

DARBOUX DÖNÜŞÜMÜ

Nurettin KÖRÖZLÜ

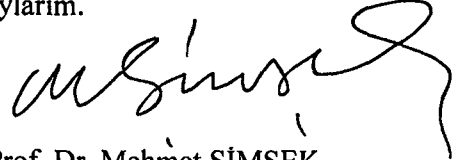
**YÜKSEK LİSANS TEZİ
(FİZİK)**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Aralık 2004

ANKARA

Nurettin KÖRÖZLÜ tarafından hazırlanan DARBOUX DÖNÜŞÜMÜ adlı bu tezin YÜKSEK LİSANS tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.


Prof. Dr. Mehmet ŞİMŞEK
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından FİZİK Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Mehmet ŞİMŞEK 
Üye : Doc. Dr. Ayşe KASKAŞ 
Üye : Doc. Dr. Mehmet GİVİ 
Üye : _____
Üye : _____

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	iv
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	v
EKLERİN LİSTESİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2.DARBOUX DÖNÜŞÜMÜ VE KUANTUM MEKANİK SİSTEMLERE GENELLEŞTİRİLMESİ	3
2.1 Darboux ve Crum Teoremi	3
2.2 Darboux Dönüşümleri ve Süpersimetrik Kuantum Mekanikliği	7
2.3 Genelleştirilmiş Darboux Dönüşümü	9
2.4 Kuantum Mekanikğinde Genelleştirilmiş Darboux Dönüşümü	12
2.4.1 $U_{GD}(x)$ 'e Bağlı Hamiltonyenin Benzer Spektrumları	12
2.4.2 Darboux Dönüşümü ve Genelleştirilmiş Hulthen Potansiyeli	13
2.4.3 Harmonik Titreşici için İlk İki Darboux Potansiyeli	14
3. TAM ÇÖZÜLEBİLİR PT SİMETRİK SCARF-II POTANSİYELİ	17
3.1 Darboux Dönüşümü ve Genel Süper Simetri Yaklaşımı	17
3.2 Scarf-II Potansiyelinin Tam Çözümü	19
4. KUANTUM HAMILTON JACOBI YAKLAŞIMININ BAĞLI DURUMLARA UYGULANMASI	27

4.1 Kuantum Hamilton Jacobi Yaklaşımı.....	27
4.2 Liouville Teoremi.....	28
4.3 KHJ Yaklaşımının Uygulamaları.....	29
4.3.1 Harmonik Titreşici.....	29
4.3.2 Hidrojen Atomu.....	33
4.3.3 Khare Mandal Modeli.....	36
4.3.4 Rosen Morse Potansiyeli.....	47
4.3.5 Scarf-I Potansiyeli.....	49
4.3.6 Scarf-II Potansiyeli.....	52
5. SÜPER SİMETRİK WENTZEL KRAMERS BRILLOUIN YAKLAŞIMI.....	57
5.1 SWKB Kuantizasyon Şartı.....	57
5.2 Sözde Harmonik ve Mie Tip Potansiyeller için SWKB Çözümleri.....	59
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	65
KAYNAKLAR.....	67
EKLER.....	69
ÖZGEÇMİŞ.....	79

DARBOUX DÖNÜŞÜMÜ**(Yüksek Lisans Tezi)****Nurettin KÖRÖZLÜ****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Aralık 2004****ÖZET**

Bu çalışmanın amacı; Darboux dönüşümünün analitik olarak çözilemeyen sistemlere genelleştirilmesi ve uygulanmasıdır. Bu sistemler, Darboux dönüşümü sayesinde çözülebilir hale getirilmiştir. Söz konusu denklemler Riccati yada Sturm – Liouville denklemi türündedir. Bu denklemler çözülerek çeşitli sistemlerin özdeğer ve özfonksiyonları bulunmuştur. Ayrıca süper simetrik yaklaşıma Darboux dönüşümü uygulanarak analitik çözülebilir potansiyellerin spektrumları elde edilmiştir. Son olarak, elde edilen sonuçlar literatürdeki değerlerle karşılaştırılmıştır.

Bilim Kodu : 205**Anahtar Kelimeler : Darboux Dönüşümü, Riccati Denklemi, Sturm – Liouville Denklemi , Schrödinger Denklemi, Süper Simetrik WKB Metodu****Sayfa Adedi : 79****Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Mehmet ŞİMŞEK**

DARBOUX TRANSFORMATION**(M.Sc. Thesis)****Nurettin KÖRÖZLÜ****GAZI UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND ART****December 2004****ABSTRACT**

The aim of this study is to generalize and apply the Darboux transformation to non-analytical solvable systems. The non-linear systems which cannot be solved analytically, may have been reduce to solvable cases by using the Darboux transformation. Generally, the equations which in the form of Riccati equations or Sturm-Liouville equations . The eigenvalue and eigenfunctions of the various systems have been found through solving corresponding equations. Analytically solvable potentials' spectrums have been obtained by applying the Darboux transformation to the supersymetric approach. Finally, the new solutions have been compared with known results.

Science Code : 205**Key Words : Darboux Transformation, Riccati Equation,
Sturm – Liouville Equation, Schrödinger Equation,
Supersymetric WKB Method****Page Number: 79****Adviser : Prof. Dr. Mehmet ŞİMŞEK**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Prof. Dr. Mehmet ŞİMŞEK'e ve çalışmalarında bana destek olan arkadaşım Sezgin AYDIN'a teşekkürü bir borç bilirim.



ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.1. Khare Mandal modeli için b_1 ve b_1' 'nün her bir kombinasyonu için χ 'nin çok kutbunun sayısı ve ŞÇ şartları.....	46



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. Potansiyelin reel kısmı	26
Şekil 3.2. Potansiyelin imajiner kısmı.....	26



EKLERİN LİSTESİ

Ek	Sayfa
EK-1. Anjana SINHA ile Yapılan Elektronik Yazışmalar.....	69
EK-2. S. Sree RANJANI ile Yapılan Elektronik Yazışmalar.....	72



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklama

$\hbar$	$1,0546 \times 10^{-34}$ j.s. sabit
e	Elektron
m	Kuantum sayısı
μ	İndirgenmiş kütle

Kısaltmalar

Açıklama

KHJ	Kuantum - Hamilton – Jacobi
ŞÇ	Şartlı çözülebilirlik
KMF	Kuantum Mekanik Fonksiyon
WKB	Wentzel – Kramers - Brillouin
SWKB	Süpersimetrik Wentzel – Kramers – Brillouin

1.GİRİŞ

Genel olarak, kuantum mekaniğinde relativistik olmayan bir parçacığın hareketini temsil eden Schrödinger denkleminin çözümünden sistemin spektrumu elde edilebilir. Lineer Schrödinger denkleminin analitik olarak çözülebildiği sistemler oldukça sınırlıdır. Bu çalışmada, analitik olarak çözülemeyen bir diferansiyel denklemi çözülebilir hale getiren yöntemlerden biri olan Darboux dönüşümünün (1) tanımı ve uygulamaları incelenecektir (1-6).

Darboux dönüşümü sayesinde analitik olarak çözülebilir hale getirilen diferansiyel denklemler, genelde Riccati yada Sturm-Liouville denklemi türündedir. Çözülebilir hale gelen Riccati denkleminin analitik çözümü yapılarak (7-9), kuantum mekaniksel sistemler için enerji spektrumları elde edilebilir.

Son zamanlarda, süper simetrik kuantum mekaniğinde ilgiyle üzerinde durulan noktalardan biride Parite-Time (PT) simetrik sistemlerdir (10-14). Darboux dönüşümü ile PT simetrik sistemler için ilginç sonuçlar elde edilebilir. Bu sayede, süper simetrik kuantum mekaniği için de Darboux dönüşümünün ne kadar avantajlı olduğu anlaşılabilir.

Genel olarak, Darboux dönüşümünün kullanıldığı yaklaşımlardan; PT simetrik sistemler, Kuantum-Hamilton-Jacobi (KHJ) (15-22) ve süper simetrik Wentzel-Kramers-Brillouin (SWKB) metodu (23-25) bu çalışmanın ilgi alanına girmektedir.

Çalışma şu şekilde bölümlere ayrılmıştır: 2. bölümde, Darboux dönüşümünün kuantum mekaniğindeki genel yaklaşımı ve Darboux-Crum teoremi üzerinde çalışılmıştır. Ayrıca bu bölümde, Darboux dönüşümünün genelleştirilmesi ve genelleştirilmiş Darboux dönüşümünün kuantum mekaniğindeki yeri üzerinde durulmuştur. 3. bölümde, PT simetrik bir potansiyel olan Scarf-II potansiyeli çalışılmıştır. 4. bölümde, KHJ metodunu çeşitli potansiyellere uygulayarak, Darboux dönüşümünün değişik bir türü çalışılmıştır. 5. bölümde ise SWKB metodunu Mie-tip ve sözde harmonik

potansiyellere uygulayarak yine Darboux dönüşümünün farklı bir türü çalışılmıştır. Son olarak 6. bölümde, bütün bu çalışmaların sonuçları bir arada verilerek tartışılmıştır.



2. DARBOUX DÖNÜŞÜMÜ VE KUANTUM MEKANİK SİSTEMLERE GENELLEŞTİRİLMESİ

Bu kesimde Sturm-Liouville denkleminin bazı özellikleri incelenecektir. Aynı zamanda Darboux dönüşümü ile süper simetrik kuantum mekaniği arasındaki bazı ilişkiler gözden geçirilecektir.

2.1 Darboux ve Crum Teoremi

Sturm-Liouville denklemi

$$-\Psi_{xx} + u\Psi = \lambda\Psi \quad [2.1]$$

$\lambda = \lambda_1$ için $\Psi = \Psi_1(x, \lambda_1)$ olarak yazılabilir. Burada logaritmik türev $\Psi_1 : \sigma_1 = \Psi_{1x} \Psi_1^{-1}$ ve Darboux dönüşümü için

$$\Psi[1] = \left(\frac{d}{dx} - \sigma_1 \right) \Psi = \Psi_x - \frac{\Psi_{1x}}{\Psi_1} \Psi = \frac{W(\Psi_1, \Psi)}{\Psi_1} \quad [2.2]$$

olarak tanımlanabilir. Burada $W(\Psi_1, \Psi) = \Psi_1 \Psi_x - \Psi_{1x} \Psi$ Wronskian determinantıdır (1).

Teorem:

$$u[1] = u - 2\sigma_{1x} = u - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \Psi_1 \quad [2.3]$$

olmak üzere $\Psi[1]$ fonksiyonu

$$-\Psi_{xx}[1] + u[1]\Psi[1] = \lambda\Psi[1] \quad [2.4]$$

olarak tanımlanır.

İspat:

Darboux teoreminin ispatı basittir. Eş. 2.4'de $\Psi[1]$ ifadesi yerine yazılırsa

$$-\Psi_{xx} + \sigma_{1xx}\Psi + 2\sigma_{1x}\Psi_x + \sigma_1\Psi_{xx} + u[1](\Psi_x - \sigma_1\Psi) = \lambda\Psi_x - \lambda\sigma_1\Psi$$

ifadesi elde edilir. $\Psi_{xx} = (u - \lambda)\Psi$ olduğu göz önüne alınarak önceki denklem tekrar yazılırsa

$$-u_x\Psi - (u - \lambda)\Psi_x + \sigma_{1xx}\Psi + 2\sigma_{1x}\Psi_x + \sigma_1(u - \lambda)\Psi + u[1](\Psi_x - \sigma_1\Psi) = \lambda\Psi_x - \lambda\sigma_1\Psi$$

bulunur.

Bu denklem yeniden düzenlenerek

$$(u[1] - u + 2\sigma_{1x})\Psi_x + (-u_x + \sigma_{1xx} + \sigma_1u - \sigma_1u[1])\Psi = 0$$

elde edilir; Ψ ve Ψ_x 'in katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle

$$u[1] = u - 2\sigma_{1x}, \quad [2.5]$$

$$\sigma_{1xx} - u_x + \sigma_1u - \sigma_1u[1] = 0 \quad [2.6]$$

olur. Eş. 2.6'da Eş. 2.5 yerine yazılırsa

$$\sigma_{1xx} + 2\sigma_1\sigma_{1x} - u_x = 0,$$

bulunur ve σ_1 'in tanımından dolayı bu denklemin sağlanacağı bellidir. Bu yeni denklemin önemi çalışmanın sonraki bölümlerinde örneklerle incelenecektir.

Darboux teoremi ile bulunan sonuçların önemi, Eş. 2.1'den Eş. 2.4 denklemini elde edebilmektir. Gerçekte, Eş.2.4 ile verilen denklemin çözümleri olan $\Psi[1]$, Eş. 2.2'de tanımlanan dönüşümle Eş. 2.1 denkleminin çözümleri olan Ψ fonksiyonları cinsinden yazılabilmektedir. Yapılan bu ilişkilendirme *Darboux dönüşümü* olarak adlandırılır (1).

İşlemlere ardışık olarak devam edilerek yeni Sturm-Liouville denklemleri elde edilebilir. Bu bakış açısı ile Darboux dönüşümü faktörizasyon metodudur denilebilir. Metodun ikinci adımı için

$$\Psi[2] = \left(\frac{d}{dx} - \frac{\Psi_2'[1]}{\Psi_2[1]} \right) \left(\frac{d}{dx} - \frac{\Psi_2'}{\Psi_1} \right) \Psi,$$

yazılabilir. Burada $\Psi_2[1]$, Eş. 2.4 ile $\lambda = \lambda_2$ 'nin sabit çözümüdür. Eş. 2.1'i $\Psi_2(x, \lambda_2)$ sabit çözümü ile oluştururken

$$\Psi_2[1] = \Psi_{2x} - \frac{\Psi_{1x}}{\Psi_1} \Psi_2.$$

alınır. Lineer Sturm-Liouville denkleminin potansiyeli $u[2]$ olarak şöyle tanımlanır

$$u[2] = u[1] - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \Psi_2[1] = u - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln W(\Psi_1, \Psi_2) \quad [2.7]$$

2.7 eşitliği N kere tekrarlayan Darboux dönüşümünün genel durumunu kapsar. Bu yöntemin diğer amacı ise Eş. 2. 1'i hiç kullanmadan çözümlerdeki terimleri tamamını belirleyebilmektir. EŞ. 2.1'in izin verilen $\Psi_1, \dots, \Psi_N$ çözümlerinin her birine ayrı olarak, keyfi bir sabit olan $\lambda, \lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_N$, karşılık gelir. k fonksiyonlarıyla $f_1, f_2, \dots, f_k$, Wronskian W 'nin tanımı

$$W(f_1, \dots, f_k) = \det A, \quad A_{ij} = \frac{d^{i-1} f_j}{dx^{i-1}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, k$$

dır. Crum (1) tarafından ortaya çıkarılan Darboux teoreminin genellemesi aşağıdaki gibidir.

Teorem:

$$\Psi[N] = \frac{W(\Psi_1, \dots, \Psi_N, \Psi)}{W(\Psi_1, \dots, \Psi_N)} \quad [2.8]$$

fonksiyonu

$$-\Psi_{xx}[N] + u[N]\Psi[N] = \lambda\Psi[N] \quad [2.9]$$

diferansiyel denklemini sağlar, burada

$$u[N] = u - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln W(\Psi_1, \dots, \Psi_N) \quad [2.10]$$

şeklindedir.

İspat:

Crum teoreminin temel hipotezinin ispatından hareketle, N kere tekrarlayan Darboux dönüşümünün ilk çözümü olan Ψ fonksiyonu aşağıdaki biçimde

$$\Psi[N] = D[N]\Psi = \Psi^{(N)} + s_1 \Psi^{(N-1)} + \dots + s_N \Psi \quad [2.11]$$

olarak temsil edilebilir. N. sıranın diferansiyel operatörü $D[N]$ 'nin katsayısı $D[N]\Psi \int_{\Psi=\Psi_k} = 0$ şartından belirlenebilir. Başka bir deyişle, s_k 'nin katsayısı için lineer cebirsel denklemlerin sistemi

$$\sum_{k=1}^N s_k \Psi_j^{(N-k)} = -\Psi_j^N, \quad j=1,2,\dots,N \quad [2.12]$$

şeklinde. Bu s_k terimi, Kramer kuralları tarafından çözümlenerek aşağıdaki gibi

$$s_k = -\frac{W_k}{W(\Psi_1, \dots, \Psi_N)}, \quad k=1,2,\dots,N \quad [2.13]$$

temsil edilebilir. s_1 için aşağıdaki ifadeye dikkat edersek

$$s_1 = -\frac{\begin{vmatrix} \Psi_1 \Psi_1' & \dots & \Psi_1^{(N-2)} \Psi_1^{(N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_N \Psi_N' & \dots & \Psi_N^{(N-2)} \Psi_N^{(N)} \end{vmatrix}}{W(\Psi_1, \dots, \Psi_N)} = -\frac{\partial}{\partial x} \ln W(\Psi_1, \dots, \Psi_N) \quad [2.14]$$

denkleminin determinantını değiştirebilmek için aşağıdaki kurala ihtiyaç olduğu ortaya çıkar.

Eş. 2.9'da Eş. 2.11 yerine yazılıp 2.14 kullanılırsa, $u[N]$ için aşağıdaki eşitlik

$$u[N] = u + 2s_{1x} = u - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln W(\Psi_1, \dots, \Psi_N).$$

elde edilir. Sonuç olarak, Crum teoreminin tam ispatı, Ψ fonksiyonuna karşılık gelen Eş. 2.9'dur (1).

2.2 Darboux Dönüşümleri ve Süpersimetrik Kuantum Mekaniği

Schrödinger denklemleri

$$-\Psi_{xx} + u\Psi = \lambda\Psi \quad [2.15]$$

$$-\varphi_{xx} + v\varphi = \lambda\varphi \quad [2.16]$$

dır. Darboux dönüşümü ile ilgili olarak

$$v = u - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \Psi_1, \quad [2.17]$$

$$\varphi = \Psi_x - \frac{\Psi_{1x}}{\Psi_1} \Psi. \quad [2.18]$$

$\lambda = \lambda_1$ için Eş. 2.16'daki fonksiyon $\varphi_1 = 1/\Psi_1$ şeklindedir.

Darboux dönüşümü ile Eş. 2.16'dan Eş. 2.15, φ_1 fonksiyonu sayesinde oluşturulur.

Gerçekte

$$v - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \varphi_1 = u - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \Psi_1 - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(1/\Psi_1) = u$$

dur.

Başka bir deyişle aşağıdaki türde

$$u = v - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \varphi_1 \quad [2.19]$$

$$\Psi = \left(\varphi_x - \frac{\varphi_{1x}}{\varphi_1} \right) (\lambda_1 - \lambda), \quad \varphi_1 \Psi_1 = 1 \quad [2.20]$$

yazılabilir. Eş. 2.17 ve 2.20 direkt ve ters Darboux dönüşümü olarak tanımlanır.

Bu dönüşümleri tanımlarsak

$$\sigma = \Psi_1' \Psi_1^{-1} = -\varphi_1' \varphi_1^{-1} \quad [2.21]$$

biçimindedir. Buradan u ve v potansiyelleri şu şekilde temsil

$$u = \sigma' + \sigma^2 + \lambda_1, \quad v = \sigma^2 - \sigma' + \lambda_1. \quad [2.22]$$

edilebilir. Buradan hareketle süper dönüşüm operatörleri tanımlanırsa

$$B^+ = -\partial + \sigma, \quad B^- = \partial + \sigma \quad [2.23]$$

olur. Bunlar direkt ve ters Darboux dönüşümlerinin etkisidir. Buradan ilgili bağıntıları

$$B^+ B^- = -\partial^2 + \sigma^2 - \sigma' = -\partial^2 + v - \lambda_1,$$

$$B^- B^+ = -\partial^2 + \sigma^2 + \sigma' = -\partial^2 + u - \lambda_1$$

olarak yazabiliriz. Bunları kullanarak elde edilen Hamilton işlemcileri

$$H^+ = -\partial^2 + u, \quad H^- = -\partial^2 + v,$$

şeklindedir. Ayrıca, H matris Hamiltoniyeni ve $Q_{\pm}$ operatörleri

$$H = \begin{pmatrix} H^+ & 0 \\ 0 & H^- \end{pmatrix}, \quad Q_- = \begin{pmatrix} 0 & B^- \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B^+ & 0 \end{pmatrix} \quad [2.24]$$

olur. İlgili anti komütasyon ve komütatör bağıntıları

$$\{Q_+, Q_-\} \equiv Q_+ Q_- + Q_- Q_+ = H - \lambda_1, \quad [H, Q_{\pm}] = 0 \quad [2.25]$$

olur (1). Başka bir deyişle, çift element $Q_{\pm}$ ve tek element $H - \lambda_1$, σ süper potansiyel olarak ifade edilebilir. Schrödinger matris denklemi ($H\Psi = \lambda\Psi$) yazılırsa

$$(-\partial^2 + U)\Psi = \lambda\Psi \quad [2.26]$$

olur ve burada $\Psi = (\psi, \varphi)^T$ dir ve potansiyel – süper potansiyel ilişkisi

$$U = W^2 + W', \quad W = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix} \quad [2.27]$$

biçiminde ifade edilir (1).

2.3 Genelleştirilmiş Darboux Dönüşümü

Öncelikle standart Darboux dönüşümünü hatırlayarak çalışmamıza başlayalım (7).

Sturm-Liouville denklemi

$$-\Psi'' + u(x)\Psi = \lambda\Psi \quad [2.28]$$

olarak ifade edilir. Darboux dönüşümü

$$\varphi = \Psi' - \sigma_1(x)\Psi \quad [2.29]$$

dir ve bu dönüşüm aşağıdaki

$$-\varphi'' + U(x)\varphi = \lambda\varphi \quad [2.30]$$

denkleminin çözümüdür. Burada

$$\sigma_1(x) = \frac{\Psi_1'}{\Psi_1} \quad [2.31]$$

dir. Şimdi Ψ_1 fonksiyonu yazılırsa

$$\Psi_1 = e^{\int \sigma_1(x) dx} \quad [2.32]$$

biçiminde ifade edilir . Son olarak standart Darboux potansiyeli ifadesini yazılırsa

$$U(x) = U_D(x) = u(x) - 2\sigma_1'(x) \quad [2.33]$$

olur. Eş. 2.28'deki Darboux dönüşümünün nasıl kullanışlı olduğu, Eş. 2.29'ün kovaryans şartlarından faydalanılarak gösterilebilir

$$(\lambda - u(x) + 2\sigma_1'(x))\sigma_1(x)\Psi - u'(x)\Psi + \sigma_1(x)\Psi'' + \sigma_1''(x)\Psi = 0. \quad [2.34]$$

Eşitliğin katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$(\sigma_1''(x) + 2\sigma_1(x)\sigma_1'(x) - u'(x))\Psi = 0 \quad [2.35]$$

bulunur. Bu denklemi düzenleyip integre edersek

$$\sigma_1''(x) + 2\sigma_1(x)\sigma_1'(x) - u'(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(\sigma_1'(x) + \sigma_1^2(x) - u(x)) = 0$$

$$\sigma_1'(x) + \sigma_1^2(x) - u(x) = B \quad [2.36]$$

bulunur (7). Burada B sabittir.

Bu noktada Riccati denklemine bakacak olursak

$$y' = Q(x)y^2 + P(x)y + R(x) \quad [2.37]$$

Eş. 2.37'nun genel çözümü (8)

$$y = y_p + \frac{b}{\mu} \quad [2.38]$$

şeklindedir. Burada y_p bir özel çözümdür ve

$$\mu = e^{-\int [2Q(x)y_p + P(x)]dx} \left(\gamma - b \int e^{\int [2Q(x)y_p + P(x)]dx} Q(x) dx \right) \quad [2.39]$$

olur. γ ve b birer sabittir. Buradan, $\sigma_1(x) = \sigma_{p1}(x)$ çözümü dikkate alınarak aşağıdaki Riccati bağıntısı

$$\sigma_{p1}'(x) + \sigma_{p1}^2(x) - u(x) = C \quad [2.40]$$

şeklinde yazılabilir. Burada C sabittir. Eş. 2.36'un genel çözümü

$$\sigma_{g1}(x) = \sigma_{p1}(x) + \frac{b}{\rho_1(x)} \quad [2.41]$$

olur. Burada g alt indisi kullanılmıştır ve

$$\rho_1(x) = e^{2 \int \sigma_{p1}(x) dx} \left(\gamma + b \int e^{-2 \int \sigma_{p1}(x) dx} dx \right). \quad [2.42]$$

dır. Buradaki yöntem sayesinde $U_D(x)$ Darboux potansiyeli direkt hesaplanırsa

$$U_D(x) = u(x) - 2\sigma'_{p1}(x) \quad [2.43]$$

bulunur.

Sonuçta, tüm özfonksiyonlar için genelleştirilmiş Darboux dönüşümü aşağıdaki gibi

$$\varphi_g = \left(\frac{d}{dx} - \sigma_{g1}(x) \right) \Psi \quad [2.44]$$

belirlenmiştir. Burada $\sigma_{g1}(x) = \frac{\varphi'_{g1}}{\varphi_{g1}}$ dır ve

$$\varphi_{g1} = e^{\int (\sigma_{p1}(x) + b/\rho_1(x)) dx} = \Psi_1 \left(\gamma + \int \frac{b dx}{\Psi_1^2} \right) \quad [2.45]$$

ile ifade edilir. Aşağıdaki eşitliğin çözümü olan φ_g fonksiyonu, dönüştürülmüş fonksiyondur

$$-\varphi_g'' + U_{GD}(x)\varphi_g = \lambda\varphi_g \quad [2.46]$$

burada

$$U_{GD}(x) = U_D(x) - 2b \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho_1(x)} \right) \quad [2.47]$$

şeklindedir ve bu denklem kuantum mekaniğinde *genelleştirilmiş Darboux potansiyeli* olarak ifade edilir (7).

2.4 Kuantum Mekanikinde Genelleştirilmiş Darboux Dönüşümü

Bu kesimde, $U_{GD}(x)$ 'e bağlı Hamiltoniyeenin benzer spektrumları analiz edilerek, bir boyutlu harmonik titreşici modelinin, özel bir durum için standart ve genelleştirilmiş Darboux potansiyeli bulunacaktır.

2.4.1 $U_{GD}(x)$ 'e Bağlı Hamiltoniyeenin Benzer Spektrumları

Schrödinger bağıntısı yardımıyla, kuantum mekaniğinde genelleştirilmiş Darboux dönüşümünün ne şekilde uygulanacağı görülebilir. Schrödinger denklemi

$$H_g \phi_g = E_g \phi_g \quad [2.48]$$

şeklindedir. Burada H_g

$$H_g = -\frac{d^2}{dx^2} + U_{GD}(x) \quad [2.49]$$

dır ve $\hbar = 1 = 2m$ birim sistemindedir. Bu durumda Eş. 2.44, aşağıdaki gibi Darboux dönüşümüne uyar

$$H_g \phi_g = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + u(x) - 2\sigma'_{g1} \right) \left(\frac{d}{dx} - \sigma_{g1} \right) \Psi, \quad [2.50]$$

bu denklem düzenlenirse

$$H_g \phi_g = -\Psi''' + \sigma_{g1} \Psi'' + \sigma_{g1}'' \Psi + u(x) \Psi' - u(x) \sigma_{g1} \Psi + 2\sigma_{g1} \sigma_{g1}' \Psi \quad [2.51]$$

bulunur.

Eş. 2.28 göz önünde tutularak Sturm-Liouville denklemini kullandığımız takdirde

$$\Psi''' = (u(x) - \lambda) \Psi' + u'(x) \Psi \quad [2.52]$$

bulunur. Eş. 2.51'ü düzenleyip, 3. türev ifadesini yerine yazarak eşitliği yeniden yazılırsa

$$H_g \varphi_g = \lambda(\Psi' - \sigma_{g1} \Psi) + (\sigma_{g1}'' - u'(x) + 2\sigma_1 \sigma_{g1}') \Psi \quad [2.53]$$

olur. Sonuç olarak, Eş. 2.36'un çözümü σ_{g1} dır ve buradan Eş. 2.52'i kullanarak Schrödinger denklemi

$$H_g \varphi_g = \lambda_g \varphi_g \quad [2.54]$$

alınarak $\lambda = E_g$ elde edilebilir. Bu sonuçla, genelleştirilmiş Darboux hamiltoniyenin benzer spektrumlar verdiği kanıtlanmış olur (7).

2.4.2 Darboux Dönüşümü ve Genelleştirilmiş Hulthen Potansiyeli

Hulthen potansiyeli (2), fiziğin farklı alanlarında kullanılır. Nükleer ve atomik fizik dahil, bu potansiyel S dalgaları için Schrödinger denklemi analitik olarak çözülebilir. Daboux dönüşümü ile genelleştirilmiş Hulthen potansiyelini bulmak için eş potansiyel

$$u(r) = -\frac{V_0}{e^{Ar} - 1} \quad [2.55]$$

olarak tanımlanır. Burada, A ve V_0 pozitif sabitlerdir, ayrıca $V_0 > A^2$ dır. Bu sayede $\ell = 0$ durumunda $R = \frac{1}{r} \Psi$ ile Eş. 2.1 alınır, radyal dalga fonksiyonu R(r) için Schrödinger denklemi anlaşılır hale gelir (3,4).

Şimdi basit bir örnek Eş. 2.4'ü yani Darboux dönüşümünü uygulayalım.

Temel durumla ilgili olan Eş. 2.55 için genelde kullanılan dalga fonksiyonu (5,6)

$$\Psi_1(r) = (1 - e^{-Ar})e^{-kr}, \quad \lambda_1 = k^2 \quad [2.56]$$

dur. Burada, $k = \frac{1}{2A}(V_0 - A^2)$ dır.

Şimdi Eş. 2.56 kullanılarak Darboux dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{d}{dr} \ln(1 - e^{-Ar}) e^{-kr} \\ &= \frac{Ae^{(-Ar)} e^{(-kr)}}{1 - e^{(-Ar)}} - \ln(1 - e^{(-Ar)}) k e^{(-kr)}\end{aligned}$$

elde edilir. σ_1 Darboux dönüşümünde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}U_m &= U(r) - 2 \frac{d}{dr} \sigma_1 \\ &= -\frac{V_0}{e^{Ar} - 1} - 2 \frac{d}{dr} \left[\frac{Ae^{(-Ar)} e^{(-kr)}}{1 - e^{(-Ar)}} - \ln(1 - e^{(-Ar)}) k e^{(-kr)} \right] \\ U_m &= -\frac{V_0}{e^{(-Ar)} - 1} + \frac{2A^2 e^{-Ar}}{(e^{-Ar} - 1)^2}\end{aligned}\quad [2.57]$$

olarak bulunur.

Bulunan bu potansiyel genelleştirilmiş Hulthen-Darboux potansiyeli diye adlandırılan benzer spektruma sahip bir potansiyeldir (5).

2.4.3 Harmonik Titreşici için İlk İki Darboux Potansiyeli

Bu durum için Schrödinger denklemini yazalım

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_{HO}(x) \right) \Psi_n = \lambda_n \Psi_n \quad [2.58]$$

burada $V_{HO}(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ bir boyutlu harmonik titreşici potansiyelidir ve $n=0,1,2,\dots$ dır.

$n=0$ olduğu zaman

$$\Psi_0 = \left(\frac{1}{\pi} \right)^{1/4} e^{-(m\omega/2\hbar)x^2} \text{ ve } \lambda_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \quad [2.59]$$

olur.Eş. 2.31 için

$$\sigma_{p_0}(x) = -\frac{m\omega}{\hbar}x \quad [2.60]$$

ifadesi bulunur . Sonuç olarak Eş. 2.33'dan faydalanarak standart Darboux potansiyeli

$$V_{D_0}(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \hbar\omega \quad [2.61]$$

olarak yazılabilir. Benzer olarak, genelleştirilmiş Darboux potansiyeline karşılık gelen dalga fonksiyonu

$$\Psi_{g_0} = e^{-(m\omega/2\hbar)x^2} \left(\gamma + b \int e^{(m\omega/\hbar)x^2} dx \right) \quad [2.62]$$

dır. Şimdi Eş. 2.41 buraya uygulanacak olursa

$$\sigma_{g_0}(x) = -\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{be^{(m\omega/\hbar)x^2}}{\gamma + b \int e^{(m\omega/\hbar)x^2} dx} \quad [2.63]$$

elde edilir ve Eş. 2.20 ile dönüşüm uygulanmaya devam edilirse Darboux potansiyeli

$$V_{DG_0}(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \hbar\omega - \frac{\hbar^2}{m} \frac{d}{dx} \left(\frac{be^{(m\omega/\hbar)x^2}}{\gamma + b \int e^{(m\omega/\hbar)x^2} dx} \right) \quad [2.64]$$

olarak bulunmuş olur. Bu potansiyel, Mielnik (9) tarafından incelenmiş benzer spektrumlu bir potansiyeldir ve harmonik titreşici Hamiltoniyeninin elde edilen spektrumu ile benzerdir.

Önceki uygulamada ki gibi , n=1 olduğu zaman

$$\Psi_1 = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar\sqrt{\pi}}} x e^{-(m\omega/2\hbar)x^2} \text{ ve } \lambda_1 = \frac{3\hbar\omega}{2} \quad [2.65]$$

bulunur. Bu durum için süper potansiyel

$$\sigma_{P_1}(x) = \frac{1}{x} - \frac{m\omega}{\hbar} x \quad [2.66]$$

olur ve sonuçta

$$V_{D_1}(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \hbar \omega \left(1 + \frac{\hbar}{m \omega x^2} \right) \quad [2.67]$$

elde edilir. Bu n=1 için standart Darboux potansiyeldir.

Sonuç olarak, genelleştirilmiş Darboux potansiyeli için, Eş. 2.41 kullanılırsa

$$\sigma_{g_1}(x) = \frac{1}{x} - \frac{m\omega}{\hbar} x + \frac{b e^{(m\omega/\hbar)x^2} / x^2}{\gamma + b \int_x^{\infty} (e^{(m\omega/\hbar)x^2} / x^2) dx} \quad [2.68]$$

bulunur ve Eş. 2.47'den

$$V_{DG_1}(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \hbar \omega + \frac{\hbar^2}{m} \left\{ \frac{1}{x^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{b e^{(m\omega/\hbar)x^2} / x^2}{\gamma + b \int_x^{\infty} (e^{(m\omega/\hbar)x^2} / x^2) dx} \right) \right\} \quad [2.69]$$

biçiminde benzer spektrumlu potansiyel ifadesi bulunmuş olur (7).

3.TAM ÇÖZÜLEBİLİR PT SİMETRİK SCARF-II POTANSİYELİ

3.1 Darboux Dönüşümü ve Genel Süper Simetri Yaklaşımı

Bu bölümde, Darboux dönüşümü ile süper simetrik yaklaşım arasındaki ilişki kullanılarak şekil değişmezliği özelliğinde ki Scarf-II potansiyelinin tam çözümü yapılacaktır. Genel olarak bir sistemin öz durumları için $\Psi_m(x)$ $m=0,1,2,\dots$, fonksiyonu kullanılarak $W(x)$ süper potansiyelini tanımlamak gerekirse

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \frac{\Psi_m'(x)}{\Psi_m(x)} \quad [3.1]$$

şeklinde ifade edilir (11). Burada $\Psi_m'(x) = \frac{d\Psi_m(x)}{dx}$, $2\pi\hbar$ Planck sabiti, m kuantum sayısı olup $\Psi_m(x)$ özfonksiyonunun düğüm noktalarının sayısına eşittir, μ ise $V_-(x)$ potansiyeli içindeki parçacıkların kütlesidir.

Uygun Hamilton işlemcisi

$$H_- = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V_-(x)$$

dır ve taban durumu ($E_0 = 0$) için Schrödinger denklemi

$$H_- \Psi_m^{(-)} = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V_-(x) \right) \Psi_m^{(-)}(x) = 0 \quad [3.2]$$

olur. Eş. 3.2'nin çözümünden

$$V_-(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\Psi_m''(x)}{\Psi_m(x)} \quad [3.3]$$

bulunur. Böylece temel Hamiltoniyen H_-

$$H_- = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\Psi_m''(x)}{\Psi_m(x)} \right) \quad [3.4]$$

olur. İki önemli işlemci

$$A^+ = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left(-\frac{d}{dx} - \frac{\Psi_m'(x)}{\Psi_m(x)} \right) \quad [3.5]$$

ve

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left(\frac{d}{dx} - \frac{\Psi_m'(x)}{\Psi_m(x)} \right) \quad [3.6]$$

olarak tanımlanır. Buradan

$$H_- = A^+ A \quad [3.7]$$

bulunur. Öte yandan, eş Hamiltoniyen H_+ ve eş potansiyel V_+

$$H_+ = AA^+ = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V_+(x) \quad [3.8]$$

$$V_+(x) = V_-(x) - \frac{\hbar^2}{\mu} \frac{d}{dx} \left(\frac{\Psi_m'(x)}{\Psi_m(x)} \right) \quad [3.9]$$

yada

$$V_+(x) = -V_-(x) + \frac{\hbar^2}{\mu} \left(\frac{\Psi_m'(x)}{\Psi_m(x)} \right)^2 \quad [3.10]$$

şeklinde ifade edilir. $V_+(x)$ ve $V_-(x)$ potansiyelleri süper simetrik eş potansiyeller olarak adlandırılır (11).

İşlemciler $W(x)$ süper potansiyel terimleri cinsinden yeniden ifade edilirse

$$A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad [3.11]$$

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad [3.12]$$

bulunur. A ve A^+ işlemcilerinin yeni ifadeleri eş potansiyellerde yerine konursa

$$V_{\pm}(x) = W^2(x) \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} W'(x), \quad W'(x) = \frac{dW}{dx} \quad [3.13]$$

bulunur. Bu iki eş potansiyel arasındaki ilişkinin

$$V_+ = V_- + \frac{2\hbar}{\sqrt{2\mu}} \frac{dW}{dx}, \quad [3.14]$$

ve işlemciler arasındaki komütasyon bağıntısının

$$[A, A^+] = \frac{2\hbar}{\sqrt{2\mu}} \frac{dW}{dx} \quad [3.15]$$

şeklinde olduğu görülür.

3.2 Scarf-II Potansiyelinin Tam Çözümü

Bir boyutlu PT simetrik Scarf-II potansiyeli (12)

$$V(x) = -V_1 \sec^2 x - iV_2 \tanh x \sec x, \quad V_1 > 0 \quad V_2 \neq 0 \quad [3.16]$$

şeklinde ifade edilir ve $\hbar = 1 = 2\mu$ birim sisteminde Schrödinger denklemi yazılırsa

$$\frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + [k^2 + V_1 \sec^2 x + iV_2 \sec x \tanh x] \Psi(x) = 0 \quad [3.17]$$

olur. Burada $k = \sqrt{E}$ dır. Aşağıdaki

$$Z = \frac{1 - i \sinh x}{2}$$

ve

$$\Psi(x) = Z^{-p} (1 - Z)^{-q} F(Z)$$

dönüşümleri kullanılarak, Gauss hiper geometrik denklemi

$$Z(1-Z)\Psi''(Z) + [-2p+1/2 - (-2p-2q+1)Z]F'(Z) - [(p+q)^2 + k^2]F(Z) = 0 \quad [3.18]$$

elde edilir (13). Burada

$$-p^2 - \frac{p}{2} + (V_1 + iV_2)/4 = 0$$

ve

$$-q^2 - \frac{q}{2} + (V_1 - iV_2)/4 = 0$$

olmalıdır. Bu iki eşitlikten

$$p = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{V_1 - V_2 + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{t}{2}$$

ve

$$q = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{V_1 + V_2 + \frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{s}{2}$$

olarak bulunur. Eş.3.17'nin çözümü Gauss hiper geometrik fonksiyonunun cinsinden şöyle

$\Psi(x) =$

$$\left(\frac{1-i \sinh x}{2}\right)^{-p} \left(\frac{1+i \sinh x}{2}\right)^{-q} {}_2F_1 \left[-p-q+ik, -p-q-ik, -2p+\frac{1}{2}; \left(\frac{1-i \sinh x}{2}\right) \right] \quad [3.19]$$

yazılabilir. Burada $-p-q-ik = n$, $n=0,1,2,\dots$, kuantumlanma şartının etkisini göstermek için Eş. 3.17'nin çözümü Jacobi polinomları cinsinden

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma(n-2p+1/2)}{n!\Gamma(1/2-2p)} \left(\frac{1-i \sinh x}{2}\right)^{-p} \left(\frac{1+i \sinh x}{2}\right)^{-q} P_n^{-2p-1/2, -2q-1/2}(i \sinh x) \quad [3.20]$$

bulunur (10). Bu ifade düzenlenirse

$$\Psi_n(x) = \frac{\Gamma(n-2p+1/2)}{n!\Gamma(\frac{1}{2}-2p)} Z^{-p} (Z^*)^{-q} P_n^{-2p-\frac{1}{2}, -2q-\frac{1}{2}}(i \sinh x) \quad [3.21]$$

olur. Burada Jacobi polinom ifadesi (14)

$$P_n^{\alpha, \beta}(i \sinh x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)} F(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; Z) \quad [3.22]$$

olarak bilinir. $k = \sqrt{E}$ ifadesinden , enerji özdeğeri

$$E_n = -(n-p-q)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots, \left\langle \frac{s+t-1}{2} \right\rangle \quad [3.23]$$

bulunur.

$V_1 > 0$ iken, reel V_2 için iki durum ortaya çıkar. Bu durumlar, potansiyelin reel ve imajiner kısımları arasındaki bağıntıya bağlıdır:

Durum 1: $|V_2| \leq V_1 + 1/4$.

Bu durumda potansiyel ve dalga fonksiyonu PT simetriktir. p ile q reeldir ve benzer spektrumlar verir.

Durum 2: $|V_2| > V_1 + \frac{1}{4}$.

Bu durumda kendiliğinden PT simetrisinin kırılmasına rağmen potansiyel, dalga fonksiyonu PT simetriktir. p yada q, kompleksdir ve enerji ifadesinde

$$E_n = - \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{1}{4} + V_1 + V_2} \pm i \sqrt{V_2 - \frac{1}{4} - V_1} \right\} \right)^2$$

gibi kompleks eşlenik çiftler bulunur.

Tamamen imajiner V_2 için, Eş. 3.16'deki potansiyel sadece reel enerjiye sahiptir. Bu nedenle, V_2 reel ve imajiner kısımlı olduğu zaman Eş. 3.16'deki potansiyel PT simetri özelliğini kaybeder ve incelemede dikkate alınmaz.

Eş. 3.17'deki normalize edilmiş dalga fonksiyonu için süper potansiyel

$$W_m(x) = -\frac{\Psi'_m(x)}{\Psi_m(x)}$$

$$W_m(x) = (p+q) \tanh x - i(p-q) \sec hx + \frac{mb}{a} \frac{F(-m+1, b+1, c+1; Z)}{F(-m, b, c; Z)} \quad [3.24]$$

olarak bulunur (10). Burada b ve c sabitleri

$$b = -2q - 2p + 2 \quad [3.25]$$

$$c = -2q + \frac{1}{2} \quad [3.26]$$

dır. Scarf-II potansiyeli ile benzer spektruma sahip tam çözülebilir $U^{(m)}(x)$ potansiyeli

$$U^{(m)}(x) = W_m^2 + W'_m - \beta_m \quad [3.27]$$

olarak ifade edilebilir. Eğer, $V_-(x)$ ve $V_+(x)$ 'in benzer spektrumlu oldukları dikkate alınır, $V(x)$ ve $U^{(m)}(x)$

$$V(x) = \{V_-(x) - \beta_m\} \quad [3.28]$$

$$U^{(m)}(x) = \{V_+(x) - \beta_m\} \quad [3.29]$$

bulunur. Scarf-II potansiyeli için β_m hesaplanırsa

$$\beta_m = (p+q)^2 - 2m(p+q) + m^2 \quad [3.30]$$

elde edilir (10). Böylece bu yaklaşımın bize yeni potansiyeller vereceği görülür. Özfonksiyon için bu özel durum dikkate alınır, Eş. 2.44 yardımıyla

$$\phi_n(x) = \left(\frac{P_m P'_n - P'_m P_n}{P_m} \right) \Psi_0(x) \quad [3.31]$$

bulunur.

Yukarıda $P_n^{\alpha,\beta}(i\sinh x)$ için geçerli olan P_n ve P_n' ifade edilirken ; $P_n^{\alpha,\beta}(i\sinh x)$, x dikkate alınarak farklılaştırılabilir. P_n^{β} tanımlandıktan sonra bilinen işlem adımlarıyla $\phi_n(x)$ bulunur.

Şimdi ilk üç durumun analizinden elde edilen sonuçları verelim:

m=0 için:

$$U^{(0)}(x) = -[2(p^2 + q^2) - (p + q)]\sec h^2(x) - i(p - q)[2(p + q) - 1]\sec hx \tanh x \quad [3.32]$$

ve temel durum

$$\phi_0 = N_0 \left(\frac{1 - i\sinh x}{2} \right)^{-(p-\frac{1}{2})} \left(\frac{1 + i\sinh x}{2} \right)^{-(q-\frac{1}{2})} \quad [3.33]$$

bulunur ve özenerji ifadesi

$$E_n = -(n + 1 - p - q)^2 \quad n=0,1,2,\dots \quad [3.34]$$

olarak elde edilir (10).

m=1 için:

Bulunan potansiyellerden ilki

$$U^{(1)}(x) = -\{2(p^2 + q^2) - (p + q)\}\sec h^2 x - i(p - q)[2(p + q) - 1]\sec hx \tanh x \\ + 2\left(\frac{f_1'}{f_1}\right)^2 - \frac{2(p - q)}{f_1} - 2 \quad [3.35]$$

dır. Burada

$$f_1(x) = F\left(-1, -p - q - \lambda; 2p + \frac{3}{2}; Z\right) \\ = \left\{ -(p - q) + \frac{i}{2}(-2p - 2q + 1)\sinh x \right\} \quad [3.36]$$

biçimindedir. Eş. 2.44'ten, Eş. 3.35'teki yardımcı potansiyelin temel durumu elde edilirse

$$\phi_0 = \frac{2i(\frac{1}{2} - p - q)}{(-p - q) + i(\frac{1}{2} - p - q) \sinh x} Z^{-(p-1/2)} (Z^*)^{-(q-1/2)} \quad [3.37]$$

bulunur ve enerji

$$E_0 = -(-p - q)^2 \quad [3.38]$$

olarak elde edilir. Eş. 2.44'den uyarılmış durum için elde edilen ifade

$$\begin{aligned} \phi_n &= P'_{n+2} \Psi_0 - \frac{P'_1}{P_1} P_{n+2} \Psi_0 \\ &= \left(\frac{P_1 P'_{n+2} - P'_1 P_{n+2}}{P_1} \right) \Psi_0 \end{aligned} \quad [3.39]$$

şeklindedir. Enerji özdeğeri

$$E_n = -(n + 2 + p + q)^2 \quad n=0,1,2,\dots \quad [3.40]$$

olarak bulunur. Eş. 3.37 incelenirse normalize edilebileceği görülür (10).

m=2 için:

Eş potansiyel

$$\begin{aligned} U^{(2)}(x) &= -\{2(p^2 + q^2) - (p + q)\} \sec h^2 x - i(p - q)[2(p + q) - 1] \sec h x \tanh x \\ &+ 2 \left(\frac{f'_2}{f_2} \right)^2 + \frac{\sigma - 6(p - q)i \sinh x}{f_2} + 8 \end{aligned} \quad [3.41]$$

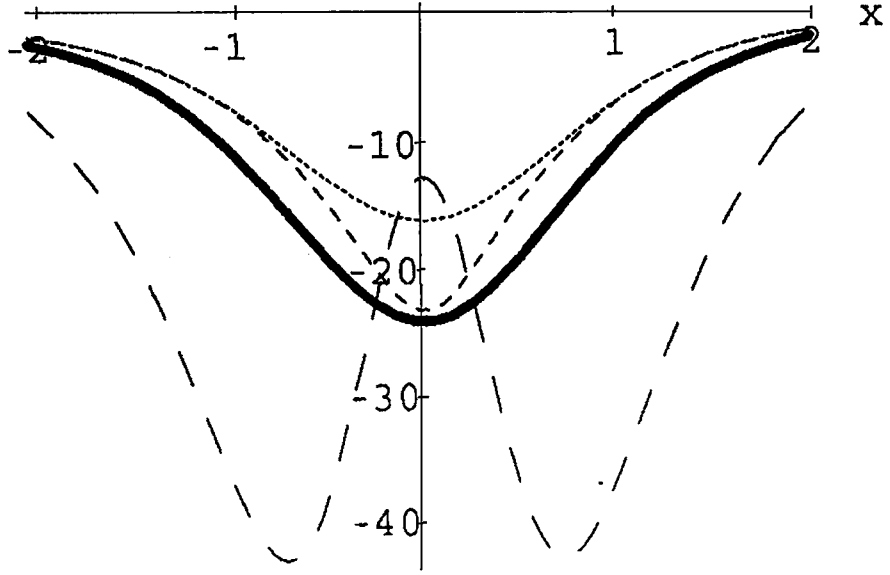
bulunur. Burada

$$f_2(x) = F\left(-2, -p - q - \lambda; 2p + \frac{3}{2}; Z\right) \quad [3.42]$$

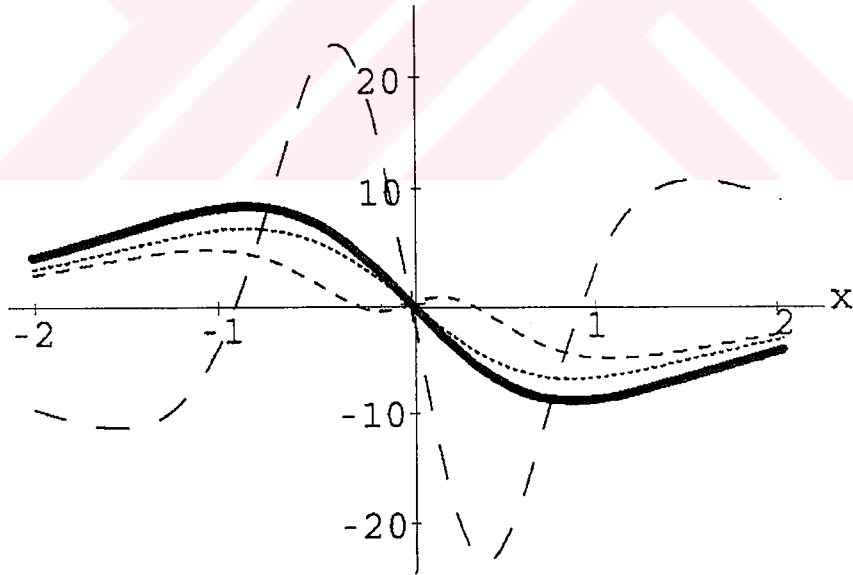
dır ve

$$\sigma = \frac{-2p-2q+2}{(-2p+\frac{1}{2})(-2q+\frac{3}{2})} \left\{ 2(p-q)^2 - \frac{(-2q+\frac{3}{2})(-2p+\frac{3}{2})}{(-2p-2q+2)} \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(3+2p+2q)(3-2p-2q) \right\} \quad [3.43]$$

biçimindedir (10). Bu potansiyelleri grafik ile göstermek için , V , $U^{(i)}(i=0,1,2)$ potansiyellerinin reel ve imajiner kısımlarını çizeriz. Şekil 3.1’de V ’nin reel kısımları çizilir, $U^{(i)}(i=0,1,2)$ için parametre değeri $V_1=24, V_2=18$ alınır. Şekil 3.2’de V_1 ve V_2 ’nin aynı değerleri için benzer potansiyellerin imajiner kısmı çizilir.



Şekil 3.1. Potansiyelin reel kısmı. Koyu çizgi V 'yi, noktalı çizgi $U^{(0)}$ 'i, küçük kısa çizgi $U^{(1)}$ 'i, büyük kısa çizgi $U^{(2)}$ 'yi gösterir.



Şekil 3.2. Potansiyelin imajiner kısmı. Koyu çizgi V 'yi, noktalı çizgi $U^{(0)}$ 'i, küçük kısa çizgi $U^{(1)}$ 'i, büyük kısa çizgi $U^{(2)}$ 'yi gösterir.

4. KUANTUM HAMILTON JACOBI YAKLAŞIMININ BAĞLI DURUMLARA UYGULANMASI

4.1 Kuantum Hamilton Jacobi Yaklaşımı

Periyodik potansiyeller için Kuantum Hamilton Jacobi (KHJ) yaklaşımı uygun bir metottur. Burada detaylara girmeden sadece gerekli bilgiler verilecektir (15).

KHJ yaklaşımında ilginç olan en temel unsur, *Kuantum Momentum Fonksiyonu* (KMF) p' 'dir. Bu fonksiyon $\Psi(x)$ dalga fonksiyonunun logaritmik türevi ile $-i\hbar$ 'ın çarpımı olarak

$$p = -i\hbar \frac{d}{dx} (\ln \Psi(x)) \quad [4.1]$$

verilebilir (15). Bu nedenle KMF için elde edilen bir ifade, dalga fonksiyonu için de önemlidir. KMF, KHJ denklemi olarak bilinen

$$p^2 - i\hbar p' = 2\mu(E - V(x)) \quad [4.2]$$

Riccati denklemini sağlar. Bu denklem

$$A(x)p^2 + B(x)p + C(x) + i\frac{dp}{dx} = 0 \quad [4.3]$$

genel Riccati denkleminin özel bir durumudur. Eş. 4.2 KHJ yaklaşımının en basit şeklidir. Genelde, Eş. 4.3'teki Riccati denkleminin çözümü singularitenin iki tipine sahiptir. Bunlar, sabit singularite ve çoklu singularitedir. Sabit singularite, $A(x)$, $B(x)$ ve $C(x)$ singular noktalarında kararlıdır. Böylece, Eş 4.2 'deki KHJ denklemi için sabit singular nokta, potansiyelden kaynaklanır.

KMF'nin singularite yapısını gözönüne alarak, Eş.4.2'deki KHJ denklemi yazılmaya devam edilirse

$$q^2 + q' = V(x) - E \quad [4.4]$$

bulunur. Burada $q = \frac{d}{dx}\Psi(x)$, $\hbar = 2\mu = 1$ dir. Dalga fonksiyonu q 'ya göre şöyle olacaktır

$$\Psi(x) = \exp\left(\int q(x)dx\right) \quad [4.5]$$

$t = f(x)$ değişkeninde, x 'e göre değişken dönüşümü uygulamak çözümde kolaylık sağlar (15). Değişken dönüşümünden sonra Eş. 4.4 ifadesi

$$q^2 + F(t)\frac{dq}{dt} + E - \tilde{V}(t) = 0 \quad [4.6]$$

olarak bulunur. Burada $F(t) = \frac{df}{dx}$ ifadesi, t ve t 'nin potansiyel terimi $\tilde{V}(t)$ 'nin bir fonksiyonudur.

Şimdi, Eş. 4.4'ü Eş. 4.6 formunda yazabilmek için aşağıdaki $q(x)$ ve $\chi(t)$ dönüşümleri

$$q = F(t)\phi \quad \phi = \chi - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\ln F(t)) \quad [4.7]$$

uygulanacaktır. Yukarıdaki dönüşümler Eş. 4.6'da kullanılırsa

$$\chi^2 + \frac{d\chi}{dt} + \frac{E - \tilde{V}(t)}{F^2(t)} - \frac{1}{2}\left(\frac{F''(t)}{F(t)}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{F'(t)}{F(t)}\right)^2 = 0 \quad [4.8]$$

bulunur ve bu Riccati denkleminin bir türüdür (15). Çözümü bilinen yollarla elde edilebilir.

4.2 Liouville Teoremi

Teorem:

Eğer bir fonksiyon, kompleks düzlemde her yerde analitik ve kararlı ise sabit fonksiyondur (16).

İspat:

Keyfi bir z_0 noktası civarında r yarı çaplı C_1 çemberini düşünelim.

$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$ denkleminde ilk olarak elde edilen ifade

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^2} |dz| \quad [4.9]$$

dır ve C pozitif bir nicelik olmak üzere $f(z)$, $|f(z)| < C$ iken karardır. Eş. 4.9'dan

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &\leq \frac{C}{2\pi} \oint_{C_1} \frac{|dz|}{|z-z_0|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} C \frac{2\pi}{r} \end{aligned} \quad [4.10]$$

elde edilebilir. $f(z)$ fonksiyonu, kompleks düzlemde her yerde analitiktir. Eş. 4.10 sonucuyla r 'nin çok büyük bir keyfi sabit yapılabilmesi zordur. Bu nedenle, $|f'(z_0)| = 0$ yada $f'(z_0) = 0$ dır. Fakat z_0 keyfi noktadır. Bu nedenle $f(z)$ 'nin türevi kompleks düzlemin tüm noktalarında sıfırdır ve sabit bir fonksiyondur.

4.3 KHJ Yaklaşımının Uygulamaları

4.3.1 Harmonik Titreşici

Leacock ve Padgett (18,19) tarafından anlamlandırılan KHJ denklemi, Riccati denklemi formunda (17)

$$p^2 - i\hbar \frac{dp}{dx} = 2m(E - V(x)) \quad [4.11]$$

dır. Bu eşitlik belirli bir $V(x)$ potansiyeli için aşağıdaki gibi Schrödinger denklemine bağlanırsa

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \quad [4.12]$$

olur ve burada p

$$p = -i\hbar \frac{d}{dx} \ln \Psi(x) \quad [4.13]$$

kuantum mekanik fonksiyondur. Harmonik titreşici için Schrödinger denkleminin anlamlı olması, $\Psi(\varepsilon)$ ile temsil edilen ε 'nin dalga fonksiyonu terimlerinde kullanılmasıyla sağlanır. Bunu yapabilmek için alttaki dönüşümler

$$\varepsilon = \alpha x \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar W_c} \quad mk = \hbar^2 \alpha^4 \quad \alpha = \sqrt{\frac{mW_c}{\hbar}}$$

kullanılarak potansiyel ifadesi

$$V(x) = \frac{1}{2} m W_c^2 x^2 \quad [4.14]$$

elde edilir. Buradan yola çıkarak

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{d\Psi}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dx} = \alpha \frac{d\Psi}{d\varepsilon}$$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\alpha \frac{d\Psi}{d\varepsilon} \right) \frac{d\varepsilon}{dx} = \alpha^2 \frac{d^2\Psi}{d\varepsilon^2}$$

bulunur. Bu denklemler ve dönüşümler Eş. 4.12'deki Schrödinger denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{d^2\Psi}{d\varepsilon^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2 W_c^2 \varepsilon^2}{\hbar^2 \alpha^2} \right) \Psi = 0$$

$$\alpha^2 \frac{d^2\Psi}{d\varepsilon^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2 W_c^2 \varepsilon^2}{\hbar^2 \alpha^2} \right) \Psi = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\Psi}{d\varepsilon^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \frac{1}{\alpha^2} - \frac{m^2 W_c^2}{\hbar^2} \varepsilon^2 \frac{1}{\alpha^4} \right) \Psi &= 0 \\
\frac{d^2\Psi}{d\varepsilon^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \frac{\hbar}{mW_c} - \frac{m^2 W_c^2}{\hbar^2} \varepsilon^2 \frac{\hbar^2}{m^2 W_c^2} \right) \Psi &= 0 \\
\frac{d^2\Psi}{d\varepsilon^2} + \left(\frac{2E}{\hbar W_c} - \varepsilon^2 \right) \Psi &= 0 \\
\frac{d^2\Psi(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} + (\lambda - \varepsilon^2) \Psi(\varepsilon) &= 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

sonucu elde edilir. Bu ifadenin KHJ denklemine uygun biçimi

$$p^2 - i \frac{dp}{d\varepsilon} = \lambda - \varepsilon^2 \tag{4.16}$$

dır. Yukarıdaki denklemde mantıklı bir yaklaşımla ortaya çıkan sonuç, büyük ε 'lar için p 'nin $\pm i\varepsilon$ 'na gitmesidir.

Yani

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} p \approx i\varepsilon \tag{4.17}$$

KMF p , reel düzlemde $-i$ kalanlarıyla beraber n çok kutbuna sahiptir. Potansiyel singular olmadıkça kompleks düzlemdeki sonlu alanda sabit bir singularite yoktur. Bu, şunu gösterir ki sonlu kompleks düzlemde ki KMF'nin başka çok kutbu yoktur (18,19). Böylece n çok kutbu hariç p her yerde analitik yapılabilir.

Buradan p

$$p(\varepsilon) = \sum_{k=1}^n \frac{-i}{\varepsilon - \varepsilon_k} + i\varepsilon + Q(\varepsilon) \tag{4.18}$$

olur. $Q(\varepsilon)$, büyük ε 'lar için bütün fonksiyonun sınırıdır ve $i\varepsilon$, ∞ 'da ki q 'nın davranışı olarak tanımlanır. Böylece, Liouville teoremindeki $Q(\varepsilon)$, C gibi bir sabittir. Bu bahsedilen ifade

$$\sum_{k=1}^n \frac{-i}{\varepsilon - \varepsilon_k} = -i \frac{P'(\varepsilon)}{P(\varepsilon)} \quad [4.19]$$

dır. P , n . dereceden bir polinomdur. Artık $P(\varepsilon)$ şu şekilde

$$P(\varepsilon) = -i \frac{P'}{P} + i\varepsilon + C \quad [4.20]$$

ifade edilebilir. Eş. 4.16'da Eş. 4.20'yi yerine yazıp ε 'nın temel kuvvetlerine göre karşılaştırılırsa

$$\left(-i \frac{P'}{P}\right)^2 - \varepsilon^2 + C^2 + 2C \left[-i \frac{P'}{P} + i\varepsilon\right] + 2\varepsilon \frac{P'}{P} - i \left[-i \frac{P''}{P} + i \frac{P'}{P} - i\right] = \lambda - \varepsilon^2 \quad [4.21]$$

bulunur. İfade düzenlenirse

$$\left(\frac{P'}{P}\right)' + C^2 + 2C \left[-i \frac{P'}{P} + i\varepsilon\right] + 2\varepsilon \frac{P'}{P} - \frac{P''}{P} + 1 = \lambda \quad [4.22]$$

elde edilir ve $\lim \varepsilon \rightarrow 0$ iken, Eş. 4.19 kullanılırsa, $\frac{P'}{P} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_k}$, ilk olarak görülen,

$$\sum_{k=0}^n 2\varepsilon \frac{P'}{P} \approx 2n \text{ olmasıdır.}$$

Buradan çok büyük ε 'lar için son denklem bir sabit katsayıya indirgenir

$$2n+1 = \lambda \quad [4.23]$$

ve

$$C=0 \quad [4.24]$$

olur. Baştaki dönüşümler kullanılırsa; ilk elde edilen enerji özdeğeri için n . salınımın enerji ifadesi

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar W_c \quad [4.25]$$

olarak bulunur (17) ve P için diferansiyel denklem

$$\frac{P''}{P} - 2\varepsilon \frac{P'}{P} + \lambda - 1 = 0 \quad [4.26]$$

elde edilen Eş. 4.26'da λ 'nın değeri yerine yazılırsa ilk elde edilen Hermite diferansiyel denklemi

$$P'' - 2\varepsilon P' + 2nP = 0 \quad [4.27]$$

bulunur. Sınır durum dalga fonksiyonu için elde edilen Eş. 4.13 kullanılarak yeni dalga fonksiyonu bulunabilir. Yani, $\Psi(\varepsilon) = \exp\left(i \int P d\varepsilon\right)$ olduğu hatırlanarak, $P(\varepsilon)$ fonksiyonunun Eş.4.20'deki değeri kullanılırsa dalga fonksiyonu

$$\begin{aligned} i \int P(\varepsilon) d\varepsilon &= -ii \int \frac{P'}{P} d\varepsilon + ii \int \varepsilon d\varepsilon \\ &= \ln P - \frac{\varepsilon^2}{2} \\ &= \ln(H_n(\varepsilon)) - \frac{\varepsilon^2}{2} \end{aligned}$$

$$\Psi(\varepsilon) = H_n(\varepsilon) \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\right) \quad [4.28]$$

bulunur. Burada $P \equiv H_n(\varepsilon)$ dır. Çünkü, Hermite denkleminin çözümü Hermite polinomlarıdır (17).

4.3.2 Hidrojen Atomu

Burada önceden elde ettiğimiz Schrödinger denkleminin ($\hbar = 2m = 1$) radyal kısmının kararlı durum dalga fonksiyonu elde edilecektir (17). Radyal Schrödinger denklemi

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(E + \frac{ze^2}{r} - \frac{\beta}{r^2} \right) R = 0 \quad [4.29]$$

şeklindedir ve burada $\beta = \ell(\ell+1)$ dır. $R(r) = \frac{\phi(r)}{r}$ dönüşümü kullanılırsa

$$\frac{dR}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{\phi(r)}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} \phi(r) \quad [4.30]$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} \phi(r) \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r^3} \phi(r) - \frac{1}{r^2} \frac{d\phi(r)}{dr} \end{aligned} \quad [4.31]$$

bulunur. Eş. 4.30 ve 5.31 , Eş. 4.29'da yerine yazılırsa

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r^3} \phi(r) - \frac{1}{r^2} \frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{2}{r^2} \frac{d\phi(r)}{dr} - \frac{2}{r^3} \phi(r) + \left(E + \frac{ze^2}{r} - \frac{\beta}{r^2} \right) \frac{\phi(r)}{r} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} + \left(E + \frac{ze^2}{r} - \frac{\beta}{r^2} \right) \phi(r) = 0 \quad [4.32]$$

olur. KHJ denkleminin

$$q = \frac{d}{dr} \ln(\phi(r)) \quad [4.33]$$

olduğu gözönünde tutulursa

$$\phi(r) = \exp\left(\int q dr\right) \quad [4.34]$$

dır. Buraya $u = \int q dr$ dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{d^2 e^u}{dr^2} + \left(E + \frac{ze^2}{r} - \frac{\beta}{r^2} \right) e^u = 0 \quad [4.35]$$

bulunur ve burada

$$\frac{d^2 e^u}{dr^2} = \frac{d}{dr} (u' e^u) = u'' e^u + (u')^2 e^u \quad [4.36]$$

olur. Eş. 4.36, Eş. 4.35'te yerine yazılır ve düzenlenirse

$$e^u \frac{dq}{dr} + e^u q^2 + \left(E + \frac{ze^2}{r} - \frac{\beta}{r^2} \right) e^u = 0$$

$$q^2 + \frac{dq}{dr} + \left(E + \frac{ze^2}{r} - \frac{\beta}{r^2} \right) = 0 \quad [4.37]$$

elde edilir. Harmonik titreşiciye benzer biçimde, q şu şekilde

$$q(r) = \frac{P'}{P} + \frac{b_1}{r} + C \quad [4.38]$$

yazılabilir. $r=0$ 'da kalan b_1 'dir. Bu orijindeki kutup etrafında q'nun Laurent açılımının yapılmasıyla elde edilebilir. Elde edilen kalanın iki değeri

$$b_1 = \ell \quad b_1 = \ell + 1 \quad [4.39]$$

dır. İlk olarak sağdaki kalanı seçersek, ϕ dalga fonksiyonunun kare integral özelliği kullanılır ve

$$b_1 = \ell + 1 \quad [4.40]$$

elde edilir. q için Eş. 4.37'de Eş. 4.38 yerine yazılır ve büyük r'ler için sonuçtaki denklemlerin büyüyen farklı terimleri ile önemli terimleri karşılaştırılırsa

$$C^2 = -E \quad E = -\frac{z^2 e^4}{(2n')^2} \quad [4.41]$$

olur ve $n' = n + \ell + 1$ dir. İlk diferansiyel denklem

$$rP'' + 2P' \left(\ell + 1 - \frac{ze^2}{2n'} \right) + \frac{(n' - \ell - 1)ze^2}{n'} P = 0 \quad [4.42]$$

bulunur. Altındaki dönüşüm sayesinde

$$\frac{ze^2}{n'} r = \rho \quad [4.43]$$

Eş. 4.42

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{d\left(\frac{\rho n'}{ze^2}\right)} = \frac{ze^2}{n'} \frac{dP}{d\rho} \quad [4.44]$$

$$\frac{d^2 P}{dr^2} = \left(\frac{ze^2}{n'} \right)^2 \frac{d^2 P}{d\rho^2} \quad [4.45]$$

olur. Eş. 4.44 ve 4.45 , Eş. 4.42'de yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{\rho n'}{ze^2} \left(\frac{ze^2}{\rho n'} \right)^2 \frac{d^2 P}{d\rho^2} + ((2\ell + 1) + 1 - \rho) \frac{ze^2}{n'} \frac{dP}{d\rho} + \frac{(n' - \rho - 1)}{n'} ze^2 P = 0 \\ \rho P'' + ((2\ell + 1) + 1 - \rho) P' + (n' - \ell - 1) P = 0 \end{aligned} \quad [4.46]$$

elde edilir. Bu bağlı Laguerre diferansiyel denklemdir. P ise Laguerre polinomu olan L olarak tanımlanır. Eş. 4.38 ve 4.33'den kararlı durum dalga fonksiyonu

$$\Psi_n(\rho) = \rho^{\ell+1} \exp(-\rho/2) L_{n'+1}^{2\ell+1}(\rho) \quad [4.47]$$

elde edilir (17).

4.3.3 Khare Mandal Modeli

Khare Mandal modeli için potansiyel ifadesi, $V(x) = -(\zeta \cosh 2x - iM)^2$ dır. Bu potansiyel, M tek yada çift olduğunda kompleks yada reel özdeğere sahiptir (21,22). Burada KHJ yaklaşımını kullanarak, M'nin çift yada tek değeri için ilk olarak

Şartlı Çözülebilirlik şartı (ŞÇ) elde edilecektir (20). Sonra ise, $M=3$ ve $M=2$ için, bunların özdeğeri ve özfonksiyonu için net bir ifade elde edilecektir. KHJ denkleminde $q \equiv ip$ 'nin terimleri ($\hbar = 2m = 1$) yazılırsa

$$q^2 + \frac{dq}{dx} + E + (\zeta \cosh 2x + iM)^2 = 0 \quad [4.48]$$

olur. Bu yukarıdaki ifade, her bir kutbun rezidüsü için avantaj sağlar. $t = \cosh 2x$ değişken dönüşümü ile potansiyel rasyonel bir türe dönüşür. Bu dönüşüm Eş. 4.48'e uygulanırsa

$$q^2 + 2\sqrt{t^2 - 1} \frac{dq}{dt} + E + (\zeta t + iM)^2 = 0 \quad [4.49]$$

elde edilir. İlk olarak $\frac{dq}{dt}$ 'nin katsayısını inceleyerek aşağıdaki değişken dönüşümleri

$$q = 2\sqrt{t^2 - 1}\phi \quad \phi = \chi - \frac{t}{2(t^2 - 1)} \quad [4.50]$$

olarak tanımlanır ve bu dönüşümler Eş. 4.49'a uygulanır ve düzenlenirse

$$\phi^2 = \chi^2 - \frac{\chi t}{(t^2 - 1)} + \frac{t^2}{4(t^2 - 1)^2}$$

$$\phi' = \frac{d\chi}{dt} - \frac{1}{2(t^2 - 1)} + \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2}$$

$$q^2 = 4(t^2 - 1)\phi^2$$

$$= 4(t^2 - 1) \left(\chi^2 - \frac{\chi t}{t^2 - 1} + \frac{t^2}{4(t^2 - 1)^2} \right)$$

$$q^2 = 4(t^2 - 1)\chi^2 - 4\chi t + \frac{t^2}{t^2 - 1} \quad [4.51]$$

bulunur. İşleme devam edilirse

$$\frac{dq}{dt} = \frac{2t}{\sqrt{t^2-1}} \left(\chi - \frac{t}{2(t^2-1)} \right) + 2\sqrt{t^2-1} \left(\frac{d\chi}{dt} - \frac{1}{2(t^2-1)} + \frac{t^2}{(t^2-1)^2} \right) \quad [4.52]$$

elde edilen Eş.4.51 ve 4.52 ,Eş. 4.49'da yerine yazılırsa

$$\chi^2 + \frac{d\chi}{dt} + \frac{t^2+2}{4(t^2-1)^2} + \frac{E+(\zeta t-iM)^2}{4(t^2-1)} = 0 \quad [4.53]$$

bulunur. Burada χ KMF fonksiyonu, Eş. 4.53 ise KHJ denklemi olarak kabul edilecektir (20).

χ 'nin singularite yapısı:

χ singular kısımlara ayrılarak, aşağıdaki gibi

$$\chi = \frac{b_1}{t-1} + \frac{b_1'}{t+1} + \frac{P_n'}{P_n} + C \quad [4.54]$$

yazılır. Burada b_1 ve b_1' , $t = \pm 1$ sabit kutuplarının rezidüsüdür. P_n , n. dereceden bir polinomdur ve $\prod_{k=1}^n (t-t_k)$ 'ya eşittir. t_k , KMF'nin çok kutbunun konumunu belirtir. χ 'nin analitik kısmı C'yi verir ve bu Liouville teoremindeki bir sabittir. $t=1$ 'de sabit kutbun rezidüsü bulunurken ilk olarak χ , Laurent serisi ile açılırsa

$$\chi = \left(\frac{b_1}{t-1} + a_0 + a_1(t-1) + \dots \right) \quad [4.55]$$

olur. Bulunan ifade Eş.4.53'te yerine yazılarak t'nin kuvvetlerine göre karşılaştırılır. Yani

$$\chi^2 = \frac{b_1^2}{(t-1)^2} + a_0^2 + a_1^2(t-1)^2 + \dots$$

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{b_1}{(t-1)^2} + a_1 + \dots$$

elde edilir. Bu ifadeler Eş. 4.53'te yerine yazılır

$$\frac{b_1^2}{(t-1)^2} + a_0^2 + a_1^2(t-1)^2 - \frac{b_1}{(t-1)^2} + a_1 = -\frac{t^2 + 2}{4(t-1)^2(t+1)^2} - \frac{E + (\zeta t - iM)^2}{4(t^2 - 1)}$$

$$\frac{1}{(t-1)^2}(b_1^2 - b_1) = \frac{1}{(t-1)^2} \left(-\frac{t^2 + 2}{4(t+1)^2} \right)$$

$t=1$ için

$$b_1(b_1 - 1) = -\frac{3}{16}$$

bulunur. Buradan b_1 'in değeri

$$b_1 = \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \quad [4.56]$$

bulunur. $t=-1$ için benzer şekilde b_1'

$$b_1' = \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \quad [4.57]$$

bulunur.

Sonsuzdaki davranış:

χ 'nin sonsuzdaki temel davranışı için bulunan dağılım

$$\chi = \left(a_0 + \frac{\lambda}{t} + \frac{\lambda_1}{t^2} + \dots \right) \quad [4.58]$$

dır. Eş. 4.58, 4.53'te yerine yazılırsa

$$a_0^2 + \frac{2a_0\lambda}{t} + \frac{\lambda^2}{t^2} - \frac{\lambda}{t^2} = -\frac{t^2 + 2}{4(t^2 - 1)^2} - \frac{E}{4(t^2 - 1)} - \frac{(\zeta^2 t^2 - 2i\zeta t M - M^2)}{4(t^2 - 1)}$$

olur. $\lim t \rightarrow \infty$ iken

$$\frac{2a_0\lambda}{t} = \frac{2i\zeta t M}{4t^2}$$

$$\lambda = \frac{iM\zeta}{4a_0} \quad [4.59]$$

bulunur ve $\lim t \rightarrow \infty$ iken

$$a_0^2 = \frac{(\zeta t - iM)^2}{4t^2}$$

dır. Buradaki M, (ζt) teriminin yanında çok küçüktür ve ihmal edilir. Böylece

$$a_0 = \pm \frac{i\zeta}{2} \quad [4.60]$$

bulunur. Bu C'ye eşittir. λ 'nın tam olarak iki değeri aşağıdaki gibidir

$$\lambda = \frac{M}{2}, -\frac{M}{2} \quad [4.61]$$

Bu Eş. 4.54'deki χ ile benzerlik gösterir. Büyük t'ler için $\frac{b_1 + b_1' + n}{n}$ dır. Bu nedenle iki denklemi birbirine eşitlersek

$$b_1 + b_1' + n = \lambda \quad [4.62]$$

buluruz. Eş. 4.56 ve 4.57'den Eş. 4.62'nin sağ tarafının pozitif olduğu görülebilir. Eş. 4.62 için doğru seçim yapıp, λ 'nın sadece pozitif değeri yani $\lambda = \frac{M}{2}$ alınarak

$a_0 = C = +\frac{i\zeta}{2}$ seçilir. Burada b_1 ve b_1' 'nün değerini dikkate almak gerekir. Çizelge

4.1'de görüleceği gibi, set-1 ve set-2 de M sadece tek olduğu zaman, set-3 ve set-4 de M sadece çift olduğu zamanki durumlar incelenmiştir.

Dalga fonksiyonunun türleri:

Eş. 4.1'deki p'nin terimi $\Psi(x)$ ile $\hbar = 2m = 1$ iken

$$\Psi(x) = \exp(i \int p dx) \quad [4.63]$$

dır. Değişken dönüşümü yapılır ve χ 'nin terimleri yerine yazılırsa

$$t = \cosh 2x \quad dt = -2 \sinh 2x dx \quad [4.64]$$

elde edilir. Eş. 4.50'den

$$\begin{aligned} q = ip &= 2\sqrt{\cosh^2 x - 1}\phi \\ ip dx &= -2i \sinh 2x \phi \frac{dt}{(-2 \sinh 2x)} \\ \Psi(x) &= \exp\left(i \int p dx\right) = \exp\left(\int \phi dt\right) \end{aligned} \quad [4.65]$$

bulunur. Değerler yerine yazılırsa

$$\Psi(t) = \exp \int \left(\frac{b_1}{t-1} + \frac{b_1'}{t+1} + \frac{P_n'}{P_n} + \frac{i\zeta}{2} - \frac{t}{2(t^2-1)} \right) dt \quad [4.66]$$

olarak bulunur. Buradan ilk olarak, eğer M tek ise Eş. 4.66'da set-1 ve set-2 yerine konularak ve eğer M çift ise set-3 ile set-4 yerine konularak dalga fonksiyonu elde edilebilir. Şimdi χ 'nin Eş. 4.54'teki ifadesi 4.53'te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{b_1}{t-1} + \frac{b_1'}{t+1} + \frac{P_n'}{P_n} + \frac{i\zeta}{2} \\ \chi^2 &= \frac{b_1^2}{(t-1)^2} + \frac{2b_1b_1'}{(t-1)(t+1)} + \frac{2b_1}{(t-1)} \frac{P_n'}{P_n} + \frac{P_n'}{P_n} i\zeta + \frac{(b_1')^2}{(t+1)^2} \\ &\quad + \frac{2b_1'P_n'}{(t+1)P_n} + \frac{i\zeta b_1}{t-1} + \left(\frac{P_n'}{P_n} \right)^2 + \frac{i\zeta b_1'}{t+1} - \frac{\zeta^2}{4} \\ \frac{d\chi}{dt} &= -\frac{b_1}{(t-1)^2} - \frac{b_1'}{(t+1)^2} + \frac{P_n''}{P_n} - \left(\frac{P_n'}{P_n} \right)^2 \end{aligned}$$

dır. Bu ifadeler Eş. 4.53'te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{P_n''}{P_n} + 2 \frac{P_n'}{P_n} \left(\frac{b_1}{t-1} + \frac{b_1'}{t+1} + \frac{i\zeta}{2} \right) + \frac{b_1^2 - b_1}{(t-1)^2} + \frac{(b_1')^2 - b_1'}{(t+1)^2} + \frac{t^2 + 2}{4(t^2 - 1)^2} \\ + \frac{E + (\zeta t - iM)^2 + 8b_1 b_1' - 4\zeta^2(t^2 - 1)}{4(t^2 - 1)} + i\zeta \left(\frac{b_1}{t-1} + \frac{b_1'}{t+1} \right) = 0 \end{aligned} \quad [4.67]$$

elde edilir (20). Setler ile enerji özdeğerleri bulunurken, katsayı determinantları sıfıra eşitlenir. $M=3$ ve $M=2$ için öz değer ve özfonksiyonlar şu şekilde elde edilir :

Durum 1. $M=3$:

M 'nin tek olma durumudur.

Set 1:

$$b_1 = \frac{1}{4} \quad b_1' = \frac{1}{4} \quad \text{ve } n=1 \text{ dır.}$$

Burada P_n , birinci derece polinom anlamına gelen $(Bt + D)$ dır. Değerler Eş. 4.67'de yerine yazılır ve t 'nin farklı kuvvetlerine göre karşılaştırılarak, B ve D için 2×2 matrisi elde edilir. Değerler yerine aşağıdaki gibi yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{2B}{Bt + D} \left(\frac{1}{4(t-1)} + \frac{1}{4(t+1)} + \frac{i\zeta}{2} \right) + \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{4}}{(t-1)^2} + \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{4}}{(t+1)^2} \\ + \frac{E + \zeta^2 t^2 - 6i\zeta t - 9 + 1/2 - 4\zeta^2(t^2 - 1)}{4(t^2 - 1)} + i\zeta \left(\frac{1}{4(t-1)} + \frac{1}{4(t+1)} \right) = 0 \\ \frac{2B}{Bt + D} \left(\frac{2t + 2i\zeta(t^2 - 1)}{4(t^2 - 1)} \right) - \frac{3}{16(t-1)^2} - \frac{3}{16(t+1)^2} + \frac{t^2 + 2}{4(t^2 - 1)^2} \\ + \frac{E - 9 - 3\zeta^2 t^2 - 6i\zeta t + 1/2 + 4\zeta^2}{4(t^2 - 1)} + \frac{2i\zeta t}{4(t^2 - 1)} = 0 \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Şimdi ifadenin katsayılarını eşitleyebilmek için aşağıdaki gibi düzenlenirse

$$\frac{1}{4(t^2-1)} \left(\frac{4B}{Bt+D} (t+i\zeta t^2-i\zeta) \right) = -\frac{1}{4(t^2-1)} (E-9+4\zeta^2-4i\zeta t-3\zeta^2 t^2)$$

$$4Bt+4Bi\zeta t-4Bi\zeta = (E-9+4\zeta^2-4i\zeta t-3\zeta^2 t^2)Bt$$

$$+ (E-9+4\zeta^2-4i\zeta t-3\zeta^2 t^2)D$$

$$4Bt+4Bi\zeta t^2-4Bi\zeta = ((E-9+4\zeta^2)B-4i\zeta D)t + (-4i\zeta B-3\zeta^2 D)t^2 + (E-9+4\zeta^2)D$$

bulunur. Şimdi katsayılar birbirine eşitlenirse

$$4B = (E-9+4\zeta^2)B-4i\zeta D$$

$$4i\zeta B = -4i\zeta B-3\zeta^2 D$$

$$-4i\zeta B = (E-9+4\zeta^2)D$$

denklemleri elde edilir. Bu üç denklem düzenlenip, B ve D'nin katsayılarından 2×2 matrisi için

$$0 = \left(\frac{E-9+\zeta^2}{4} + 1 \right) B - i\zeta D \quad [4.68]$$

$$0 = -i\zeta B + \left(\frac{E-9+\zeta^2}{4} \right) D \quad [4.69]$$

bulunur ve buradan

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{E-9+\zeta^2}{4} & -i\zeta \\ -i\zeta & \frac{E-9+\zeta^2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = 0 \quad [4.70]$$

olur. Bu matrisin determinanı sıfıra eşitlenerek, enerji ve polinom ifadeleri elde edilir

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{E-9+\zeta^2}{4} & -i\zeta \\ -i\zeta & \frac{E-9+\zeta^2}{4} \end{vmatrix} = 0 \quad [4.71]$$

$$\left(1 + \frac{E-9+\zeta^2}{4}\right) \left(\frac{E-9+\zeta^2}{4}\right) + \zeta^2 = 0$$

$$\frac{E-9+\zeta^2}{4} + \frac{E^2-9E+E\zeta^2-9E+81-9\zeta^2+4E\zeta^2-36\zeta^2+4\zeta^4}{16} + \zeta^2 = 0$$

$$E^2 - 14E + 2E\zeta^2 - 2\zeta^2 + \zeta^4 + 45 = 0$$

$$E = 7 - \zeta^2 \mp 2\sqrt{1-4\zeta^2} \quad [4.72]$$

olarak enerji özdeğeri bulunmuş olur. Şimdi polinom ifadesi için

$$P_1 = Bt + D \quad [4.73]$$

olduğu hatırlanarak, katsayılarını eşitlediğimiz denklemlerden

$$4i\zeta D = -4B + \left(7 - \zeta^2 \pm 2\sqrt{1-4\zeta^2} - 9 + 4\zeta^2\right)B$$

$$D = \frac{B}{i\zeta} + \frac{\left(-2 \pm 2\sqrt{1-4\zeta^2}\right)}{4i\zeta} B \quad [4.74]$$

Eş. 4.74 bulunarak, 4.73'te yerine yazılıp düzenlenirse

$$P_1 = \frac{B}{2} \left(2t - \frac{i}{\zeta} (1 \pm \sqrt{1-4\zeta^2}) \right) \quad [4.75]$$

bulunur.

Şimdi dalga fonksiyonunu bulabilmek için, b_1 , b_1' ve P_1 'in değerleri Eş. 4.66'da yerine yazılırsa

$$\Psi(t) = \exp \left(\int \left(\frac{1}{4(t-1)} + \frac{1}{4(t+1)} + \frac{2}{2t - \frac{i}{\zeta}(1 \pm \sqrt{1-4\zeta^2})} + \frac{i\zeta}{2} - \frac{t}{2(t^2-1)} \right) dt \right)$$

$$\Psi(t) = \exp \left(\int \left(\frac{2\zeta}{2 + \zeta - i(1 \pm \sqrt{1-4\zeta^2})} + \frac{i\zeta}{2} \right) dt \right) \quad [4.76]$$

bulunur. Burada $t = \cosh 2x$ dönüşümü Eş. 4.76'ya uygulanır ve sonuç olarak aşağıdaki dalga fonksiyonu ifadesi bulunur

$$\Psi(x) = \exp \left(\int \left(\frac{2\zeta}{2 \cosh(2x)\zeta - i(1 \pm \sqrt{1-4\zeta^2})} + \frac{i\zeta}{2} \right) 2 \sinh(2x) dx \right)$$

$$= \exp \left(\int \left(\frac{4 \sinh(2x)}{2 \cosh(2x) - \frac{i}{\zeta}(1 \pm \sqrt{1-4\zeta^2})} + i\zeta \sinh 82x \right) dx \right)$$

$$= \exp \left(\ln \left(2 \cosh(2x) - \frac{i}{\zeta}(1 \pm \sqrt{1-4\zeta^2}) \right) + \frac{i\zeta}{2} \cosh(2x) \right)$$

$$\Psi(x) = e^{\frac{i\zeta}{2} \cosh 2x} \left(2 \cosh 2x - \frac{i}{\zeta}(1 \pm \sqrt{1-4\zeta^2}) \right) \quad [4.77]$$

sonucu bulunur (20).

Set 2:

$$b_1 = \frac{3}{4} \quad b_1' = \frac{3}{4} \quad \text{ve } n=0 \text{ dir.}$$

Burada $n=0$ olduğundan P bir sabittir. Eş. 4.67 'de buradaki değerler yerine yazılırsa

$$E = 5 - \zeta^2 \quad \Psi(x) = e^{\frac{i\zeta}{2} \cosh 2x} \sinh 2x \quad [4.78]$$

sonucu bulunur (21,22)

Durum 2. M=2 :

M'nin çift olma durumudur.

Set 3:

$$b_1 = \frac{1}{4} \quad b_1' = \frac{3}{4} \quad \text{ve } n=0 \text{ dır.}$$

Benzer şekilde elde edilen özdeğer ve özfonksiyon

$$E = 3 - \zeta^2 + 2i\zeta \quad \Psi(x) = e^{\frac{i\zeta}{2} \cosh 2x} (\cosh 2x + 1)^{1/2} \quad [4.79]$$

elde edilir.

Set 4:

$$b_1 = \frac{3}{4} \quad b_1' = \frac{1}{4} \quad \text{ve } n=0 \text{ dır.}$$

Bu durumda elde edilenler

$$E = 3 - \zeta^2 - 2i\zeta \quad \Psi(x) = e^{\frac{i\zeta}{2} \cosh 2x} (\cosh 2x - 1)^{1/2} \quad [4.80]$$

dır. Böylece, Khare Mandal potansiyeli için M'nin pozitif değerinin çift yada tek olmasına göre özfonksiyon ve özdeğerin bulunabileceği görülmüştür (20).

Çizelge 4.1 Bu çizelge, Khare Mandal modeli için b_1 ve b_1' 'nin her bir kombinasyonu için χ 'nin çok kutbunun sayısı ve ŞÇ şartlarını gösterir.

Set	$b_1 \ b_1'$	$n=\lambda - b_1 - b_1'$	M'nin şartı	ŞÇ şartı
1	1/4 1/4	M/2 - 1/2	M = tek , $M \geq 1$	$M = 2n + 1$
2	3/4 3/4	M/2 - 3/2	M = tek , $M \geq 3$	$M = 2n + 3$
3	3/4 1/4	M/2 - 1	M = çift , $M \geq 2$	$M = 2n + 1$
4	1/4 3/4	M/2 - 1	M = çift , $M \geq 2$	$M = 2n + 1$

4.3.4 Rosen Morse Potansiyeli

Bu kesimde hiper geometrik sınıftaki çözülebilir potansiyellerin üzerinde çalışılmıştır .

Rosen Morse potansiyel ifadesi

$$V(x) = A^2 - A(A + \alpha) \sec h^2(\alpha x) \quad [4.81]$$

dır (17). Burada $A > 0$ dır. İlk olarak aşağıdaki değişken dönüşümü

$$y = \tanh(\alpha x)$$

uygulanarak ve Eş. 4.7'ü kullanarak χ için ilk denklem

$$\chi^2 + \frac{d\chi}{dy} + \frac{E - A^2 + \alpha^2}{\alpha^2(1 - y^2)^2} + \frac{A(A + \alpha)}{\alpha^2(1 - y^2)} = 0 \quad [4.82]$$

elde edilir. n. uyarılmış durum için kuantum mekanik fonksiyon, $y = \pm 1$ 'de sabit kutba sahip olacaktır. Sonlu kompleks düzlemde farklı singuler nokta olmadığı varsayılır. Bundan sonra harmonik titreşiciyle aynı yönde ilk olarak $\chi(y)$ yazılır. Buradan

$$\chi(y) = \frac{b_1}{y - 1} + \frac{b_1'}{y + 1} + C \quad [4.83]$$

yaklaşımı yapılır. Burada, $y = \pm 1$ 'den kalan b_1 ve b_1' dır. $\chi(y)$ civarındaki her bir kutbun Laurent açılımını yaparak ve onu $\chi(y)$ için KHJ denkleminde yerine koyarak bu kutuplardaki kalanlar elde edilir. Bu değerler

$$b_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{A^2 - E}}{2\alpha} \quad \text{ve} \quad b_1' = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{A^2 - E}}{2\alpha} \quad [4.84]$$

olarak bulunur. Karekökün işaretindeki belirsizlik sınır şartı uygulanarak ortadan kaldırılır. Bu sınır şartı

$$\lim_{E \rightarrow 0} q(y) = -W(y) \quad [4.85]$$

dır. Burada

$$W = a \tanh(\alpha x) \quad [4.86]$$

süper potansiyeldir. Böylece ilk olarak elde edilen doğru kalanlar

$$b_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{A^2 - E}}{2\alpha} \quad b_1' = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{A^2 - E}}{2\alpha} \quad [4.87]$$

şeklindedir. b_1 ve b_1' 'nin değerleri $\chi(y)$ 'de, $\chi(y)$ ise Eş. 4.82'da yerine yazılır ve büyük y 'ler için $\frac{1}{y}$ 'nin katsayılarıyla $\frac{1}{y^2}$ 'nin karşılaştırılır. Buradan

$$C=0 \quad [4.88]$$

ve

$$E = A^2 - (A - n\alpha)^2 \quad [4.89]$$

bulunur. Bu durumda diferansiyel denklem

$$\frac{P''}{P} + 2\frac{P'}{P}y \left(\frac{\alpha + \sqrt{A^2 - E}}{\alpha(y^2 - 1)} \right) + \frac{(\alpha + \sqrt{A^2 - E})^2}{2\alpha^2(y^2 - 1)} - \frac{E - A^2 + \alpha^2}{2\alpha^2(y^2 - 1)} - \frac{A(A + \alpha)}{\alpha^2(y^2 - 1)} = 0 \quad [4.90]$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki denklemde enerji özdeğerinin yerine konulmasıyla P için Jacobi diferansiyel denklemi

$$(1 - y^2)P'' - y(\mu + \nu + 2)P' + n(\mu + \nu + n + 1)P = 0. \quad [4.91]$$

olur. Böylece P , $P_n^{\mu, \nu}$ şeklinde Jacobi polinomu olarak temsil edilir. Burada

$$\mu = \nu = \frac{A}{\alpha} - n \quad [4.92]$$

dır. Sınır durum dalga fonksiyonu, değişken dönüşümü yapılarak ve Eş. 4.7 ifadesi kullanılarak

$$\Psi(y) = \exp \left(\int \left(\chi(y) + \frac{y}{1 - y^2} \right) dy \right) \quad [4.93]$$

bulunur ve burada $\chi(y)$

$$\chi(y) = \frac{\alpha + \sqrt{A^2 - E}}{2\alpha(y-1)} + \frac{\alpha + \sqrt{A^2 - E}}{2\alpha(y+1)} + \frac{P'}{P} \quad [4.94]$$

dır. Böylece sınır durum fonksiyonunda bu dönüşüm yapılırsa

$$\Psi_n(y) = N(1-y)^{\mu/2}(1+y)^{\nu/2} P_n^{\mu,\nu} \quad [4.95]$$

sonucu elde edilir (17).

4.3.5 Scarf-I Potansiyeli

Scarf-I potansiyeli

$$V_-(x) = -A^2 + (A^2 + B^2 - A\alpha\hbar)\sec^2(\alpha x) - B(2A - \alpha\hbar)\tan(\alpha x)\sec(\alpha x) \quad [4.96]$$

şeklinde temsil edilir (17). Bu potansiyel için, süper simetrisi tam olarak bilinen parametre dizisi

$$(A-B) \gg 0, \quad (A+B) \gg 0 \quad [4.97]$$

dır ve dizideki bozulma olarak

$$(A-B) \gg 0, \quad (A+B) \ll 0 \quad [4.98]$$

bilinir. Bundan sonra Leacock ve Padgett sınır şartı (18,19)

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} p \rightarrow P_{Cl} \quad [4.99]$$

olarak uygulanır ve $\hbar$ sabit tutulup p ile q KHJ denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} q^2 + \hbar \frac{dq}{dx} + E + A^2 - (A^2 + B^2 - A\alpha\hbar)\sec^2(\alpha x) \\ + B(2A - \alpha\hbar)\tan(\alpha x)\sec(\alpha x) = 0 \end{aligned} \quad [4.100]$$

bulunur. Şimdi aşağıdaki değişken dönüşümü

$$y = \sin(\alpha x) \quad [4.101]$$

yapılarak benzer şekilde q 'nın yerine χ yazılırsa

$$\chi^2 + \hbar \frac{d\chi}{dy} + \frac{y^2 \hbar^2}{4(1-y^2)^2} + \frac{E + A^2}{\alpha^2(1-y^2)} + \frac{\alpha^2 \hbar^2 - 2(A^2 + B^2 - A\alpha\hbar)}{2\alpha^2(1-y^2)^2} + \frac{B(2A - \alpha\hbar)y}{\alpha^2(1-y^2)^2} = 0 \quad [4.102]$$

elde edilir. Bu ya da daha önceki uygulamalarda yapıldığı gibi ilerleyerek $y = \pm 1$ 'deki sabit kutuplar ve reel düzlemdeki çok kutuptan başka, sonlu kompleks düzlemde singüler noktaların olmadığı varsayılır. Böylece $\chi(y)$

$$\chi(y) = \frac{b_1}{y-1} + \frac{b_1'}{y+1} + \hbar \frac{P'}{P} + C \quad [4.103]$$

olur. b_1 ve b_1' sırasıyla $y = \pm 1$ 'den kalanlardır. Önceki durumdan elde edilen b_1 ve b_1' değerleri ve $y=1$ 'deki kalanın iki değeri

$$b_1 = \frac{(A-B)}{2\alpha} + \frac{\hbar}{4} \quad \text{ve} \quad -\frac{(A-B)}{2\alpha} + \frac{3\hbar}{4} \quad [4.104]$$

bulunur. $y=-1$ 'deki kalanın iki değeri

$$b_1' = \frac{(A-B)}{2\alpha} + \frac{\hbar}{4} \quad \text{ve} \quad -\frac{(A-B)}{2\alpha} + \frac{3\hbar}{4} \quad [4.105]$$

dır. b_1 ve b_1' 'nün farklı çiftleri süper simetrinin iki aşamasında da fiziksel anlamlı çözümler verir. A ve B 'nin bu dizisi için sınır şartı, $\lim_{\hbar \rightarrow 0}$ da $b_1 > 0$ ve $b_1' > 0$ anlamına gelir (17).

Durum 1:

$$A + B > 0, \quad A - B > 0$$

Parametrelerinin bu dizileri için kalanlardan seçim yapılırsa

$$b_1 = \frac{(A-B)}{2\alpha} + \frac{\hbar}{4}, \quad b_1' = \frac{(A+B)}{2\alpha} + \frac{\hbar}{4} \quad [4.106]$$

dır. Böylece Eş. 4.103 ifadesindeki χ

$$\chi(y) = \left(\frac{A-B}{2\alpha} + \frac{\hbar}{4} \right) \frac{1}{y-1} + \left(\frac{A+B}{2\alpha} + \frac{\hbar}{4} \right) \frac{1}{y+1} + \frac{P'}{P} \quad [4.107]$$

olur ve $\hbar = 1$ alınıp, bu ifade Eş. 4.102'da yerine yazılırsa, aşağıdaki enerji özdeğeri

$$E_n = (A + n\alpha)^2 - A^2 \quad [4.108]$$

bulunur. P'ye göre diferansiyel denklemin ifadesi

$$(1-y^2)P'' + (\mu - \nu + (\mu + \nu + 1)y)P' + n(n + \nu + \mu)P = 0 \quad [4.109]$$

dır. Burada

$$\mu = \frac{A-B}{\alpha}, \quad \nu = \frac{A+B}{\alpha} \quad [4.110]$$

dır.

Tam süper simetri olduğu zaman sınır durum dalga fonksiyonu

$$\Psi_n(y) = N(1-y)^{\mu/2}(1+y)^{\nu/2} P_n^{\mu-1/2, \nu-1/2}(y) \quad [4.111]$$

olur (17).

Durum 2:

$$A-B > 0, \quad A+B < 0$$

Parametrelerinin bu dizileri için kalanlardan uygun seçim yapılırsa

$$b_1 = \frac{A-B}{2\alpha} + \frac{\hbar}{4}, \quad b_1' = -\frac{(A+B)}{2\alpha} + \frac{3\hbar}{4} \quad [4.112]$$

bulunur. b_1 ve b_1' değerleri, χ 'de, χ ise Eş. 4.102'da yerine yazılırsa ve $\hbar = 1$ alınırsa, enerji özdeğeri

$$E = \left(B - \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha \right)^2 - A^2 \quad [4.113]$$

olarak elde edilir ve diferansiyel denklem P'ye göre yazılırsa

$$(1-y^2)P'' + (-y(\mu+\nu+2) + (\mu+\nu+1))P' + n(n+\nu+1+\mu)P = 0 \quad [4.114]$$

sonucu bulunur ve sınır durum dalga fonksiyonu

$$\Psi_n(y) = N(1-y)^{\mu/2}(1+y)^{\frac{\nu-1}{2}} P_n^{\nu+1/2, \mu-1/2}(y) \quad [4.115]$$

olarak bulunur. Burada

$$\mu = \frac{A-B}{\alpha}, \quad \nu = \frac{A+B}{\alpha} \quad [4.116]$$

dır (17).

4.3.6 Scarf-II Potansiyeli

Scarf-II potansiyeli

$$V = A \sec h^2 x + iB \sec hx \tanh x \quad [4.117]$$

şeklinde temsil edildiği önceden belirtilmişti. q'nun terimleri KHJ denklemindekine

benzer. Burada $q = \frac{d \ln \Psi}{dx}$ dır. KHJ denklemini yazılırsa

$$q^2 + \frac{dq}{dx} + E - A \sec h^2 x - iB \sec hx \tanh x = 0 \quad [4.118]$$

bulunur. $y = i \sinh x$ değişken dönüşümü ile χ için ilk KHJ denklemi

$$\chi^2 + \frac{d\chi}{dy} + \frac{2+y^2}{4(1-y^2)^2} - \frac{E}{1-y^2} - \frac{A-By}{(1-y^2)^2} = 0 \quad [4.119]$$

elde edilir. Burada

$$\chi = \left(\phi - \frac{y}{2(1-y^2)} \right), \quad q = i\sqrt{1-y^2} \phi \quad [4.120]$$

dır. $y = 1$ ve $y = -1$ deki rezidü sırasıyla

$$b_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + A - B} \quad [4.121]$$

ve

$$b_1' = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + A + B} \quad [4.122]$$

bulunur. Eş. 4.58' e göre χ 'nin sonsuzdaki davranışından

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-E} \quad [4.123]$$

olur. İlk kısımda yapıldığı gibi χ 'nin analitik ve singuler kısımları ayrılabilir

$$\chi = \frac{b_1}{y-1} + \frac{b_1'}{y+1} + \frac{P_n'}{P_n} + C \quad [4.124]$$

burada C, χ 'nin analitik kısmıdır. Çok büyük y 'ler için χ 'nin temel davranışı $\frac{b_1 + b_1' + n}{y}$ formundadır. Bu $\frac{1}{y}$ 'nin katsayısı, Eş. 4.123' deki λ ile eşit olabilir.

Yani

$$b_1 + b_1' + n = \lambda \quad [4.125]$$

dır. Bu, enerji özdeğerini

$$-E = \left(b_1 + b_1' + n - \frac{1}{2} \right)^2 \quad [4.126]$$

şeklinde verir. χ 'nin terimlerine göre dalga fonksiyonu

$$\Psi(y) = \exp \left(\int \left(\frac{b_1}{y-1} + \frac{b_1'}{y+1} + \frac{P_n'}{P_n} + \frac{y}{2(1-y^2)} \right) dy \right) \quad [4.127]$$

bulunur. Bu fonksiyonda değerler yerine yazılırsa

$$\Psi(y) = (y-1)^{-p}(y+1)^{-q} P_n(y) \quad [4.128]$$

sonucu bulunur. Burada, $-p = b_1 - \frac{1}{4}$ ve $-q = b_1' - \frac{1}{4}$ dır. Eş. 4.119'te 4.124 yerine yazılarak aşağıdaki polinomal diferansiyel denklem

$$P_n'' + 2P_n' \left(\frac{b_1}{y-1} + \frac{b_1'}{y+1} \right) + G(y)P_n = 0 \quad [4.129]$$

elde edilir. Burada

$$G(y) = \frac{((4(b_1^2 - b_1 + (b_1')^2 - b_1') + 1 + 4E)y^2 + 2y(4(b_1^2 - b_1 - (b_1')^2 + b_1)) + 2B) + (2 - 4A - 4E)}{(y^2 - 1)^2} + \frac{4(b_1^2 - b_1 + (b_1')^2 - b_1')}{(y^2 - 1)^2}. \quad [4.130]$$

dır. Eş. 4.129'te Eş. 4.126 ifadesi yerine yazılırsa, diferansiyel denklem aşağıdaki gibi

$$(1 - y^2)P'' + (2(b_1 - b_1') - 2(b_1 + b_1')y)P' + n(n + 2(b_1 + b_1' - 1) + 1)P = 0 \quad [4.131]$$

olur. Bu Jacobi diferansiyel denklemini türündedir ve $P_n^{2b_1-1, 2b_1'-1}(y)$ Jacobi polinomudur. Buradan dalga fonksiyonu için tam bir ifade

$$\Psi(x) = (i \sinh x - 1)^{b_1 - \frac{1}{4}} (i \sinh x + 1)^{b_1' - \frac{1}{4}} P_n^{2b_1-1, 2b_1'-1}(i \sinh x) \quad [4.132]$$

olarak yazılabilir. Potansiyel ifadesindeki A ve B parametrelerini hesaba katarak iki durum incelenecektir

Durum 1: $|B| > A + \frac{1}{4}$

A ve B'deki bu sınırlama ile $y = \pm 1$ 'deki rezidü, $b_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{B - A - \frac{1}{4}}$ ve

$b_1' = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{A + B + \frac{1}{4}}$ bulunur. $y \rightarrow \infty$ limitinde Eş. 4.128'deki dalga fonksiyonu

$$\Psi(y) \approx y^{b_1 + b_1' \cdot \frac{1}{2} + n} \quad [4.133]$$

biçiminde ifade edilir. Yukarıdaki denklemde b_1 ve b_1' 'nin yerine yazılmasıyla

$$\Psi(y) \approx y^{\pm \frac{i}{2} \sqrt{B-A-\frac{1}{4}}} y^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{A+B+\frac{1}{4}} + n} \quad [4.134]$$

bulunur. $b_1' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{A+B+\frac{1}{4}}$ olmak üzere, büyük y 'ler için $\Psi(y)$ sıfıra gider.

Buradan rezidünün seçimi şöyle olacaktır

$$b_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{B-A-\frac{1}{4}} \quad , \quad b_1' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{A+B+\frac{1}{4}} \quad [4.135]$$

n 'deki sınırlama

$$n < \frac{1}{2} \sqrt{A+B+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \quad [4.136]$$

dır. Sabit kutuptaki rezidünün değeri için Ψ

$$\Psi = (i \sinh x - 1)^{\frac{1}{4} \pm \frac{ir}{2}} (i \sinh x + 1)^{\frac{1}{4} - \frac{s}{2}} P_n^{\pm ir, s}(i \sinh x) \quad [4.137]$$

olarak alınır ve burada, $r = \sqrt{B-A-\frac{1}{4}}$ ve $s = \sqrt{A+B+\frac{1}{4}}$ dır. Enerji özdeğeri ifadesi

$$E = - \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{A+B+\frac{1}{4}} \pm i \sqrt{B-A-\frac{1}{4}} \right) \right)^2 \quad [4.138]$$

olarak elde edilir. Bu n 'deki sınırlama

$$n < \frac{1}{2} \sqrt{A+B+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \sqrt{A-B+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \quad [4.139]$$

dır (20).

Durum 2: $|B| \leq A + \frac{1}{4}$

Benzer şekilde yukarıdaki metot uygulanırsa rezidünün değeri

$$b_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + A - B} \quad , \quad b_1' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} + A + B} \quad [4.140]$$

bulunur. Elde edilen dalga fonksiyonu

$$\Psi = (i \sinh x - 1)^{\frac{1-\mu}{2}} (i \sinh x + 1)^{\frac{1-\nu}{2}} P_n^{-\mu, \nu}(i \sinh x) \quad [4.141]$$

dır. burada, $\mu = \sqrt{\frac{1}{4} + A - B}$ ve $\nu = \sqrt{\frac{1}{4} + A + B}$ dır.

Enerji özdeğeri olarak

$$E = - \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{4} + A - B} + \sqrt{\frac{1}{4} + A + B} \right) \right)^2 \quad [4.142]$$

sonucu bulunur (20).

Scarf-II potansiyeli için burada elde edilen sonuçlar, bölüm 3'te elde edilen sonuçlarla aynıdır. Bu durum, farklı yaklaşımlar ile Darboux dönüşümünü kullanarak aynı sonuçların elde edildiğinin bir göstergesidir.

5.SÜPER SİMETRİK WENTZEL KRAMERS BRILLOUIN YAKLAŞIMI

Klasik ve kuantum mekaniksel sistemlerin etkileşme potansiyelleri oldukça fazla olmasına rağmen tam çözümlerinin sayısı oldukça azdır. Genel olarak bu etkileşmeler için relativistik olmayan Schrödinger denkleminin tam analitik çözümleri parmakla sayılabilecek kadar az sistem için yapılabilmektedir. Bu yüzden birçok sistemi aydınlatabilmek ve karşılık gelen denklemleri çözebilmek için yaklaşım metotları kullanılmaktadır. Söz konusu yaklaşım metotlarından bazıları, pertürbasyon, varyasyon, Wentzel Kramers Brillouin(WKB) metotlarıdır (24). Çalışmanın bu kesiminde, Darboux yaklaşımı yardımı ile SWKB metodu incelenecektir.

5.1 SWKB Kuantumlanma Şartı

Bir boyutlu $V(x)$ potansiyel çukuru için WKB kuantizasyon şartı

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(E_n^{WKB} - V(x))} dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \hbar, \quad (n=0,1,2,\dots) \quad [5.1]$$

dır. Burada x_1 ve x_2 , klasik dönüm noktası olarak adlandırılır

$$E_n^{WKB} = V(x_1) = V(x_2). \quad [5.2]$$

Süper simetrik kuantum mekaniği yaklaşımında enerji skalaları farklıdır. Temel durumda enerjisi sıfıra çekilir. Potansiyel ifadesi

$$V_1(x) = V(x) - E_0 \quad [5.3]$$

biçimindedir ve temel durum için Schrödinger denklemi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_0(x)}{dx^2} + V_1(x) \psi_0(x) = 0 \quad [5.4]$$

olur. Şimdi süper potansiyel ifadesi tanımlanırsa

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\Psi_0'(x)}{\Psi_0(x)} \quad [5.5]$$

olur. Buna göre

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad [5.6]$$

bulunur. Şimdi, Eş. 5.3'te 5.6'yı ve sonra Eş. 5.1'de yerine yazılırsa

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m \left[E_n^{(1)SWKB} - W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \right]} dx = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \hbar \quad [5.7]$$

elde edilir. Burada $E_n^{(1)SWKB} = E_n^{SWKB} - E_0$ dır. Bu enerji $V_1(x)$ potansiyeli için n. durumun SWKB enerjisidir. Eş. 5.7 'nin sol tarafı $\hbar$ 'nın kuvvetlerine göre açılırsa, $V_1(x)$ için SWKB kuantizasyon şartı

$$\int_c^d \sqrt{2m \left[E_n^{(1)SWKB} - W^2(x) \right]} dx = n\pi\hbar, \quad (n=0,1,2,\dots) \quad [5.8]$$

olarak bulunur. aslında bu ifade serinin ilk terimidir. Burada c ve d dönüm noktası olarak

$$\sqrt{E_n^{(1)SWKB}} = -W(c) = W(d) \quad [5.9]$$

gibi tanımlanır. Süper simetrik kuantum mekaniğinde $V_2(x)$ olarak tanımlanan potansiyele $V_1(x)$, eş potansiyeldir

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad [5.10]$$

Benzer şekilde, Eş. 5.10 Eş. 5.1'de yerine yazılırsa $V_2(x)$ için SWKB kuantizasyon şartı

$$\int_c^d \sqrt{2m \left[E_n^{(2)SWKB} - W^2(x) \right]} dx = (n+1)\pi\hbar, \quad (n=0,1,2,\dots) \quad [5.11]$$

olarak elde edilir (24).

5.2 Sözde Harmonik ve Mie Tip Potansiyeller için SWKB Çözümleri

Süper simetrik WKB metodu , analitik çözülebilir potansiyellerin spektrumunu üretmek için çok yararlı olan tekniklerden biridir (23).

Burada, üç boyutlu harmonik olmayan titreşici incelenecektir. Morse potansiyeli genellikle harmonik olmayan titreşici için kullanılmıştır. Bu nedenle , potansiyel orijinde sıfır olmaz. Fakat, Mie tip ve sözde harmonik potansiyel için böyle bir sorun yoktur. Ayrıca , lineer ve lineer olmayan sistemlerin enerji spektrumları için sözde harmonik potansiyel kullanılmıştır.

Şimdi, relativistik olmayan Hamiltoniyen yazılırsa

$$\tilde{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad [5.12]$$

olur ve $\tilde{E}_0$ gerçek temel durum enerjisi; $\tilde{\phi}_0$, $\tilde{H}$ 'nin uygun öz fonksiyonudur. Süper simetrik kuantum mekaniğinde Hamiltoniyenin yapısı $H = \tilde{H} - \tilde{E}_0$ şeklindedir ve H'nin temel durum enerjisi sıfırdır. Hamiltonyen çiftinin her ikisi de şu formda yazılırsa

$$H \equiv H_{\pm} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_{\pm}(x) \quad [5.13]$$

olur ve temel durum için Schrödinger denklemi

$$H_- \phi_0(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_-(x) \right) \phi_0(x) = 0 \quad [5.14]$$

dır. Sonuç olarak

$$H_- = \frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\phi_0''(x)}{\phi_0(x)} \right) \quad [5.15]$$

bulunur. Burada $\phi_0(x)$, H_- 'nin normalize edilmiş temel durum özfonksiyonudur. Normal süper simetri için $H = H_-$ seçmek uygundur. E_0^- durumu hariç H_- 'nin spektrumu H_+ ile aynıdır.

Bunlara dayanarak aşağıdaki işlemci ifadeleri

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{d}{dx} - \frac{\phi_0'}{\phi_0} \right) \quad [5.16.a]$$

yazılabilir ve bu işlemcinin hermityen eşleniği

$$A^+ = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(-\frac{d}{dx} - \frac{\phi_0'}{\phi_0} \right) \quad [5.16.b]$$

şeklindedir. Buradan

$$A^+ A = H_-,$$

$$A A^+ = H_+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_+(x), \quad [5.17]$$

$$V_+(x) = V_-(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\phi_0'}{\phi_0} \right) \quad [5.18]$$

sonuçları elde edilir.

V_+ ve V_- potansiyelleri süper simetrik yardımcı potansiyel olarak adlandırılır. Aynı zamanda gerçek potansiyel V için, $V_- = V - \tilde{E}_0$ bağıntısı yazılabilir.

Bu pratik olarak süper potansiyel $W(x)$ şeklinde gösterilir. ϕ_0 , H_- 'nin temel durum özfonksiyonudur. $W(x)$ ile ϕ_0 arasındaki bağıntı Eş. 5.5'te gösterildiği gibi

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{\phi_0'}{\phi_0} \right) \quad [5.19]$$

şeklindedir ve buradan $H_{\pm}$ Hamiltonyen çifti yazılırsa

$$H_{\pm} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + W^2(x) \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad [5.20]$$

olur. Eş. 5.20'deki potansiyel için Riccati denkleminin çözülmesiyle $W(x)$ bulunur

$$V_{\pm}(x) = W^2(x) \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad [5.21]$$

H_{+} için SWKB kuantumlanma şartı

$$\int_a^b \left[2m(E_n^+ - W^2(x)) \right]^{1/2} dx = (n+1)\pi\hbar, \quad (n=0,1,2,\dots) \quad [5.22]$$

olarak elde edilir. Burada $E_{\pm}$, $V_{\pm}$ süper simetrik eş potansiyelinin enerji özdeğeridir (23).

İlk olarak Mie tip potansiyelin bir özel durumunu göz önüne alarak, bu yöntemi uygulayabiliriz. Mie tip potansiyelin genel gösterimi

$$V(r) = D_0 \left[\frac{n}{m-n} \left(\frac{\sigma}{r} \right)^m - \frac{m}{m-n} \left(\frac{\sigma}{r} \right)^n \right] \quad [5.23]$$

olarak temsil edilir. Burada D_0 , $r = \sigma$ 'da iki atomlu moleküler sistemlerde, moleküller arası etkileşim enerjisidir ve $m > n$ iken daima bu ifade doğru sonuç verir. Eğer $m=2n$ ve $n=1$ yapılırsa Eş. 5.23 ifadesi indirgenmiş olur. Yani

$$\begin{aligned} V(r) &= D_0 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^2 - 2D_0 \left(\frac{\sigma}{r} \right) \\ &= \frac{D_0 \sigma^2}{r^2} - \frac{2D_0 \sigma}{r} \\ V(r) &= \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} \end{aligned} \quad [5.24]$$

olur. Burada $A = D_0\sigma^2$ ve $B = 2D_0\sigma$ dir. $r = \sigma$ 'da bir tekil minimum meydana gelir ve enerji $-D_0$ değerinde olur.

V_{et} potansiyeli için Hamiltoniyen

$$H_{et} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} + \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} \quad [5.25]$$

die. Eş. 5.21 ve 5.24'ten, Eş. 5.25 için

$$W(r) = \frac{B/2}{\alpha + (\alpha^2 + C)^{1/2}} - \frac{\alpha + (\alpha^2 + C)^{1/2}}{r} \quad [5.26]$$

ilk olarak bulunan süper potansiyeldir. Burada $\alpha = (\hbar^2 / 8m)^{1/2}$ ve $C = [\ell(\ell+1)\hbar^2 + 2mA] / 2m$ dir. Eş. 5.20 ve 5. 26'dan etkin Hamiltonyen tekrar yazılabilir

$$H_{et} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + W^2(r) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(r) - \frac{B^2/4}{[\alpha + (\alpha^2 + C)^{1/2}]^2} . \quad [5.27]$$

Eş. 5.8 ve 5.27'den, Eş. 5.24'ün tam spektrumu

$$E_n = - \left(\frac{B/2\alpha}{2n+1 + \left[(2\ell+1)^2 + A/\alpha^2 \right]^{1/2}} \right)^2 , (n=0,1,2,\dots) \quad [5.28]$$

olarak elde edilir (23) ve Eş. 5.19 ve 5.26'dan, Eş. 5.24'ün tam temel durum dalga fonksiyonu Langer düzeltmesiyle (25) birlikte

$$\phi_0^- = r^{1/2 \left\{ 1 + \left[(2\ell+1)^2 + A/\alpha^2 \right]^{1/2} \right\}} \exp \left(- \frac{Br/4\alpha^2}{1 + \left[(2\ell+1)^2 + A/\alpha^2 \right]^{1/2}} \right) \quad [5.29]$$

şeklindedir. Eş. 5.24'deki potansiyelin standart WKB sonucu

$$E_n = - \left(\frac{B/2\alpha}{2n+1 + [4\ell(\ell+1) + A/\alpha^2]^{1/2}} \right)^{1/2}, \quad (n=0,1,2,\dots) \quad [5.30]$$

olarak bulunur (23).

İkinci uygulama, SWKB'nin uygulanmasıyla sözde harmonik potansiyelin tam spektrumunun elde edilmesidir. Bu potansiyel

$$V(r) = V_0 \left(\frac{r}{r_0} - \frac{r_0}{r} \right)^2 \quad [5.31]$$

dır. Bu hesaplanırken, iki atomlu moleküllerin titreşim enerjileri ve dengedeki bağ uzunluğu r_0 kullanılmıştır. Burada kuvvet sabiti $k = 8V_0/r_0^2$ 'dır. Etkin Hamiltoniyen

$$H_{et} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} + Br^2 + \frac{A}{r^2} - 2V_0 \quad [5.32]$$

şeklindedir ve burada $A = V_0 r_0^2$ ve $B = V_0/r_0^2$ 'dır. Eş. 5.31 için çekici potansiyel

$$W(r) = \sqrt{Br} - \frac{\alpha + (\alpha^2 + C)^{1/2}}{r}, \quad [5.33]$$

olarak bulunur. Burada $C = [\ell(\ell+1)\hbar^2 + 2mA]/2m$ 'dır. H_{et} tekrar yazılırsa

$$H_{et} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + W^2(r) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(r) + 2\sqrt{B} [\alpha + (\alpha^2 + C)^{1/2}] - 2V_0 \quad [5.34]$$

olur. Eş. 5.8 ve 5.34'ten , Eş. 5.31'deki potansiyelin tam spektrumu aşağıdaki gibi

$$E_n = 2\alpha\sqrt{B} \left\{ 4n + 2 + \left[(2\ell+1)^2 + A/\alpha^2 \right]^{1/2} \right\} - 2V_0, \quad (n=0,1,2,\dots) \quad [5.35]$$

elde edilir. Eş. 5.19 ile 5.33'den Eş. 5.31'in temel durum dalga fonksiyonu

$$\phi_0^- = r^{1/2} \left(1 + \left[(2\ell+1)^2 + A/\alpha^2 \right]^{1/2} \right) \exp \left(-\frac{\sqrt{B}r^2}{4\alpha} \right) \quad [5.36]$$

dır. Eş.5.31'deki potansiyelin standart WKB sonucu

$$E_n = 2\alpha\sqrt{B}\left(4n+2+\left[4\ell(\ell+1)+A/\alpha^2\right]^{1/2}\right)-2V_0, \quad (n=0,1,2,\dots) \quad [5.37]$$

şeklindedir (23). WKB çözümündeki Eş. 5.37'de $\ell(\ell+1)$ 'in yerine $(\ell+1/2)^2$ 'nin gelmesi SWKB çözümündeki Eş.5.35 denklemiyle aynı sonucu verir ki bu yukarıda elde edilmiş Mie tip potansiyelin sonucu gibidir. Eş. 5.32 ve 5.35'in herhangi birinde $A=0$ alınırsa, bu eşitlikler, üç boyutlu harmonik titreşici potansiyelinin tam enerji spektrumu haline gelir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Genel olarak bu çalışmada; analitik olarak çözülemeyen denklemleri, çözülebilir hale getiren Darboux dönüşümü ifade edilip uygulamaları yapılmıştır. Yani başlangıçtaki çözülemeyen denklemden bu dönüşüm sayesinde çözülebilir bir denklem elde edilmiştir. Elde edilen bu türdeki seçilmiş bazı denklemler çözülerek sonuçları yorumlanmış ve kuantum mekanik sistemlere uygunluğu tartışılmıştır.

Süper simetrik kuantum mekaniğinde bu dönüşümle ilgili olan işlemciler verilerek süper potansiyelin nasıl elde edileceği görülmüştür.

İlk olarak Darboux dönüşümü Hulthen potansiyeline uygulanarak Darboux potansiyeli elde edilerek sonucun doğru olduğu görülmüştür.

Darboux dönüşümü genelleştirilerek analitik olarak çözülemeyen sistemlere çeşitli durumlarda uygulanabilir hale getirilmiştir. Bu genelleştirilmiş Darboux dönüşümü, bir boyutlu harmonik titreşici sisteme uygulanarak yeni bir benzer spektrumlu potansiyel elde edilmiştir. Bulunan sonucun spektrumunun baştaki sistemin spektrumu ile benzer olduğu görülmüştür.

Genel süper simetri formalizmi verilerek, bir parçacığın temel özfonksiyonundan üst seviyeye uyarılmış durumdaki özfonksiyonun nasıl bulunacağı gösterilmiştir.

Darboux dönüşümü, PT simetrik bir potansiyel olan Scarf-II potansiyeline uygulanarak benzer spektrumlu eş potansiyeli bulunmuştur. Bu sonuç yardımıyla, farklı durumlar için enerji özdeğeri ve özfonksiyonları bulunmuştur. Bunlar başlıca kuantum sayıları için analiz edilerek sonuçların uygunluğu görülmüştür.

Darboux dönüşümü, KHJ yaklaşımı ve uygulamaları için kullanılmıştır. Periyodik potansiyellerin çözümü için kullanılan KHJ metodunun uygulanması ile Darboux dönüşümünün önemi vurgulanmıştır.

Darboux dönüşümü sayesinde çözülebilir hale getirilen denklemler genelde Riccati denklemi formundadır. KHJ metodunda Riccati denklemi çeşitli potansiyeller için çözümlere sonuçların doğruluğu görülmüştür.

KHJ metodunun uygulamalarından elde edilen sonuçlar, bu konuda yurtdışında çalışan bilim adamları ile elektronik posta aracılığı ile tartışılmış ve doğruluğu görülmüştür. Bu elektronik postalar, çalışmaya ek olarak verilmiştir.

Analitik olarak çözilemeyen türdeki Schrödinger denklemlerinin bir çözüm yolu olan SWKB metodu üzerinde çalışılmıştır. Burada Darboux dönüşümünün etkisi görülmüştür. Bu yöntem farklı potansiyellere uygulanarak Darboux dönüşümü sayesinde süper potansiyel bağıntısı bulunmuştur. Bu bağıntı yardımıyla sistemin tam spektrumu ve özfonksiyonu elde edilmiştir.

Sonuç olarak, bu çalışma ile analitik olmayan Schrödinger denklemi çözümlere bu alanda çalışanlar için Darboux dönüşümü kapsamlı bir biçimde, çeşitli uygulamaları ile verilmiş oldu.

KAYNAKLAR

1. Matveev, V.B. and Salle, M.A., "Darboux Transformations and Solitons", *Springer Verlag*, Berlin, 1- 26 (1991).
2. Lopez-Bonilla, J.L., Morales, J. and Ovando, G., "Darboux Transformations and Isospectral Potentials in Quantum Mechanics", *Apeiron*, Vol.9(3):20-25 (2002).
3. de Lange, O.L. and Raab, R.E., "Operators methods in quantum mechanics", *Clarendon Press*, Oxford, Chap.2 (1991).
4. Schwabl, F., "Quantum mechanics", *Springer Verlag*, Berlin, (1992).
5. de Lange, O.L., "An Operator solution for the Hulthen potential", *Am. J. Phys.*, 59:151-154 (1991).
6. Flugge, S., "Practical quantum mechanics", *Springer Verlag*, (1974).
7. Morales, J. and Pena, J.J., Lopez-Bonilla, J.L., "Generalization of the Darboux transform", *Journal Of Mathematical Physics*, 42(2):966- 975 (2001).
8. Davis, H.T., "Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations", *Dover*, New York (1999).
9. Mielnik, B., "Factorization method and new potentials with the oscillator spectrum", *Journal Of Mathematical Physics*, 25(12):3387-3389 (1984).
10. Sinha, A. and Roy, P., "New exactly solvable isospectral partners for PT symmetric potentials", *J. Phys. A:Math. Gen.*, 37(6):2509- 2518 (2004).
11. Robnik, M., "Supersymmetric quantum mechanics based on higher excited states", *J. Phys. A:Math. Gen.*, 30(4):1287- 1294 (1997).
12. Ahmed, Z., "Real and complex discrete eigenvalues in an exactly solvable one-dimensional complex PT- invariant potential", *Physics Letters A*, 282:343- 348 (2001).
13. Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M., "Table of Integrals, Series and Products 4th ed.", *Academic Press*, New York, 838 (1980).
14. Abramowitz, M. and Stegun, I.A., "Handbook of Mathematical Functions", *Dover*, New York, (1970).

15. Ranjani, S.S., Kapoor, A.K. and Panigrahi, P.K., "Calculation of Band Edge Eigenfunctions and Eigenvalues of Periodic Potentials through the Quantum Hamilton – Jacobi Formalism", *eprint arXiv:quant-ph/0312041*, (2003).
16. Chattopadhyay, P.K., "Mathematical Physics", *John Wiley & Sons*, New Delhi, 14 (1990).
17. Ranjani, S.S., Geojo, K.G., Kapoor, A.K. and Panigrahi, P.K., "Bound State Wave Functions through the Quantum Hamilton – Jacobi Formalism", *eprint arXiv:quant-ph/0211168 V4*, (2004).
18. Leacock, R.A. and Padgett, M.J., "Hamilton – Jacobi Theory and the Quantum Action Variable", *Physics Review Letters*, 50:3- 6 (1983).
19. Leacock, R.A. and Padgett, M.J., "Hamilton – Jacobi/action- angle quantum mechanics", *Physical Review D*, 28(10):2491- 2502 (1982).
20. Ranjani, S.S., Kapoor, A.K. and Panigrahi, P.K., "Quantum Hamilton – Jacobi analysis of PT symmetric Hamiltonians", *eprint arXiv:quant-ph/0403054*, (2004).
21. Khare, A. and Mandal, B.P., "A PT-invariant potential with complex QES eigenvalues", *Physics Letters A*, 272:53- 56 (2000).
22. Bagchi, B., Malik, S., Quesne, C. And Roychoudhury, R., "A PT-symmetric QES partner to the Khare-Mandal potential with real eigenvalues", *eprint arXiv:quant-ph/0107095*, (2001).
23. Kasap, E., Gönül, B. And Şimşek, M., "Supersymmetric WKB solutions for pseudoharmonic and Mie-type potentials", *Chemical Physics Letters*, 172(6): 499- 502 (1990).
24. Chakrabarti, B., "Comparison of the SWKB and WKB approximations for the finite square well", *FIZIKA B*, 7(2): 73- 81 (1998).
25. Rosenzweig, C. And Krieger, J.B., "Exact Quantization Conditions", *Journal Of Mathematical Physics*, 9:849-860 (1968).



EKLER

EKLER

EK-1. Anjana SINHA ile Yapılan Elektronik Yazışmalar

Bu yazışmalar, 3. bölümde 10 nolu kaynakta gösterilen makale üzerine yapılmıştır.



nuri_566@mynet.com

Kimden: "Anjana Sinha" <anjana23@rediffmail.com>

Kime : "nuri_566" <nuri_566@mynet.com>

Tarih : 19/03/2004 16:03

Konu : Re: darboux transformations

Dear Dr. Nurettin,

Thanks for your mail and interest in our paper. As far as I remember, our equation is correct.

If I can be of any help in any other way, it is most welcome.

B

e
s
t

R
e
g
a
r
d
s
,

A
n
j
a
n
a

On Fri, 19 Mar 2004 nuri_566 wrote :

>

>Hello Mr. Anjana;

>

> New exactly solvable isospectral

>partners for PT symmetric potentials

>

>in page 2513;

>

> $b = -2q - 2p + 2$???

> $b = -2q - 2p + n$ I'm find.

> I'm not understand.
 > Are you help?
 > thank you Mr. Anjana, good times...
 >
 >Nurettin KÖRÖZLÜ ANKARA/TURKEY



nuri_566@mynet.com

Kimden: "Anjana Sinha" <anjana23@rediffmail.com>
 Kime : "nuri_566" <nuri_566@mynet.com>
 Tarih : 2/04/2004 11:57
 Konu : Re:

Dear Dr. Nurettin,
 Sorry for the delay in reply. Please
 wait till Monday, I'll let you know by that
 time.

R
e
g
a
r
d
s
,

A
n
j
a
n
a

On Fri, 02 Apr 2004 nuri_566 wrote :
 >Hello Mr. Anjana;
 >>
 >> New exactly solvable isospectral
 >>partners for PT symmetric potentials
 >>
 >>in page 2513;
 >>
 >> $b = -2q - 2p + 2$???
 >> $b = -2q - 2p + n$ I'm find.
 >> I'm not understand.
 >> Are you help?
 >> thank you Mr. Anjana, good times...
 >>
 >>Nurettin KÖRÖZLÜ ANKARA/TURKEY
 >>
 >
 >



nuri_566@mynet.com

Kimden: "Anjana Sinha" <anjana23@rediffmail.com>

Kime : "nuri_566" <nuri_566@mynet.com>

Tarih : 5/04/2004 11:36

Konu : Re:

Dear Dr. Nurettin,
 You are right. I am sorry to say that
 it was a misprint in the paper.

R
e
g
a
r
d
s
,

A
n
j
a
n
a

On Mon, 05 Apr 2004 nuri_566 wrote :
 >Hello Mr. Anjana;
 >>
 >> New exactly solvable isospectral
 >>partners for PT symmetric potentials
 >>
 >>in page 2513;
 >>
 >> $b = -2q - 2p + 2$???
 >> $b = -2q - 2p + n$ I'm find.
 >> I'm not understand.
 >> Are you help?
 >> thank you Mr. Anjana, good times...
 >>
 >>Nurettin KÖRÖZLÜ ANKARA/TURKEY
 >

EK-2. S. Sree RANJANI ile Yapılan Elektronik Yazışmalar

Bu yazışmalar, bölüm 4'teki KHJ yaklaşımının uygulamalarında gösterilen 17 nolu kaynaktaki makale üzerine yapılmıştır.



nuri_566@mynet.com

Kimden: "S.Sree Ranjani" <akksprs@uohyd.ernet.in>
 Kime : "nuri_566" <nuri_566@mynet.com>
 Tarih : 23/06/2004 15:25
 Konu : Re: arXiv:quant-ph/0211168 v4

Dear Nurettin Korozlu,
 what you are saying is correct.Eqn 22 should be equal
 to zero. Thankyou very much for taking interest in
 our paper and pointimg out the mistake.
 with regards
 Ranjani

On Wed, 2004-06-23 at 17:10,
 nuri_566 wrote: Dear
 Ranjani,

Are you sure that the 22. equation is true?
 accordind to me, this equation is equal to zero.

Success, in your works.

I look forward to hearing from you, immediately.

Nurettin KÄ-RÄ-ZLÄx
 Ankara-TÄrkiye



nuri_566@mynet.com

Kimden : akksprs@uohyd.ernet.in
 Kime : "nuri_566" <nuri_566@mynet.com>
 Tarih : 25/06/2004 10:20
 Konu : Re: Help me, please!!!

Dear Nurettin Korozulu,
 Just give me some time as I am very busy at
 present.Just give me a day. with regards

Ranjani

>

>

>

>

>

>

Dear Ranjani,

>

>

>

>

I can not find

> where the 12. equation came from. May you show any reference about
> the

>

>

>

>

12.equation? Or, may you do sth another, however I can solve the
> problem? I must find the reference

>

>

>

>

because my work has stopped. If you help me, I'll be grateful. Thanks
> for interesting.

YAHOO! MAIL

Subject: Re: Help me, please,please!!!from: "S.Sree Ranjani" <akksprs@uohyd.ernet.in>

To: "nurettin korozlu" <nurettinkorozlu@yahoo.com>

Date: 29 Jun 2004 15:15:47 +0530

Dear Nurettin,

I am extremely sorry for the delay in replying to your mail and regret that your work had to stop. I cannot give any reference to that particular equation as it is obtained from the previous eqns. I will try to explain how we get it and if you have any trouble, you can mail back.

I am attaching the file to this mail. Please don't mind the bad formatting of the file. I am doing this in a hurry. I hope you get an essential idea of what is happening. If you want a detailed explanation you will have to wait as I cannot send it immediately.

Hope this will help you. Feel free to ask me if you have any further doubts.

On Tue, 2004-06-29 at 13:11, nurettin korozlu wrote:

>
> Dear Ranjani,
>
>
>
>
> I can not find where the 12. equation came from. May you show any reference about the
>
>
>
> 12.equation? Or, may you do sth another, however I can solve the problem? I must find the reference
>
>
>
> because my work has stopped. If you help me, I'll be grateful. Thanks for interesting.
>
>
>
>
>
>

Nurettin KÖRÖZLÜ

>

>

ANKARA-TURKEY

>

>

>

YAHOO! MAIL

Subject: Re: I am sorry

From: "S.Sree Ranjani" <akksprs@uohyd.ernet.in>

To: "nurettin korozlu" <nurettinkorozlu@yahoo.com>

Date: 07 Jul 2004 18:46:20 +0530

Dear Nurettin Korozlu,

The file you have sent me does not display greek alphabets and i suppose that is the reason you are not able to get the values correctly. Check this file and if still there is some problem contact me.

with regards

Ranjani

Also the paper in archive is replaced with the version accepted in the journal. This does not have hydrogen atom but this file which I am sending should be sufficient.

with regards

Ranjani

On Wed, 2004-07-07 at 16:35, nurettin korozlu wrote:

>

>

> Dear Ranjani,

> I apologize that I am disturbing you again.

> How can we obtain the 24. Equation from 22. and 23. Equation ? This is my last problem to solve it. I will be so happy if you reply this mail. I know that you are busy but I am helpless.

> Thank you for your interesting. Best regards.

>

>

>Nurettin KOROZLU/ Ankara-TURKEY



nuri_566@mynet.com

Kimden: "S.Sree Ranjani" <akksprs@uohyd.ernet.in>

Kime : "nuri_566" <nuri_566@mynet.com>

Tarih : 13/08/2004 14:32

Konu : Re:

Dear Nurettin Korozulu,
I have already thanked you for pointing out the mistake in my first mail and also for taking interest in our work. The version in which you have pointed out the mistake was very old. The actual version which was sent to the journal was corrected and this happened before receiving your mail. And this was the paper I sent you by email which was correct in all respects.
with regards
Ranjani

On Fri, 2004-08-13 at 14:19, nuri_566 wrote:
You have published your letters' fifth version on 07.07.2004. You have corrected the mistakes which I had showed to you. You should thank me about showing the mistake but you didn't it at the fifth version. I'm sorry about not taking thanks.

I look forward to getting a mail which exists an APOLOGY OR I want from you to publish the sixth version of letters which exists A Thanks to me.

Best regards.

Department of physics, University of GAZI

ANKARA/TURKEY

YAHOO! MAIL

Subject: Re: hello

From: akksprs@uohyd.ernet.in

Date: Wed, 4 Aug 2004 13:05:49 +0530 (IST)

To: "nurettin korozlu" <nurettinkorozlu@yahoo.com>

>Dear Nurettin,
 Do you want references to potentials which can be solved
 using the QHJ formalism? For that you can check the
 references of our papers in the archive. It is not clear
 what kind of potentials you want.
 with warm regards
 Ranjani
 >
 >
 > Dear Ranjani;
 >
 > how are you? I am fine. I completed all of the
 works about the article
 > in the addition. can you suggest me any generalized potential ? I
 > waiting for your help. thank you very much .
 >
 >
 best
 > regards
 > nurettin KOROZLU
 > ANKARA/TURKEY

YAHOO! MAIL

From: akksprs@uohyd.ernet.in

Date: Wed, 25 Aug 2004 10:33:21 +0530 (IST)

Subject: Re: hello

To: "nurettin korozlu" <nurettinkorozlu@yahoo.com>

Dera Nurettin,
 I understand your problem with english. I should
 clarify. As I said earlier,
 the mistakes you have pointed have been already
 corrected before you sent

in the mistakes to me. Before receiving your communications, we had corrected and that was accepted by the journal and the paper was already published in the 'modern physics letters A'. BUT WE DID NOT REPLACE THE OLDER VERSION IN ARCHIVES WITH ACCEPTED VERSION. The version you were studying a very old one, hence I sent you a correct version. This problem was caused because I did not replace the old version with the new corrected one. I am sorry about that. So, please understand that the mistakes you have pointed out were already corrected. Hence I cannot put your name in the acknowledgements. But I personally acknowledge you for taking the trouble and taking the interest in our work.

with warm regards

Sree Ranjani

PS: Your previous mail was very aggressive. I understand that your native language is not English but that does not mean you write a mail which sounds so demanding and rude.

> Dear Ranjani,

>

> Last year, after reading your work on "Bound State Wave Functions through the Quantum Hamilton-Jacobi Formalism" v4 1 April 2003, I noticed a few mistakes. I sent you corrections for problems number 11, 12, and 22 respectively. However, when v5 of 7 July 2004 was released, my name was missing from the "Acknowledgements" section.

>

> Since you did receive my earlier work and thanked me for it, I would

> like to request having my name acknowledged as well. I apologize for

> any confusion. I am not a native English speaker (I am a Türk), so I

> asked an English speaking friend of mine to assist me with this letter.

>

> I await your response and acknowledgment.

>

> With best regards,

>

> Nurettin

ÖZGEÇMİŞ

05.12.1978 tarihinde Çorum'da doğdu. 1998 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik bölümünü kazandı. Bu bölümden 2002 yılında mezun oldu. 2003 yılında Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik anabilim dalında yüksek lisans programına başladı.

