

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DARBOUX VEKTÖR TABANLI SLANT HELİSLERİN
KARAKTERİZASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET EMİN TATLI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. FATMA BULUT

ARALIK 2025

BİTLİS

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DARBOUX VEKTÖR TABANLI SLANT HELİSLERİN
KARAKTERİZASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET EMİN TATLI
ORCID:0009-0006-4578-7611

DANIŞMAN
DOÇ. DR. FATMA BULUT

ARALIK 2025
BİTLİS

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisiyim. Hazırlamış olduğum “**Darboux Vektör Tabanlı Slant Helislerin Karakterizasyonları**” başlıklı tezde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi; tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu; tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi; kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı; bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. 25/12/2025

Mehmet Emin TATLI

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ YAZIM KILAVUZU UYGUNLUK BEYANI

“Darboux Vektör Tabanlı Slant Helislerin Karakterizasyonları” başlıklı
yüksek lisans tezi Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım
Kılavuzuna uygun olarak hazırlanmıştır. 25/12/2025

Tezi Hazırlayan

Mehmet Emin TATLI

Danışman

Doç. Dr. Fatma BULUT

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

Prof. Dr. Hatice Kuşak SAMANCI

T.C.
BİTLİS EREN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ ONAY SAYFASI

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı öğrencisi Mehmet Emin TATLI tarafından hazırlanan “**Darboux Vektör Tabanlı Slant Helislerin Karakterizasyonları**” adlı Yüksek Lisans Tezi ile ilgili tez savunma sınavı, 25/12/2025 tarihinde yapılmış ve tezin oy birliği ile kabul edilmesine karar verilmiştir.

JÜRİ:

Başkan: Doç. Dr. Muhsin İNCESU
(Muş Alparslan Üniversitesi)

Danışman: Doç. Dr. Fatma BULUT
(Bitlis Eren Üniversitesi)

Üye: Prof. Dr. Murat KARAKAŞ
(Bitlis Eren Üniversitesi)

İMZA

.....

.....

.....

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun tarih ve sayılı kararıyla jüri tarafından kabul edilmiş bu çalışmanın yüksek lisans tezi olarak kabulü onaylanmıştır.

25/12/2025

Prof. Dr. Nurullah ULUTAŞ

Enstitü Müdürü

T.C.

Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

**DARBOUX VEKTÖR TABANLI SLANT HELİSLERİN
KARAKTERİZASYONLARI**

Yüksek Lisans Tezi

Mehmet Emin TATLI

Danışman: Doç. Dr. Fatma BULUT

Aralık 2025

ÖZET

Bu tez çalışması, Minkowski dört-boyutlu uzayda tanımlı uzaysal eğrilerin Darboux çatısı altında incelenmesini ve bu eğrilerin slant helis özelliklerinin karakterizasyonunu konu almaktadır. Çalışmanın temel amacı, Öklid uzayında tanımlanan klasik slant helis kavramını Minkowski 4-uzayına uyarlamak ve bu bağlamda ortaya çıkan geometrik yapıların diferansiyel özelliklerini ortaya koymaktır. Bu çalışmada ele alınan tüm eğriler, yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiş birim hızlı uzaysal eğriler olarak kabul edilmiştir.

Tez dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışmanın motivasyonu ve literatür özeti verilmiş; Minkowski uzayının temel yapısı, uzaysal-zamansal-ışıkasal eğri ayrımı, Frenet çatısı ve eğrilik kavramları ayrıntılı biçimde sunulmuştur. İkinci bölümde, Minkowski 4-uzayında uzaysal eğriler için Darboux çatı tanımlanmış, Darboux vektör alanları elde edilmiş ve bu vektörlerin geometrik anlamları açıklanmıştır. Ayrıca, k -tip ve (k,m) -tip slant helis kavramlarının matematiksel altyapısı bu bölümde kurulmuştur. Üçüncü bölümde, çalışmanın ana sonuçları yer almakta olup, uzaysal eğrilerin k -tip ve (k,m) -tip slant helis olabilmesi için gerekli ve yeterli koşullar türetilmiştir ve Darboux vektörlerine dayalı birinci mertebeden doğrusal olmayan diferansiyel denklemler, teorik bulgular, örnekler ve grafiklerle desteklenerek tartışılmıştır. Dördüncü ve son bölümde ise elde edilen sonuçlar genel olarak

değerlendirilmiş, çalışmanın literatüre sağladığı katkılar vurgulanmış ve ileride yapılabilecek çalışmalar için öneriler sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: Slant helis, Darboux vektörü, uzaysal eğri, Frenet eğrisi, doğrusal olmayan denklem.



Republic of Türkiye
Bitlis Eren University Graduate School
Department of Mathematics
CHARACTERIZATIONS OF DARBOUX VECTOR BASED SLANT HELICES
Master's Thesis
Mehmet Emin TATLI
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Fatma BULUT
December 2025

ABSTRACT

In this thesis focuses on the investigation of space-like curves defined in Minkowski four-dimensional space under the Darboux frame and on the characterization of their slant helix properties. The main objective of the study is to adapt the classical concept of slant helices, originally defined in Euclidean space, to Minkowski 4-space and to reveal the differential geometric properties of the resulting structures. Throughout this study, all curves under consideration are assumed to be unit-speed space-like curves parametrized by arc length.

The thesis consists of four main chapters. In the first chapter, the motivation of the study and a review of the related literature are presented; the fundamental structure of Minkowski space, the classification of curves as space-like, time-like, and light-like, as well as the Frenet frame and curvature concepts are discussed in detail. In the second chapter, the Darboux frame for space-like curves in Minkowski 4-space is defined, the associated Darboux vector fields are derived, and their geometric interpretations are explained. Moreover, the mathematical foundations of k -type and (k, m) -type slant helices are established in this chapter. In the third chapter, which contains the main results of the study, the necessary and sufficient conditions for space-like curves to be k -type and (k, m) -type slant helices are derived. In addition, first-order nonlinear differential equations based on Darboux vectors are obtained and discussed together with theoretical findings, examples, and graphical illustrations. In the fourth and final chapter, the

obtained results are evaluated in general terms, the contributions of the study to the existing literature are emphasized, and suggestions for future research are presented.

Keywords: Slant helix, Darboux vector, space-like curve, Frenet curve, nonlinear equation.



TEŐEKKÖR

Bu alıřmanın belirlenmesinde, yűrűtűlmesinde ve sonulandırılmasında beni yűnlendiren, derin bilgi birikimi ve tecrűbeleriyle bana destek veren, beraber çalıřmaktan mutlu olduėum deėerli danıřman hocam sayın Doç. Dr. Fatma BULUT’a en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Ayrıca hayatımın her anında yanımda olan, beni ben yapan, varlıklarından gű aldığım biricik aileme de teőekkűr ederim.

Mehmet Emin TATLI

Bitlis

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	V
İÇİNDEKİLER	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ	VII
SİMGELER	VIII
1 GİRİŞ	1
1.1 Temel Kavramlar	3
2 MATERYAL VE YÖNTEM	9
3 BULGULAR VE TARTIŞMA.....	12
3.1 Uzaysal Eğrilerin k – Tip Slant Helisleri	12
3.2 N Vektörü Zamansal olan Eğrilerin Karakterizasyonları	25
3.3 B_1 Vektörü Zamansal Olan Eğrilerin Karakterizasyonları	48
4 SONUÇ VE ÖNERİLER.....	64
KAYNAKLAR	66
ÖZGEÇMİŞ.....	69

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Örnek 3.1.1.'in yaklaşık çözüm eğrileri 16

Şekil 3.2. Örnek 3.1.5. 'in yaklaşık çözüm eğrileri 25



SİMGELER

Simgeler

α	: Öklid uzayında bir eğri
I	: $\mathbb{R}$, reel Öklid uzayında bir açık aralık
$\mathbb{R}^4$	: Dört Boyutlu Öklid Uzay
s	: Yay parametresi
V_i	: $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında i. Frenet vektörü
$\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$	: Eğrinin Frenet vektörleri
$\ \cdot \ $	: Norm
$\langle \cdot \rangle$	: İç çarpım
$\wedge$	: Vektörel çarpım
$D(s)$	: Darboux vektörü
E_4, R_4	: 4-boyutlu indeksi bir olan yarı-Öklidyen uzay
$\{T(x), N(x), B_1(x), B_2(x)\}$	: Serrret-frenet denklemleri
$k_1(x)$	: Birinci eğrilik
$k_2(x)$	: İkinci eğrilik
$k_3(x)$	: Üçüncü eğrilik

1 GİRİŞ

Son yıllarda eğri teorisi üzerine yapılan çalışmalar yalnızca diferansiyel geometri alanında değil, biyoloji, fizik ve mühendislik gibi birçok alanda da önemli bir yer edinmiştir. Özellikle biyologlar DNA'nın yapısını modellemede, elektrik mühendisleri elektrik akımının analizinde ve fizikçiler dalga denklemlerinin çözümlenmesinde eğri teorisinden faydalanmaktadır. Geometrik açıdan bakıldığında ise eğrilerin yapısına dayalı olarak geliştirilen Frenet çatısı aracılığıyla pek çok geometrik kavram tanımlanmış ve yorumlanmıştır. Eğriler üzerine yapılan çalışmalar, Öklid, Lorentz ve Minkowski uzaylarında hem 3-boyutlu hem de 4-boyutlu durumlar dikkate alınarak geliştirilmiştir. Her bir uzayın iç yapısına bağlı olarak eğri kavramı farklı şekillerde tanımlanmış ve bu durum, her bir uzayı diğerinden daha özgün ve ilgi çekici kılmıştır. Bu çerçevede, özellikle Öklid ve Minkowski uzayları, detaylı araştırmalar gerektiren yapıları nedeniyle dikkat çekmektedir. Bu tür uzaylarda tanımlanan Frenet çatısı kullanılarak helisler, eğik helisler, Bertrand eğrileri, involüt ve evolüt eğrileri gibi pek çok özel eğri türü literatüre kazandırılmıştır. Son yıllarda, klasik eğik helis kavramının genelleştirilmesiyle ortaya çıkan k -tip eğik helisler de çalışmaların odak noktası haline gelmiştir. Bu tür eğriler, özellikle Minkowski 4-uzayında Darboux vektörlerinin oynadığı role bağlı olarak tanımlanmıştır. Literatürde çeşitli araştırmacılar bu kapsamda Darboux çatısı altında yeni karakterizasyonlar sunmuş, null oskuleyen eğriler, doğrultan eğriler ve spiral yapılar gibi farklı eğri türleri üzerinde çalışmışlardır.

Günümüzde diferansiyel geometri alanında özel eğrilerin ele alınması, hem matematiksel kuramın gelişimi hem de farklı disiplinlerdeki uygulamaları açısından önemli bir araştırma konusu hâline gelmiştir. Bu bağlamda, slant helisler, özellikle Minkowski uzay-zaman geometrilerinde önemli bir yer edinmiştir. İlk olarak İzumiya ve Takeuchi [1] tarafından Öklid uzayında tanımlanan *slant helis* kavramı, daha sonra Minkowski 3-uzayı ve 4-uzayına uyarlanarak genişletilmiştir. Slant helis, sabit bir vektör ile belirli bir Frenet vektörünün iç çarpımının sabit olması durumunda, eğrinin genelleştirilmiş bir helis yapısına sahip olduğunu ifade eder. Darboux vektörü, eğrinin yerel dönme davranışını temsil eden ve Frenet denklemleriyle yakından ilişkili bir vektördür. k -tip kavramında ise k değeri; hangi Frenet vektörünün V_k ya da Darboux vektörünün (D_k) sabit bir vektörle iç çarpımının sabit olduğunu belirtmektedir. Minkowski uzayında tanımlı eğriler, yapıları gereği **uzaysal**, **zamansal** ve **ışıksal** olmak

üzere üç ayrı sınıfa ayrılmaktadır. Bu ayrım, eğri teorisinin Lorentz ve Minkowski geometrilerindeki gelişimini önemli ölçüde etkilemiştir. O'Neill'in [2] yarı-Riemann geometrisine ilişkin çalışmaları bu alanın temelini oluştururken; özellikle zamansal ve ışıksal eğrilerin karakterizasyonu konusunda İlarıslan ve Nesović vd. [6–8] önemli katkılarda bulunmuşlardır. Bu çalışmalar, oskuleyen, doğrultan ve spiral eğrilerin yapısını ayrıntılı biçimde ortaya koymuştur. Darboux çatısı, klasik Frenet çatısına alternatif olarak geliştirilmiş olup, bu çerçevede tanımlanan Darboux vektörleri eğri karakterizasyonlarında etkili bir rol oynamıştır. Döldöl [3], Minkowski uzayında Darboux vektörlerinin rolünü oynayan vektör alanları ve düzlemleri tanımlamış; Camcı vd. [5] ise harmonik eğrilikleri ve genelleştirilmiş helisleri incelemişlerdir. Akgün [4], Minkowski uzayında yeni tip Frenet eğrilerini tanımlayarak bu alana farklı bir bakış açısı kazandırmıştır. Öte yandan, Öztürk vd. [9] Öklidyen dört-boyutlu uzayda yeni eğri karakterizasyonları sunmuşlardır. Walrave'ın [10] doktora tezinde Minkowski uzayındaki yüzey ve eğri yapıları ayrıntılı şekilde ele alınmıştır. Williams [11], dört boyutlu uzayda vektörlerin üçlü çarpımı üzerine çalışmış; Yaylı vd. [12] ise modifiye edilmiş Darboux vektörlerine dayanan yeni doğrultan eğriler tanımlamışlardır. Ali ve Önder [13], Minkowski uzay-zamanında doğrultan eğriler üzerine önemli karakterizasyonlar ortaya koymuş; Keleş vd. [14] ise LP-Sasakian manifoldlarda biharmonik eğriler üzerine odaklanmışlardır. Literatürde ayrıca k -tip eğik (slant) helisler olarak adlandırılan özel eğriler de tanımlanmıştır. Bu bağlamda Ali, López ve Turgut [6], Nešović vd. [7] ve Zhou vd. [8], Minkowski ve hiperbolik uzaylarda k -tip slant helisleri incelemişlerdir. Yılmaz ve Bektaş [9], slant helislerin yapısını *Sapientiae* dergisinde ele alırken; Bulut'un [10–12] çalışmaları hem Minkowski hem de Öklid uzaylarında k -tip slant helislerin farklı çatı yapılarına göre tanımlanmasına öncülük etmiştir. Bu çalışmalar, Minkowski uzayındaki eğri teorisinin farklı yönlerini ele alarak hem kuramsal hem de uygulamalı açıdan önemli katkılar sunmuştur.

Bu çalışmada, Minkowski dört-boyutlu uzayda bazı özel tür Darboux eğik (slant) helisler incelenmiş; bu helislerin geometrik karakteristikleri ortaya konularak Lorentz uzayında farklı çatı yapılarına göre tanımlanabilecek yeni eğri türleri önerilmiştir. Ayrıca Bulut [16]'da, diferansiyel geometri bağlamında Darboux vektörüne dayalı doğrusal olmayan diferansiyel denklemler türetilmiş ve bu denklemler analiz edilerek geometrik yapılar ile diferansiyel denklem çözümleri arasındaki ilişki kurulmuştur. Bulut ve Eker [17], Lorentz uzayında Darboux çatısına göre tanımlanan k -tip ve (k, m) -tip eğik (slant)

helislerin yapısını ele almış; bu özel eğrilerin karakterizasyonlarını ve örneklerini sunarak teorik altyapıyı oluşturmuşlardır. Bulut [18]'de, Minkowski 4-uzayında ED-çatısına göre tanımlanan (k, m) -tip eğik helisler analiz edilmiş; bu eğrilerin geometrik özellikleri ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Bulut [19], Lorentz uzayında zamansal eğriler üzerinde eşbiçimsel (equiform) diferansiyel geometri çatısında özel helis türlerini araştırarak zamansal eğriler için özgün bir helis tanımı önermiştir. Son olarak Bulut ve Tartık [20], Öklidyen dört-boyutlu uzayda paralel taşıma çatısına göre tanımlanan (k, m) -tip eğik helisleri tanıtmış ve bu eğrilerin matematiksel özelliklerini diferansiyel denklemler yardımıyla ayrıntılı olarak incelemişlerdir. Bu bağlamda, biz de çalışmamızda Minkowski uzayında özel bir eğri sınıfını incelemeyi amaçlıyoruz. Literatürdeki çalışmalar ışığında, Minkowski 4-uzayında uzaysal eğrilere karşılık gelen k -tip ve (k, m) -tip slant helislerin tanımı yapılmakta, bu helislerin Darboux çatısı altındaki karakterizasyonları sunulmakta ve doğrusal olmayan diferensiyel denklemleri elde edilmektedir. Böylece hem teorik olarak yeni bir katkı sağlanmakta hem de mevcut geometri literatürü genişletilmektedir.

Bu çalışmada, Minkowski 4-uzayında tanımlanan uzay-zaman eğrileri bağlamında k -tip ve (k, m) -tip eğik helisler incelenmiş, bu eğriler Darboux vektörleri yardımıyla tanımlanmış ve eğriliklerine bağlı karakterizasyonları sunulmuştur. Ayrıca, Minkowski 4-uzayında uzaysal eğrilerin Darboux çatısına göre türetilen doğrusal olmayan diferensiyel denklemleri elde edilmiştir. Böylece, hem teorik hem de uygulamalı anlamda eğri teorisine katkı sağlanması amaçlanmıştır.

1.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde çalışmaya esas olan tüm tanımlar ve önermeler [4-23] kaynaklarından elde edilmiştir.

Tanım 1.1. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $p, q \in \mathbb{R}^n$ ve $\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ifadeleri verilsin

$$(p, q) \rightarrow \langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p_i q_i$$

fonksiyonuna Öklid iç çarpımı denir.

Tanım 1.2. $p \in \mathbb{R}^n$ ve $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$p \rightarrow \|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur.

Tanım 1.3. $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(p, q) \rightarrow d(p, q) = \|p - q\|$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metrik belirtir. Metrik ile $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid Uzayı denir. Bu uzay E^n ile gösterilir.

Tanım 1.4. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ biçiminde ki düzgün α dönüşümüne $\mathbb{R}^n$ uzayında bir eğri denir. $I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralığına eğrinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine ise eğrinin parametresi denir.

Tanım 1.5. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir eğri ve J bir açık aralık olsun. $h: J \rightarrow I$ difeomorfizmine, α eğrisinin bir parametre dönüşümü denir. $\alpha \circ h$ ve α eğrisinin h ile yeniden parametrelendirilmiş halidir.

Tanım 1.6. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir eğri olmak üzere

$$\alpha'(s) = \frac{d\alpha(s)}{ds} = \left(\frac{d\alpha_1}{ds}(s), \frac{d\alpha_2}{ds}(s), \dots, \frac{d\alpha_n}{ds}(s) \right)$$

vektörüne bu eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü denir.

Tanım 1.7. Bir eğrinin bütün noktalarında ki hız vektörleri sıfırdan farklı ise bu eğriye regüler eğri denir.

Tanım 1.8. Bir eğrinin hız vektörlerinin sıfır olduğu noktalara eğrinin singüler noktaları denir.

Tanım 1.9. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $\|\alpha'\| : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi regüler bir eğri olsun.

$$s \rightarrow \|\alpha'\|(s) = \|\alpha'(s)\|$$

ile tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, bu eğrinin skalar hız fonksiyonu, $\|\alpha'(s)\|$ reel sayısına da bu eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki skalar hızı denir.

Tanım 1.10. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi için her bir $s \in I$ noktası $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise bu eğriye birim hızlı eğri ve s parametresine de yay parametresi denir.

Tanım 1.11. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $a, b \in I$ olsun.

$$t = \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds$$

reel sayısına eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay-uzunluğu denir.

Tanım 1.12. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ile tanımlı diferensiyellenebilir bir eğri olsun

$$\xi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$$

sistemi linner bağımsız olmak üzere. ξ lineer bağımsız sisteminden elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sisteme, α eğrisinin Serret-Frenet r - ayaklı alanı, $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ sistemine $s \in I$ noktasındaki Serret-Frenet r - ayaklısı denir ve her bir $V_i (1 \leq i \leq r)$ vektörüne de Serret-Frenet vektörü denir.

Tanım 1.13. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve α eğrisinin yay parametresi s olmak üzere $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet r - ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ve $k_i : I \rightarrow \mathbb{R}, (1 \leq i \leq r)$ olmak üzere,

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlanan k_i fonksiyonuna α eğrisinin i . eğrilik fonksiyonu denir ve $\forall s \in I$ için $k_i(s)$ sayısına da $\alpha(s)$ noktasında α eğrisinin i . eğriligi denir.

Önerme 1.14. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ile tanımlı diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $t \in I$, bu eğrinin bir parametresi olmak üzere α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki

$\{T(t), N(t), B_1(t), B_2(t)\}$ Frenet vektörleri

$$T(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t)$$

$$N(t) = \frac{\|\alpha'(t)\|^2 \alpha''(t) - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle \alpha'(t)}{\|\|\alpha'(t)\|^2 \alpha''(t) - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle \alpha'(t)\|}$$

$$B_1(t) = \varepsilon B_2(t) \times T(t) \times N(t)$$

$$B_2(t) = \varepsilon \frac{T(t) \times N(t) \times \alpha'''(t)}{\|T(t) \times N(t) \times \alpha'''(t)\|} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

şeklinde hesaplanır.

Önerme 1.15. $t \in I$, α eğrisinin herhangi bir parametresi olsun. α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet eğrilikleri sırasıyla $k_1(t), k_2(t)$ ve $k_3(t)$ olmak üzere,

$$k_1(t) = \frac{\|\alpha'(t)\|^2 \alpha''(t) - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle \alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^4}$$

$$k_2(t) = \frac{\|T(t) \times N(t) \times \alpha'''(t)\| \|\alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^2 \alpha''(t) - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle \alpha'(t)}$$

$$k_3(t) = \frac{\langle \alpha^4(t), B_2(t) \rangle}{\|T(t) \times N(t) \times \alpha'''(t)\| \|\alpha'(t)\|}$$

şeklinde hesaplanır.

Tanım 1.16. $\alpha : I \rightarrow E^4$, eğriliği sıfırdan farklı birim hızlı bir eğri olsun ve Frenet elemanları, $\{T, N, B_1, B_2\}$ olsun.

$\alpha : I \rightarrow E^4$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki esas birim normal vektörü $N(s)$, bir U birim vektörü ile sabit bir θ açısı yapıyorsa, α eğrisine slant helis denir.

$$\langle N(s), U \rangle = \cos \theta,$$

Tanım 1.17. $\alpha : I \rightarrow E^4$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasında ikinci birim binormal vektörü $B_2(s)$, bir U birim vektörü ile sabit bir θ açısı yapıyorsa yani eğri boyunca

$$\langle B_2(s), U \rangle = \cos \theta,$$

ise α eğrisi B_2 -slant helis olarak adlandırılır.

Önerme 1.18. Birim hızlı bir α eğrisi $\mathbb{R}^4$ uzayında bir B_2 -slant helis olabilmesi için gerek ve şart

$$\left(\frac{k_3}{k_2}\right)^2 + \frac{1}{k_1^2} \left(\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)^2 = \tan^2 \theta = \text{sabit}$$

denkleminin var olmasıdır. Burada θ , ikinci birim binormal vektör B_2 ile bir U birim sabit vektörü arasındaki sabit açıdır.

Önerme 1.19. $\alpha, \mathbb{R}_1^4$ de $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet denklemleri ile verilen bir eğri olsun ve u sabit bir doğrultu olmak üzere

- 1) Eğer $\langle T, U \rangle = c_1$ olacak şekilde $c_1 \in \mathbb{R}$ varsa α eğrisine 1.tip slant helis (veya genel helis),
- 2) Eğer $\langle N, U \rangle = c_2$ olacak şekilde $c_2 \in \mathbb{R}$ varsa α eğrisine 2.tip slant helis (veya slant helis),
- 3) Eğer $\langle B_1, U \rangle = c_3$ olacak şekilde $c_3 \in \mathbb{R}$ varsa α eğrisine 3.tip slant helis,
- 4) Eğer $\langle B_2, U \rangle = c_4$ olacak şekilde $c_4 \in \mathbb{R}$ varsa α eğrisine 4.tip slant helis denir.

2 MATERYAL VE YÖNTEM

Minkowski uzayı $\mathbb{R}_1^4$, standart bir vektör uzayı olup, belirsiz (indefinite) düz bir metrikle donatılmıştır. Bu metrik,

$$\langle, \rangle = da_1^2 + da_2^2 + da_3^2 - da_4^2$$

şeklinde verilir. Burada (a_1, a_2, a_3, a_4) , $\mathbb{R}_1^4$ 'ün dikdörtgen koordinat sistemidir. $\mathbb{R}_1^4$ 'teki bir u vektörü, sırasıyla $\langle u, u \rangle > 0$, $\langle u, u \rangle < 0$ veya $\langle u, u \rangle = 0$ ($u \neq 0$) koşullarını sağlıyorsa, uzaysal (space-like), zamansal (time-like) veya null (ışıksal, light-like) olarak adlandırılır. u vektörünün normu $\|u\| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|}$ ile tanımlanır. İki vektör u ve w , $\langle u, w \rangle = 0$ ise birbirine ortogonaldir.

Keyfi bir eğri $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^4$, yerel olarak hız vektörleri $\alpha'(s)$ 'nin tümü uzaysal, zamansal veya null ise, sırasıyla uzaysal, zamansal veya null eğri olarak adlandırılır. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca hareket eden Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ ile gösterilsin. Bu durumda T, N, B_1, B_2 vektör alanları sırasıyla teğet, asli normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanlarıdır.

α , $\mathbb{R}_1^4$ 'te yay uzunluğu parametresi s ile parametrelendirilmiş bir uzaysal eğri olsun. Uzaysal eğri α için aşağıdaki Lemma 2.1. ve Lemma 2.2. geçerlidir [3].

Lemma 2.1. N vektörünün zamansal (time-like) olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\alpha(s)$ uzaysal eğrisi için yalnızca bir Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ bulunur ve bu çatıya ait Frenet denklemleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned} T' &= k_1 N \\ N' &= k_1 T + k_2 B_1 \\ B_1' &= k_2 N + k_3 B_2 \\ B_2' &= -k_3 B_1 \end{aligned} \tag{1}$$

Burada T, N, B_1 ve B_2 karşılıklı olarak ortogonal vektörlerdir ve $\langle T, T \rangle = \langle B_1, B_1 \rangle = \langle B_2, B_2 \rangle = 1$ ile $\langle N, N \rangle = -1$ koşullarını sağlarlar. $k_1 = k_1(s)$, $k_2 = k_2(s)$, $k_3 = k_3(s)$ fonksiyonları sırasıyla $\alpha(s)$ uzaysal eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikleri olarak adlandırılır. Bu çalışma boyunca, tüm bu eğriliklerin $k_i(s) \neq 0$ ($1 \leq i \leq 3$) koşulunu sağladığını varsayacağız [3].

Lemma 2.2. N vektörü uzaysal (space-like) ve B_1 vektörü zamansal (time-like) olsun.

Bu durumda, $\alpha(s)$ eğrisi zamansal bir eğridir ve aşağıdaki Frenet denklemlerini sağlar:

$$\begin{aligned} T' &= k_1 N \\ N' &= -k_1 T + k_2 B_1 \\ B_1' &= k_2 N + k_3 B_2 \\ B_2' &= k_3 B_1 \end{aligned} \tag{2}$$

ve T, N, B_1, B_2 vektörleri birbirine dik (ortogonal) olup şu iç çarpım koşullarını sağlarlar: $\langle T, T \rangle = \langle N, N \rangle = \langle B_2, B_2 \rangle = 1$, $\langle B_1, B_1 \rangle = -1$.

Burada, $k_1 = k_1(s)$, $k_2 = k_2(s)$ ve $k_3 = k_3(s)$ fonksiyonları sırasıyla zamansal eğri $\alpha(s)$ 'nin birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikleri olarak adlandırılır. Bu çalışmada, tüm eğrilik fonksiyonlarının sıfırdan farklı olduğunu $k_i(s) \neq 0$ ($1 \leq i \leq 3$) varsayacağız.

Bu bölümde, $\mathbb{R}_1^4$ 'teki düzenli bir eğri boyunca Lemma 2.1. ve Lemma 2.2. kullanılarak Darboux vektör alanları tanımlanmaktadır. Şimdi şu tanımlamaları yapalım:

$$V_1 = T, V_2 = N, V_3 = B_1, V_4 = B_2.$$

T, N, B_1, B_2 , γ eğrisi boyunca tanımlı olan ve k_1, k_2, k_3 eğriliklerinin her yerde sıfır olmayan değerler aldığı bir Frenet çatısıdır. Bu durumda, γ eğrisi boyunca şu vektör alanlarını tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned}
D_1 &= B_2 \\
D_2 &= k_2 T + k_1 B_1 \\
D_3 &= k_3 N + k_2 B_2 \\
D_4 &= -T
\end{aligned} \tag{3}$$

Bu vektörler kümesi D_1, D_2, D_3, D_4 , γ eğrisi boyunca doğrusal olarak bağımsızdır [3].

Tanım 2.1. Minkowski uzayı $\mathbb{R}_1^4$ 'te, yay uzunluğu s ile parametrelendirilmiş ve Frenet çatısı $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ (veya Darboux vektör alanları $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$) ile tanımlanan bir uzaysal eğri $\gamma(s)$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere, eğer sıfırdan farklı sabit bir $U \in \mathbb{R}_1^4$ vektörü aşağıdaki koşulu sağlıyorsa, k -tip slant helis (veya k -tip Darboux slant helis) olarak adlandırılır: $\langle V_k, U \rangle = \text{sabit}$, veya $\langle D_k, U \rangle = \text{sabit}$.

k -tip slant helisler kullanılarak bazı birinci mertebeden doğrusal olmayan diferansiyel denklemler elde edilmiştir. γ , Lemma 2.2 'de verildiği gibi birim hızlı bir eğri olsun ve $\{T, N, B_1, B_2\}$, γ eğrisi boyunca tanımlı Frenet çatısı olsun.

Burada k_1, k_2, k_3 eğrilikleri her yerde sıfırdan farklıdır. Şimdi γ boyunca aşağıdaki vektör alanlarını tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned}
D_1 &= B_2 \\
D_2 &= k_2 T - k_1 B_1 \\
D_3 &= k_3 N - k_2 B_2 \\
D_4 &= T
\end{aligned} \tag{4}$$

Burada $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$, γ boyunca doğrusal olarak bağımsızdır [3].

3 BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1 Uzaysal Eğrilerin k – Tip Slant Helisleri

Teorem 3.1.1. $\gamma, \mathbb{R}_1^4$ içinde $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısına sahip düzenli bir eğri olsun. Eğer γ eğrisi $\mathbb{R}_1^4$ 'te 1-tip slant helis ve 1-tip Darboux slant helis ise, aşağıdaki doğrusal olmayan denklem elde edilir:

$$y'^2 + y^2 k_3^2 - \mu k_3^2 = 0$$

Burada $y = \frac{k_1}{k_2}$ ve $\mu = \frac{K^2}{c_1^2} - 1$ (c_1, K sabitlerdir).

İspat 3.1.1. $\gamma = \gamma(s), \mathbb{R}_1^4$ 'te 1-tip slant helis ve 1-tip Darboux slant helis olsun ve U sabit bir sıfırdan farklı yön olsun. Bu durumda,

$$\langle T, U \rangle = c_1 \quad (5)$$

eşitliği $\gamma = \gamma(s)$ eğrisi boyunca sağlanır. (4) ifadesini (5)'te yerine koyarak,

$$\langle D_4, U \rangle = c_1 \text{ elde ederiz.}$$

(5) ifadesinin s 'ye göre türevini alırsak,

$$\langle T', U \rangle = 0 \text{ bulunur.}$$

Denklem (1) kullanılarak, $k_1 \langle N, U \rangle = 0$ ve $k_1 \neq 0$ olduğundan,

$$\langle N, U \rangle = 0 \quad (6)$$

sonucuna varılır. (6) ifadesinin s 'ye göre türevi alınıp (1) ve (5) denklemleri kullanılırsa,

$$k_1 c_1 + k_2 \langle B_1, U \rangle = 0 \text{ olup buradan,}$$

$$\langle B_1, U \rangle = -\frac{k_1}{k_2} c_1 \quad (7)$$

elde edilir. (7) ifadesinin s 'ye göre türevi alınıp (1) ve (5) kullanılırsa,

$$\langle B_2, U \rangle = -\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' c_1 \text{ bulunur.}$$

U bir sabit vektör alanı olduğundan, şu şekilde yazabiliriz:

$$U = u_1 T + u_2 N + u_3 B_1 + u_4 B_2$$

ve K bir sabit olmak üzere

$$\langle U, U \rangle = K^2 = \text{sabit.}$$

Bu, birim vektör U 'nun $\{T, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda yer aldığını gösterir.

Denklem (1) kullanılarak, U 'nun bileşenleri şu şekilde elde edilir:

$$u_1 = \langle T, U \rangle = c_1$$

$$u_2 = \langle N, U \rangle = 0$$

$$u_3 = \langle B_1, U \rangle = -\frac{k_1}{k_2} c_1$$

$$u_4 = \langle B_2, U \rangle = -\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' c_1$$

Dolayısıyla,

$$U = c_1 T - \frac{k_1}{k_2} c_1 B_1 - \frac{c_1}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)' B_2 \quad (8)$$

Denklem (8)'nin her iki tarafını U ile standart skaler çarpıma tabi tutarsak,

$$K^2 = c_1^2 + c_1^2 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 + \frac{c_1^2}{k_3^2} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 \quad (9)$$

Denklem (9)'in her iki tarafını c_1^2 ile bölersek,

$$\frac{K^2}{c_1^2} - 1 = \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 + \frac{1}{k_3^2} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2$$

Eğer $\mu = \frac{K^2}{c_1^2} - 1 = \text{sabit}$ alınırsa,

$$\frac{1}{k_3^2} \left(\left(\frac{k_1}{k_2} \right)' \right)^2 + \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 - \mu = 0.$$

$y = \frac{k_1}{k_2}$ alınırsa, aşağıdaki doğrusal olmayan denklem elde edilir:

$$y'^2 + y^2 k_3^2 - \mu k_3^2 = 0 \quad (10)$$

(10) 'un ispatı tamamlanmıştır. Teorem için sayısal bir örnek verelim, k_3 ve μ için bulunan değerler kullanılarak şekli aşağıda gösterilmiştir.

Örnek 3.1.1. $\gamma, \mathbb{R}_1^4$ 'te birim hızlı uzaysal bir eğri olsun ve denklemi şu şekilde verilsin:

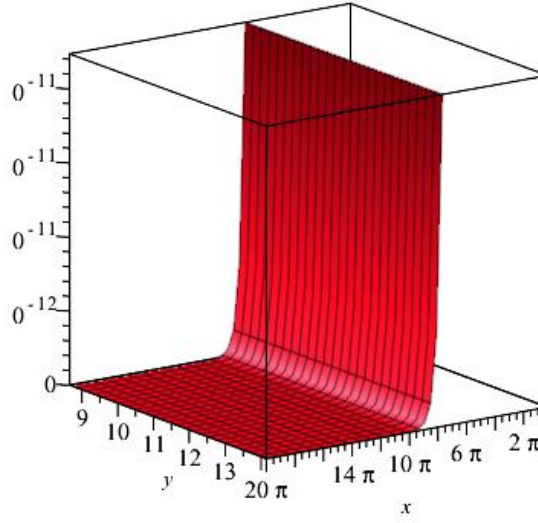
$$\gamma(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cos(2s), \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(2s), \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sinh(s), \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cosh(s) \right)$$

Eğrilikler ve μ değerleri kolayca şu şekilde elde edilir:

$$k_1(s) = 1, \quad k_2(s) = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{55}}, \quad k_3(s) = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{11}}, \quad \mu = \frac{55}{54}$$

μ katsayılı doğrusal olmayan denklem (9)'a göre çözüm şu şekildedir:

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \frac{\sin\left(\frac{(2(-s+t)\sqrt{55})}{11}\right)\sqrt{330}}{18}$$



Şekil 3.1. Örnek 3.1.1.'in yaklaşık çözüm eğrileri.

Teorem 3.1.2. γ , $\mathbb{R}_1^4$ 'te $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısına sahip düzenli bir eğri olsun. Eğer γ eğrisi $\mathbb{R}_1^4$ 'te 2-tip slant helis ve 2-tip Darboux slant helis ise, aşağıdaki doğrusal olmayan denklem elde edilir:

$$y'^2 + 2\varepsilon \frac{k_2}{k_1 k_3} y' + \left(\frac{k_2^2}{k_1^2} + 1 \right) y^2 + \frac{(k_2^2 - \mu k_3^2) \varepsilon^2}{k_1^2 k_3^2} = 0$$

Burada $y = \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}$, $\mu = \frac{K^2}{c_2^2} + 1$ ve ε sabitlerdir.

İspat 3.1.2. $\gamma = \gamma(s)$, $\mathbb{R}_1^4$ 'te 2-tip slant helis ve 2-tip Darboux slant helis olsun ve U sabit bir sıfırdan farklı yön olsun. Bu durumda,

$$\langle N, U \rangle = c_2 \quad (11)$$

eşitliği $\gamma = \gamma(s)$ eğrisi boyunca sabittir. (11) ifadesinin s 'ye göre türevini alırsak,

$$\langle N', U \rangle = 0. \quad (12)$$

$\gamma = \gamma(s)$ 'nin 2-tip Darboux slant helis olmasından dolayı,

$$\langle D_2, U \rangle = c_5. \quad (13)$$

(1) ifadesini (12)'de yerine koyarak şu denklemi elde ederiz:

$$k_1 \langle T, U \rangle + k_2 \langle B_1, U \rangle = 0 \quad (14)$$

ve (13)'yi (4)'de yerine koyarak aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$k_2 \langle T, U \rangle - k_1 \langle B_1, U \rangle = c_5. \quad (15)$$

(14) ifadesini (15)'te yerine koyarsak,

$$\langle T, U \rangle = \left(\frac{k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right) c_5$$

olup buradan,

$$\langle B_1, U \rangle = \left(-\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \right) c_5. \quad (16)$$

(16) ifadesinin s 'ye göre türevini alırsak,

$$\langle B_2, U \rangle = -\left(\frac{k_2}{k_3}\right)c_2 + \left(\frac{-k_1}{k_1^2 + k_2^2}\right)'c_5.$$

U bir sabit vektör alanı olduğundan, şu şekilde yazabiliriz:

$$U = u_1 T + u_2 N + u_3 B_1 + u_4 B_2 \quad (16) \quad \text{ve } K \text{ bir sabit olmak üzere}$$

$$\langle U, U \rangle = K^2 = \text{sabit.}$$

Bu, birim vektör U 'nun $\{T, N, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda yer aldığını gösterir. Denklem (1) kullanılarak, U 'nun bileşenleri şu şekilde elde edilir:

$$u_1 = \langle T, U \rangle = \left(\frac{k_2}{k_1^2 + k_2^2}\right)c_5$$

$$u_2 = \langle N, U \rangle = c_2$$

$$u_3 = \langle B_1, U \rangle = -\left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}\right)c_5 \quad (17)$$

$$u_4 = \langle B_2, U \rangle = -\left(\frac{k_2}{k_3}\right)c_2 - \left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}\right)'c_5$$

(17) ifadesini (16)'da yerine koyarsak bu şekilde yazabiliriz.

$$U = \left(\frac{k_2}{k_1^2 + k_2^2}\right)c_5 T + c_2 N - \left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}\right)c_5 B_1 + \left(-\left(\frac{k_2}{k_3}\right)c_2 - \left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}\right)'c_5\right) B_2$$

Son denklemin her iki tarafını U ile standart skaler çarpıma tabi tutarsak ve $c_5 = \frac{k_1}{\varepsilon} c_2$

(burada $\varepsilon = \left(\frac{k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right)'$) alırsak, şunu buluruz:

$$K^2 = \frac{k_1^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{k_2}{k_1^2 + k_2^2} \right)^2 c_2^2 - c_2^2 + \left(\frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \right)^2 \frac{k_1^2}{\varepsilon^2} c_2^2 + \left(\frac{k_2}{k_3} \frac{k_1}{\varepsilon} \left(\frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2} \right)' \right)^2 c_2^2 \quad (18)$$

(18) denkleminin her iki tarafını c_2^2 ile bölersek ve $\mu = \frac{K^2}{c_2^2} + 1$ alınırsa, doğrusal

olmayan diferansiyel denklem elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.2. γ , sıfırdan farklı k_1, k_2 ve k_3 eğriliklerine sahip $\mathbb{R}_1^4$ 'te düzenli bir eğri olsun.

Eğer γ eğrisi $\mathbb{R}_1^4$ 'te 2-tip slant helis ve 2-tip Darboux slant helis ise, aşağıdaki ifade geçerlidir:

$$\frac{c_2}{c_3} = \frac{\left(\frac{k_2}{k_1^2 + k_3^2} \right)'}{k_1} = \text{sabit} \neq 0.$$

Teorem 3.1.3. γ , $\mathbb{R}_1^4$ 'te $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısına sahip düzenli bir eğri olsun. Eğer γ eğrisi $\mathbb{R}_1^4$ 'te 3-tip slant helis ve 3-tip Darboux slant helis ise, aşağıdaki doğrusal olmayan denklem elde edilir:

$$y'^2 - \frac{2k_2}{k_3} \lambda y' + \left(k_1^2 + \frac{k_1^2 k_3^2}{k_3^2} \right) y^2 + \left[\frac{k_2^2}{k_3^2} \lambda^2 - \mu \frac{k_1^2}{k_3^2} \lambda^2 \right] = 0$$

Burada $y = \frac{k_3}{k_2^2 + k_3^2}$, $\mu = \frac{k^3}{c_3^2} - 1$ ve λ sabitlerdir.

İspat 3.1.3. $\gamma = \gamma(s)$, $\mathbb{R}_1^4$ 'te 3-tip slant helis olsun ve U sabit bir sıfırdan farklı yön olsun. Bu durumda,

$\gamma = \gamma(s)$, $\mathbb{R}_1^4$ 'te 3-tip slant helis olsun ve U sabit bir sıfırdan farklı yön olsun. Bu durumda,

$$\langle B_1, U \rangle = c_3 \quad (19)$$

eşitliği $\gamma = \gamma(s)$ eğrisi boyunca sabittir. (19) ifadesinin s 'ye göre türevini alırsak,

$$\langle B_1', U \rangle = 0. \quad (20)$$

eşitliği $\gamma = \gamma(s)$ eğrisinin 3-tip Darboux slant helis olmasından dolayı

$$\langle D_3, U \rangle = c_6 \quad (21)$$

ifadesini (20)'de yerine koyarak bu denklemi elde ederiz:

$$k_2 \langle N, U \rangle + k_3 \langle B_2, U \rangle = 0 \quad (22)$$

ve (21) 'i (3)'te yerine koyarak aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$k_3 \langle N, U \rangle - k_2 \langle B_2, U \rangle = c_6. \quad (23)$$

(22) ifadesini (23)'te yerine koyarsak, $\langle N, U \rangle = \frac{k_3 c_6}{k_2^2 + k_3^2}$ olup buradan,

$$\langle B_2, U \rangle = \frac{-k_2 c_6}{k_2^2 + k_3^2}. \quad (24)$$

(24) ifadesinin s 'ye göre türevini alırsak,

$$\langle T, U \rangle = -\frac{k_2}{k_1} c_3 + \frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2^2 + k_3^2} \right)' c_6 \quad (25)$$

(25) ifadesinin s 'ye göre türevini alırsak,

$$c_6 = \frac{k_3 c_3}{\left(\frac{k_2}{k_2^2 + k_3^2} \right)}, \quad \text{ve} \quad \lambda = \left(\frac{k_2}{k_2^2 + k_3^2} \right)'.$$

U bir sabit vektör alanı olduğundan, şu şekilde yazabiliriz:

$$U = u_1 T + u_2 N + u_3 B_1 + u_4 B_2$$

ve K bir sabit olmak üzere

$$\langle U, U \rangle = K^2 = \text{sabit}.$$

Bu, birim vektör U 'nun $\{T, N, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda yer aldığını gösterir ve denklem (1) kullanılarak şu şekilde yazılabilir:

$$U = \left(-\frac{k_2}{k_1} c_3 + \frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2^2 + k_3^2} \right)' c_6 \right) T + \left(\frac{c_6 k_3}{k_2^2 + k_3^2} \right) N + c_3 B_1 + \left(\frac{-c_6 k_2}{k_2^2 + k_3^2} \right) B_2 \quad (26)$$

(26) denkleminin her iki tarafını U ile standart skaler çarpıma tabi tutarsak ve $c_6 = \frac{k_3}{\lambda} c_3$ yazarsak, şunu buluruz:

$$K^2 = \frac{1}{k_1^2} \left(-k_2 + \frac{k_3}{\lambda} \left(\frac{k_3}{k_2^2 + k_3^2} \right) \right)^2 c_3^2 - \left(\frac{k_3}{\lambda} \left(\frac{k_3}{k_2^2 + k_3^2} \right) \right)^2 c_3^2 + c_3^2 + \left(\frac{k_3}{\lambda} \left(\frac{k_2}{k_2^2 + k_3^2} \right) \right)^2 c_3^2$$

Burada $\lambda = \left(\frac{k_2}{k_2^2 + k_3^2} \right)'$. Son denklemin her iki tarafını c_3^2 ile bölersek ve $\mu = \frac{K^2}{c_3^2} - 1$,

$y = \left(\frac{k_3}{k_2^2 + k_3^2} \right)'$ alınır, doğrusal olmayan denklem elde edilir. İspat tamamlanmıştır.

Sonuç 3.1.3. γ , sıfırdan farklı k_1, k_2 ve k_3 eğriliklerine sahip $\mathbb{R}_1^4$ 'te düzenli bir eğri olsun. Eğer γ eğrisi $\mathbb{R}_1^4$ 'te 3-tip slant helis ve 3-tip Darboux slant helis ise, aşağıdaki ifade geçerlidir:

$$\frac{c_3}{c_6} = \frac{\left(\frac{k_2}{k_2^2 + k_3^2} \right)'}{k_3} = \frac{\lambda}{k_3} = \text{sabit} \neq 0.$$

Teorem 3.1.4. γ , $\mathbb{R}_1^4$ 'te $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısına sahip düzenli bir eğri olsun. Eğer γ eğrisi $\mathbb{R}_1^4$ 'te 4-tip slant helis ise, aşağıdaki doğrusal olmayan denklem elde edilir:

$$\frac{1}{k_1^2} y'^2 - y^2 - \mu = 0$$

Burada $y = \frac{k_3}{k_2}$ ve $\mu = \frac{k^2}{c_4^2 - 1}$ olup c_4, K sabitlerdir.

İspat 3.1.4. $\gamma = \gamma(s)$, $\mathbb{R}_1^4$ 'te 4-tip slant helis olsun ve U sabit bir sıfırdan farklı yön olsun. Bu durumda,

$$\langle B_2, U \rangle = c_4$$

eşitliği $\gamma = \gamma(s)$ eğrisi boyunca sabittir. $\gamma = \gamma(s)$ 'nin 4-tip Darboux slant helis olmasından dolayı,

$$\langle D_1, U \rangle = c_4. \quad (27)$$

ifadesini s 'ye göre türevini alırsak, $\langle B_2, U \rangle = 0$, ve (1) ifadesini (2)'de yerine koyarak bu denklemi elde ederiz: $-k_3 \langle B_1, U \rangle = 0$. $k_3 \neq 0$ olduğundan, $\langle B_1, U \rangle = 0$ olur. U bir sabit vektör alanı olduğundan, şu şekilde yazabiliriz:

$$U = u_1 T + u_2 N + u_3 B_1 + u_4 B_2 \quad (28)$$

ve K bir sabit olmak üzere $\langle U, U \rangle = K^2 = \text{sabit}$. Bu, birim vektör U 'nun $\{T, N, B_2\}$ tarafından gerilen alt uzayda yer aldığını gösterir ve denklem (1) kullanılarak şu şekilde yazılabilir:

$$U = -\frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)' c_4 T - \frac{k_3}{k_2} c_4 N + c_4 B_2 \quad (29)$$

(29) denkleminin her iki tarafını U ile standart skaler çarpıma tabi tutarsak,

$$K^2 = c_4^2 - c_4^2 \left(\frac{k_3}{k_2} \right)^2 + \frac{c_4^2}{k_1^2} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)^2 \quad (30)$$

(30) denkleminin her iki tarafını c_4^2 ile bölersek,

$$\frac{K^2}{c_4^2} - 1 = - \left(\frac{k_3}{k_2} \right)^2 + \frac{1}{k_1^2} \left(\frac{k_3}{k_2} \right)^2.$$

$$\mu = \frac{K^2}{c_4^2} - 1 \text{ alınırsa,}$$

$$\frac{1}{k_1^2} \left(\left(\frac{k_3}{k_2} \right)^2 \right) - \left(\frac{k_3}{k_2} \right)^2 - \mu = 0. \quad (31)$$

$y = \frac{k_3}{k_2}$ alınırsa, doğrusal olmayan denklem elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Bu teorem için sayısal bir örnek verilmiş olup, k_1 ve μ için bulunan değerler kullanılarak şekli aşağıda gösterilmiştir.

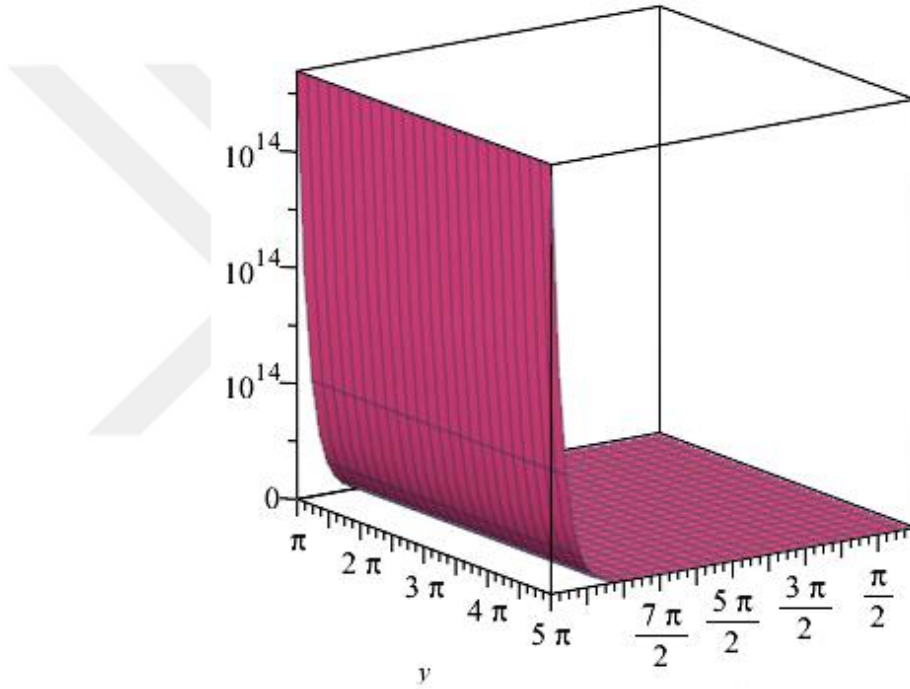
Örnek 3.1.5. γ , $\mathbb{R}_1^4$ 'te birim hızlı uzaysal bir eğri olsun ve denklemi şu şekilde verilsin:

$$\gamma(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cos(2s), \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(2s), \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sinh(s), \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cosh(s) \right).$$

Eğrilikler ve μ değerleri kolayca şu şekilde elde edilir:

$$k_1(s)=1, \quad k_2(s)=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{55}}, \quad k_3(s)=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{11}}, \quad \mu=-\frac{50}{27}$$

Doğrusal olmayan (31) 'e göre çözüm bu şekildedir: $\frac{k_3(s)}{k_2(s)} = \frac{\left(\frac{t^2}{(\epsilon^5)^{2+150}}\right)e^s}{18t}$



Şekil 3.2. Örnek 3.1.5. 'nin yaklaşık çözüm eğrileri.

3.2 N Vektörü Zamansal olan Eğrilerin Karakterizasyonları

4-boyutlu uzayda Lemma 2.1. ve denklem (1) e göre aşağıdaki teoremlerde 4-boyutlu uzayda $\{T, N, B_1, B_2\}$ vektörleri için $\alpha(s)$ eğrisi boyunca N vektörünün zamansal için (k, m) -tip slant helisler ve (k, m) -tip Darboux slant helisler elde edilmiştir. Her tip için karakteristik denklem türetilmiş ve örnekler sunulmuştur.

Teorem 3.2.1 $\alpha(s)$, 4-boyutlu Minkowski uzayında s yay parametresiyle parametrelendirilmiş bir N vektörü zamansal ise (1,2)-tip slant helis ve (1,2)- tip Darboux slant helis olması için

$$\frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} \text{ ve } \frac{k_1 k_3}{k_2}$$

oranlarının sabit olmasıdır.

İspat 3.2.1 Sabit bir birim vektör U ve

$$\langle T, U \rangle = c_1, \langle N, U \rangle = c_2 \quad (32)$$

sabitleri için (32)'nin türevlerini alıp (1) Frenet denklemlerini kullanırsak;

$$\frac{d}{ds} \langle T, U \rangle = \langle k_1 N, U \rangle = k_1 c_2 = 0, \quad (33)$$

$$\frac{d}{ds} \langle N, U \rangle = \langle k_1 T + k_2 B_1, U \rangle = k_1 c_1 + k_2 \langle B_1, U \rangle = 0. \quad (34)$$

(33) ve (34) denklemlerinden

$$c_2 = 0 \quad (k_1 \neq 0)$$

$$k_1 c_1 + k_2 \langle B_1, U \rangle = 0$$

Elde edilir ve $\langle B_1, U \rangle$ sabit olmalıdır. B_1 'in türevi:

$$\frac{d}{ds}\langle B_1, U \rangle = \langle k_2 N + k_3 B_2, U \rangle = k_2 \cdot 0 + k_3 \langle B_2, U \rangle = 0.$$

Buradan $\langle B_2, U \rangle = 0$ ve dolayısıyla $\langle B_1, U \rangle$ sabitse, $\frac{k_1}{k_2}$ sabit olmalıdır.

$D_1 = B_2$ vektörünün sabit bir birim vektör U ile yaptığı açının kosinüsü:

$\cos \theta = \langle B_2, U \rangle$ sabit Türev alınırsa:

$\langle B_2', U \rangle = -k_3 \langle B_1, U \rangle = 0$ Buradan:

$\frac{\langle B_1, U \rangle}{\langle B_2, U \rangle} = \frac{k_2}{k_1}$ sabit, dolayısıyla: $\frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}$ sabit elde edilir.

(1,2)-tip Darboux slant helis koşulu için Darboux vektörü: $D = k_1 B_1 + k_2 B_2$ Sabit bir V vektörü alırsak,

$\langle D, V \rangle = \text{sabit}$ ise $\langle D', V \rangle = \langle (k_1' B_1 + k_1 B_1' + k_2' B_2 + k_2 B_2'), V \rangle = 0$ Frenet denklemleri yerine yazılırsa:

$$(k_1' - k_2 k_3) \langle B_1, V \rangle + (k_2' + k_1 k_3) \langle B_2, V \rangle = 0.$$

Bu denklemin çözümü için:

$$\frac{k_1' - k_2 k_3}{k_2' + k_1 k_3} = -\frac{\langle B_2, V \rangle}{\langle B_1, V \rangle} \text{ sabit}$$

Özel olarak k_1 ve k_2 sabitse: $\frac{k_1 k_3}{k_2}$ sabit elde edilir.

Sonuç 3.2.1. Eğer $\alpha(s)$ eğrisi: $k_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (sabit), $k_2 = \frac{1}{3}$ (sabit), $k_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (sabit) gibi

eğriliklerine sahipse, otomatik olarak (1,2) -tip slant helis ve (1,2) -tip Darboux slant helistir.

Örnek 3.2.1 Minkowski uzayı $\mathbb{R}_1^4$ 'te birim hızlı uzaysal eğri

$\alpha(s) = \left(\frac{\sin(s)}{\sqrt{2}}, \frac{\cos(s)}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ için Frenet çatısı ve eğrilikler:

$$T = \left(\frac{\cos(s)}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin(s)}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad N = \left(-\sin(s), -\cos(s), 0, \sqrt{2} \right)$$

$$B_1 = \left(\frac{\cos(s)}{2}, -\frac{\sin(s)}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right), \quad B_2 = \left(\frac{\sin(s)}{2}, \frac{\cos(s)}{2}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k_2 = \frac{1}{2}, \quad k_3 = \frac{1}{2}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\langle N, N \rangle = -1$ olup bu eğri (1,2) -tip slant helis ve (1,2) -tip Darboux slant helistir.

Teorem 3.2.2 $\alpha(s)$, 4-boyutlu Minkowski uzayında s yay parametresiyle parametrelendirilmiş bir N vektörü zamansal ise (1,3) -tip slant helis ve (1,3) - tip Darboux slant helis olması için

$$\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2 k_3} = \text{sabittir.}$$

İspat 3.2.2 Sabit bir birim vektör U ve

$$\langle T, U \rangle = c_1, \quad \langle B_1, U \rangle = c_3 \quad (35)$$

sabitleri için (35)'nin türevlerini alıp (1) Frenet denklemlerini kullanırsak;

$$\frac{d}{ds}\langle T, U \rangle = \langle k_1 N, U \rangle = 0 \Rightarrow \langle N, U \rangle = 0, \quad (\text{Bu, } U \text{ 'nun } N \text{ 'ye dik olduğunu gösterir.})$$

$$\frac{d}{ds}\langle B_1, U \rangle = \langle k_2 N + k_3 B_2, U \rangle = k_3 \langle B_2, U \rangle = 0 \Rightarrow \langle B_2, U \rangle = 0, \quad (\text{Bu, } U \text{ 'nun } B_2 \text{ 'ye dik olduğunu gösterir ve (1,3) -tip koşuluyla uyumludur.})$$

$$\frac{d}{ds}\langle N, U \rangle = \langle k_1 T + k_2 B_1, U \rangle = k_1 c_1 + k_2 c_3 = 0.$$

Bu son denklemden $\frac{k_1}{k_2} = -\frac{c_3}{c_1}$. c_1 ve c_3 sabit olduğundan, $\frac{k_1}{k_2}$ oranı sabit olmalıdır.

Bu, U 'nun $\{T, B_1\}$ tarafından gerilen uzayda olduğu anlamına gelir.

$$U = c_1 T + c_3 B_1 \quad (\text{çünkü } \langle N, U \rangle = \langle B_2, U \rangle = 0).$$

U sabit olduğundan $U' = 0$:

$$U' = c_1 T' + c_3 B_1' = c_1 (k_1 N) + c_3 (k_2 N + k_3 B_2) = (c_1 k_1 + c_3 k_2) N + c_3 k_3 B_2 = 0.$$

N ve B_2 lineer bağımsız olduğundan:

$$c_1 k_1 + c_3 k_2 = 0, \quad c_3 k_3 = 0.$$

$k_3 \neq 0$ ve $c_3 \neq 0$ (aksi halde $U \parallel T$ olur, çelişki), olup bu yüzden $c_3 = 0$ olamaz.

U zamansal ise ($\langle U, U \rangle = -1$). Bu durumda:

$$U = c_1 T + c_3 B_1, \quad \langle U, U \rangle = c_1^2 + c_3^2 = -1.$$

$U' = 0$ denklemi aynıdır, ancak c_1, c_3 kompleks sayılar olabilir.

$$\frac{c_1}{c_3} = -\frac{k_2}{k_1}, \quad c_1^2 + c_3^2 = -1.$$

Buradan: $\left(-\frac{k_2}{k_1} c_3\right)^2 + c_3^2 = -1 \Rightarrow c_3^2 \left(\frac{k_2^2}{k_1^2} + 1\right) = -1$. c_3^2 sabit olmalı, dolayısıyla:

$$\frac{k_2^2}{k_1^2} + 1 = \text{sabit} \Rightarrow \frac{k_2^2 + k_1^2}{k_1^2} = \lambda \Rightarrow \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2} = \mu \text{ (sabittir)}.$$

(1,3)-tip Darboux Slant Helis Koşulu: Genel olarak Darboux vektörü D , Frenet çatısının dönüşümünü tanımlar. (1,3)-tip Darboux slant helis için, Darboux vektörü D ile sabit bir vektör U arasındaki açı sabit olmalıdır. Darboux vektörü, (3)'teki $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ kümesiyle ilişkilidir. Özellikle, $D_2 = k_2 T - k_1 B_1$ vektörü, U 'nun bileşenleriyle ilişkilidir ve $U = c_1 T + c_3 B_1$ şeklinde yazılabilir (çünkü $\langle N, U \rangle = \langle B_2, U \rangle = 0$). Bu, U 'nun D_2 'ye paralel olduğunu gösterir:

$$D_2 = k_2 T - k_1 B_1.$$

$k_1 c_1 + k_2 c_3 = 0$ olduğundan, D_2 ve U arasında bir bağlantı vardır. k_1 / k_2 oranının sabit olması, $\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2 k_3}$ ifadesinin sabit olup olmadığını belirler. $k_1 / k_2 = \lambda$ (sabit) ise:

$$\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2 k_3} = \frac{\lambda^2 k_2^2 - k_2^2}{\lambda k_2 \cdot k_2 k_3} = \frac{(\lambda^2 - 1)k_2^2}{\lambda k_2^2 k_3} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda k_3}.$$

Bu ifadenin sabit olması için k_3 'ün de sabit olması veya $\lambda^2 - 1$ ile k_3 'ün uyumlu olması gerekir. Ancak, genel durumda bu ifadenin sabit olması, k_1, k_2, k_3 arasında bir bağıntı olduğunu gösterir.

Sonuç 3.2.2. $\alpha(s)$, $(1, 3)$ -tip slant helis ve $(1, 3)$ -tip Darboux slant helis olmanın koşulu,

$\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2 k_3}$ 'ün sabit olmasıdır.

Örnek 3.2.2 $\alpha(t) = \left(\sqrt{2} \sinh\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right), \cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right), \sqrt{2} \cosh\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \right)$ eğrisinin yay parametresi $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow s = \frac{t}{\sqrt{3}}$ ise ($|T|=1$) olup eğrisi için birim teğet vektör ve türevi:

$$T = \alpha'(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cosh\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right), -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right), \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sinh\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \right),$$

$$T' = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \sinh\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right), -\frac{1}{3} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right), -\frac{1}{3} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right), \frac{\sqrt{2}}{3} \cosh\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \right).$$

Normu:

$$\langle T', T' \rangle = \frac{2}{9} \sinh^2\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{9} \cos^2\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{9} \sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{9} \cosh^2\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Dolayısıyla, $k_1 = \sqrt{|\langle T', T' \rangle|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $N = \frac{T'}{k_1}$, N zamansaldır ($\langle N, N \rangle = -1$) elde ederiz.

(1) Frenet denklemlerini kullanılarak B_1 ve B_2 ;

$$B_1 = \frac{T \times N}{|T \times N|}, \quad B_2 = \frac{T \times N \times B_1}{|T \times N \times B_1|}$$

bulunur. k_2 ve k_3 , Frenet denklemlerinden türetilir. ($k_2 = \langle N', B_1 \rangle$, $k_3 = \langle B_1', B_2 \rangle$.)

Darboux Vektörü $D_2 = k_2 T - k_1 B_1$ olup

$$\langle D_2, U \rangle = \text{sabit}, \quad \langle U, U \rangle = -1$$

Bu koşul, k_1 ve k_2 'nin oranının sabit olmasını gerektirir ve $\langle D_2, B_2 \rangle = 0$ (sabit) olduğundan, eğri (1,3)-tip Darboux slant helistir. Sonuç olarak, $\alpha(t)$ eğrisi aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

1. $\alpha(t)$ bir (1,3)-tip slant helis olur: Eğer $k_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ sabit ve k_2 de sabitse, bu durumda $\alpha(t)$ bir (1,3)-tip slant helistir. Ancak genel durumda, k_2 sabit değilse, (1,3)-tip slant helis koşulu sağlanmaz.
2. $\alpha(t)$ bir (1,3)-tip Darboux slant helis olur: Çünkü $\langle D_2, B_2 \rangle = 0$ iç çarpımı sabit olduğundan, bu koşul sağlanmakta ve eğri (1,3)-tip Darboux slant helis olmaktadır.

Örnek 3.2.3 $\alpha(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}s, \frac{1}{2}\sin 2s, \frac{1}{2}\cos 2s, s \right)$ eğrisi yukarıdaki örneğe göre benzer

şekilde çözülerek ve $U = (1, 0, 0, 0)$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$ seçersek, $\langle T, U \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\langle B_1, U \rangle = 0$ sabit elde edilir. O halde $\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2 k_3} = \frac{4 - 1}{4} = \frac{3}{4}$ sabit. Dolayısıyla

$\alpha(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}s, \frac{1}{2}\sin 2s, \frac{1}{2}\cos 2s, s \right)$ eğrisi (1,3)-tip slant helis ve (1,3)-tip Darboux slant helistir.

Teorem 3.2.3 $\alpha(s)$, 4-boyutlu Minkowski uzayında s yay parametresiyle parametrelendirilmiş bir N vektörü zamansal ise (1,4)-tip slant helis ve (1,4)-tip Darboux slant helis olması için

$$\frac{k_1}{k_2 k_3} = \text{sabit}.$$

İspat 3.2.3 Sabit bir birim vektör U ve

$$\langle T, U \rangle = c_1, \quad \langle B_2, U \rangle = c_4 \quad (36)$$

sabitleri için (36)'nin türevlerini alıp (1) Frenet denklemlerini kullanırsak;

$$\frac{d}{ds} \langle T, U \rangle = \langle k_1 N, U \rangle = 0 \Rightarrow \langle N, U \rangle = 0,$$

$$\frac{d}{ds} \langle B_2, U \rangle = \langle -k_3 B_1, U \rangle = 0 \Rightarrow \langle B_1, U \rangle = 0.$$

Buradan U vektörü yalnızca T ve B_2 doğrultularında ifade edilebilir:

$$U = c_1 T + c_4 B_2 \quad (\text{çünkü } \langle N, U \rangle = \langle B_1, U \rangle = 0).$$

U sabit olduğundan $U' = 0$ olmalıdır. Bu durumda:

$$U' = c_1 T' + c_4 B_2' = c_1 (k_1 N) + c_4 (-k_3 B_1) = c_1 k_1 N - c_4 k_3 B_1.$$

Bu ifadenin sıfır vektör olması için: $c_1 k_1 = 0$, $-c_4 k_3 = 0$. Fakat $k_1 \neq 0$ ve $k_3 \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0$ ve $c_4 = 0$ olamaz; aksi takdirde $U = 0$ olur ki bu da sabit birim vektör tanımına aykırıdır. Şimdi U zamansal varsayımı altında ($\langle U, U \rangle = -1$):

$$U = c_1 T + c_4 B_2, \quad \langle U, U \rangle = c_1^2 + c_4^2 = -1.$$

Yine $U' = 0$ ifadesinden:

$$U' = c_1 k_1 N + c_4 (-k_3 B_1) = 0 \Rightarrow c_1 k_1 N = c_4 k_3 B_1.$$

N ve B_1 lineer bağımsız olduğuna göre bu eşitliğin sağlanması için:

$$\frac{c_1}{c_4} = \frac{k_3}{k_1}, \quad \text{ve} \quad c_1^2 + c_4^2 = -1.$$

$c_1 = \frac{k_3}{k_1} c_4$ ifadesi ikinci denkleme yerleştirilirse:

$$\left(\frac{k_3}{k_1} c_4 \right)^2 + c_4^2 = -1 \Rightarrow c_4^2 \left(\frac{k_3^2}{k_1^2} + 1 \right) = -1.$$

Buradan: $\frac{k_3^2 + k_1^2}{k_1^2} = \lambda \Rightarrow \frac{k_1^2}{k_2^2 k_3^2} = \mu \quad (\text{sabit}).$

Teorem 3.2.4 $\alpha(s)$, 4-boyutlu Minkowski uzayında $(\mathbb{R}_1^4)$ bir uzaysal eğri olsun ve N vektörü zamansal olsun. Eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ ve eğrilikleri $k_1, k_2, k_3 \neq 0$ şeklinde ise $\alpha(s)$ eğrisinin $(2,3)$ -tip slant helis ve $(2,3)$ -tip Darboux slant helis olması için

$$\langle T, U \rangle = -\frac{k_2}{k_1} c_3,$$

$$\langle B_2, U \rangle = -\frac{k_2}{k_3} c_2. \text{ olmalarıdır.}$$

İspat 3.2.4 $\alpha(s)$, $\mathbb{R}_1^4$ 'te bir uzaysal eğri olsun ve Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ ile verilsin. Eğrinin $(2,3)$ -tip Darboux slant helis olması için, Darboux vektörü $D_1 = B_2$ 'nin sabit bir birim vektör U ile sabit açı yapması gerekir. Yani:

$$\langle B_2, U \rangle = c_2 \quad (\text{sabit})$$

sağlanabilmesi için B_2 'nin türevi ile U arasındaki iç çarpım sıfır olmalıdır. (1) Frenet denklemlerinden:

$$\frac{d}{ds} \langle B_2, U \rangle = -k_3 \langle B_1, U \rangle = 0$$

$\langle B_1, U \rangle = 0$ olmasını gerektirir (çünkü $k_3 \neq 0$). Ancak, ek olarak N ve B_1 ile U arasındaki iç çarpımların da sabit olması gerekir.

N vektörü zamansal olduğundan, $\langle N, N \rangle = -1$ ve diğer vektörler uzaysal ($\langle T, T \rangle = \langle B_1, B_1 \rangle = \langle B_2, B_2 \rangle = 1$). N ve B_1 vektörlerinin sabit bir birim vektör U ile yaptığı açılarının kosinüslerinin sabit olması gerekir. Yani,

$$\langle N, U \rangle = c_2, \quad \langle B_1, U \rangle = c_3 \quad (37)$$

sabitleri için (37)'nin türevlerini alıp (1) Frenet denklemlerini kullanırsak;

$$\frac{d}{ds} \langle N, U \rangle = \langle k_1 T + k_2 B_1, U \rangle = 0$$

$$\frac{d}{ds}\langle B_1, U \rangle = \langle k_2 N + k_3 B_2, U \rangle = 0.$$

O halde,

$$k_1 \langle T, U \rangle + k_2 c_3 = 0 \Rightarrow \langle T, U \rangle = -\frac{k_2}{k_1} c_3.$$

$\langle N, U \rangle = c_2$ olduğundan,

$$k_2 c_2 + k_3 \langle B_2, U \rangle = 0 \Rightarrow \langle B_2, U \rangle = -\frac{k_2}{k_3} c_2.$$

U vektörü, Frenet çatısı cinsinden şu şekilde yazılabilir:

$$U = aT + bN + cB_1 + dB_2,$$

burada a, b, c, d sabitlerdir. Ancak, $\langle T, U \rangle$, $\langle N, U \rangle$, $\langle B_1, U \rangle$ ve $\langle B_2, U \rangle$ ifadelerini kullanarak bu katsayıları belirleyebiliriz.

$$1. \langle T, U \rangle = a\langle T, T \rangle + b\langle T, N \rangle + c\langle T, B_1 \rangle + d\langle T, B_2 \rangle = a = -\frac{k_2}{k_1} c_3.$$

$$2. \langle N, U \rangle = a\langle N, T \rangle + b\langle N, N \rangle + c\langle N, B_1 \rangle + d\langle N, B_2 \rangle = -b = c_2 \Rightarrow b = -c_2.$$

$$3. \langle B_1, U \rangle = a\langle B_1, T \rangle + b\langle B_1, N \rangle + c\langle B_1, B_1 \rangle + d\langle B_1, B_2 \rangle = c = c_3.$$

$$4. \langle B_2, U \rangle = a \langle B_2, T \rangle + b \langle B_2, N \rangle + c \langle B_2, B_1 \rangle + d \langle B_2, B_2 \rangle = d = -\frac{k_2}{k_3} c_2.$$

Dolayısıyla, U vektörü:

$$U = -\frac{k_2}{k_1} c_3 T - c_2 N + c_3 B_1 - \frac{k_2}{k_3} c_2 B_2.$$

U birim vektör olduğundan, $\langle U, U \rangle = \pm 1$ olmalıdır:

$$\langle U, U \rangle = \frac{k_2^2 c_3^2}{k_1^2} - c_2^2 + c_3^2 + \frac{k_2^2 c_2^2}{k_3^2} = \pm 1.$$

$$U = \left(-\frac{k_2}{k_1} c_3 + \frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2^2 + k_3^2} \right)' c_6 \right) T + \left(\frac{c_6 k_3}{k_2^2 + k_3^2} \right) N + c_3 B_1 + \left(\frac{-c_6 k_2}{k_2^2 + k_3^2} \right) B_2.$$

$$c_6 = \frac{k_3}{\lambda} c_3, \quad \text{ve} \quad \lambda = \left(\frac{k_2}{k_2^2 + k_3^2} \right)':$$

$$\langle T, U \rangle = -\frac{k_2}{k_1} c_3 + \frac{1}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_2^2 + k_3^2} \right)' \frac{k_3}{\lambda} c_3,$$

$$\langle N, U \rangle = \frac{k_3^2}{\lambda(k_2^2 + k_3^2)} c_3,$$

$$\langle B_1, U \rangle = c_3,$$

$$\langle B_2, U \rangle = -\frac{k_2 k_3}{\lambda(k_2^2 + k_3^2)} c_3.$$

$$\langle U, U \rangle = \left(-\frac{k_2}{k_1} c_3 + \frac{1}{k_1} y \frac{k_3}{\lambda} c_3 \right)^2 - \left(\frac{k_3^2}{\lambda(k_2^2 + k_3^2)} c_3 \right)^2 + c_3^2 + \left(-\frac{k_2 k_3}{\lambda(k_2^2 + k_3^2)} c_3 \right)^2,$$

burada $y = \left(\frac{k_3}{k_2^2 + k_3^2} \right)'$ alınıp en son ifade düzenlenirse:

$$\langle U, U \rangle = \frac{1}{k_1^2} \left(-k_2 + \frac{k_3}{\lambda} y \right)^2 c_3^2 - \left(\frac{k_3^2}{\lambda(k_2^2 + k_3^2)} \right)^2 c_3^2 + c_3^2 + \left(\frac{k_2 k_3}{\lambda(k_2^2 + k_3^2)} \right)^2 c_3^2.$$

$\mu = \frac{K^2}{c_3^2} - 1$ ve $y = \left(\frac{k_3}{k_2^2 + k_3^2} \right)'$ alınarak doğrusal olmayan bir denklem elde edilir. U vektörünün birim vektör olması koşulu ($\langle U, U \rangle = \pm 1$), eğrilikler k_1, k_2, k_3 ve sabitler c_2, c_3 arasında aşağıdaki doğrusal olmayan denklemi sağlamalıdır:

$$\frac{1}{k_1^2} \left(-k_2 + \frac{k_3}{\lambda} \left(\frac{k_3}{k_2^2 + k_3^2} \right)' \right)^2 c_3^2 - \left(\frac{k_3^2}{\lambda(k_2^2 + k_3^2)} \right)^2 c_3^2 + c_3^2 + \left(\frac{k_2 k_3}{\lambda(k_2^2 + k_3^2)} \right)^2 c_3^2 = \pm 1.$$

Burada $\lambda = \left(\frac{k_2}{k_2^2 + k_3^2} \right)'$ ve $y = \left(\frac{k_3}{k_2^2 + k_3^2} \right)'$ olarak tanımlanır. Denklemi basitleştirmek için

$\mu = \frac{K^2}{c_3^2} - 1$ alınırsa, eğrilikler arasında doğrusal olmayan bir diferansiyel denklem elde

edilir. $\mu = \frac{K^2}{c_3^2} - 1$ ve $y = \left(\frac{k_3}{k_2^2 + k_3^2} \right)'$ tanımlamalarını kullanarak:

$$\mu = \frac{1}{k_1^2} \left(-k_2 + \frac{k_3}{\lambda} y \right)^2 - \frac{k_3^4}{\lambda^2 (k_2^2 + k_3^2)^2} + \frac{k_2^2 k_3^2}{\lambda^2 (k_2^2 + k_3^2)^2}.$$

Bu, k_1, k_2, k_3 ve λ arasında doğrusal olmayan bir denklem verir. Eğer bu denklem sağlanıyorsa, U birim vektördür ve $\alpha(s)$ eğrisi (2,3) -tip slant helistir.

Sonuç 3.2.4. Frenet denklemleri ve eğrilikler için, U vektörünün birim vektör olması koşulu, doğrusal olmayan bir denklemle sağlanır. Bu denklem çözülebilirse, $\alpha(s)$ eğrisinin (2,3) -tip slant helis olduğu ispatlanmış olur. Eğer $\alpha(s)$ eğrisi (2,3) -tip slant helis ise, N ve B_1 vektörlerinin sabit bir birim vektör U ile yaptığı iç çarpımlar sabittir ve bu koşullar (1) Frenet denklemleri ile uyumludur. Dolayısıyla, $\alpha(s)$ eğrisi (2,3) -tip slant helistir. Eğer U , B_2 ile sabit açı yapıyorsa ve $\langle B_1, U \rangle = 0$ ise, eğri (2,3) -tip slant helistir. Ayrıca, $\langle N, U \rangle = c_2$ ve $\langle B_1, U \rangle = 0$ koşulları sağlanıyorsa, eğri (2,3) -tip Darboux slant helistir.

Örnek 3.2.4 $\mathbb{R}_1^4$ 'te bir uzaysal eğri ise

$$\alpha(s) = (a \cosh(s), a \sinh(s), b \cos(\theta), b \sin(\theta)),$$

burada a, b, θ sabitlerdir. Bu eğrinin Frenet çatısı ve eğrilikleri hesaplanarak (2,3) -tip slant helis olduğu gösterilebilir. Gerçekten,

$$T = \alpha'(s) = (a \sinh(s), a \cosh(s), b \cos(\theta), b \sin(\theta)).$$

Normu:

$$\langle T, T \rangle = a^2 (\sinh^2(s) - \cosh^2(s)) + b^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = -a^2 + b^2.$$

Eğri uzaysal olduğundan $\langle T, T \rangle = 1$ olmalıdır:

$$-a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = a^2 + 1.$$

$$T' = (a \cosh(s), a \sinh(s), 0, 0).$$

Normu:

$$\langle T', T' \rangle = a^2 (\cosh^2(s) - \sinh^2(s)) = a^2.$$

Birinci eğrilik: $k_1 = \|T'\| = a$ (çünkü $\langle T', T' \rangle = a^2$).

Normal vektör: $N = \frac{T'}{k_1} = (\cosh(s), \sinh(s), 0, 0)$. $\langle N, N \rangle = \cosh^2(s) - \sinh^2(s) = -1$ olup o halde N zamansaldır.

$$N' = (\sinh(s), \cosh(s), 0, 0).$$

(1) Frenet denklemine göre:

$$N' = k_1 T + k_2 B_1.$$

Ancak

$$k_1 T = a(a \sinh(s), a \cosh(s), b \cos(\theta), b \sin(\theta)).$$

$$k_2 B_1 = ((1 - a^2) \sinh(s), (1 - a^2) \cosh(s), -ab \cos(\theta), -ab \sin(\theta)).$$

Normu:

$$\langle k_2 B_1, k_2 B_1 \rangle = (1-a^2)^2 (\sinh^2(s) - \cosh^2(s)) + a^2 b^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = -(1-a^2)^2 + a^2 b^2.$$

$$k_2^2 = -(1-a^2)^2 + a^2 b^2.$$

$b^2 = a^2 + 1$ yerleştirilirse:

$$k_2^2 = -(1-a^2)^2 + a^2(a^2 + 1) = -1 + 2a^2 - a^4 + a^4 + a^2 = 3a^2 - 1.$$

Dolayısıyla:

$$k_2 = \sqrt{3a^2 - 1}.$$

$$B_1 = \frac{d}{ds} \left(\frac{(1-a^2) \sinh(s)}{k_2}, \frac{(1-a^2) \cosh(s)}{k_2}, \frac{-ab \cos(\theta)}{k_2}, \frac{-ab \sin(\theta)}{k_2} \right).$$

Benzer şekilde,

$$k_3 B_2 = \left(\frac{(1-a^2) \cosh(s)}{k_2} - k_2 \cosh(s), \frac{(1-a^2) \sinh(s)}{k_2} - k_2 \sinh(s), 0, 0 \right).$$

Buradan:

$$k_3^2 = \left(\frac{(1-a^2)}{k_2} - k_2 \right)^2 (\cosh^2(s) - \sinh^2(s)) = \left(\frac{(1-a^2) - k_2^2}{k_2} \right)^2.$$

$k_2^2 = 3a^2 - 1$ olduğundan:

$$k_3^2 = \left(\frac{1 - a^2 - 3a^2 + 1}{k_2} \right)^2 = \left(\frac{2 - 4a^2}{k_2} \right)^2.$$

Dolayısıyla: $k_3 = \frac{2 - 4a^2}{k_2}$. Bir eğrinin (2,3) -tip slant helis olması için:

$$\langle N, U \rangle = c_2 \quad \text{ve} \quad \langle B_1, U \rangle = c_3 \quad (\text{sabitler})$$

koşullarını sağlayan bir sabit vektör

$$U = xT + yN + zB_1 + wB_2.$$

$\langle N, U \rangle = -y = c_2 \Rightarrow y = -c_2$, ve $\langle B_1, U \rangle = z = c_3$ ve (1) Frenet denklemlerini kullanarak:

$$\frac{d}{ds} \langle N, U \rangle = \langle k_1 T + k_2 B_1, U \rangle = k_1 x + k_2 c_3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{k_2}{k_1} c_3,$$

$$\frac{d}{ds} \langle B_1, U \rangle = \langle k_2 N + k_3 B_2, U \rangle = k_2 (-c_2) + k_3 w = 0 \Rightarrow w = \frac{k_2}{k_3} c_2.$$

Dolayısıyla:

$$U = -\frac{k_2}{k_1} c_3 T - c_2 N + c_3 B_1 + \frac{k_2}{k_3} c_2 B_2.$$

$k_1 = a$, $k_2 = \sqrt{3a^2 - 1}$, $k_3 = \frac{2 - 4a^2}{k_2}$ değerleri sabit olduğundan eğri (2,3)-tip slant helistir.

Örnek 3.2.5 $\alpha(s) = (a \cosh(s/b), a \sinh(s/b), c \cos(s/d), c \sin(s/d))$ ise birim teğet vektör ve türevi;

$$T = \alpha'(s) = \left(\frac{a}{b} \sinh(s/b), \frac{a}{b} \cosh(s/b), -\frac{c}{d} \sin(s/d), \frac{c}{d} \cos(s/d) \right)$$

$$T' = \left(\frac{a}{b^2} \cosh(s/b), \frac{a}{b^2} \sinh(s/b), -\frac{c}{d^2} \cos(s/d), -\frac{c}{d^2} \sin(s/d) \right) = k_1 N.$$

Buradan: $k_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{b^2}\right)^2 - \left(\frac{c}{d^2}\right)^2}$, $N = \frac{T'}{k_1}$ ve Frenet denklemleri kullanılarak

$$\frac{k_2}{k_3} = \text{sabit}$$

Elde edilir ve uygun parametrelerle

$$\frac{k_2^2 - k_1 k_3}{k_3} = \text{sabit}$$

Ancak U birim vektör olduğundan ve $\langle B_2, B_2 \rangle = 1$ olduğundan, $U = B_2$ seçilebilir. Bu durumda,

$$\frac{k_2}{k_3} = \text{sabit}$$

olmalıdır, çünkü B_2 'nin değişimi k_3 ve k_2 ile kontrol edilir. Darboux vektörü $D = k_2 T - k_1 B_1 + k_3 B_2$ şeklinde tanımlanır. (2,3) -tip Darboux slant helis olması için, D 'nin bir sabit doğrultuyla sabit açı yapması gerekir. Bu,

$$\langle D, U \rangle = \text{sabit}$$

koşulunu gerektirir. U 'yu uygun şekilde seçersek (örneğin, $U = D / \| D \|$), bu durumda:

$$\frac{k_2^2 - k_1 k_3}{k_3} = \text{sabit}$$

olmalıdır, çünkü D 'nin normu ve bileşenleri bu oranlara bağlıdır.

Teorem 3.2.5 $\alpha(s)$, 4-boyutlu Minkowski uzayında $(\mathbb{R}_1^4)$ bir uzaysal eğri olsun ve N vektörü zamansal olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin (2,4) -tip slant helis ve (2,4) -tip Darboux slant helis olması için

$$\frac{k_2}{k_1} = \text{sabit} \quad \text{ve} \quad \frac{k_3}{k_2} = \text{sabit} \quad \text{olmasıdır.}$$

İspat 3.2.5 Eğrinin (2,4) -tip slant helis olması için, D_2 vektörünün (yani $k_2 T - k_1 B_1$) sabit bir doğrultu (U) ile sabit açı yapması gerekir. Yani,

$$\langle D_2, U \rangle = \text{sabit} \quad \text{ve} \quad D_2 = k_2 T - k_1 B_1$$

olduğundan,

$$\langle D_2, D_2 \rangle = k_2^2 \langle T, T \rangle + k_1^2 \langle B_1, B_1 \rangle = k_2^2 + k_1^2.$$

D_2 'nin sabit bir doğrultu ile sabit açı yapması için $\frac{D_2}{\|D_2\|}$ 'nin sabit olması gerekir. Bu da

$\frac{k_2}{k_1}$ 'in sabit olması demektir. 4-boyutlu Minkowski uzayında, Darboux vektörü:

$$W = -k_3 B_1 + k_2 B_2$$

(2,4) -tip Darboux slant helis olması için, W vektörünün sabit bir doğrultu (U) ile sabit açı yapması gerekir. Yani,

$$\langle W, U \rangle = \text{sabit}$$

Bu durumda,

$$W = -k_3 B_1 + k_2 B_2 \text{ ve}$$

$$\langle W, W \rangle = k_3^2 \langle B_1, B_1 \rangle + k_2^2 \langle B_2, B_2 \rangle = k_3^2 + k_2^2$$

W 'nin sabit bir doğrultu ile sabit açı yapması için $\frac{k_3}{k_2}$ 'nin sabit olması gerekir.

Sonuç 3.2.5. Her iki koşul da $\frac{k_2}{k_1}$ ve $\frac{k_3}{k_2}$ 'nin sabit olmasını gerektirir. Bu da eğriliklerin oranlarının sabit olması demektir.

Örnek 3.2.6 $\alpha(s) = (a \cos(\lambda s), a \sin(\lambda s), b \cos(\mu s), b \sin(\mu s))$ eğrisi için a, b, λ, μ sabitlerdir ve $a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 = 1$ (yay parametresi koşulu).

$$T = \alpha'(s) = (-a\lambda \sin(\lambda s), a\lambda \cos(\lambda s), -b\mu \sin(\mu s), b\mu \cos(\mu s))$$

ise $\langle T, T \rangle = a^2 \lambda^2 + b^2 \mu^2 = 1$ eğri uzaysaldır.

$$T' = (-a\lambda^2 \cos(\lambda s), -a\lambda^2 \sin(\lambda s), -b\mu^2 \cos(\mu s), -b\mu^2 \sin(\mu s)) = k_1 N .$$

Buradan,

$$k_1 = \sqrt{a^2 \lambda^4 + b^2 \mu^4}, \quad N = \frac{T'}{k_1}$$

$\langle N, N \rangle = -1$ (zamansaldır). $N' = k_1 T + k_2 B_1$ denkleminde k_2 bulunur. Eğer $\lambda = \mu$ seçilirse, $\frac{k_2}{k_1} = \text{sabit}$ ve $\frac{k_3}{k_2} = \text{sabit}$ olduğundan, $\alpha(s)$ bir $(2, 4)$ -tip slant helis ve Darboux slant helistir.

Teorem 3.2.6 $\alpha(s)$, 4-boyutlu Minkowski uzayında $(\mathbb{R}_1^4)$ bir uzaysal eğri olsun ve N vektörü zamansal olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin $(3, 4)$ -tip slant helis ve $(3, 4)$ -tip Darboux slant helis olması için aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

1. $\alpha(s)$, $(3, 4)$ -tip slant helis'tir (yani, D_3 vektörü sabit bir yönle sabit açı yapar).
2. $\alpha(s)$, $(3, 4)$ -tip Darboux slant helis'tir (yani, Darboux vektörü $W = k_1 B_1 + k_2 B_2$ sabit bir yönle sabit açı yapar).
3. $\frac{k_2^2 - k_3^2}{k_1 k_3}$ sabittir.

İspat 3.2.6 (1) Frenet denklemleri ve Lemma 2.1. kullanılarak;

$D_3 = k_3 N - k_2 B_2$ vektörünün sabit bir birim vektör U ile sabit açı yapması gerekir:

$$\langle D_3, U \rangle = \text{sabit} \Rightarrow \langle k_3 N - k_2 B_2, U \rangle = c.$$

D_3 'ün türevi alınırsa:

$$D_3' = k_3' N + k_3 N' - k_2' B_2 - k_2 B_2' = (k_3' - k_1 k_2) T + (k_2 k_3 - k_2') B_1.$$

Burada D_3 ve U vektörleri arasındaki açı sabit olduğundan, bu vektörler paralel olmalıdır, düzenlenirse:

$$\frac{k_2^2 - k_3^2}{k_1 k_3} = \text{sabit}.$$

Darboux vektörü $W = k_1 B_1 + k_2 B_2$ 'nin sabit bir U ile sabit açı yapması için:

$$\langle W, U \rangle = \text{sabit} \Rightarrow \langle k_1 B_1 + k_2 B_2, U \rangle = c.$$

W 'nin türevi alınırsa:

$$W' = k_1' B_1 + k_1 B_1' + k_2' B_2 + k_2 B_2' = (k_1' - k_2 k_3) B_1 + (k_2' + k_1 k_3) B_2.$$

$W \parallel W'$ olması gerektiğinden:

$$\frac{k_1' - k_2 k_3}{k_1} = \frac{k_2' + k_1 k_3}{k_2}.$$

Bu da $\frac{k_2^2 - k_3^2}{k_1 k_3} = \text{sabit}$ koşulunu verir. Böylece, Teorem 3.2.6 ispatlanmış olur.

Örnek 3.2.7 $\alpha(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(s), \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(s), \frac{\sqrt{2}}{2} s, \frac{1}{2} \sin(s) \right)$ eğrisi $k_1, k_2, k_3 \neq 0$ için

$\frac{k_2^2 - k_3^2}{k_1 k_3} = \text{sabit}$ olduğundan bu eğri $(3,4)$ -tip slant helis ve $(3,4)$ -tip Darboux slant helistir.

3.3 B_1 Vektörü Zamansal Olan Eğrilerin Karakterizasyonları

4-boyutlu uzayda denklem (2) (Lemma 2.2.) ve denklem (4) e göre aşağıdaki teoremlerde 4-boyutlu uzayda $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet vektörleri için $\alpha(s)$ eğrisi boyunca N vektörü uzaysal (space-like) ve B_1 vektörü zamansal (time-like) olsun. Bu durumda, $\alpha(s)$ eğrisi zamansal bir eğri için (k, m) -tip slant helisler ve (k, m) -tip Darboux slant helisler elde edilmiştir.

Teorem 3.3.1 $\alpha(s)$, 4-boyutlu Minkowski uzayında s yay parametresiyle parametrelendirilmiş bir N vektörü uzaysal (space-like) ve B_1 vektörü zamansal (time-like) ise $(1,2)$ -tip slant helis ve $(1,2)$ -tip Darboux slant helis olması için gerek ve yeter koşul

$$\langle D_2, U \rangle = \langle k_1(cT - B_1), U \rangle = \text{sabit ve } \frac{k_1}{k_2} = \text{sabittir.}$$

İspat 3.3.1 Sabit bir birim vektör U için:

$$\langle T, U \rangle = c_1, \quad \langle N, U \rangle = c_2,$$

Verilen denklem (2) (Lemma 2.2.) Frenet denklemlerine göre bu şartları sağlıyorsa, o halde $\alpha(s)$ eğrisi bir (1,2)-tip slant helistir. Bu iki iç çarpımın sabit olmasından yola çıkalım:

(a) İlk olarak $\langle T, U \rangle = c_1 = \text{sabit}$ olduğundan:

$$\frac{d}{ds} \langle T, U \rangle = \langle T', U \rangle = 0$$

Frenet formülüne göre:

$$T' = k_1 N \Rightarrow \langle T', U \rangle = \langle k_1 N, U \rangle = k_1 \langle N, U \rangle = 0$$

Bu durumda:

$$\Rightarrow k_1 c_2 = 0$$

Bu eşitlik, $k_1 \neq 0$ ise $c_2 = 0$ yani $\langle N, U \rangle = 0$ olmalıdır.

(b) Şimdi $\langle N, U \rangle = c_2 = \text{sabit}$ olduğundan:

$$\frac{d}{ds} \langle N, U \rangle = \langle N', U \rangle = 0$$

Frenet formülünden:

$$N' = -k_1 T + k_2 B_1 \Rightarrow \langle N', U \rangle = -k_1 \langle T, U \rangle + k_2 \langle B_1, U \rangle = 0$$

Bu denklemden:

$$-k_1 c_1 + k_2 \langle B_1, U \rangle = 0 \Rightarrow \langle B_1, U \rangle = \frac{k_1}{k_2} c_1$$

şeklindedir. Bu ifadenin s'ye göre türevini alıp, verilen Frenet denklemleri doğrultusunda açalım. Önce verilen iç çarpımın türevini alalım:

$$\frac{d}{ds} \langle B_1, U \rangle = \langle B_1', U \rangle = \frac{d}{ds} \left(-\frac{k_1}{k_2} c_1 \right) = -c_1 \left(\frac{k_1'}{k_2} - \frac{k_1 k_2'}{k_2^2} \right)$$

Frenet formülüne göre:

$$B_1' = k_2 N + k_3 B_2 \Rightarrow \langle B_1', U \rangle = k_2 \langle N, U \rangle + k_3 \langle B_2, U \rangle$$

Bu iki ifade eşitlenirse:

$$k_2 \langle N, U \rangle + k_3 \langle B_2, U \rangle = -c_1 \left(\frac{k_1'}{k_2} - \frac{k_1 k_2'}{k_2^2} \right)$$

Eğer $\langle N, U \rangle = 0$ ve $\langle B_2, U \rangle = 0$ ise, sol taraf sıfır olur:

$$0 = -c_1 \left(\frac{k_1'}{k_2} - \frac{k_1 k_2'}{k_2^2} \right) \Rightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{k_1}{k_2} \right) = 0$$

Yani,

$$\frac{k_1}{k_2} = \text{sabit}$$

şartı sağlanmalıdır. Bu da eğrinin (1,2)-tip slant helis olmasının gerekli koşuludur. Benzer şekilde, eğrilikler k_1, k_2, k_3 her yerde sıfırdan farklı olsun.

Eğer sabit bir vektör $U \in \mathbb{R}_1^4$ varsa ve bu vektör

$$\langle D_2(s), U \rangle = \text{sabit}$$

koşulunu sağlıyorsa, burada

$$D_2 = k_2 T - k_1 B_1,$$

o zaman $\alpha(s)$, bir (1,2)-tip Darboux slant helistir. Bu durumun gerek ve yeter koşulu:

$$\frac{k_2}{k_1} = \text{sabit}$$

olmasıdır.

($\Rightarrow$) Önce $\alpha(s)$ eğrisinin bir (1,2)-tip Darboux slant helis olduğunu varsayalım. Bu durumda sabit bir vektör U vardır ve:

$$\langle D_2(s), U \rangle = \langle k_2 T - k_1 B_1, U \rangle = \text{sabit}$$

için s 'ye göre türev alınır:

$$\frac{d}{ds}\langle D_2, U \rangle = \langle D_2', U \rangle = 0$$

$D_2' = (k_2 T - k_1 B_1)'$ ifadesini açalım:

$$D_2' = k_2' T + k_2 T' - k_1' B_1 - k_1 B_1'$$

Frenet formüllerine göre:

$$T' = k_1 N, \quad B_1' = k_2 N + k_3 B_2$$

yerine yazalım:

$$D_2' = k_2' T + k_2 k_1 N - k_1' B_1 - k_1 (k_2 N + k_3 B_2) .$$

Bu son ifade sadeleştirilirse:

$$D_2' = k_2' T - k_1' B_1 + k_2 k_1 N - k_1 k_2 N - k_1 k_3 B_2 = k_2' T - k_1' B_1 - k_1 k_3 B_2$$

ve şimdi iç çarpım alınırsa:

$$\langle D_2', U \rangle = k_2' \langle T, U \rangle - k_1' \langle B_1, U \rangle - k_1 k_3 \langle B_2, U \rangle .$$

Bu ifadenin sıfır olması için, örneğin U yalnızca D_2 doğrultusunda olduğunda, U vektörü T , B_1 , B_2 yönlerinde bileşen içerebilir. Ancak bu sabitlik koşulunun sağlanması için en doğal yol oran $\frac{k_2}{k_1}$ 'in sabit olmasıdır:

$$\langle D_2, U \rangle = \langle k_2 T - k_1 B_1, U \rangle = k_2 \langle T, U \rangle - k_1 \langle B_1, U \rangle = \text{sabit} .$$

Eğer $U = T + \lambda B_1$ yönünde ise:

$$\langle T, U \rangle = \langle T, T \rangle + \lambda \langle T, B_1 \rangle = 1 + 0 = 1 ,$$

$$\langle B_1, U \rangle = \langle B_1, T \rangle + \lambda \langle B_1, B_1 \rangle = 0 - \lambda .$$

Bu durumda:

$$\langle D_2, U \rangle = k_2(1) - k_1(-\lambda) = k_2 + \lambda k_1 .$$

Bu ifadenin sabit olması için:

$$\frac{d}{ds}(k_2 + \lambda k_1) = k_2' + \lambda k_1' = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{k_2}{k_1} \right) = 0 \Rightarrow \frac{k_2}{k_1} = \text{sabit} .$$

($\Leftrightarrow$) Tersine, eğer $\frac{k_2}{k_1} = c$ sabit ise:

$$D_2 = k_2 T - k_1 B_1 = k_1 \left(\frac{k_2}{k_1} T - B_1 \right) = k_1 (cT - B_1).$$

Sabit bir vektörle iç çarpımı da sabit olur:

$$\langle D_2, U \rangle = \langle k_1 (cT - B_1), U \rangle = \text{sabit}.$$

Dolayısıyla eğri, (1,2)-tip Darboux slant helistir.

Sonuç 3.3.1. $\alpha(s)$ eğrisi, (1,2)-tip Darboux slant helistir $\Leftrightarrow \frac{k_2}{k_1} = \text{sabit}$.

Teorem 3.3.2 $\alpha(s)$, 4-boyutlu Minkowski uzayında s yay parametresiyle parametrelendirilmiş bir N vektörü uzaysal (space-like) ve B_1 vektörü zamansal (time-like) ise (1,3)-tip slant helis ve (1,3)- tip Darboux slant helis olması için gerek ve yeter koşul

$$\langle D_3(s), U \rangle = \text{sabit} \text{ ve } \frac{k_3}{k_2} = \text{sabit}$$

olmasıdır.

İspat 3.3.2 Sabit bir birim vektör U için:

$$\langle T, U \rangle = c_1 \text{ ve } \langle B_1, U \rangle = c_3.$$

Verilen denklem (2) (Lemma 2.2.) Frenet denklemlerine göre bu şartları sağlıyorsa, o halde $\alpha(s)$ eğrisi bir (1,3)-tip slant helistir. O halde;

a) $\langle T, U \rangle' = \langle T', U \rangle = \langle k_1 N, U \rangle = k_1 \langle N, U \rangle = 0$ ise aşağıdaki iki durum geçerlidir:

i) Eğer $k_1 = 0$ ve $\langle N, U \rangle \neq 0$ ise:

$$\langle N, U \rangle = a \neq 0, \Rightarrow \langle N', U \rangle = \langle k_2 B_1, U \rangle = k_2 \langle B_1, U \rangle = k_2 c_3 = 0$$

Bu durumda: $k_2 c_3 = 0$.

ii) Eğer $k_1 \neq 0$ ve $\langle N, U \rangle = 0$ ise:

$$\langle N', U \rangle = \langle -k_1 T + k_2 B_1, U \rangle = -k_1 \langle T, U \rangle + k_2 \langle B_1, U \rangle = -k_1 c_1 + k_2 c_3 = 0$$

Dolayısıyla: $\frac{k_1}{k_2} = \frac{c_3}{c_1} = \text{sabit olur.}$

b) $\langle B_1, U \rangle = c_3, \Rightarrow \langle B_1', U \rangle = \langle k_2 N + k_3 B_2, U \rangle = k_2 \langle N, U \rangle + k_3 \langle B_2, U \rangle = 0$ ise aşağıdaki iki durum geçerlidir:

i) Eğer $k_1 = 0, \langle N, U \rangle = a \neq 0$ ise:

$$k_2 a + k_3 \langle B_2, U \rangle = 0 \Rightarrow \langle B_2, U \rangle = \left(\frac{-k_2}{k_3} \right) a$$

Ayrıca:

$$\langle B_2', U \rangle = \langle k_3 B_1, U \rangle = k_3 \langle B_1, U \rangle = k_3 c_3$$

Öte yandan: $\langle B_2, U \rangle' = \left(\frac{-k_2}{k_3} \right)' a$ olup, bu eşitlikten:

$$\left(\frac{-k_2}{k_3} \right)' a = -k_3 c_3.$$

ii) Eğer $k_1 \neq 0$ ve $\langle N, U \rangle = 0$ ise:

$$k_3 \langle B_2, U \rangle = 0 \Rightarrow \langle B_2, U \rangle = 0.$$

($\Rightarrow$) Diyelim ki $\alpha(s)$ bir (1,3)-tip Darboux slant helis. O hâlde sabit bir vektör U vardır ve:

$$\langle D_3(s), U \rangle = \langle k_3 N - k_2 B_2, U \rangle = \text{sabit}$$

her iki tarafın s 'ye göre türevini alalım:

$$\frac{d}{ds} \langle D_3, U \rangle = \langle D_3', U \rangle = 0.$$

D_3' ü hesaplayalım:

$$D_3' = (k_3 N - k_2 B_2)' = k_3' N + k_3 N' - k_2' B_2 - k_2 B_2'$$

Frenet denklemlerine göre:

$$N' = -k_1 T + k_2 B_1, \quad B_2' = k_3 B_1.$$

Bu ifadeleri yerine koyarsak:

$$\Rightarrow D_3' = k_3' N - k_3 k_1 T + (k_3 k_2 - k_2 k_3) B_1 - k_2' B_2 = k_3' N - k_3 k_1 T - k_2' B_2$$

Şimdi iç çarpım alalım:

$$\langle D_3, U \rangle = k_3 \langle N, U \rangle - k_3 k_1 \langle T, U \rangle - k_2 \langle B_2, U \rangle = 0$$

Bu eşitliğin sağlanması için $U = aN + bB_2$ doğrultusunda ise,

$$D_3 = k_3 N - k_2 B_2 = k_2 \left(\frac{k_3}{k_2} N - B_2 \right).$$

Şayet $\frac{k_3}{k_2} = \text{sabit} = c$ ise:

$$D_3 = k_2 (cN - B_2) \Rightarrow \langle D_3, U \rangle = k_2 \langle cN - B_2, U \rangle = \text{sabit}$$

çünkü hem c hem U hem de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sonucu sabittir. Bu nedenle:

$$\frac{k_3}{k_2} = \text{sabit} \Rightarrow (1,3)\text{-tip Darboux slant helis elde edilir.}$$

($\Leftarrow$) Tersine, eğer $\frac{k_3}{k_2} = c$ sabit ise:

$$D_3 = k_3 N - k_2 B_2 = k_2 (cN - B_2).$$

Sabitler çarpılmış bir vektör alanıdır. Eğer U doğrultusu $cN - B_2$ ile sabit açı yapıyorsa, iç çarpım da sabittir:

$$\langle D_3, U \rangle = k_2 \langle cN - B_2, U \rangle = \text{sabit}$$

bu da gösterir ki bu eğri bir (1,3)-tip Darboux slant helistir.

Sonuç 3.3.2. $\alpha(s)$ eğrisi, (1,3)-tip slant helis veya Darboux slant helis ise $\frac{k_3}{k_2} = \text{sabittir}$.

Teorem 3.3.3 $\alpha(s)$, 4-boyutlu Minkowski uzayında s yay parametresiyle parametrelendirilmiş bir N vektörü uzaysal (space-like) ve B_1 vektörü zamansal (time-like) ise (1,4)-tip slant helis ve (1,4)- tip Darboux slant helis ise

$$k_3 \left(-\frac{k_1}{k_2} c_1 \right) = \text{sabit}$$

olmasıdır.

İspat 3.3.3 Sabit bir birim vektör U için:

$$\langle T, U \rangle = c_1 \text{ ve } \langle B_2, U \rangle = c_4$$

ya da eşdeğer olarak

$$\langle D_4, U \rangle = \text{sabit} \text{ ve } \langle D_1, U \rangle = \text{sabit},$$

verilen denklem (2) (Lemma 2.2.) Frenet denklemleri ve (4) denklemine göre bu şartları sağlıyorsa, o halde $\alpha(s)$ eğrisi bir (1,4)-tip slant helis ve aynı zamanda bir (1,4)-tip Darboux slant helistir. Aşağıdaki iki durum söz konusudur:

$$(a) \langle T, U \rangle = c_1 \text{ ise } \langle T, U \rangle' = \langle T', U \rangle = \langle k_1 N, U \rangle = k_1 \langle N, U \rangle = 0 .$$

Eğer $k_1 = 0$ ve $\langle N, U \rangle \neq 0$ ise:

$$\langle N, U \rangle = a' \neq 0, \quad \langle k_1 T + k_2 B_1, U \rangle = 0 \Rightarrow k_2 \langle B_1, U \rangle = 0.$$

Yani: $k_2 c_3 = 0$. Eğer $k_1 \neq 0$ ve $\langle N, U \rangle = 0$ ise:

$$k_1 \langle T, U \rangle + k_2 \langle B_1, U \rangle = 0 \Rightarrow k_1 c_1 + k_2 c_3 = 0 \Rightarrow \langle B_1, U \rangle = -\frac{k_1}{k_2} c_1 \text{ elde edilir.}$$

$$(b) \langle B_2, U \rangle = c_4 \text{ ise } \langle B_2', U \rangle = \langle k_3 B_1, U \rangle = k_3 \langle B_1, U \rangle = 0.$$

$$\text{Eğer } \langle B_1, U \rangle = -\frac{k_1}{k_2} c_1 \text{ ise: } k_3 \left(-\frac{k_1}{k_2} c_1 \right) = 0 \Rightarrow \text{sabit olur.}$$

Sonuç 3.3.3. hem $\langle T, U \rangle = \text{sabit}$ hem de $\langle B_2, U \rangle = \text{sabit}$ koşulları sağlandığı için bu eğri, (1,4)-tip slant helis ve (1,4)-tip Darboux slant helistir.

Teorem 3.3.4 $\alpha(s)$, 4-boyutlu Minkowski uzayında s yay parametresiyle parametrelendirilmiş bir N vektörü uzaysal (space-like) ve B_1 vektörü zamansal (time-like) ise (2,3)-tip slant helis ve (2,3)-tip Darboux slant helis ise

$$\frac{1}{k_3} \left(\frac{k_2}{k_3} \right)' = \text{sabit}$$

olmasıdır.

İspat 3.3.4 Sabit bir birim vektör $U \in \mathbb{R}_1^4$ için:

$$\langle N, U \rangle = c_2, \langle B_1, U \rangle = c_3$$

ya da eşdeğer olarak

$$\langle D_2, U \rangle = \text{sabit} \quad \text{ve} \quad \langle D_3, U \rangle = \text{sabit},$$

verilen denklem (2) (Lemma 2.2.) Frenet denklemleri ve (4) denklemine göre bu şartları sağlıyorsa, o halde $\alpha(s)$ eğrisi bir (2,3)-tip slant helis ve (2,3)- tip Darboux slant helistir.

Aşağıdaki iki durum söz konusudur:

a) $\langle N, U \rangle = c_2$ ve $\langle B_1, U \rangle = c_3$ olmak üzere

$$\langle N, U \rangle' = \langle N', U \rangle = \langle -k_1 T + k_2 B_1, U \rangle = -k_1 \langle T, U \rangle + k_2 \langle B_1, U \rangle.$$

$$\text{Buradan: } -k_1 \langle T, U \rangle + k_2 c_3 = 0 \Rightarrow \langle T, U \rangle = \frac{k_2}{k_1} c_3$$

b) Ayrıca $\langle B_1, U \rangle = c_3$ sabit olduğundan, türev alınırsa:

$$\langle B_1, U \rangle' = \langle k_2 N + k_3 B_2, U \rangle = k_2 \langle N, U \rangle + k_3 \langle B_2, U \rangle = 0.$$

$$\text{Buradan: } \langle B_2, U \rangle = -\frac{k_2}{k_3} c_2 \Rightarrow \langle B_2, U \rangle' = -k_3 c_3 = \left(-\frac{k_2}{k_3} \right)' c_2.$$

Dolayısıyla bu eğri bir (2,3)-tip slant helistir ve

$$\langle D_2, U \rangle = \langle k_2 T - k_1 B_1, U \rangle = k_2 \langle T, U \rangle - k_1 \langle B_1, U \rangle = \text{sabit}$$

oluyorsa, bu eğri bir (2,3)-tip Darboux slant helistir.

Teorem 3.3.5 $\alpha(s)$, 4-boyutlu Minkowski uzayında s yay parametresiyle parametrelendirilmiş bir N vektörü uzaysal (space-like) ve B_1 vektörü zamansal (time-like) ise (2,4)-tip slant helis ve (2,4)- tip Darboux slant helis ise

$$\frac{k_2}{k_3} = -\frac{c_4}{c_2} \quad \text{olmasıdır.}$$

İspat 3.3.5 Sabit bir birim vektör U için:

$$\langle N, U \rangle = c_2 \quad \text{ve} \quad \langle B_2, U \rangle = c_4$$

ya da eşdeğer olarak

$$\langle D_4, U \rangle = \text{sabit} \quad \text{ve} \quad \langle D_2, U \rangle = \text{sabit},$$

olmasıdır. Verilen denklem (2) (Lemma 2.2.) Frenet denklemleri ve (4) denklemine göre bu şartları sağlıyorsa, o halde $\alpha(s)$ eğrisi bir (2,4)-tip slant helis ve (2,4)- tip Darboux slant helistir. Aşağıdaki iki durum söz konusudur:

a) $\langle N, U \rangle = c_2$ sabit olsun:

$$\langle N', U \rangle = \langle -k_1 T + k_2 B_1, U \rangle = -k_1 \langle T, U \rangle + k_2 \langle B_1, U \rangle = 0 \Rightarrow \langle B_1, U \rangle = \frac{k_1}{k_2} \langle T, U \rangle \quad \text{olur.}$$

i) $k_2 = 0$ ise ve $\langle B_1, U \rangle \neq 0$ ise:

$$B_1' = k_2 N + k_3 B_2 \Rightarrow \langle B_1', U \rangle = k_3 \langle B_2, U \rangle = 0 \Rightarrow k_3 c_4 = 0.$$

ii) $k_2 \neq 0$ ve $\langle B_1, U \rangle = 0$ ise:

$$k_2 c_2 + k_3 \langle B_2, U \rangle = 0 \Rightarrow \langle B_2, U \rangle = -\frac{k_2}{k_3} c_2.$$

b) Ayrıca $\langle B_2, U \rangle = c_4$ sabit olduğundan:

$$\langle B_2', U \rangle = \langle k_3 B_1, U \rangle = k_3 \langle B_1, U \rangle = 0 \Rightarrow \langle B_1, U \rangle = 0.$$

Bu durumda bu eğri hem (2,4)-tip slant helis hem de (2,4)-tip Darboux slant helistir.

Teorem 3.3.6 $\alpha(s)$, 4-boyutlu Minkowski uzayında s yay parametresiyle parametrelendirilmiş bir N vektörü uzaysal (space-like) ve B_1 vektörü zamansal (time-like) ise (3,4)-tip slant helis ve (3,4)- tip Darboux slant helis ise

$$k_3 c_3 = \text{sabit}$$

olmasıdır.

İspat 3.3.6 Sabit bir birim vektör U için:

$$\langle B_1, U \rangle = c_3 \text{ ve } \langle B_2, U \rangle = c_4$$

ya da eşdeğer olarak

$$\langle D_4, U \rangle = \text{sabit} \quad \text{ve} \quad \langle D_3, U \rangle = \text{sabit},$$

verilen denklem (2) (Lemma 2.2.) Frenet denklemleri ve (4) denklemine göre bu şartları sağlıyorsa, o halde $\alpha(s)$ eğrisi bir (3,4)-tip slant helis ve (3,4)- tip Darboux slant helistir.

Aşağıdaki iki durum söz konusudur:

a) $\langle B_1', U \rangle = 0$ ise $k_2 \langle N, U \rangle + k_3 \langle B_2, U \rangle = 0$ denkleminde $k_2 \langle N, U \rangle + k_3 c_4 = 0$ elde ederiz. O halde $\langle N, U \rangle = \frac{-k_3}{k_2} c_4$ s'ye göre tekrar türev alırsak;

$$\langle T, U \rangle = \frac{1}{k_1} \left[\left(\frac{k_3}{k_2} \right)' c_4 + k_2 c_3 \right]$$

bulunur.

b) $\langle B_2', U \rangle = 0$ ise $-k_3 \langle B_1, U \rangle = 0$ ve $\langle B_1, U \rangle = c_3$ için $k_3 c_3 = \text{sabit}$ olur. Bu eşitlikten, ya $k_3 = 0$ ya da $c_3 = 0$ olması gerekir. Her iki durumda da $\langle B_1, U \rangle$ sabit kalır.

Dolayısıyla, eğer hem $\langle B_1, U \rangle$ hem de $\langle B_2, U \rangle$ sabit ise, bu durumda Darboux vektör alanlarından biri olan: $D_3 = k_3 N - k_2 B_2$ için:

$$\langle D_3, U \rangle = \langle k_3 N - k_2 B_2, U \rangle = k_3 \langle N, U \rangle - k_2 \langle B_2, U \rangle = \text{sabit}$$

olur. Bu da (3,4)-tip slant helis ve (3,4)-tip Darboux slant helis tanımını sağlar. Teorem ispatlanmıştır.

4 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, Minkowski 4-uzayındaki uzaysal eğri için k -tip ve (k, m) -tip eğik helislerin ve k -tipi Darboux eğik helislerin doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerini oluşturuyoruz. Özellikle bu çalışmada, k -tip ve (k, m) -tip eğik helis ve k -tip ve (k, m) -tip Darboux eğik helis'in farklı sabitlere olan karşılıklarını inceliyoruz. Gelecekteki çalışmalarda, k -tip ve (k, m) -tip eğik helis ve k -tip ve (k, m) -tip Darboux eğik helis'e karşılık gelen sabitlerin aynı olduğu durumlar incelenebilir. Bunun neticesinde yeni ve literatüre katkısı olacak sonuçlar elde ettik. Vermiş olduğumuz bu tanımın daha ne kadar genişletilebileceğine dair incelemeler ve farklı başka hangi örnekleri kapsayacağına dair araştırmalar yapılabilir. Ayrıca, bu tezde elde edilen teoremler ve sonuçlar, eğrilerin sadece yönsel davranışlarını değil aynı zamanda geometriye ait dinamik büyüklüklerin (eğrilikler) oranlarının da belirli koşullarda sabit olması gerektiğini ortaya koymaktadır. Böylece, bir eğrinin belirli bir slant helis türüne ait olup olmadığı yalnızca iç çarpımlar üzerinden değil, aynı zamanda eğrilik fonksiyonlarının ilişkileri üzerinden de belirlenebilmektedir.

1. Uygulamalı Örneklerin Geliştirilmesi: Verilen teorem ve ispatlara uygun örnek eğrilerin oluşturulması ve bu eğrilerin parametrik olarak analiz edilmesi, teorik sonuçların somutlaştırılmasını sağlar. Bu nedenle her tip için örnek eğriler oluşturulmalı ve bu eğrilerin davranışı grafiksel olarak incelenmelidir.

2. Yüksek Boyutlara Genelleme: Bu çalışmada dört boyutlu Lorentz uzayı dikkate alınmıştır. Ancak bu yöntem, n boyutlu yarı-Riemannian veya Lorentzian uzaylara genellenebilir. Bu tür genellemeler, diferansiyel geometri ile ilgilenen araştırmacılar için yeni bir araştırma alanı sunabilir.

3. Darboux Vektör Alanları Üzerinden Geometrik Yorumlar: Darboux vektörlerinin eğrinin hareketini nasıl kodladığı, özellikle fiziksel yorumlarda önem taşımaktadır. Bu nedenle ileride bu vektörlerin geometrik anlamlarının fiziksel sistemlerdeki karşılıkları araştırılabilir.

4. Simetrik ve Tzitzeica Eğrileriyle İlişki: Özellikle (k, m) -tip slant helislerin Tzitzeica eğrileriyle ilişkileri üzerine çalışmalar yapılabilir. Çünkü bu tür eğrilerde özel simetri ve oran koşulları sağlandığı bilinmektedir. Elde edilen bu sonuçlar, Lorentz uzaylarında tanımlı eğrilerin karakterizasyonu ve sınıflandırılması açısından teorik olarak güçlü bir

temel sunmaktadır. Ayrıca uygulamalı matematik, fizik ve mühendislik alanlarındaki modellerde kullanılabilecek yeni eğri tiplerinin tanımlanmasına katkı sağlar.



KAYNAKLAR

- [1]. Izumiya, S., & Takeuchi, N. (2004). New special curves and developable surfaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 28, 153–163.
- [2]. O'Neill, B. (1983). *Semi Riemannian Geometry*. Academic Press, New York-London.
- [3]. Dldl, M. (2020). Vector fields and planes in which play the role of Darboux vector. *Turkish Journal of Mathematics*, 44, 274–283.
- [4]. Akgün, A. M. (2021). New kind Frenet curves in Minkowski space. *Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences*, 2, 70–82.
- [5]. Camcı, Ç., İlarıslan, K., Kula, L., & Hacısalihoğlu, H. H. (2009). Harmonic curvatures and generalized helices in E^n . *Chaos, Solitons and Fractals*, 40, 2590–2596.
- [6]. İlarıslan, K., & Nesovic, E. (2012). Some characterizations of null osculating curves in the Minkowski space-time. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, 61, 1–8.
- [7]. İlarıslan, K., Nesovic, E., & Petrovic-Torgasev, M. (2003). Some characterizations of rectifying curves in Minkowski 3-space. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 33, 23–32.
- [8]. İlarıslan, K., & Boyacıoğlu, Ö. (2008). Position vectors of a time-like and a null helix in Minkowski 3-space. *Chaos, Solitons and Fractals*, 38, 1383–1389.
- [9]. Öztürk, G., Grpinar, S., & Arıslan, K. (2017). A new characterization of curves in Euclidean 4-space E^4 . *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*, 83, 39–50.
- [10]. Walrave, J. (1995). *Curves and Surfaces in Minkowski Space* (PhD thesis). K.U. Leuven, Faculty of Science.
- [11]. Williams, M. Z. (1964). Stein F. M., A triple product of vectors in four-space. *Mathematics Magazine*, 37, 230–235.

- [12]. Yaylı, Y., Gök, İ., & Hacısalihoğlu, H. H. (2018). Extended rectifying curves as new kind of modified Darboux vectors. *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics*, 9, 18–31.
- [13]. Ali, A. T., & Önder, M. (2012). Some characterizations of rectifying space-like curves in the Minkowski space-time. *Global Journal of Science Frontier Research Mathematics*, 12, 2249–4626.
- [14]. Keleş, S., Yüksel Perktaş, S., & Kılıç, E. (2010). Biharmonic curves in LP-Sasakian manifolds. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Society*, 33, 325–344.
- [15]. Bulut, F., & Tatlı, M. E. (2024). Some special type Darboux slant helices in $\mathbb{R}_1^4$. *International Geometry Symposium In Honor of Prof. Dr. Aysel Turgut Vanlı*, 1–2 July 2024, Munzur University and Amasya University, Turkey.
- [16]. Bulut, F. (2023). Darboux Vector-based Non-linear Differential Equations. *Prespacetime Journal*, 14(5), 533-543.
- [17]. Bulut, F., & Eker, A. (2023). Lorentz-Darboux Çatısına Göre k – tip ve (k, m) – tip Slant Helisler. *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 13(2), 1237-1246.
- [18]. Bulut, F. (2021). Slant Helices of (k, m) – Type According to the ED-Frame in Minkowski 4-Space. *Symmetry*, 13(11), 2185-2201.
- [19]. Bulut, F. (2021). Special helices on equiform differential geometry of timelike curves in E_1^4 . *Cumhuriyet Science Journal*, 42(4), 906-915.
- [20]. Bulut, F., & Tartık, F. (2021). (k, m) – type Slant Helices According to Parallel Transport Frame in Euclidean 4-Space. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 13(2), 261-269.
- [21]. Erbek, E. (2024). 4-boyutlu Pseudo-Galilean uzayında eğriler. (Yüksek lisans tezi) Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [22]. Hacısalihoğlu, H.H. (1980). Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları.

- [23]. Hacısalihoğlu, H.H. (1983). Diferensiyel Geometri, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları.

