kapalı yuvardan yine kendi üzerine tanımlanan sürekli bir dönüşümün sabit noktasının varlığını kanıtlamıştır. Bu teorem literatürde “Brouwer sabit nokta teoremi” olarak yerini almıştır. Daralma dönüşümü ilkesini ilk ortaya atan kişi ise Stefan Banach olduğu bilinmektedir. 1922 yılında “Darlma Dönüşüm İlkesi” olarak ifade edilen teorem “Banach Sabit Nokta Teoremi” olarak da bilinir (Banach, 1922). Banach bir metrik uzayda kendi üzerine olan dönüşümler için daralma kavramını tanıttı ve tam metrik uzayında kendi üzerine olan her daralma dönüşümünün tek bir sabit noktasının varlığını ve tekliğini ortaya koydu.

Sabit nokta teorisi matematiğin en hızlı gelişme gösteren dallarından biridir ve birçok matematikçi tarafından çalışmalarına konu olmuştur. Bu teorem bir dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti edilmesinin yanı sıra sabit noktasının tekliğinin bulunmasına yönelik de bir çözüm sunmaktadır. Vasile Berinde farklı daralma dönüşümleri sunarak sabit nokta teoremlerindeki çalışmalara ivme kazandıran bilim adamlarından biridir. İlk olarak Berinde, 2004 yılında hemen hemen daralma (veya (δ, L) -hemen hemen daralma) veya zayıf daralma olarak bilinen daralma dönüşüm kavramını tanımlamıştır. Ayrıca, kıyaslama fonksiyonundan yararlanan Berinde, φ –hemen hemen daralma (veya $(\varphi - L)$ hemen hemen daralma) dönüşümü tanımlamıştır. Ayrıca, Berinde hemen hemen daralma dönüşümünün; Banach, Kannan, Chatterjea, Zamfirescu dönüşümlerini ve $h \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ için yarı (quasi) daralma dönüşümlerini kapsadığını ortaya koymuştur.

Öte yandan, bir dönüşümün sabit noktasının varlığını gösterdikten sonra bu noktayı bulmak için iterasyon denilen algoritmalar tanımlanmıştır. İterasyon yöntemi ilk kez İtalyan matematikçi Picard (1890) tarafından tanımlanmıştır. Günümüze kadar ise birçok iterasyon ortaya konmuştur ve belirli dönüşüm sınıfları için bu iterasyon yöntemlerinin kuvvetli yakınsaklığı, yakınsaklıklarının denkliği, veri bağılıkları, yakınsaklık hızlarının özellikleri detaylı olarak incelenmiştir.

Tüm bu gelişmelerle birlikte sabit nokta teorisi matematiğin hızla gelişen alanlardan biri olup fen, mühendislik, tıp, ekonomi gibi birçok alanda uygulamaya sahiptir. Kannan (1968;1969), Caristi (1976), Chatterjea (1972), Reich (1972), Hardy ve Rogers (1973), Ćirić (1972) ve Jungck (1976;1986), Karapınar (2011), Gornicki (2017), Mutlu (2016), Bruck (1977), Baillon (1978), Kirk (2003), Petric (2010), Chandok (2013) gibi matematikçiler çeşitli farklı tip daralmalar ve sabit nokta teoremleri üzerine incelemelerde bulunarak bu alanının gelişmesine katkıda bulunmuşlardır. 2000 li yılların başından bu yana özellikle farklı fonksiyonlar aracılığı ile birçok daralma dönüşüm sınıfı tanımlanmıştır. Berinde tipi daralma dönüşümleri (Berinde, 2002, 2004, 2007, 2009; Shatanawi ve Postolache, 2013; Aydi ve ark., 2013; Imoru ve Olatinwo, 2003; Babu ve ark., 2008; Öztürk ve Girgin, 2015), Suzuki tipi daralma dönüşümleri (Edelstein, 1962; Suzuki, 2009; Altun ve ark., 2018;), f –daralma dönüşümleri (Beiranvand ve ark., 2009), Geraghty daralma dönüşümleri (Geraghty, 1973; Huang ve ark., 2015), İntegral tipi daralma dönüşümleri (Branciari, 2002; Liu ve ark., 2011;), F –daralma dönüşümleri (Wardowski, 2012; Wardowski ve Van Dung, 2014; Piri ve Kuman, 2014; Mınak ve ark., 2014; Hussain ve Salimi, 2014; Abbas ve ark., 2016; Alsulami ve ark., 2015; Aydi ve ark., 2017; Karapınar ve ark., 2015; Öztürk, 2019), E –daralma dönüşümleri (Fulga ve Proca, 2017a, 2017b; Fulga ve Karapınar, 2018; Proca, 2018, 2019), C –daralma dönüşümleri (Ansari, 2014), Θ –daralma dönüşümleri (Jleli ve Samet, 2014; Ahmad ve ark., 2017;), $\alpha - \psi$ –daralma dönüşümleri (Samet ve ark., 2012; Samet, 2014), Simülasyon fonksiyonları (Khojasteh ve ark., 2015; Argoubi ve ark., 2015; Roldan Lopez de Hierro ve ark., 2015; Mongkolkeha ve arkadaşları, 2017; Işık ve ark., 2018; Cho, 2018; Joonaghany ve ark., 2019; Zoto ve ark., 2020; Zoto ve ark., 2021) bu daralma dönüşüm sınıflarından sadece bazılarıdır.

Şu ana kadar ortaya konan çalışmalarda gerek daralma dönüşümlerinin sağlamış olduğu özellikler gerek iterasyon teknikleri gerekse uzay yapısı değiştirilerek birçok sabit nokta teoremi elde edilmiştir. Bu tez çalışmasında yukarıda adı ifade edilen ve literatürde en yaygın kullanılan bazı daralma dönüşümleri ve daralma dönüşüm sınıfları özellikleri ile birlikte incelenecektir. Ayrıca bu daralma dönüşümleri için ortaya konan sabit nokta teoremlerine yer verilecektir.

2. FONKSİYONEL ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARI

Bu bölümde çalışmamızın konusu dahilinde kullanılacak olan bazı önemli kavram ve sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow d(x, y)$$

bir fonksiyon olsun. Eğer d fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için

$$M1. d(x, y) \geq 0 ;$$

$$M2. d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ (özdeşlik aksiyomu);}$$

$$M3. d(x, y) = d(y, x) \text{ (simetriklik aksiyomu);}$$

$$M4. d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (üçgen eşitsizliği);}$$

koşullarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir uzaklık fonksiyonu veya bir metrik, (X, d) ikilisine de *metrik uzay* denir. Yukarıda verilen (M1) - (M4) koşullarına ise *metrik aksiyomları* adı verilir (Rynne ve Youngson, 2008).

Örnek 2.2. $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$ olarak tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir.

Çözüm: Öncelikle $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) < +\infty$ olduğunu gösterelim.

$$d(x, y) = |x - y| \leq |x + y| \leq |x| + |y| < +\infty.$$

Şimdi metrik aksiyomlarını inceleyelim. $\forall x, y, z \in X$ için

$$M1. d(x, y) = |x - y| \geq 0$$

$$M2. d(x, y) = |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$M3. d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |-1||y - x| = d(y, x),$$

$$M4. d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y|$$

$$\leq |x - z| + |z - y|$$

$$= d(x, z) + d(z, y).$$

O halde $(\mathbb{R}, d)$ bir metrik uzaydır. Bu metriğe $\mathbb{R}$ nin alışılmış metriği veya mutlak değer metriği denir.

Örnek 2.3. $X \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ 1 & , x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlı d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Burada, d fonksiyonunun tanımından (M1), (M2) ve (M3) açıktır. (M4) için x, y ve $z \in X$ olsun.

Eğer $x = y$ ise $d(x, y) = 0$ olacağından

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Eğer $x \neq y$ ise $d(x, y) = 1$. Fakat $x = y = z$ olamayacağından

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Bu metriğe *ayrık metrik (diskrete)* adı verilir.

Tanım 2.4. (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ olsun. $r > 0$ bir reel sayısını alalım.

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \quad (\text{Açık yuvar})$$

$$B_r[x_0] = B[x_0, r] = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\} \quad (\text{Kapalı yuvar})$$

$$S_r(x_0) = S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\} \quad (\text{Yuvar yüzeyi})$$

olarak tanımlanır. Bu üç durum da her birinde x_0 merkez r ye yarıçap denir.

Örnek 2.5. (X, d) ayrık metrik uzay ve $x \in X$ olsun. $B_r(x)$ araştıralım:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

ayrık metriğin tanımından

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\} = \begin{cases} \{x\}, & r \leq 1 \\ X, & r > 1 \end{cases}$$

Çünkü,

$$r > 1 \text{ için } B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\} = x$$

$$r \leq 1 \text{ için } B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\} = y$$

dir.

Tanım 2.6. Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı her fonksiyona *dizi* denir ve (x_n) ile gösterilir (Musayev, 2000).

Tanım 2.7. (X, d) metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık en az bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır öyle ki her $n > n_0(\varepsilon)$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ ise (x_n) dizisi x e yakınsaktır denir (Bayraktar, 2006).

(x_n) dizisi yakınsak değilse ıraksaktır denir.

Tanım 2.8. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m, n \geq n_0(\varepsilon)$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ise (x_n) dizisine X de bir *Cauchy dizisi* adı verilir (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.9. (X, d) bir metrik uzay olsun. (X, d) de yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.10. (X, d) bir metrik uzay olsun. (X, d) de ki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse (X, d) uzayına *kompakt metrik uzayı* denir (Brown ve Page, 1970).

Tanım 2.11. (X, d) bir metrik uzay olsun. (X, d) de ki her (x_n) Cauchy dizisi yine uzayın bir elemanına yakınsak ise yani $(x_n) \rightarrow x \in X$ ise (X, d) *metrik uzayı tamdır* denir (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.12. $\mathbb{R}$ alışılmış metriğe göre tamdır.

Örnek 2.13. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerindeki $d(x, y) = |x - y|$ alışılmış metriğe göre tam değildir. Gerçekten;

$$(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ; n = 1, 2, 3, \dots$$

dizisi $(\mathbb{Q}, d)$ de bir Cauchy dizisidir fakat bu dizinin yakınsadığı e sayısı rasyonel sayılar kümesinin içinde değildir. Dolayısıyla $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerindeki alışılmış metriğe göre tam değildir.

Örnek 2.14. $[a, b]$ aralığı üzerinde tüm sürekli fonksiyonları kapsayan $C[a, b]$ kümesi üzerinde tanımlı $d : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ metriği

$$d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$$

olmak üzere $(C[a, b], d)$ bir tam metrik uzaydır.

Tanım 2.15. $X \neq \emptyset$ ve $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun.

$$+: X \times X \rightarrow X, \quad (x, y) \rightarrow x + y,$$

$$\bullet: \mathbb{F} \times X \rightarrow X, \quad (\alpha, x) \rightarrow \alpha x,$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemleri tanımlansın. Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \gamma \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$L1. \quad x + y = y + x;$$

$$L2. \quad x + (y + z) = (x + y) + z;$$

$$L3. \quad \forall x \in X \text{ için } x + 0 = x \text{ eşitliğini sağlayan bir tek } 0 \in X \text{ vardır};$$

$$L4. \quad \forall x \in X \text{ için } x + (-x) = 0 \text{ eşitliğini sağlayan bir tek } (-x) \in X \text{ vardır};$$

$$L5. \quad \forall x \in X \text{ için } 1 \cdot x = x;$$

$$L6. \quad (\alpha\gamma)x = \alpha(\gamma x);$$

$$L7. \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y;$$

$$L8. \quad (\alpha + \gamma)x = \alpha x + \gamma x.$$

Bu taktirde X kümesine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir *lineer uzay* (*vektör uzayı*) denir. Burada, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ alınırsa X e *reel lineer uzay* ve $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ alınırsa X e *kompleks lineer uzay* denir (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.16. $X = \mathbb{R}^n$ kümesi $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ şeklinde yazılan, tüm sıralı reel sayı n -lilerin kümesi olsun. $\mathbb{R}$ nin bir cisim olduğu dikkate alındığında $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ kümesinin

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

işlemlerine göre lineer uzaydır. (Burada işlemlere bileşen toplama ve skalerle çarpma denir.)

Örnek 2.17. $C[a, b] = \{f \mid f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ sürekli}\}$ reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı bir lineer uzaydır.

Çözüm: Lineer uzayının koşullarının sağladığını gösterelim.

L1. $\forall f, g \in C[a, b]$ için $x \in [a, b]$ olmak üzere

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

dir. O halde $f + g = g + f$ dir.

L2. $f, g, h \in C[a, b]$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} [(f + g) + h](x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= [f(x) + g(x)] + h(x) \\ &= f(x) + [g(x) + h(x)] \\ &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= [f + (g + h)](x) \end{aligned}$$

dir. O halde $(f + g) + h = f + (g + h)$ dır.

L3. $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \theta(x) = 0$ olarak alınırsa $\forall f \in C[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$(f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

dir. O halde $f + \theta = f$ dır.

L4. Her $f \in C[a, b]$ için $-f \in C[a, b]$ olduğundan $\forall x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} [f + (-f)](x) &= f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) + (-1)f(x) \\ &= [1 + (-1)]f(x) \\ &= 0f(x) \\ &= \theta \end{aligned}$$

dir. O halde $f + (-f) = \theta$ dır.

L5. Her $f \in C[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$$

dir. O halde $1f = f$ dir.

L6. Her $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} [(\alpha\gamma)f](x) &= (\alpha\gamma)f(x) \\ &= \alpha(\gamma f(x)) \\ &= \alpha(\gamma f)(x) \end{aligned}$$

dir. O halde $(\alpha\gamma)f = \alpha(\gamma f)$ dir.

L7. Her $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} [(\alpha + \gamma)f](x) &= (\alpha + \gamma)f(x) \\ &= \alpha f(x) + \gamma f(x) \\ &= (\alpha f + \gamma f)(x) \end{aligned}$$

dir. O halde $(\alpha + \gamma)f = \alpha f + \gamma f$ dir.

L8. $f, g \in C[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} [\alpha(f + g)] &= \alpha(f + g)(x) \\ &= \alpha(f(x) + g(x)) \\ &= \alpha f(x) + \alpha g(x) \\ &= (\alpha f + \alpha g)(x) \end{aligned}$$

dir. O halde $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$ dir.

Tüm koşullarını sağladığından f bir lineer uzayıdır. Sonuç olarak reel değerli ve sürekli fonksiyonlar bir lineer uzayıdır.

Örnek 2.18. $m \times n$ tipindeki reel matrisler kümesi $M_{m \times n}$ bir reel lineer uzayıdır. Gerçekten M_{mn} nin matrisler arasındaki toplama işlemine göre bir değişmeli grup

olduğundan ve her $A \in M_{mn}$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için α skaleri ile A matrisinin çarpımı αA nın da $m \times n$ tipinde bir matris olduğundan ve bu lineer uzayının (L1) – (L8) aksiyomları sağladığından M_{mn} bir reel lineer uzayıdır.

Tanım 2.19. X bir lineer uzay ve $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$ olsun. Eğer Y kümesi X lineer uzayı üzerinde tanımlanan cebirsel işlemler altında kendi başına bir lineer uzay oluşturuyorsa Y ye X de bir *lineer alt uzayı* denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Tanım 2.20. X , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir lineer uzayı olsun. Eğer $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \|x\|$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için

$$N1. \|x\| \geq 0 ;$$

$$N2. \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta ;$$

$$N3. \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| ;$$

$$N4. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (üçgen eşitsizliği);}$$

özelliklerini sağlıyorsa X lineer uzayı üzerinde bir norm adını alır ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu lineer uzay veya normlu uzay adı verilir.

Yukarıda verilen (N1)-(N4) özelliklerine ise norm aksiyomları adı verilir (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.21. $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesi üzerinde $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\|x\| = |x|$$

fonksiyonu bir normdur.

Çözüm: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$N1. \|x\| = |x| \geq 0$$

$$N2. \|x\| = |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$N3. \|\alpha x\| = |\alpha x| = |\alpha| |x| = |\alpha| \|x\|$$

$$\begin{aligned} N4. \|x + y\| &= |x + y| \\ &\leq |x| + |y| \\ &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

şartları sağlandığından $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır.

Teorem 2.22. Her normlu uzay metrik uzaydır. Fakat genelde tersi doğru değildir.

İspat: $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay olmak üzere

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanan uzaklık fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğu kolayca görülür. Gerçekten $\forall x, y, z \in X$ için;

$$M1. d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$$

$$M2. d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y = \theta$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

$$M3. d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x)$$

$$M4. d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\|$$

(N4) aksiyomundan dolayı

$$\begin{aligned} &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &\leq d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

olduğundan d , X üzerinde bir metriktir. Böylece her $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayından bir (X, d) metrik uzayı elde edilebilir. Bu yolla elde edilen d metriğine $\|\cdot\|$ normunun indirgendiği (ürettiği, doğurduğu) metrik denir.

Örnek 2.23. X bir lineer uzayı olsun.

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } x \neq y \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } x = y \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı metriğin bir norm tarafından üretilemeyeceğini (indirgenemeyeceğini) gösteriniz.

Çözüm: $x, y \in X$ için $d(x, y) \leq 1$ dir. Sayısal örnekle çözüm verebiliriz. Bir N fonksiyonunu

$$N(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dır.

$x \neq 0$ ve $\alpha = 2$ için

$$N(2x) = 1 \text{ ve } 2N(x) = 2$$

ve bu durumda da

$$N(2x) < 2N(x)$$

elde ederiz. Bu ise norm olma koşulu ile çelişir.

Örnek 2.24. X boştan farklı herhangi bir lineer uzay $B(X)$ de X üzerindeki bütün sınırlı kompleks fonksiyonların kümesini gösterebiliriz. Yani $B(X) = \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ sınırlı fonksiyon}\}$ olsun. Bu takdirde $B(X)$ de tanımlı

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

fonksiyonu bir normdur.

Çözüm:

N1. $\forall f \in B(X)$ ve $\forall x \in X$ için $|f(x)| \geq 0$ olur. Her tarafın supremumu alınır;

$$\sup_{x \in X} \{|f(x)|\} \geq \sup\{0\}$$

$$\|f\| \geq 0$$

dir.

N2. $\forall f \in B(X)$ ve $\forall x \in X$ için $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ olduğu gösterilsin.

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in X} \{|f(x)|\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } |f(x)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } f(x) = 0 \text{ (sıfır fonksiyonu)}$$

$$\Leftrightarrow f = 0$$

N3. $\forall f \in B(X)$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$

$$\begin{aligned}
 \|\alpha f\| &= \sup_{x \in X} \{ |(\alpha f)(x)| \} \\
 &= \sup_{x \in X} \{ |\alpha f(x)| \} \\
 &= \sup_{x \in X} \{ |\alpha| |f(x)| \} \\
 &= |\alpha| \sup_{x \in X} \{ |f(x)| \} \\
 &= |\alpha| \|f\|
 \end{aligned}$$

dır.

N4. $\forall f, g \in B(X)$ için $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
 \|f + g\| &= \sup_{x \in X} \{ (f + g)(x) | x \in X \} \\
 &= \sup_{x \in X} \{ |f(x) + g(x)| \} \\
 &\leq \sup_{x \in X} \{ |f(x)| + |g(x)| \} \\
 &\leq \sup_{x \in X} \{ |f(x)| \} + \sup_{x \in X} \{ |g(x)| \} \\
 &\leq \|f\| + \|g\|
 \end{aligned}$$

Dolayısıyla $(B(X), \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır.

Örnek 2.25. X , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ şeklindeki tüm sıralı n -lilerden oluşan lineer uzayı olsun. X üzerinde

$$\begin{aligned}
 \|\cdot\| &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|, \\
 \|\cdot\| &= \max_{1 \leq i \leq n} (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|), \\
 \|\cdot\| &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} ; 1 \leq p < +\infty
 \end{aligned}$$

fonksiyonların hepsi de birer normdur.

Örnek 2.26. $1 \leq p < +\infty$ iken l_p dizi kümesi üzerinde

$$\|\cdot\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve l_{∞} tüm sınırlı dizilerin kümesi üzerinde

$$\|\cdot\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$$

fonksiyonu bir normdur.

Uyarı 2.27. Çözdüğümüz örneklere dikkat edilecek olursak norm fonksiyonu daima pozitiftir. Gerçekten;

$$\|-x\| = \|(-1)x\| = |-1|\|x\| = \|x\| \quad (\text{N3) koşulundan}$$

$$\|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| \quad (\text{N4) koşulundan}$$

$$\|\theta\| \leq 2\|x\|$$

elde edilir.

$$(0 + \alpha)x = 0x + x$$

$$\alpha x = 0x + \alpha x$$

$$0x = \theta$$

dır. O halde,

$$\|\theta\| = \|0x\| = 0\|x\| = 0$$

olduğundan (N1) koşulundan

$$2\|x\| \geq 0 \text{ ise } \|x\| \geq 0.$$

Tanım 2.28. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay, $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Eğer $x \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

ise, $(x_n) \subset X$ dizisi $x \in X$ elemanına $\|\cdot\|$ normuna göre yakınsaktır denir.

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} x$$

veya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

notasyonlarından biriyle gösterilir (Rynne ve Youngson, 2008).

Örnek 2.29. $X = \mathbb{R}$ olarak alırsak, $x \in \mathbb{R}$ için

$$\|\cdot\| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow \|x\| = |x|,$$

biçiminde normlu reel lineer uzayında

$$(x_n) = \left(\frac{2n}{n+1} \right)$$

dizisi $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ değerine yakınsaktır.

Tanım 2.30. $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay olsun. $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m, n > n_0(\varepsilon)$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ ise (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Örnek 2.31. $(x_n) = \frac{1}{n}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Mutlak değer metriği $\mathbb{R}$ üzerinde verilmiş olsun.

$\mathbb{R}$ deki $(x_n) = \frac{1}{n}$ dizisi $0 \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsar. Bundan dolayı (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir.

Örnek 2.32. $(x_n) = \frac{1}{2^n}$ bir Cauchy dizisi. Fakat, $(x_n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ genel terimine sahip (x_n) Cauchy dizisi değildir.

Tanım 2.33. Normlu uzayda her Cauchy dizisi bu normlu uzayda yakınsak ise bu uzaya bir *tam normlu uzay* veya *Banach uzay* denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Örnek 2.34. $l_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$ lineer uzayı

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (x_n) \in l_p(\mathbb{N})$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Benzer şekilde $l_p(\mathbb{Z})$, $p \geq 1$ lineer uzayıda

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (x_n) \in l_p(\mathbb{Z})$$

normuna göre bir Banach uzayıdır (Kreyszig, 1978).

3. DARALMA DÖNÜŞÜMLERİ

3.1. Temel Daralma Dönüşümleri ve Banach Sabit Nokta Teoremi

Tanım 3.1.1. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \quad (1)$$

olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sabiti varsa T ye bir *Lipschitz dönüşümü* adı verilir ve bu şartı sağlayan en küçük λ değerine de *Lipschitz sabiti* adı verilir (Berinde, 2007).

Uyarı 3.1.2. T Lipschitz dönüşümü, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

$$\lambda d(x, y) < \delta = \varepsilon$$

$$\lambda d(x, y) < \varepsilon$$

olduğundan

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leq \lambda d(x, y) \\ &< \lambda \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Buradan T Lipschitz dönüşümünün düzgün sürekli olduğu sonucuna varılır.

Örnek 3.1.3. $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = \frac{5}{2}x$ şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \left| \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}y \right| \\ &= \frac{5}{2}|x - y| \\ &= \frac{5}{2}d(x, y) \end{aligned}$$

$$\leq \lambda d(x, y)$$

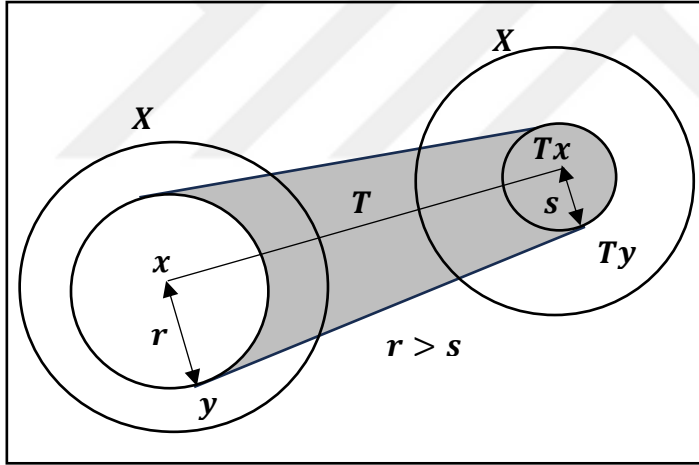
olduğundan $\lambda \geq \frac{5}{2}$ için T dönüşümü Lipschitz şartını sağlar. Yukarıda ifade edildiği gibi, her T Lipschitz dönüşümü düzgün süreklidir. Fakat tersi her zaman geçerli değildir. Aşağıda bu duruma bir örnek verilmiştir.

Örnek 3.1.4. $T(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlanan $T : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu düzgün süreklidir. Ancak Lipschitz şartını sağlamaz.

Tanım 3.1.5. (X, d) bir metrik uzay olsun. $T : X \rightarrow X$ bir Lipschitz dönüşümü olsun ve eğer $\lambda \in [0, 1)$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa T dönüşümüne *daralma* ya da *büzülme* (*contraction*) dönüşümü denir (Berinde, 2007)



Şekil 1. $T : X \rightarrow X$ daralma dönüşümü

Örnek 3.1.6. $X = (0, 1]$ mutlak değer metriğiyle ifade edilen $T : X \rightarrow X$ dönüşümü için $T(x) = \frac{x}{2}$ ele alalım. Bu T dönüşümü bir daralma dönüşümüdür.

Örnek 3.1.7. (X, d) bir metrik uzay ve $T(x) = x$ özdeşlik dönüşümü olsun. $k \in [0, 1)$ için

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= d(x, y) \\ &\not\leq \lambda d(x, y) \end{aligned}$$

olduğundan T dönüşümü daralma dönüşümü olamaz.

Daralma dönüşümleri düzgün süreklidir. Bunun nedeni Lipschitz dönüşüm şartını sağlayan her dönüşümün düzgün sürekli olmasıdır. Buna mukabil T dönüşümünün sürekli olmaması halinde daralma dönüşümü de olmaz. Fakat, T daralma dönüşümü olmasa bile ele alacağımız n için T^n de daralma dönüşümü olabilir.

Tanım 3.1.8. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

olması durumunda T dönüşümü bir *kesin daralmadır* (strict contraction) (Berinde, 2007).

Örnek 3.1.9. $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı $T(x) = x + 1 - \frac{x}{1+|x|}$ dönüşümü ele alalım.

$$|T'(x)| = 1 - (1 + |x|)^{-2} < 1$$

dir. Her $x < y$ için

$$\begin{aligned} |Ty - Tx| &= \left| \int_x^y T'(t) dt \right| \\ &\leq \int_x^y |T'(t)| dt \\ &< \int_x^y dt \\ &= |y - x| \end{aligned}$$

olur. T dönüşümüne $\mathbb{R}$ de mutlak değer metriğine göre kesin daralma dönüşüm olduğunu söyleyebiliriz.

Tanım 3.1.10. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise T ye *genişlemeyen* (nonexpansive) dönüşüm adı verilir (Berinde, 2007).

Örnek 3.1.11. $X = \mathbb{R}$ de mutlak değer metriği göz önüne alınsın. $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = x + 1$ olsun.

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= |x + 1 - y - 1| \\ &= |x - y| \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

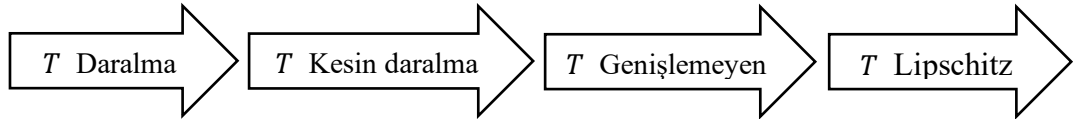
sağlanmış olur. Böylelikle T bir genişlemeyen dönüşümdür ancak T ne daralma ne de kesin daralma dönüşümü değildir.

Tanım 3.1.12. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $\lambda > 1$ için

$$d(Tx, Ty) \geq \lambda d(x, y)$$

ise T ye *genişleyen* (expansive) *dönüşüm* adı verilir (Wang ve ark., 1984).

Bu dönüşüm tanımları ele alındığında aşağıdaki genelleştirme yazılabilir (Jain, 2009):

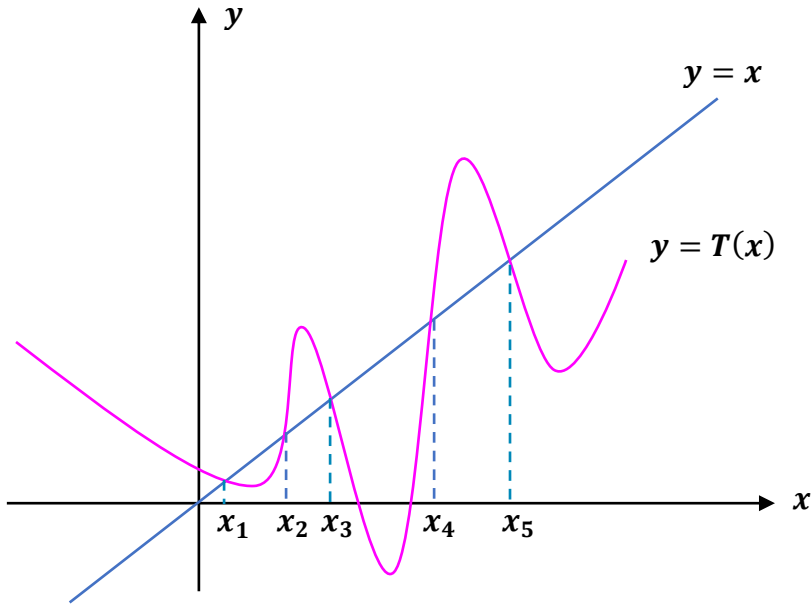


Fakat bu gerektirmelerin tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 3.1.13. X boş olmayan bir küme ve $T : X \rightarrow X$ bir fonksiyon verilsin.

$$Tx = x \tag{2}$$

eşitliğinin sağlanması halinde $x \in X$ elemanına T nin bir *sabit noktası* denir (Berinde, 2007). T dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi F_T , $F(T)$ ya da $Fix(T)$ ile gösterilebilir. Bu tez çalışması boyunca $F(T)$ gösterimi kullanılacaktır.



Şekil 2. $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünün sabit noktaları x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (Sawangsup, 2015)

Örnek 3.1.14. $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I : X \rightarrow X$, $I(x) = x$ şeklinde tanımlanan özdeşlik dönüşümü için X in her noktası bir sabit noktadır. Yani $F(I) = X$ dir.

Örnek 3.1.15. $T : (0,1] \rightarrow (0,1]$, $Tx = \frac{x}{4}$ dönüşümünün sabit noktası yoktur. Böyle bir dönüşüm için tek bir sabit nokta $x = 0$ olabilirdi. Fakat $0 \notin (0,1]$ dir. Yani $F(T) = \emptyset$ dir.

Örnek 3.1.16. $X = [0,2]$ olmak üzere $T : X \rightarrow X$, $Tx = 2 - x$ şeklinde tanımlı dönüşümün sabit noktası $x = 1$ dir. Yani, $F(T) = \{1\}$ dir.

Tanım 3.1.17. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ise,

$$ToT(x) = T(T(x))$$

ile verilen T^2 dönüşümü de $X \rightarrow X$ bir dönüşümdür ve buna T nin *ikinci iterasyonu* denir (Soykan, 2008).

Genel olarak n adet T dan elde edilen,

$$\underbrace{ToTo \dots oT(x)}_{n \text{ tane } T} = T(T(T(x) \dots))$$

ifadesine T nin n . *iterasyonu* denir ve T^n ile gösterilir.

$T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Şu halde, keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T) \subset F(T^n)$ dir. Yani bir dönüşümün sabit noktaları aynı zamanda bu dönüşümün n . iterasyonunun da sabit noktasıdır. Gerçekten herhangi bir $x_0 \in F(T)$ için $Tx_0 = x_0$ olup,

$$\begin{aligned} T^n(x_0) &= T^{n-1}(Tx_0) \\ &= T^{n-1}(x_0) \\ &= T^{n-2}(Tx_0) \\ &= T^{n-2}(x_0) \\ &\vdots \\ &= T^{n-(n-1)}(Tx_0) \\ &= Tx_0 \end{aligned}$$

dir. Böylece $x_0 \in F(T^n)$ elde edilir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $T: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\}$ dönüşümü, $T(1) = 3$, $T(2) = 2$ ve $T(3) = 1$ olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda, $F(T) = \{2\}$ dir. Öte yandan $F(T^2) = \{1,2,3\}$ dür.

İterasyon yöntemleri bir dönüşümün sabit nokta veya sabit noktalarını bulmak için kullanılan en önemli tekniklerden biridir. Bunun için çeşitli iterasyon yöntemleri ortaya konmuştur. Fakat, bir iterasyon yöntemi ortaya konarken iki önemli hususa dikkat edilmelidir. Yeni iterasyon yöntemi önceki yöntemlerden daha hızlı ve daha sade olması beklenir. Şimdi bir iterasyon yönteminin en genel tanımı verilerek, Picard iterasyon yöntemi ifade edilecektir: (X, d) bir metrik uzay olsun ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşümdür. f bir fonksiyon olacak şekilde, bir sabit nokta iterasyon yöntemi en genel şekilde;

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = f(T, x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3)$$

denklemleri ile ifade edilir.

Tanım 3.1.18. (3) ile verilen açıklamada da her $n \in \mathbb{N}$ için Picard iterasyonu dizisi (ardışık yaklaşıklar dizisi)

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = Tx_n$$

şeklinde tanımlanır (Picard, 1890).

Örnek 3.1.19. $X = [0,1]$ ve $T : [0,1] \rightarrow [0,1]$, $Tx = 1 - x$ olacak şekilde genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu dönüşümün sabit noktası $\frac{1}{2}$ dir. Yani $F_T = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dir. Burada herhangi bir $x_0 = a \neq \frac{1}{2}$ noktası için Picard iterasyonu:

$$x_1 = Tx_0 = 1 - a$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2x_0 = a$$

$$x_3 = Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = 1 - a$$

$$x_n = Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = T^3x_{n-3} = \dots = T^n x_0$$

şeklinde bulunur ve bu $a, 1 - a, a, 1 - a, a, \dots$ salınımlı diziye karşılık gelir. Bu salınımlı dizi $a \neq \frac{1}{2}$ için yakınsak olmadığı için, Picard iterasyonu bu dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz.

Aşağıda literatürde sıkça kullanılan bazı iterasyon yöntemleri verilecektir.

Mann iterasyon yöntemi (Mann, 1953),

Krasnosel'skii iterasyon yöntemi (Krasnosel'skii, 1955),

Kirk iterasyon yöntemi denir (Kirk, 1971),

Ishikawa iterasyon yöntemi (Ishikawa, 1974),

Noor iterasyon yöntemi denir (Noor, 2000),

Multistep iterasyon yöntemi (Rhoades ve Şoltuz, 2004),

S iterasyon yöntemi (Agarwal ve ark., 2007),

İki adımlı Mann iterasyon yöntemi (Thianwan, 2009),

Kirk-Ishikawa iterasyon yöntemi (Olatinwo, 2009),

Kirk-Mann iterasyon yöntemi (Olatinwo, 2009),

SP iterasyon yöntemi (Phuengrattana ve Suantai, 2011),

CR iterasyon yöntemi (Chugh ve ark., 2012),

S* iterasyon yöntemi (Karahan ve Özdemir, 2013),

Abbas ve Nazir iterasyon yöntemi (Abbas ve Nazir, 2014),

Thakur ve arkadaşları iterasyon yöntemi (Thakur ve ark., 2014),

Yeni üç adımlı iterasyon yöntemi (Karakaya ve ark., 2017),

M-iterasyon yöntemi (Ullah ve Arshad, 2018)...

X bir tam metrik uzay olarak alınan daralma dönüşümlerde, dönüşümün sabit bir noktası vardır ve bu sabit nokta tektir. Bu teorem lineer denklemlerin çözümünde ve lineer olmayan denklemlerin çözümünde de birçok kullanımda kolaylık sağlamaktadır. Şimdi bu durumu ifade eden teoremi verelim (Banach, 1922).

Teorem 3.1.20. X bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$, bir daralma dönüşümü olsun.

Bu durumda,

- (i) T dönüşümünün X te bir tek x sabit noktasına sahiptir,
- (ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ için $x_{n+1} = Tx_n$; $n = 0, 1, 2, \dots$ ile tanımlanan Picard iterasyonu tarafından üretilen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ dizi x noktasına yakınsar.

Uyarı 3.1.21. Teorem 3.1.20'deki (i) ve (ii) şartını karşılayan dönüşüme bir Picard operatörü adı verilir (Rus, 1996).

3.2. Bazı Daralma Dönüşümleri

Lipschitz dönüşüm şartını sağlayan her dönüşüm düzgün süreklidir. Dolayısıyla, daralma dönüşümleri de süreklidir. Şu halde bir dönüşüm sürekli değilse, daralma dönüşümü olamaz. Bu ise sürekliliği gerektirmeyen daralma şartlarının olup olmadığı sorusunu akla getirir. Kannan 1968 yılında; aşağıda tanımladığı Kannan daralma şartını Banach daralma şartının yerine kullanmıştır, böylece Banach sabit nokta teoremin sürekliliği gerektirmeyen dönüşümlere genelleştirilmesini sağlamıştır.

Tanım 3.2.1. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

olacak şekilde $b \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı varsa T dönüşümüne *Kannan dönüşümü* denir (Kannan, 1968).

Teorem 3.2.2. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir *Kannan dönüşümü* olsun. Bu taktirde T bir Picard opertörüdür (Kannan, 1968).

Kannan sabit nokta teoremi Banach sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesi değildir. Ancak bu sonuç, üzerinde çalışılan metrik uzayın tamlığını da sağladığından oldukça önemlidir. Subrahmanyam (1974), Kannan daralma dönüşümünün metriğin tamlığına da karakterize ettiğini ispatlamıştır. Başka bir ifadeyle, X metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart X üzerindeki her Kannan dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olmasıdır. Bu özelliğe Banach daralma dönüşümleri sahip değildir. Kannan sabit nokta teoreminden sonra, Chatterjea'nın de aralarında bulunduğu birçok bilim adamı dönüşümün sürekliliğini gerektirmeyen daralma şartlarının çeşitli sınıfları için sabit nokta ve ortak sabit nokta teoremi ispatlamıştır. Chatterjea tarafından verilen tanım Kannan sabit nokta teoreminin dualinin bir çeşidi olarak aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.3. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq c[d(x, Ty) + d(y, Ty)]$$

olacak biçimde $c \in [0, \frac{1}{2})$ sayısı varsa T dönüşümüne *Chatterjea dönüşümü* adı verilir (Chatterjea, 1972).

Teorem 3.2.4. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir Chatterjea dönüşümü olsun. Bu durumda T bir Picard operatörüdür (Chatterjea, 1972).

Zamfirescu 1972 yılında, Banach, Kannan ve Chatterjea şartlarının hepsini kapsayan aşağıdaki daralma dönüşümünü tanımlamıştır.

Tanım 3.2.5. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

- (i) $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ (Kesin daralma dönüşümü)
- (ii) $d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$ (Kannan Dönüşümü)
- (iii) $d(Tx, Ty) \leq c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$ (Chatterjea Dönüşümü)

Şartlarından en az birisi doğru olsun. Eğer $d \in [0, 1)$, $0 < b, c < \frac{1}{2}$ koşullarını sağlayan d, b ve c reel sayıları mevcutsa, bu durumda T ye *Zamfirescu dönüşümü* denir (Zamfirescu, 1972).

Teorem 3.2.6. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir Zamfirescu dönüşümü dönüşüm olsun. Bu durumda T bir Picard operatörüdür (Zamfirescu, 1972).

Tanım 3.2.7. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq h \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

olmak üzere $h \in [0, 1)$ sayısı varsa T ye *yarı (quasi) daralma dönüşümü* denir (Ćirić, 1974).

Teorem 3.2.8. (X, d) bir tam metrik uzay ve T dönüşümü bu uzayda tanımlı bir yarı daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T nin tek bir sabit noktası vardır (Ćirić, 1974).

Öte yandan, Kannan (1968), Khan (1978), Bianchini (1972) ve Reich (1971) tarafından incelenen K, M, B ve R daralma tanımlarını ifade edelim. Bu daralma dönüşümleri arasındaki ilişkiyi ortaya koyan teoremi verelim.

Tanım 3.2.9. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$(K) \quad d(Tx, Ty) \leq r\{d(Tx, x) + d(Ty, y)\}$$

olacak şekilde bir $r \in [0, \frac{1}{2})$ sayısı varsa T dönüşümüne K –daralma adı verilir.

Tanım 3.2.10. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$(M) \quad d(Tx, Ty) \leq h\sqrt{d(Tx, x)d(Ty, y)}$$

olacak şekilde bir $h \in [0, 1)$ sayısı varsa T dönüşümüne M –daralma adı verilir.

Tanım 3.2.11. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$(B) \quad d(Tx, Ty) \leq b\max\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}$$

olacak şekilde bir $b \in [0, 1)$ sayısı varsa T dönüşümüne B –daralma adı verilir.

Tanım 3.2.12. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$(R) \quad d(Tx, Ty) \leq ad(Tx, x) + bd(Ty, y) + cd(x, y)$$

olacak şekilde bir $a + b + c \leq 1$ şartını sağlayan negatif olmayan a, b, c sayıları varsa T dönüşümüne R –daralma adı verilir.

Şimdi de Akram ve arkadaşları tarafından 2008 de tanımlanan A daralma dönüşümünün tanımını ve yukarıda ifade edilen K, M, B ve R dönüşümleri arasındaki ilişkiyi açıklayalım (Akram ve ark., 2008).

$\mathbb{R}_+$ bütün negatif olmayan reel sayıların kümesi ve A kümesi ise $\alpha: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonların kümesi olsun.

(i) $\alpha, \mathbb{R}_+^3$ üzerinde sürekli fonksiyonlar ($\mathbb{R}_+^3$ deki Öklid metriğine göre)

(ii) Her $a, b \in \mathbb{R}_+$ için $a \leq \alpha(a, b, b)$ veya $a \leq \alpha(b, a, b)$ veya $a \leq \alpha(b, b, a)$ olduğunda bazı $k \in [0, 1)$ için $a \leq kb$ dir.

Tanım 3.2.13. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Tüm $x, y \in X$ ve bazı $\alpha \in A$ için

$$(A) \quad d(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu takdirde T ye bir A –daralma dönüşümü denir.

Teorem 3.2.14. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir A –daralma dönüşümü olsun. Bu taktirde, T dönüşümü, X üzerinde bir tek sabit noktaya sahiptir. Herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar (Akram ve ark., 2008).

Teorem 3.2.15.

- (i) Herhangi bir metrik uzay üzerinde her B daralma bir A daralma dönüşümüdür.
- (ii) Herhangi bir metrik uzay üzerinde her R daralma bir A daralma dönüşümüdür.
- (iii) Herhangi bir metrik uzay üzerinde her K daralma bir A daralma dönüşümüdür.
- (iv) Herhangi bir metrik uzay üzerinde her M daralma bir A daralma dönüşümüdür.
- (v) Herhangi bir metrik uzay üzerinde her M daralma bir K daralma dönüşümüdür.

Yukarıdaki teoremden de anlaşılacağı gibi A daralma dönüşümü K, M, B ve R daralma dönüşümlerini kapsamaktadır.

Öte yandan Dass ve Gupta, (1975) ve Jaggi (1977) çalışmalarında aşağıda ifade edilen rasyonel daralma sınıfları tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.16. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \mu d(y, Ty) \frac{1 + d(x, Tx)}{1 + d(x, y)} + \lambda d(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan $\mu + \lambda < 1$ olacak şekilde $\mu, \lambda \geq 0$ sabit sayıları varsa, T ye Dass–Gupta daralma dönüşümü denir (Dass ve Gupta, 1975).

Tanım 3.2.17. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $x \neq y$ olacak biçimde her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \mu \frac{d(x, Tx)d(y, Ty)}{d(x, y)} + \lambda d(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan $\mu + \lambda < 1$ olacak şekilde $\mu, \lambda \geq 0$ sabit sayıları varsa T ye Jaggi daralma dönüşümü denir (Jaggi 1977).

Rhoades (2001) zayıf (weakly-contractive) daralma dönüşümü kavramını tanıtarak Banach sabit nokta teoremine genelleştirdi.

Tanım 3.2.18. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü verilmiş olsun. İlaveten, ψ , sürekli, azalmayan ve $\psi(0) = 0$ şartını sağlayan $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \psi(d(x, y))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, T ye zayıf daralma (weakly-contractive) dönüşümü adı verilir.

Teorem 3.2.19. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü zayıf daralma dönüşümü olsun. T dönüşümü, X üzerinde bir tek sabit noktaya sahiptir (Rhoades, 2001).

Rhoades in vermiş olduğu koşullarda $0 \leq k < 1$ olmak üzere $\psi(t) = kt$ olarak alınırsa Banach sabit nokta teoremi elde edilir. Zayıf daralma dönüşümü prensibini, Dutta ve Choudhury (2008) biraz daha genelleştirerek aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir. Bu çalışmalardan yararlanılarak farklı çalışmalarda yapılmıştır (Aydi, 2011; Popescu, 2011).

Teorem 3.2.20. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü verilmiş olsun. $\psi, \phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonları sürekli, monoton azalmayan ve $\psi(x) = \phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ olsun. Eğer,

$$\psi(dx, Ty) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y))$$

eşitsizliği veriliyorsa, T dönüşümünün (X, d) tam metrik uzayında bir tek sabit noktası vardır (Dutta ve Choudhury, 2008).

Uyarı 3.2.21: Teorem 3.2.20 da $\psi(t) = t$ alındığında Rhoades'in vermiş olduğu Teorem 3.2.19 elde edilmiş olur.

3.3. Berinde Tipi Daralma Dönüşümleri veya ϕ –Daralma Dönüşümleri

Berinde (2004), Tanım 3.2.5 Zamfirescu T dönüşümünün sürekliliğini gerektirmeyen Tanım 3.2.5' in (i) ve (iii) koşullarından daha genel olan Tanım 3.3.1 de ifade edilen hemen hemen daralma şartını tanımlamıştır. Ortaya koyduğu bu daralma dönüşümüne bağlı literatürdeki birçok sabit nokta teoreminin bir genellemesi olan Teorem 3.3.2'yi elde etmiştir.

Tanım 3.3.1. (X, d) bir metrik uzay olsun ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin.
 $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx) \quad (4)$$

veya

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(x, Ty) \quad (5)$$

olmak üzere, bir $\delta \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ sayıları varsa, T ye *zayıf (weak) daralma dönüşümü* veya *hemen hemen (almost) daralma dönüşümü* adı verilir.

(4) ile verilen hemen hemen daralma şartı simetrik değildir. Fakat, uzaklık kavramının simetrik olmasından dolayı (4) şartı (5) ile belirtilen bir eşitsizliği de içerir. Dolayısıyla T dönüşümünün zayıf daralma dönüşümü olduğu kontrol edilirken (4) ve (5) şartının her ikisine de bakılmalıdır.

Teorem 3.3.2. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun.
 T dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx)$$

şartını sağlayan bir hemen hemen daralma dönüşümü olsun. O halde,

- (i) $F(T) = \{x \in X : Tx = x\} \neq \emptyset$;
- (ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ için $x_{n+1} = Tx_n$; $n = 0,1,2, \dots$ biçiminde verilen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonundan elde edilen dizi, bazı $x \in F(T)$ ye yakınsar.

Hemen hemen daralma dönüşümleri teoremden de anlaşılacağı gibi tek bir sabit noktaya sahip olmak zorunda değildirler. Aşağıda verilen teorem ile bir hemen hemen daralma dönüşümünün sabit noktası tek yapılabilmektedir (Berinde, 2004).

Teorem 3.3.3. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir hemen hemen daralma dönüşümü olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \rho d(x, y) + L_1 d(x, Tx)$$

olacak şekilde, $\rho \in (0,1)$ sabiti var ve $L_1 \geq 0$ mevcuttur. Bu taktirde;

- (i) T dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir. Yani $F(T) = \{x\}$ dir.

(ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ için $x_{n+1} = Tx_n$ $n = 0, 1, 2, \dots$ biçiminde verilen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonundan elde edilen dizi $x \in F(T)$ ye yakınsar.

Tanım 3.3.4. X bir reel Banach uzay olsun. Her $x, y \in X$ ve $r > 0$ için

$$\|x - y\| \leq \|(1 + r)(x + y) - r(Tx - Ty)\|$$

ise T ye *pseudo-kesin daralma dönüşümü* adı verilir (Berinde, 2007).

Tanım 3.3.5. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$, $\delta \in (0, 1)$ ve $L \geq 0$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta M_1(x, y) + L \min \{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

ve

$$M_1(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{1}{2} [d(x, Ty), d(y, Tx)] \right\}$$

ise T dönüşümüne *genelleştirilmiş hemen hemen daralma dönüşümü* adı verilir (Berinde, 2009).

Teorem 3.3.6. (X, d) bir tam metrik uzayı ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü genelleştirilmiş hemen hemen daralma dönüşümü olsun. T dönüşümünün X uzayında sabit noktası vardır (Berinde, 2009).

Kıyaslama fonksiyonu kavramını kullanan Berinde hemen hemen daralma dönüşümlerinden çok daha genel olan (φ, L) –zayıf daralma (veya zayıf φ –daralma) dönüşümü kavramını tanımlamıştır ve bir sabit nokta teoremi ispatlamıştır (Berinde, 2002). Altun ve Acar sonrasında hemen hemen daralma ve (φ, L) –zayıf daralma kavramlarını kısmi metrik uzaylarda tanımlamışlardır (Altun ve Acar, 2012). Genelleştirilmiş (δ, L) –zayıf daralma dönüşümü ve genelleştirilmiş (φ, L) –zayıf daralma dönüşümü kavramları Shatanawi ve Postolache (2013) tarafından kısmi metrik uzaylarda çalışılmıştır. Aydi ve arkadaşları (2013) ise uzaklıkları değiştiren fonksiyon kavramını kullanarak Altun ve Acar’ın çalışmasında elde edilen sonuçları genelleştirmişlerdir.

$\Phi := \{\varphi \mid \varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \text{ bir fonksiyon} \}$ bu fonksiyon ailesi aşağıdaki şartları sağlasın:

- (i) φ fonksiyonu monoton artan fonksiyondur ve $t_1 \leq t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) \leq \varphi(t_2)$ dir.
- (ii) $\forall t > 0$ için $\varphi(t) < t$ dir.
- (iii) $\varphi(0) = 0$ dır.
- (iv) φ sürekli fonksiyondur.
- (v) $\forall t > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = 0$ dır.
- (vi) $\forall t > 0$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t)$ serisi yakınsak bir seridir.
- (vii) $\lim_{t \rightarrow \infty} (t - \varphi(t)) = \infty$ dur.
- (viii) φ fonksiyonu alt-toplamsaldır.

Yukarıdaki şartlar doğrultusunda φ fonksiyon ailesine göre aşağıdaki lemma yazılabilir (Berinde, 2002).

Lemma 3.3.7. $\Phi := \{\varphi \mid \varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \text{ bir fonksiyon} \}$ ailesini göz önüne alalım. Bu taktirde aşağıdaki durumlar sağlanır.

1. (i) ve (ii) özellikleri (iii) özelliğini sağlar.
2. (i) ve (iv) özellikleri (iii) özelliğini sağlar.
3. (i) ve (v) özellikleri (ii) özelliğini sağlar (Berinde 2002).

Tanım 3.3.8. $\Phi := \{\varphi \mid \varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \text{ bir dönüşüm} \}$ ailesi verilmiş olsun.

1. (i) ve (v) özelliklerini sağlayan φ fonksiyonuna *kıyaslama (comparison)* fonksiyonu adı verilir.
2. (i) ve (vi) özelliklerini sağlayan φ fonksiyonuna *(c) –kıyaslama (comparison) fonksiyonu* adı verilir (Berinde 2002).
3. Bir kıyaslama fonksiyonu (vi) özelliğini sağlıyorsa *kesin kıyaslama (strict comparison)* fonksiyonu denir.

Lemma 3.3.9. Kıyaslama ve (c) –kıyaslam fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- (i) Herhangi (c) –kıyaslama fonksiyonu aynı zamanda kıyaslama fonksiyonudur.
- (ii) Herhangi kesin kıyaslama fonksiyonu aynı zamanda kıyaslama fonksiyonudur.
- (iii) Herhangi bir kıyaslama fonksiyonu (iii) özelliğini sağlar.
- (iv) Alt-toplamsal bir kıyaslama fonksiyonu süreklidir.
- (v) φ kıyaslama fonksiyonu ise $k \in \mathbb{N}$ için φ^k bileşke fonksiyonu da kıyaslama fonksiyonudur.

(vi) $\varphi, (c)$ –kıyaslama fonksiyonu olmak üzere,

$$s : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ , \quad s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k$$

fonksiyonu monoton artan bir fonksiyondur ve $s(0) = 0$ özelliğini sağlar (Berinde, 2002).

Örnek 3.3.10. $\lambda \in [0, 1)$ olmak üzere $\varphi(t) = \lambda t$, $t \in [0, \infty)$ fonksiyonu $(i_\varphi) - (viii_\varphi)$ şartlarını sağlar.

$$1. \quad \varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) , \quad \varphi(t) = \frac{t}{1+t}$$

fonksiyonu kıyaslama fonksiyonudur ama (c) –kıyaslama fonksiyonu değildir.

$$2. \quad \varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) , \quad \varphi(t) = \begin{cases} \frac{t}{3}, & 0 \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{18}, & t > \frac{2}{3} \end{cases}$$

fonksiyonu (c) –kıyaslama fonksiyonudur.

$$3. \quad \varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) , \quad \varphi(t) = \begin{cases} \frac{t}{1+t}, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{2t}{3}, & t > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu (c) –kıyaslama fonksiyonudur.

$$4. \quad \varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) , \quad \varphi(t) = \begin{cases} \frac{t}{1+t}, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2t}, & t > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu kıyaslama fonksiyonudur ama (c) –kıyaslama fonksiyonu değildir (Berinde, 2002).

Tanım 3.3.11. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))$$

olan $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu var ise T dönüşümüne φ –daralma dönüşümü denir (Berinde, 2002).

Tanım 3.3.12. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y)) + Ld(y, Tx)$$

ifadesi olan $L \geq 0$ sayısı ve φ fonksiyonu var ise T dönüşümüne hemen hemen φ –daralma dönüşümü veya (φ, L) –hemen hemen daralma dönüşümü $((\varphi, L)$ -zayıf daralma dönüşümü veya zayıf φ –daralma dönüşümü)) denir (Berinde, 2002).

Yukarıda ifade edilen daralma şartı Olatinwo ve arkadaşları tarafından 2006 yılında genelleştirildi. Böylece tanımlayarak belirli sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kararlılığını incelediler.

Tanım 3.3.13. X bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca, $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ monoton artan ve $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan bir fonksiyonu olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + \varphi(d(x, Tx))$$

olacak şekilde bir $\delta \in [0, 1)$ sabiti varsa T ye contractive-like dönüşümü denir (Imoru ve Olatinwo, 2003).

Bu tanım, Berinde'nin tanımlamış olduğu Tanım 3.3.1 de verilen hemen hemen daralma dönüşümü tanımından daha geneldir. Eğer $L \geq 0$ bir sabit olmak üzere $\varphi(u) = Lu$, olarak alınırsa Berinde'nin ortaya koymuş olduğu hemen hemen daralma dönüşüm tanımı elde edilir. Öte yandan, bu tanımda X in bir normlu lineer uzay ve Banach uzay olması halinde norm tarafından üretilen metrik yardımıyla, yani her $x, y \in X$ için $d(x, y) = \|x - y\|$ bağıntısıyla aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilebilir:

$$\|Tx - Ty\| \leq \delta \|x - y\| + \varphi(\|x - Tx\|).$$

Birçok matematikçi ve Abbas ve Illic (2010), Abbas ve ark. (2011), Ćirić ve ark. (2011), Shaddad ve arkadaşları (2014) Berinde'nin hemen hemen daralma dönüşümleri için ispatladığı sabit nokta teoremini genelleştirmesi olan bazı sabit nokta ve ortak sabit nokta teoremleri üzerine çalışmışlardır. Örneğin Babu ve ark. (2008) aşağıda ifade edilen daralma dönüşümü için Teorem 3.3.15 deki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Tanım 3.3.14. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$, $\delta \in (0, 1)$ ve $L \geq 0$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + L \min\{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

ise T dönüşümü (B) şartını sağlar denir (Babu ve ark., 2008).

Teorem 3.3.15. (X, d) tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm (B) şartını sağlasın. T dönüşümünün X uzayında sabit noktası vardır (Babu ve ark., 2008).

Bu gelişmelerin yanı sıra Öztürk ve Girgin (2015) çalışmalarında A daralma dönüşümü ve Berinde'nin tanımladığı φ dönüşümünden faydalananarak A daralma dönüşümünü A_φ daralma dönüşümü olarak genişletmiş ve Graf teorisinde bazı sabit nokta teoremleri ortaya koymuştur. Şimdi bu A_φ daralma dönüşümü ifade edelim.

$\mathbb{R}_+$ bütün negatif olmayan reel sayıların kümesi ve A_φ kümesi ise $\alpha : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonların kümesi olsun.

(i) α , $\mathbb{R}_+^3$ üzerinde sürekli fonksiyonlar ($\mathbb{R}_+^3$ deki Öklid metriğine göre)

(ii) Her $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $u \leq \alpha(u, v, v)$ veya $u \leq \alpha(v, u, v)$ veya $u \leq \alpha(v, v, u)$

olduğunda φ bir güçlü karşılaştırma fonksiyonu olmak üzere $u \leq \varphi(v)$ dir.

Bu tanımda, her $t > 0$ için $\varphi(t) = kt$, $k \in (0, 1)$ olarak alırsak, $\alpha \in A$ elde ederiz.

Tanım 3.3.16. X bir metrik uzayında $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in A_\varphi$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty))$$

koşulu sağlanıyorsa T dönüşümüne A_φ -daralma dönüşümü denir (Öztürk ve Girgin, 2015).

3.4. Suzuki Tipi Daralma Dönüşümleri

(X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer, $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$(C) \quad d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise T dönüşümüne daralma adı verilir.

Şu halde Edelstein aşağıdaki teoremi ortaya koymuştur.

Teorem 3.4.1. (X, d) bir kompakt metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir daralma dönüşüm olsun. Bu taktirde T nin tek bir sabit noktası vardır (Edelstein, 1962).

Suzuki, 2009 yılında daralma kavramını zayıflatarak yeni bir sabit nokta teoremi elde etti.

Teorem 3.4.2. (X, d) bir kompakt metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için,

$$(SC) \quad \frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

koşulunu sağlasın. Bu taktirde, T nin tek bir sabit noktası vardır (Suzuki, 2009).

Kısalık adına, (SC) eşitsizliğini sağlayan dönüşümlere Suzuki tipi daralma dönüşümleri adını verilecektir. Altun ve ark. 2018 de çalışmalarında P –daralma dönüşümü tanımı verilerek alışılmış daralma dönüşümünün aynı zamanda bir P –daralma dönüşümü olduğunu fakat tersinin her zaman doğru olmadığını gösterilmiştir. Öte yandan kompakt metrik uzayda sürekli P –daralma dönüşümünün sabit noktasının varlığını ve tekliğini göstermişlerdir. Elde edilen bu sonuç ise Edelstein sabit nokta teoremini içermektedir.

Tanım 3.4.3. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Bu durum da $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$(PC) \quad d(Tx, Ty) < d(x, y) + |d(x, Tx) - d(y, Ty)|$$

şartı sağlanıyorsa T ye P –daralma dönüşümü denir (Altun ve ark., 2018).

Teorem 3.4.4. (X, d) bir metrik uzay olsun. T dönüşümü X üzerinde bir P –daralma dönüşümü ve f fonksiyonu da $f(x) = d(x, Tx)$ olarak tanımlansın. Eğer $f(x_0) \leq f(Tx_0)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ varsa, bu taktirde T dönüşümünün X te bir tek sabit noktası vardır (Altun ve ark., 2018).

Uyarı 3.4.5.

1. Her (C) daralma dönüşümü Suzuki tipi (SC) daralma dönüşümüdür
2. Her (C) daralma dönüşümü (PC) P –daralma dönüşümü olduğu açıktır.

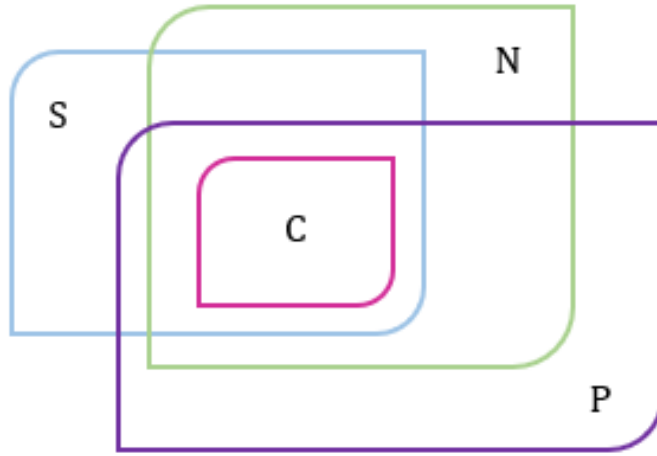
Fakat her iki önermenin de tersi her zaman doğru değildir (Altun, 2023).

Uyarı 3.4.6.

Daralma dönüşümleri sürekli olmasına rağmen, ne Suzuki tipi daralma ne de P –daralma dönüşümleri sürekli değildir. Suzuki'nin Teorem 3.4.2'deki sürekliliğe ihtiyacı olmadığına dikkat edilmelidir. Fakat, Teorem 3.4.4'te dönüşümün sürekli olduğu varsayılmıştır.

İlk olarak daralma dönüşüm kavramlarını karşılamak için vereceğimiz kümeleri adlandıralım. Kendinden kendine daralma dönüşümlerin sınıfı C , kendisinden kendine

genişlemeyen dönüşümlerin sınıfını N , Suzuki tip dönüşümlerin sınıfı S ve P –daralma dönüşümlerin sınıfını P ile gösterelim. Bu tanımlardan anlaşılacak ki $C \subseteq S, C \subseteq P$ ve $C \subseteq N$ dir. Aşağıdaki örnek C sınıfının P in bir uygun alt sınıfı olduğunu göstermektedir.



Şekil 3. C, S, P ve N arasındaki ilişki (Altun ve ark., 2018)

N dir. Aşağıdaki örnek C sınıfının P in bir uygun alt sınıfı olduğunu göstermektedir.

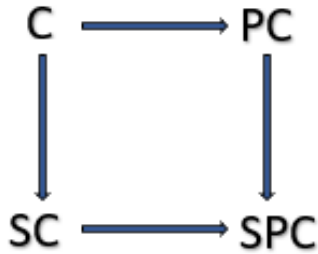
2023 yılında Altun çalışmasında P –daralma ve Suzuki tipi daralma kavramlarından ilham alarak Suzuki tipi P –daralma dönüşümü tanımlamıştır. Daha sonra Teorem 3.4.1 ve Teorem 3.4.4'ten daha genel bir sabit nokta teoremi elde etmiştir.

Tanım 3.4.7. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$(SPC) \quad \frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) < d(x, y) + |d(x, Tx) - d(y, Ty)|$$

koşulu sağlanıyorsa T ye Suzuki tipi P –daralma dönüşüm denir.

Yukarıda tanımı verilen daralma kavramları için aşağıdaki diyagram verilebilir:



Şekil 4. C, PC, SC ve SPC dönüşümleri arasındaki ilişki

Teorem 3.4.8. (X, d) bir kompakt metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir sürekli Suzuki tipi P –daralma dönüşümü olsun. Bu taktirde, T dönüşümü X te bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 3.4.9. (X, d) bir kompakt metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir Suzuki tipi P –daralma dönüşümü ve f de $f(x) = d(x, Tx)$ olarak tanımlı alt yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde, T dönüşümü X te bir tek sabit noktaya sahiptir.

3.5. f –Daralma Dönüşümleri

Beiranvand ve arkadaşları 2009 yılında metrik uzaylarda ikinci bir fonksiyona bağlı genel bir daralma koşulunu tanımlayıp bu koşulu sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremlerini ortaya koymuştur.

Tanım 3.5.1. (X, d) bir metrik uzay ve $f, T : X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için $0 < k < 1$ olacak şekilde

$$d(fTx, fTy) \leq kd(fx, fy)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne f –daralma dönüşümü denir (Beiranvand ve ark., 2009).

f –daralma dönüşümleri $f = I$ (I birim dönüşüm) alınırse daralma dönüşümlerine denk olur. Her daralma dönüşümü bir f –daralma dönüşümüdür. Fakat f –daralma dönüşümünün daralma dönüşümü olması gerekmez.

Örnek 3.5.2. $X = [1, +\infty)$ üzerinde uzayı mutlak değer metriği ile birlikte alınsın.

$$T : X \rightarrow X , \quad T(x) = 2x$$

$$f : X \rightarrow X , \quad f(x) = \frac{1}{x} + 1$$

şeklinde tanımlansın.

$$\begin{aligned} d(fTx, fTy) &= \left| \frac{1}{2x} + 1 - \frac{1}{2y} - 1 \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{y} - 1 \right| \\ &= \frac{1}{2} |fx - fy| \\ &= \frac{1}{2} d(fx, fy) \end{aligned}$$

olduğundan T bir f –daralma dönüşümüdür (Beiranvand ve ark., 2009). Fakat, T dönüşümü daralma dönüşümü değildir.

Örnek 3.5.3. $X = [0, \infty)$ üzerinde uzayı mutlak değer metriği ile donatılmış olsun.

$$T : X \rightarrow X , \quad T(x) = 2x + 1$$

$$f : X \rightarrow X , \quad f(x) = e^{-x}$$

şeklinde tanımlanan T dönüşümü

$$\begin{aligned} d(fTx, fTy) &= |e^{-2x-1} - e^{-2y-1}| \\ &= \frac{1}{e} |e^{-x} + e^{-y}| |e^{-x} - e^{-y}| \\ &\leq \frac{2}{e} |e^{-x} - e^{-y}| \\ &= \frac{2}{e} |fx - fy| \end{aligned}$$

sağladığından T dönüşümü f –daralma dönüşümüdür (Beiranvand ve ark., 2009).

Tanım 3.5.4. (X, d) bir metrik uzay ve $f, T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(fTx, fTy) < d(f(x), f(y))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne f –kesin daralma dönüşümü denir (Beiranvand ve ark., 2009).

Her f –daralma dönüşümü bir f –kesin daralma dönüşümüdür ama her f –kesin daralma dönüşümü bir f –daralma dönüşümü olmayabilir.

Örnek 3.5.5. $X = [1, +\infty)$ uzayı mutlak değer metriği olsun.

$$T : X \rightarrow X , \quad T(x) = \sqrt{x}$$

$$f : X \rightarrow X , \quad f(x) = x$$

olarak tanımlanan

$$\begin{aligned} d(fTx, fTy) &= |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \\ &< |x - y| \end{aligned}$$

$$= |fx - fy|$$

olduğundan T dönüşümü f –kesin daralma dönüşümüdür. Fakat T dönüşümü f –daralma dönüşümü değildir (Beiranvand ve ark., 2009).

Teorem 3.5.6. (X, d) bir tam metrik uzay olsun ve $f : X \rightarrow X$ bire-bir, sürekli ve alt dizisel yakınsak bir dönüşüm olsun. Bu taktirde her sürekli $T : X \rightarrow X$, f –daralma dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca, eğer f dizisel yakınsaksa, o zaman her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Uyarı 3.5.7. Yukardaki teoremde $fx = x$ (f birim dönüşüm) olarak alınırsa, Teorem 3.5.6, Teorem 3.1.20 (Banach sabit nokta teoremi) ye denk olur.

Teorem 3.5.8. (X, d) bir kompakt metrik uzay olsun ve $f : X \rightarrow X$ bire-bir, sürekli bir dönüşüm olsun. Bu taktirde her $T : X \rightarrow X$, f –daralma dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca, her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsaktır.

3.6. Geraghty Daralma Dönüşümleri

Geraghty tarafından 1973 yılında Geraghty daralma dönüşümleri tanımlanmıştır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(t_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$$

şartını sağlayan $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1)$ fonksiyonların sınıfı S ile gösterilsin (Geraghty, 1973).

Teorem 3.6.1. (X, d) tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, y))d(x, y)$$

koşulunu sağlayan $\alpha \in S$ fonksiyonu varsa d dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Geraghty daralma dönüşümlerinin bir genellemesi aşağıdaki gibi ifade edilmiştir (Huang ve ark., 2015).

$s \geq 1$ bir reel sayı ve $\beta : [0, \infty) \rightarrow \left[0, \frac{1}{s}\right)$ fonksiyonların sınıfı $\mathcal{F}_s$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(t_n) = \frac{1}{s} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0, \quad n \rightarrow \infty$$

dir (Geraghty, 1973).

Örnek 3.6.2. $\beta : [0, \infty) \rightarrow \left[0, \frac{1}{s}\right)$ olmak üzere

- (i) Bazı $s \geq 1$ için $\beta(t) = \frac{e^{-s}}{t}$,
- (ii) $\beta(t) = \frac{1}{s(1+t^2)}$.

fonksiyonları $\mathcal{F}_s$ sınıfına aittir (Huang ve ark., 2015).

3.7. İntegral Tipi Daralma Dönüşümleri

Banach sabit nokta teoreminin bir başka genellemesi de integral tipindeki daralma dönüşümleridir. İlk olarak Branciari aşağıdaki fonksiyon sınıfını kullanarak 2002 yılında tam metrik uzaylarda integral tipindeki daralma dönüşümlerinin sabit noktalarının varlığını ve tekliğini ispatlamıştır (Branciari, 2002).

Tanım 3.7.1.

$J := \{\varphi \mid \varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty] \text{ Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon}\}$

- (i) φ nonnegatiftir,
- (ii) $\varphi, [0, +\infty)$ nin her kompakt alt kümesi üzerinde toplanabilir,dir,
- (iii) Her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\int_0^\varepsilon \varphi(t)dt > 0$$

dır.

Örnek 3.7.2. $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın.

- (i) $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $\varphi(t) = 2t$,
- (ii) $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $\varphi(t) = e^t$.

Bu durumda $\varphi \in J$ dir.

Branciari Banach sabit nokta teoremini integral tipindeki daralma dönüşümlerine genelleyen aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır. Aşağıda bu teoremin ifadesini verelim (Branciari, 2002).

Teorem 3.7.3. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\int_0^{d(Tx, Ty)} \varphi(t) dt \leq c \int_0^{d(x, y)} \varphi(t) dt$$

ifadesini sağlayan $c \in (0, 1)$ sabiti ve $\varphi \in J$ fonksiyonu varsa T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Yukarıdaki teoremde $\varphi(t) = 1$ alınırsa bu sonuç Banach sabit nokta teoremine indirgenir.

Lemma 3.7.4. $\phi \in \Phi$ ve $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pozitif değerli ve $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = a$ yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{r_n} \phi(t) dt = \int_0^a \phi(t) dt$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{r_n} \phi(t) dt = 0$$

dır (Liu ve ark., 2011).

3.8. F –Daralma Dönüşümleri

Wardowski (2012) çalışmasında aşağıdaki özelliklere sahip olan bir fonksiyon kullanarak yeni bir daralma dönüşümü tanımlamıştır. Bu daralma dönüşümüne ise F –daralma dönüşümü adını vermiştir. $\mathcal{F}$ aşağıdaki koşulları sağlayan tüm $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonların bir sınıfı olsun:

- (i) F kesin artandır, yani her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için $x < y$ iken $F(x) < F(y)$ dır.
- (ii) Pozitif sayıların her (α_n) dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(\alpha_n) = -\infty$ dır.

(iii) $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\alpha^k F(\alpha)) = 0$ olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ sabiti vardır.

Tanım 3.8.1. (X, d) metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $F \in \mathcal{F}$ olsun. $d(Tx, Ty) > 0$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)) \quad (6)$$

olan bir $\tau > 0$ sayısı varsa T dönüşümüne bir F –daralma dönüşümü adı verilir (Wardowski, 2012).

Literatürde bulunan bazı daralma dönüşümlerinin aşağıdaki örnekler ile bir F –daralma dönüşümü oldukları görülür.

Örnek 3.8.2. $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $F(\alpha) = \ln \alpha$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda $F \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır. $T : X \rightarrow X$ bir F –daralma dönüşümü ise $d(Tx, Ty) > 0$ koşulunu sağlayan her $x, y \in X$ ve $Tx \neq Ty$ için

$$d(Tx, Ty) \leq e^{-\tau} d(x, y) \quad (7)$$

sağlanır. Şu halde $Tx = Ty$ koşulunu sağlayan $x, y \in X$ için de (6) eşitsizliği sağlanır. T dönüşümü $\alpha = e^{-\tau}$ olmak üzere bir Lipschitz dönüşümüdür. $A = e^{-\tau} < 1$ olduğundan T dönüşümü bir daralma dönüşümüdür. Bu nedenle her daralma dönüşümü bir F –daralma dönüşümüdür (Wardowski, 2012).

Örnek 3.8.3. $F(\alpha) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $F(\alpha) = \ln \alpha + \alpha$ fonksiyonunu ele alacak olursak. Bu durumda $F(\alpha) \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır. $d(Tx, Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ ve $Tx \neq Ty$ için

$$\frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{d(Tx, Ty) - d(x, y)} \leq e^{-\tau} \quad (8)$$

şartı sağlanır. Bu durumda $T : X \rightarrow X$ bir F –daralma dönüşümüdür (Wardowski, 2012).

Örnek 3.8.4. $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $F(\alpha) = \frac{-1}{\sqrt{\alpha}}$ olsun. $F \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır $d(Tx, Ty) > 0$ olan her $x, y \in X$ ve $Tx \neq Ty$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{(1 + \tau \sqrt{d(x, y)})^2} d(x, y)$$

eşitsizliği sağlandığından $T : X \rightarrow X$ bir F –daralma dönüşümüdür (Wardowski, 2012).

Örnek 3.8.5. $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $F(\alpha) = \ln(\alpha^2 + \alpha)$ olarak tanımlansın. $F \in \mathcal{F}$ dir. $d(Tx, Ty) > 0$ olan her $x, y \in X$ ve $Tx \neq Ty$ için

$$\frac{d(Tx, Ty)(d(Tx, Ty) + 1)}{d(x, y)(d(x, y) + 1)} \leq e^{-\tau}$$

şartı sağlandığından $T : X \rightarrow X$ bir F –daralmadır (Wardowski, 2012).

Uyarı 3.8.6. $\mathcal{F}$ ailesinin (i) koşulu ve (6) eşitsizliğinden her F –daralma dönüşümü, bir kesin daralma dönüşümüdür. T bir F –daralma ise $d(Tx, Ty) > 0$ koşulunu sağlayan her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

olur. Böylece her F –daralma dönüşümü aynı zamanda sürekli dönüşümdür (Wardowski, 2012).

Uyarı 3.8.7. $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ olsun. Her $\alpha > 0$ için $F_1(\alpha) \leq F_2(\alpha)$ ve $G = F_2 - F_1$ azalmayan bir dönüşüm ise her F_1 –daralma dönüşümü bir F_2 –daralma dönüşümüdür. Gerçekten Uyarı 3.8.6 dan $d(Tx, Ty) > 0$ koşulunu sağlayan her $x, y \in X$, $Tx \neq Ty$ için

$$G(d(Tx, Ty)) \leq G(d(x, y))$$

olur. Böylece $d(Tx, Ty) > 0$ koşulunu sağlayan her $x, y \in X$, $Tx \neq Ty$ için

$$\begin{aligned} \tau + F_2(d(Tx, Ty)) &= \tau + F_1(d(Tx, Ty)) + G(d(Tx, Ty)) \\ &\leq F_1(d(x, y)) + G(d(x, y)) \\ &= F_2(d(x, y)) \end{aligned}$$

elde edilir (Wardowski, 2012).

Uyarı 3.8.8. $F_1(\alpha) = \ln \alpha$, $\alpha > 0$ ve $F_2(\alpha) = \ln \alpha + \alpha$, $\alpha > 0$, $F_1 < F_2$ olmak üzere dönüşümleri için dikkat edilmelidir ki $F_1 - F_2$ kesin artandır. Dolayısıyla, Uyarı 3.8.7 ile her (7) Banach daralmasının (8) daralma koşulunu sağladığını elde ederiz.

Wardowski 2012 yılında, F –daralma dönüşümlerini kullanarak aşağıdaki teoremi ifade etmiştir.

Teorem 3.8.9. (X, d) tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir F –daralma dönüşümü olsun. Bu taktirde T dönüşümü X uzayında bir tek $x^* \in X$ sabit noktasına sahiptir. Ayrıca, her bir $x_0 \in X$ için $(T^n x_0)$ Picard iterasyon dizisi $x^* \in X$ noktasına yakınsar (Wardowski, 2012).

Wardowski ve Van Dung (2014) çalışmalarında F –zayıf daralma dönüşümü aşağıdaki gibi tanımladılar.

Tanım 3.8.10. (X, d) bir metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $F \in \mathcal{F}$ olsun. $d(Tx, Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$M(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}$$

olmak üzere

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(M(x, y)) \quad (9)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\tau > 0$ sabiti varsa T dönüşümüne F –zayıf daralma dönüşümü denir (Wardowski ve Van Dung, 2014).

Wardowski ve Van Dung (2014) çalışmalarında bu kavramı Teorem 3.8.9 u aşağıdaki gibi genelleştirmiştir.

Teorem 3.8.11. (X, d) bir tam metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir F –zayıf daralma dönüşümü olsun. Eğer T veya F sürekli ise, T dönüşümünün bir tek x^* sabit noktası vardır ve tüm $x \in X$ için $(T^n x_0)$ dizisi x^* a yakınsaktır (Wardowski ve Van Dung, 2014).

Piri ve Kuman (2014), F –daralmanın tanımındaki (iii) koşulunun yerine aşağıdaki koşulu alarak geniş bir fonksiyon sınıfı ortaya koymuşlardır.

(iii') $F, (0, \infty)$ üzerinde sürekli.

Böylece, Piri ve Kuman (i), (ii) ve (iii') koşullarını sağlayan tüm $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının ailesini $\mathfrak{F}$ olarak tanımladılar ve aşağıda ifade edilen sabit nokta teoremini ispatladılar.

Teorem 3.8.12. (X, d) bir tam metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşümü olsun. Kabul edelim ki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y))$$

olacak şekilde $F \in \mathfrak{F}$ ve $\tau > 0$ olsun. O halde T nin bir tek x^* sabit noktası vardır ve her $x \in X$ ve $(T^n x)$ dizisi x^* a yakınsaktır (Piri ve Kuman, 2014).

Öte yandan Mınak ve arkadaşları (2014) Berinde'nin ortaya koymuş olduğu hemen hemen daralma tanımı ve Wardowski'nin F –daralma tanımlarından faydalanarak hemen hemen F –daralma dönüşümünü tanımladılar. Bu tanım paralelinde aşağıdaki sabit nokta teoremini ortaya koydular.

Tanım 3.8.13. (X, d) bir metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşümü olsun. Eğer $F \in \mathcal{F}$ ve $\forall x, y \in X$ için

$$[d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y) + Ld(y, Tx))] \quad (10)$$

olacak şekilde $\tau > 0$ ve $L \geq 0$ varsa T dönüşümüne bir hemen hemen F –daralma dönüşümü adı verilir. Ayrıca, T nin hemen hemen F –daralma olduğunu kontrol etmek için hem (10) şartının hem de $\forall x, y \in X$ için aşağıda ifade edilen (11) şartının kontrol edilmesi gerekir

$$[d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y) + Ld(x, Ty))]. \quad (11)$$

Uyarı 3.8.14. Örnek 3.8.2 deki $F(\alpha) = \ln \alpha$ dikkate alındığında her hemen hemen daralma dönüşümü aynı zamanda hemen hemen F –daralma olduğunu söyleyebiliriz. Ancak bunun tersi doğru olmayabilir.

Hemen hemen F –daralma tanımını kullanarak aşağıdaki sabit nokta teoremi verildi. Bu teoremden T (veya F) nin sürekli olması gerekmediğine dikkat edilmelidir.

Teorem 3.8.15. (X, d) bir tam metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir hemen hemen F –daralma dönüşümü olsun. Bu taktirde T dönüşümünün X te bir sabit noktaya sahiptir (Mınak ve ark., 2014).

Yukarıda ifade edilen Teorem 3.8.19'de, Mınak ve arkadaşları, eğer T hemen hemen F –daralma ise T nin bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermişlerdir. Fakat T nin sabit noktasının tekliğini garanti etmek için ek bir koşulu dikkate alarak aşağıdaki teoremi ortaya koymuşlardır.

Teorem 3.8.16. (X, d) bir tam metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir hemen hemen F –daralma dönüşümü olsun. Ayrıca kabul edelim ki T aşağıdaki koşulu sağlasın: $\forall x, y \in X$ için

$$[d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau_1 + G(d(Tx, Ty)) \leq G(d(x, y) + L_1 d(x, Tx))] \quad (12)$$

olacak şekilde $G \in F$ ve $L_1 \geq 0$, $\tau_1 > 1$ mevcut olsun. Şu halde, T dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır.

Hussain ve Salimi $\tau > 0$ sabiti dikkate alarak F –daralma dönüşümlerini genelleştirerek yeni bir fonksiyon ailesini aşağıdaki gibi tanımlamışlardır (Hussain ve Salimi, 2014).

Δ_G aşağıdaki (G) özelliğini sağlayan tüm $G : \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun.

(G) Her $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}_+$ için $t_1 t_2 t_3 t_4 = 0 \Rightarrow G(t_1, t_2, t_3, t_4) = \tau$ olan $\tau > 0$ vardır.

Örnek 3.8.17. $\tau > 0$ ve $L \in \mathbb{R}_+$ olsun. $G_1 : G_2 : G_3 : \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanan fonksiyonları Δ_G sınıfına aittir (Hussain ve Salimi, 2014).

- (i) $G_1(t_1, t_2, t_3, t_4) = L \min\{t_1, t_2, t_3, t_4\} + \tau$,
- (ii) $G_2(t_1, t_2, t_3, t_4) = \tau e^{L \min\{t_1, t_2, t_3, t_4\}}$,
- (iii) $G_3(t_1, t_2, t_3, t_4) = L \ln(\min\{t_1, t_2, t_3, t_4\} + 1) + \tau$.

Ayrıca, Hussain ve Salimi G fonksiyonunu kullanarak $\alpha - \eta - GF$ –daralma dönüşümünü tanımlamış ve tam metrik uzayda aşağıdaki sabit nokta teoremini elde etmişlerdir (Hussain ve Salimi, 2014).

Tanım 3.8.18. (X, d) metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için $\alpha, \eta : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

i) $\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geq 1$ (α –geçişli (admissible)),

ii) $\alpha(x, y) \geq \eta(x, y) \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geq \eta(Tx, Ty)$ (η fonksiyonuna göre α –geçişli),

koşullarını sağlasın. Bu durumda,

$$\eta(x, Tx) \leq \alpha(x, y) \text{ ve } d(Tx, Ty) > 0$$

iken

$$G(d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)) + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y))$$

ifadesini sağlayan $G \in \Delta_G$ ve $F \in \mathcal{F}$ fonksiyonları varsa $T : X \rightarrow X$ dönüşümüne $\alpha - \eta - GF$ –daralma dönüşümü adı verilir (Hussain ve Salimi, 2014).

Teorem 3.8.19. (X, d) tam metrik uzay olsun ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlasın.

- (i) $x, y \in X$ için $\alpha(x, y) \geq \eta(x, y)$ ise $\alpha(Tx, Ty) \geq \eta(Tx, Ty)$ dir,
- (ii) T bir $\alpha - \eta - GF$ –daralma dönüşümüdür,
- (iii) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq \eta(x_0, Tx_0)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır,
- (iv) T bir $\alpha - \eta$ –sürekli dönüşümdür.

Şu halde, T dönüşümünün X uzayında bir sabit noktası vardır. Ayrıca, her $x, y \in F(T)$ için $\alpha(x, y) \geq \eta(x, x)$ ise T dönüşümünün sabit noktası tektir (Hussain ve Salimi, 2014).

Yukarıda ifade edilen F –daralma dönüşümleri ve sabit nokta teoremlerinin dışında F –daralma dönüşümleri ile ilgili birçok sonuç bulunmaktadır (Abbas ve ark., 2016; Alsulami ve ark., 2015; Aydi ve ark., 2017; Karapınar ve ark., 2015; Öztürk, 2019).

3.9. E –Daralma Dönüşümleri

İlk olarak Fulga, A. ve Proca, A. M., (2017a) tarafından Geraghty daralma dönüşümlerini genelleyen aşağıdaki tanım verilmiştir.

$\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ koşulunu sağlayan tüm fonksiyonların ailesi Φ ile gösterilsin.

Tanım 3.9.1. (X, d) metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$E(x, y) = d(x, y) + |d(x, Tx) - d(y, Ty)|$$

olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(E(x, y))E(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan $\varphi \in \Phi$ fonksiyonu var ise T dönüşümüne φ_E –daralma dönüşümü adı verilir. $E(x, y)$ ifadesi literatüre E –daralma olarak geçmiştir (Fulga ve Proca, 2017a).

Uyarı 3.9.2. $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ ve herhangi $x, y \in X$ için $x \neq y$ ise

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(E(x, y))E(x, y) < E(x, y)$$

dir.

Teorem 3.9.3. (X, d) tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir φ_E –daralma dönüşümü olsun. Şu halde, T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir (Fulga ve Proca 2017).

Aynı yıl Fulga ve Proca, E –daralma dönüşümünü ve Wardowski’nin (2012) F –daralma dönüşümünü göz önüne alarak $\mathcal{F}_E$ sınıfını aşağıdaki gibi tanımlayarak bu daralma sınıfına bağlı sabit nokta teoremini ispatlamışlardır (Fulga ve Proca, 2017b).

$\mathcal{F}_E$ aşağıdaki koşulları sağlayan $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun.

- (i) F kesin artandır, yani her $x, y \in \mathbb{R}_+$ için $x < y$ iken $F(x) < F(y)$ dır.
- (ii) Her $t_0 > 0$ için $\tau + \liminf_{t \rightarrow t_0} F(t) > \limsup_{t \rightarrow t_0} F(t)$ olacak şekilde $\tau > 0$ vardır.

Tanım 3.9.4. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$E(x, y) = d(x, y) + |d(x, Tx) - d(y, Ty)|$$

olmak üzere

$$d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(E(x, y))$$

olacak şekilde $\tau > 0$ varsa, T dönüşümüne bir $\mathcal{F}_E$ –daralma denir (Fulga ve Proca, 2017b).

Uyarı 3.9.5. (Fulga ve Proca, 2017b)

i) Her $\mathcal{F}_E$ –daralma dönüşümü bir $\mathcal{F}$ –daralma dönüşümüdür, ancak bunun tersi her zaman doğru değildir.

ii) Her $\mathcal{F}$ –zayıf daralma dönüşümü bir $\mathcal{F}_E$ –daralma dönüşümü değildir.

Teorem 3.9.6. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir $\mathcal{F}_E$ –daralma dönüşümü olsun. Bu taktirde her $x_0 \in X$ için T nin bir tek x^* sabit noktası vardır. $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar (Fulga ve Proca, 2017).

Diğer yandan Fulga A. ve Karapınar E., (2018) $\mathcal{Z}$ –daralma (simülasyon fonksiyonunu) ve E –daralma dönüşümlerini kullanarak E tipi $\mathcal{Z}$ –daralma dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayarak yeni bir sabit nokta teoremi ispatlamışlardır.

Tanım 3.9.7. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$E(x, y) = d(x, y) + |d(x, Tx) - d(y, Ty)|$$

iken

$$\sigma(d(Tx, Ty), E(x, y)) \geq 0$$

ifadesini sağlayan $\sigma \in \mathcal{Z}$ fonksiyonu varsa T dönüşümüne E tipi $\mathcal{Z}$ –daralma dönüşümü denir. X üzerinde tanımlanan σ ya göre E tipi $\mathcal{Z}$ –daralma kümesi $\mathcal{C}_E(X)$ ile gösterilmektedir (Fulga ve Karapınar, 2018).

Teorem 3.9.8. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir E tipi $\mathcal{Z}$ –daralma dönüşümü olsun. Bu taktirde T dönüşümü X uzayında bir sabit noktaya sahiptir (Fulga ve Karapınar, 2018).

Proca A. M. (2018) E –daralma dönüşümünü maksimum operatörü ile genelleterek aşağıdaki gibi yeni bir φ_M –Geraghtp daralma dönüşümü tanımlamıştır. Buna bağlı olarak yeni bir sabit nokta teoremini ortaya koymuştur.

Tanım 3.9.9. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$M(x, y) = \max\{d(x, y) + |d(x, Tx) - d(y, Ty)|; \\ d(x, Tx) + |d(x, y) - d(y, Ty)|; \\ d(y, Ty) + |d(x, y) - d(x, Tx)|; \\ \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx) + |d(x, Tx) - d(y, Ty)|}{2}\}$$

olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(M(x, y))M(x, y),$$

olacak şekilde $\varphi \in \Phi$ fonksiyonu varsa T ye φ_M –Geraghtp daralma dönüşümü denir (Proca, 2018).

Teorem 3.9.10. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir φ_M –Geraghtp dönüşümü olsun. Bu taktirde her $x_0 \in X$ için T nin bir tek x^* sabit noktası vardır. $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar (Proca, 2018).

Proca (2019) çalışmasında Ćirić daralma dönüşümü yerine φ_M – Geraghtp daralma dönüşümündeki $M(x, y)$ maksimum değeri alarak Ćirić tipi sabit nokta teoreminden daha daha genel bir sabit nokta teoremini elde etmiştir.

Teorem 3.9.11. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq a(\varphi_M(x, y))$ eşitsizliğini sağlayan $a \in [0, 1)$ sabiti varsa T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir. Yani T bir Picard operatörüdür (Proca, 2019).

3.10. C –Sınıfı Daralma Dönüşümleri

2014 yılında Ansari A. H. tarafından C –sınıfı fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Ansari, 2014).

Tanım 3.10.1. $f : [0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve her $s, t \in [0, \infty)$ için

- (i) $f(s, t) \leq s$,
- (ii) $f(s, t) = s \Rightarrow s = 0$ veya $t = 0$,

koşullarını sağlıyorsa C –sınıfı fonksiyon olarak adlandırılır. Burada dikkat edilmelidir ki $f(0,0) = 0$ dir.

Örnek 3.10.2. Aşağıdaki fonksiyonlar her $s, t \in [0, \infty)$ için C –sınıfı fonksiyonlardır.

1. $f_1(s, t) = s - t$,
2. $0 < m < 1$ olmak üzere $f_2(s, t) = ms$ dir,
3. $f_3(s, t) = \frac{s}{(1+t)^r}$, $r \in (0, \infty)$ dir,
4. $\beta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $f_4(s, t) = s\beta(s)$ dir,
5. $f_5(s, t) = \sqrt[n]{\ln(1 + s^n)}$ dir.

Ayrıca, C –sınıfı fonksiyonların uygulanmasında kullanılan bazı yardımcı fonksiyon sınıfları aşağıdaki gibidir (Ansari, 2014).

Tanım 3.10.3. $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli fonksiyonu azalmayan ve $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ koşulunu sağlıyorsa uzaklık değıştiren (altering distance) fonksiyonu adı verilir.

Tanım 3.10.4. $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli fonksiyonu her $t > 0$ için $\varphi(t) > 0$ ve $\varphi(0) \geq 0$ koşulunu sağlıyorsa ultra uzaklık değıştiren (ultra altering distance) fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 3.10.5. $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli fonksiyonu $h(t) \geq t$ koşulunu sağlıyorsa A –sınıfındandır denir.

Tanım 3.10.6. $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $F \subset X$ olsun. Eğer $x \in F$ iken $T(x) \in F$ ise F ye X in T altında değışmeyen bir alt kümesi denir.

Yukarıda ifade edilen tanımları da kullanarak Ansari aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Teorem 3.10.7. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer

- (i) F, X in T altında değışmeyen kapalı bir alt kümesi;
- (ii) ψ ve φ uzaklık değıştiren (veya ultra uzaklık değıştiren) fonksiyonlar;
- (iii) f bir C –sınıfı fonksiyon;
- (iv) h bir A –sınıfı fonksiyon;
- (v) her $x, y \in X$ için

$$h(\psi(d(Tx, Ty))) \leq f(\psi(d(x, y)), \varphi(d(x, y)))$$

ise bu taktirde T nin F de bir tek sabit noktası vardır.

3.11. θ –Sınıfı Daralma Dönüşümleri

Jleli ve Samet 2014 yılında θ sınıfı adını verdikleri aşağıdaki özellikleri sağlayan yeni bir fonksiyon sınıfı tanımlamışlardır (Jleli ve Samet, 2014).

Tanım 3.11.1. $\theta : (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ fonksiyonu

- (i) θ azalmayandır,
- (ii) her bir $(t_n) \subset (0, \infty)$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(t_n) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0^+$,
- (iii) $r \in (0, 1)$ ve $l \in (0, \infty]$ için $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\theta(t)-1}{t^r} = l$

özelliklerini sağlıyorsa θ sınıfındandır denir.

Tanım 3.11.2. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $\theta \in \Theta$ olsun.
Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \neq 0 \Rightarrow \theta(d(Tx, Ty)) \leq [\theta(d(x, y))]^k$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ sabiti varsa T dönüşümüne θ –daralma dönüşümü denir.

Θ sınıfı kullanılarak Banach daralma dönüşümünü genelleleyen yeni bir sabit nokta teoremi elde edilmiştir.

Teorem 3.11.3. (X, d) tam genelleştirilmiş metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir θ –daralma dönüşümü olsun. Bu taktirde T dönüşümünün X uzayında bir tek sabit noktası vardır (Jleli ve Samet, 2014).

Uyarı 3.11.4.

Ayrıca, onlar gösterdiler ki Banach daralma olmayan θ –daralmalar mevcut olmasına rağmen herhangi bir Banach daralma θ –daralmanın özel bir halidir.

Ayrıca, Ahmad ve arkadaşları çalışmalarında (θ_3) koşulu yerine aşağıdaki koşulu ekleyerek yeni bir sınıf elde edilmiştir (Ahmad ve ark., 2017).

$((iii)')$ θ fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde sürekli.

Şu halde (i) , (ii) , ve $((iii)')$ şartlarını sağlayan fonksiyonların sınıfı Ω ile ifade edilmektedir (Ahmad ve ark., 2017).

Örnek 3.11.5. Her $t > 0$ için aşağıda verilen $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ fonksiyonları Ω sınıfındadır. Aynı zamanda $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \Theta$ dır (Ahmad, ve ark., 2017).

1. $\theta_1(t) = e^{\sqrt{t}},$
2. $\theta_2(t) = e^{\sqrt{te^t}},$
3. $\theta_3(t) = e^t,$
4. $\theta_4(t) = \cosh t,$
5. $\theta_5(t) = 1 + \ln(1 + t),$
6. $\theta_6(t) = e^{te^t}.$

Tanım 3.11.6. (X, d) bir metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $\theta \in \Omega$ olsun.
Her $x, y \in X$ için

$$Tx \neq Ty \Rightarrow \theta(d(Tx, Ty)) \leq [\theta(d(x, y))]^k$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ sabiti varsa T dönüşümüne Θ –daralma dönüşümü denir (Ahmad ve ark., 2017).

Teorem 3.11.7. (X, d) tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir Θ –daralma dönüşümü olsun. Bu taktirde

- (i) T dönüşümünün bir tek $x \in X$ sabit noktası vardır,
- (ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ ile verilen $\{T^n(x_0)\}$ iterasyon dizisi x sabit noktasına yakınsaktır.

(Ahmad ve ark., 2017) de Suzuki-Berinde tipi Θ –daralma dönüşümleri tanımlanarak tam metrik uzaylarda sabit nokta teoremi ispatlanmıştır (Ahmad ve ark., 2017).

Tanım 3.11.8. (X, d) bir metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $\theta \in \Omega$ olsun. Her $x, y \in X$ ve $Tx \neq Ty$ için

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) < d(x, y) \Rightarrow \theta(d(Tx, Ty)) \leq [\theta(d(x, y))]^k + L \min\{d(x, Tx), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ sabiti varsa T ye Suzuki-Berinde tipi Θ –daralma dönüşümü denir.

Teorem 3.11.9. (X, d) tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir Suzuki–Berinde tipi Θ –daralma dönüşümü olsun. Şu halde,

- (i) T dönüşümünün bir tek $x \in X$ sabit noktası vardır,
- (ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ ile verilen $\{T^n(x_0)\}$ iterasyon dizisi x sabit noktasına yakınsaktır.

3.12. $\alpha - \psi$ –Daralma Dönüşümleri

İlk olarak Samet tarafından verilen α –geçişlik tanımını ve bununla ilgili örnekleri ifade edelim (Samet ve ark., 2012).

Tanım 3.12.1. X boştan farklı bir küme, $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\alpha(x, y) \geq 1$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ oluyorsa T dönüşümüne α –geçişli dönüşüm denir.

Örnek 3.12.2. $X = \mathbb{R}_+$ olmak üzere $T : X \rightarrow X$ dönüşümü her $x \in X$ için $Tx = x$ ve $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu

$$\begin{cases} e^{x-y} & , \quad x \geq y \\ 0 & , \quad x < y \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Şu halde T α –geçişli bir dönüşümdür.

Yine Samet ve arkadaşları (2012) (c)-kıyaslama fonksiyonlarını ve α –geçişli dönüşümleri kullanarak $\alpha - \psi$ –daralma kavramını tanımlayarak bu daralma dönüşümleri için bazı sabit nokta teoremleri ortaya koymuşlardır.

Tanım 3.12.3. (X, d) bir metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\psi \in \Psi$ ve $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty)\alpha(x, y) \leq \psi(d(x, y))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne $\alpha - \psi$ –daralma dönüşümü denir.

Tanım 3.12.3 de eğer $\alpha(x, y) = 1$ ve $k \in [0, 1)$ olmak üzere $\psi(t) = kt$ olarak alınırsa

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise her Banach daralma dönüşümünün bir $\alpha - \psi$ –daralma dönüşümü olduğunu gösterir.

Teorem 3.12.4. (X, d) bir tam metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir $\alpha - \psi$ –daralma dönüşüm olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın:

- (i) T , α –geçişli,
- (ii) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır
- (iii) T , sürekli.

Bu taktirde, $Tx^* = x^*$ olacak şekilde bir tek $x \in X$ sabit noktaya sahiptir.

Daha sonra T nin sürekliliğini gerektirmeyen teoremi ortaya koydular.

Teorem 3.12.5. (X, d) bir tam metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir $\alpha - \psi$ –daralma dönüşüm olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın:

- (i) T , α –geçişli,
- (ii) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır,
- (iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için (x_n) , X te $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ olacak şekilde bir dizi olsun.
Eğer $x_n \rightarrow x \in X, n \rightarrow +\infty$ ise, bu durumda için $\alpha(x_n, x) \geq 1$ dir.

Bu taktirde, T bir sabit noktaya sahiptir.

Ayrıca, Samet (2014) çalışmasında Samet ve ark., (2012) deki sonuçları ve Banach, Kannan, Chatterjea, Zamfirescu, Berinde, Suzuki, Ciri'c, gibi iyi bilinen sabit nokta teoremlerini genişletmiştir. $\alpha - \psi$ –daralmaları ile ilgili yeni sonuçlar elde etmiştir. Elde

edilen, bu sonuçlar ikinci dereceden integral denklemler sınıfının çözümlerinin varlık ve tekliğini araştırmak için kullanılmıştır. Aşağıda verilen teorem ve sonuçlar yine bu çalışmada Dass–Gupta dönüşümü ile $\alpha - \psi$ –daralma dönüşümü ve Jaggi dönüşümü ile $\alpha - \psi$ –daralma dönüşümü arasındaki bağıntıyı ve sabit nokta teoremini ortaya koyan oldukça güzel sonuçlardır.

Teorem 3.12.6. Her Dass–Gupta dönüşümü bir $\alpha - \psi$ –daralma dönüşümüdür.

Sonuç 3.12.7: Tam metrik uzay üzerinde Her Dass-Gupta dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 3.12.9. Her Jaggi dönüşümü bir $\alpha - \psi$ –daralma dönüşümüdür.

Sonuç 3.12.9: Tam metrik uzay üzerinde sürekli olan her Jaggi dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

3.13. Simülasyon Fonksiyonları

Simülasyon fonksiyonları ilk olarak 2015 yılında Khojasteh ve arkadaşları tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Khojasteh ve ark., 2015).

Tanım 3.13.1. $\zeta : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer her $t, s > 0$, $\lambda \geq 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(\zeta_1) \quad \zeta(0,0) = 0 \text{ dır,}$$

$$(\zeta_2) \quad \zeta(t,s) < s - t \text{ dır,}$$

$$(\zeta_3) \quad (t_n), (s_n) \subset (0, \infty) \text{ da iki dizi olsun } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \ell \in (0, \infty) > 0$$

iken

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \zeta(t_n, s_n) < 0 \text{ dır,}$$

şartları sağlanıyorsa ζ ye bir simülasyon fonksiyonu denir.

Tüm simülasyon fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{Z}$ ile gösterilsin.

Şimdi simülasyon fonksiyonları için bazı örnekler verelim. Burada $\zeta_i : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$ bir fonksiyon ve $t, s \in [0, \infty)$ olsun.

Örnek 3.13.2. $\psi(t) = \phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ve her $t > 0$ için $\psi(t) < t \leq \phi(t)$ ifadesini sağlayan $\psi, \phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ iki sürekli fonksiyon olsun. Şu halde $\zeta_1(t, s) = \psi(s) - \phi(t)$ olarak tanımlı ζ_1 fonksiyonu bir simülasyon fonksiyonudur. Yani, $\zeta_1 \in \mathcal{Z}$ dir.

Örnek 3.13.3. Her $t, s > 0$ için $f(t, s) > g(t, s)$ ifadesini sağlayan $f, g : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ iki sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\zeta_2(t, s) = s - \frac{f(t, s)}{g(t, s)}$$

fonksiyonu $\mathcal{Z}$ sınıfına aittir.

Örnek 3.13.4. $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ifadesini sağlayan $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\zeta_3(t, s) = s - \varphi(s) - t$ olarak tanımlı ζ_3 fonksiyonu bir simülasyon fonksiyonudur. Yani, $\zeta_3 \in \mathcal{Z}$ dir.

Khojasteh ve ark. (2015) tanımladıkları simülasyon fonksiyonlar sınıfını kullanarak $\mathcal{Z}$ –daralma dönüşümünü aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Tanım 3.13.5. (X, d) metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $\zeta \in \mathcal{Z}$ olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\zeta(d(Tx, Ty), d(x, y)) \geq 0 \quad (13)$$

eşitsizliği sağlanırsa T dönüşümüne $\mathcal{Z}$ –daralma dönüşümü adı verilir. Eğer yukarıdaki tanımda her $t, s \in [0, \infty)$ için $\zeta \in \mathcal{Z}$ fonksiyonunu

$$\zeta(t, s) = \lambda s - t$$

olarak seçilirse $\mathcal{Z}$ –daralma dönüşümü Banach daralma dönüşümüne indirgenir (Khojasteh ve ark., 2015).

Uyarı 3.13.6. Metrik uzay üzerinde tanımlı simülasyon fonksiyonlar göz önüne alındığında her $t \geq s > 0$ için $\zeta(t, s) < 0$ olduğu açıktır. T dönüşümü $\zeta \in \mathcal{Z}$ olmak üzere $\mathcal{Z}$ –daralma dönüşümü ise

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

sağlanır. Buradan $\mathcal{Z}$ –daralma dönüşümü kesin daralma dönüşümüdür ve dolayısıyla süreklidir (Khojasteh ve ark., 2015).

Teorem 3.13.7. (X, d) tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir $\mathcal{Z}$ –daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca her $x_0 \in X$ için $x_n = Tx_{n-1}$

ile tanımlanan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Picard iterasyon dizisi T dönüşümünün sabit noktasına yakınsar (Khojasteh ve ark., 2015).

Argoubi ve arkadaşları (2015) çalışmalarında aşağıdaki uyarıyı yaparak Tanım 3.13.5 de verilen simülasyon fonksiyonunun tanımını Tanım 3.13.9 şeklinde kabul etmişlerdir. Çalışmalarındaki bulguları bu tanıma göre ortaya koymuşlardır.

Uyarı 3.13.8. Teorem 3.13.7 nin ispatında dikkat (ζ_1) koşulu kullanılmamaktadır. Fakat (13) da $x = y$ alırsa $\zeta(0, 0) \geq 0$ elde edilir. Yani eğer $\zeta(0, 0) < 0$ ise, o zaman (13) koşulunu sağlayan $T : X \rightarrow X$ operatörlerinin kümesi boş olacaktır. Buna göre, (ζ_1) koşulunu kaldırarak Tanım 3.13.5 i Argoubi ve arkadaşları (2015) tarafından biraz değiştirilmektedir.

Tanım 3.13.9. $\zeta : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü Tanım 3.13.5 deki (ζ_2) ve (ζ_3) koşullarını sağlıyorsa bir simülasyon fonksiyonu adı verilir.

Açıkçası, orijinal Khojasteh ve ark. anlamındaki (Tanım 3.13.5) aynı zamanda Argoubi ve ark. anlamda (Tanım 3.13.9) bir simülasyon fonksiyonudur, ancak aşağıdaki örnekte olduğu gibi bunun tersi doğru değildir.

Örnek 3.13.10. $\lambda \in (0, 1)$ olmak üzere

$$\zeta_\lambda(t, s) = \begin{cases} 1 & , (t, s) = (0, 0) \\ \lambda s - t & , (t, s) \neq (0, 0) \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\zeta_\lambda : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\zeta_\lambda(0, 0) > 0$ olup (ζ_2) ve (ζ_3) şartlarını sağladığından Argoubi ve arkadaşları anlamda bir simülasyon fonksiyondur. Fakat Khojasteh ve ark. anlamında bir simülasyon fonksiyonu değildir.

Aynı yıl Roldán-López-de-Hierro ve ark. (2015) Khojasteh ve ark. tarafından ortaya konan Tanım 3.13.1 deki simülasyon fonksiyonu kavramını aşağıdaki şekilde değiştirmişlerdir.

Tanım 3.13.11. $\zeta : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer her $t, s > 0$, $\lambda \geq 1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(\zeta_1) \quad \zeta(0, 0) = 0 \text{ dır,}$$

$$(\zeta_2) \quad \zeta(t, s) < s - t \text{ dır,}$$

$$(\zeta_3) \quad (t_n), (s_n) \subset (0, \infty) \text{ da iki dizi olsun } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \ell \in (0, \infty) > 0$$

ve $t_n < s_n$ iken

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \zeta(t_n, s_n) < 0,$$

şartları sağlanıyorsa ζ ye bir simülasyon fonksiyonu denir.

Mongkolkeha ve arkadaşları, (2017) $K \geq 1$ reel sayısını göz önüne alarak ζ simülasyon fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

Tanım 3.13.12. $\zeta : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan ζ fonksiyonuna $K \geq 1$ sabiti ile simülasyon fonksiyonu denir.

$$(\zeta_1) \zeta(0, 0) = 0,$$

$$(\zeta_2) \zeta(Kt, s) < s - Kt,$$

$$(\zeta_3) (t_n), (s_n) \subset (0, \infty) \text{ olmak üzere}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Kt_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n > 0$$

ve $t_n < s_n$ iken

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \zeta(t_n, s_n) < 0$$

dır.

Işık ve ark. metrik uzaylarda $\mathcal{Z}$ –daralma ve hemen hemen daralma dönüşümlerini kullanarak hemen hemen $\mathcal{Z}$ –daralma dönüşümünü (almost $\mathcal{Z}$ –contraction) aşağıdaki gibi tanımlamışlardır (Işık ve ark., 2018).

Tanım 3.13.13. (X, d) metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $\zeta \in \mathcal{Z}$ olsun. Her $x, y \in X$ için

$$N(x, y) = \min\{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

olmak üzere

$$\zeta(d(Tx, Ty), d(x, y) + \theta N(x, y)) \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan $\theta \geq 0$ sabiti varsa T dönüşümüne hemen hemen $\mathcal{Z}$ –daralma dönüşümü adı verilir (Işık ve ark., 2018).

Işık ve ark., (2018) tam metrik uzaylarda hemen hemen $\mathcal{Z}$ –daralma dönüşümlerinin bir tek sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamışlardır.

Teorem 3.13.14. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü $\zeta \in \mathcal{Z}$ ye göre bir hemen hemen $\mathcal{Z}$ –daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T nin bir tek sabit noktası vardır ve herhangi bir $x_0 \in X$ başlangıç noktası için $\{T^n x_0\}$ ile tanımlanan Picard iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar (Işık ve ark., 2018).

Uyarı 3.13.15. Eğer $\zeta \in \mathcal{Z}$ ve T hemen hemen $\mathcal{Z}$ –daralma dönüşümü ise her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) + \theta N(x, y)$$

dır.

Lemma 3.13.16. Eğer bir metrik uzayda hemen hemen $\mathcal{Z}$ –daralma dönüşümünün bir sabit noktası varsa, o zaman bu nokta tektir.

Cho (2018) çalışmasında simülasyon fonksiyonların sınıfını genişleterek yeni bir simülasyon fonksiyon sınıfı tanımlamıştır. Bu sınıfa $\mathcal{Z}$ –simülasyon fonksiyon adı verilmiştir. Tüm $\mathcal{Z}$ –simülasyon fonksiyonların ailesi $\mathcal{Z}$ ile gösterilir.

Tanım 3.13.17. $\xi : [1, \infty) \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$(\xi_1) \quad \xi(1,1) = 1,$$

$$(\xi_2) \quad \text{Her } t, s > 1 \text{ için } \xi(t, s) < \frac{s}{t},$$

$$(\xi_3) \quad (t_n), (s_n) \subset (1, \infty) \text{ dizileri için } t_n \leq s_n, (\forall n = 1, 2, 3, \dots) \text{ iken}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n > 1 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \xi(t_n, s_n) < 1.$$

koşullarını sağlayan $\xi \in \mathcal{Z}$ fonksiyonuna $\mathcal{Z}$ –simülasyon fonksiyon adı verilir.

Ayrıca, $\forall t > 1$ için $\xi(t, t) < 1$ dir (Cho, 2018).

Örnek 3.13.18. Aşağıdaki gibi tanımlanan $\xi : [1, \infty) \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $\mathcal{Z}$ sınıfına aittir.

$$1. \quad \text{Her } t, s \geq 1 \text{ ve } k \in (0,1) \text{ için } \xi(t, s) < \frac{s^k}{t} \text{ dir,}$$

$$2. \quad \phi : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty) \text{ azalmayan ve alttan yarı sürekl bir fonksiyon } \phi^{-1}(\{1\}) = 1 \text{ olsun. Her } \phi^{-1}(\{1\}) = 1 \text{ için } \xi(t, s) < \frac{s}{t\phi(s)} \text{ dir.}$$

$$3. \quad \forall t, s \geq 1 \text{ ve } \lambda \in (0,1) \text{ için}$$

$$\xi(t, s) = \begin{cases} 1 & , \quad \xi(t, s) = 1 \\ \frac{s}{2t} & , \quad s < t \\ \frac{s^\lambda}{t} & , \quad \text{diğer durumda} \end{cases}$$

dir (Cho, 2018).

Joonaghany ve arkadaşları (2019) çalışmalarında simülasyon fonksiyonlarının sınıfından daha büyük olan Ψ –simülasyon fonksiyonları adı verilen yeni bir daralma sınıfı tanımladılar.

Zoto ve arkadaşları (2020) çalışmalarında Z –simülasyon fonksiyonları ve Ψ –simülasyon fonksiyonlarını göz önüne alarak simülasyon fonksiyonlarının yeni bir genellemesi olan $\Psi - s$ simülasyon fonksiyonlarını tanımladılar.

Daha sonra Zoto ve Sulaj (2021) çalışmalarında ise $\Psi - s$ simülasyon fonksiyonlarından daha genel olan $\kappa_{\Psi-s}$ tipi daralma dönüşüm sınıfını tanımlamışlardır.

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Matematiğin en hızlı gelişen dallarından biri sabit nokta teorisidir. Sabit nokta teorisi, adi diferansiyel denklemler ve integral denklemlerin çözümünün varlığını ve tekliğini göstermek için oluşturulmuş olmasına rağmen optimizasyon, hesaplama algoritmaları, fizik, ekonomi, varyasyonel eşitsizlikler, tamamlayıcı problemler, denge problemleri, sosyal bilimler, tıp, haberleşme, vb. gibi geniş bir sahada kullanıldığı bilinmektedir. Matematikte özellikle genel topoloji, fonksiyonel analiz, matematiksel analiz, operatör teori, diferansiyel denklemler, yaklaşım teorisi, oyun teorisi ve kontrol sistemleri gibi birçok alanında uygulama alanı vardır.

Sabit nokta teorisi çalışmaları 1922 yılında Banach sabit nokta teoremini aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

“(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir daralma dönüşümü olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y)$$

olacak şekilde $\delta \in [0,1)$ mevcut olsun. Bu taktirde, dönüşümünün de bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca, herhangi bir $x_0 \in X$ başlangıç noktasından elde edilen $(T^n x_0)$ Picard iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.”

Bu teorem üç temel kavram üzerine kuruludur. Birincisi (X, d) metrik uzayının tam olması, ikincisi kullanılan iterasyon metodu ve son olarak dönüşümün daralma koşulunu sağlamsıdır. Araştırmacıların bir kısmı uzay yapısı, bir kısmı iterasyon teknikleri ve bir kısmı da daralma koşulu üzerinde çalışmalarını yürütmektedir.

Hiç şüphesiz daralma koşulu Banach’ın sabit nokta teoreminin en önemli parçalarından biridir. Bu nedenle Banach sabit nokta teoremi “Banach daralma prensibi” olarak da adlandırılmaktadır. Daralma dönüşümü, farklı iki noktanın görüntüleri arasındaki uzaklığın bu noktalar arasındaki uzaklıktan daha küçük veya eşit olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla her bir daralma dönüşümü süreklidir. Fakat çalışmalarda ele alınan dönüşümler sürekli olmak zorunda değildir. Sürekli olmayan oldukça fazla dönüşüm mevcuttur. Bu durumlarda sabit nokta teorisini kullanabilmek için süreklilik gerektirmeyen daralma dönüşümleri ve dönüşümlere bağlı olarak yeni sabit nokta

teoremleri orta konmuştur. Bu nedenle bu prensip birçok araştırmacı tarafından genişletilmiş ve geliştirilmiştir. 2000 li yılların başına kadar tezde 3.2. kısımda ifade edilen daralma dönüşümlerin tanımlanmasına rağmen son yirmi yıldır bu çalışmalar oldukça hız kazanmıştır. Bu konu üzerine çalışan araştırmacılar özellikle farklı fonksiyonlar kullanılarak tezin 3.3.-3.13. kısımlarında ele alınan dönüşüm sınıfları tanımlayarak literatüre geniş bir yelpaze sunmaktadırlar.

Bu tez çalışmasında bu daralma dönüşümleri ve sabit nokta teoremleri üzerine genel bir literatür taraması yapılmıştır. Elde edilen bulgular derleme olarak sunulmuştur. Yapılan çalışma sonucunda tezde;

Daralma dönüşümleri ve sabit nokta teorisi hakkında genel bilgilere,

Birçok daralma dönüşüm sınıfı tanımına,

Tanımlanan daralma dönüşümlerinin temel özelliklerine,

Daralma dönüşümleri arasında çeşitli bağıntılara,

Hibrit daralma dönüşümlerine ve mevcut daralma dönüşümlerinin geliştirilmiş versiyonlarına,

Ortaya konan daralma dönüşümlerine bağlı olarak birçok sabit nokta teoremine; yer verilmiştir.

KAYNAKÇA

- Abbas, M. and Illic, D. (2010). Common fixed points of generalized almost nonexpansive mappings, *Filomat*, 24, 11–18.
- Abbas, M. Babu, G. V. R. and Alemayehu, G. N. (2011). On common fixed points of weakly compatible mappings satisfying generalized condition (B), *Filomat*, 25(2), 9–19.
- Abbas, M. and Nazir, T. (2014). A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems. *Matematički Vesnik*, 66(2), 223–234.
- Abbas, M., Berzig, M., Nazır, T. and Karapınar, E. (2016). Iterative approximation of fixed points for presic type F –contraction operators, *University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin-Series A –Applied Mathematics and Physics*, 78(2), 147-160.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R. (2007). Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 8 (1), 61-79.
- Ahmad J., Al-Mazrooei, A. E., Cho, Y. J. and Yang, Y. O. (2017). Fixed point results for generalized θ –contractions, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 10, 2350–2358.
- Akram, M., Zafar, A. A. and Siddiqui, A. A., (2008). A general class of contractions: –contractions, *Novi Sad J. Math.*, 38 (1), 25-33.
- Alsulami, H. H., Karapınar, E. and Piri, H. (2015). Fixed Points of Modified F –contractive mappings in complete metric-like spaces, *Journal of Function Spaces*, 2015, Article ID 270971, 9 pages.
- Altun, I. and Acar, Ö. (2012). Fixed point theorems for weak contractions in the sense of Berinde on partial metric spaces, *Topology and its Applications*, 159, 2642–2648.
- Altun, I., Durmaz, G. and Olgun, M., (2018). P –contractive mappings on metric spaces, *Journal of Nonlinear Functional Analysis*, 2018, Article ID 43, pp. 1-7.
- Altun, I., (2023). Suzuki type P –contractive mappings, *Proceedings of International Mathematical Sciences*, 1(5), 1-4.
- Ansari, A. H. (2014). Note on $\varphi - \psi$ –contractive type mappings and related fixed point, *In The 2qd Regional Conference on Mathematics and Applications, Payame Noor University, Iran. September*, 377–380.

- Argoubi, H., Samet, B. and Vetro, C. (2015). Nonlinear contractions involving simulation functions in a metric space with a partial order, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 8, 1082–1094.
- Aydi, H., (2011). A fixed point result involving a generalized weakly contractive condition in G –metric spaces. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 3 (4), 180-188.
- Aydi, H. Amor, S. H. and Karapinar, E. (2013). Berinde-type generalized contractions on partial metric spaces, *Abstract and Applied Analysis*, 2013, 10 pages.
- Aydi, H., Karapinar, E. and Yazidi, H. (2017). Modified F –contractions via alpha-admissible mappings and application to integral equations, *Filomat*, 31(5), 1141-148.
- Babu, G. V. R., Sandhya, M. L. and Kameswari, M. V. R., (2008). A note on a fixed point theorem of Berinde weak contractions, *Carpathian J. Math.*, 24, 1-8-12.
- Baillon, J. B., Bruck, R. E. and Reich, S. (1978). On the asymptotic behavior of nonexpansive mappings and semigroups in Banach space, *Houston Journal of Mathematics* 4(1), 1-9.
- Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3(1), 133-181.
- Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz*, Gazi Kitapevi, Ankara.
- Beiranvand, A., Moradi, S., Omid, M. and Pazandeh. H. (2009). Two fixed–point theorems for special mappings., arXiv:0903.1504v1.
- Berinde, V. (2002). *Iterative Approximation of Fixed Points*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Berinde, V. (2004). Approximating fixedpoints of weak contractions using the picard iteration. *Nonlinear Analysis Forum*, 9, 43–53.
- Berinde, V. (2007). *Iterative Approximation of Fixed Points*. Springer, Berlin.
- Berinde, V. (2009). Some remarks on a fixed point theorem for Ćirić-type almost contractions. *Carpath. J. Math.* 25(2): 157-162.
- Bianchini, R. (1972). Su un problema di S. Reich riguardante la teori dei punti fissi. *Boll. Un. Math. Ital.* 5, 103-108.
- Branciari, A. (2002). A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 29, 531–536.
- Brouwer, L. E. J. (1910). Über abbildung von mannigfaltigkeiten, *Mathematische Annalen*. 71, 97-115.

- Brown, A. L. and Page, A. (1970). *Elements of Functional Analysis*, Van Nostrand-Reinhold, London.
- Bruck, R. E. and Reich, S. (1977). Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces, *Houston J. Math.* 3, 459–470.
- Caristi, J. (1976). Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, *Transactions of the American Mathematical Society*. 215, 241-251.
- Chandok, S. and Postolache, M. (2013). Fixed point theorem for weakly Chatterjea-type cyclic contractions, *Fixed Point Theory Appl.* 2013:28, 1-9.
- Chatterjea, S. K. (1972). Fixed-point theorems, *C.R. Acad. Bulgare Sci.*, 25, 727-730.
- Cho, S. H. (2018). Fixed point theorem for Z –contraction generalized metric spaces, *Abstract and Applied Analysis*, 2018, 1–6.
- Ćirić, L.B. (1972). Fixed points for generalized multivalued contractions, *Mathematicki Vesnik*. 9 (24), 265-272.
- Ćirić, (1974). A generalization of Banach principle, *Proc. Amer. Math. Soc.* 45, 727–730.
- Ćirić, L., Abbas, M., Saadati, R. and Hussain, N. (2011). Common fixed points of almost generalized contractive mappings in ordered metric spaces, *Appl. Math. Comput.*, 217: 5784-5789.
- Chugh, R., Kumar, V. and Kumar, S. (2012). Strong convergence of a new three step iterative scheme in Banach spaces. *American Journal of Computational Mathematics*, 2 (4), 345-357.
- Dass, B. K. and Gupta, S., (1975). An extension of Banach contraction principle through rational expressions, *Indian J. Pure Appl. Math*, 6, 1455-1458.
- Dutta, P. N. and Choudhury, B. S., (2008). A generalization of contraction principle in metric spaces. *Fixed point Theory and Applications Article*, ID: 406368, 8.
- Edelstein, M. (1962). On fixed and periodic points under contractive mappings, *J. London Math. Soc.*, 37, 74-79.
- Fulga, A. and Proca, A. M. (2017a). Fixed point for φ_E –Geraghty contractions, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 10, 5125–5131.
- Fulga, A. and Proca, A. M. (2017b). A new Generalization of Wardowski fixed point theorem in complete metric spaces, *Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl.*, 1, 57–63.
- Fulga, A. and Karapinar, E. (2018). Some results on S –contractions of type E, *Mathematics*, 195(6), 1–9.
- Geraghty, M. (1973). On contractive mappings, *Proceedings of American Math. Soc.*, 40, 604–608.

- Gornicki, J. (2017). Fixed point theorems for Kannan type mappings, *Fixed Point Theory Appl.* 19, 2145-2152.
- Hardy, G. E. and Rogers, T. D. (1973). A generalization of a fixed point theorem of Reich, *Canadian Mathematical Bulletin.* 16, 201-206.
- Huang, H., Paunovic L. and Radenovic, S. (2015). On some new fixed point results for rational Geraghty contractive mappings in ordered b-metric spaces, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 8, 800-807.
- Hussain, N. and Salimi, P. (2014). Suzuki–Wardowski type fixed point theorems for α -GF-contractions, *Taiwanese J. Math.*, 18(6), 1879–1895.
- Imoru, C. O. and Olatinwo, M. O. (2003). On the stability of Picard and Mann iteration processes. *Carpathian Journal of Mathematics*, 19(2), 155-160.
- Ishikawa, S. (1974). Fixed points by a new iteration method. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44 (1), 147-150.
- Işık, H., Gungor, N. B., Park, C. and Jang, S. Y. (2018). Fixed Point Theorems for Almost Z –contractions with an Application, *Mathematics*, 6(3), 37, 1–8.
- Jachymski, J. (2008). The contraction principle for mappings on a metric space endowed with a graph, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136, 1359-1373.
- Jaggi, D. S., (1977). Some unique fixed point theorems, *Indian J. Pure Appl. Math*, 8, 223-230.
- Jain, P. K. (2009). *Metric Spaces*. Narosa Publishing House. New Delhi.
- Jleli, M. and Samet, B. (2014). New generalization of the Banach contraction principle, *J. Inequal. Appl.*, 38, 1-8.
- Joonaghany, G. H., Farajzadeh, A., Azhini, M. and Khojasteh, F., (2019). A new common fixed point theorem for Suzuki type contractions via generalized Ψ –simulation functions, *Sahand Com. in Math. Anal. (SCMA)*, 16(1), 129–148.
- Jungck, G. (1976). Commuting mappings and fixed points, *Amer. Math. Monthly.* 83, 261-263.
- Jungck, G. (1986). Commuting mappings and fixed points, *Internat. J. Math. Math. Sci.* 9 (4), 771-779.
- Kannan, R. (1968). Some results on fixed points, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 10, 71-76.
- Kannan, R. (1969). Some results on fixed point II, *Amer. Math. Monthly.* 76, 405-408.
- Karahan, İ. and Özdemir, M. (2013). A general iterative method for approximation of fixed points and their applications. *Advances in Fixed Point Theory*, 3 (3), 510-526.

- Karakaya, V., Atalan, Y., Doğan, K. and Bouzara, N. E. H. (2017). Some fixed point results for a new three steps iteration process in Banach spaces. *Fixed Point Theory*, 18 (2), 625-640.
- Karapınar, E. and Erhan, I. M. (2011). Best proximity point on different type contractions, *Appl. Math. Inf. Sci.* 3 (3), 558-569.
- Karapınar, E., Piri H. and AlSulami, H. H, (2015). Fixed Points of Generalized F-Suzuki Type Contraction in Complete b-Metric Spaces, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2015, Article ID 969726, 8 pages.
- Khan, M. S. (1978-1979). On fixed point theorems. *Math. Japonica* 23 (2), 201-204.
- Khojasteh, F., Shukla, S. and Radenovic, S. (2015). A new approach to the study of fixed point theorems for simulation functions, *Filomat*, 29, 1189–1194.
- Kirk, W. A. (1971). On successive approximations for nonexpansive mappings in Banach spaces. *Glasgow Mathematical Journal*, 12(1), 6-9.
- Kirk, W. A., Srinivasan, P. S. and Veeramani, P. (2003). Fixed Points for mapping satisfying cyclical contractive conditions, *Fixed Point Theory*. 4, 79-89.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis With Applications*. John Wiley-Sons. New York.
- Krasnosel'skii, M. A. (1955). Two comments on the method of successive approximations. *Usp. Math. Nauk*, 10, 123-127.
- Liu, Z. Li, X., Kang, S. M. and Cho, S. Y. (2011). Fixed point theorems for mappings satisfying contractive conditions of integral type and applications, *Fixed Point Theory and App.*, 64, 1-18.
- Mann, W. R. (1953). Mean value methods in iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4(3), 506-510.
- Minak, G., Helvacı, A. and Altun, I. (2014). Ćirić type generalized F –contractions on Complete Metric Spaces and Fixed Point Results, *Filomat*, 28(6), 1143-1151.
- Mongkolkeha, C., Cho, Y. J. and Kumam, P. (2017). Fixed point theorems for simulation functions in b –metric spaces via the wt–distance, *Applied General Topology*, 1(18), 91–105.
- Musayev B. ve Alp M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları, Kütahya.
- Mutlu, A., Yolcu, N. and Mutlu, B. (2016). A survey on Kannan mappings in universalized metric space, *British Journal of Mathematics and Computer Science*. 15(6), 1-6.
- Noor, M. A. (2000). New approximation schemes for general variational inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and applications*, 251(1), 217-229.

- Olatinwo, M. O. (2009). Some stability results for two hybrid fixed point iterative algorithms in normed linear space. *Matematički Vesnik*, 61(4), 247-256.
- Öztürk, M. and Girgin, E. (2015). Some Fixed Point Theorems and Common Fixed Point Theorems in Metric Space Involving a Graph. *Bangmod Int. J. Math. Comp.Sci.*, 1(1), 167-177.
- Öztürk, A. (2019). A fixed point theorem for mappings with an F –contractive iterate. *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications*, 3, No. 4, 231–236.
- Petric, M. A. (2010). Some remarks concerning cyclical contractive mappings, *Gen. Math.* 18, 213–226.
- Phuengrattana, W. and Suantai, S. (2011). On the rate of convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP –iterations for continuous functions on an arbitrary interval. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 235(9), 3006-3014.
- Picard, E. (1890). Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 6, 145-210.
- Piri, H. and P. Kumam, P. (2014) Some fixed point theorems concerning F –contraction in complete metric spaces, *Fixed Poin Theory Appl.* 2014, 210.
- Popescu, O., (2011). Fixed points for $(\psi - \phi)$ –weak contractions. *Appl. Math. Lett.* 24, 1-4.
- Proca, A. M. (2018). Fixed point theorem for φM –Geraghty contraction, *Scientific Research and Education in the Air Force–AFASES2018*, 1–6.
- Proca, A. M. (2019). New fixed point theorem for generalized contractions, *Bull. Transilv. Univ. Bras. III: Math. Inform. Phys.*, 12, 61, 435–442.
- Reich, S. and Kannan, T. (1971). Fixed point theorem. *Boll. Un. Math. Ital.* 4, 1-11.
- Reich, S. (1972). Fixed point of contractive functions, *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana*. 5, 26-42.
- Rhoades, B. E., (2001). Some theorems on weakly contractive maps. *Nonlinear Anal.* 47(4), 2683-2693.
- Rhoades, B. E. and Şoltuz, Ş. M. (2004). The equivalence between Mann–Ishikawa iterations and multistep iteration. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 58(1-2), 219-228.
- Roldan-Lopez-de-Hierro, A. F., Karapınar, E., Roldan-Lopez-de-Hierro, C. and Martínez-Moreno, J. (2015). Coincidence point theorems on metric spaces via simulation functions, *J. Comput. Appl. Math.*, 275, 345–355.

- Rus, I. A. (1996). *Picard Operators and Applications*. Babes-Bolyai University, Faculty of Mathematics and Computer Science, Cluj-Napoca.
- Rynne, B. P. and Youngson, M. A. (2008). *Linear Functional Analysis*, Springer, London. 2007.
- Samet, B., Vetro, C. and Vetro, P., (2012.) Fixed point theorems for $\alpha - \psi$ -contractive type mappings, *Nonlinear Analysis*, 75, 2154-2165.
- Samet, B., (2014). Fixed Points $\alpha - \psi$ -contractive mappings with an application to quadratic integral equations, *Electronic Journal of Differential Equations*, 152, 1-18.
- Sawangsup, K. (2015). *Fixed point theorems for various contraction mappings in metric spaces endowed with binary relations and application to nonlinear matrix equations. Mathematics, Research and Thesis, Thammasat Üniversitesi. 10.14457/TU.the.2015,1360.*
- Shaddad, F. Noorani, M. S. M. and Alsulami, S. M. (2014). Common fixed—points results for generalized-Berinde type contractions which involve altering distance functions, *Fixed Point Theory and Applications*, 2014:24, 10 pages.
- Shatanawi, W. and Postolache, M. (2013). Coincidence and fixed point results for generalized weak contractions in the sense of Berinde on partial metric spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, 2013, 54.
- Soykan, Y. (2008). *Fonksiyonel Analiz*. Nobel Yayın Dağıtımı, Ankara.
- Soykan, Y. (2008). *Çözümlü Fonksiyonel Analiz Alıştırmaları*, Nobel Yayın Dağıtımı. Ankara.
- Subrahmanyam, P. V. (1975). Completeness and fixed points. *Monatsh. Math.* 80, 325-330.
- Suzuki, T. (2008). A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness, *Proceedings of the American Math. Soc.*, 136, 1861-1869.
- Suzuki, T. (2009). A new type of fixed point theorem in metric spaces, *Nonlinear Anal.*, 71, 5313-5317.
- Thakur, D., Thakur, B.S. and Postolache, M. (2014). New iteration scheme for numerical reckoning fixed points of nonexpansive mappings. *Journal of Inequalities and Applications*, 2014: 1-5.
- Thianwan, S. (2009). Common fixed points of new iterations for two asymptotically nonexpansive nonself-mappings in a Banach space. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 224 (2), 688-695.

- Ullah, K. and Arshad, M. (2018). Numerical reckoning fixed points for Suzuki's generalized nonexpansive mappings via new iteration process. *Filomat*, 32(1) 187-196.
- Zamfirescu, T. (1972). Fixed point theorems in Metric Spaces. *Archivum Mathematicum*, 23, 292–298.
- Zoto, K., Mlaiki, N. and Aydi, H. (2020). Related fixed point theorems via general approach of simulation functions, *Journal of Mathematics*, 2020, 1–12.
- Zoto, K., and Sulaj, A. (2021). Related fixed point theorems via a general approach to simulation mappings in b –metric-like spaces, *AIP Conference Proceedings*, 2333(1),1-9.
- Wang, S. Z., Li, B. Y., Gao, Z. M. and Iseki, K. (1984). Some fixed point theorems on expansion mappings. *Math. Jpn.* 29, 631–636.
- Wardowski, D. (2012). Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, 94, 1–6.
- Wardowski, D. and Van Dung, N. (2014) *Fixed points of F –weak contractions on complete metric spaces*, *Demonstratio Mathematic.* Vol. XLVII, 1.

ÖZGEÇMİŞ

Ayşin AYDIN, lise eğitimini Avcılar Lisesi'nde 2000 yılında bitirdi. 2014 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği bölümüne yerleşip 2020 yılında lisans eğitimini tamamladı. 2021 yılında Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü bünyesinde Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda tezli yüksek lisans eğitimine başladı. 2024 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı.

