

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEDEKIND TOPLAMLARININ ORTALAMA DEĞERLERİ

AYHAN DİL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2005

DEDEKIND TOPLAMLARININ ORTALAMA DEĞERLERİ

AYHAN DİL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2005

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEDEKİND TOPLAMLARININ ORTALAMA DEĞERLERİ

AYHAN DİL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez/...../2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından () not takdir edilerek
oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

JÜRİ:

Prof. Dr. Veli KURT
(Danışman)

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Yrd. Doç. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

ÖZET

DEDEKIND TOPLAMLARININ ORTALAMA DEĞERLERİ

Ayhan DİL

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr.Veli KURT

Aralık 2005, 51 Sayfa

Bu tezin amacı Bernoulli, Euler, Genocchi polinomları ve sayıları ile ilgili bazı özdeşlikler, yineleme bağıntıları elde etmek; Euler-Seidel matrislerinin öğelerini veren yeni üreteçler bulmak ve $\mathbb{Z}_p$ üzerinde Euler-Seidel matrislerinin tiplerini belirlemektir.

Çalışmada öncelikle Dedekind toplamları, Stirling sayıları, Bernoulli, Euler, Genocchi polinomları ve sayıları ile ilgili temel tanımlar, özdeşlikler, yineleme bağıntıları verilmiş; bazı özellikleri incelenmiştir. Söz konusu sayılar için Akiyama-Tanigawa algoritması verilmiştir.

Daha sonra Euler-Seidel matrisleri tanıtılmış, çeşitli özellikleri gösterilmiş ve verilen örneklerle konu detaylandırılmıştır. Bunun yanısıra Euler-Seidel matrislerinin Bernoulli, Euler, Genocchi ve Tanjant sayıları ile ilişkisi kurulmuştur.

Son bölümde Euler-Seidel matrislerinin $\mathbb{Z}_p$ üzerinde $p(p-1) \times p$ tipinde oldukları gösterilmiştir. Bu matrislerin a_n^k girdileri için yeni üreteçler elde edilmiştir. Zhi-Wei Sun, Hao Pan ve Ke-Jian Wu'nun Bernoulli, Euler polinomları ve sayıları için bulduğu bağıntılar, Genocchi sayıları ve polinomları için de elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Dedekind Toplamları, Bernoulli Polinomları, Euler Polinomları, Genocchi Polinomları, Tanjant sayıları, Stirling Sayıları, Euler-Seidel matrisleri, Akiyama-Tanigawa Algoritması

JÜRİ: Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Yrd. Doç. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

ABSTRACT

MEAN VALUES OF DEDEKIND SUMS

Ayhan DİL

M.Sc. in Mathematics

Adviser: Prof. Dr.Veli KURT

December 2005, 51 Pages

The aim of this thesis is to obtain some identities and recursion relations concerning Bernoulli, Euler, Genocchi polynomials and numbers; to find generators which give the entries of Euler-Seidel matrices and to determine the types of Euler-Seidel matrices.

Firstly, Dedekind sums, Stirling numbers, Bernoulli, Euler, Genocchi polynomials and numbers are defined; fundamental properties of these sums, numbers and polynomials are given also identities and recursion relations of these polynomials, numbers are investigated. Besides, The Akiyama-Tanigawa algorithm for these numbers is given. Then Euler-Seidel matrices are defined, some of their properties are given and with some examples the subject is studied in detail. Furthermore, the connection between Euler-Seidel matrices and Bernoulli, Euler, Genocchi and Tangent numbers is established.

In the final section it is proved that the type of Euler-Seidel matrices on $\mathbb{Z}_p$ is $p(p-1) \times p$. New generators for a_n^k which are entries of Euler-Seidel matrices are obtained. Also relations for Genocchi polynomials and numbers are obtained in a similar fashion to the relations for Bernoulli and Euler polynomials and numbers given by Sun, Pan, Wu (2004).

KEY WORDS: Dedekind Sums, Bernoulli Polynomials, Euler Polynomials, Genocchi Polynomials, Tanjant numbers, Stirling numbers, Euler-Seidel matrices, Akiyama-Tanigawa Algorithm.

COMMITTEE: Prof. Dr. Veli KURT

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Yrd. Doç. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

ÖNSÖZ

Bernoulli, Euler, Genocchi polinomları ve sayıları; sayılar teorisinin önemli çalışma konuları arasındadır. Bazı üstel fonksiyonların rasyonel formlarının seri açılımından elde edilen bu polinomlar ve sayılar; uygulamalı matematik, istatistik ve bilgisayar programlama gibi uygulama alanlarına sahiptir. Bu çalışmada, bu polinomlar ve sayılar bir arada incelenmiştir.

Euler-Seidel matrisleri, daha önce üzerinde çok fazla çalışılmamış bir konu olmasına rağmen bugün Sayılar Teorisinin güncel konuları arasındadır. Bu çalışmanın daha sonra Euler-Seidel matrisleri, Genocchi polinomları ve sayıları ile ilgili çalışacak olan araştırmacılara yararlı olacağını umuyorum.

Bu tez çalışması boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan; desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Prof.Dr. Veli KURT'a, yardımlarını gördüğüm Araştırma Görevlisi Mehmet CENKÇİ ve Araştırma Görevlisi Mümün CAN'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
1.1. Çalışmanın Kapsamı	1
1.2. Temel Kavramlar ve Gösterimler	1
1.2.1. Dedekind toplamaları	1
1.2.2. Bernoulli, Euler, Genocchi polinomları ve sayıları	2
2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMA	6
2.1. Dedekind Toplamalarının Bazı Özellikleri	6
2.2. Bernoulli, Euler, Genocchi Polinomları ve Sayılarının Bazı Özellikleri	7
3. MATERYAL VE METOT	10
3.1. Euler-Seidel Matrisleri	10
3.1.1. Tanımlar ve bazı özellikler	10
3.1.2. Euler-Seidel matrisleri için örnekler	12
3.2. Bernoulli sayıları için Akiyama-Tanigawa algoritması	21
3.3. Bernoulli ve Euler Sayıları için Bazı Yineleme Bağlılıkları ve Özdeşlikler	32
4. BULGULAR	38
4.1. $\mathbb{Z}_p$ Üzerinde Euler-Seidel Matrisleri	38
4.2. Euler-Seidel Matrislerinde a_n^k Öğeleri için Üreteç Fonksiyonu	42
4.3. Genocchi Polinomları ve Sayıları için Bazı Özdeşlikler ve Yineleme Bağlılıkları	44
5. SONUÇ	48
6. KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	51

1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Kapsamı

Bu tez çalışmasının ana materyali Bernoulli sayıları ve polinomlarıdır. Ele alınan diğer sayılar ve polinomlar için Bernoulli sayıları ve polinomları temel fikri oluşturmuştur.

Jacob Bernoulli'nin (1654-1705) en önemli eserlerinden birisi ölümünden altı yıl sonra Basel'de basılan "Ars Conjectandi" isimli kitabıdır. Bernoulli sayıları bu kitapta üstel serilerle ilgili bir tartışma sırasında ele alınmıştır. Bernoulli sayıları, sayılar teorisinin (Apostol 1976-a) ve kombinator teorinin (Comtet 1970) önemli çalışma konuları arasındadır.

Euler, Genocchi, Stirling, Tanjant sayıları gibi sayı dizileri Bernoulli sayıları ile yakından ilişkilidir. Bu sayıların genelleştirilmesiyle elde edilen polinomlarda, Bernoulli polinomlarının rolü Bernoulli sayılarında olduğu gibi önemlidir.

Bu çalışmada söz konusu sayılar ve polinomlar, üretic fonksiyonları ve yineleme bağıntıları yardımıyla elde edildi; matris girdileri olarak ele alınıp Euler-Seidel matrisleri ile ilişkileri kuruldu. Ayrıca Akiyama -Tanigawa algoritması kullanılarak Bernoulli, Euler ve Tanjant sayılarının Stirling sayılarının ikinci çeşiti cinsinden ifadeleri verildi. Bu algoritma ile elde edilen matrislerin başlangıç dizilerini değiştirmek suretiyle ilk sütun elemanlarının bahsedilen sayılar olarak elde edildiği gösterildi.

Son olarak Euler-Seidel matrisleri üzerine cebirsel incelemeler yapıldı. Bu matrisler ile ilgili Dominique Dumont'un (Dumont 1981) yaptığı çalışmalar devam ettirildi.

1.2. Temel Kavramlar ve Gösterimler

1.2.1. Dedekind toplamları

Tanım 1.1 $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $((x))$ fonksiyonu,

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & , x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & , x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ifadesi ile tanımlanır (Rademacher ve Grosswald 1976). Burada $[x]$, x 'in tam değeridir.

Tanım 1.2 $s(h, k)$ Dedekind toplamı, $h, k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$ ve $(h, k) = 1$ olmak üzere,

$$s(h, k) = \sum_{\mu \pmod{k}} \left(\left(\frac{\mu}{k} \right) \right) \left(\left(\frac{h\mu}{k} \right) \right)$$

eşitliği ile verilir (Rademacher ve Grosswald 1976), (Apostol 1976-b).

Dedekind toplamlarının 1892'de Dedekind tarafından ortaya konulduğu günden bugüne kadar, bu toplamlar ve bu toplamların genelleştirilmiş biçimleri; sayılar teorisi başta olmak üzere matematiğin birçok alanında üzerinde çalışılan bir konu olmuştur. Ayrıca son zamanlarda şifreleme bilimi ile önemli bir uygulama alanı bulmuştur.

Dedekind toplamlarının en önemli özelliklerinden birisi reciprocity bağıntısıdır. Reciprocity bağıntısı :

$$s(h, k) + s(k, h) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{k} + \frac{k}{h} + \frac{1}{hk} \right)$$

ifadesi ile verilir. Bu bağıntının çeşitli ispatları Rademacher ve Grosswald (1972), Apostol (1976-b) ve daha birçok matematikçi tarafından yapılmıştır.

1.2.2. Bernoulli, Euler, Genocchi polinomları ve sayıları

Tanım 1.1 Herhangi bir x karmaşık sayısı için $B_n(x)$ Bernoulli polinomları,

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi \quad (1.1)$$

ifadesi ile verilir. Bu eşitlikte $x = 0$ için $B_n(0)$ ifadesi n . Bernoulli sayısı olarak adlandırılır ve B_n ile gösterilir. Böylece (1.1) eşitliğinde $x = 0$ alınırsa,

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

ifadesi elde edilir (Apostol 1976-a).

Önerme 1.2 Bernoulli polinomları ve sayıları aşağıdaki ifadeleri sağlarlar:

- i. $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}, n \geq 1$
- ii. $B_n(1) = B_n(0), n \geq 2$
- iii. $B'_n(x) = nB_{n-1}(x), n \geq 1$
- iv. $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x), n \geq 0$
- v. $B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}, n \geq 0$
- vi. $B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k, n \geq 2$

Önerme 1.2.vi ve Önerme 1.2.v eşitliklerinde n 'ye değerler verilerek sırasıyla;

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0, \\ B_8 = -\frac{1}{30}, B_9 = 0, B_{10} = \frac{5}{66}, \dots$$

ve

$$B_0(x) = 1, B_1(x) = x - \frac{1}{2}, B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\ B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x, \dots$$

Bernoulli sayıları ve polinomları elde edilir.

Teorem 1.3 (Raabe bağıntısı) $m \geq 0$ ve $n \geq 0$ olmak üzere,

$$\sum_{r=0}^{m-1} B_n\left(\frac{x+r}{m}\right) = m^{1-n} B_n(x)$$

ifadesi gerçekleşir (Sun 2002).

Tanım 1.4 Herhangi bir x karmaşık sayısı için $E_n(x)$ Euler polinomları,

$$\frac{2e^{xz}}{e^z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \pi \quad (1.2)$$

eşitliği ile tanımlanır. E_n Euler sayıları ise $E_n = 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right)$ olarak tanımlanır ve

$$\frac{2e^z}{e^{2z} + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{z^n}{n!}$$

ifadesi ile elde edilir (Abramowitz ve Stegun 1972).

Euler polinomları ve sayıları için de Bernoulli polinomları ve sayılarına benzer biçimde aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

Önerme 1.5

- i. $E_n(x+1) + E_n(x) = 2x^n, n \geq 0$
- ii. $E'_n(x) = nE_{n-1}(x), n \geq 1$
- iii. $E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x), n \geq 0$
- iv. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k(x) + E_n(x) = 2x^n, n \geq 0$
- v. $E_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k}, n \geq 0$

Burada Önerme 1.5.iv de n 'ye değerler verilerek, Euler polinomları elde edilir. Bu polinomlarada $x = \frac{1}{2}$ alındıktan sonra $E_n = 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right)$ ifadesi kullanılarak Euler sayıları elde edilir. Böylece Euler sayıları ve polinomları sırasıyla aşağıdaki biçimde bulunur;

$$E_0 = 1, E_1 = 0, E_2 = -1, E_3 = 0, E_4 = 5, E_5 = 0, E_6 = -61, E_7 = 0, E_8 = 1385, E_9 = 0, E_{10} = -50521, \dots;$$

$$E_0(x) = 1, E_1(x) = x - \frac{1}{2}, E_2(x) = x^2 - x, E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}, E_4(x) = x^4 - 2x^3 + \frac{2}{3}x^2, E_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{2}, \dots$$

Tanım 1.6 Herhangi bir x karmaşık sayısı için $G_n(x)$ Genocchi polinomları,

$$\frac{2ze^{xz}}{e^z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \pi \quad (1.3)$$

ifadesi ile verilir (Jang, Kim, Lee ve Park 2001).

Burada $x = 0$ için $G_n(0) = G_n$, n . Genocchi sayısı olarak tanımlanır. Böylece (1.3) de $x = 0$ alınırsa,

$$\frac{2z}{e^z + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{z^n}{n!} \quad (1.4)$$

eşitliği elde edilir.

Önerme 1.7 Genocchi polinomları için;

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} G_k x^{n-k}, n \geq 0$$

ifadesi sağlanır.

Önerme 1.7 de n 'ye değerler verilerek Genocchi polinomları, Genocchi sayıları cinsinden elde edilir. Genocchi sayıları (1.4) ifadesi yardımıyla bulunduktan sonra önerme 1.7 de yerlerine yazılarak Genocchi polinomları elde edilir. Böylece ilk birkaç Genocchi sayısı ve polinomu sırasıyla;

$$G_0 = 0, G_1 = 1, G_2 = -1, G_4 = 1, G_6 = -3, G_8 = 17, G_{10} = -155, \dots;$$

$$G_{2n+1} = 0 \quad (n \geq 1);$$

$$G_0(x) = 0, G_1(x) = 1, G_2(x) = 2x - 1, G_3(x) = 3x^2 - 3x, G_4(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1, G_5(x) = 5x^4 - 10x^3 + 5x, \dots$$

biçiminde bulunur.

Uyarı 1.8 Bazı kaynaklarda Genocchi sayılarının tanımı,

$$z + \sum_{n \geq 1} (-1)^n G_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{2z}{e^z + 1} \quad (1.5)$$

ifadesi ile de verilir (Dumont ve Zeng 1994).

Bu durumda Genocchi sayıları,

$$G_0 = 0, G_1 = 1, G_2 = 1, G_4 = 1, G_6 = 3, G_8 = 17, G_{10} = 155, \dots;$$

$$G_{2n+1} = 0, \quad (n \geq 1)$$

olarak elde edilir.

Tanım 1.9 $S(n, k)$ ikinci çeşit Stirling sayıları,

$$\frac{(e^z - 1)^k}{k!} = \sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{z^n}{n!} \quad (1.6)$$

eşitliği ile tanımlanır (Comtet 1970).

Bazı kaynaklarda ikinci çeşit Stirling sayıları $S(n, k)$ yerine $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ ifadesi ile de gösterilebilir (Graham, Knuth ve Patashnik 1989).

Tanım 1.10 Tanjant sayıları;

$$\frac{2}{e^{2z} + 1} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} T_{2n-1} \quad (1.7)$$

eşitliği ile tanımlanır (Dumont 1974). Böylece ilk birkaç tanjant sayısı,

$$T_1 = -1, T_3 = 2, T_5 = -16, T_7 = 272, T_9 = -7936, \dots$$

olarak elde edilir.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMA

2.1. Dedekind Toplamlarının Bazı Özellikleri

Dedekind toplamları Tanım 1.2 de $h, k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$ ve $(h, k) = 1$ olmak üzere,

$$s(h, k) = \sum_{\mu \pmod{k}} \left(\left(\frac{\mu}{k} \right) \right) \left(\left(\frac{h\mu}{k} \right) \right)$$

olarak tanımlanmıştı. Burada $((x))$ fonksiyonunun tanımı yardımıyla,

$$s(h, k) = \sum_{\mu \pmod{k}} \frac{\mu}{k} \left(\frac{h\mu}{k} - \left[\frac{h\mu}{k} \right] - \frac{1}{2} \right)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 2.1 $h, k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$ ve $(h, k) = 1$ olmak üzere,

- i. $h' \equiv \pm h \pmod{k}$ ise $s(h', k) = \pm s(h, k)$
- ii. $hh' \equiv \pm 1 \pmod{k}$ ise $s(h', k) = \pm s(h, k)$
- iii. $h^2 + 1 \equiv 0 \pmod{k}$ ise $s(h, k) = 0$

eşitlikleri sağlanır (Apostol 1976-b).

Daha önce tanımladığımız $((x))$ fonksiyonu gözönüne alınırsa $((-x)) = -((x))$ olduğundan Dedekind toplamı $s(h, k)$ aşağıdaki iki özelliği gerçektir;

- i. $s(-h, k) = -s(h, k)$
- ii. $s(h, -k) = s(h, k)$.

Teorem 2.2 $h, k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$, $h > 0$ ve $(h, k) = 1$ ise;

$$s(h, k) + s(k, h) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{k} + \frac{k}{h} + \frac{1}{hk} \right)$$

reciprocity bağıntısı vardır.

Bu bağıntının ispatı birçok matematikçi tarafından yapılmıştır. Bunlardan bazıları Apostol (1976-b), Rademacher ve Grosswald (1972) dır.

2.2. Bernoulli, Euler, Genocchi Polinomları ve Sayılarının Bazı Özellikleri

Teorem 2.1

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k}$$

eşitliği gerçekleşir.

İspat. Tanım 1.1 den,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x+y) \frac{z^n}{n!} &= \frac{ze^{z(x+y)}}{e^z - 1} = \frac{ze^{zx}}{e^z - 1} e^{zy} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} z^n \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Sağ taraftaki ifadeye Cauchy çarpımı uygulanırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+y)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{B_k(x)}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n$$

elde edilir. Burada z^n li ifadelerin katsayıları karşılaştırılarak istenen eşitlik bulunur.

■

Teorem 2.2

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(x) = (n+1) x^n, (n \geq 1) \quad (2.8)$$

eşitliği vardır.

İspat.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k(x) - B_{n+1}(x)$$

dır. Bir önceki teoremde $y = 1$ alınırsa,

$$B_{n+1}(x+1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k(x)$$

olur. Buradan da

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(x) = B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x)$$

yazılabilir. Önerme 1.2.i özelliğinden istenen sonuç bulunur. ■

Sonuç 2.3

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0, (n \geq 1)$$

dır.

İspat. (2.8) eşitliğinde $x = 0$ alınarak kolayca görülür. ■

Teorem 2.4

$$\sum_{r=0}^{n-1} r^k = \frac{B_{k+1}(n) - B_{k+1}}{k+1}$$

eşitliği gerçekleşir.

İspat. Önerme 1.2.i özelliğinden

$$B_{k+1}(r+1) - B_{k+1}(r) = (k+1)r^k$$

yazılabilir. Böylece,

$$(k+1) \sum_{r=0}^{n-1} r^k = \sum_{r=0}^{n-1} \{B_{k+1}(r+1) - B_{k+1}(r)\}$$

olur. Sağ taraftaki ifadede gerekli işlemler ve sadeleştirmeler yapılırsa istenen ifade elde edilir. ■

Benzer teoremleri Euler polinomları ve sayıları için aşağıdaki biçimde ele alalım.

Teorem 2.5

$$E_n(x+y) = \sum_{n=0}^n \binom{n}{k} E_k(x) y^{n-k}$$

eşitliği vardır.

İspat. Teorem 2.1 in ispatına benzer olarak yapılabilir. ■

Teorem 2.6

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k(x) + E_n(x) = 2x^n$$

ifadesi gerçeklenir.

İspat. Bir nceki teoremde $y = 1$ durumu için;

$$E_n(x+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k(x)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k(x) + E_n(x) = E_n(x+1) + E_n(x)$$

ifadesi elde edilir. Sol taraftaki yazılan ifadede önerme 1.5.i özelliėi kullanılırsa ispat tamamlanır. ■



3. MATERYAL VE METOT

3.1. Euler-Seidel Matrisleri

3.1.1. Tanımlar ve bazı özellikler

Tanım 3.1 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ değişmeli bir halkanın öğeleri olsunlar;

$$a_n^0 = a_n, (n \geq 0) \quad (3.9)$$

$$a_n^k = a_n^{k-1} + a_{n+1}^{k-1}, (n \geq 0, k \geq 1)$$

yineleme bağıntısı ile verilen a_n^k çift indisli öğelerinin oluşturduğu matrise Euler-Seidel matrisi adı verilir (Dumont 1981).

Bu yineleme bağıntısı yardımıyla,

$$a_n^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a_{n+i}^0 \quad (3.10)$$

ifadesi elde edilir. (3.10) eşitliğinde $n = 0$ alınrsa 0. sütun elemanları,

$$a_0^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i^o \quad (3.11)$$

olarak bulunur. Benzer olarak a_n^0 şeklindeki 0. satır elemanlarını ifade edelim:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i^o \right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \frac{a_i^o}{i!} \frac{t^n}{(n-i)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^0}{n!} t^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^0}{n!} t^n e^t \end{aligned}$$

dır. Burada her iki taraf e^{-t} ile çarpılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^0}{n!} t^n = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} \right)$$

bulunur. Bu ifadede sağ tarafta gerekli işlemler yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^0}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \left(\frac{a_i^o (-1)^{n-i}}{i! (n-i)!} \right) t^n$$

elde edilir. Son eşitlikte karşılıklı katsayılar karşılaştırılarak,

$$a_n^0 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} a_i^o \quad (3.12)$$

ifadesi bulunur.

Önerme 3.2 (EULER)

$$a(t) = \sum_{n \geq 0} a_n^0 t^n \quad (3.13)$$

$$\bar{a}(t) = \sum_{n \geq 0} a_0^n t^n \quad (3.14)$$

olarak verilsinler. Bu durumda,

$$\bar{a}(t) = \frac{1}{1-t} a\left(\frac{t}{1-t}\right) \quad (3.15)$$

ifadesi gerçekleşir.

İspat. $|t| < 1$ için,

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k \geq 0} t^k$$

yazılabilir. Her iki tarafın n . mertebeden türevi alınır,

$$\frac{1}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n} t^k$$

olduğu kolayca görülür. Böylece,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t} a\left(\frac{t}{1-t}\right) &= \frac{1}{1-t} \sum_{n \geq 0} a_n^0 \frac{t^n}{(1-t)^n} \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n^0 \frac{t^n}{(1-t)^{n+1}} \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n^0 t^n \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n} t^k \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n^0 \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{n} t^{k+n} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Sağ taraftaki ifadeye Cauchy çarpımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t} a\left(\frac{t}{1-t}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_i^0 \binom{i+n-i}{i} t^{n+i-i} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i^0 t^n \end{aligned}$$

bulunur. Burada (3.11) eşitliğinden,

$$\frac{1}{1-t} a\left(\frac{t}{1-t}\right) = \sum_{n \geq 0} a_0^n t^n = \bar{a}(t)$$

olduğu görülür. ■

Önerme 3.3 (SEIDEL)

$$A(t) = \sum_{n \geq 0} a_n^0 \frac{t^n}{n!} \quad (3.16)$$

$$\bar{A}(t) = \sum_{n \geq 0} a_n^0 \frac{t^n}{n!} \quad (3.17)$$

olarak tanımlansınlar. Bu durumda,

$$\bar{A}(t) = e^t A(t) \quad (3.18)$$

dır.

İspat. (3.11) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \bar{A}(t) &= \sum_{n \geq 0} a_n^0 \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i^o \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i!} \frac{1}{(n-i)!} t^n \end{aligned}$$

yazılabilir. Son ifadede gerekli işlemler yapılırsa,

$$\bar{A}(t) = \sum_{n \geq 0} a_n^0 \frac{t^n}{n!} \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} = e^t \sum_{n \geq 0} a_n^0 \frac{t^n}{n!}$$

eşitliği elde edilir. Burada $A(t)$ nin tanımı gözönüne alınarak ispat tamamlanır. ■

Bu iki ifadeyi kapsayan genel bir bağıntı;

$$\sum_{n,k \geq 0} a_n^k \frac{t^n}{n!} \frac{u^k}{k!} = e^u A(t+u) \quad (3.19)$$

şeklinde verilebilir (Dumont 1981).

3.1.2. Euler-Seidel matrisleri için örnekler

Örnek 3.4 (a_n^0) başlangıç dizisini, $n \geq 0$ olmak üzere,

$$a_n^0 = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

olarak alalım.

Şimdi bu başlangıç dizisine karşılık gelen $a(t)$, $\bar{a}(t)$, $A(t)$, $\bar{A}(t)$ değerlerini elde edip oluşan Euler-Seidel matrisini belirleyelim.

Öncelikle $a(t)$ yi elde edelim. (3.13) eşitliğinden,

$$a(t) = \sum_{n \geq 0} a_n^0 t^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n = \frac{1}{t} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}$$

yazılabilir. $|t| < 1$ için

$$\log(1+t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}$$

olduğundan

$$a(t) = \frac{1}{t} \log(1+t)$$

olarak elde edilir. (3.15) ifadesinden

$$\begin{aligned} \bar{a}(t) &= \frac{1}{1-t} \left(\frac{t}{1-t} \log \left(1 + \frac{t}{1-t} \right) \right) \\ &= \frac{1}{t} \log \left(\frac{1}{1-t} \right) = \frac{1}{t} \log(1-t)^{-1} \\ &= -\frac{1}{t} \log(1-t) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Şimdi (3.16) ifadesinden

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{n \geq 0} a_n^0 \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{t^n}{(n+1)!} \\ &= -\frac{1}{t} \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son ifadede $n+1$ yerine n yazılarak,

$$\begin{aligned} A(t) &= -\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} = -\frac{1}{t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{t} (e^{-t} - 1) = \frac{1 - e^{-t}}{t} \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu ifade ile birlikte (3.18) eşitliği kullanılırsa,

$$\bar{A}(t) = e^t A(t) = e^t \left(\frac{1 - e^{-t}}{t} \right) = \frac{e^t - 1}{t}$$

olarak bulunur.

Şimdi bu örneğe karşılık olarak bulduğumuz eşitliklerden yararlanarak oluşan Euler-Seidel matrisini belirlemeye çalışalım. İlk olarak 0. sütun elemanları a_0^n 'ları

elde edelim. $\bar{A}(t)$ nin tanımından,

$$\begin{aligned}\bar{A}(t) &= \sum_{n \geq 0} a_n^0 \frac{t^n}{n!} = \frac{e^t - 1}{t} = \frac{1}{t} (e^t - 1) \\ &= \frac{1}{t} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + (-1) \right) \\ &= 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{(n+1)!} + \cdots \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{(n+1)!}\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada t^n li terimlerin katsayıları karşılaştırılarak,

$$a_0^n = \frac{1}{n+1}$$

olarak bulunur.

Daha genel olarak matrisin n . sütun, k . satır girdisi olan a_n^k öğelerini belirleyelim.

(3.9) eşitliğinden,

$$a_n^1 = a_n^0 + a_{n+1}^0 = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} = \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{(-1)^n}{(n+2) \binom{n+1}{1}}$$

$$\begin{aligned}a_n^2 &= a_n^1 + a_{n+1}^1 = \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{2(-1)^n}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{(-1)^n}{(n+3) \binom{n+2}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n^3 &= a_n^2 + a_{n+1}^2 = \frac{2(-1)^n}{(n+3)(n+2)(n+1)} + \frac{2(-1)^{n+1}}{(n+4)(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{2.3(-1)^n}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{(-1)^n}{(n+4) \binom{n+3}{3}}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece tümevarımla,

$$a_n^k = \frac{(-1)^n}{(n+k+1) \binom{n+k}{k}} \quad (3.20)$$

eşitliği bulunur. Burada $n = 0$ özel durumu bir önceki sonucu verir.

Bu örnekte verilen $n \geq 0$ için

$$a_n^0 = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

başlangıç dizisinden elde edilen Euler-Seidel matrisi aşağıdaki biçimdedir:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & \dots & \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \dots & & \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{20} & \dots & & & \\ \frac{1}{5} & \dots & & & & \\ \dots & & & & & \end{array}$$

Örnek 3.5 (a_n^0) başlangıç dizisini;

$$e^{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n$$

üreteç fonksiyonuyla verilen Bell sayıları olarak alalım (Comtet 1970). Yani $a_n^0 = b_n$ olarak alalım. Üreteç fonksiyonu yardımıyla ilk birkaç Bell sayısı,

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5, b_4 = 15, b_5 = 52, b_6 = 203, \dots$$

olarak elde edilir. (3.16) ifadesinden,

$$A(t) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{t^n}{n!} = e^{e^t-1}$$

eşitliği vardır. Burada (3.18) eşitliği kullanılarak,

$$\bar{A}(t) = e^t e^{e^t-1} = e^{e^t-1+t} = A'(t)$$

elde edilir. Sağ ve sol tarafın eşitliğinden,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n \geq 0} a_{n+1}^0 \frac{t^n}{n!}$$

dır ve böylece,

$$a_{n+1}^0 = a_n^0$$

olur ki buradan da,

$$a_n^0 = b_n$$

verildiğinden,

$$a_0^n = b_{n+1}$$

eşitliği bulunur. Sonuç olarak $a_n^0 = b_n$ başlangıç dizisine karşılık gelen Euler-Seidel matrisi;

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 5 & 15 & 52 & \dots \\ 2 & 3 & 7 & 20 & \dots & & \\ 5 & 10 & 27 & \dots & & & \\ 15 & 37 & \dots & & & & \\ 52 & \dots & & & & & \\ \dots & & & & & & \end{array}$$

şeklindedir.

Örnek 3.6

$$A(t) = \frac{1}{2 - e^t}$$

üreteç fonksiyonuna karşılık gelen Euler-Seidel matrisini belirleyelim. (3.18) ifadesinden,

$$\bar{A}(t) = \frac{e^t}{2 - e^t} = 2 \frac{1}{2 - e^t} - 1 = 2.A(t) - 1$$

yazılabilir. $A(t)$ ve $\bar{A}(t)$ nin tanımı gözönüne alınarak iki tarafın eşitliğinden,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 \frac{t^n}{n!} - 1$$

olacağından,

$$a_0^0 = 1 \text{ ve } a_0^n = 2a_n^0, \quad (n \geq 1)$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} a_0^n &= a_0^{n-1} + a_1^{n-1} \\ &= a_0^{n-1} + a_1^{n-2} + a_2^{n-2} \\ &= a_0^{n-1} + a_1^{n-2} + a_2^{n-3} + a_3^{n-3} \\ &= a_0^{n-1} + a_1^{n-2} + a_2^{n-3} + \dots + a_{n-1}^1 \\ &= a_0^{n-1} + a_1^{n-2} + a_2^{n-3} + \dots + a_{n-1}^0 + a_n^0 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$a_0^n = a_n^0 + (a_{n-1}^0 + a_{n-2}^1 + \cdots + a_0^{n-1})$$

dır.

$$a_0^n = 2a_n^0$$

olduğundan

$$a_n^0 = a_{n-1}^0 + a_{n-2}^1 + \cdots + a_0^{n-1}$$

eşitliği elde edilir. Böylece oluşan Euler-Seidel matrisi,

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 3 & 13 & 75 & \cdots \\ 2 & 4 & 16 & \cdots & & \\ 6 & 20 & \cdots & & & \\ 26 & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \end{array}$$

şeklindedir.

Örnek 3.7

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{1-t}, \quad |t| < 1,$$

olarak verilsin. Bu durumda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

eşitliğinden

$$a_0^n = n!$$

olarak bulunur. Ayrıca $\bar{A}(t)$ nin tanımından

$$A(t) = \frac{e^{-t}}{1-t}$$

yazılabilir. Burada (3.12) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} a_n^0 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} i! = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{n!}{(n-i)!} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} P(n, i) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece oluşan Euler-Seidel matrisi,

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 & 44 & \dots \\ 1 & 1 & 3 & 11 & 53 & \dots & \\ 2 & 4 & 14 & 64 & \dots & & \\ 6 & 18 & 78 & \dots & & & \\ 24 & 96 & \dots & & & & \\ 120 & \dots & & & & & \\ \dots & & & & & & \end{array}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 3.8

$$a_n^0 = n!$$

olarak alalım. (3.11) ifadesinden,

$$a_0^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i! = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{(n-i)!} = \sum_{i=0}^n P(n, i)$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca

$$A(t) = \frac{1}{1-t} \text{ ve } \bar{A}(t) = \frac{e^t}{1-t}$$

oldukları kolayca görülebilir. Bu örneğe karşılık gelen Euler-Seidel matrisi,

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 6 & 24 & \dots \\ 2 & 3 & 8 & 30 & \dots & \\ 5 & 11 & 38 & \dots & & \\ 16 & 49 & \dots & & & \\ 65 & \dots & & & & \\ \dots & & & & & \end{array}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.9

$$a_0^0 = 1, a_{2n}^0 = 0, (n \geq 1) \text{ ve } a_{2n-1}^0 = T_{2n-1}, (n \geq 1)$$

olarak verilsin. (3.16) ifadesinden

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{n \geq 0} a_n^0 \frac{t^n}{n!} = 1 + \sum_{n \geq 1} a_{2n}^0 \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \geq 1} a_{2n-1}^0 \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} a_{2n-1}^0 \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} = 1 + \sum_{n \geq 1} T_{2n-1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} \end{aligned}$$

yazılabilir (Dumont 1974). Böylece,

$$A(t) = \frac{2}{e^{2t} + 1}$$

bulunur. Buradan,

$$\bar{A}(t) = \frac{2e^t}{e^{2t} + 1} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \sum_{n \geq 0} E_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

olarak elde edilir (Abramowitz ve Stegun 1972). Yani;

$$a_0^{2n} = E_{2n}$$

eşitliği bulunur.

Bu örnek ile elde edilen Euler-Seidel matrisi,

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -16 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -16 & -16 & \dots & \\ -1 & 1 & 4 & -14 & -32 & \dots & & \\ 0 & 5 & -10 & -46 & \dots & & & \\ 5 & -5 & -56 & \dots & & & & \\ 0 & -61 & \dots & & & & & \\ -61 & \dots & & & & & & \\ \dots & & & & & & & \end{array}$$

olur.

Örnek 3.10

$$A(t) = \frac{2t}{1 + e^t}$$

olsun. Bu durumda (1.4) eşitliğinden,

$$A(t) = \sum_{n \geq 1} G_n \frac{t^n}{n!}$$

dır. Buradan,

$$a_0^0 = 0, a_1^0 = 1, a_{2n+1}^0 = 0, (n \geq 1), a_{2n}^0 = G_{2n}$$

olarak bulunur. Ayrıca (3.18) ifadesinden

$$\bar{A}(t) = \frac{2te^t}{1+e^t} = 2t - A(t)$$

olduğundan, sağ ve sol tarafın eşitliğinden

$$a_0^0 = 0, a_0^1 = 1, a_0^{2n+1} = 0, (n \geq 1), a_0^{2n} = -G_{2n}, (n \geq 1)$$

bulunur. Böylece ortaya çıkan matris,

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 17 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & -3 & 17 & \dots & \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -2 & -6 & 14 & \dots & & \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -8 & 8 & \dots & & & \\ -1 & 1 & 2 & -8 & 0 & \dots & & & & \\ 0 & 3 & -6 & -8 & \dots & & & & & \\ 3 & -3 & -14 & \dots & & & & & & \\ 0 & -17 & \dots & & & & & & & \\ -17 & \dots & & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & & \end{array}$$

şeklinde olur.

Örnek 3.11

$$A(t) = \frac{t}{e^t - 1}$$

üreteç fonksiyonu verilsin. Bu durumda,

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n$$

olur (Apostol 1976-a) ve,

$$\bar{A}(t) = \frac{te^t}{e^t - 1} = t + \frac{t}{e^t - 1}$$

şeklinde yazılabilir.

Buradan,

$$\bar{A}(t) = t + A(t)$$

olduğu görülür. Böylece,

$$a_0^0 = B_0 = 1, \quad a_0^1 = \frac{1}{2}, \quad a_n^0 = a_0^n, \quad (n \geq 2)$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{30} & \dots \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{30} & \dots & \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{15} & \dots & & \\ 0 & -\frac{1}{30} & \dots & & & \\ -\frac{1}{30} & \dots & & & & \\ \dots & & & & & \end{array}$$

matrisi elde edilir.

3.2. Bernoulli sayıları için Akiyama-Tanigawa algoritması

Akiyama-Tanigawa algoritması Bernoulli, Euler, Tanjant sayılarını Stirling sayıları cinsinden elde etmek için kullanılan direkt bir yöntemdir.

Algoritma 3.1 *Akiyama ve Tanigawa'nın (1999) Bernoulli sayıları için verdiği algoritma aşağıdaki biçimdedir.*

Tanım 3.2 *Sıfıncı satır*

$$\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n \geq 1)$$

dizisi, daha sonraki satırlar ise,

$$a_{n+1,m} = (m+1)(a_{n,m} - a_{n,m+1})$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanmıştır. Böylece;

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \dots \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \dots & \\
 \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{20} & \frac{2}{15} & \dots & & \\
 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{20} & \dots & & & \\
 -\frac{1}{30} & -\frac{1}{30} & \dots & & & & \\
 0 & \dots & & & & & \\
 \dots & & & & & &
 \end{array}$$

şeklindeki yapı elde edilir. Burada her satırın 0. elemanı,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \frac{xe^x}{e^x - 1} \left(= \frac{x}{e^x - 1} + x \right)$$

ifadesiyle tanımlanan Bernoulli sayılarını verir.

Uyarı 3.3 Bu kesimde vereceğimiz önerme ve teoremlerde,

$$x^n = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} x^{\underline{m}}$$

eşitliği kullanılacaktır. Burada $m \geq 0$ için

$$x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1) \text{ ve } x^{\underline{0}} = 1$$

dir (Graham, Knuth ve Patashnik 1989).

Önerme 3.4 (Kaneko 2000). Bir

$$a_{0,m} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

dizisi verilsin. $a_{n,m}$ ($n \geq 1$) ögesini,

$$a_{n,m} = (m+1)(a_{n-1,m} - a_{n-1,m+1}), \quad (n \geq 1, m \geq 1)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlayalım. Bu durumda,

$$a_{n,0} = \sum_{m=0}^n (-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} a_{0,m} \quad (3.21)$$

ifadesi sağlanır.

İspat.

$$g_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} t^m$$

olsun. Varsayımdan;

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) (a_{n-1,m} - a_{n-1,m+1}) t^m \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{n-1,m} t^{m+1} \right) - \frac{d}{dt} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{n-1,m+1} t^{m+1} \right) \\ &= \frac{d}{dt} (t g_{n-1}(t)) - \frac{d}{dt} (g_{n-1}(t) - a_{n-1,0}) \\ &= \frac{d}{dt} ((t-1) g_{n-1}(t)) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada,

$$(t-1) g_n(t) = h_n(t)$$

alnırsa,

$$\begin{aligned} h_n(t) &= (t-1) g_n(t) \\ &= (t-1) \frac{d}{dt} ((t-1) g_{n-1}(t)) \\ &= (t-1) \frac{d}{dt} (h_{n-1}(t)), \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

elde edilir. İşleme devam edilirse,

$$h_n(t) = \left((t-1) \frac{d}{dt} \right)^n (h_0(t))$$

olarak bulunur. Ayrıca,

$$\left(x \frac{d}{dx} \right)^n = \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} x^m \left(\frac{d}{dx} \right)^m$$

olduğundan (Graham, Knuth ve Patashnik 1989), $x = t-1$ alınırsa;

$$h_n(t) = \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} (t-1)^m \left(\frac{d}{dt} \right)^m h_0(t)$$

elde edilir. Bu ifadede $t = 0$ limit durumunda gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
-a_{n,0} &= \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} (-1)^m m! (a_{0,m-1} - a_{0,m}) \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n \\ m+1 \end{matrix} \right\} (-1)^{m+1} (m+1)! a_{0,m} - \sum_{m=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} (-1)^m m! a_{0,m} \\
&= - \sum_{m=0}^n (-1)^m m! a_{0,m} \left((m+1) \left\{ \begin{matrix} n \\ m+1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} \right) \\
&= - \sum_{m=0}^n (-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} a_{0,m}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$a_{n,0} = \sum_{m=0}^n (-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} a_{0,m}$$

ifadesi elde edilir. ■

Uyarı 3.5 Burada

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} = (m+1) \left\{ \begin{matrix} n \\ m+1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$$

eşitliği kullanılmıştır (Graham, Knuth ve Patashnik 1989).

Teorem 3.6 $n \geq 0$ için

$$B_n = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\}}{m+1}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Stirling sayılarının bilinen üreteç fonksiyonu,

$$\frac{(e^x - 1)^m}{m!} = \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!}$$

ifadesinde m yerine $m + 1$ yazarsak,

$$\frac{(e^x - 1)^{m+1}}{(m+1)!} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ m+1 \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!}$$

elde edilir. Burada x 'e göre türev alınırsa,

$$\frac{e^x (e^x - 1)^m}{m!} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ m+1 \end{matrix} \right\} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\frac{e^x (e^x - 1)^m}{m!} = \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca (3.21) eşitliğinden,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n (-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} a_{0,m} \right) \frac{x^n}{n!}$$

olur. Başlangıç dizisi olarak $a_{0,m} = \frac{1}{m+1}$ dizisini aldığımız gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0} \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\}}{m+1} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m!}{m+1} \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m m!}{m+1} \frac{e^x (e^x - 1)^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^x (1 - e^x)^m}{m+1} \\ &= e^x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - e^x)^{m-1}}{m} \\ &= \frac{e^x}{(1 - e^x)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - e^x)^m}{m} \\ &= \frac{e^x}{(1 - e^x)} (-\log(1 - (1 - e^x))) \\ &= \frac{xe^x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

bulunur. Burada x^n li terimlerin katsayıları karşılaştırılırsa kanıt tamamlanır. ■

Önerme 3.7 (Chen 2001). Bir $a_{0,m}$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) başlangıç dizisi verilsin. $a_{n,m}$ ($n \geq 1$) dizisi,

$$a_{n,m} = ma_{n-1,m} - (m+1)a_{n-1,m+1}, \quad (n \geq 1, m \geq 0)$$

yineleme bağıntısıyla tanımlansın. Bu durumda,

$$a_{n,0} = \sum_{m=0}^n (-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} a_{0,m}$$

ifadesi sağlanır.

İspat. (Kaneko 2000) tarafından verilen önermenin kanıtı için kullanılan yöntemle kolayca görülür. ■

Bu önermede başlangıç dizisi olarak $a_{0,m} = \frac{1}{m+1}$ alınırsa,

$$a_{n,0} = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}}{m+1} = B_n = B_n(0)$$

elde edilir (Graham, Knuth ve Patashnik 1989).

Uyarı 3.8 Yineleme bağıntısının; Kaneko'nun (2000) kullandığı biçimde alındığında elde edilen algoritmaya *A-algoritma*, Chen'in (2001) kullandığı biçimde alındığında elde edilen algoritmaya ise *B-algoritma* denir.

Teorem 3.9 (Chen 2001)

$$a_{0,m} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

başlangıç dizisi için,

$$A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{0,m} x^m$$

şeklinde bir üreteç fonksiyonu verilsin. Bu durumda $a_{n,0}$ 'a ait

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0} \frac{x^n}{n!}$$

üstel üreteç fonksiyonu;

A -algoritma esas alındığında,

$$B(x) = e^x A(1 - e^x)$$

B -algoritma esas alındığında,

$$B(x) = A(1 - e^x)$$

eşitliklerini gerçekler.

İspat. İlk olarak A -algoritmayı gözönüne alalım;

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n (-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} a_{0,m} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m m! a_{0,m} \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m m! a_{0,m} \frac{e^x (e^x - 1)^m}{m!} \\ &= e^x \sum_{m=0}^{\infty} (1 - e^x)^m a_{0,m} \\ &= e^x A(1 - e^x) \end{aligned}$$

elde edilir. B -algoritma kullanılırsa,

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n (-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} a_{0,m} \right) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m m! a_{0,m} \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m m! a_{0,m} \frac{(e^x - 1)^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (1 - e^x)^m a_{0,m} \\ &= A(1 - e^x) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.10 $a_{0,m}$ başlangıç dizisi,

$$a_{0,m} = \frac{1}{2^m}, \quad (m \geq 0)$$

olarak alınırsa $a_{n,0}$ elemanları A ve B -algoritma ile, sırasıyla,

$$E_n(1) \text{ ve } E_n(0)$$

şeklinde elde edilirler.

İspat. A -algoritma kullanıldığında,

$$\begin{aligned} e^x A(1 - e^x) &= e^x \sum_{m=0}^{\infty} (1 - e^x)^m a_{0,m} \\ &= e^x \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1 - e^x}{2} \right)^m \end{aligned}$$

dir. Burada geometrik seri toplamından yararlanılarak,

$$e^x A(1 - e^x) = \frac{2e^x}{e^x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(1) \frac{x^n}{n!}$$

yazılabilir. Böylece

$$a_{n,0} = E_n(1)$$

bulunur. Benzer biçimde B -algoritma ile,

$$a_{n,0} = E_n(0)$$

olduğu kolayca görülebilir. ■

Teorem 3.11

$$\delta_{4,i} = \begin{cases} 1, & 4|i \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olmak üzere;

$$a_{0,m} = (-1)^{\left[\frac{m}{4}\right]} 2^{-\left[\frac{m}{2}\right]} (1 - \delta_{4,m+1})$$

olarak alınsın. Bu durumda $a_{n,0}$ elemanı A ve B -algoritmada sırasıyla,

$$a_{n,0} = E_n \text{ ve } a_{n,0} = T_n$$

olarak elde edilir.

İspat. Euler ve Tanjant sayılarını, sırasıyla, (1.2) ve (1.7) eşitlikleri yardımı ile tanımlamıştık. Böylece,

$$A(1 - e^x) = \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} A(1 - e^x) &= \sum_{m=0}^{\infty} (1 - e^x)^m a_{0,m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (1 - e^x)^{4k}}{2^{2k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (1 - e^x)^{4k+1}}{2^{2k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (1 - e^x)^{4k+2}}{2^{2k+1}} \end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi

$$D(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (1 - e^x)^{4k}}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)(1 - e^x)^4}{4} \right)^k = \frac{4}{(e^{2x} - 4e^x + 5)(e^{2x} + 1)}$$

olarak alınsın. Böylece,

$$\begin{aligned} A(1 - e^x) &= D(x) + (1 - e^x) D(x) + \frac{(1 - e^x)^2}{2} D(x) \\ &= D(x) \left(1 + 1 - e^x + \frac{(1 - e^x)^2}{2} \right) \\ &= \frac{4}{(e^{2x} - 4e^x + 5)(e^{2x} + 1)} \frac{e^{2x} - 4e^x + 5}{2} = \frac{2}{e^{2x} + 1} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece A -algoritma kullanıldığında;

$$\frac{2e^x}{e^{2x} + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0} \frac{x^n}{n!}$$

eşitliğinden,

$$a_{n,0} = E_n$$

ve B -algoritma kullanıldığında;

$$\frac{2}{e^{2x} + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0} \frac{x^n}{n!}$$

eşitliğinden,

$$a_{n,0} = T_n$$

ifadeleri bulunur. ■

Bu teoremin bir sonucu olarak A ve B -algoritma kullanıldığında sırasıyla aşağıdaki matrisler elde edilir.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \dots \\
 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{7}{8} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{16} & \dots & \\
 -1 & -1 & \frac{3}{2} & 4 & \frac{15}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{21}{8} & -4 & -\frac{45}{16} & \dots & & \\
 0 & -5 & -\frac{15}{2} & 1 & 15 & \frac{81}{4} & \frac{77}{8} & -\frac{19}{2} & \dots & & & \\
 5 & 5 & -\frac{51}{2} & -56 & -\frac{105}{4} & \frac{255}{4} & \frac{1071}{8} & \dots & & & & \\
 0 & 61 & \frac{183}{2} & -119 & -450 & -\frac{1683}{4} & \dots & & & & & \\
 -61 & -61 & \frac{1263}{2} & 1324 & -\frac{585}{4} & \dots & & & & & & \\
 0 & -1385 & -\frac{4155}{2} & 5881 & \dots & & & & & & & \\
 1385 & 1385 & -\frac{47751}{2} & \dots & & & & & & & & \\
 0 & 50521 & \dots & & & & & & & & & \\
 -50521 & \dots & & & & & & & & & & \\
 \dots & & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

Bu matrisin ilk sütun elemanları E_n Euler sayılarını verir.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \dots \\
 -1 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \dots \\
 0 & -2 & -1 & 2 & \frac{7}{2} & 2 & -1 & -3 & -\frac{11}{4} & \dots \\
 2 & 0 & -8 & -8 & 4 & 16 & 15 & 1 & \dots \\
 0 & 16 & 8 & -40 & -64 & -10 & 83 & \dots \\
 -16 & 0 & 136 & 136 & -206 & -548 & \dots \\
 0 & -272 & -136 & 1232 & 1916 & \dots \\
 272 & 0 & -3968 & -3968 & \dots \\
 0 & 7936 & 3968 & \dots \\
 -7936 & 0 & \dots \\
 0 & \dots \\
 \dots & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

Bu matrisin ilk sütun elemanları T_n tanjant sayılarını verir.

Sonuç 3.12

$$\begin{aligned}
 E_n(0) &= \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}}{2^m} \\
 E_n &= \sum_{m=0}^n (-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\} a_{0,m} \\
 E_n(1) &= \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\}}{2^m} \\
 T_n &= \sum_{m=0}^n (-1)^m m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} a_{0,m}
 \end{aligned}$$

dır. Burada $\{a_{0,m}\}_{m=0}^{\infty}$ dizisi bir önceki teoremde ifade edilen başlangıç dizisidir.

İspat. Teorem 3.10 ve Teorem 3.11 kullanılarak kolayca görülür. ■

3.3. Bernoulli ve Euler Sayıları için Bazı Yineleme Bağlılıkları ve Özdeşlikler

Kaneko (1995) Bernoulli katsayıları için;

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} (n+i+1) B_{n+i} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

formülünü vermiştir. Bu formül ile B_{2n} Bernoulli sayısı, $n \leq i \leq 2n$ olmak üzere, B_i Bernoulli sayıları cinsinden ifade edilmiştir

Momiyama (2001) bu ifadeyi $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m+n > 0$ olmak üzere,

$$(-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m+1}{i} (n+i+1) B_{n+i} + (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} (m+j+1) B_{m+j} = 0$$

şeklinde genişletmiştir.

Bu konuda Zhi-Wei Sun ve öğrencisi Hao Pan pekçok genel sonuç elde etmiştir (Pan ve Sun preprint), (Sun 2005), (Sun 2003), (Wu, Sun ve Pan 2004).

Teorem 3.1 $\{f_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ polinomlar dizisi ve $F(z)$ alışılmış kuvvet serisi,

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \frac{z^k}{k!} = e^{z(x-\frac{1}{2})} F(z) \quad (3.22)$$

eşitliği ile verilsin. $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

F çift ise,

$$(-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} f_{n+i}(x) = (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f_{m+j}(-x) \quad (3.23)$$

F tek ise,

$$(-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} f_{n+i}(x) = -(-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f_{m+j}(-x) \quad (3.24)$$

dır.

İspat. $\varepsilon \in \{1, -1\}$ ve herhangi bir z için $F(-z) = \varepsilon F(z)$ yazılabilir. Şimdi,

$$G(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left((-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} f_{n+i}(x) \right) \frac{y^m}{m!} \frac{z^n}{n!}$$

olarak alınsın. Bu ifadede toplamaların yerleri değiştirilerek bazı işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
G(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=i}^{\infty} (-1)^m \binom{m}{i} f_{n+i}(x) \frac{y^m}{m!} \frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_{n+i}(x) \frac{z^n}{n!} \sum_{m=i}^{\infty} (-1)^m \binom{m}{i} \frac{y^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_{n+i}(x) \frac{z^n}{n!} \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+i} \binom{m+i}{i} \frac{y^{m+i}}{(m+i)!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_{n+i}(x) \frac{z^n}{n!} \left((-1)^i y^i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(m+i)!}{m!i!} \frac{y^m}{(m+i)!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_{n+i}(x) \frac{z^n}{n!} \frac{(-y)^i}{i!} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_{n+i}(x) \frac{z^n}{n!} \frac{(-y)^i}{i!} e^{-y} \\
&= e^{-y} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-y)^i}{i!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+i}(x) \frac{z^n}{n!} \right) \\
&= e^{-y} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \frac{f_k(x)}{(k-i)!} \frac{(-y)^i}{i!} z^{k-i} \\
&= e^{-y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x)}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} z^{k-i} (-y)^i \\
&= e^{-y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x)}{k!} (z-y)^k \\
&= e^{-y} e^{(x-\frac{1}{2})(z-y)} F(z-y) \\
&= e^{x(z-y)-\frac{(y+z)}{2}} F(z-y)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{aligned}
G(-x, z, y) &= e^{-x(y-z)-\frac{(y+z)}{2}} F(y-z) \\
&= e^{x(z-y)-\frac{(y+z)}{2}} \varepsilon F(z-y) \\
&= \varepsilon G(x, y, z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left((-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} f_{n+i}(x) \right) \frac{y^m z^n}{m! n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left((-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f_{m+j}(-x) \right) \frac{z^m y^n}{m! n!}
\end{aligned}$$

eşitliğinden istenen ifade elde edilir. ■

Sonuç 3.2 $F(z)$ alışılmış kuvvet serisi tek ya da çift olmak üzere $\{f_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ polinomlar dizisi ve $F(z)$ alışılmış kuvvet serisi (3.22) ifadesinde tanımlandığı gibi verilsin. $m, n \in \mathbb{N}$ ve ε değeri F nin tek ya da çift olma durumuna karşılık sırasıyla -1 veya 1 değerini alsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
& (-1)^m \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} (n+i+1) f_{n+i}(x) \\
&= \varepsilon (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (m+j+1) f_{m+j}(-x)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $-zF(-z) = -\varepsilon zF(z)$ yazılabilir. Ayrıca,

$$e^{z(x-\frac{1}{2})} zF(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^*(x) \frac{z^k}{k!}$$

olur, burada $f_k^*(x) = k f_{k-1}(x)$ dir. (3.23) den,

$$(-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} f_{n+1+i}^*(x) = -\varepsilon (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} f_{m+1+j}^*(-x)$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Bernoulli ve Euler polinomları daha önce (1.1) ve (1.2) ifadeleri ile tanımlanmıştı.

Bu tanımlardan ve (3.23) den;

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!} = e^{z(x-\frac{1}{2})} \frac{z}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{z^n}{n!} = e^{z(x-\frac{1}{2})} \frac{2}{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadelerden Bernoulli ve Euler polinomları için elde edilen $F(z)$ fonksiyonlarının çift oldukları görülür.

Bernoulli sayıları için Önerme 1.2.iv den,

$$\begin{aligned} B_{n+m+1}(1-x) &= (-1)^{n+m+1} B_{n+m+1}(x) \\ &= -(-1)^{n+m} B_{n+m+1}(x) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} B_{n+m+1}(x) + (-1)^{m+n} B_{n+m+1}(-x) &= B_{n+m+1}(x) - B_{n+m+1}(1-(-x)) \\ &= B_{n+m+1}(x) - B_{n+m+1}(1+x) \end{aligned}$$

olur. Bu ifade ve Önerme 1.2.i den,

$$B_{n+m+1}(x) + (-1)^{m+n} B_{n+m+1}(-x) = -(m+n+1)x^{m+n}$$

olarak elde edilir. Benzer biçimde,

$$E_{n+m+1}(x) + (-1)^{m+n} E_{n+m+1}(-x) = E_{n+m+1}(x) - E_{n+m+1}(1+x)$$

yazılabilir. Buradan, Önerme 1.5.i kullanılarak,

$$E_{n+m+1}(x) + (-1)^{m+n} E_{n+m+1}(-x) = 2E_{n+m+1}(x) - 2x^{m+n+1}$$

elde edilir.

Teorem 3.3 $m, n \in \mathbb{N}$ olsun,

$$(-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} B_{n+i}(x) = (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_{m+j}(-x) \quad (3.25)$$

ve

$$(-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} E_{n+i}(x) = (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_{m+j}(-x) \quad (3.26)$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} &(-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m+1}{i} (n+i+1) B_{n+i}(x) \\ &+ (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} (m+j+1) B_{m+j}(-x) \\ &= (-1)^m (m+n+2)(m+n+1)x^{m+n} \end{aligned} \quad (3.27)$$

ve

$$\begin{aligned}
& (-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m+1}{i} (n+i+1) E_{n+i}(x) \\
& + (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} (m+j+1) E_{m+j}(-x) \\
& = (-1)^m 2(m+n+2) (x^{m+n+1} - E_{n+m+1}(x)) \tag{3.28}
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

Uyarı 3.4 (3.27) ifadesinde $x = 0$ alınırsa Momiyama formülü (Momiyama 2001) elde edilir.

İspat. İlk olarak Teorem 3.1 de $\{f_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ yerine, sırasıyla, $\{B_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ve $\{E_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ alınırsa (3.25) ve (3.26) elde edilir. Şimdi (3.27) ifadesini elde etmek için Sonuç 3.2 de $\{f_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ yerine $\{B_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& (-1)^m \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} (n+i+1) B_{n+i}(x) \\
& = (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (m+j+1) B_{m+j}(-x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
& (-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m+1}{i} (n+i+1) B_{n+i}(x) \\
& + (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} (m+j+1) B_{m+j}(-x) \\
& = (-1)^{m+1} (n+m+2) \{B_{n+m+1}(x) + (-1)^{n+m} B_{n+m+1}(-x)\} \\
& = (-1)^m (n+m+2) (n+m+1) x^{n+m}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (3.28) ifadesini elde etmek için benzer biçimde Sonuç 3.2 de $\{f_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ yerine $\{E_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ alalım. Böylece,

$$\begin{aligned}
& (-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m+1}{i} (n+i+1) E_{n+i}(x) \\
& + (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} (m+j+1) E_{m+j}(-x) \\
& = (-1)^{m+1} (n+m+2) \{E_{n+m+1}(x) + (-1)^{n+m} E_{n+m+1}(-x)\} \\
& = (-1)^m 2(n+m+2) (x^{m+n+1} - E_{n+m+1}(x))
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. ■

Sonuç 3.5 $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$(-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} B_{n+i} = (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_{m+j}$$

ve

$$(-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{E_{n+i}}{2^{n+i}} = (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_{m+j} \left(-\frac{1}{2}\right)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Bir önceki teoremden (3.25) ve (3.26) ifadelerinde, sırasıyla, $x = 0$ ve $x = \frac{1}{2}$ alınarak görülür. ■

4. BULGULAR

4.1. $\mathbb{Z}_p$ Üzerinde Euler-Seidel Matrisleri

Daha önce Tanım 3.1 de Euler-Seidel matrislerini tanımlamıştık. Tanımda $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ elemanlarının ait olduğu değişmeli halkayı $(\mathbb{H})$ özel olarak $\mathbb{Z}_n$, ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$) alalım. Bu durumda ortaya çıkan Euler-Seidel matrislerinin tipleri; n asal olduğunda aynı, n asal olmadığında ise farklıdır. Şimdi bu iddiayı önce gözlemleyelim, sonra kanıtlayalım.

Uyarı 4.1 *Aşağıdaki durumlarda $i \neq j$ için $a_i \neq a_j$ olarak seçilecektir.*

Durum 4.2 $n = 2$ yani $\mathbb{H} = \mathbb{Z}_2$ alalım. Bu durumda $a_0, a_1 \in \{0, 1\}$ olur. Tanım 3.1 den $a_0 = 0$ ve $a_1 = 1$ için,

$$a_0^0 = 0, a_1^0 = 1, a_1^1 = 1 \text{ ve } a_0^1 = 1$$

bulunur. Elde edilen Euler-Seidel matrisi,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

dir. $a_0 = 1$ ve $a_1 = 0$ için,

$$a_0^0 = 1, a_1^0 = 0, a_1^1 = 1 \text{ ve } a_0^1 = 1$$

olur. Böylece,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

matrisi elde edilir. Böylece $\mathbb{H} = \mathbb{Z}_2$ özel durumuna karşılık elde edilen matrislerin tipleri aynı olup 2×2 dir.

Durum 4.3 $n = 3$ durumuna karşılık $\mathbb{H} = \mathbb{Z}_3$ üzerinde Euler-Seidel matrislerini inceleyelim. Bu durum için, $a_0, a_1, a_2 \in \{0, 1, 2\}$ olur. Bu durumda elde edilen altı matris aşağıdaki gibidir.

i. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$ için;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 3}$$

ii. $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 1$ için;

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 3}$$

iii. $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 2$ için;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{6 \times 3}$$

iv. $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0$ için;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{6 \times 3}$$

v. $a_0 = 2, a_1 = 0, a_2 = 1$ için;

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 3}$$

vi. $a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 0$ için;

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 3}$$

$\mathbb{H} = \mathbb{Z}_3$ durumu için elde edilen Euler Seidel matrisleri de aynı tipli olup tipleri 6×3 tür.

Durum 4.4 $n = 4$ için $\mathbb{H} = \mathbb{Z}_4$ durumunu inceleyelim. Bu durumda, $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$ olur.

i. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ için;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

ii. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 2$ için;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{7 \times 4}$$

elde edilir. Buradan $\mathbb{H} = \mathbb{Z}_4$ durumu için Euler-Seidel matrislerinin aynı tipli ol-
madıkları görülüyor.

Durum 4.5 $n = 5$ için $\mathbb{H} = \mathbb{Z}_5$ üzerinde elde edilen Euler-Seidel matrisleri önceki
durumlara benzer biçimde incelenirse, bu matrislerin 20×5 tipinde; aynı tipli mat-
risler oldukları görülür.

Bu gözlem sonucunda p asal olduğunda $\mathbb{Z}_p$ den elde edilen Euler-Seidel mat-
rislerinin aynı tipli olabileceği görülüyor.

Teorem 4.6 $\mathbb{Z}_p$, (p asal) üzerinde elde edilen Euler-Seidel matrisleri

$$p(p-1) \times p$$

tipindedir.

İspat. $\mathbb{H} = \mathbb{Z}_p$ için, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{Z}_p$ dir. (3.10) ifadesinden

$$\begin{aligned} a_n^p &= \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} a_{n+i}^0 = a_n^0 + \binom{p}{1} a_{n+1}^0 + \binom{p}{2} a_{n+2}^0 + \dots + \binom{p}{p-1} a_{n+p-1}^0 + a_n^0 \\ &= 2a_n^0 \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $(p+1)$. satır elemanları ilk satır elemanlarının 2 katı olarak
elde edilir. Diğer satırları elde etmek için işleme devam edilirse $(2p+1)$. satır ele-
manlarının ilk satır elemanlarının 4 katı olduğu görülür. Yani $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere,
 $(mp+1)$. satır ilk satırın 2^m katıdır. O halde $((p-1)p+1)$. satır ilk satır eleman-
larının 2^{p-1} katıdır. Fermatın küçük teoreminden,

$$2^p \equiv 2 \pmod{p}$$

olduğundan

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

yazılabilir. O halde $\mathbb{Z}_p$ de $((p-1)p+1)$. satır ilk satırın aynısıdır. Bu da $\mathbb{Z}_p$ de elde
edilen Euler-Seidel matrislerinin tiplerinin

$$(p-1)p \times p$$

olduğunu ispatlar. ■

4.2. Euler-Seidel Matrislerinde a_n^k Öğeleri için Üreteç Fonksiyonu

Burada materyal ve metot kısmında ispatsız olarak verilen (3.19) eşitliği Cauchy çarpımı yardımıyla ispatlanıp Euler-Seidel matrisleri için verilen örneklerin bir kısmı yeniden ele alınacaktır.

Önerme 4.1

$$\sum_{n,k \geq 0} a_n^k \frac{t^n}{n!} \frac{u^k}{k!} = e^u A(t+u)$$

eşitliği gerçekleşir.

İspat. $A(t)$ 'nin tanımından,

$$\begin{aligned} A(t+u) &= \sum_{k \geq 0} a_k^0 \frac{(t+u)^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k^0}{k!} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} t^n u^{k-n} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k^0}{k!} \binom{k}{n} t^n u^{k-n} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \frac{a_{k+n}^0}{(k+n)!} \binom{k+n}{n} t^n u^{k-n} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} a_{k+n}^0 \frac{t^n}{n!} \frac{u^k}{k!} \end{aligned} \quad (4.29)$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafı e^u ile çarpılarak sağ tarafa Cauchy çarpımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} e^u A(t+u) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} a_{k+n}^0 \frac{t^n}{n!} \frac{u^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{i+n}^0}{i!} \frac{t^n}{n!} \frac{1}{(k-i)!} \right) u^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a_{i+n}^0 \frac{t^n}{n!} \frac{u^k}{k!} \end{aligned}$$

bulunur. Burada (3.10) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\sum_{n,k \geq 0} a_n^k \frac{t^n}{n!} \frac{u^k}{k!} = e^u A(t+u)$$

olduğu görülür. ■

Şimdi birincisini daha önce farklı bir yolla incelediğimiz iki örneği yukarıdaki ispat için kullanılan yöntemle yeniden ele alalım.

Örnek 4.2 $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, ($n \geq 0$) başlangıç dizisi için,

$$a_n^k = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{(-1)^{n+k-m}}{(n+k-m+1)}$$

dır. Ayrıca özel olarak,

$$a_0^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m+1)}$$

dir. Gerçekten, (4.29) ifadesinden,

$$A(t+u) = \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+k}}{(n+k+1)} \frac{t^n}{n!} \frac{u^k}{k!}$$

yazılabilir. Bu ifadenin her iki tarafı e^u ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} e^u A(t+u) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \right) \left(\sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+k}}{(n+k+1)} \frac{t^n}{n!} \frac{u^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k-m}}{(n+k-m+1)} \frac{t^n}{n!} \frac{1}{(k-m)!} \right) u^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^k \frac{(-1)^{n+k-m}}{(n+k-m+1)} \frac{u^k}{k!} \frac{t^n}{n!} \binom{k}{m} \right) \\ &= \sum_{n,k \geq 0} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{(-1)^{n+k-m}}{(n+k-m+1)} \frac{u^k}{k!} \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

yazılabilir. (3.19) ifadesinden,

$$a_n^k = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{(-1)^{n+k-m}}{(n+k-m+1)}$$

olarak bulunur. Burada $n = 0$ olarak alınırsa,

$$a_0^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m+1)}$$

özel durumu elde edilir.

Örnek 4.3 $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$, ($n \geq 0$) dizisini başlangıç dizisi olarak alalım. Bu durumda oluşan Euler-Seidel matrisinin a_n^k girdisi yine aynı yöntemle,

$$a_n^k = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \frac{(-1)^{n+k-m}}{(2n+2k-2m+1)}$$

olarak bulunur. Yine burada da $n = 0$ özel durumu için,

$$a_0^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{(-1)^{n-m}}{(2n-2m+1)}$$

olarak elde edilir. Bu başlangıç dizisine karşılık gelen Euler-Seidel matrisi,

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{7} & \cdots & & \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{2}{35} & \cdots & & & \\ \frac{8}{15} & -\frac{8}{105} & \cdots & & & & \\ \frac{48}{105} & \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & & & \end{array}$$

dır.

4.3. Genocchi Polinomları ve Sayıları için Bazı Özdeşlikler ve Yineleme Bağlılıkları

Genocchi polinomları Tanım 1.6 ile verilmişti. Bu tanım yardımıyla Bernoulli ve Euler polinomları için verilen önermelerin benzerleri Genocchi polinomları içinde ifade edilebilir.

Önerme 4.1 $n \geq 1$ olmak üzere,

$$G_n(x+1) + G_n(x) = 2nx^{n-1} \quad (4.30)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (1.3) ifadesinden,

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x+1) \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \{G_n(x+1) + G_n(x)\} \frac{z^n}{n!}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \frac{2ze^{(x+1)z}}{e^z + 1} + \frac{2ze^{xz}}{e^z + 1} &= 2ze^{xz} = 2z \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^n \frac{z^{n+1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2x^{n-1} \frac{z^n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{n-1} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

yazılabilir. Sağ tarafları eşit olan bu iki ifadenin sol taraflarının eşitliğinden istenen eşitlik bulunur. ■

Önerme 4.2

$$G_n(1-x) = (-1)^{n+1} G_n(x) \quad (4.31)$$

dir.

İspat. (1.3) ifadesinden,

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(1-x) \frac{z^n}{n!} = \frac{2ze^{(1-x)z}}{e^z + 1} = \frac{2ze^{-xz}}{1 + e^{-z}} = - \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{(-z)^n}{n!}$$

yazılabilir. Buradan karşılıklı katsayılar karşılaştırılarak,

$$G_n(1-x) = (-1)^{n+1} G_n(x)$$

eşitliği bulunur. ■

Bu önerme yardımıyla Bernoulli ve Euler polinomları için (3.25) ve (3.26) ifadelerinde verilen eşitliklere benzer aşağıdaki eşitlik, Genocchi polinomları için de ifade edilebilir.

Sonuç 4.3 $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$(-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} G_{n+i}(x) = -(-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} G_{m+j}(-x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Tanım 1.6 dan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{z^n}{n!} = e^{z(x-\frac{1}{2})} \frac{2z}{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}$$

yazılabilir. Böylece (3.22) ifadesi gözönüne alınırsa,

$$F(z) = \frac{2z}{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}$$

olur. $F(z)$ nin tek olduğu açıktır. (3.12) te $\{f_k(x)\}_{k=0}^{\infty} = \{G_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ olarak alınırsa istenen ifade bulunur. ■

Sonuç 4.4 $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & (-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m+1}{i} (n+i+1) G_{n+i}(x) \\ & - (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} (m+j+1) G_{m+j}(-x) \\ & = (-1)^m 2(m+n+2) ((m+n+1)x^{m+n} - G_{m+n+1}(x)) \end{aligned}$$

eşitliği vardır.

İspat. Sonuç 3.2 de $\{f_k(x)\}_{k=0}^\infty = \{G_k(x)\}_{k=0}^\infty$ Genocchi polinomları olarak alınırsa,

$$(-1)^m \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} (n+i+1) G_{n+i}(x) = (-1)^n \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (m+j+1) G_{m+j}(-x)$$

olur. Buradan;

$$\begin{aligned} & (-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m+1}{i} (n+i+1) G_{n+i}(x) \\ & - (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} (m+j+1) G_{m+j}(-x) \\ & = (-1)^n (m+n+2) \{G_{m+n+1}(-x) - (-1)^{m+n} G_{m+n+1}(x)\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

elde edilir. (4.31) den,

$$G_{m+n+1}(1-x) = (-1)^{m+n+2} G_{m+n+1}(x)$$

yazılabilir. Burada x yerine $-x$ alınırsa,

$$G_{m+n+1}(1+x) = (-1)^{m+n} G_{m+n+1}(-x)$$

bulunur. Ayrıca (4.30) eşitliğinden,

$$G_{m+n+1}(x+1) + G_{m+n+1}(x) = 2(m+n+1)x^{m+n}$$

yazılabilir. O halde

$$(-1)^{m+n} G_{m+n+1}(1+x) = (-1)^{m+n} \{2(m+n+1)x^{m+n} - G_{m+n+1}(x)\}$$

elde edilir. Bunlar (4.32) eşitliğinde yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& (-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m+1}{i} (n+i+1) G_{n+i}(x) \\
& - (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} (m+j+1) G_{m+j}(-x) \\
& = (-1)^n (m+n+2) \{ (-1)^{m+n} G_{m+n+1}(1+x) - (-1)^{m+n} G_{m+n+1}(x) \} \\
& = (-1)^m (m+n+2) \{ G_{m+n+1}(1+x) - G_{m+n+1}(x) \} \\
& = (-1)^m (m+n+2) \{ 2(m+n+1)x^{m+n} - G_{m+n+1}(x) - G_{m+n+1}(x) \} \\
& = (-1)^m 2(m+n+2) \{ (m+n+1)x^{m+n} - G_{m+n+1}(x) \}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

Sonuç 4.5 $m, n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$(-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} G_{n+i} = (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} G_{m+j}$$

ifadesi vardır.

İspat. Sonuç 4.3 de $x = 0$ alınarak kolayca görülür. ■

5. SONUÇ

Bu çalışma kapsamında, Euler-Seidel matrislerinin öğelerinin alındığı değişmeli halkasının $\mathbb{Z}_p$ olması durumu incelendi. Bu durumda elde edilen Euler-Seidel matrislerinin tiplerinin $p(p-1) \times p$ tipinde oldukları ispatlandı. Bu matrislerin öğelerini elde etmek için Dominique Dumont'un bulduğu ifadelerin dışında farklı ifadeler elde edildi.

Zhi-Wei Sun, Hao Pan ve Ke-Jian Wu'nun Bernoulli, Euler polinomları ve sayıları için bulduğu bağıntılar, Genocchi polinomları ve sayıları için de elde edildi.



KAYNAKLAR

- ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover. New York.
- AKIYAMA, S. and TANIGAWA, Y. 1999. Multiple Zeta Values at Non-positive Integers, Preprint.
- APOSTOL, T. M. 1976-a. Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, New York.
- APOSTOL, T. M. 1976-b. Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory. Springer-Verlag, New York.
- CHEN, K. W. 2001. Algorithms for Bernoulli Numbers and Euler Numbers, *Journal of Integer Sequences* Vol.4 Article 01.1.6.
- COMTET, L. 1970. Advanced Combinatorics. Presses Universitaires de France, Paris.
- DUMONT, D. 1974. Interpretations Combinatoires des Nombres de Genocchi, *Duke Mathematical Journal* 41, 305-308.
- DUMONT, D. 1981. Matrice's D'euler-Seidel. Seminaire Lotharingien de Combinatoire. B05c.
- DUMONT, D. and ZENG, J. 1994. Further Results on the Euler and Genocchi Numbers, *Aequationes Mathematicae* 47, 31-42. University of Waterloo.
- GRAHAM, R. L. , KNUTH, D. E. , PATASHNIK, O. 1989. Concrete Mathematics, Addison-Wesley, New York.
- JANG, L. C., KIM, T., LEE, D. H., PARK, D. W. 2001. An Application of Polynomials in the Analogs of Genocchi Numbers, *N.N.T. and D.M.*, 7, No: 3, 65-69.

- KANEKO, M. 1995. A Recurrence Formula for the Bernoulli Numbers, *Proc. Japan Acad. Ser.A Math. Sci.* 71, 192-193.
- KANEKO, M. 2000. The Akiyama-Tanigawa Algorithm for Bernoulli Numbers, *Journal of Integer Sequences*, Vol.3 Article 00.29.
- MOMIYAMA, H. 2001. A New Recurrence Formula for Bernoulli Numbers, *Fibonacci Quart.* 39, 285-288.
- NORLUND, N. 1954. Vorlesungen Über Differenzenrechnung, Chelsea, New York.
- PAN, H. and SUN, Z. W. New Identities Involving Bernoulli and Euler Polynomials, *To appear in J. Combin. Theory Ser.A.* (preprint).
- RADEMACHER, H., GROSSWALD, E. 1972. Dedekind Sums, Carus Mathematical Monographs. Math. Assoc. Amer. Washington, D.C.
- SUN, Z. W. 2002. Introduction to Bernoulli and Euler Polynomials, A lecture given in Taiwan on June 6.
- SUN, Z. W. 2003. Combinatorial Identities in Dual Sequences. *European Journal of Combinatorics* 24, 709-718.
- SUN, Z. W. 2005. Identities and Congruences for Bernoulli and Euler Polynomials, A talk given at Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon-I (France) Jan 13.
- VIENNOT, G. 1980-81. Theorie Combinatoire des Nombres d'Euler et Genocchi, Seminaire de Theorie des Nombres, Expose No:11. Publications de l'Université de Bordeaux.
- WU, K. J. , SUN, Z. W. and PAN, H. 2004. Some Identities for Bernoulli and Euler Polynomials, *Fibonacci Quart.* 42, No:4, 295-299.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Ağrı ili Doğubeyazıt ilçesinde doğdum. İlk-orta ve lise öğrenimimi Kayseri ili Pınarbaşı ilçesinde tamamladım. 1999 yılında girdiğim Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2003 yılında matematikçi olarak mezun oldum. 2004 yılı Şubat döneminde Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilimdalında yüksek lisans öğrenimime başladım. Ekim 2005'te Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilimdalına Araştırma Görevlisi olarak atandım ve halen bu görevimi sürdürmekteyim.

