

DEĞİŞKEN KALINLIĞA SAHİP
İÇİ DOLU VE İÇİ BOŞ DÖNEN DİSKLERDE
ELASTİK-PLASTİK GERİLME ANALİZİ

133279

Tunç APATAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ
(MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ)

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2003
ANKARA

133279

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Tunç APATAY tarafından hazırlanan DEĞİŞKEN KALINLIĞA SAHIP İÇİ DOLU VE İÇİ BOŞ DÖNEN DİSKLERDE ELASTİK-PLASTİK GERİLME ANALİZİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.



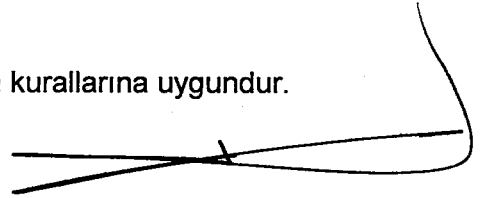
Doç.Dr. Müfit GÜLGEÇ

Tez Yöneticisi

Bu alıőma, jürimiz tarafından Makina Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Ali Ünal Erdem 
Üye : Doç.Dr. Müfit GÜLGEÇ 
Üye : Prof. Dr. Yusuf ORÇAN 

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. PROBLEMİN TANITILMASI.....	3
2.1. Disk Profili.....	3
2.2. Sınır Koşulları.....	5
2.3. Genel Elastisite ve Plastisite Teorisinin Probleme Uygulanması.....	5
3. TEORİ.....	6
3.1. Temel Denklemler.....	6
3.1.1. Silindirik koordinatlarda denge denklemi.....	6
3.1.2. Denge denkleminin boyutsuz forma getirilmesi.....	7
3.2. Elastisite Teorisi.....	8
3.2.1. Polar koordinatlarda gerinme - yer değiştirme bağıntıları.....	8
3.2.2. Disk için gerinme - yer değiştirme bağıntıları ve uygunluk denklemi.....	10
3.2.3. Hooke kanunu.....	10
3.2.4. Dönen disk için Hooke kanunu.....	11
3.2.5. Dönen disk için gerilme - yer değiştirme bağıntıları.....	11
3.3. Plastisite Teorisi.....	12

3.3.1. Akma kriteri ve akma yüzeyi.....	12
3.3.2. Prandtl – Reuss denklemleri.....	17
3.3.3. İzotropik Pekleşme.....	22
3.3.4. Artık gerilmeler	24
4. ELASTİK ÇÖZÜM VE SONUÇLAR.....	25
4.1. İçi Dolu Disk.....	29
4.2. İçi Boş Disk.....	34
4.2.1. Uçları serbest disk.....	34
4.2.2. Rijid şafta sabitlenmiş disk.....	37
4.2.3. Sabit iç basınca maruz disk	39
4.3. Elastik Parametrik Analiz.....	41
5. ELASTİK-PLASTİK GERİLME ANALİZİ VE SONUÇLAR.....	50
5.1. İçi Dolu Disk.....	54
5.2. İçi boş disk.....	65
5.2.1. Uçları serbest disk.....	65
5.2.2. Rijid şafta sabitlenmiş disk.....	69
5.2.3. Sabit iç basınca maruz disk.....	74
5.3. Elastik-Plastik Bölgede Parametrik Analiz.....	78
6. SONUÇ.....	89
KAYNAKLAR.....	90
ÖZGEÇMİŞ.....	93

**DEĞİŞKEN KALINLIĞA SAHİP
İÇİ DOLU VE İÇİ BOŞ DÖNEN DİSKLERDE
ELASTİK-PLASTİK GERİLME ANALİZİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Tunç APATAY

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2003**

ÖZET

Bu çalışmada, kalınlığı parabolik bir fonksiyonla değişen lineer olmayan gerinme sertleşmeli dönen disklerin elastik-plastik gerilme analizi yapılmıştır. Çözüm, içi dolu diskler, içi boş ve uçları serbest diskler, rijid şafta sabitlenmiş diskler ve sıkı geçme ile rijid şafta bağlanmış diskler için ayrı ayrı elde edilmiştir. Farklı geometriye sahip disklerde, elastik ve plastik limit açısal hızların, gerilme, yer değiştirme ve gerinmelerin, disk geometrisine ve pekleşme parametrelerine bağlı olarak nasıl değiştiği incelenmiştir. İçi dolu disklerde bazı disk geometrilerinin plastik deformasyonun disk içinde başlangıç konumunu değiştirdiği görülmüştür. Değişken kalınlıklı disklerde meydana gelen gerilme, yer değiştirme ve gerinmelerin sabit kalınlıklı disklerden aynı açısal hızlarda daha küçük olduğu gözlenmiştir. Değişik sınır şartlarında optimum disk tasarımı için parametrelerin etkileri incelenmiştir. Elastik çözüm hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden analitik olarak, plastik çözüm ise nümerik olarak elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 959
Anahtar Kelimeler : Dönen Diskler, Değişken Kalınlık, von Mises Akma Kriteri
Sayfa Adedi : 93
Tez Yöneticisi : Doç.Dr.Müfit GÜLGEÇ (Danışman),
Doç.Dr.Ahmet N. ERASLAN (Y.Danışman)

**ELASTIC-PLASTIC STRESS ANALYSIS
IN SOLID AND ANNULAR DISKS
OF VARIABLE THICKNESS
(M.Sc. Thesis)**

Tunç APATAY

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
July 2003**

ABSTRACT

In this study, elastic-plastic stress analysis of rotating disks for nonlinear strain hardening and variable thickness, which varies with a parabolic function, are obtained for solid and annular disks with free ends, radially constrained and pressurized. It is investigated how elastic and plastic limit angular velocities, stresses, displacements and strains are influenced by disk geometry and hardening parameters for disks with different profiles. It is observed that, for solid disks, some disk profiles change the starting position of plastic deformation. For the same angular velocities it is obtained that stress, displacement and strains in parabolic disks are lower in magnitude than those in uniform thickness. Effects of parameters on optimum disk design for different boundary conditions are investigated. Elastic solution is obtained analytically in terms of hypergeometric functions and plastic solution is obtained numerically.

**Science Code : 959
Key Words : Rotating Disks, Variable Thickness, von Mises Yield Criterion
Page Number : 93
Adviser : Doç.Dr. Müfit GÜLGEÇ (Adviser),
Doç.Dr. Ahmet N. ERASLAN (Co-Adviser)**

TEŞEKKÜR

Çalışmamın bütün süreçlerinde bana yön veren, yardımlarını ve değerli zamanlarını benden esirgemeyen Sayın Doç.Dr. Müfit GÜLGEÇ ve Doç.Dr. Ahmet N. ERASLAN' a, manevi desteklerini her zaman hissettiğim aileme, Makina Müh.Bölümü Arş.Görevlileri Tuncay KARAÇAY, Nureddin DİNLER, Muhittin BİLGİLİ ve Serkan ÖZEN' e teşekkürlerimi sunarım.



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Disk profilleri (a) $n = 0,6$, $k = 0,45$; (b) $n = 0,6$, $k = 2,4$; (c) $n = 0,6$, $k = 1,0$	4
Şekil 3.1. Polar koordinatlarda bir elemana gelen gerilmeler.....	6
Şekil 3.2. Polar kooordinatlarda bir elemanın deformasyonu ve yer değiştirmesi.....	8
Şekil 3.3. Maksimum gerilme teorisi.....	13
Şekil 3.4. Tresca akma kriterinin $\sigma_1\sigma_2$ düzleminde gösterimi.....	15
Şekil 3.5. Von Mises elipsi.....	16
Şekil 4.1. Kritik hızlardaki gerilme ve yer değiştirmeler: (a) $n = 0,6$, $k = 0,45$; (b) $n = 0,6$, $k = 2,4$	31
Şekil 4.2. Simetri eksenini civarında elastik limit hızlarda iki farklı gerilme dağılımı.....	32
Şekil 4.3. $r = 0$ ' da $d\sigma_r/dr = 0$ ' ı sağlayan n ve k değerleri (II. Bölge) ve $r = 0$ ' da $d\sigma_r/dr > 0$ 'ı sağlayan n ve k değerleri (I. Bölge).....	33
Şekil 4.4. I. Bölgedeki diskler için n ve k ' nın r_M ' ye etkisi.....	34
Şekil 4.5. Uçları serbest disk için elastik limit açısal hızlarda gerilme ve yer değiştirme dağılımları.....	36
Şekil 4.6. İç kısmından sabitlenmiş disk için elastik limit açısal hızlardaki gerilme ve yer değiştirme dağılımları.....	38
Şekil 4.7. Sabit iç basınca maruz disk için elastik limit açısal hızlardaki gerilme ve yer değiştirme dağılımları.....	40
Şekil 4.8. Değişik n değerleri için içi dolu disklerde (a) radyal, (b) teğetsel gerilmeler.....	42
Şekil 4.9. Değişik n değerleri için uçları serbest disklerde (a) radyal, (b) teğetsel gerilmeler.....	43

Şekil 4.10. Değişik n değerleri için rijid şafta sabitlenmiş disklerde (a) radyal, (b) teğetsel gerilmeler.....	44
Şekil 4.11. Değişik n değerleri için sabit iç basınca maruz disklerde (a) radyal, (b) teğetsel gerilmeler.....	45
Şekil 4.12. Uçları serbest disk için elastik limit açısal hızın n parametresiyle değişimi.....	46
Şekil 4.13. Rijid şafta sabitlenmiş serbest disk için elastik limit açısal hızın n parametresiyle değişimi.....	47
Şekil 4.14. Sabit iç basınca maruz disk için elastik limit açısal hızın n parametresiyle değişimi.....	47
Şekil 4.15. Uçları serbest disk için iç yarıçapın elastik limit açısal hıza etkisi.....	48
Şekil 4.16. Rijid şafta sabitlenmiş diskler için iç yarıçapın elastik limit açısal hıza etkisi.....	49
Şekil 4.17. Sabit iç basınca maruz disk için iç yarıçapın elastik limit açısal hıza etkisi.....	49
Şekil 5.1. İçi dolu disk için elastik - plastik gerilme, yer değiştirme ve plastik gerilmeler ($n = 0,4, k = 2,4$); (a) $m = 0,5$, (b) $m = 2,0$	56
Şekil 5.2. Elastik – plastik arayüzün (a) H ile ; (b) m ile değişimi (II. Bölge için).....	58
Şekil 5.3. İçi dolu disk için plastik limit açısal hızda gerilme, yer değiştirme ve plastik gerilmeler ($n = 0,4, k = 2,4$; $\Omega = 2,1215$, $H = 0,5$, $m = 2,0$).....	59
Şekil 5.4. İçi dolu diskde radyal ve teğetsel artık gerilme bileşenleri ($n = 0,4, k = 2,4$; $\Omega = 2,20$, $H = 0,5$, $m = 2,0$).....	60
Şekil 5.5. İçi dolu disk için elastik - plastik gerilme, yer değiştirme ve plastik gerilmeler ($n = 0,4, k = 0,8$; $\Omega = 2,0$, $m = 2,0$, $H = 0,5$).....	61
Şekil 5.6. Elastik – plastik arayüzün (a) H ile ; (b) m ile değişimi. (I. Bölge için).....	63

Şekil 5.7. İçi dolu disk için plastik limit açısal hızlarda gerilme, yer değiştirme ve plastik gerinmeler ($n = 0,4, k = 0,8, m = 2,0, H = 0,5$).....	64
Şekil 5.8. İçi dolu diskde radyal ve teğetsel artık gerilme bileşenleri ($n = 0,4, k = 0,8; \Omega = 2,20, H = 0,5, m = 2,0$).....	65
Şekil 5.9. Uçları serbest disk için elastik - plastik gerilme, yer değiştirme ve plastik gerinmeler ($n = 0,4, k = 2,4; \Omega = 1,7, H = 0,5, m = 2,0$).....	67
Şekil 5.10. Uçları serbest disk için elastik – plastik arayüzün (a) H ile ; (b) m ile değişimi.....	68
Şekil 5.11. Uçları serbest disk için plastik limit açısal hızlarda gerilme, yer değiştirme ve plastik gerinmeler ($n = 0,4, k = 2,4; H = 0,5, m = 2,0$).....	68
Şekil 5.12. Uçları serbest diskde radyal ve teğetsel artık gerilme bileşenleri.($n = 0,4, k = 2,4; \Omega = 2,0, H = 0,5, m = 2,0$).....	69
Şekil 5.13. Rijid şafta sabitlenmiş disk için elastik-plastik gerilme, yer değiştirme ve plastik gerinmeler ($n = 0,4, k = 2,4; \Omega = 2,0$).....	71
Şekil 5.14. Rijid şafta sabitlenmiş disk için elastik–plastik arayüzün (a) H ile ; (b) m ile değişimi.....	72
Şekil 5.15. Rijid şafta sabitlenmiş disk için plastik limit açısal hızlarda gerilme, yer değiştirme ve plastik gerinmeler ($n = 0,4, k = 2,4; H = 0,5, m = 2,0$).....	73
Şekil 5.16. Rijid şafta sabitlenmiş diskde radyal ve teğetsel artık gerilme bileşenleri ($n = 0,4, k = 2,4; \Omega = 2,3, H = 0,5, m = 2,0$).....	74
Şekil 5.17. Sabit iç basınca maruz disk için elastik-plastik gerilme, yer değiştirme ve plastik gerinme ($n = 0,4, k = 2,4; H = 0,5, m = 2,0, p = 0,25$).....	76
Şekil 5.18. Sabit iç basınca maruz disk için elastik–plastik arayüzün (a) H ile ; (b) m ile değişimi.....	77
Şekil 5.19. Sabit iç basınca maruz disk için plastik limit açısal hızlarda gerilme, yer değiştirme ve plastik gerinmeler($n = 0,4, k = 2,4; m = 2,0, H = 0,5, p = 0,25$)	77

Şekil 5.20. Sabit iç basınca maruz diskde radyal ve teğetsel artık gerilme bileşenleri. ($n = 0,4, k = 2,4 ; \Omega = 2,0, H = 0,5, m = 2,0$).....	78
Şekil 5.21. İçi dolu disk için sabit kalınlıklı diskin plastik limit açısal hızında, (a) radyal, (b) teğetsel gerilme ve plastik gerinmeler.....	79
Şekil 5.22. Uçları serbest disklerde sabit kalınlıklı diskin plastik limit açısal hızında, (a) radyal, (b) teğetsel gerilme ve plastik gerinmeler.....	80
Şekil 5.23. Rijid şafta sabitlenmiş disklerde sabit kalınlıklı diskin plastik limit açısal hızında, (a) radyal, (b) teğetsel gerilme ve plastik genlemeler.....	81
Şekil 5.24. Sabit iç basınca maruz disklerde sabit kalınlıklı diskin plastik limit açısal hızında (a) radyal, (b) teğetsel gerilme ve plastik gerinmeler.....	82
Şekil 5.25. İçi dolu diskde (a) H' in, (b) m' in plastik limit açısal hız etkisi.....	83
Şekil 5.26. Uçları serbest diskde (a) H' in, (b) m' in plastik limit açısal hız etkisi.....	84
Şekil 5.27. Rijid şafta sabitlenmiş diskde (a) H' in, (b) m' in plastik limit açısal hız etkisi.....	85
Şekil 5.28. Sabit iç basınca maruz diskde (a) H' in, (b) m' in plastik limit açısal hız etkisi.....	86
Şekil 5.29. Uçları serbest disklerde iç yarıçapın plastik limit açısal hızlara etkisi.....	87
Şekil 5.30. Rijid şafta sabitlenmiş disklerde iç yarıçapın plastik limit açısal hızlara etkisi.....	88
Şekil 5.31. Sabit iç basınca maruz disklerde iç yarıçapın plastik limit açısal hızlara etkisi.....	88

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
b	Disk yarıçapı
a	Disk iç yarıçapı
n, k	Geometrik parametreler
r, θ	Silindirik koordinatlar
$h(r)$	Disk kalınlığı
h_0	Disk merkezindeki kalınlığı
E	Elastisite modülü
ν	Poisson oranı
ρ	Kütle yoğunluğu
ω	Açısal hız
Ω	Boyutsuz açısal hız
p	Boyutsuz basınç
σ_{ij}	Gerilme bileşenleri
σ_{ij}^R	Artık gerilme bileşenleri
τ_{oct}	Oktahedral kayma gerilmesi
ε_{ij}	Gerinme bileşenleri
ε_{ij}^p	Plastik gerinme bileşenleri
m	Swift sertleşme sabiti
u	Radyal yer değiştirme
r_M	Akmanın başladığı yarıçap değeri
r_{ep}	Elastik-plastik arayüz
J_2	İkinci deviatorik gerilme değişmezi
S_{ij}	Deviatorik gerilme tansörü
σ_e	Efektif gerilme

$d\varepsilon_p$	Efektif gerinme artışı
H	Normalize edilmiş sertleşme parametresi
C_i	Integral sabitleri
σ_0, σ_y	İlk akma gerilmesi, akma gerilmesi
η	Sertleşme parametresi
$P(r), Q(r)$	Dif.Denklem homojen çözümleri
$R(r)$	Dif.Denklem özel çözümü



1. GİRİŞ

Mühendislikde dönen elemanlar içeren makinaların yaygın bir uygulama alanı vardır (1,2,3). Bu alanlardan bazıları;

- Turbo makinalar, gaz turbinleri, volanlar
- Güç istasyonları
- Kesici takımlar
- Otomobiller
- Elektrikli ev aletleri
- Uzay uygulamaları
- Medikal aletler.

olarak sıralanabilir. Özellikle uzay araçları, turbo makinalarda dönen elemanların kapasitelerinin üstünde bir hızda çalıştırılmaları sonucu oluşan deformasyonlar, sistemde onarımı yüksek maliyetin yanında insan hayatını tehlikeye sokacak bir durum oluştururlar. Bu geniş uygulama alanı ve önemi nedeniyle dönen diskler üzerine gerilme ve yer değiştirmelerin teorik ve deneysel analizi uzun zamandır ilgi çeken bir konu olmuştur.

Döner disklerin ilk teorik araştırması Laszlo tarafından 1925 yılında ele alınmıştır. İçi dolu ve kalınlığı sabit disklerin elastik-plastik çözümü problemin en temel halidir. Bu problemin ilk doğru analitik çözümü 1984 yılında Gamer (4,5) tarafından elde edilmiştir. Gamer' in bu çözümü düzlem gerilme varsayımına dayalıdır ve elastik-plastik deformasyon için lineer gerilme-gerilme ilişkisi esas alınmıştır. Tresca akma kriteri ve ilgili akma kuralı kullanılarak tüm deformasyon adımlarının kapalı çözümleri yapılmıştır. L.H.You ve S.Y.Long (6) non-lineer gerilme-gerilme ilişkisi için von Mises kriteri ile sonlu elemanlar yöntemini kullanarak bir çalışma yapmışlardır. Gamer' in çalışmasından yola çıkarak daha sonra birçok araştırmacı değişken kalınlıklı disklerin elastik-plastik çözümlerini elde etmek için çaba harcamışlardır.

Güven (7,8) içi dolu dönen diskler için biri eksponensiyel ve bir diğeri de kuvvet fonksiyonu tipinde iki değişik kalınlık fonksiyonu öne sürmüş ve kalınlıkları bu fonksiyonlarla değişen disklerin analitik çözümleri Eraslan, Orçan (9) ve Orçan, Eraslan (10) tarafından elde edilmiştir. Konkav kalınlıklı içi dolu dönen disklerin kapalı çözümleri Eraslan ve Orçan (11) tarafından sunulmuştur. Yazarlar bu çalışmalarında konkav disklerin elastik ve elastik-plastik davranışlarının sabit kalınlıklı disklerden tamamen farklı olduğunu göstermişlerdir. Güven (12) malzeme yoğunluğu değişken içi boş diskler için Tresca akma kriteri ile elastik-plastik analiz yapmış ve yoğunluk değişiminin gerilme dağılımını önemli ölçüde etkilediğini göstermiştir. Güven (13) ayrıca, ortasından rijid bir şafta monte edilmiş hiperbolik kalınlıklı dönen bir diskin teorik analizini Tresca akma kriteri kullanarak yapmıştır. Değişken kesitli dönen disklerle ilgili kapsamlı bir çalışmada Eraslan ve Argeşo (14) tarafından gerçekleştirilmiştir. Araştırmacılar bu çalışmalarında kalınlığı bir kuvvet fonksiyonuyla tanımlanan dönen bir diskin elastik ve plastik limit açısal hızlarına disk kalınlığını belirleyen fonksiyonun geometrik parametrelerinin etkisini araştırmışlardır. Bu çalışmada plastik limit açısal hızlar için von Mises akma kriteri kullanılmış ve bilgisayar çözümleri bulunmuştur. Değişken kalınlıklı diskler ile ilgili son yıllarda yapılan tüm araştırmalar, bu diskler içerisinde gerilme ve yer değiştirmelerin aynı hızda dönen sabit kalınlıklı disklerle göre çok daha düşük olduğunu göstermektedir. Böylece, daha az malzeme kullanarak daha dayanıklı diskler tasarlamak mümkün olmaktadır.

Bu çalışmanın amacı önerilen iki parametrelili parabolik kalınlık fonksiyonuna sahip bir disk için elastik-plastik gerilme analizini lineer olmayan gerilme-gerinme ilişkisi malzemeler için ve içi dolu, uçları serbest, rijid şafta sabitlenmiş ve sabit iç basınca maruz diskler için von Mises akma kriteri kullanarak yapmaktır.

2. PROBLEMİN TANITILMASI

2.1. Disk Profili

Bu çalışmada incelenecek olan diskin profili, disk yarıçapına bağlı parabolik bir fonksiyonla karakterize edilmiştir:

$$h(r) = h_0 \left[1 - n \left(\frac{r}{b} \right)^k \right] \quad [2.1]$$

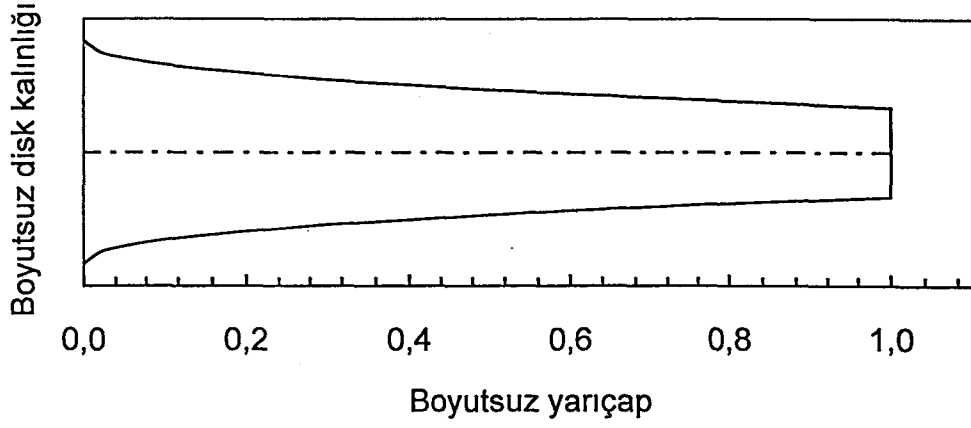
Burada ;

- r : Radyal koordinat,
- h_0 : Diskin merkezindeki kalınlığı,
- b : Diskin yarıçapı,
- n, k : Geometrik parametreler

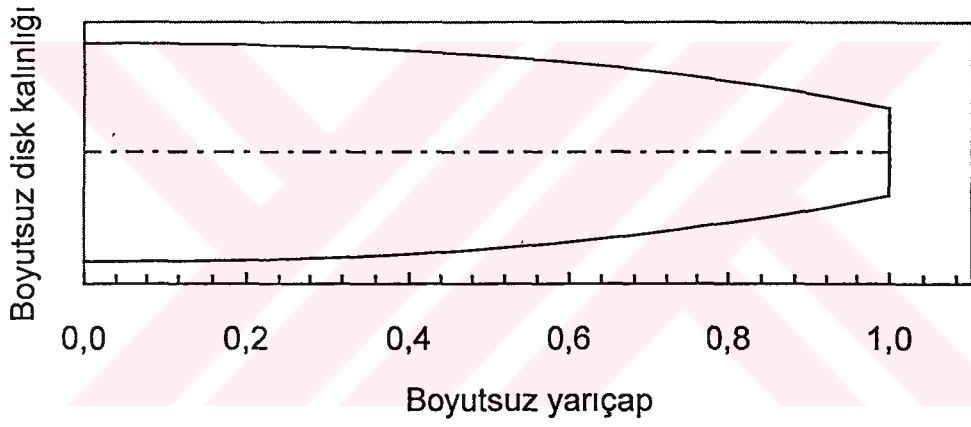
olarak tanımlanmıştır.

Eş. 2.1 ifadesinde, n ve k 'ya farklı değerler vererek farklı profillerde diskler elde edilebilir. Burada n diskin ucundaki kalınlığı ve k ise disk profilinin şeklini belirleyen parametrelerdir ($0 \leq n \leq 1, k > 0$). $n = 0$ değeri için sabit kalınlıklı disk profili ve , $k = 1$ değerleri için lineer olarak azalan disk profilleri elde edilebilir. Ayrıca $k < 1$ değerleri konkav, $k > 1$ değerleri ise konveks profiller verirler.

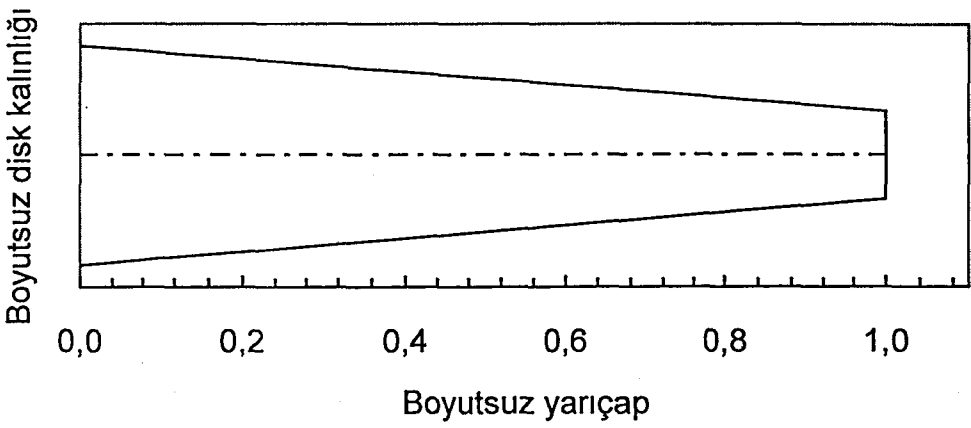
Bazı n ve k değerleri için boyutsuz kalınlık fonksiyonu $\bar{h} = h(r)/h_0$ 'nun boyutsuz yarıçap $\bar{r} = r/b$ 'e göre çizilmiş disk profilleri Şekil 2.1' de gösterilmiştir. Şekil 2.1a' da konkav, Şekil 2.1b' de konveks, Şekil 2.1c' de lineer disk profillere örnekler verilmiştir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 2.1. Disk profilleri (a) $n = 0,6$, $k = 0,45$; (b) $n = 0,6$, $k = 2,4$; (c) $n = 0,6$, $k = 1,0$

2.2. Sınır Koşulları

Parabolik profile sahip dönen disk için bu çalışmada dört farklı sınır koşulu için çözümler elde edilmiştir. Bu sınır koşullarından ilki, mühendislikte pek bir uygulama alanı olmamasına rağmen diğer sınır koşullarında çalışan disklerin çözümü için temel teşkil eden içi dolu disklerdir. Ortasında yarıçapı a kadar bir boşluk bulunan diskler için ise serbest, rijid şafta sabitlenmiş ve sıkı geçme ile rijid bir şafta sabitlenmiş diskler diğer sınır şartlarına sahip disklerdir. Bütün bu sınır şartlarının matematiksel ifadeleri konu içerisinde ayrıntılı olarak incelenmiştir.

2.3. Genel Elastisite ve Plastisite Teorisinin Probleme Uygulanması

Disk için yapılacak elastik-plastik gerilme analizinde esas alınacak denklemler polar koordinatlar kullanılarak elde edilir. Polar koordinatlarda üç boyutlu problemlerin çözümü zordur. Burada disk kalınlığının yarıçapa oranla küçük olduğu kabulüyle simetri eksenine doğrultusundaki gerilme bileşeni σ_z , ihmal edilerek problem düzlem gerilme haline indirgenir. Denge denkleminde sadece atalet kuvveti dikkate alınır, çünkü disk ağırlığından kaynaklanan gerilmeler diğerleri yanında ihmal edilebilir (3).

Lineer elastisite teorisinde kullanılan gerilme – yer değiştirme bağıntıları çok küçük şekil değiştirmeler için geçerlidir. Bu kabul ile yer değiştirme ifadelerinin yüksek dereceden türevleri ihmal edilir (16).

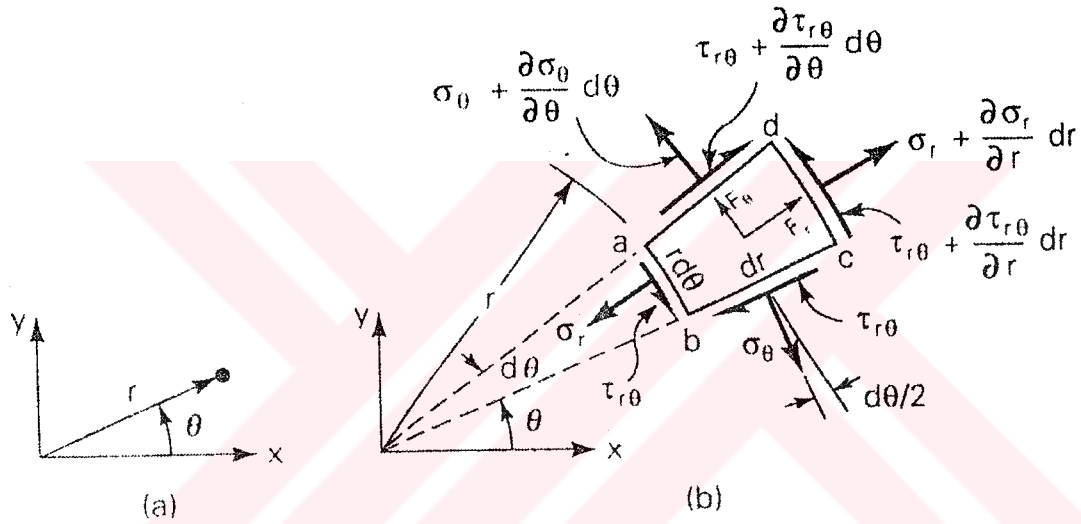
Plastik çözümde deneysel verilere en yakın sonuç veren von Mises akma kriteri ve elastik-plastik şekil değiştirmelerin birlikte kullanıldığı Prandtl-Reuss denklemleri kullanılmıştır. Lineer olmayan sertleşme davranışı ise Swift' in sertleşme kanununun bir formuyla karakterize edilmiştir (14).

3. TEORİ

3.1. Temel Denklemler

3.1.1. Silindirik koordinatlarda denge denklemi

Disk kalınlığının yarıçapa oranla küçük olduğu kabulüyle simetri eksenini doğrultusundaki gerilme bileşeni, σ_z , ihmal edilerek problem düzlem gerilme hali ele alınarak incelenebilir.



Şekil 3.1. Polar koordinatlarda bir elemana gelen gerilmeler

$\sum F_r = 0$ ve $\sum F_\theta = 0$ denge şartlarından;

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + X_r = 0 \quad [3.1]$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + X_\theta = 0 \quad , \quad X_\theta = 0 \quad [3.2]$$

denklemleri elde edilir.

Burada X_r ve X_θ , kütle kuvvetinin radyal ve teğetsel bileşenleridir.

Diskin dönme eksenine göre simetrik olmasından dolayı yer değiştirmeler θ 'dan bağımsızdır ve $\tau_{r\theta} = 0$ 'dır (3). Ayrıca diskten ağırlığından kaynaklanan gerilmeler diğerlerine oranla küçük olduğundan disk ağırlığı ihmal edilebilir. Kütle kuvveti olarak da sadece atalet kuvvetinin dikkate alınmasıyla denge denklemi ;

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta + \rho \omega^2 r^2 = 0 \quad [3.3]$$

haline gelir. Birim kalınlıklı dönen disk için çıkarılan bu denklem, kalınlığı $h(r)$ fonksiyonuyla değişen disk için şu şekilde olur (1):

$$\frac{d}{dr}(hr\sigma_r) - h\sigma_\theta + h\rho\omega^2 r^2 = 0 \quad [3.4]$$

Burada ;

ρ : Disk malzemesinin yoğunluğu, $[kg/m^3]$

ω : Diskin açısal hızı, $[rad/s]$

σ_r : Radyal doğrultudaki normal gerilme, $[N/m^2]$

σ_θ : Çevresel doğrultudaki normal gerilmedir. $[N/m^2]$

3.1.2. Denge denkleminin boyutsuz forma getirilmesi

Farklı malzemelerde ve farklı geometrik özelliklerdeki diskler için daha genel bir çözüm elde etmek ve çözümlerin karşılaştırılmasında kolaylık sağlamak için denklemleri boyutsuz formda yazmak uygun olur.

Eş. 3.4 denklemindeki yarıçap r , kalınlık h , açısal hız ω , gerilme bileşenleri σ_r ve σ_θ aşağıdaki gibi boyutsuzlandırılabilir:

$$\bar{r} = \frac{r}{b}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_0}, \quad \bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0}, \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}, \quad \Omega = b\omega\sqrt{\frac{\rho}{\sigma_0}} \quad [3.5]$$

$\frac{d}{dr} = \frac{d}{d\bar{r}} \frac{d\bar{r}}{dr} = \frac{1}{b} \frac{d}{d\bar{r}}$ ifadesi, Eş.3.5' deki ifadelerle birlikte Eş.3.4' de yerine yazılırsa;

$$\frac{1}{b} \frac{d}{d\bar{r}} (b\bar{r}h_0\bar{h}\sigma_0\bar{\sigma}_r) - h_0\bar{h}\sigma_0\bar{\sigma}_\theta + h_0\bar{h}\rho \frac{\Omega^2}{b^2} \frac{\sigma_0}{\rho} \bar{r}^2 b^2 = 0$$

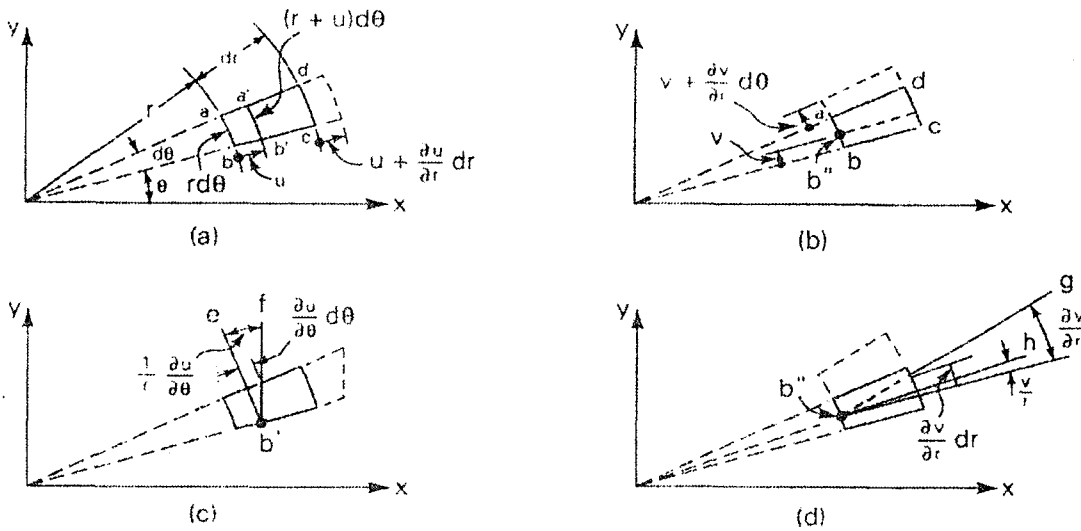
Gerekli sadeleştirmelerden sonra boyutsuz formda hareket denklemi ;

$$\frac{d}{d\bar{r}} (\bar{h}\bar{r}\bar{\sigma}_r) - \bar{h}\bar{\sigma}_\theta + \bar{h}\Omega^2\bar{r}^2 = 0 \quad [3.6]$$

şeklinde olur.

3.2. Elastisite Teorisi

3.2.1. Polar koordinatlarda gerinme - yer değiştirme bağıntıları



Şekil 3.2. Polar koordinatlarda bir elemanın deformasyonu ve yerdeğiştirmesi

Şekil 3.2.' den radyal gerinme bileşeninin

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad [3.7a]$$

olduğu görülmektedir. u yer değiştirmesine bağlı olan çevresel gerinme bileşeni;

$$(\varepsilon_\theta)_u = \frac{(r+u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r} \quad [3.7b]$$

v yer değiştirmesine bağlı olan çevresel gerinme bileşeni;

$$(\varepsilon_\theta)_v = \frac{(\partial v / \partial \theta) / d\theta}{rd\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad [3.7c]$$

Böylece toplam çevresel gerinme;

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad [3.7d]$$

olur.

Şekilden anlaşılacağı üzere u ve v yer değiştirmelerinden dolayı oluşan toplam kayma gerinmesi de,

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \quad [3.7e]$$

şeklinde elde edilir (3).

3.2.2. Disk için gerinme - yer değiştirme bağıntıları ve uygunluk denklemi

Disk simetrisinden dolayı çevresel yönde yer değiştirme olmayacağından $v=0$ ve u 'nun θ 'a göre kısmi türevleri de sıfırdır. Böylece Eş.3.7 ile verilen ifadeler disk için aşağıdaki ifadelere indirgenir.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = 0 \quad [3.8]$$

Eş. 3.7 denklemlerinde, ε_θ ifadesinden $u = r\varepsilon_\theta$ 'nin r 'e göre türevi alınıp ε_r ifadesinde yerine yazıldığında ε_θ ve ε_r arasındaki bağıntı;

$$\frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) - \varepsilon_r = 0 \quad [3.9]$$

olarak bulunur. Bu ifade uygunluk denklemidir (3).

3.2.3. Hooke kanunu

Elastik bölgede geçerli olan gerilme ve gerinme bileşenleri arasındaki lineer ilişki Hooke Kanunu olarak bilinir. Genel Hooke Kanunu şu şekildedir (1):

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \end{aligned} \quad [3.10]$$

Yukarıda geçen G ,kayma elastisite modülü veya rijitlik modülüdür ve aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

3.2.4. Dönen disk için Hooke kanunu

Düzlem gerilme durumu ($\sigma_z = \tau_{zr} = \tau_{z\theta} = 0$), simetri ve polar koordinatlar için Eş.3.9 ile verilen elastik gerinmeler

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) \\ \gamma_{r\theta} &= 0\end{aligned}\tag{3.11}$$

şeklını alır.

3.2.5. Dönen disk için gerilme - yer değıştirme bağıntıları

Dönen disk için elde edilen Eş.3.8 ve Eş.3.11 denklemlerinden σ_r ve σ_θ , yer değıştirme cinsinden şu şekilde elde edilir : Önce radyal ve teğetsel gerinmeler, deplasmanlar cinsinden ifade edilir, daha sonra Eş.3.11 denklemleri kullanılarak σ_r ve σ_θ , deplasmanlar cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r), \\ \varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta)\end{aligned}$$

Bu denklemlerin birlikte çözülmesiyle gerilme – yer değiştirme bağıntıları;

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\nu u(r)}{r} + u'(r) \right], \quad [3.12a]$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\frac{u(r)}{r} + \nu u'(r) \right] \quad [3.12b]$$

şeklinde olur. Burada (') radyal koordinata göre birinci türevi göstermektedir.

3.3. Plastisite Teorisi

Akma sınırının üstünde uygulanan yükler için malzemedeki gerilme ve şekil değiştirmelerin hesaplanmasında elastisite denklemleri artık geçerli değildir. Malzemenin gerilme-şekil değiştirme eğrisinde kalıcı deformasyonların meydana geldiği bölgeye plastik bölge denir.

3.3.1. Akma kriteri ve akma yüzeyi

Malzemede akmanın başlangıç durumunun matematiksel olarak belirlenmesi için çeşitli akma kriterleri kullanılmaktadır. Eğer bir noktadaki gerilme durumu akma kriterini sağlıyorsa bu nokta plastik olarak deforme olur, diğer durumda ise elastik deformasyonlar geçerlidir.

Isıl gerilmelerin olmadığı ve malzemenin homojen olduğu kabulüyle kapalı bir yüzey belirten akma fonksiyonu matematiksel olarak;

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad [3.13]$$

şeklinde yazılabilir (16). Buna göre;

$F(\sigma_{ij}) < 0$ ise elastik deformasyonlar,

3.3.1.2. Maksimum şekil değiştirme teorisi (Saint-Venant Teorisi)

Bu teoriye göre asal şekil değiştirme değeri çekme deneyindeki akma gerinmesine, $\varepsilon_0 = \sigma_0 / E$, ulaştığı anda akma meydana gelmektedir. Buna göre ε_1 maksimum asal gerinme ise akma kriteri;

$$E\varepsilon_1 = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \pm\sigma_0 \quad [3.15]$$

veya iki boyutlu hal için;

$$E\varepsilon_1 = \sigma_1 - \nu\sigma_2 = \pm\sigma_0, \quad |\sigma_1| \geq |\sigma_2| \quad [3.16a]$$

$$E\varepsilon_2 = \sigma_2 - \nu\sigma_1 = \pm\sigma_0, \quad |\sigma_1| \geq |\sigma_2| \quad [3.16b]$$

şeklinde yazılabilir. Bu teori de deneysel sonuçlarla çok fazla uyumluluk göstermez (16).

3.3.1.3. Maksimum kayma gerilmesi teorisi (Tresca Kriteri)

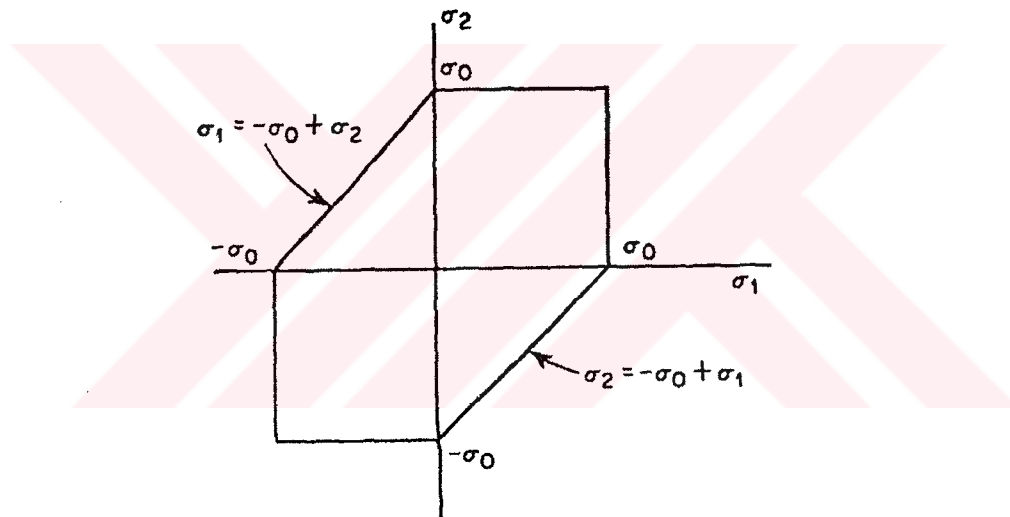
Bu teoriye göre maksimum kayma gerilmesi, çekme deneyi sırasında oluşan maksimum kayma gerilmesine ulaştığı anda malzemede akma başlar. Maksimum kayma gerilmesi en büyük ve en küçük asal gerilmeler arasındaki farkın yarısına eşittir. Buna göre basit çekme deneyi için kayma gerilmesi $\sigma_0 / 2$ olarak bulunur. Genel halde Tresca akma kriteri için,

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm\sigma_0 \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \pm\sigma_0 \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \pm\sigma_0 \end{aligned} \quad [3.17]$$

yazılabilir. İki boyutlu hal için akma kriteri;

$\sigma_1 > 0$ ve $\sigma_2 < 0$	$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_0$	
$\sigma_1 < 0$ ve $\sigma_2 > 0$	$\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_0$	
$\sigma_2 > \sigma_1 > 0$	$\sigma_2 = \sigma_0$	
$\sigma_1 > \sigma_2 > 0$	$\sigma_1 = \sigma_0$	[3.18]
$\sigma_1 < \sigma_2 < 0$	$\sigma_1 = -\sigma_0$	
$\sigma_2 < \sigma_1 < 0$	$\sigma_2 = -\sigma_0$	

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikler $\sigma_1\sigma_2$ düzleminde Şekil 3.4' deki gibi gösterilebilir(16).



Şekil 3.4. Tresca akma kriterinin $\sigma_1\sigma_2$ düzleminde gösterimi

3.3.1.4. Deformasyon enerji teorisi (von Mises akma kriteri)

Bu teoriye göre malzemedeki biçim değiştirme enerjisi, çekme deneyindeki biçim değiştirme enerjisine eşit olduğunda akma başlar. Bu enerji aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$U_d = \frac{1}{2G} J_2 = \frac{3}{4G} \tau_{oct}^2 \quad [3.19]$$

Burada J_2 ikinci deviatorik gerilme değışmezi (second invariant of stress deviator tensor) olup asal gerilmeler cinsinden

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad [3.20]$$

şeklindedir. Basit çekme deneyinde akma noktasında

$$J_2 = \frac{1}{3} \sigma_0^2 \quad [3.21]$$

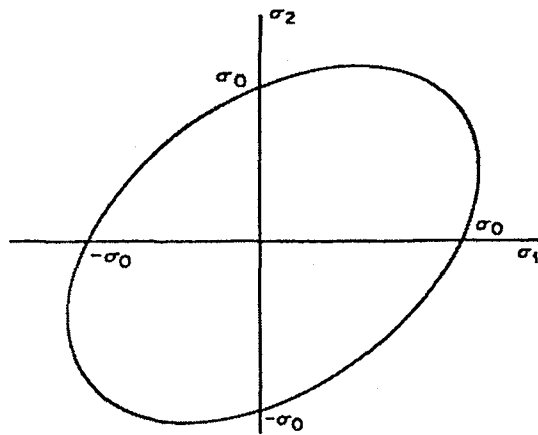
şeklinde yazılırsa akma kriteri;

$$\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \sigma_0^2 \quad [3.22]$$

halini alır. Düzlemsel gerilme durumu için akma kriteri;

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2 \quad [3.23]$$

şeklinde yazılır. Bu denklem bir elips denklemidir ve bu elips von Mises elipsi olarak isimlendirilir (16). (Şekil 3.5.)



Şekil 3.5. von Mises elipsi

Polar koordinatlarda bu denklem;

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2} \quad [3.24]$$

şeklinde yazılabilir. Von Mises akma kriteri deneysel verilere en yakın sonuç veren kriterdir.

3.3.2. Prandtl – Reuss denklemleri

Plastik gerilme ve şekil değiştirmeler arasındaki bağıntılar için ilk yaklaşım 1870 yılında Saint-Venant tarafından asal şekil değiştirme eksenleriyle asal gerilme eksenlerinin çakışması şeklinde önerilmiştir. Toplam şekil değiştirme artışları ve gerilme sapmaları arasındaki ilişkiyi veren üç boyutlu genel denklemler 1871’ de Levy, 1913’ de de von Mises tarafından sunulmuştur. Bu denklemler Levy-Mises denklemleri olarak bilinir. Bu denklemler

$$\frac{d\varepsilon_x}{S_x} = \frac{d\varepsilon_y}{S_y} = \frac{d\varepsilon_z}{S_z} = \frac{d\varepsilon_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{d\varepsilon_{zx}}{\tau_{zx}} = \frac{d\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}} = d\lambda \quad [3.25]$$

veya

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ij} d\lambda \quad [3.26]$$

şeklindedir (16). Burada S_{ij} deviatorik gerilme tansörüdür ve matrisi

$$\underline{\underline{S}} = [S_{ij}] = [\sigma_{ij} - p_{ij}] = [\sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} \quad [3.27]$$

Bu ifade bir başka şekilde

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3} \end{bmatrix}$$

gibi yazılabilir. Bu ifadede $d\lambda$ yükleme boyunca değişebilen negatif olmayan bir sabittir. Bu denklemlerde toplam şekil değiştirme artışları yerine elastik şekil değiştirmeler ihmal edilerek plastik şekil değiştirmeler alınmıştır. Bu nedenle bu denklemler sadece elastik deformasyonun küçük olduğu problemlerde kullanılır. Bu denklemlerin elastik ve plastik bileşenleri birlikte içeren daha genel hali Prandtl ve Reuss tarafından sunulmuştur.(Prandtl-Reuss denklemleri)

$$\frac{d\varepsilon_x^p}{S_x} = \frac{d\varepsilon_y^p}{S_y} = \frac{d\varepsilon_z^p}{S_z} = \frac{d\varepsilon_{xy}^p}{\tau_{xy}} = \frac{d\varepsilon_{yz}^p}{\tau_{yz}} = \frac{d\varepsilon_{zx}^p}{\tau_{zx}} = d\lambda \quad [3.28]$$

veya

$$d\varepsilon_{ij}^p = S_{ij} d\lambda \quad [3.29]$$

Bu denklemler gerilmeler cinsinden

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ d\varepsilon_y^p &= \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_x) \right] \\ d\varepsilon_z^p &= \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right] \\ d\varepsilon_{xy}^p &= d\lambda \tau_{xy} \end{aligned} \quad [3.30]$$

$$d\varepsilon_{yz}^p = d\lambda \tau_{yz}$$

$$d\varepsilon_{zx}^p = d\lambda \tau_{zx}$$

şeklinde yazılabilir(16). Eğer $d\lambda$ elde edilirse istenilen gerilme-şekil değiştirme bağıntıları elde edilmiş olur. $d\lambda$ 'ı hesaplamak için Eş.3.29 denkleminde aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$\begin{aligned} (d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p)^2 + (d\varepsilon_y^p - d\varepsilon_z^p)^2 + (d\varepsilon_z^p - d\varepsilon_x^p)^2 + 6(d\varepsilon_{xy}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{yz}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{zx}^p)^2 \\ = (d\lambda)^2 [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2] \end{aligned} \quad [3.31]$$

Köşeli parantez içindeki ifade oktahedral kayma gerilmesi ifadesine, eşitliğin sol tarafı ise oktahedral plastik kayma şekil değiştirme ifadesine benzemektedir.

$$(d\gamma_0^p)^2 \equiv \frac{1}{9} \left[(d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p)^2 + (d\varepsilon_y^p - d\varepsilon_z^p)^2 + (d\varepsilon_z^p - d\varepsilon_x^p)^2 + 6(d\varepsilon_{xy}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{yz}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{zx}^p)^2 \right] \quad [3.32]$$

Böylece $d\lambda$ sabiti

$$\begin{aligned} d\lambda &= \frac{d\gamma_0^2}{\tau_{oct}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{d\gamma_0^2}{\sqrt{J_2}} \end{aligned} \quad [3.33]$$

şeklinde yazılır. Burada efektif gerilme ve efektif plastik şekil değiştirme artışı tanımlamalarını yapmak uygun olur (16):

$$\begin{aligned}
\sigma_e &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{1/2} \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} \\
&= \sqrt{3J_2}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

ve

$$\begin{aligned}
d\varepsilon_p &\equiv \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p)^2 + (d\varepsilon_y^p - d\varepsilon_z^p)^2 + (d\varepsilon_z^p - d\varepsilon_x^p)^2 \right. \\
&\quad \left. + 6(d\varepsilon_{xy}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{yz}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{zx}^p)^2 \right]^{1/2} \\
&= \sqrt{2} d\gamma_0^p
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Bu tanımlarla;

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_p}{\sigma_e} \tag{3.36}$$

olarak bulunur.

Böylece gerilme-gerinme bağıntıları aşağıdaki gibi olur (16):

$$\begin{aligned}
d\varepsilon_x^p &= \frac{d\varepsilon_p}{\sigma_e} \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right] \\
d\varepsilon_y^p &= \frac{d\varepsilon_p}{\sigma_e} \left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \right] \\
d\varepsilon_z^p &= \frac{d\varepsilon_p}{\sigma_e} \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right] \\
d\varepsilon_{xy}^p &= \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_p}{\sigma_e} \tau_{xy}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$d\varepsilon_{yz}^p = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_p}{\sigma_e} \tau_{yz}$$

$$d\varepsilon_{zx}^p = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_p}{\sigma_e} \tau_{zx}$$

veya

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_p}{\sigma_e} S_{ij} \quad [3.38]$$

Bu denklemler von Mises akma kriteri için akma kuralı' dır. Bundan sonra, σ_y ile plastik şekil değiştirme artışı $d\varepsilon_p$ arasında bir ilişkiye ihtiyaç vardır.

3.3.3. İzotropik pekleşme

Plastik akış sırasında malzemedeki pekleşme miktarının belirlenmesi için iki yaklaşım vardır. Birinci yaklaşım, sertleşme miktarı yalnızca plastik işe bağlıdır, buna plastik işin eşitliği (*equivalence of plastic work*) denir. Yani akmanın ilerlemesine karşı gösterilen direnç yalnızca malzemede yapılan plastik işe bağlıdır. Bu işin değeri akma kriteri ile ölçülür.

$$F(\sigma_{ij}) = K \quad [3.39]$$

Burada K , bu yaklaşıma göre birim hacim başına yapılan plastik işin bir fonksiyonudur:

$$F(\sigma_{ij}) = f(W^p) \quad [3.40]$$

Bu ifadede;

$$W^p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad [3.41]$$

olarak tanımlanır (16).

Eğer eşdeğer gerilme σ_e , akma fonksiyonu olarak alınırsa;

$$\sigma_e = f(W^p) \quad [3.42]$$

akma fonksiyonu ve plastik iş arasındaki ilişki deneysel olarak bulunabilir ve daha sonra Eş.3.38' den plastik şekil değiştirme bileşenleri hesaplanabilir.

İkinci yaklaşımda, eşdeğer plastik şekil değiştirme, pekleşmenin bir ölçüsü olarak alınır.

$$\varepsilon_p = \int d\varepsilon_p \quad [3.43]$$

Akma fonksiyonu eşdeğer plastik şekil değiştirmenin bir fonksiyonu olarak kabul edilir (16):

$$F(\sigma_{ij}) = H(\varepsilon_p) \quad [3.44]$$

Yukarıda olduğu gibi eşdeğer gerilme σ_e , akma fonksiyonu olarak alınırsa;

$$\sigma_e = H(\varepsilon_p) \quad [3.45]$$

İzotropik sertleşme kabulüyle von Mises akma kriteri için iki yaklaşım birbirinin aynıdır.

$$W^p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \int \sigma_e d\varepsilon_p \quad [3.46]$$

olduğundan Eş.3.42 ifadesini

$$\sigma_e = f\left(\int \sigma_e d\varepsilon_p\right) = H(\varepsilon_p) \quad [3.47]$$

şeklinde yazabiliriz.

Plastik bölgede gerçek malzeme davranışı çok karmaşıktır. Bu karmaşık davranışı basitleştirmek için bazı yaklaşımlar kullanılır: lineer gerinme pekleşmesi, mükemmel plastik malzeme vb...Plastik bölgede gerilme ve gerinme arasındaki ilişkiyi karakterize eden deneysel sonuçlara dayalı bazı eşitlikler literatürde yer almaktadır (17):

$$\sigma = \sigma_y + H\varepsilon^n \quad (\text{Ludwick 1909}) \quad [3.48]$$

$$\sigma = H\varepsilon^n \quad (\text{Holloman 1944}) \quad [3.49]$$

$$\sigma = \sigma_y + (\sigma_s - \sigma_y)\{1 - \exp(-n\varepsilon)\} \quad (\text{Voce 1948}) \quad [3.50]$$

$$\sigma = H(\varepsilon_s + \varepsilon)^n \quad (\text{Swift 1947}) \quad [3.51]$$

$$\sigma = \sigma_y \tanh\left(\frac{E\varepsilon}{\sigma_y}\right) \quad (\text{Prager 1938}) \quad [3.52]$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + H\left(\frac{\sigma}{E}\right)^n \quad (\text{Ramberg and Osgood 1943}) \quad [3.53]$$

Bu çalışmada, lineer olmayan pekleşme davranışı yukarıda Eş.3.51 ile verilen Swift sertleşme kuralının boyutsuz bir formu olan;

$$\bar{\sigma}_y = (1 + H\bar{\varepsilon}_p)^{1/m} \quad [3.54]$$

ifadesiyle karakterize edilmiştir (14).

Burada; $H = \eta \sigma_0 / E$ olup normalize edilmiş sertleşme parametresi, $\bar{\epsilon}_p$ boyutsuz efektif gerinme, m ise malzemeye bağlı ve lineer olmayan pekleşme davranışını belirleyen sabittir. $m = 1,0$ alındığında lineer sertleşme davranışı karakterize edilmiş olur.

3.3.4. Artık gerilmeler

Disk in plastik deformasyonlara uğramasına neden olacak kadar büyük bir hızdan sonra durması sonucu diske etkiyen atalet kuvvetleri ortadan kalkar. Bunun sonucunda disk içinde oluşan tüm gerilmeler ortadan kalkmaz. Disk içinde yükün kalkmasından sonra disk içinde mevcut kalan gerilmeler artık (kalıntı) gerilme olarak adlandırılır. Artık gerilmeler, belli bir yük altında meydana gelen gerilme bileşenlerinden elastik gerilme bileşenlerinin çıkarılmasıyla hesaplanır.

4. ELASTİK ÇÖZÜM VE SONUÇLAR

Bu bölümde, içi dolu ve içi boş diskler için farklı sınır şartlarında plastik deformasyonların başladığı limit açısal hız ve farklı n , k geometrik parametrelerinin diskteki gerilme dağılımına ve plastik deformasyonun başlama durumuna etkileri incelenecektir.

Eş.3.12 denklemleriyle elde edilen gerilme – yer değiştirme bağıntıları ile, Eş.2.1 denklemleriyle verilen disk kalınlık fonksiyonu, Eş.3.4 ile verilen denge denkleminde yerlerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında ;

$$r^2 \left[1 - n \left(\frac{r}{b} \right)^k \right] \frac{d^2 u}{dr^2} + r \left[1 - (1+k)n \left(\frac{r}{b} \right)^k \right] \frac{du}{dr} - \left[1 - n(1-k\nu) \left(\frac{r}{b} \right)^k \right] u = - \frac{\left[1 - n \left(\frac{r}{b} \right)^k \right] (1-\nu^2)}{E} \rho \omega^2 r^3 \quad [4.1]$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem hipergeometrik diferansiyel denklem türündedir.

Bu denklemin genel çözümü,

$$u(r) = C_1 P(r) + C_2 Q(r) + R(r) \quad [4.2]$$

şeklinde. $R(r)$ diferansiyel denklemin özel çözümü, geri kalan ifade ise homojen çözümdür.

Denklemin homojen çözümü için $z = n \left(\frac{r}{b} \right)^k$ ve $u(r) = r y(z)$ transformasyonu

yapıldığında gerekli sadeleştirmeler sonucunda,

$$z(1-z) \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{(2+k-2(1+k)z)}{k} \frac{dy}{dz} + \frac{\nu-1}{k} y = 0 \quad [4.3]$$

denklemini elde edilir. Bu denklem özel bir diferansiyel denklem türü olan "Hipergeometrik Diferansiyel Denklem" türünün genel formudur ve çözümü,

$$y(z) = C_1 F(\alpha, \beta, \gamma, z) + C_2 z^{-2/k} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) \quad [4.4]$$

şeklindedir (15). Burada C_i keyfi bir integrasyon sabiti ve $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ hipergeometrik fonksiyondur. Bu fonksiyonun açılımı:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma!} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)3!} z^3 + \dots$$

ve türevi;

$$\frac{d}{dx} F[\alpha, \beta, \gamma, z(x)] = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{dz}{dx} F[\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z(x)]$$

şeklindedir (15).

Burada;

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} + \frac{1}{k} - \frac{\sqrt{k^2 + 4(1-k\nu)}}{2k}, \\ \beta &= \frac{1}{2} + \frac{1}{k} + \frac{\sqrt{k^2 + 4(1-k\nu)}}{2k}, \\ \gamma &= 1 + \frac{2}{k}, \text{ dir.} \end{aligned} \quad [4.5]$$

Eş.4.1'deki diferansiyel denklemin genel çözümü, Eş.4.4 ile verilen $y(z)$ ifadesi $u(r) = r y(z)$ 'de yerine yazıldığında, özel çözüm R ile birlikte,

$$u(r) = C_1 r F\left[\alpha, \beta, \gamma, n\left(\frac{r}{b}\right)^k\right] + \frac{C_2}{r} F\left[\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, n\left(\frac{r}{b}\right)^k\right] + R(r) \quad [4.6]$$

şeklinde elde edilir.

Böylece Eş.4.2 denklemiyle verilen genel çözüm ifadesindeki, homojen çözümü oluşturan $P(r)$ ve $Q(r)$ aşağıdaki gibi elde edilmiş olur:

$$P(r) = r F\left[\alpha, \beta, \gamma, n\left(\frac{r}{b}\right)^k\right] \quad [4.7]$$

$$Q(r) = \frac{1}{r} F\left[\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, n\left(\frac{r}{b}\right)^k\right]$$

Eş.4.2 denklemindeki özel çözüm $R(r)$ ifadesi ise parametrelerin değişimi yoluyla aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$R(r) = P(r)U_1(r) + Q(r)U_2(r) \quad [4.8]$$

Bu ifadeye;

$$U_1(r) = - \int_a^r \frac{Q(\xi)f(\xi)}{W(\xi)} d\xi \quad \text{ve} \quad U_2(r) = \int_a^r \frac{P(\xi)f(\xi)}{W(\xi)} d\xi, \quad [4.9]$$

$$f(r) = - \frac{1 - \nu^2}{E} \rho \omega^2 r \quad [4.10]$$

Eş.4.9 denklemlerinde geçen a elastik bölgenin başlangıç koordinatı, $W(r)$ Wronskian 'dır ve

$$W(r) = P \frac{dQ}{dr} - Q \frac{dP}{dr} \quad [4.11]$$

şeklindedir.

Eş.4.2 ile verilen $u(r) = C_1 P(r) + C_2 Q(r) + R(r)$ denklemi Eş.3.12 ile verilen gerilme denklemlerinde yerine yazıldığında radyal ve teğetsel gerilme bileşenleri;

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[C_1 \left(\frac{\nu P}{r} + \frac{dP}{dr} \right) + C_2 \left(\frac{\nu Q}{r} + \frac{dQ}{dr} \right) + \frac{\nu R}{r} + \frac{dR}{dr} \right] \quad [4.12]$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[C_1 \left(\frac{P}{r} + \nu \frac{dP}{dr} \right) + C_2 \left(\frac{Q}{r} + \nu \frac{dQ}{dr} \right) + \frac{R}{r} + \nu \frac{dR}{dr} \right] \quad [4.13]$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki denklemlerde geçen $dR(r)/dr$ ifadesinin değeri ise aşağıdaki yaklaşımla bulunabilir:

Önce Eş.4.8 denkleminde $R(r)$ 'nin r 'ye göre türevi alınır.

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dU_1}{dr} P + \frac{dP}{dr} U_1 + \frac{dU_2}{dr} Q + \frac{dQ}{dr} U_2$$

Daha sonra $U_1(r)$ ve $U_2(r)$ 'nin Eş.4.9' da verilen değerleri yerine yazılırsa;

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dP}{dr} U_1 + \frac{dQ}{dr} U_2 \quad [4.14]$$

elde edilir.

Eş.4.12 ve Eş.4.13 ile verilen iki denklem, içi dolu ve içi boş disklerin farklı sınır şartlarındaki elastik çözümleri için geçerlidir. Bu sınır şartlarına bağlı olarak C_1 ve C_2 sabitleri ve dolayısıyla da elastik çözüm elde edilmiş olur.

4.1. İçi Dolu Disk

Pratikde içi dolu disklerin fazla bir uygulaması olmamasına rağmen diğer sınır şartlarındaki disklerin teorisini geliştirmek açısından içi dolu disklerin elastik-plastik çözümleri önemlidir.

İçi dolu disk için sınır şartları ;

- Diskin simetri ekseninde ($r = 0$) deplasmanın sonlu olması,
- Diskin serbest ucunda ($r = b$) radyal doğrultudaki gerilme bileşeninin sıfır olması ($\sigma_r(b) = 0$).

şeklinde yazılabilir.

Bu sınır şartlarından ilkinden $C_2 = 0$ olarak bulunur. İkinci sınır şartından ise;

$$C_1 = -\frac{\nu R(b) + bR'(b)}{\nu P(b) + bP'(b)} \quad [4.15]$$

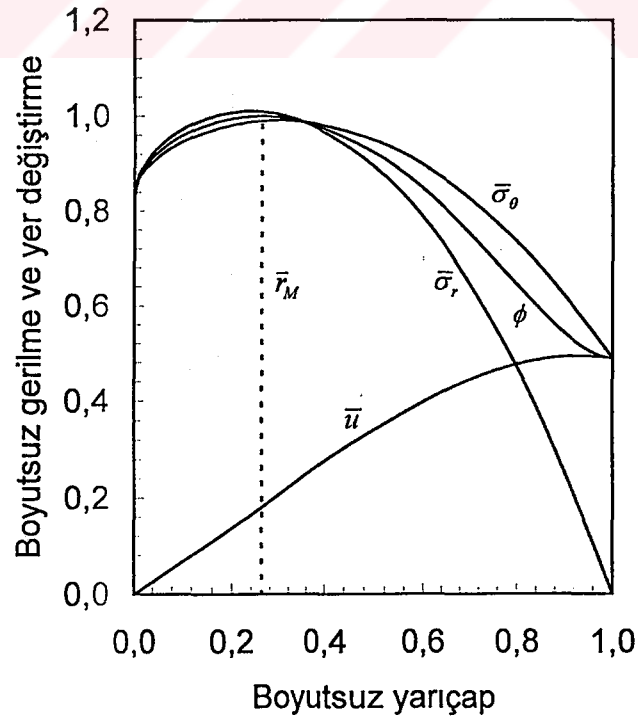
elde edilir.

Simetri ekseninde $r = 0$ için radyal ve teğetsel doğrultudaki gerilme bileşenleri elde edilirse bu ekseninde iki gerilme bileşeninin birbirine eşit olduğu görülür.

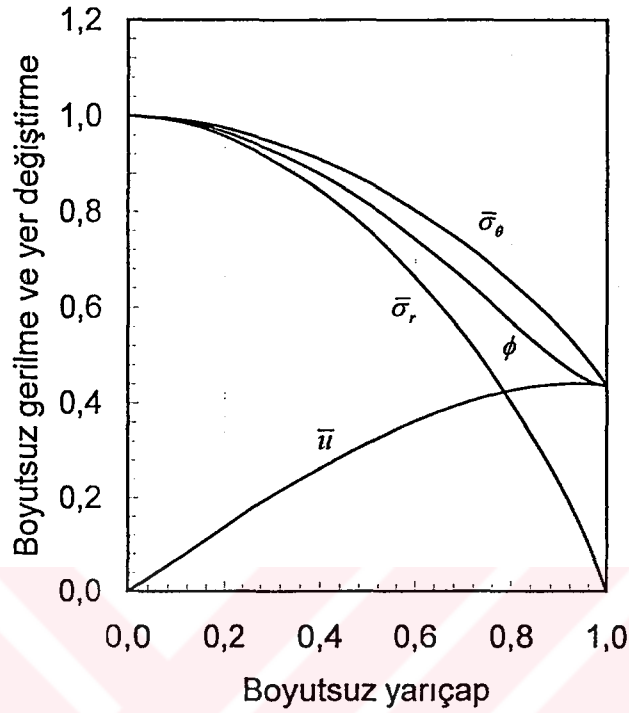
$$\sigma_r(0) = \sigma_\theta(0) = \frac{E}{(1-\nu)} C_1 \quad [4.16]$$

Bu denklemlerle birlikte içi dolu disk için elastik çözüm tamamlanmış olur. Yani değişik n ve k parametrelerine sahip disklerin gerilme ve yer değiştirme dağılımları ile birlikte hangi açısal hızlarda diskin neresinde plastik deformasyonların başladığı elde edilir.

$\nu = 0,3$ alınarak Şekil 2.1(a) ve Şekil 2.1(b)' deki diskler için plastik deformasyonların başladığı kritik açısal hızlarda gerilme ve yer değiştirme dağılımları Şekil 4.1' de verilmiştir. Şekilde ϕ , von Mises akma kriterindeki boyutsuz $(\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2)^{1/2} / \sigma_0$ değerleridir. Bu değer boyutsuz formda 1'den büyük olduğu değerler plastik deformasyonları ifade ettiğinden $\bar{\sigma}_y$ akma gerilmesi olarak isimlendirilebilir.



(a)

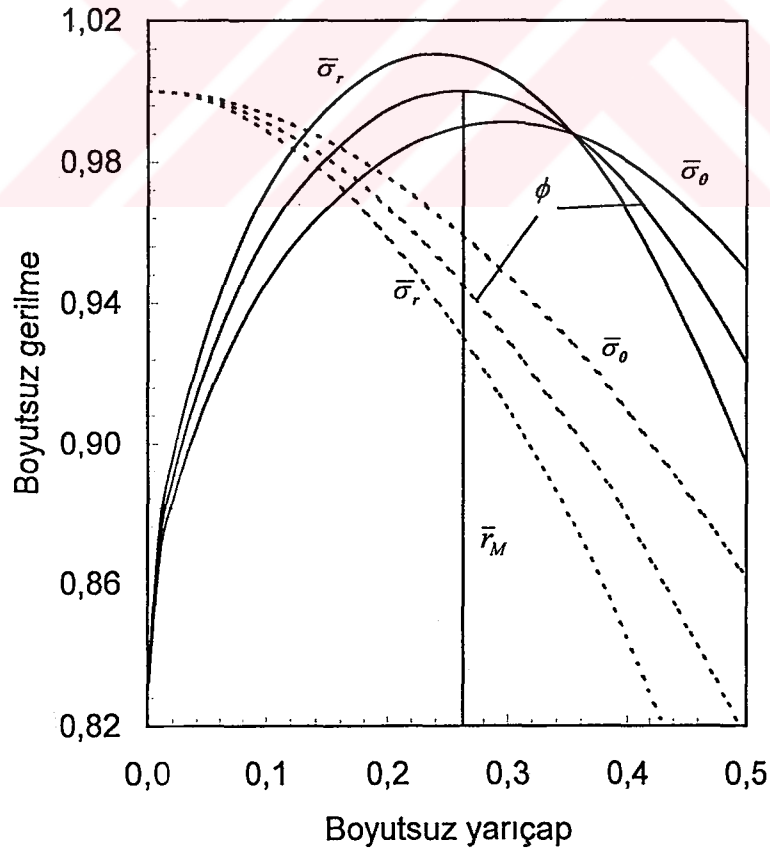


(b)

Şekil 4.1. Kritik hızlardaki gerilme ve yer değiştirmeler: (a) $n = 0,6, k = 0,45$; (b) $n = 0,6, k = 2,4$

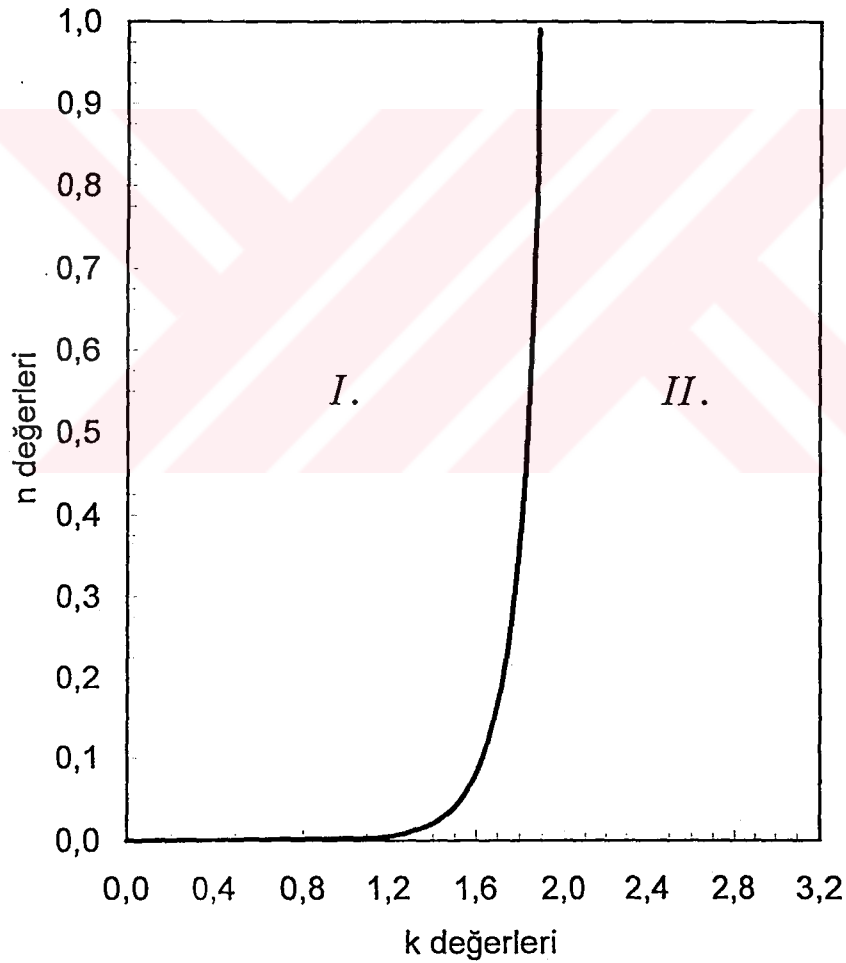
Şekil 4.1(a)'daki diskin kritik açısal hızı $\Omega = 1,8040$ ve integral sabiti $C_1 = 1,1897 \times 10^{-3}$ olarak hesaplanır. Şekilden de görüldüğü gibi bu hızda, boyutsuz ϕ' nin 1'e eşit olduğu $\bar{r}_M = 0,2626$ koordinatında diskde plastik deformasyon başlamaktadır. Bu değerler Tresca akma kriteri esas alınarak hesaplandığında kritik hız $\Omega = 1,7946$ ve $\bar{r}_M = 0,2424$ olarak bulunur. Şekil 4.1(b)'deki disk için ise limit açısal hız $\Omega = 1,7760$ ve integral sabiti $C_1 = 1,435 \times 10^{-3}$ olarak hesaplanır. Şekilden de görüldüğü gibi bu diskde plastik deformasyon simetri ekseninde başlamaktadır. Bu disk için Tresca kriteri uygulandığında ise kritik açısal hız değeri, maksimum gerilme değerleri simetri ekseninde ve birbirine eşit olduklarından von-Mises ile hesaplanan değerle aynıdır. Görüldüğü gibi bazı n ve k değerindeki disklerde $\bar{\sigma}_r$ değeri

disk içinde, her yarıçapta $\bar{\sigma}_\theta$ değerinin altında kalmaktadır ve bazı n ve k değerindeki disklerde ise simetri eksenine yakın tarafta $\bar{\sigma}_\theta$ değerinin üstüne çıkmaktadır ve bu şekilde gerilme dağılımı gösteren disklerde Tresca ve von-Mises kriterleri birbirinden farklı sonuçlar vermektedir. Bu disklerde Tresca kriterine göre disk daha düşük hızlarda ve daha iç bölgede plastik deformasyona başlamaktadır. Şekil 4.2' de elastik limit hızlarda iç kısımdaki iki farklı gerilme dağılımı birlikte verilmiştir. İki farklı şekilde gerilme dağılımına neden olan n ve k değerleri Şekil 4.3' de verilmiştir. Şekilde çizilen eğri üzerindeki ve eğrinin sağ tarafında kalan II. bölgede bulunan n ve k değerine sahip diskler Şekil 4.1(b)' deki gibi, solunda kalan I. bölgede bulunan n ve k değerine sahip diskler de Şekil 4.1(a)' daki gibi bir gerilme davranışı gösterirler. I. bölgede $r=0'$ da $d\sigma_r/dr > 0'$ dir ve $d\sigma_r/dr = 0$ olduğu yarıçap, plastik deformasyonun başladığı yarıçaptır.

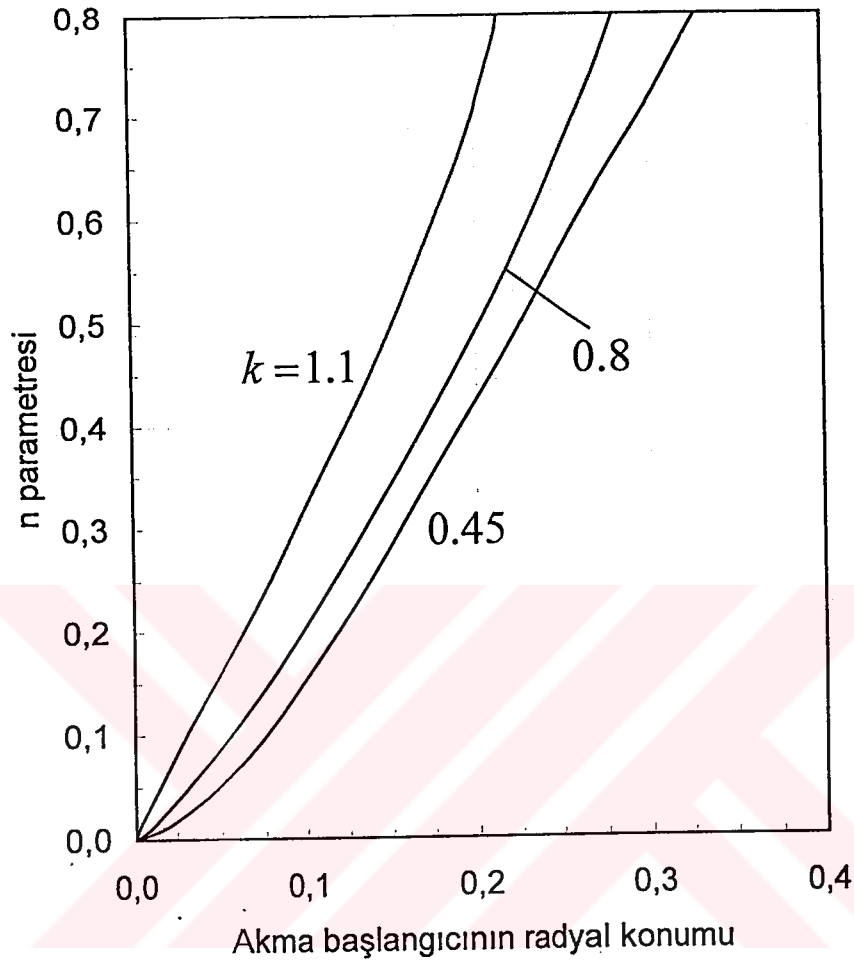


Şekil 4.2. Simetri eksenini civarında elastik limit hızlarda iki farklı gerilme dağılımı

Şekil 4.4' de bu bölgede bulunan diskler için k ve n ile r_M' nin değişimi verilmiştir. Görüldüğü gibi aynı n değerinde k arttıkça plastik deformasyon simetri eksenine daha yakın konumlarda ve aynı k değerleri için ise n arttıkça yani diskin ucu inceldikçe plastik deformasyon merkezden daha uzak radyal konumlarda başlamaktadır. II. bölgede $d\sigma_r/dr < 0$ ve eğri üzerinde kalan n ve k değerine sahip disklerde ise $r=0'$ da $d\sigma_r/dr=0'$ dır ve akma bu konumda başlamaktadır.



Şekil 4.3. $r=0'$ da $d\sigma_r/dr=0'$ ı sağlayan n ve k değerleri (II. Bölge)
ve $r=0'$ da $d\sigma_r/dr>0$ 'ı sağlayan n ve k değerleri (I. Bölge)



Şekil 4.4. I. Bölgedeki diskler için n ve k' nin r_M' ye etkisi

4.2. İçi Boş Disk

Ortasında a yarıçaplı bir delik bulunan diskler için çeşitli sınır şartları geçerli olabilir. Bu sınır şartları aşağıda üç başlık halinde incelenmiştir.

4.2.1. Uçları serbest disk

Bu disk için geçerli olan sınır şartları;

- Diskin iç çapında ($r=a$), radyal gerilme bileşeni sıfırdır. Yani $\sigma_r(a)=0$

- Diskin ucunda ($r=b$), radyal gerilme bileşeni sıfırdır. Yani $\sigma_r(b)=0$

şeklindedir.

Bu sınır şartlarının Eş.4.12 ile verilen radyal gerilme bileşeni ifadesinde yerine yazılmasıyla integrasyon sabitleri;

$$C_1 = \frac{[\nu Q(a) + aQ'(a)][\nu R(b) + bR'(b)]}{T + L}$$

$$C_2 = -\frac{[\nu P(a) + aP'(a)][\nu R(b) + bR'(b)]}{T + L}$$
[4.18]

şeklinde elde edilir, burada;

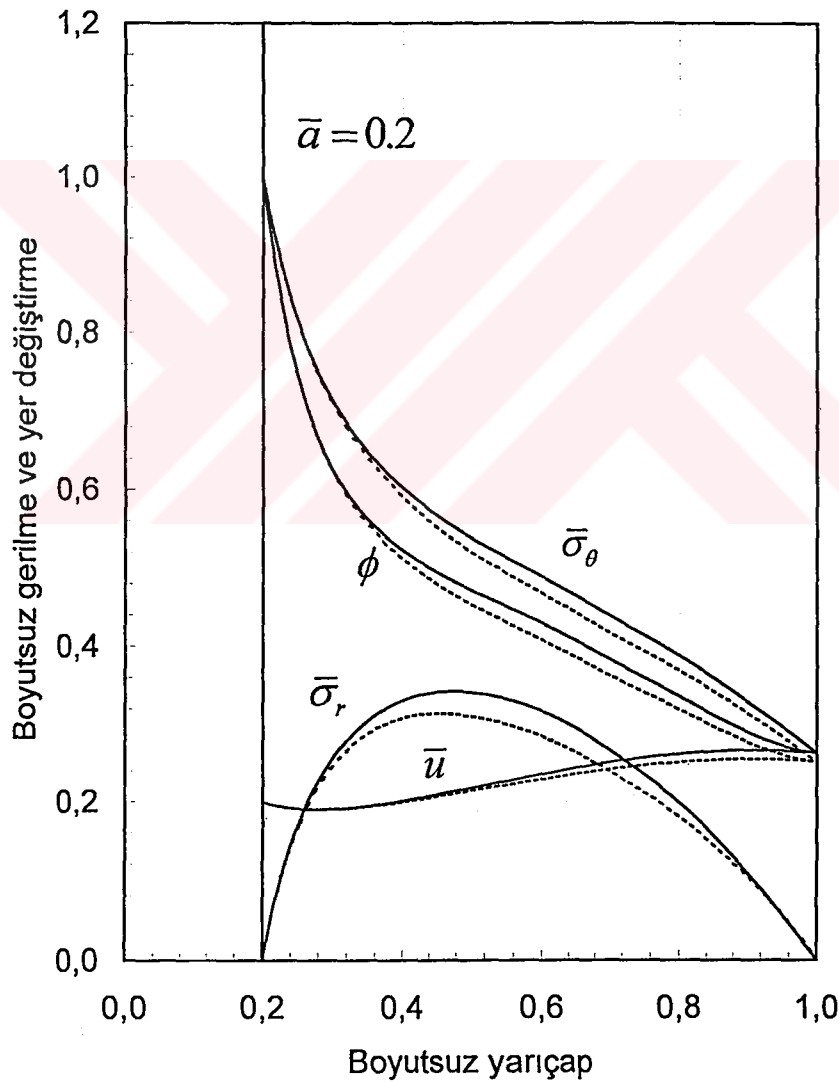
$$T = -\nu P(b)[\nu Q(a) + aQ'(a)] + bQ'(b)[\nu P(a) + aP'(a)]$$

$$L = \nu Q(b)[\nu P(a) + aP'(a)] - bP'(b)[\nu Q(a) + aQ'(a)]$$
[4.19]

şeklinde tanımlanmıştır.

Integral sabitlerinin bulunmasından sonra $\nu=0,3$ ve iç yarıçap boyutsuz formda $\bar{a}=a/b=0,2$ alınarak daha önce ele alınan n ve k değerlerindeki disklerin bu sınır şartlarında elastik limit açısal hızlarda gerilme ve yer değiştirme davranışları Şekil 4.5' de verilmiştir. Şekil 4.5' de gerilme ve yer değiştirme dağılımı düz çizgiyle verilen disk n ve k değerleri ($n=0,6, k=0,45$), içi dolu diskler için çizilen Şekil 4.3' de I. bölgeye, kesikli çizgiyle gerilme ve yer değiştirme dağılımı verilen disk ($n=0,6, k=2,4$) ise II. bölgeye düşmektedir. Görüldüğü gibi iki disk için de gerilme dağılımları birbirine çok benzemektedir ve her ikisi için de en büyük gerilme değerleri

$r=a'$ da meydana gelmektedir. Buradan herhangi n ve k değerine sahip tüm uçları serbest disklerin içi dolu disklerin aksine, benzer gerilme dağılımı gösterdiği ve plastik deformasyonun her geometride $r=a'$ da başlayacağı sonucuna varırız. Burada $n=0,6$ ve $k=0,45$ değerlerine sahip disk için limit açısal hız $\Omega=1,2073$, integral sabitleri $C_1=5,1977\times 10^{-4}$ ve $C_2=4,8541\times 10^{-5}$, $n=0,6$ ve $k=2,4$ değerlerindeki disk için ise limit açısal hız $\Omega=1,2284$, integral sabitleri $C_1=7,4685\times 10^{-4}$ ve $C_2=5,3192\times 10^{-5}$ olarak hesaplanmıştır.



Şekil 4.5. Uçları serbest disk için elastik limit açısal hızlarda gerilme ve yerdeğiştirme dağılımları

4.2.2. Rijid şafta sabitlenmiş disk

Ortasından rijid bir şafta sabitlenmiş bir disk düşünüldüğünde diskin iç çapında, bağlı olduğu şaftın rijid olması kabulünden dolayı yer değiştirme sıfırdır. Böylece sınır şartları;

- Diskin iç çapında ($r = a$) yerdeğiştirme sıfırdır yani $u(a) = 0$,
- Diskin serbest ucunda ($r = b$), radyal gerilme bileşeni sıfırdır yani $\sigma_r(b) = 0$

şeklinde yazılır.

Bu sınır şartlarının Eş.4.12 ile verilen radyal gerilme ve Eş.4.2 ile verilen yer değiştirme ifadelerinde yerleştirilmesi ile integral sabitleri

$$C_1 = -Q(a)K, \quad C_2 = P(a)K \quad [4.20]$$

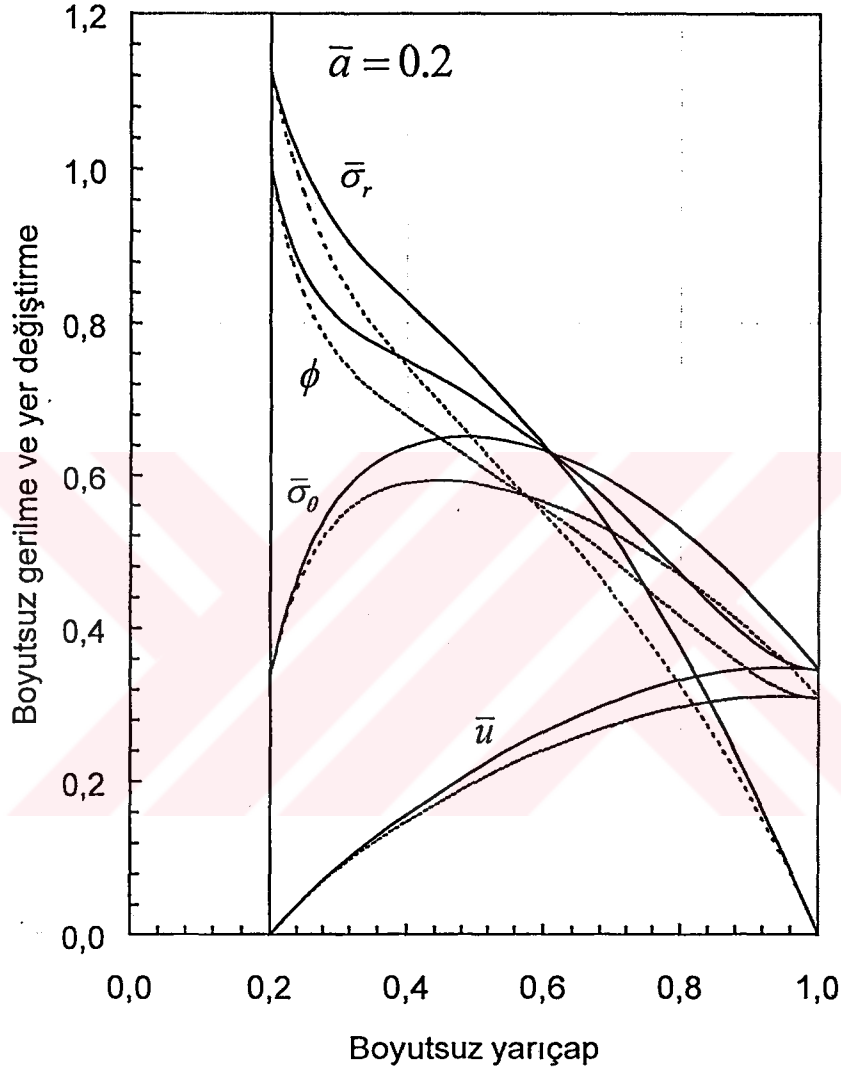
olarak belirlenir ki burada;

$$K = \frac{\nu R(b) + bR'(b)}{Q(a)[\nu P(b) + bP'(b)] - P(a)[\nu Q(b) + bQ'(b)]} \quad [4.21]$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Integral sabitlerinin elde edilmesinden sonra $\nu = 0,3$ ve iç yarıçap boyutsuz formda $\bar{a} = 0,2$ alınarak daha önce ele alınan n ve k değerlerindeki diskler için elde edilen gerilme ve yer değiştirme davranışları Şekil 4.6' da verilmiştir. Bu sınır şartındaki disklerde genel gerilme davranışının şekilden de görüldüğü üzere diskin iç kısmındaki bölgede radyal gerilme bileşeni teğetsel gerilme bileşeninden büyük, diğer kısmında ise teğetsel gerilme bileşenin

daha büyük olduğu görülmektedir. Disk içinde en büyük gerilme $r = a'$ da meydana geldiğinden plastik deformasyon bu konumda başlar.



Şekil 4.6. İç kısmından sabitlenmiş disk için elastik limit açısal hızlardaki gerilme ve yer değiştirme dağılımları

Burada düz çizgi ile gerilme ve yer değiştirme dağılımı verilen disk ($n = 0,6$, $k = 0,45$) için limit açısal hız $\Omega = 1,5902$, integral sabitleri $C_1 = 8,7574 \times 10^{-4}$ ve $C_2 = -3,5627 \times 10^{-5}$, kesikli çizgi ile gerilme ve yer değiştirme dağılımı verilen disk ($n = 0,6$, $k = 2,4$) için ise limit açısal hız $\Omega = 1,5760$, integral sabitleri $C_1 = 1,0132 \times 10^{-3}$ ve $C_2 = -4,1603 \times 10^{-5}$ olarak hesaplanmıştır.

4.2.3. Sabit iç basınca maruz disk

İç yüzeyinde sabit bir p basıncına maruz bırakılan disk için sınır koşulları şu şekilde yazılabilir:

- Diskin iç çapında $\sigma_r(a) = -p$
- Diskin serbest ucunda ($r = b$), radyal gerilme bileşeni sıfırdır, yani $\sigma_r(b) = 0$

Bu sınır şartlarından integral sabitleri:

$$C_1 = \left\{ a \left(b \left[EQ'(a)R'(b) - p(1-\nu^2)Q'(b) \right] + \nu \left[EQ'(a)R(b) - p(1-\nu^2)Q(b) \right] \right) + EQ(a) \left[\nu^2 R(b) + b\nu R'(b) \right] \right\} / M \quad [4.22]$$

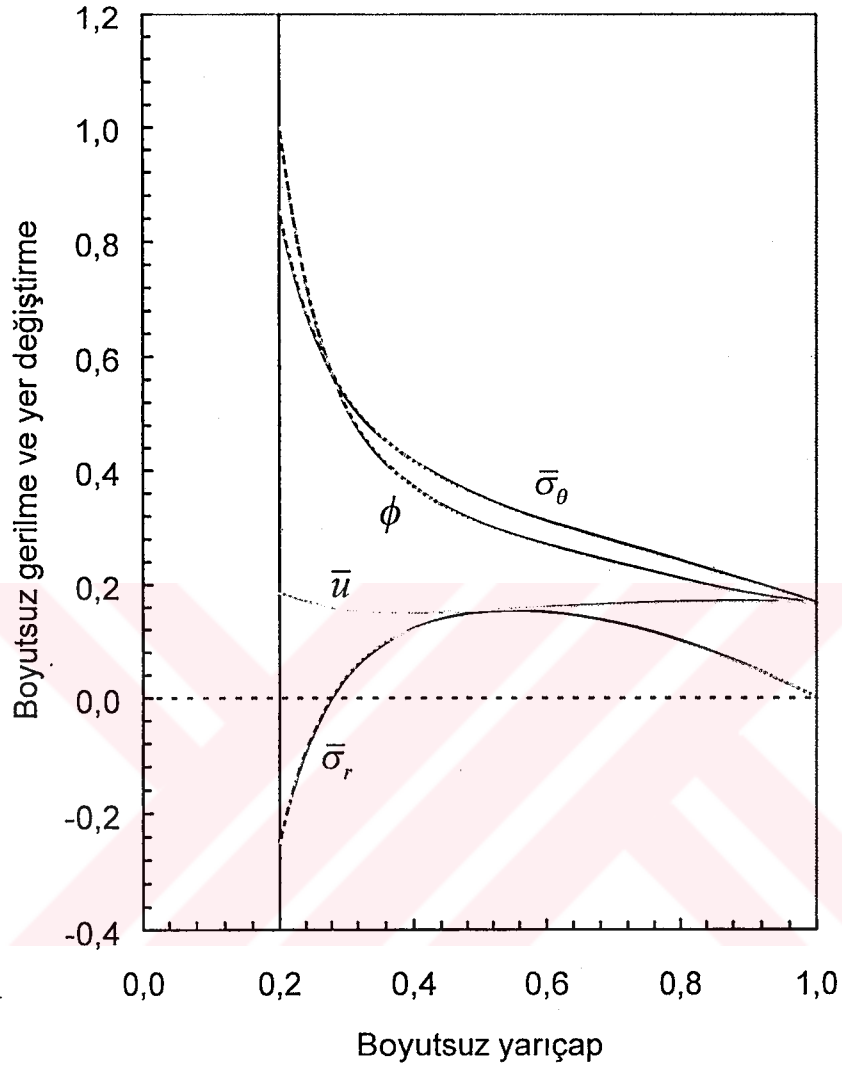
$$C_2 = \left\{ -a \left(b \left[EP'(a)R'(b) - p(1-\nu^2)P'(b) \right] + \nu \left[EP'(a)R(b) - p(1-\nu^2)P(b) \right] \right) + EP(a) \left[\nu^2 R(b) + b\nu R'(b) \right] \right\} / M \quad [4.23]$$

olarak belirlenir, burada

$$M = E \left\{ bQ'(b) \left[aP'(a) + \nu P(a) \right] - aQ'(a) \left[bP'(b) + \nu P(b) \right] - \nu \left(Q(a) \left[bP'(b) + \nu P(b) \right] - Q(b) \left[aP'(a) + \nu P(a) \right] \right) \right\} \quad [4.24]$$

olarak tanımlanmıştır.

Şekil 4.7' de daha önceki n ve k değerlerindeki diskler için $\nu = 0,3$, iç yarıçap boyutsuz formda $\bar{a} = 0,2$ ve iç basınç boyutsuz olarak $\bar{p} = 0,25$ alınarak elde edilen gerilme ve yer değiştirme davranışları verilmiştir. Bu sınır şartındaki disklerde de akma gerilmesinin en büyük değeri $r = a'$ da meydana geldiğinden plastik deformasyon bu konumda başlar.



Şekil 4.7. Sabit iç basınca maruz disk için elastik limit açısal hızlardaki gerilme ve yer değiştirme dağılımları

Düz çizgi ile gerilme ve yer değiştirme dağılımı verilen disk ($n = 0,6$, $k = 0,45$) için limit açısal hız $\Omega = 0,8878$, integral sabitleri $C_1 = 2,8614 \times 10^{-4}$ ve $C_2 = 5,2747 \times 10^{-5}$, kesikli çizgi ile gerilme ve yer değiştirme dağılımı verilen disk ($n = 0,6$, $k = 2,4$) için ise limit açısal hız $\Omega = 0,9197$, integral sabitleri $C_1 = 4,6548 \times 10^{-3}$ ve $C_2 = 5,8370 \times 10^{-5}$ olarak hesaplanmıştır.

4.3. Elastik Parametrik Analiz

Bu bölümde disk geometrisini belirleyen n , k değerlerinin ve içi boş diskler için iç yarıçapın, akmanın başladığı limit açısal hızla ve gerilme dağılımına etkileri elde edilmiştir.

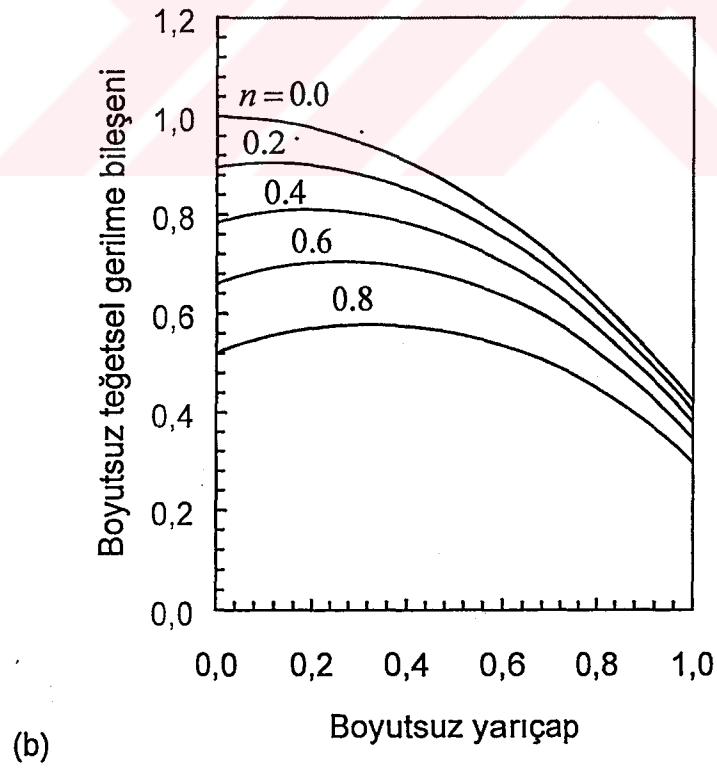
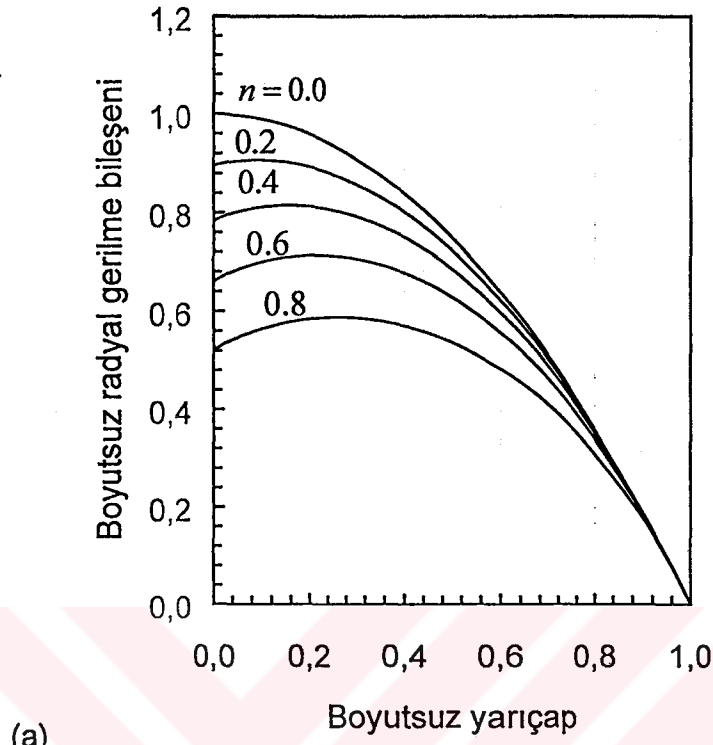
Disk ucunun kalınlığını belirleyen değişik n değerleri için disklerde radyal ve teğetsel gerilme dağılımları elde edildiğinde aynı açısal hızda en büyük gerilme değerlerinin küçük n değerine sahip disklerde meydana geldiğini görürüz.

Bu amaçla $n = 0,0$ (sabit kalınlıklı disk) için ve $k = 0,8$ seçilerek hesaplanan elastik limit açısal hızlarda farklı n değerindeki diskler için gerilme dağılımları elde edilmiş ve bu dağılımlar Şekil 4.8 (içi dolu diskler) , Şekil 4.9 (uçları serbest diskler), Şekil 4.10 (rijid şafta sabitlenmiş diskler) ve Şekil 4.11 (sabit iç basınca maruz diskler)' de verilmiştir.

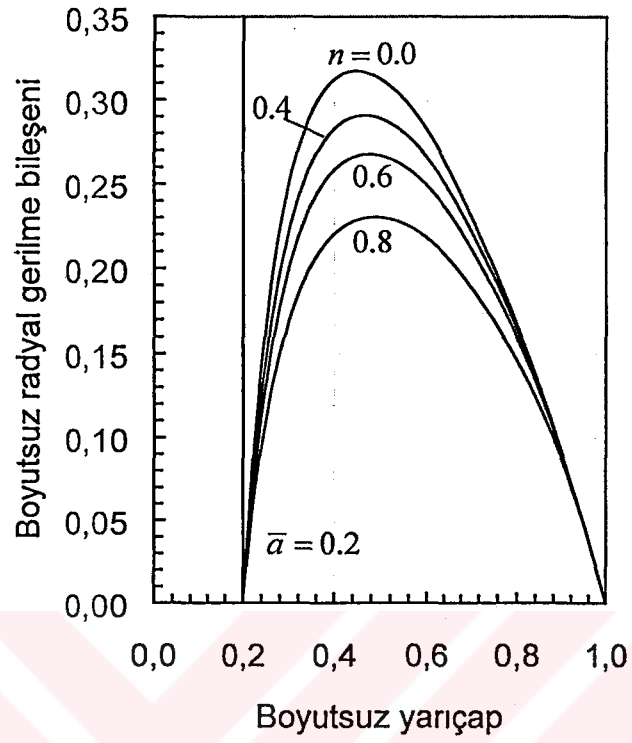
Görüldüğü gibi sabit kalınlıklı disklerde plastik deformasyonlar başladığında diğer disklerde henüz akma başlamamıştır. Aynı hızda en küçük gerilme değerleri, en büyük n değerine sahip yani ucu daha ince olan disklerde meydana gelmektedir.

Şekillerde sabit kalınlıklı diskler için hesaplanan limit açısal hızlar aşağıda verilmiştir:

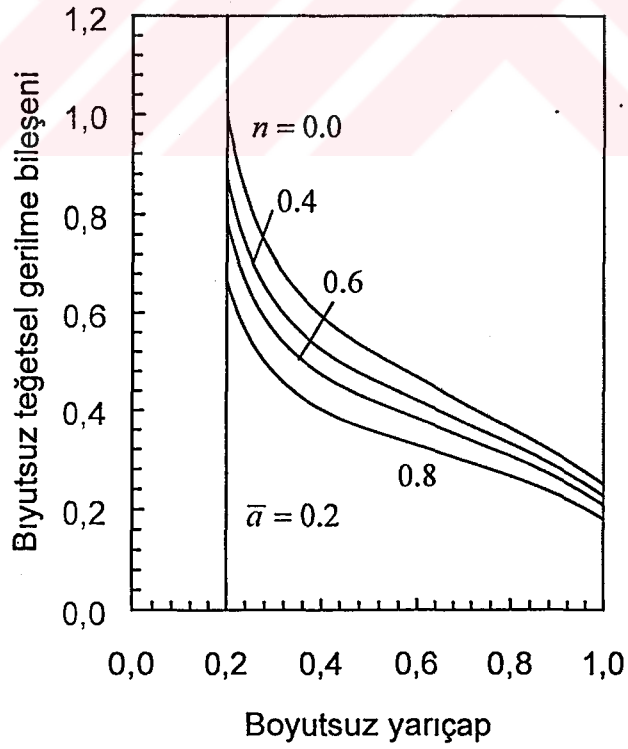
İçi dolu diskler	: $\Omega = 1,5569$
Uçları serbest diskler	: $\Omega = 1,0963$
Rijid şafta sabitlenmiş diskler	: $\Omega = 1,3677$
Sabit iç basınca maruz diskler	: $\Omega = 0,8352$



Şekil 4.8. Değişik n değerleri için içi dolu disklerde (a) radyal, (b) teğetsel gerilmeler

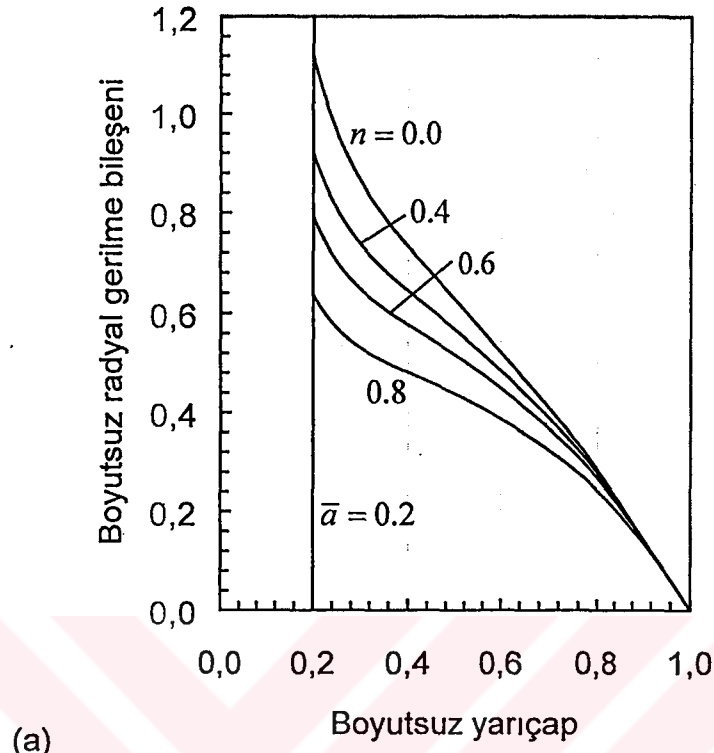


(a)

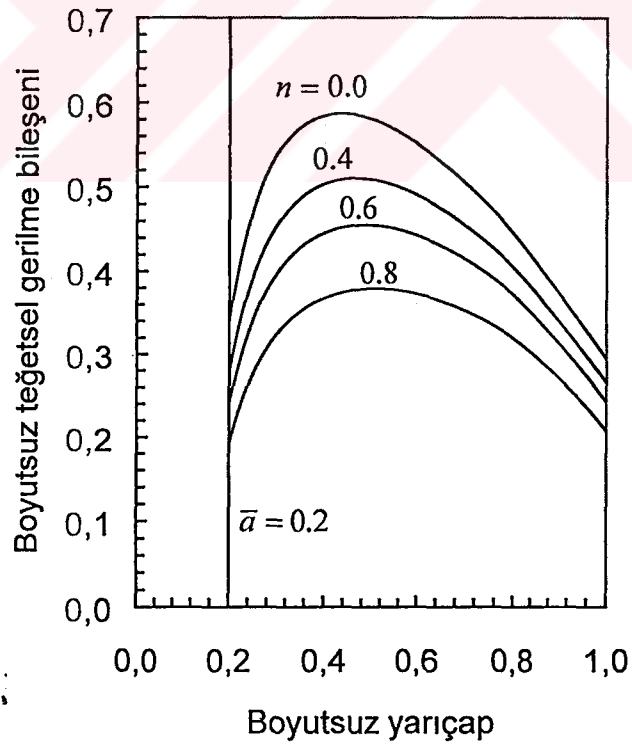


(b)

Şekil 4.9. Değişik n değerleri için uçları serbest disklerde (a) radyal, (b) teğetsel gerilmeler

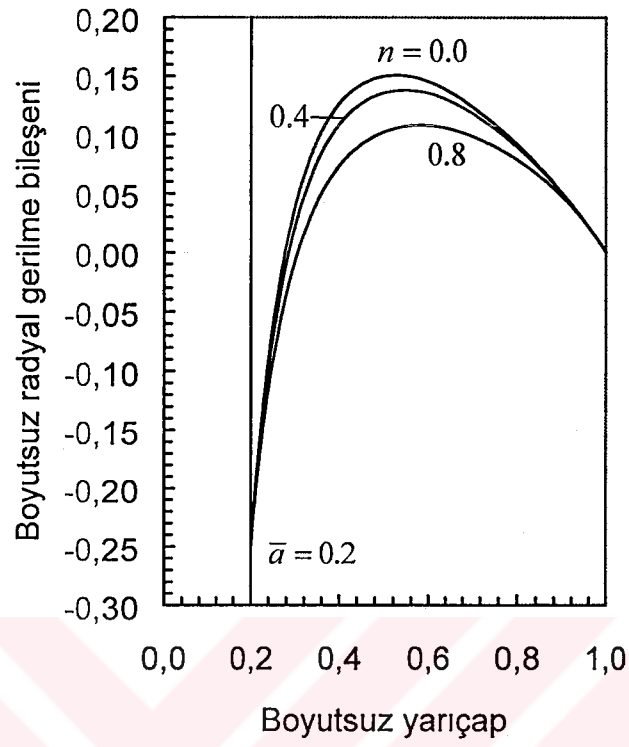


(a)

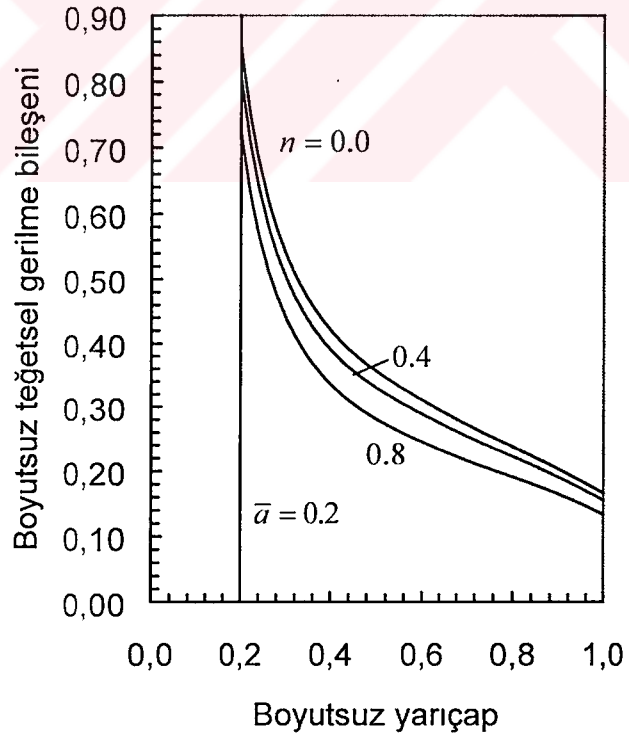


(b)

Şekil 4.10. Değişik n değerleri için rijid şafta sabitlenmiş disklerde (a) radyal, (b) teğetsel gerilmeler



(a)

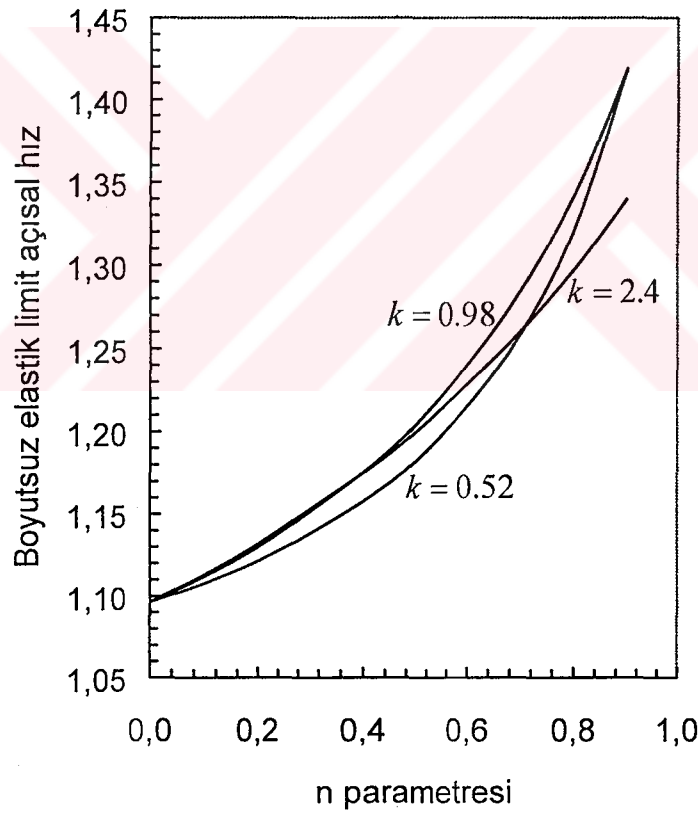


(b)

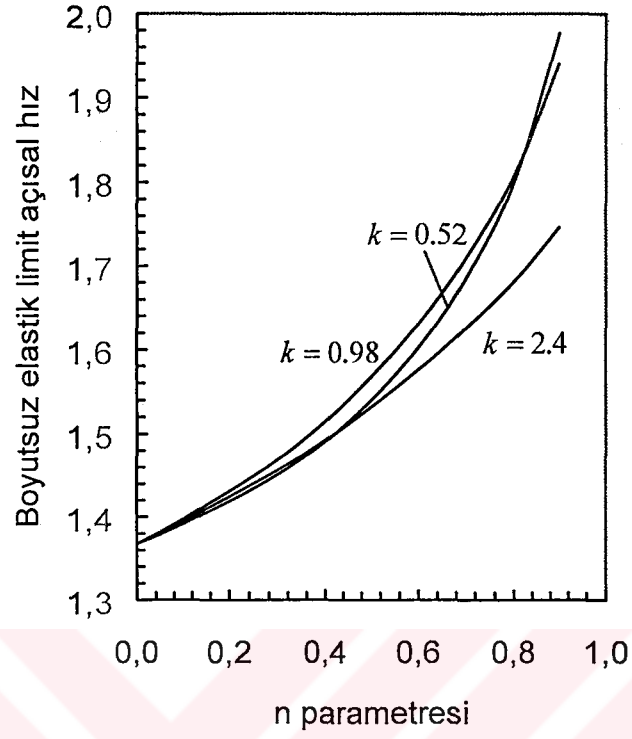
Şekil 4.11. Değişik n değerleri için sabit iç basınca maruz disklerde
(a) radyal, (b) teğetsel gerilmeler

Farklı geometrik parametrelere sahip disklerde plastik deformasyonun başladığı limit açısal hızlar da farklıdır.

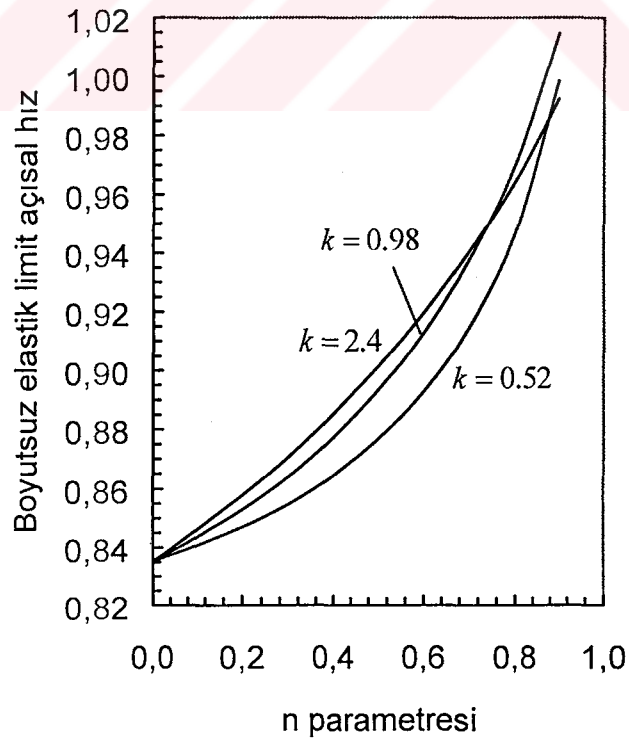
Şekil 4.12' de uçları serbest , Şekil 4.13' de rijid şafta sabitlenmiş ve Şekil 4.14' de sabit iç basınca maruz disklerde bazı k değerleri için n parametresinin elastik limit açısal hızlara etkisi verilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi k parametresiyle limit açısal hız arasında düzgün bir ilişki yoktur, fakat her k değeri için n değeri arttıkça yani disk ucu inceldikçe elastik limit açısal hız değeri artmaktadır.



Şekil 4.12. Uçları serbest disk için elastik limit açısal hızın n parametresiyle değişimi

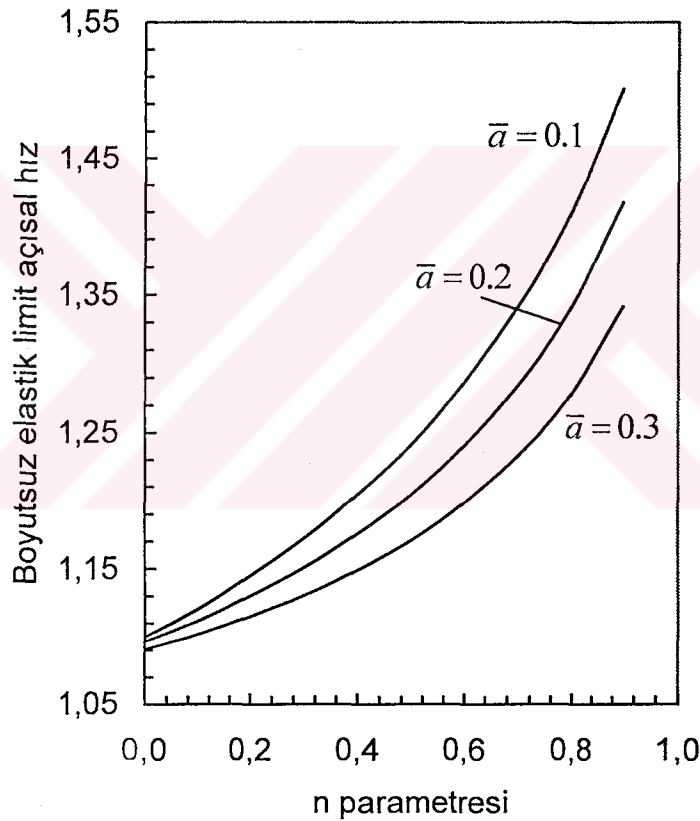


Şekil 4.13. Rijid şafta sabitlenmiş serbest disk için elastik limit açısal hızın n parametresiyle değişimi



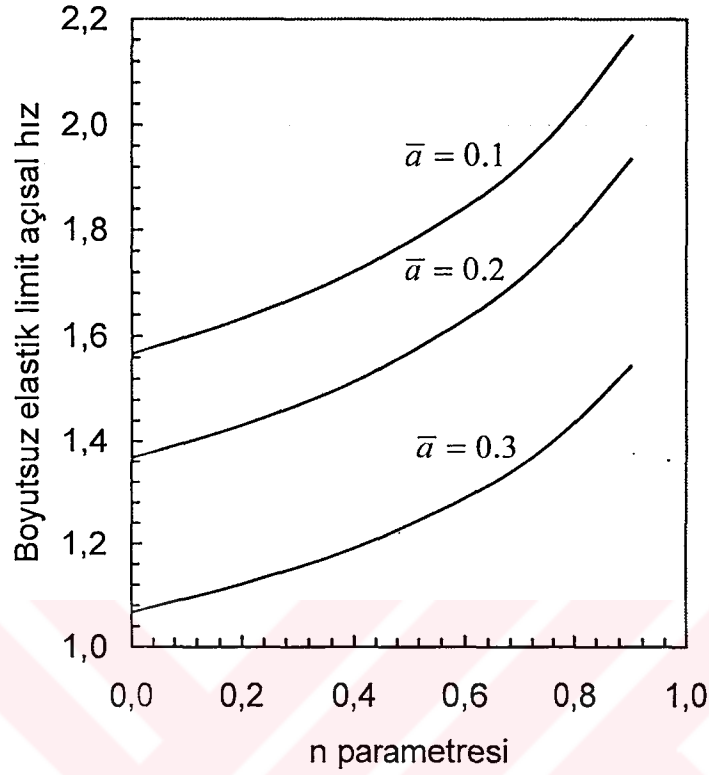
Şekil 4.14. Sabit iç basınca maruz disk için elastik limit açısal hızın n parametresiyle değişimi

İç boş diskler için disk geometrisini belirleyen ve gerilme dağılımına etki eden bir diğer parametre de iç yarıçap, a' dır. Farklı iç yarıçapına sahip disklerde elastik limit açısal hızın değiştiği gözlenmiştir. Bu amaçla değişik iç yarıçap değerlerinde farklı n parametreleri için limit açısal hızlar hesaplanmış ve sonuçlar uçları serbest disk için Şekil 4.15' de verilmiştir. Açısal hız değerleri elde edilirken $k=1,0$ (lineer profil) alınmıştır. Şekilden görüldüğü gibi aynı n değerindeki disklerden iç yarıçapı küçük olanın elastik limit açısal hızı daha büyüktür.

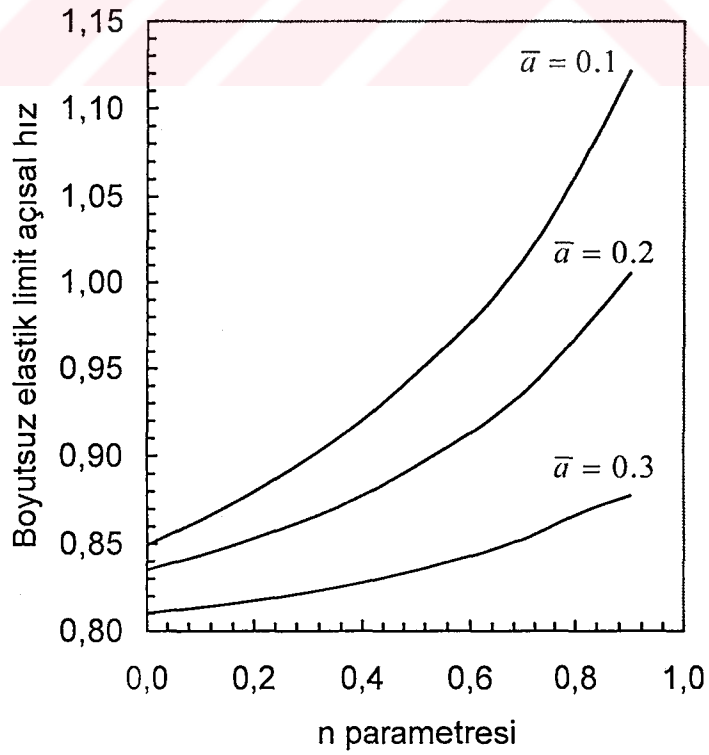


Şekil 4.15. Uçları serbest disk için iç yarıçapın elastik limit açısal hızı etkisi

Diğer sınır şartlarına sahip diskler için de benzer şekilde limit açısal hızlar hesaplanmış ve sonuçlar rijid şafta sabitlenmiş diskler için Şekil 4.16' da, sabit iç basınca maruz diskler için de Şekil 4.17' de verilmiştir.



Şekil 4.16. Rijid şafta sabitlenmiş diskler için iç yarıçapın elastik limit açısai hızı etkisi



Şekil 4.17. Sabit iç basınca maruz disk için iç yarıçapın elastik limit açısai hızı etkisi

5. ELASTİK-PLASTİK GERİLME ANALİZİ VE SONUÇLAR

Polar koordinatlarda von Mises akma kriteri için geçerli olan akma gerilmesi ifadesi Eş.3.24 eşitliğiyle verilmiştir. ($\sigma_y = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2}$)

Von Mises akma kriterinin ilgili akış kuralı (flow rule) polar koordinatlar ve eksenel simetri durumu için Eş.3.37' deki denklemlerden

$$d\varepsilon_r^p = \frac{d\varepsilon_p}{\sigma_y} \left[\sigma_r - \frac{1}{2}\sigma_\theta \right] \quad [5.1]$$

$$d\varepsilon_\theta^p = \frac{d\varepsilon_p}{\sigma_y} \left[\sigma_\theta - \frac{1}{2}\sigma_r \right] \quad [5.2]$$

ve plastik sıkıştırılmazlık şartından

$$d\varepsilon_z^p = -(d\varepsilon_r^p + d\varepsilon_\theta^p) \quad [5.3]$$

şeklinde yazılır (16).

Lineer olmayan gerinme sertleşme davranışını Swift sertleşme kanunu ile karakterize ettiğimizde akma gerilmesi, σ_y ve efektif birim şekil değiştirme (gerinme), ε_p , arasındaki ilişki;

$$\sigma_y = \sigma_0 (1 + \eta \varepsilon_p)^{1/m} \quad [5.4]$$

şeklinde ifade edilir(14). Burada η , pekleşme parametresi, m ise malzeme ile ilgili parametredir. $m=1,0$ alındığında lineer sertleşmeli malzeme davranışı elde edilir. Daha önce boyutsuz gerilme, yer değiştirme, radyal koordinat tanımlamalarına ek olarak boyutsuz pekleşme parametresi $H = \eta \sigma_0 / E$ ve boyutsuz gerinme $\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon_p E / \sigma_0$ ifadeleri ile Eş.5.4 boyutsuz formda aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\bar{\sigma}_y = (1 + H \bar{\varepsilon}_p)^{1/m} \quad [5.5]$$

elde edilir. Bu ifadeden $\bar{\varepsilon}_p$;

$$\bar{\varepsilon}_p = (\bar{\sigma}_y^m - 1) \frac{1}{H} \quad [5.6]$$

şeklinde elde edilir.

Böylece radyal ve teğetsel doğrultudaki toplam birim şekil değiştirmeler, elastik ve plastik gerinim bileşenlerinin toplamıyla boyutsuz olarak şu şekilde ifade edilebilir (16):

$$\bar{\varepsilon}_j = \bar{\varepsilon}_j^e + \bar{\varepsilon}_j^p \quad [5.7]$$

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{\bar{\sigma}_y^m - 1}{\bar{\sigma}_y H} \left[\bar{\sigma}_r - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_\theta \right] + [\bar{\sigma}_r - \nu \bar{\sigma}_\theta] \quad [5.8]$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \frac{\bar{\sigma}_y^m - 1}{\bar{\sigma}_y H} \left[\bar{\sigma}_\theta - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_r \right] + [\bar{\sigma}_\theta - \nu \bar{\sigma}_r] \quad [5.9]$$

Toplam şekil değiştirmeleri Eş.3.9 ile verilen uygunluk denkleminde yerine yazdığımızda ;

$$\begin{aligned} & \frac{[2H(1+\nu)\bar{\sigma}_y + 3(\bar{\sigma}_y^m - 1)(\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r)]}{2H\bar{\sigma}_y} - \left[\bar{r}\nu + \frac{\bar{r}(\bar{\sigma}_y^m - 1)}{2H\bar{\sigma}_y} \right] \frac{d\bar{\sigma}_r}{d\bar{r}} \\ & + \left[\bar{r} + \frac{\bar{r}(\bar{\sigma}_y^m - 1)}{2H\bar{\sigma}_y} \right] \frac{d\bar{\sigma}_\theta}{d\bar{r}} + \left\{ \frac{\bar{r}[1 + (m-1)\bar{\sigma}_y^m](\bar{\sigma}_r - 2\bar{\sigma}_\theta)}{2H\bar{\sigma}_y^2} \right\} \frac{d\bar{\sigma}_y}{d\bar{r}} = 0 \end{aligned} \quad [5.10]$$

diferansiyel denklemi bulunur.

Problemi tek bir değişken fonksiyon cinsinden yazmak amacıyla boyutsuz gerilme fonkiyonunu şu şekilde tanımlanabilir (1):

$$Y(\bar{r}) = \bar{r}\bar{h}\bar{\sigma}_r \quad [5.11]$$

Böylece radyal gerilme bileşeni gerilme fonksiyonu cinsinden;

$$\bar{\sigma}_r = \frac{Y}{h\bar{r}} \quad [5.12]$$

şeklinde elde edilmiş olur. Bu ifade Eş.3.6 ile verilen boyutsuz formdaki hareket denkleminde yerine yazılırsa teğetsel gerilme bileşeni gerilme fonksiyonuna bağlı olarak ;

$$\bar{\sigma}_\theta = \Omega^2 \bar{r}^2 + \frac{1}{h} \frac{dY}{d\bar{r}} \quad [5.13]$$

şeklinde elde edilir. Eş.5.9 denkleminde $\bar{\sigma}_\theta$ ve $\bar{\sigma}_y$ ifadelerinin birinci türevleri gerilme fonksiyonunun ikinci türevlerini içerir. Bu türevler Eş.5.13 ve Eş.3.24 eşitliklerinin türevleri alınarak şu şekilde elde edilebilir.

$$\frac{d\bar{\sigma}_y}{d\bar{r}} = \frac{N_1}{2\bar{\sigma}_y} - \frac{N_2}{2\bar{\sigma}_y} \left[N_3 + \frac{1}{h} \frac{d^2 Y}{d\bar{r}^2} \right] \quad [5.14]$$

$$\frac{d\bar{\sigma}_\theta}{d\bar{r}} = N_3 + \frac{1}{h} \frac{d^2 Y}{d\bar{r}^2} \quad [5.15]$$

Burada;

$$N_1 = (2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta) \frac{d\bar{\sigma}_r}{d\bar{r}} \quad [5.16]$$

$$N_2 = \bar{\sigma}_r - 2\bar{\sigma}_\theta \quad [5.17]$$

$$N_3 = 2\Omega^2 \bar{r} - \frac{1}{h^2} \frac{dh}{d\bar{r}} \frac{dY}{d\bar{r}} \quad [5.18]$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Eş.5.14 ve Eş.5.15 ile verilen türev ifadelerini Eş.5.10' da yerine yazdığımızda;

$$\begin{aligned} & \frac{[2H(1+\nu)\bar{\sigma}_y + 3N_5]}{2H\bar{\sigma}_y}(\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r) + N_3\bar{r}\left[1 + \frac{N_5}{H\bar{\sigma}_y}\right] + \frac{\bar{r}N_2N_4}{4H\bar{\sigma}_y^3}[N_2N_3 - N_1] \\ & - \left[\bar{r}\nu + \frac{\bar{r}N_5}{2H\bar{\sigma}_y}\right]\frac{d\bar{\sigma}_r}{d\bar{r}} + \left[\frac{\bar{r}}{h} + \frac{\bar{r}N_5}{hH\bar{\sigma}_y} + \frac{\bar{r}N_2^2N_4}{4Hh\bar{\sigma}_y^3}\right]\frac{d^2Y}{d\bar{r}^2} = 0 \end{aligned} \quad [5.19]$$

denklemini elde edilir. Burada,

$$N_4 = (m-1)\bar{\sigma}_y^m + 1 \quad [5.20]$$

$$N_5 = \bar{\sigma}_y^m - 1 \quad [5.21]$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Radyal, teğetsel ve akma gerilmesi ifadelerini, (Eş.5.12, Eş.5.13 ve Eş.3.24), Eş.5.19 denkleminde yerine yazıp gerekli sadeleştirmeleri yaptığımızda problemi genel bir tanımla;

$$\frac{d^2Y}{d\bar{r}^2} = f\left(\bar{r}, Y, \frac{dY}{d\bar{r}}\right) \quad [5.22]$$

formunda yazabiliriz. Bu form ikinci derece lineer olmayan sınır değer problemi formudur, sınır şartları ile ancak nümerik olarak çözülebilir.

Eş.5.22 ile gösterilen ikinci derece sınır değer problemi, $\phi_1(\bar{r}) = Y(\bar{r})$ ve $\phi_2(\bar{r}) = dY(\bar{r})/d\bar{r}$ yeni değişkenleri tanımlanarak

$$\frac{d\phi_1(\bar{r})}{d\bar{r}} = \frac{dY(\bar{r})}{d\bar{r}} = \phi_2$$

$$\frac{d\phi_2(\bar{r})}{d\bar{r}} = \frac{d^2Y(\bar{r})}{d\bar{r}^2} = f(r, \phi_1, \phi_2) \quad [5.23]$$

şeklinde başlangıç değer problem sistemine (Initial value problem) dönüştürülebilir.

5.1. İçi Dolu Disk

İçi dolu disk için sınır şartları $r = 0$ ' da gerilme bileşenleri sonlu ve birbirine eşit ve $r = b$ ' de ise radyal gerilme bileşeni sıfır şeklindeydi. Buna göre Eş.5.11 eşitliğinden sınır şartları;

$$Y(0) = 0 \quad \text{ve} \quad Y(1) = 0 \quad [5.24]$$

şeklinde yazılabilir. Eş.5.12 ve Eş.5.13 ile verilen gerilme fonksiyonuna bağlı radyal ve teğetsel gerilme bileşenleri ifadelerini kullanarak sınır koşulları;

$$\bar{\sigma}_r(0) = \bar{\sigma}_\theta(0) = \left[\frac{dY}{d\bar{r}} \right]_{\bar{r}=0} \quad \text{ve} \quad \bar{\sigma}_r(1) = 0 \quad [5.25]$$

şeklinde yazılabilir.

Burada başlangıç değerleri yeni değişkenler cinsinden $\phi_1(0) = 0$ ve $\phi_2(0) = \left[\frac{dY(\bar{r})}{d\bar{r}} \right]_{\bar{r}=0}$ şeklinde yazılabilir. $\bar{r} = 0$ ' da $\frac{dY}{d\bar{r}}$ değeri bilinmediği için diğer sınır şartı $Y(1) = 0$ ' ı sağlayacak $dY/d\bar{r}$ değeri Newton iterasyon metodu ile bulunur. Bunun için $F = \phi_1(1)$ değeri, $\phi_2^0(0)$ ' a bir değer vererek aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$I. \phi_2(0) = \phi_2^k(0) \quad \text{için} \quad F_1 = \phi_1(1)$$

$$II. \phi_2(0) = \phi_2^k(0) + \Delta_\phi \quad \text{için} \quad F_2 = \phi_1(1)$$

$$III. \phi_2(0) = \phi_2^k(0) - \Delta_\phi \quad \text{için} \quad F_3 = \phi_1(1)$$

iterasyon için seçilen değerden sonra alınacak $\phi_2^{k+1}(0)$ ise şu formülden elde edilir:

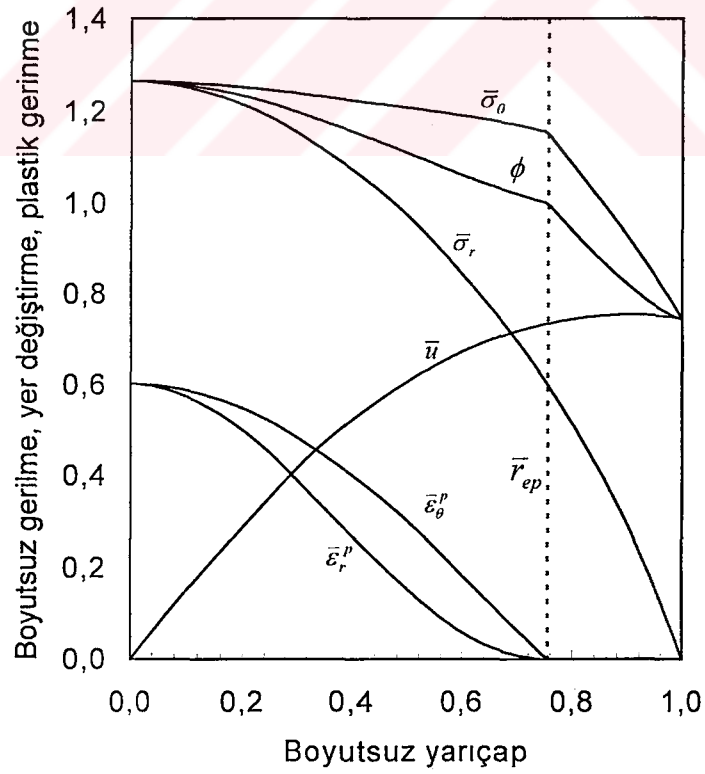
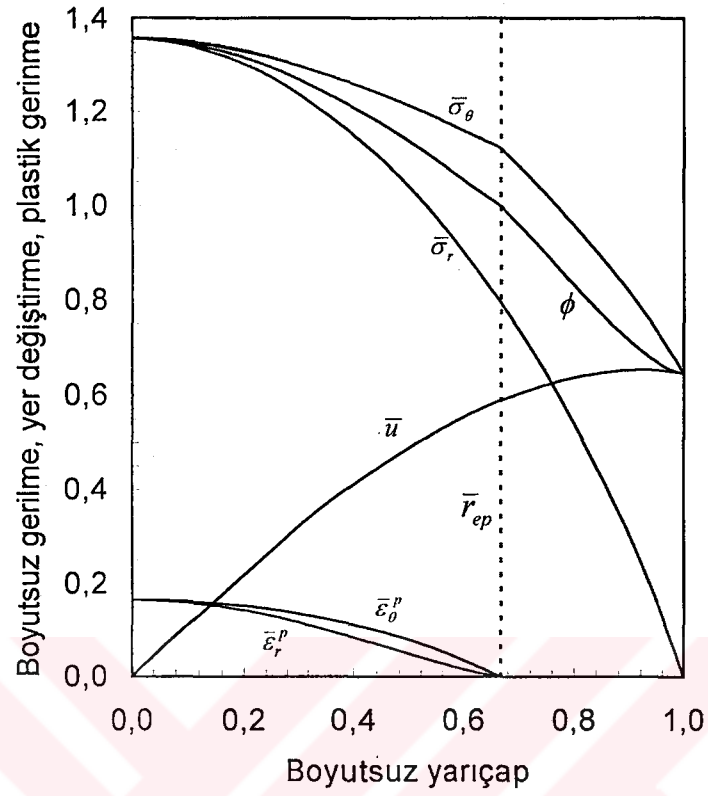
$$\phi_2^{k+1}(0) = \phi_2^k(0) - \frac{(2\Delta_\phi)F_1}{F_2 - F_3} \quad [5.26]$$

Eş.5.26 denkleminde Δ_ϕ , 10^{-3} mertebesinde pozitif bir artıştır. k . iterasyonda $|\phi_2^{k+1}(0) - \phi_2^k(0)| < \varepsilon_T$ şartı sağlanıncaya kadar devam eder. Bu ifadede ε_T hata toleransıdır ve 10^{-9} mertebesinde alınmıştır.

Bu bölümde içi dolu diskler için birbirinden farklı gerilme dağılımlarının meydana geldiği disk geometrilerini belirleyen $n-k$ eğrisinin (Şekil 4.3) sağında ve solunda kalan birer disk için elastoplastik sonuçlar verilecektir.

Eğrinin sağından seçilen $n=0,4$, $k=2,4$ parametrelerine sahip bir disk için elastik limit açısal hız $\Omega=1,6886$ olarak hesaplanmıştır. Bu hız daha da arttırıldığında disk simetri ekseninden ($r=0$) itibaren plastik deformasyon başlayacak ve hız artışıyla beraber plastik deformasyonların etkili olduğu bölge disk ucuna doğru genişleyecektir.

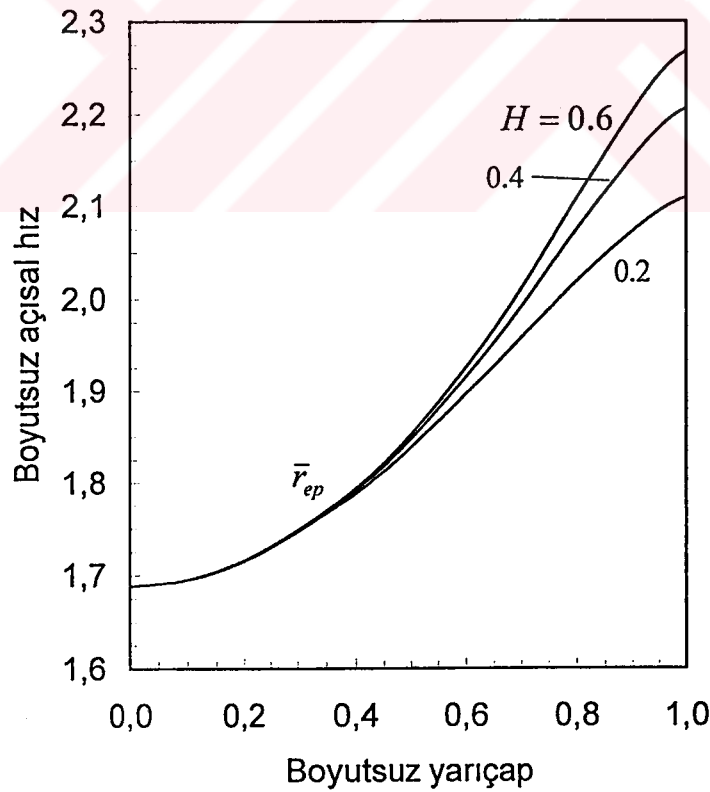
Şekil 5.1' de limit açısal hızın üzerinde bir hızda ($\Omega=2,0$) elastik-plastik gerilme dağılımı farklı non-lineer sertleşme özelliğine sahip malzemeli diskler için verilmiştir. Bu şekiller elde edilirken boyutsuz gerilme pekleşme parametresi $H=0,5$ alınmıştır.



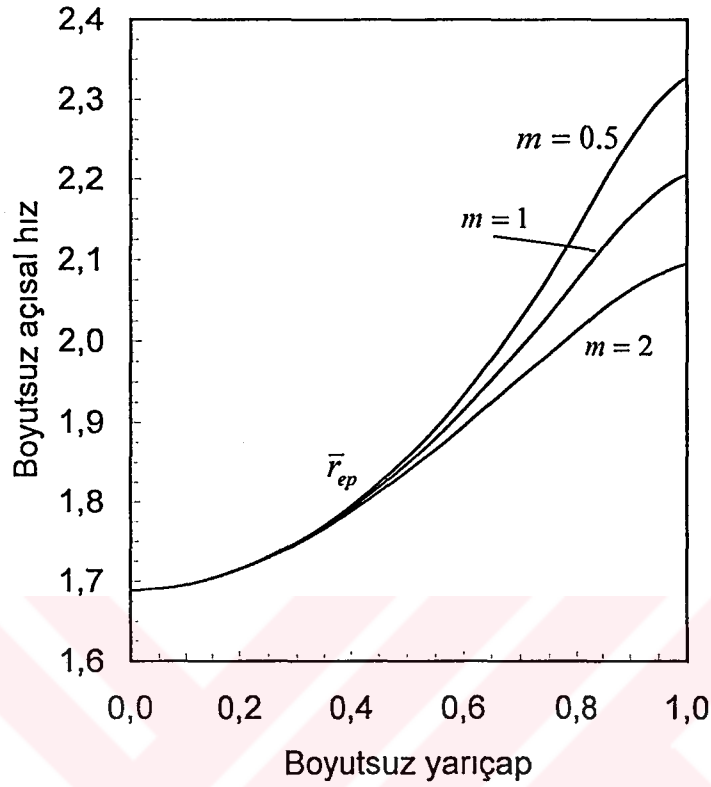
Şekil 5.1. İçi dolu disk için elastik - plastik gerilme, yer değişirme ve plastik gerilmeler ($n = 0.4, k = 2.4$); (a) $m = 0.5$, (b) $m = 2.0$

Görüldüğü gibi m değeri küçük malzemeli bir disk içinde, aynı açısal hızda daha küçük plastik şekil değiştirmeler fakat daha büyük gerilmeler meydana gelmektedir. Şekilde kesikli çizgi, elastik - plastik arayüzün disk içindeki konumunu göstermektedir, çizginin sol tarafı plastik gerilme ve deformasyonlara maruzdur, diğer tarafında ise elastik deformasyonlar geçerlidir.

Şekil 5.2' de $n = 0,4$, $k = 2,4$ değerlerine sahip diskde elastik - plastik arayüzün disk içindeki konumunun açısal hız ve gerilme pekleşmesi parametreleri ile değişimi elde edilmiştir. Şekil 5.2a' da lineer gerilme sertleşme davranışı ($m = 1,0$) için farklı H değerlerinin, Şekil 5.2b' de ise $H = 0,4$ alınarak farklı m değerlerinin elastik - plastik arayüzün konumuna etkileri verilmiştir.



(a)



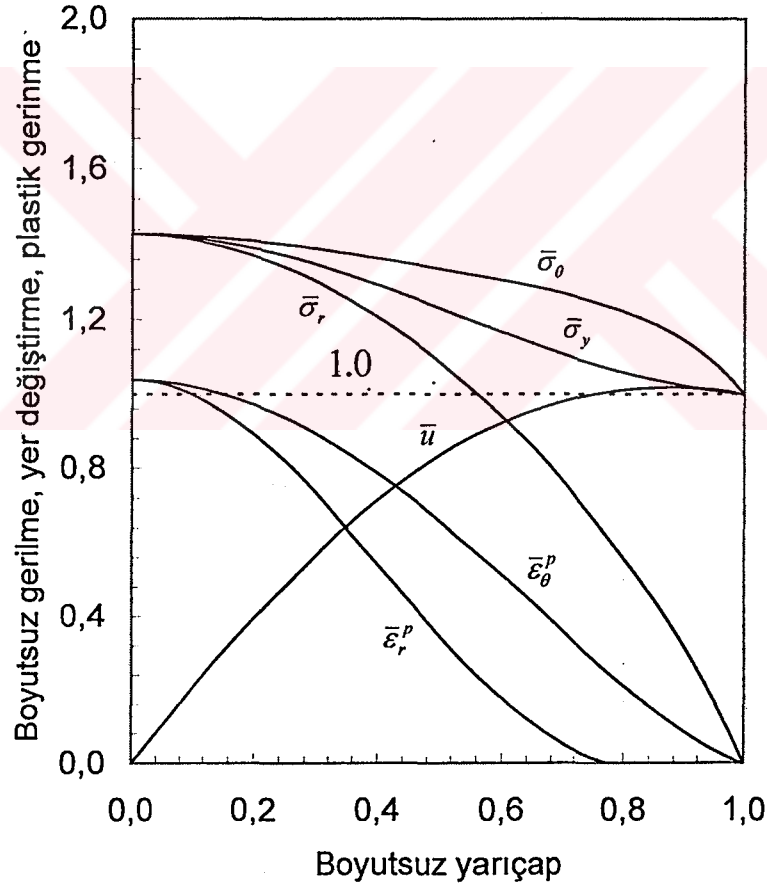
(b)

Şekil 5.2. Elastik – plastik arayüzün (a) H ile ; (b) m ile değişimi (II. Bölge için)

Şekil 5.2a ve 5.2b' den görüldüğü gibi parametrelerin etkileri belli bir hızdan sonra belirgin olarak görülmektedir. Şekil 5.2a' dan aynı m değeri ve açısal hız için düşük H değerine sahip diskde elastik-plastik arayüzün disk ucuna daha yakın olduğu görülmektedir, yani bu disk daha düşük hızda daha çabuk deforme olmaktadır, aynı sonuç Şekil 5.2b' ye bakıldığında aynı H değeri ve açısal hız için küçük m değerine sahip diskler için de söylenebilir. Görüldüğü gibi $r = 0$ konumundaki açısal hız elastik limit açısal hızdır, ($\Omega = 1,6886$). Hız arttıkça elastik-plastik arayüz disk ucuna doğru ilerler disk ucuna ulaştığında o parametreler için disk tamamen plastik deformasyon bölgesine geçer, ve bu açısal hız değerleri plastik limit açısal hız değerleridir.

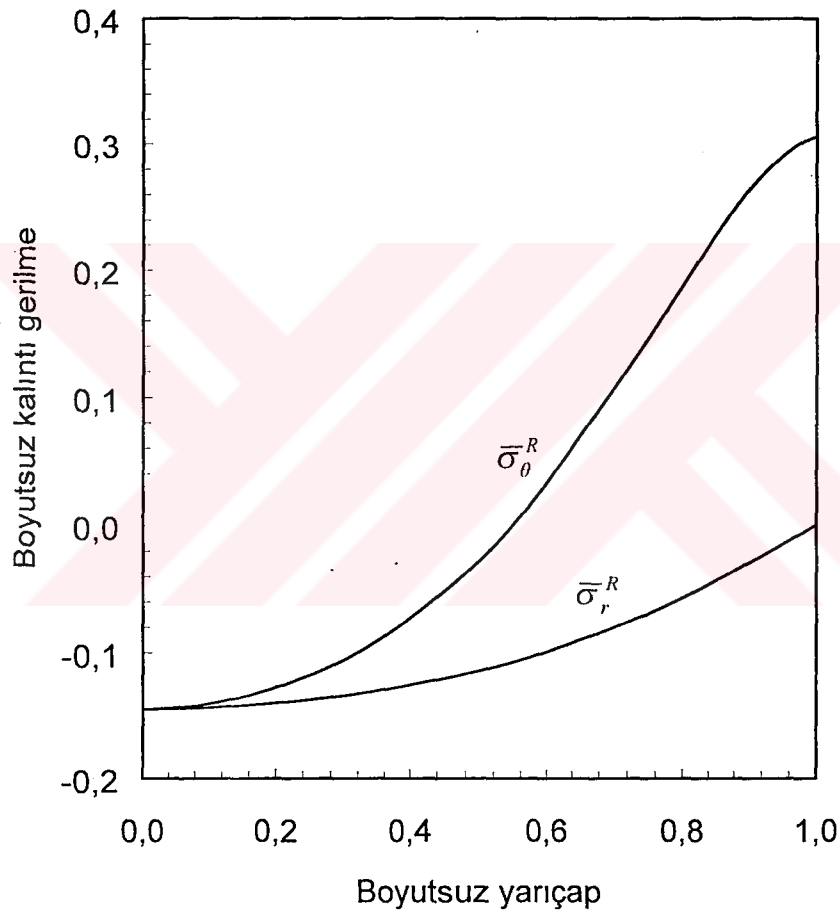
Şekil 5.2' den aynı m değeri için düşük H değerine sahip diskin, aynı H değerine sahip disklerde ise küçük m değerine sahip disklerin plastik limit açısal hızlarının daha düşük olduğu görülmektedir.

Şekil 5.3' de $n = 0,4$, $k = 2,4$ parametrelerine sahip diskin tam plastik deforme olduğu durumda gerilme, yer değiştirme ve plastik genleme dağılımı $H = 0,5$ ve $m = 2,0$ için verilmiştir. Bu durumda hesaplanan açısal hız değeri $\Omega = 2,1215$ ' dir.



Şekil 5.3. İçi dolu disk için plastik limit açısal hızda gerilme, yer değiştirme ve plastik gerilmeler. ($n = 0,4$, $k = 2,4$; $\Omega = 2,1215$, $H = 0,5$, $m = 2,0$)

Diskin bu limit hızdan daha yüksek bir hızdan sonra durmasıyla disk içinde meydana gelen artık gerilme değerleri Şekil 5.4' de verilmiştir. Bu değerler hesaplanırken, bu açısal hızda elde edilen toplam gerilme bileşenleri ile aynı hızda hesaplanan elastik gerilme bileşenlerinin farkı alınmıştır. Şekil 5.4' deki artık gerilme değerleri $H = 0,5$, $m = 2,0$ ve $\Omega = 2,20$ için elde edilmiştir.

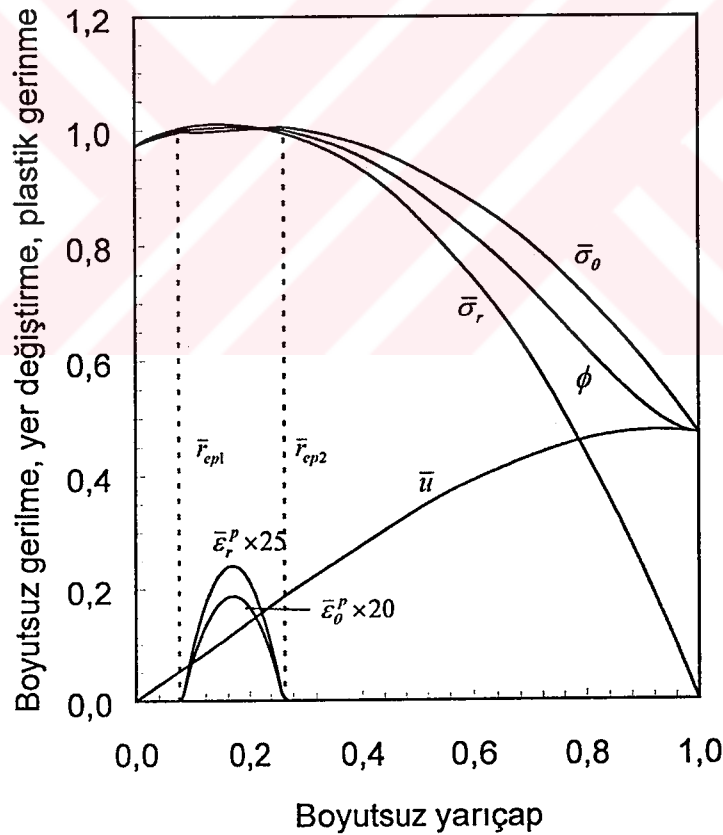


Şekil 5.4. İçi dolu diskde radyal ve teğetsel artık gerilme bileşenleri
($n = 0,4, k = 2,4$; $\Omega = 2,20$, $H = 0,5$, $m = 2,0$)

Şekil 5.4' den görüldüğü gibi disk içinde teğetsel gerilme bileşeni radyal gerilme bileşenine göre daha büyük miktarda artık gerilme olarak yer almıştır.

İçi dolu diskler için elde edilen $n-k$ eğrisinin (Şekil 4.3) sol tarafındaki bölgeden seçilen $n=0,4$, $k=0,8$ parametrelerine sahip bir disk için elastik limit açısal hız $\Omega=1,7350$ olarak hesaplanmıştır. Bu diskde hız arttıkça diskde iç kısımdan ($r=a$) itibaren plastik deformasyon başlayacak ve hız artışıyla beraber plastik deformasyonların etkili olduğu bölge diskin iki merkezine ve ucuna doğru genişleyecektir.

Şekil 5.5' de limit açısal hızın üzerinde bir hızda ($\Omega=2,0$) elastik-plastik gerilme dağılımı $m=2,0$ ve $H=0,5$ için verilmiştir.

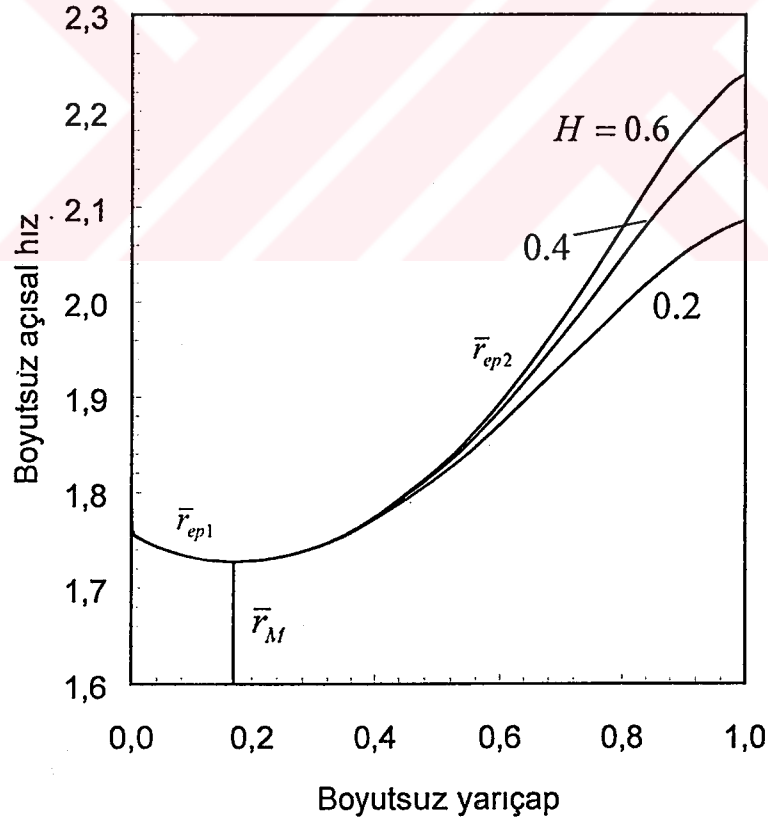


Şekil 5.5. İçi dolu disk için elastik - plastik gerilme, yer değiştirme ve plastik gerilmeler ($n=0,4$, $k=0,8$; $\Omega=2,0$, $m=2,0$, $H=0,5$)

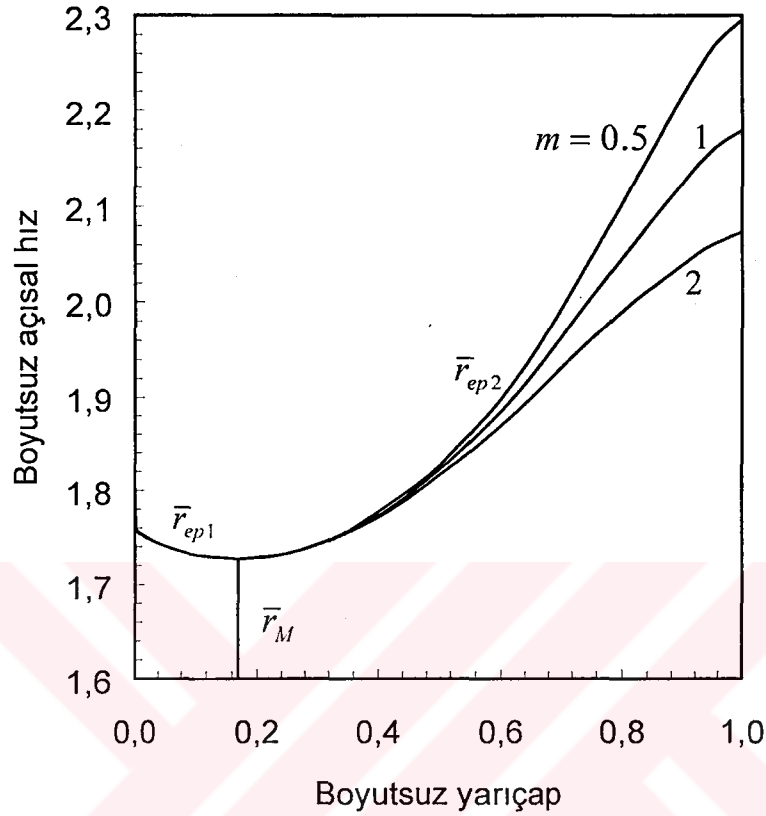
Şekil 5.5' de iki kesikli çizgi elastik – plastik arayüzün konumunu belirlemektedir. Bu iki çizgi arasındaki bölgede plastik, diğer kısımlarda ise

elastik deformasyonlar geçerlidir. Hız artırıldığında önce iç kısımdaki elastik bölge tamamen plastik olur, daha yüksek bir hızda ise disk tamamen plastik deformasyonların etkisinde kalır.

Şekil 5.6' da $n = 0,4$, $k = 0,8$ değerlerine sahip disk için iki elastik-plastik arayüzün disk içinde ilerleyişinin açısal hız ve gerilme pekleşmesi parametreleri ile değişimi elde edilmiştir. Şekil 5.6a' da lineer gerilme sertleşme davranışı, ($m = 1,0$), için farklı H değerlerinin, Şekil 5.6b' de ise $H = 0,4$ alınarak farklı m değerlerinin elastik - plastik arayüzün konumuna etkileri verilmiştir. Burada da parametrelerin etkileri belli bir hızdan sonra belirgin olarak görülmektedir.



(a)

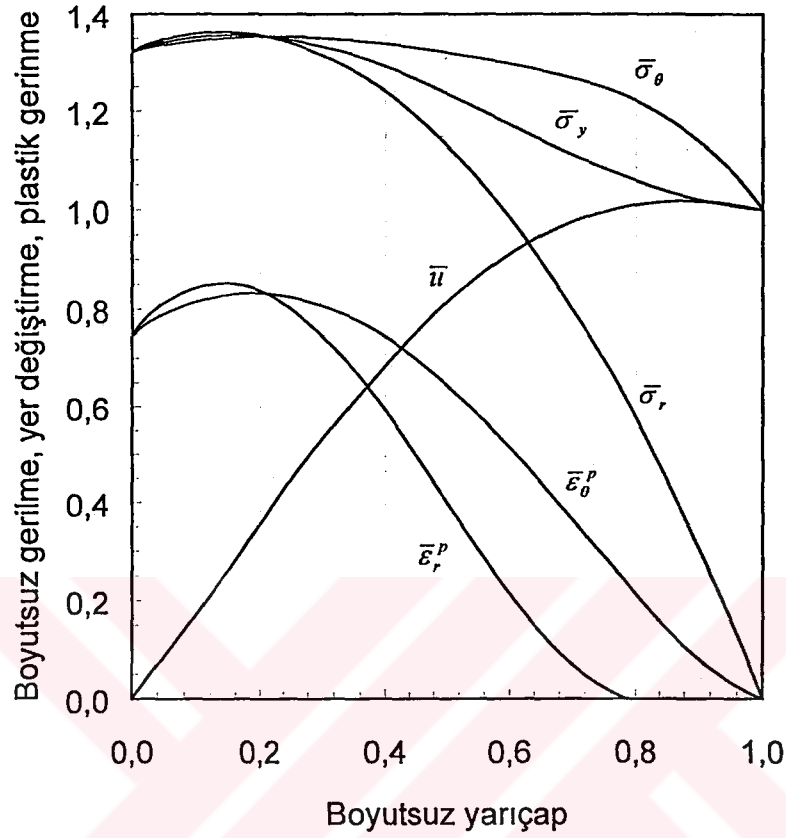


(b)

Şekil 5.6. Elastik – plastik arayüzün (a) H ile ; (b) m ile değişimi (I.Bölge için)

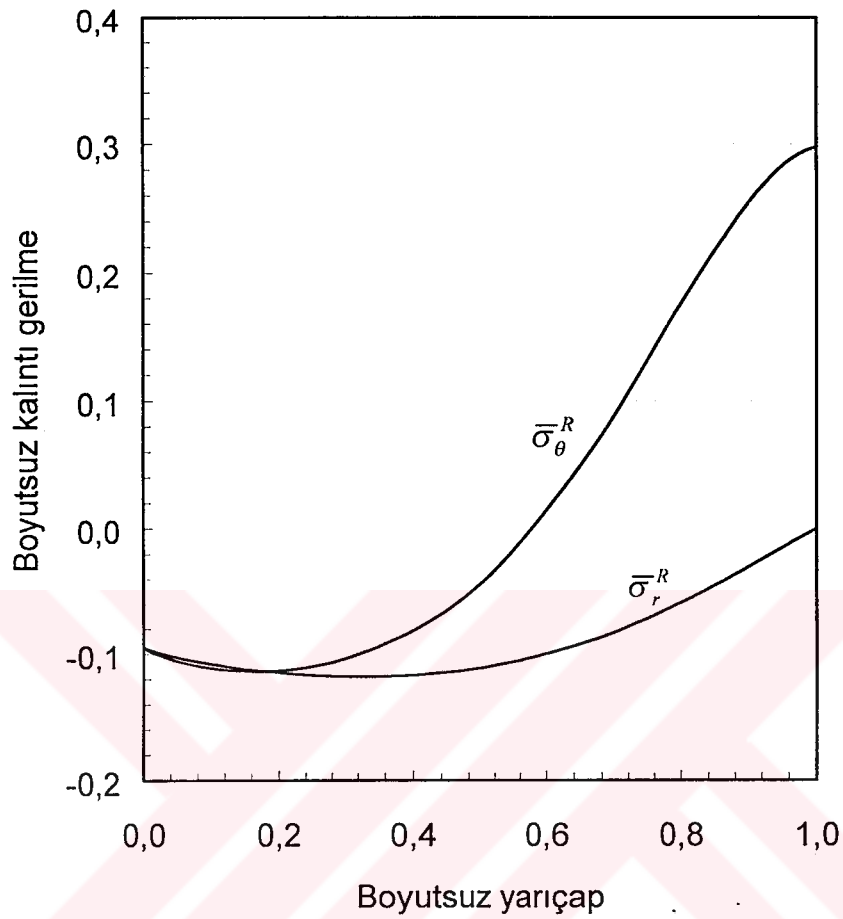
Şekil 5.6' da $r = 0$ 'daki açısal hız değeri akmanın başladığı limit açısal hız değeri ve $r = 1,0$ 'deki açısal hız değerleri o eğriye ait parametreler için plastik limit açısal hız değerleridir.

Şekil 5.7' de bu geometrideki disk için $H = 0,5$ ve $m = 2,0$ alınarak plastik limit açısal hızda gerilme, yer değiştirme ve plastik gerilme dağılımları elde edilmiştir. Bu parametreler için limit açısal hız $\Omega = 2,0987$ olarak hesaplanmıştır.



Şekil 5.7. İçi dolu disk için plastik limit açısal hızlarda gerilme, yer değiştirme ve plastik gerilmeler ($n = 0,4$, $k = 0,8$, $m = 2,0$, $H = 0,5$)

Şekil 5.8' de $H = 0,5$, $m = 2,0$ ve plastik limit açısal hızdan büyük bir $\Omega = 2,20$ açısal hızından sonra diskin durmasıyla disk içinde mevcut kalan radyal ve teğetsel kalıntı gerilme bileşenleri elde edilmiştir. Daha küçük m değerine sahip malzemeli diskler için daha büyük plastik gerilmeler söz konusu olduğundan bu disklerde diskin durmasıyla daha büyük kalıntı gerilmeler disk içinde kalacaklardır.



Şekil 5.8. İçi dolu diskde radyal ve teğetsel artık gerilme bileşenleri
 ($n = 0,4, k = 0,8$; $\Omega = 2,20$, $H = 0,5$, $m = 2,0$)

5.2. İçi Boş Disk

5.2.1. Uçları serbest disk

Uçları serbest disk için sınır şartları $r = a$ ' da $\sigma_r(a) = 0$ ve $r = b$ ' de $\sigma_r(b) = 0$ şeklindeydi. Buna göre Eş.5.11 eşitliğinden gerilme fonksiyonu için sınır şartları;

$$Y(\bar{r}_0) = 0 \text{ ve } Y(1) = 0 \quad [5.27]$$

şeklinde yazılabilir. Eş.5.12 ve Eş.5.13 ile verilen gerilme fonksiyonuna bağlı radyal ve teğetsel gerilme bileşenleri ifadelerini kullanarak sınır koşulları;

$$\bar{\sigma}_r(\bar{r}_0) = 0 \text{ ve } \bar{\sigma}_r(1) = 0 \quad [5.28]$$

olarak yazılabilir.

Başlangıç değerlerini daha önce tanımlanan yeni değişkenler cinsinden

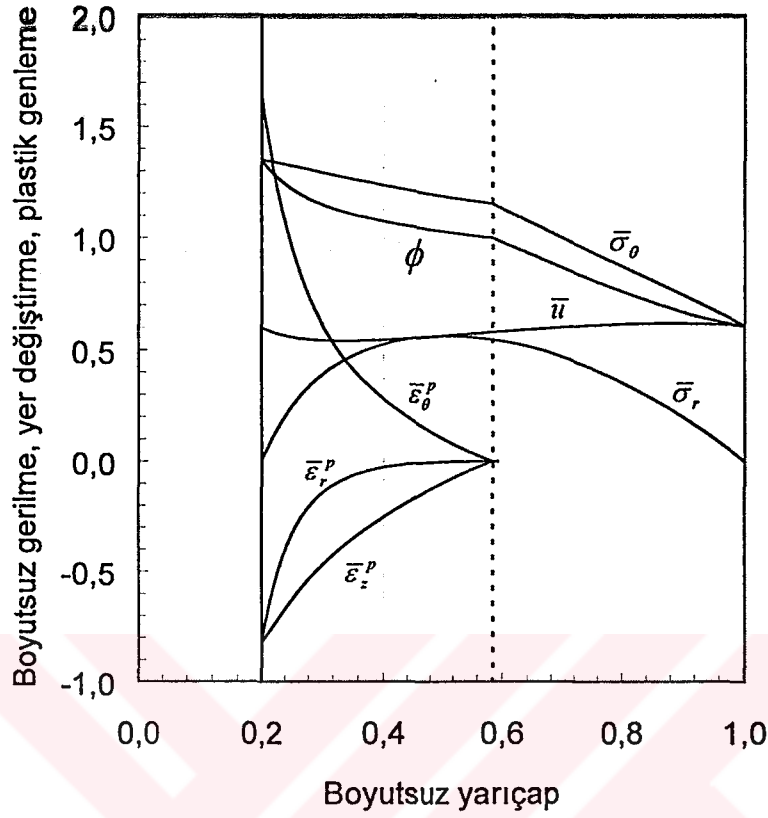
$$\phi_1(\bar{r}_0) = 0 \text{ ve } \phi_2(0) = \left[\frac{dY(\bar{r})}{d\bar{r}} \right]_{\bar{r}=\bar{r}_0} \text{ şeklinde yazabiliriz. } \bar{r} = \bar{r}_0' \text{ da } \frac{dY}{d\bar{r}} \text{ değeri}$$

bilinmediği için diğer sınır şartı $Y(1) = 0'$ ı sağlayacak $dY/d\bar{r}$ değeri içi dolu diskteki çözüm yolu izlenerek hesaplanır. Burada da $\Delta_\phi, 10^{-3}$ mertebesinde ve $\varepsilon_T, 10^{-9}$ mertebesinde seçilmiştir.

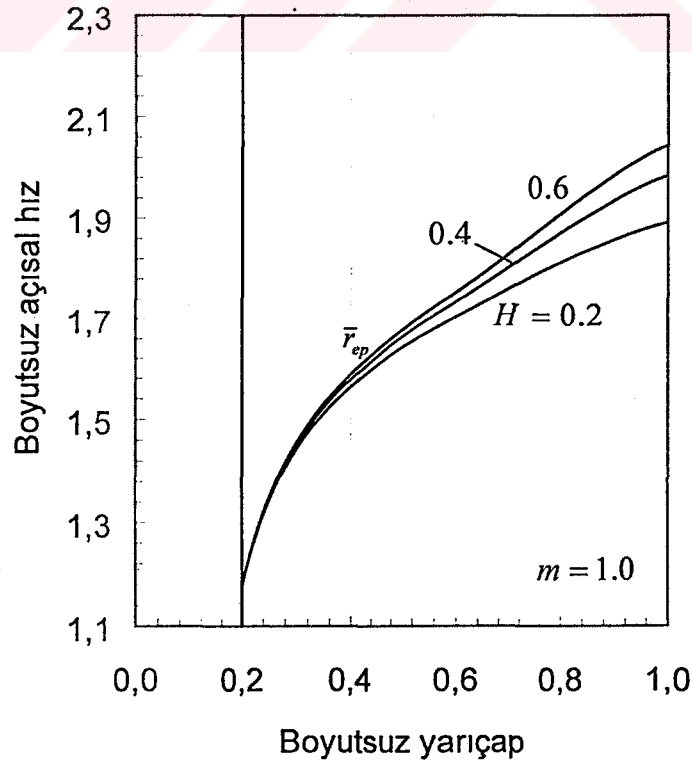
$n = 0,4$, $k = 2,4$ parametrelerine sahip disk için iç yarıçap $a = 0,2$ seçilerek hesaplanan elastik limit açısal hız $\Omega = 1,1749$ değerindedir. Şekil 5.9' da bu hızdan daha büyük $\Omega = 1,7$ açısal hızında ve $H = 0,5$, $m = 0,2$ alınarak hesaplanan elastik-plastik gerilmeler, yer değiştirmeler ve plastik gerinimler verilmiştir.

Şekilde kesikli çizgi elastik-plastik arayüzün konumunu göstermektedir, çizginin sol tarafında plastik, sağ tarafında ise elastik gerilme ve gerinme ifadeleri geçerlidir.

Hız arttıkça elastik-plastik arayüz diskin ucuna doğru genişler. Şekil 5.10' da bu diskin elastik-plastik arayüzün disk içindeki konumunun açısal hız ve gerinme pekleşmesi parametreleri ile değişimi elde edilmiştir.

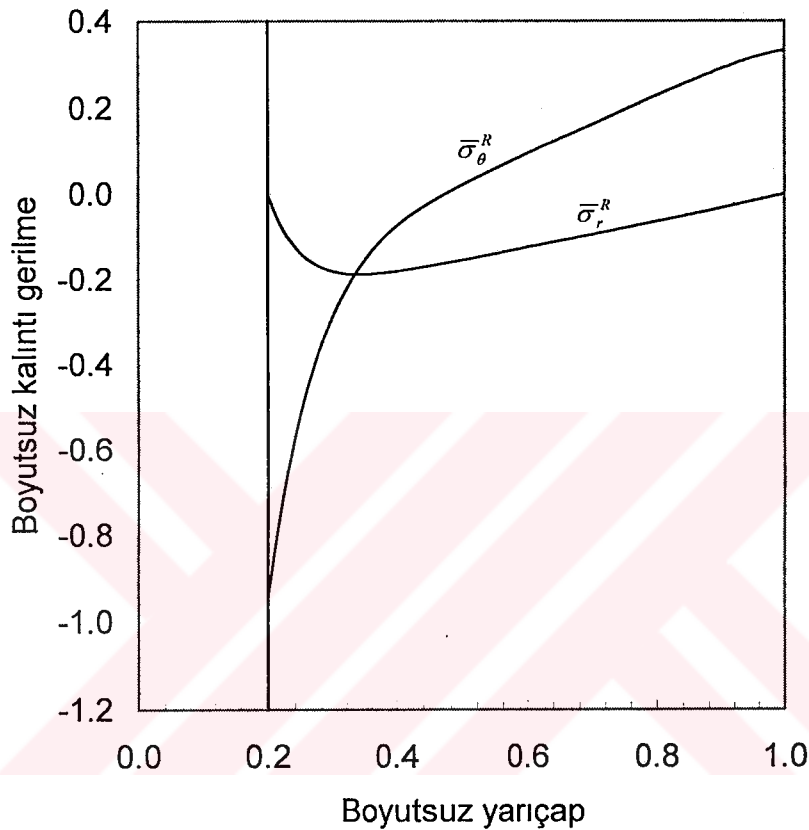


Şekil 5.9. Uçları serbest disk için elastik - plastik gerilme, yer değiştirme ve plastik gerilmeler ($n = 0,4$, $k = 2,4$; $\Omega = 1,7$, $H = 0,5$, $m = 2,0$)



(a)

Şekil 5.11' deki tam plastik dağılımlar için plastik limit açısal $\Omega = 1,8998$ olarak hesaplanmıştır. Daha büyük bir hızdan sonra diskin durmasıyla disk içindeki artık gerilme bileşenleri Şekil 5.12' de verilmiştir.



Şekil 5.12. Uçları serbest diskde radyal ve teğetsel artık gerilme bileşenleri
($n = 0,4, k = 2,4 ; \Omega = 2,0, H = 0,5, m = 2,0$)

5.2.2. Rijid şafta sabitlenmiş disk

Rijid şafta sabitlenmiş disk için sınır şartları $r = a'$ da $u(a) = 0$ ve $r = b'$ de $\sigma_r(b) = 0$ şeklindeydi. Buna göre birinci sınır şartından ayrıca $\varepsilon_\theta = 0$ yazılabilir. Eş.5.11 eşitliğinden gerilme fonksiyonu için disk ucundaki sınır şartı;

$$Y(1) = 0$$

[5.29]

şeklinde yazılabilir. Eş.5.22 ile verilen sınır değer problemini bu disk için ilk değer problemine dönüştürdüğümüzde ilk değerlerin ikisi de bilinmemektedir.

$$\phi_1^0 = \phi_1(\bar{r}_0) \quad \text{ve} \quad \phi_2^0 = \phi_2(\bar{r}_0) = [dY / d\bar{r}]_{\bar{r}=\bar{r}_0} \quad [5.30]$$

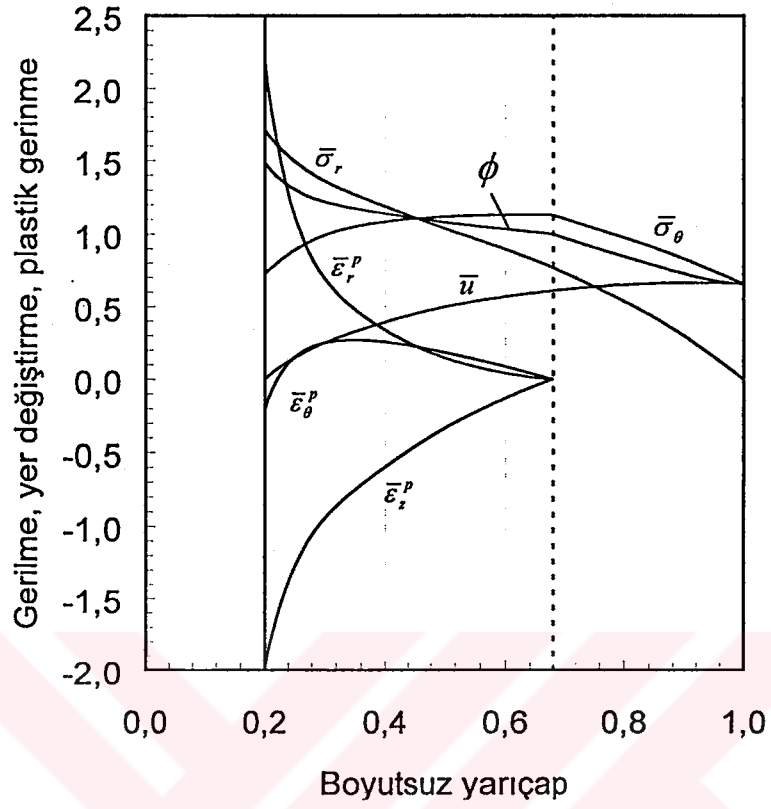
Çözüm için öncelikle, seçilen bir ϕ_1^0 değeri için $\bar{u}(\bar{r}_0) = 0$ ' ı sağlayan ϕ_2^0 değeri bulunur. Bunun için gerilmeler ϕ_1^0 cinsinden yazılırsa;

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\phi_1^0}{\bar{h}(\bar{r}_0)\bar{r}_0} \quad [5.31a]$$

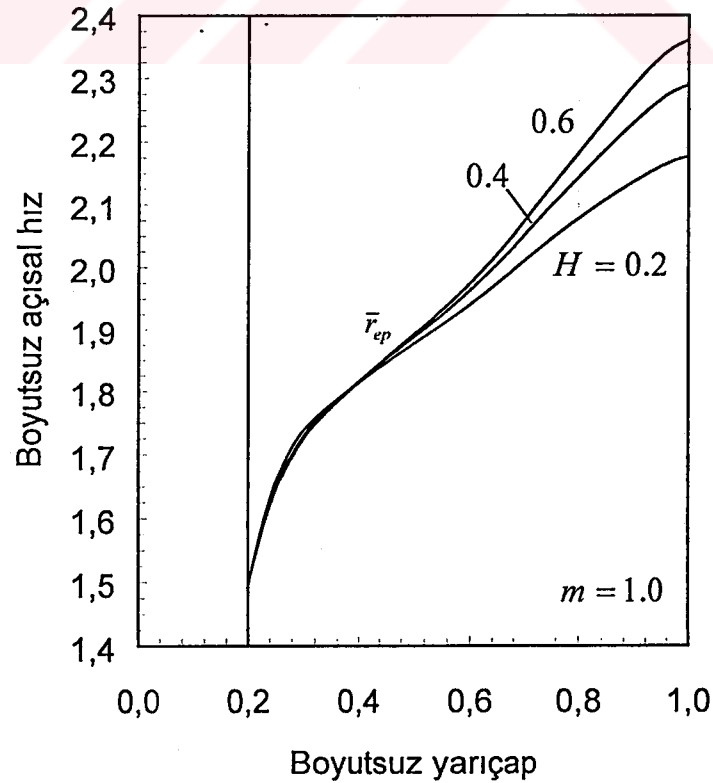
$$\bar{\sigma}_\theta = \Omega^2 \bar{r}_0^2 + \frac{1}{\bar{h}(\bar{r}_0)} \phi_2^0 \quad [5.31b]$$

Bu gerilme değerleri ve Eş.3.24 eşitliğinden hesaplanan akma gerilmesi Eş.5.9 ile verilen teğetsel gerilme ifadesinde yerine yazılıp sıfıra eşitlenirse seçilen ϕ_1^0 değerine bağlı ϕ_2^0 değeri elde edilmiş olur. Yalnız seçilen bu değer aynı zamanda diğer sınır şartı $Y(1) = 0$ ' ı da sağlaması gerekmektedir. Bunun için de Newton iterasyon metodu uygulanır.

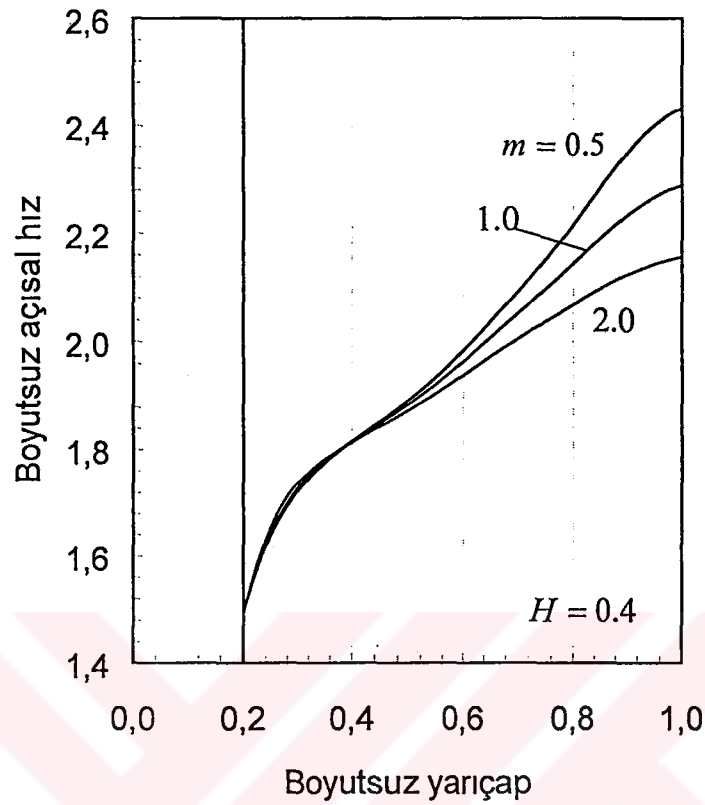
$n = 0,4$, $k = 2,4$ parametrelerine sahip diskin bu sınır şartlarında elastik-plastik gerilme dağılımını belirlemek için elastik limit hızın üstünde bir açısal hız seçilir. Bu sınır şartlarında iç yarıçap $a = 0,2$ alınarak hesaplanan elastik limit açısal hız $\Omega = 1,4925$ değerindedir. Açısal hız $\Omega = 2,0$ seçilerek elde edilen gerilme, yer değiştirme ve plastik gerilme dağılımları Şekil 5.13' de verilmiştir. Burada $H = 0,5$ ve $m = 0,2$ alınmıştır. Daha küçük m değerine sahip malzemeli diskler için hesap yapıldığında plastik gerilmelerin daha düşük olduğu belirlenmiştir. Açısal hızın değişimine bağlı olarak elastik-plastik arayüzün ilerleyişi üzerinde H ve m' in etkileri Şekil 5.14' de elde edilmiştir.



şekil 5.13. Rijid şafta sabitlenmiş disk için elastik-plastik gerilme, yer değiştirme ve plastik gerilmeler ($n = 0,4, k = 2,4 ; \Omega = 2,0$)



(a)

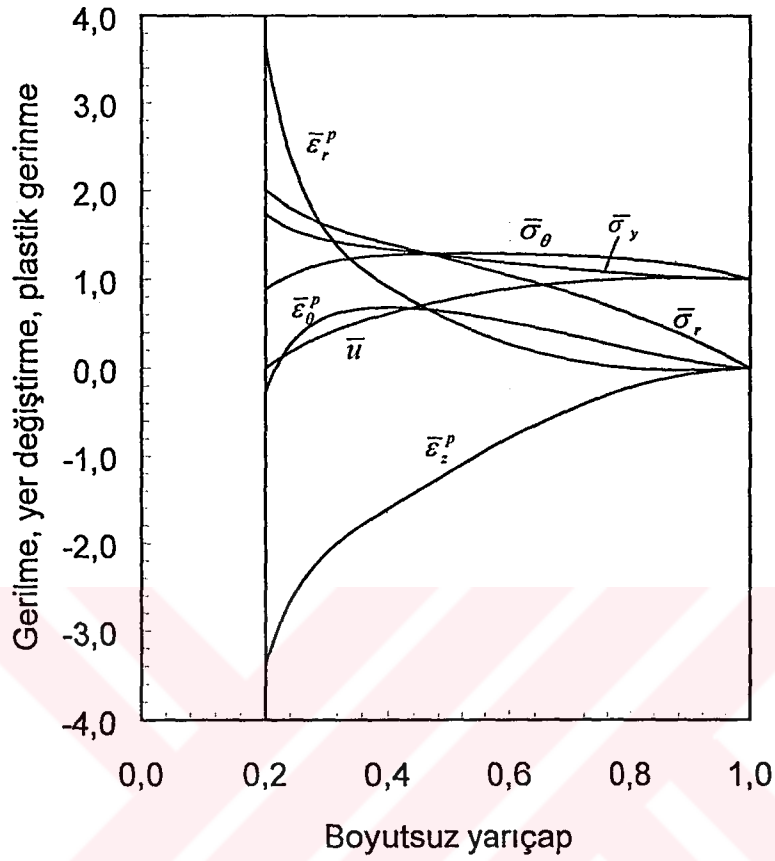


(b)

Şekil 5.14. Rijid şafta sabitlenmiş disk için elastik-plastik arayüzün (a) H ile ; (b) m ile değişimi

Şekil 5.14a ve 14b'e bakıldığında herhangi bir açılal hızda küçük H değerine sahip diskin veya büyük m değerine sahip disklerin diğerlerine göre tam plastik durumuna daha yakın olduğu görülmektedir, yani bu disklerde plastik deformasyon daha hızlı meydana gelmektedir.

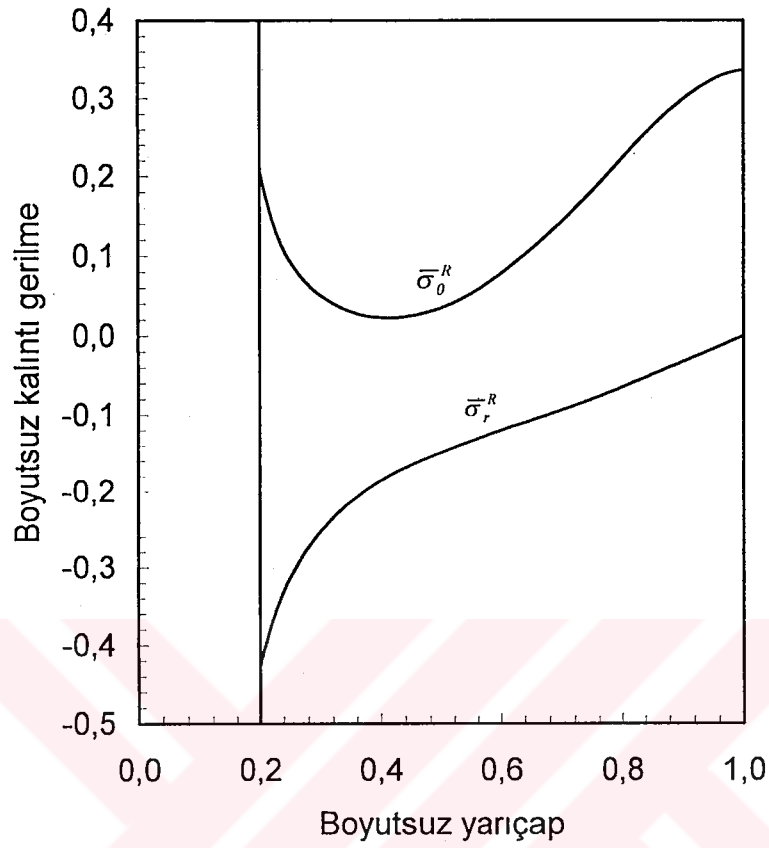
Bu şekillerde $\bar{r} = 1'$ e karşılık gelen açılal hızlar o parametreler için disklerin plastik limit açılal hızlarıdır ve bu hızlarda disklerin gerilme davranışı Şekil 5.14' de $H = 0.5$ ve $a = 0.2$ alınarak çizilmiştir.



Şekil 5.15. Rijid şafta sabitlenmiş disk için plastik limit açısal hızlarda gerilme, yer değiştirme ve plastik gerilmeler ($n=0,4, k=2,4$; $H=0.5$, $m=2,0$)

Şekil 5.15' deki tam plastik dağılımlar için plastik limit açısal $\Omega=2,1865$ olarak hesaplanmıştır.

Daha büyük bir hızdan sonra diskin durmasıyla disk içinde kalan kalıntı gerilme bileşenleri Şekil 5.16' da verilmiştir. Bu şekilde diskin durmadan önce ulaştığı hız $\Omega=2,3$ olarak alınmıştır.



Şekil 5.16. Rijid şafta sabitlenmiş diskde radyal ve teğetsel artık gerilme bileşenleri ($n = 0,4, k = 2,4$; $\Omega = 2,3$, $H = 0,5$, $m = 2,0$)

5.2.3. Sabit iç basınca maruz disk

Bu disk için sınır şartları $r = a'$ da $\sigma_r(a) = -p$ ve $r = b'$ de $\sigma_r(b) = 0$ şeklindeydi. Böylece gerilme fonksiyonu için sınır şartlarını Eş.5.11 eşitliğinden;

$$Y(\bar{r}_0) = -p\bar{r}_0\bar{h}(\bar{r}_0) \text{ ve } Y(1) = 0 \quad [5.32]$$

şeklinde yazabiliriz.

Eş.5.22 ile elde edilen ikinci derece sınır değer problemi, bu sınır şartları $\phi_1(\bar{r}) = Y(\bar{r})$ ve $\phi_2(\bar{r}) = dY(\bar{r})/d\bar{r}$ yeni değişkenleri ile ilk değer problem sistemine dönüştürülebilir.

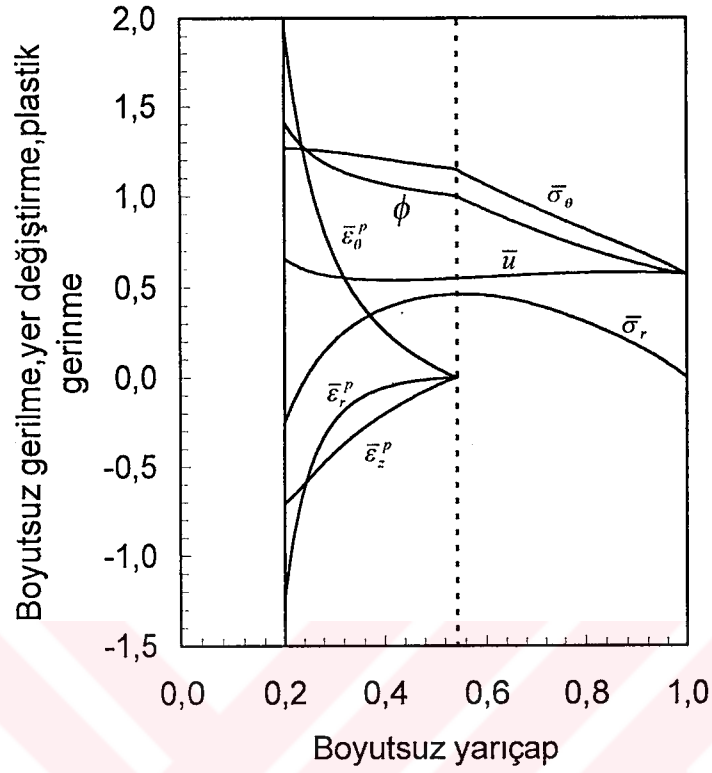
Burada ilk değerler $\phi_1(\bar{r}_0) = -p\bar{r}_0\bar{h}(\bar{r}_0)$ ve $\phi_2(0) = \left[\frac{dY(\bar{r})}{d\bar{r}} \right]_{\bar{r}=\bar{r}_0}$, dir. $\bar{r} = \bar{r}_0$ da

$\frac{dY}{d\bar{r}}$ değeri bilinmediği için diğer sınır şartı $Y(1) = 0$ ı sağlayacak $dY/d\bar{r}$ değeri daha önceki çözüm yolu izlenerek hesaplanır. Burada da $\Delta_\phi, 10^{-3}$ ve $\varepsilon_T, 10^{-9}$ mertebesinde seçilmiştir.

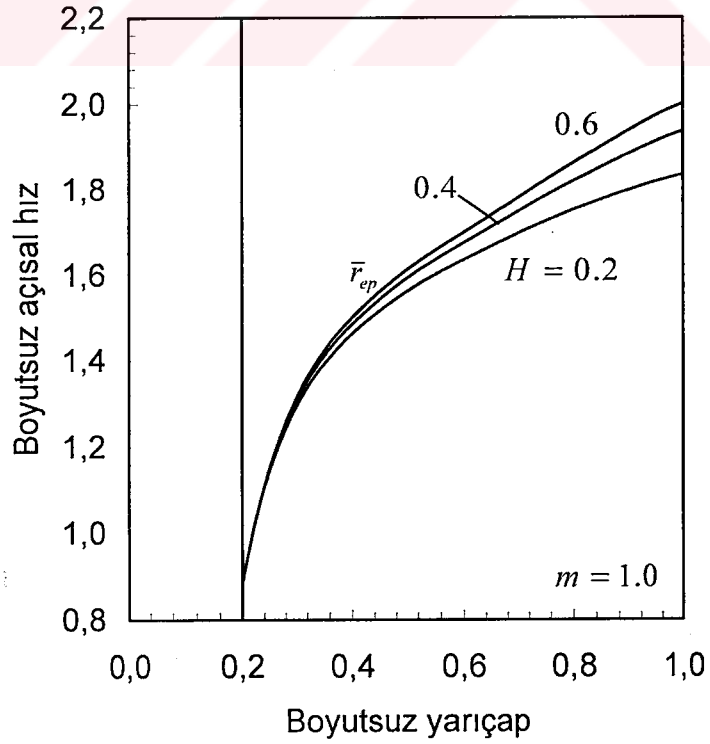
Diğer bölümlerde incelenen $n = 0,4$, $k = 2,4$, $a = 0,2$ geometrisindeki bir diskin bu sınır şartında elastik limit açısal hızı $\Omega = 0,8852$ olarak hesaplanmıştır. Bu açısal hız değerinin üzerinde seçilen $\Omega = 1,6$ açısal hızında, $H = 0,5$ ve $p = 0,25$ alınarak elde edilen elastik-plastik gerilmeler, yer değiştirmeler ve plastik genlemeler Şekil 5.17' de verilmiştir.

Burada da diğer sınır şartlarındaki disklerde olduğu gibi aynı açısal hızlarda yüksek m değerindeki disklerin plastik genleme bileşenlerinin daha büyük değerlerde ve plastik deformasyon bölgelerinin daha geniş olduğu söylenebilir.

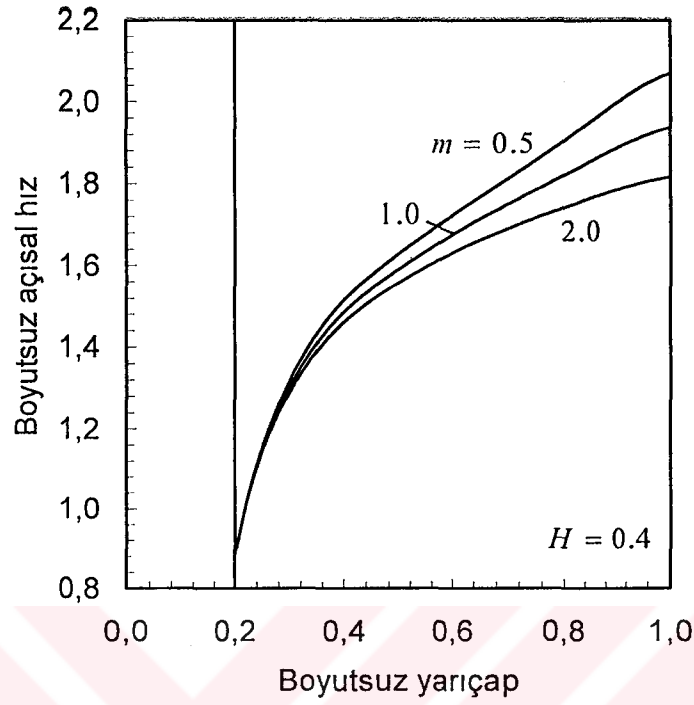
Hıza bağlı olarak elastik-plastik arayüzün ilerleyişinin gerinme pekleşmesi parametreleri ile değişimi Şekil 5.18' de verilmiştir. Elastik-plastik arayüzün tam disk ucuna ulaştığı açısal hız değerinde diskin gerilme, yer değiştirme ve gerinme dağılımı Şekil 5.19' da verilmiştir. Bu hız $\Omega = 1,8422$ olarak hesaplanmıştır.



Şekil 5.17. Sabit iç basınca maruz disk için elastik-plastik gerilme, yer değişime ve plastik gerilme ($n = 0,4$, $k = 2,4$, $p = 0,25$)

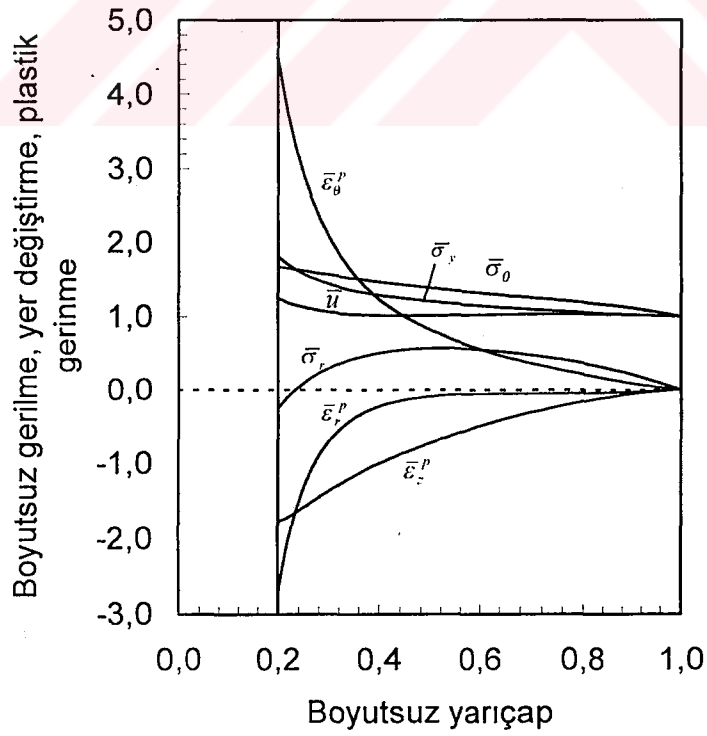


(a)



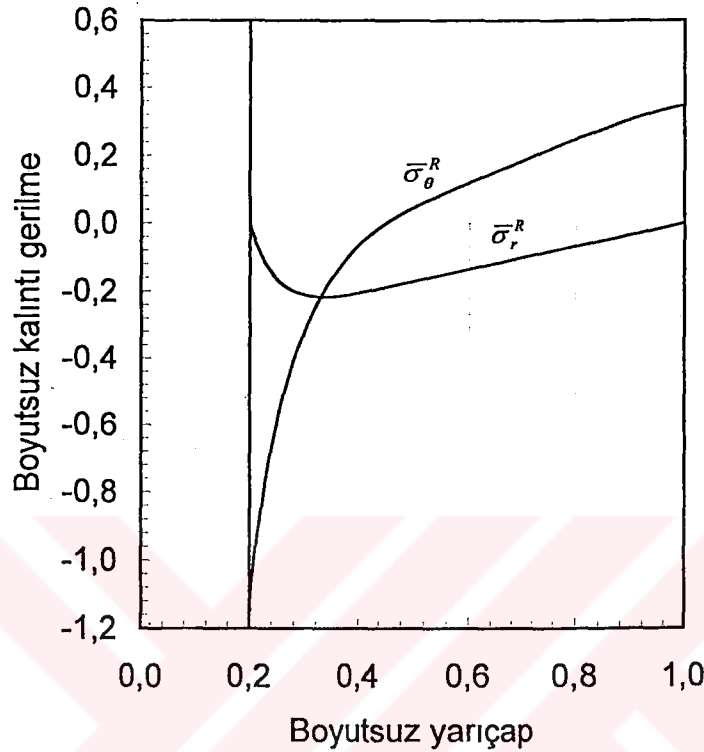
(b)

Şekil 5.18. Sabit iç basınca maruz disk için elastik-plastik arayüzün
(a) H ile ; (b) m ile değişimi



Şekil 5.19. Sabit iç basınca maruz disk için plastik limit açısal hızlarda gerilme, yer değiştirme ve plastik gerilmeler ($n = 0.4, k = 2.4$; $m = 2.0, H = 0.5, p = 0.25$)

Açısal hız $\Omega = 2,0$ den sonra diskin durmasıyla disk içinde mevcut kalan kalıntı gerilmeler Şekil 5.20' de verilmiştir.



Şekil 5.20. Sıkı geçme ile şafta bağlı diskde radyal ve teğetsel kalıntı gerilme bileşenleri ($n = 0,4, k = 2,4 ; \Omega = 2,0, H = 0,5, m = 2,0$)

5.3. Elastik-Plastik Bölgede Parametrik Analiz

Bu bölümde diskin geometrik parametrelerine ek olarak H ve m pekleşme parametrelerinin diskde plastik limit açısal hızlar üzerindeki etkisi gösterilmiştir.

Bölüm 4.3' de akma başlangıcına kadar olan hızlarda en büyük gerilme bileşenlerinin sabit kalınlıklı ($n = 0$) disklerde meydana geldiği gösterilmiştir. Dört farklı sınır şartında sabit kalınlıklı diskin tam plastik deforme olduğu açısal hızda farklı n değerine sahip diskler için plastik gerilme bileşenlerinin yanında plastik gerilmeler de elde edilip karşılaştırılmaları grafik olarak aşağıda verilmiştir:

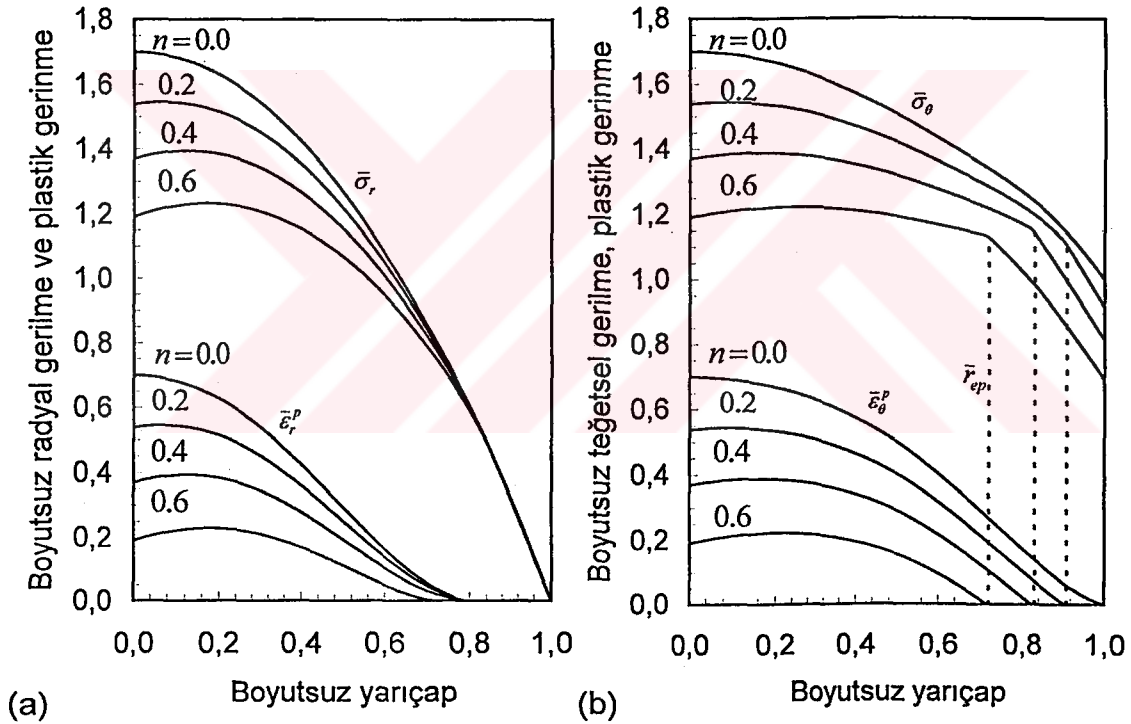
Bunun için öncelikle her sınır şartı için sabit kalınlıklı diskin tam plastik deforme olduğu plastik limit açısal hızlar hesaplanmıştır. Bu hızlarda gerilme ve gerinme dağılımları elde edilirken $k = 1,0$ (lineer profil), $m = 1,0$ ve $H = 0,5$ alınmıştır. Sınır şartları için hesaplanan limit hızlar ;

İçi dolu disk ; $\Omega = 2,0950$ Şekil 5.21

Uçları serbest disk ; $\Omega = 1,9009$ Şekil 5.22

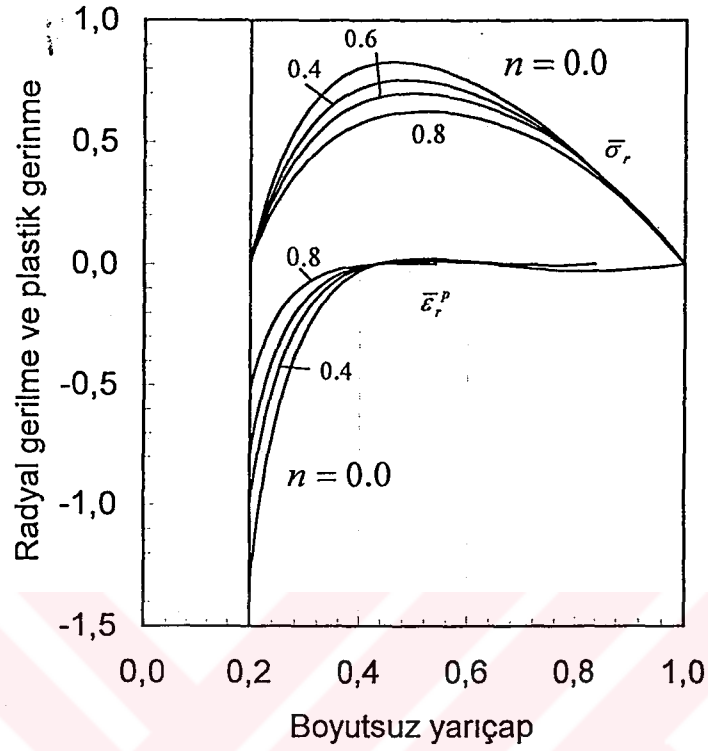
Rijid şafat sabitlenmiş disk ; $\Omega = 2,1743$ Şekil 5.23

Sıkı geçme ile şafta bağlı disk ; $\Omega = 1,8635$ Şekil 5.24

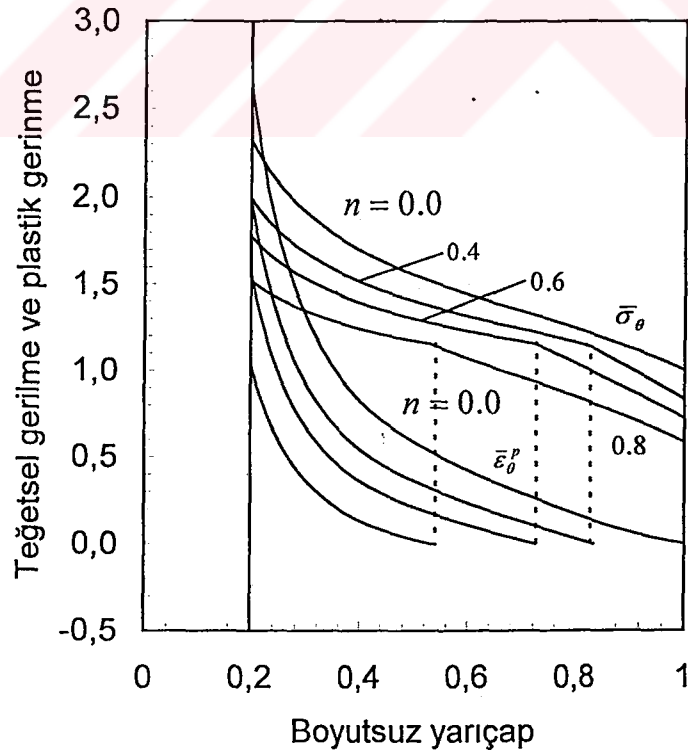


Şekil 5.21. İçi dolu disk için sabit kalınlıklı diskin plastik limit açısal hızında, (a) radyal, (b) teğetsel gerilme ve plastik gerinmeler

İçi dolu disk için çizilen bu şekile bakıldığında elastik deformasyonlarda olduğu gibi burada da en büyük gerilme ve plastik gerinme bileşenleri sabit kalınlıklı disklerde meydana gelmektedir. Şekilden görüldüğü gibi sabit kalınlıklı disk tam plastik deforme olduğunda diğer disklerin bir bölümünde hala elastik deformasyonlar geçerlidir. Diğer sınır şartları için gerilme ve plastik gerinme bileşenleri Şekil 5.22, Şekil 5.23, Şekil 5.24' de verilmiştir.

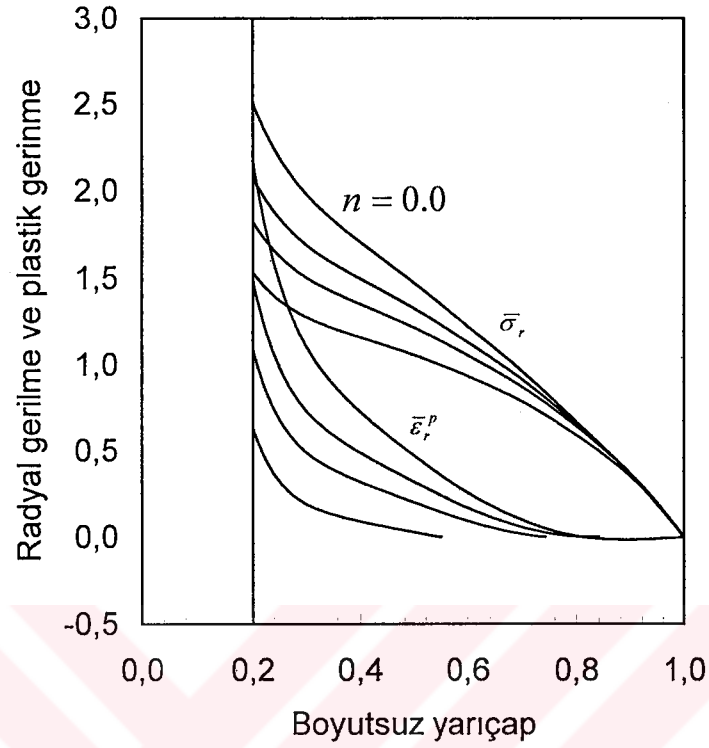


(a)

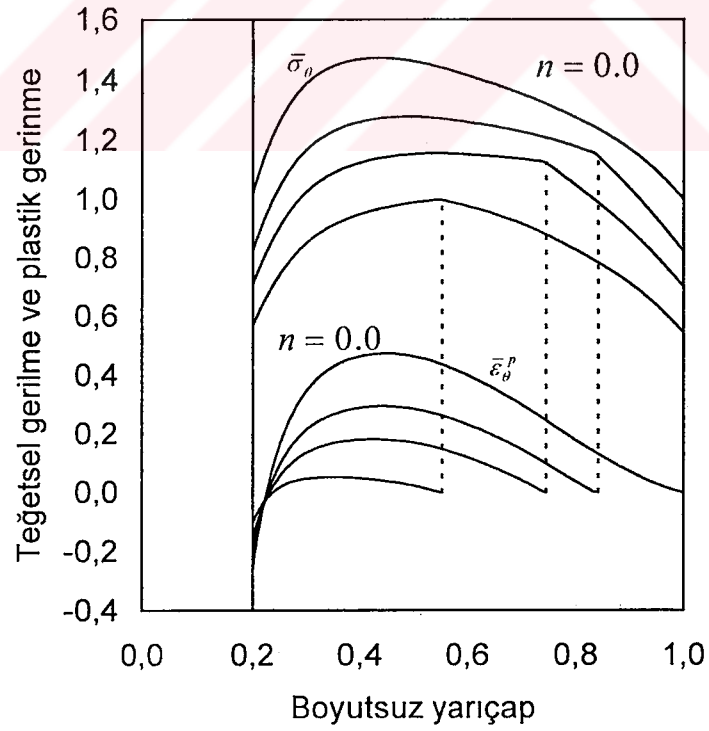


(b)

Şekil 5.22. Uçları serbest disklerde sabit kalınlıklı diskin plastik limit açısal hızında, (a) radyal, (b) teğetsel gerilme ve plastik gerilmeler

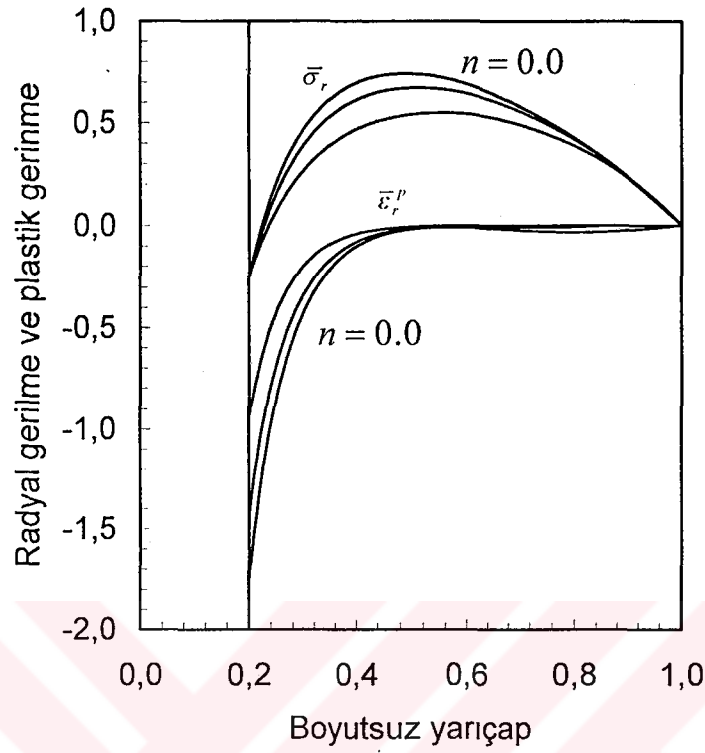


(a)

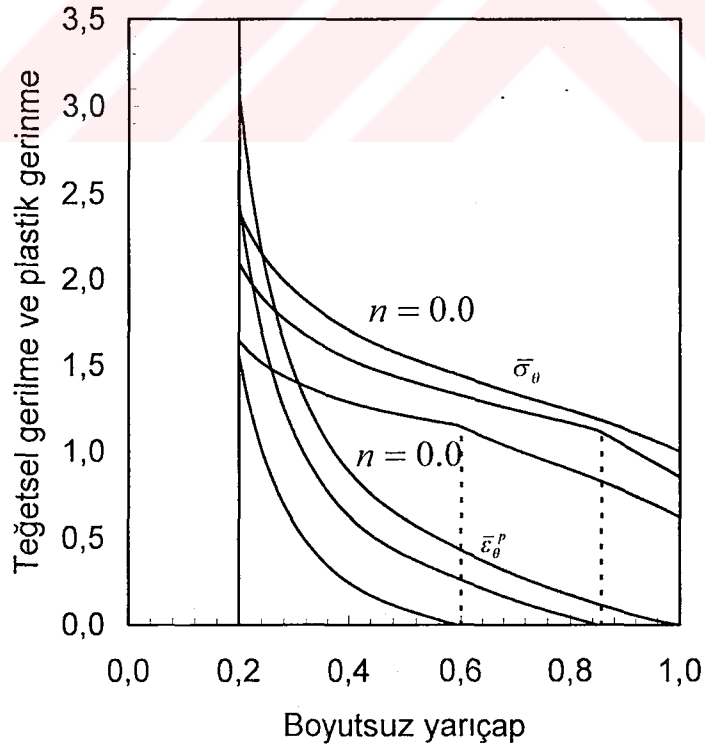


(b)

Şekil 5.23. Rijid şafta sabitlenmiş disklerde sabit kalınlıklı diskin plastik limit açısal hızında, (a) radyal, (b) teğetsel gerilme ve plastik gerilmeler



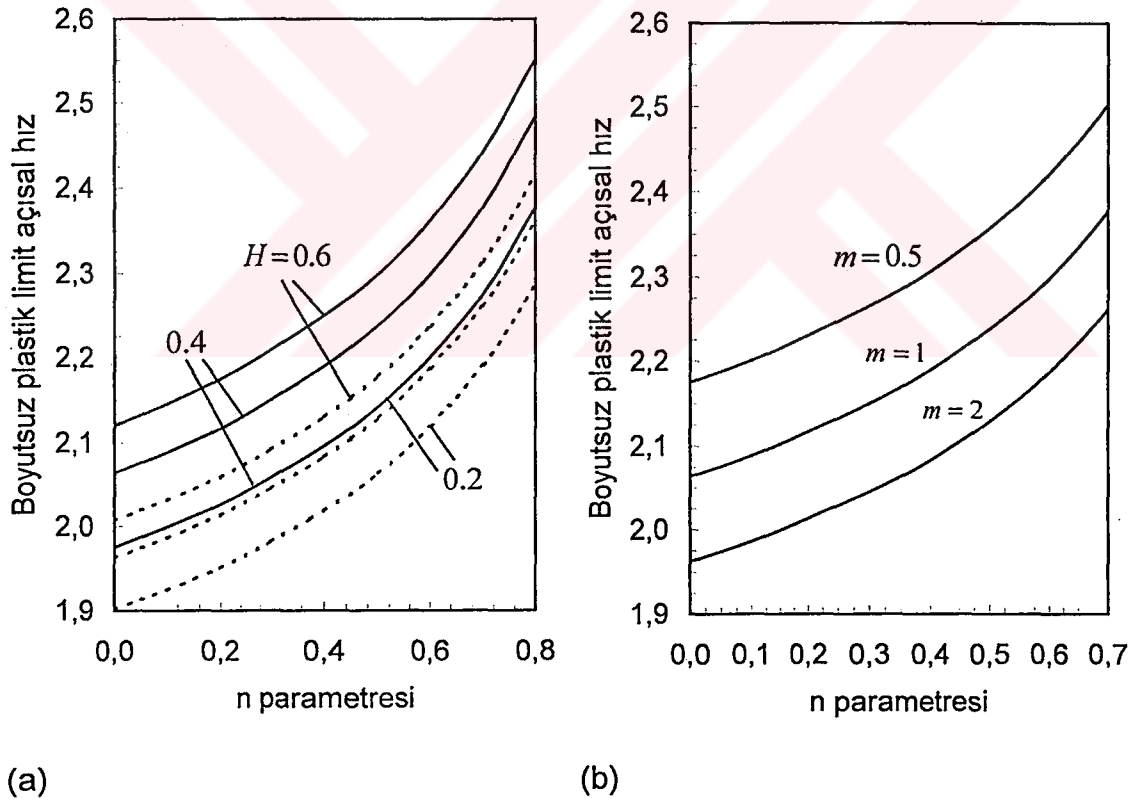
(a)



(b)

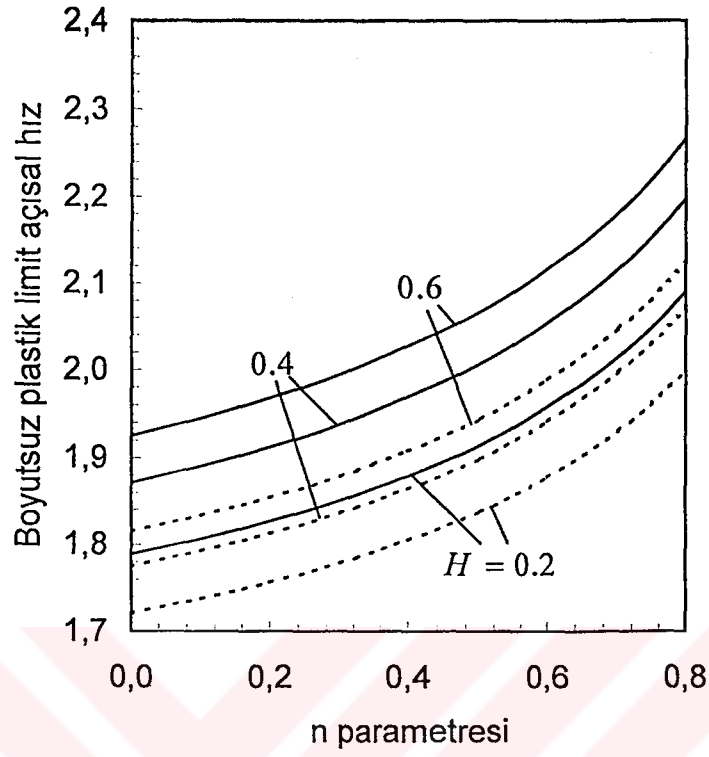
Şekil 5.24. Sabit iç basınca maruz disklerde sabit kalınlıklı diskin plastik limit açılma hızında (a) radyal, (b) teğetsel gerilme ve plastik gerilmeler

Şekil 5.25' de içi dolu diskler için H ve m parametrelerinin plastik limit açısai hızlara etkisi lineer profil ($k=1.0$) için elde edilmiştir. Şekil 5.25a' da $m=1.0$ (düz çizgi) ve $m=2.0$ (kesikli çizgi) alınarak farklı H değerlerinde plastik limit açısai hızlar elde edilmiştir. Görüldüğü gibi aynı koşullarda yüksek H değerine sahip diskin plastik limit açısai hızı daha yüksektir. Şekil 5.25b' de ise $H=0.5$ değerinde farklı m değerleri için plastik limit açısai hızlar elde edilmiştir, bu şekilden de anlaşıldığı gibi aynı koşullarda m değeri küçük olan disklerin plastik limit açısai hızları daha yüksektir. Ayrıca her H ve m değeri için n değeri arttıkça plastik limit açısai hızın da arttığı görülmektedir.

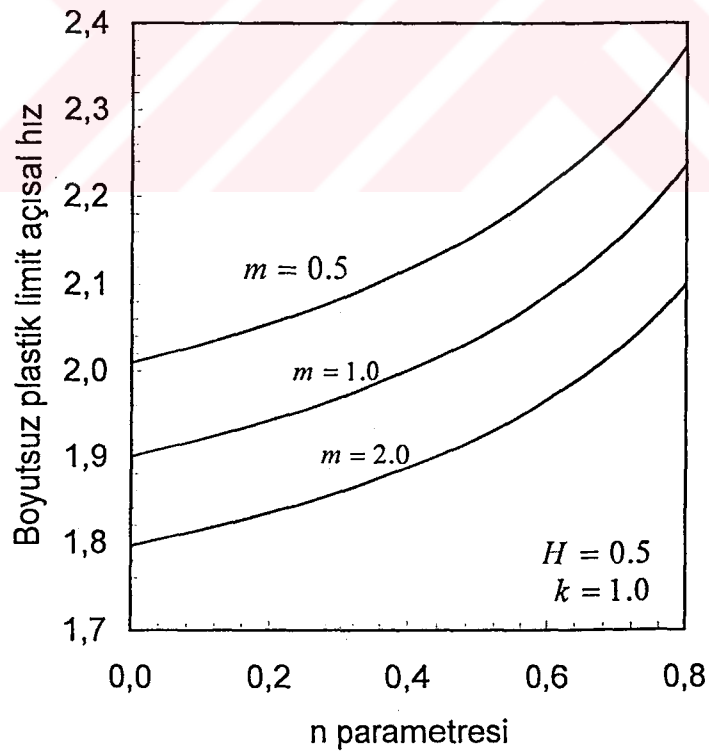


Şekil 5.25. İçi dolu diskde (a) H ' in, (b) m ' in plastik limit açısai hızı etkisi

Gerinme pekleşmesi parametrelerinin diğer sınır şartlarında plastik limit açısai hızlara etkileri Şekil 5.26' de uçları serbest diskler, Şekil 5.27' de rijid şafta sabitlenmiş diskler için, Şekil 5.28' de sıkı geçme ile sabitlenmiş diskler için verilmiştir.

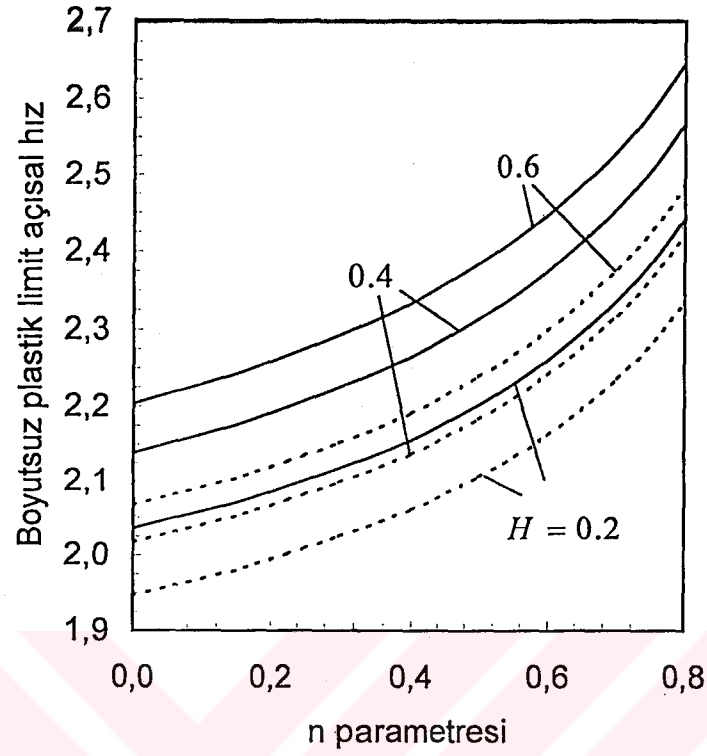


(a)

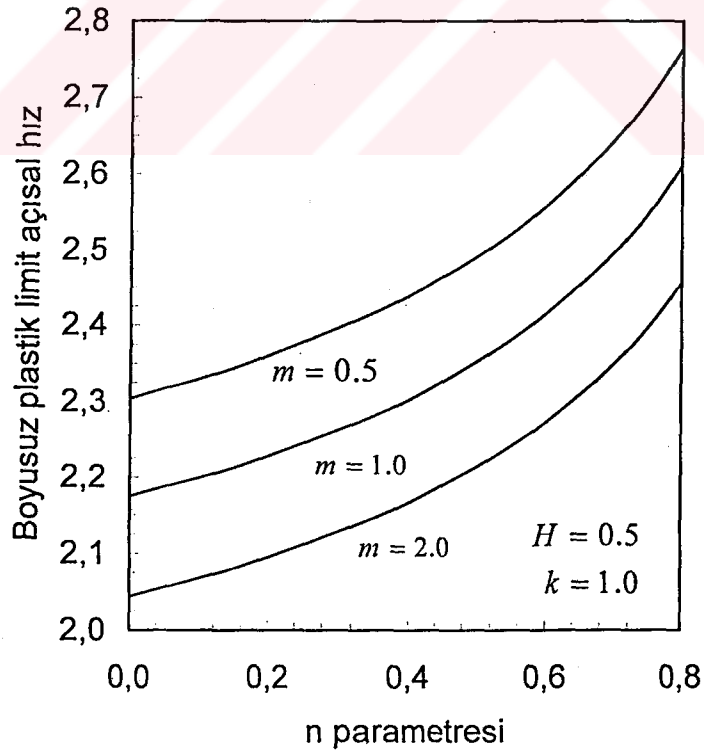


(b)

Şekil 5.26. Uçları serbest diskde (a) H' in, (b) m' in plastik limit açisal hıza etkisi

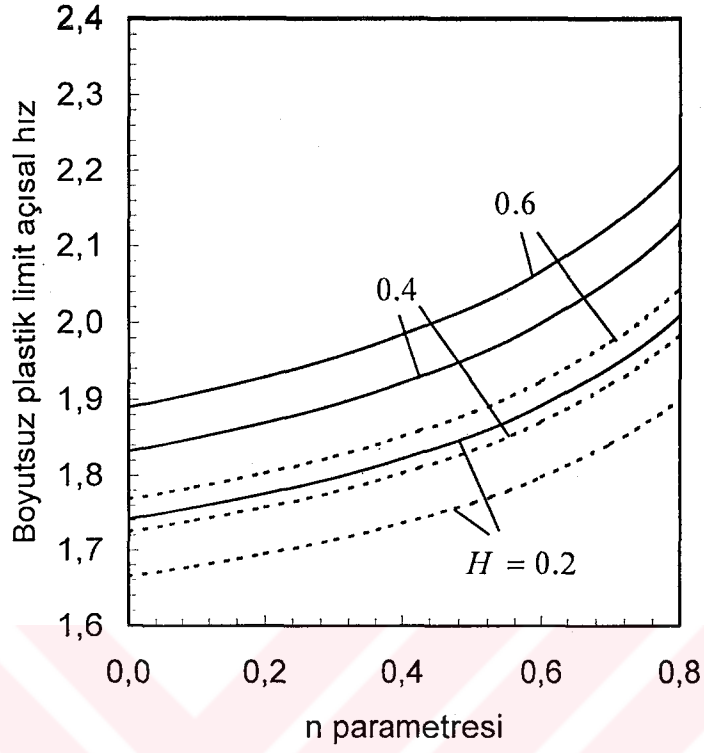


(a)

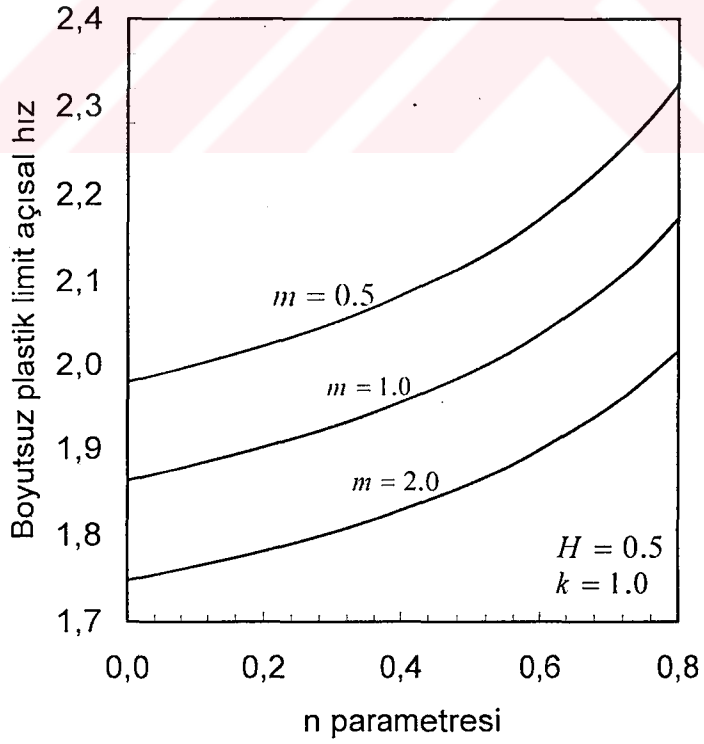


(b)

Şekil 5.27. Rijid şafta sabitlenmiş diskde (a) H' in, (b) m' in plastik limit açışal hıza etkisi



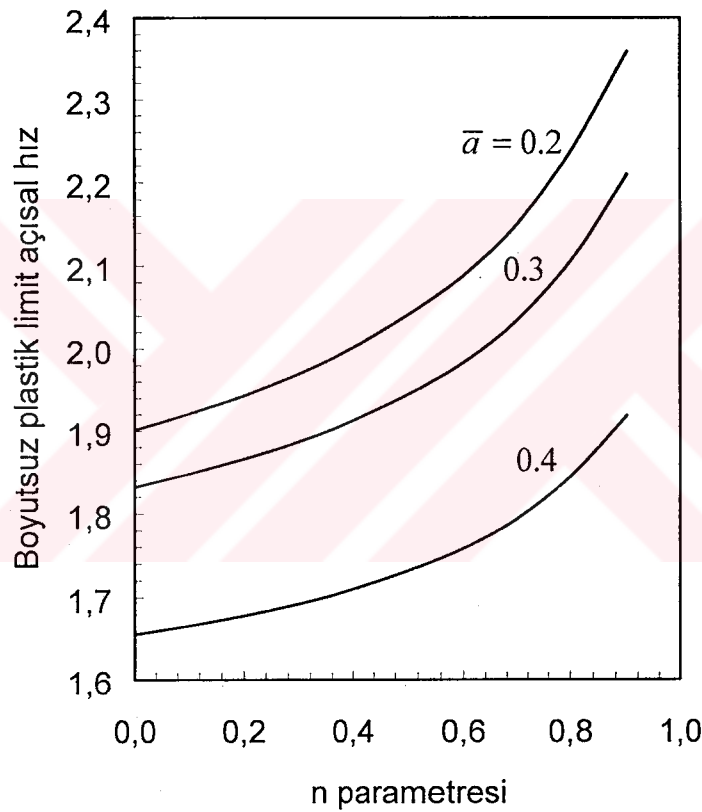
(a)



(b)

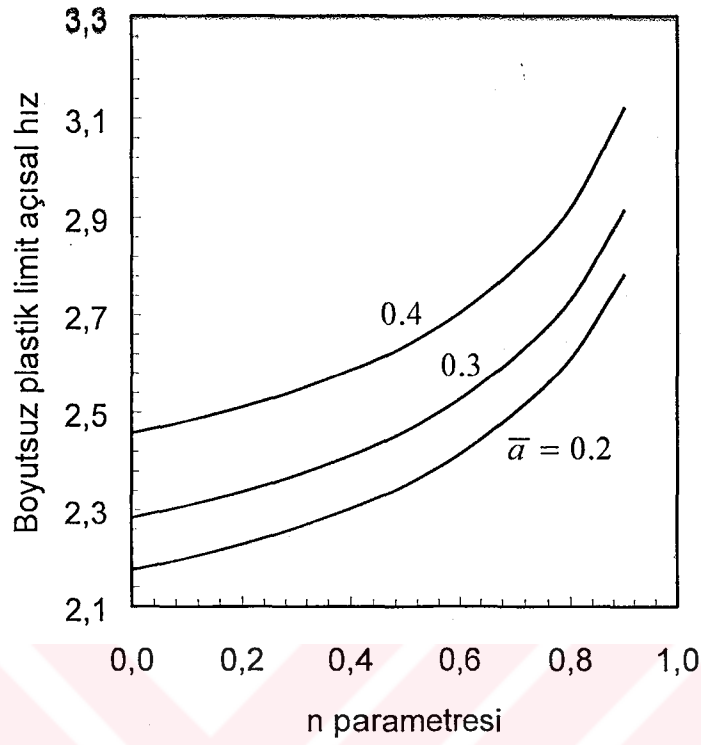
Şekil 5.28. Sabit iç basınca maruz diskde (a) H ' in, (b) m ' in plastik limit açışal hıza etkisi

İç boş disklerde iç yarıçapı farklı olan disklerde plastik deformasyonun başladığı açısal hızın değişimi elastik çözümde incelenmişti. Burada da iç yarıçapın diskin tam plastik deforme olmasına etkisi incelenmiştir. Şekil 5.29' da uçları serbest disk, Şekil 5.30' da rijid şafta sabitlenmiş disk ve Şekil 5.31' de sabit iç basınca maruz diskler için iç yarıçapın plastik limit açısal hızı etkisi verilmiştir. Bu şekiller elde edilirken $H = 0.5$ ve $m = 1.0$ alınmıştır.

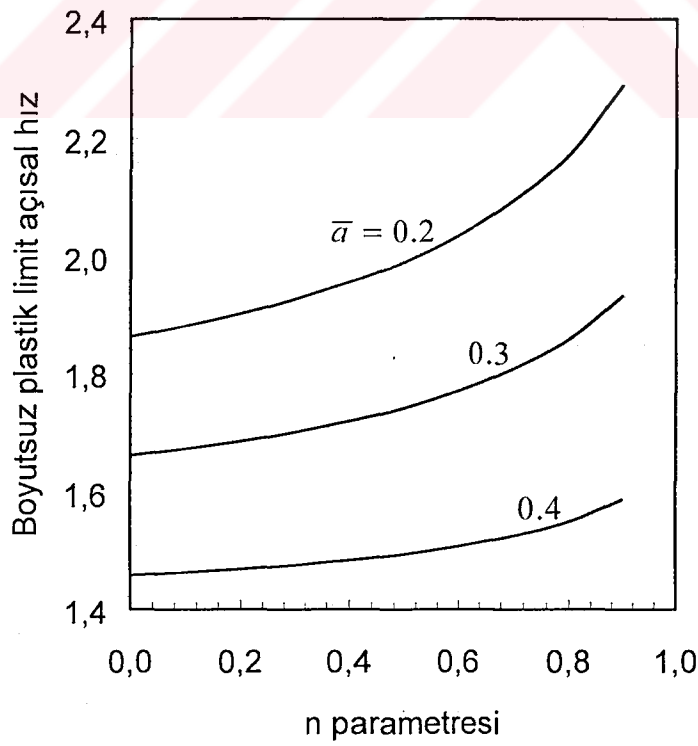


Şekil 5.29. Uçları serbest disklerde iç yarıçapın plastik limit açısal hızlara etkisi

Şekil 5.29' dan iç yarıçapı küçük ve ucu ince (büyük n) olan disklerin plastik limit açısal hızlarının diğerlerinden yüksek olduğu görülmektedir. Şekil 5.30' da ise diğer disklerin aksine rijid şafta sabitlenen diskler için iç yarıçapı büyük ve ucu ince (büyük n) olan disklerin plastik limit açısal hızlarının diğerlerinden yüksek olduğu görülmektedir.



Şekil 5.30. Rijid şafta sabitlenmiş disklerde iç yarıçapın plastik limit açısai hızlara etkisi



Şekil 5.31. Sabit iç basınca maruz disklerde iç yarıçapın plastik limit açısai hızlara etkisi

6. SONUÇ

Bu çalışmada elde edilen elastik-plastik gerilme analizi sonucunda farklı sınır şartlarına sahip dönen içi dolu ve içi boş diskler için disk geometrisi ve disk malzemesiyle ilgili parametrelerin diskin elastik-plastik davranışını önemli ölçüde değiştirdiği gözlenmiştir.

Özellikle içi dolu disklerde bazı geometrilerin disk içinde farklı gerilme dağılımına neden olduğu görülmüştür. Bazı geometriler akmanın, diskin tam simetri ekseninde bazıları ise simetri ekseninden uzak kısımlarda başlamasına neden olmaktadır.

Her sınır şartı için yapılan parametrik analizler diskin çalışma ortamına göre en uygun şekilde geometrisinin ve malzeme özelliklerinin seçilebilmesine imkan sağlamaktadır. Kalınlığı değişken tüm disklerde aynı çalışma ortamında sabit kalınlıklı disklerle göre daha küçük gerilmeler meydana geldiği gözlenmiştir. Özellikle disk ucunu değiştiren n parametresinin artması disk içinde gerilme bileşenlerinin daha küçük değerlerde olmasını sağlamaktadır.

Aynı zamanda içi boş diskler için, iç yarıçap değeri arttırıldıkça aynı geometrik parametreler için diskin plastik deformasyon bölgesine geçmesine neden olacak açısal hız değerlerinin küçüldüğü gözlenmiştir. Yalnız bu hızlardan sonra disklerin tam plastik deforme olmasına neden olacak açısal hızlar için sonuçlar elde edildiğinde rijid şafta sabitlenen diskler için iç yarıçapı küçük olan disklerde bu limit hızların daha küçük olduğu gözlenmiştir. Buradan bu limit hız değerlerine yakın hızlarda çalışacak rijid şafta sabitlenmiş diskler için iç yarıçapın çalışma ortamına uygun şekilde büyük seçilmesi diskin daha dayanıklı olmasını sağlar. Bu şart dışında diğer disklerde disk ucu ince olan ve iç yarıçapı büyük olan diskler seçildiğinde aynı koşullarda daha dayanıklı diskler elde edilmiş olur.

Disk malzemesiyle ilgili parametrelerin etkilerine bakıldığında ise H değeri büyük, m değeri küçük malzemeli disklerin daha dayanıklı olduğu görülmüştür.



KAYNAKLAR

1. Timoshenko, S.P. and Gooider, J.N., "Theory of Elasticity", 3rd Edition, **McGraw Hill**, New York: 26, 55-60 (1970).
2. Rees, D.W.A., "The Mechanics of Solids and Structures", **McGraw Hill**, New York (1990).
3. Uğural, A.C. and Fenster, S.K., "Advanced Strength and Applied Elasticity", 3rd Edition, **Prentice Hall International**, London: 114-118, 327-345 (1995).
4. Gamer, U., "Elastic-Plastic Deformation of the Rotating Solid Disk", **Ingenieur-Archiv**, 54: 345-354 (1984).
5. Gamer, U., "Stress Distribution in the Rotating Elastic-Plastic Disk", **ZAMM**, 65(4): 136-137 (1985).
6. L.H.You, S.Y.Long, J.J.Zhang, "Perturbation Solution of Rotating Solid Disks With Nonlinear Strain-Hardening", **Mechanics Research Communications**, 24(6): 649-658 (1997).
7. Güven, U., "On the applicability of Tresca's Yield Condition to the Linear Hardening Rotating Solid Disk of Variable Thickness", **ZAMM**, 75: 397-398 (1995-a).
8. Güven, U., "Tresca's Yield Condition and the Linear Hardening Rotating Solid Disk of Variable Thickness", **ZAMM**, 75: 805-807 (1995-b).
9. Eraslan, A.N. and Orcan, Y., "Elastic-Plastic Deformations of a Rotating Solid Disk of Exponentially Varying Thickness", **Mechanics of Materials**, 34: 423-432 (2002).
10. Orcan, Y. and Eraslan, A.N., "Elastic-Plastic Stresses in Linearly Hardening Rotating Solid Disks of Variable Thickness", **Mechanics Research Communications**, 29: 269-281 (2002).
11. Eraslan, A.N. and Orcan, Y., "On the Rotating Elastic-Plastic Solid Disks of Variable Thickness Having Concave Profiles", **International Journal of Mechanical Sciences**, 44: 1445-1466 (2002).
12. Güven, U., "Elastic-Plastic Stresses in a Rotating Annular Disk of Variable Thickness and Variable Density", **International Journal of Mechanical Sciences**, 34(2): 133-138 (1992).

13. Güven, U., "Elastic-Plastic Stress Distribution in a Rotating Hyperbolic Disk With Rigid Inclusion", *International Journal of Mechanical Sciences*, 40: 97-109 (1998).
14. Eraslan, A.N. and Argeso, H., "Limit Angular Velocities of Variable Thickness Rotating Disks", *International Journal of Solids and Structures*, 39: 3109-3130 (2002).
15. Abramowitz, M. and Stegun A.I. (Eds.), "Handbook of Mathematical Functions". *US Government Printing Office*. Fifth Printing. Washington (1966).
16. Alexander Mendelson, "Plasticity: Theory and Application". *The Macmillan Company*, New York , Collier-Macmillan Limited, London:70-77,100-108 (1968).
17. Akhtar S.Khan, Sujian Huang, "Continuum Theory of Plasticity". *John Wiley & Sons, Inc*: 9-11(1995).

ÖZGEÇMİŞ

Tunç Apatay 20 Eylül 1977 tarihinde Ankara' da doğdu. İlk öğrenimini 1983-1988 yılları arasında Mimar Kemal İlkokulunda, orta ve lise öğrenimini 1988-1994 yılları arasında Kocatepe Mimar Kemal Lisesinde tamamladı. Lisans eğitimini, 1994-2000 yılları arasında (1994-1995 İngilizce hazırlık) Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü' nde bitirdi. Eylül 2000 tarihi itibariyle Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Makina Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans eğitimime başladı. Kasım 2001 tarihinde Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı.

