

**DEĞİŞKEN KATSAYILI KİSMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI**

ÖMER TANTAŞ

ŞUBAT 2025

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DEĞİŞKEN KATSAYILI KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI**

ÖMER TANTAŞ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
DOKTORA TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

ŞUBAT 2025

DIYARBAKIR

DEĞİŞKEN KATSAYILI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

Ömer TANTAŞ tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Prof. Dr. Necat POLAT
Danışman, **Matematik Bölümü,**
Dicle Üniversitesi

Sınav Jürisi:

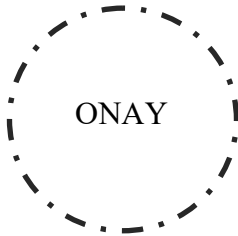
Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV (*)
Matematik Bölümü, Bahçeşehir Üniversitesi

Prof. Dr. Necat POLAT (**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Enver AYDIN
Fizik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Doç. Dr. Asif YOKUŞ
Matematik Bölümü, Fırat Üniversitesi

Doç. Dr. Hatice TAŞKESEN
Matematik Bölümü, Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi



Savunma Tarihi: 05/02/2025

(*) Jüri Başkanı.
(**) Tez Danışmanı.

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Ömer TANTAŞ

İmza:

TEŞEKKÜR

Öncelikle danışmanım Prof. Dr. Necat POLAT'a çalışmanın daha fikir aşamasından tez taslağındaki düzeltmeler konularına kadar gösterdikleri destek ve sabırdan dolayı teşekkür ederim. Jüri üyelerime de bu tezin daha nitelikli bir hale gelmesi için yaptıkları eleştiri ve önerileri için teşekkür ederim.

Bana olan desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	4
3. MATERYAL VE METOT	6
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	7
4.1 Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Hemen Hemen Doğrusal Parabolik Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı	7
4.2 Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı (t Çarpımlı) Hemen Hemen Doğrusal Parabolik Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı	24
4.3 Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı (t^m Çarpımlı) Hemen Hemen Doğrusal Parabolik Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı	42
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	55
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	57

ÖZET

DEĞİŞKEN KATSAYILI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN MATEMATİKSEL DAVRANIŞI

TANTAŞ, Ömer

Doktora, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Necat POLAT

Şubat 2025, 65 sayfa

Bu tezde, yüksek mertebeden sabit ve değişken katsayılı hemen hemen doğrusal parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin bir sınıfı için başlangıç ve sınır değer probleminin varlığı ve tekliği incelendi. Çözümün ön kestirimlerine dayanılarak, uygun koşullar altında Fourier serisi formunda zayıf çözümün varlığı kanıtlandı. Bu amaçla Picard ardışık yaklaşım yöntemi kullanıldı. Ayrıca zayıf çözümün tekliği de ispatlandı.

Anahtar Kelimeler: Yüksek Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklem, Hemen Hemen Doğrusal Kısmi Diferansiyel Denklem, Başlangıç Değer Problemi, Sınır Değer Problemi, Varlık, Teklik, Picard Yöntemi, Fourier Serisi Yöntemi, Özfonksiyon Açılım Yöntemi

ABSTRACT

MATHEMATICAL BEHAVIOR OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

TANTAŞ, Ömer

Doctorate, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Necat POLAT

February 2025, 65 pages

In this thesis, we study the existence and uniqueness of the initial and boundary value problem for a class of higher order semilinear parabolic partial differential equations with constant and variable coefficient. Based on the priori estimates of the solution, the existence of the weak solution in the form of Fourier series under suitable conditions is proved. For this purpose Picard's successive approximation method is used. Also, the uniqueness of the weak solution is proved.

Keywords: Higher Order Partial Differential Equation, Semilinear Partial Differential Equation, Initial Value Problem, Boundary Value Problem, Existence, Uniqueness, Picard's Method, Fourier Series Method, The Method of Eigenfunction Expansion

1. GİRİŞ

Mühendislik, Fizik ve diğer uygulamalı bilimlerin birçok dalında karşımıza çıkan dinamik sistemlerin ve problemlerin kısmi diferansiyel denklemler ile ifade edilebilmesinden dolayı kısmi diferansiyel denklemler teorisi matematiğin çalışma alanları içinde ağırlığını hissettirmekte ve önemli bir yer tutmaktadır. Kısmi diferansiyel denklemler günümüzde doğanın temel kanunlarının matematiksel modellerle formüllendirilmesinde, uygulamalı matematiğin geniş bir alanında, matematiksel fizikte birden çok değişkene bağlı kapsamlı değişik problemlerin matematiksel olarak analizinde ve mühendislikte karşımıza çıktıklarından dolayı matematiksel birçok bilimde, özellikle fizik, geometri ve analizde merkezi bir rol oynar. Bugün matematiksel fizikte birçok problem kısmi diferansiyel denklemlere uygun başlangıç ve / veya sınır koşulları verilerek tanımlanabilmektedir. Bu problemler, verilen ek koşullara bağlı olarak başlangıç, sınır veya başlangıç ve sınır değer problemleri olarak adlandırılmaktadır. Bütün fiziksel teoremlerin temeli kısmi diferansiyel denklemlere dayanmaktadır. Diferansiyel denklemler teorisi, matematiksel disiplinler içerisinde en önemlisidir [1].

Genel olarak ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler hiperbolik, parabolik ve eliptik olmak üzere üç sınıfta toplanırlar. Daha yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemler için de her ne kadar ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerde olduğu kadar kolay belirlenemese de benzer sınıflandırma bulunmaktadır.

Bugün elimizde bulunan birçok teorik ve uygulamalı çalışma iki veya daha yüksek mertebeli kısmi diferansiyel denklemler içermektedir. Bu denklemleri barındıran bazı klasik ve klasik olmayan problemlerin çözümleri için daha geniş bilgi almak isteyenler [2], [3], [4], [5], [1], [8], [9], [10], [11], [12], [13] kaynaklarına ve bunların içindeki referanslara başvurabilir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan giriş bölümünden sonra, bizim üzerinde çalıştığımız denkleme benzer daha önce yapılan çalışmalara değindiğimiz Önceki Çalışmalar adını alan ikinci bölümde, ele alınan konu ve denklemler ile ilgili var olan literatürün özeti verilmiştir.

Sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, tanımlar, eşitsizlikler, uzaylar ve teoremler ile ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemini içeren başlangıç ve / veya sınır değer problemi için bazı teoremler ve buna örnekler ile problemin değişkenlerine ayrılması (Fourier serisi) yöntemiyle çözümüne ilişkin kaynaklara Materyal ve Metod adını verdiğimiz üçüncü bölümde yer verilmiştir. Araştırma Bulguları

olarak adlandırılan dördüncü bölüm ise tezin orijinal kısmıdır. Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısımda sınırlı bölgede yüksek mertebeden hemen hemen doğrusal sabit katsayılı parabolik tipten aşağıdaki denklem için başlangıç ve sınır değer problemi ele alınmıştır:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^k \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x, t, u).$$

Burada $k \geq 1$ doğal sayılar, $f(x, t, u)$, $\bar{\Omega} \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde verilmiş fonksiyon ve $u = u(x, t)$ problemin çözümüdür.

İkinci kısımda sınırlı bölgede yüksek mertebeden hemen hemen doğrusal değişken katsayılı (t li) parabolik tipten aşağıdaki denklem için başlangıç ve sınır değer problemi ele alınmıştır:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^k t \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x, t, u).$$

Burada $k > 1$ doğal sayılar, $f(x, t, u)$, $\bar{\Omega} \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde verilmiş fonksiyon ve $u = u(x, t)$ problemin çözümüdür.

Üçüncü kısımda sınırlı bölgede yüksek mertebeden hemen hemen doğrusal değişken katsayılı (t^m li) parabolik tipten aşağıdaki denklem için başlangıç ve sınır değer problemi ele alınmıştır:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^k t^m \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x, t, u).$$

Burada $k \geq 1$ doğal sayılar, $m > 0$, $f(x, t, u)$, $\bar{\Omega} \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde verilmiş fonksiyon ve $u = u(x, t)$ problemin çözümüdür.

$m = 0$ ve $f(x, t, u) = F(x, t)$ durumunda homojen olmayan denklemin homojen başlangıç veya sınır koşullarıyla birlikte problem, homojen denklemlili homojen olmayan başlangıç veya sınır koşullu probleme dönüşeceği ve ayrıca eğer homojen olmayan denklem homojen olmayan başlangıç veya sınır koşullarıyla verilse bu durumda problem bu iki durumdakilere dönüşeceği bilinmektedir. Bu problemlerin çözümü için değişkenlerin ayrılması yöntemi lineer birleşim ilkesiyle birlikte yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yöntem Fourier seri yöntemi veya özfonksiyon açılımı yöntemi olarak da bilinmektedir [14].

Yukarıda verilen kısımlardaki problemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenmektedir. Bu amaçla problemlere ilişkin özdeğer probleminden elde edilen özfonksiyonları içeren Fourier serisi şeklindeki zayıf çözümü verildikten sonra Picard ardışık yaklaşımlarıyla oluşturulan çözüme ilişkin dizinin düzgün yakınsaklığı gösterilmektedir. Çözümün ön kestirimlerine dayanılarak uygun koşullar altında Fourier serisi formunda zayıf çözümün varlığı ve tekliği ispatlanmaktadır.

Beşinci bölümde ise, tezde elde edilen sonuçlar ve öneriler verilmiştir.



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Kısmi diferansiyel denklemlerin birçoğunun hiperbolik, parabolik ve eliptik tiplerinden biri olduğu bilinmektedir. Konik denklem sınıflandırılması yardımıyla ikinci mertebeden iki bağımsız değişkenli kısmi diferansiyel denklemlerin sınıflandırmaktayız. Elimizdeki en yalın haldeki kısmi diferansiyel denklemler dalga (hiperbolik), ısı (parabolik) ve Laplace (eliptik) denklemleri olarak sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$$

$$u_t - k u_{xx} = 0,$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Matematiksel fizikte ve yine birçok uygulamalı bilimde karşımıza çıkan birçok problem kısmi diferansiyel denklemlere özellikle yukarıda verilen tipten veya bunları içeren problemlere indirgenirler. İkinci mertebeden olan kısmi diferansiyel denklemleri içeren problemler çeşitli yönlerden çalışılmıştır. Ancak karşılaşılan çeşitli zorluklardan dolayı yüksek mertebeli denklemler için bu yönlü çalışmalar azdır.

Baouendi ve Grisvard 1968 de $x \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} = f(x, t)$ denklemi için sınır değer probleminin çözülebilirliğini gösterdi [2].

Amanov and Yuldasheva 2009 da $\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t)$ denklemi için sınır değer problemlerinin çözülebilirliğini gerçekleştirdiler. Bu çalışmada k nın tek değerleri için hiperbolik tipe dönüşen denklem için sınır değer problemi çalışmanın zorluğu ortadadır [8].

Amanov and Ashyralyev 2014 te $\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t)$ denklemi için başlangıç ve sınır değer ile sınır değer problemlerinin çözülebilirliğinin k nın tekliği ve çiftliğine bağlı olduğunu gerçekleştirdiler [9]. Bu çalışmada da k nın tekliği ve çiftliğine bağlı olarak ortaya çıkan eliptik tip için de başlangıç koşullarından ve hiperbolik tip için sınır koşullarından dolayı çalışmanın zorluğu ortadadır.

Amanov 2015 te $t^m \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t)$ denklemi için başlangıç ve sınır değer probleminin çözülebilirliğini gösterdi [11].

Sabitov 2015 te $\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} - \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x, t)$ denklem için sınır değer probleminin çözülebilirliğini gerçekleştirdi [10].

Kozhanov and Pinigina 2017 de $(-1)^k \frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} + \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x) u_{x_j}) - a(x)u = f(x, t)$ denklemi için sınır değer probleminin çözülebilirliğini gerçekleştirdi [12].

Ciftci ve Halilov 2008 de $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t, u)$ denklemi için başlangıç ve devirli sınır değer probleminin çözülebilirliğini gösterdi [6].

Halilov ve Ciftci 2009 da $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = f(x, t, u)$ denklemi için başlangıç ve devirli sınır değer probleminin çözülebilirliğini gösterdi [7].

Yuldasheva 2019 da $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x, t, u)$ diferansiyel denklemi için t ye göre sınır ve x e göre devirli sınır değer probleminin çözülebilirliğini gösterdi [13].



3. MATERYAL VE METOT

Sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, tanımlar, eşitsizlikler, uzaylar ve teoremler ile ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemi içeren başlangıç ve / veya sınır değer problemi için bazı teoremler ve buna örnekler ile problemin değişkenlerine ayrılması (Fourier serisi) yöntemiyle çözümüne ilişkin [14], [3], [4], [5], [1] kaynaklara ve bunların içindeki referanslara başvurulabilir.

Ele alınan problemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenmektedir. Bu amaçla problemlere ilişkin özdeğer probleminden elde edilen özfonsiyonları içeren Fourier serisi şeklindeki zayıf çözümü verildikten sonra Picard ardışık yaklaşımlarıyla oluşturulan çözüme ilişkin dizinin düzgün yakınsaklığı gösterilmektedir. Daha sonra düzgün yakınsadığı fonksiyonun sürekli olduğu dikkate alınarak ilişkin integral denkleminin sağlandığı gösterilmektedir. Nihayet çözümün ön kestirimlerine dayanarak uygun koşullar altında Fourier serisi formunda zayıf çözümün varlığı ve tekliği ispatlanmaktadır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümün her bir kısmı diğerinden bağımsızdır.

4.1 Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Hemen Hemen Doğrusal Parabolik Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı

Bu kısımda aşağıdaki başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini inceleriz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^k \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x, t, u), \quad (x, t) \in \Omega = \{0 < x < \pi, 0 < t < T\}, \quad (4.1.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial^{2l} u(0, t)}{\partial x^{2l}} = \frac{\partial^{2l} u(\pi, t)}{\partial x^{2l}} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, k-1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.1.3)$$

Burada $k \geq 1$ doğal sayılar, $T > 0$ gerçel sayılar, $f(x, t, u)$, $\bar{\Omega} \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde verilmiş fonksiyon ve $u = u(x, t)$ problemin çözümüdür.

Mevcut probleme ilişkin özdeğer probleminden elde edilen özfonksiyonları içeren Fourier serisi şeklindeki zayıf çözümü verildikten sonra Picard ardışık yaklaşımlarıyla oluşturulan çözüme ilişkin dizinin düzgün yakınsaklığı gösterilmektedir. Ayrıca zayıf çözümün tekliği de ispatlanmaktadır.

Tanım 4.1.1. Bir $v(x, t) \in C^{2k}(\bar{\Omega})$ fonksiyonu eğer (4.1.3) deki sınır koşulları ve $v(x, T) = 0$ koşulunu sağlarsa *test fonksiyonu* olarak adlandırılır:

Tanım 4.1.2. Keyfi $v(x, t)$ test fonksiyonu için aşağıdaki integral eşitliğini sağlayan $u(x, t) \in C(\bar{\Omega})$ fonksiyonuna (4.1.1)-(4.1.3) probleminin zayıf çözümü denir:

$$\int_0^T \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} - (-1)^k \frac{\partial^{2k} v}{\partial x^{2k}} \right) u + f(x, t, u) v \right] dx dt = 0. \quad (4.1.4)$$

Fourier serisi formunda zayıf çözüm kullanılarak (4.1.1)-(4.1.3) probleminden Fourier serisi katsayıları için doğrusal olmayan sonsuz sayıda integral denklem elde edilir. Fourier serisi katsayılarının çözüm olduğu uzay tanımlanıp uygun norm verilir.

Tanım 4.1.3. B_T ile $[0, T]$ aralığındaki Fourier katsayıları olan sürekli fonksiyonlar kümesi

$$\{\bar{u}(t)\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$$

nin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)| < \infty$$

koşulunu sağlayanları gösterilsin. B_T de norm aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\|\bar{u}(t)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)|.$$

Açıkça B_T Banach uzayıdır.

Problemin Çözümü

(4.1.1)-(4.1.3) probleminin zayıf çözümünü

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \quad (4.1.5)$$

şeklinde arayalım. Burada $u_n(t)$ ($n = \overline{1, \infty}$) bilinmeyen fonksiyondur. Bunu bulmak için (4.1.4) eşitliği kullanılarak aşağıdaki integral denklemi elde edilir:

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{-n^2 k(t-\tau)} f \left(\xi, \tau, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau) \sin n\xi \right) \sin n\xi d\xi d\tau. \quad (4.1.6)$$

Teorem 4.1.1. Aşağıdaki koşullar altında (4.1.6) denkleminin B_T de tek çözümü vardır:

- 1) $f(x, t, u)$ bütün değişkenlerine göre $\bar{\Omega} \times R$ bölgesinde sürekli,
- 2) $|f(x, t, u) - f(x, t, v)| \leq b(x, t) |u - v|$, $b(x, t) > 0$ ve $b(x, t) \in L_2(\Omega)$,
- 3) $f(x, t, 0) \in L_2(\Omega)$.

Lemma 4.1.1. Teorem 4.1.1 in koşulları altında (4.1.6) denkleminin B_T de en az bir çözümü vardır.

İspat. Ardışık yaklaşımlar yöntemini uygularsak $N = \overline{1, \infty}$ olmak üzere (4.1.6) denklemi için

$$u_n^{(N+1)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{-n^2 k(t-\tau)} f \left(\xi, \tau, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(N)}(\tau) \sin n\xi \right) \sin n\xi d\xi d\tau \quad (4.1.7)$$

elde ederiz.

$$Au^{(N)}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(N)}(\tau) \sin n\xi \text{ ve } \{\bar{u}^{(N)}(t)\} = \{u_1^{(N)}(t), u_2^{(N)}(t), \dots, u_n^{(N)}(t), \dots\}$$

alalım. Açıkça

$$\max_{0 \leq \tau \leq T} |Au^{(N)}(\xi, \tau)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq \tau \leq T} |u_n^{(N)}(\tau)| = \|\bar{u}^{(N)}(\tau)\|_{B_T} \quad (4.1.8)$$

dir. Şimdi her N için $\bar{u}^{(N)}(t) \in B_T$ yani $\sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(N)}(t)| < \infty$ olduğunu göstermek istiyoruz.

Teorem 4.1.1 deki koşullara göre

$$\|\bar{u}^{(0)}(t)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(0)}(t)| = 0 < \infty$$

olduğu açıktır.

$N = 0$ için

$$u_n^{(1)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{-n^{2k}(t-\tau)} f(\xi, \tau, Au^{(0)}(\xi, \tau)) \sin n\xi d\xi d\tau$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ ye göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} |u_n^{(1)}(t)| &\leq \frac{2}{\pi} \left(\int_0^t e^{-2n^{2k}(t-\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(1)}(t)| &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği uygulanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(1)}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(1)}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)}$
 $= \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} M_1 < \infty$ dır.

$N = 1$ için

$$\begin{aligned} u_n^{(2)}(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^{\pi} e^{-n^{2k}(t-\tau)} f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) \sin n\xi d\xi d\tau \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-n^{2k}(t-\tau)} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) + f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi d\tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ ye göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} &|u_n^{(2)}(t)| \\ &\leq \frac{2}{\pi} \left(\int_0^t e^{-2n^{2k}(t-\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{2}{\pi} \left(\int_0^t e^{-2n^{2k}(t-\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left(\frac{1}{2n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(2)}(t)| \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(2)}(t)| \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |Au^{(1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(2)}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} M_2 + \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} M_1 < \infty$ dır.

$N = 2$ için

$$\begin{aligned} u_n^{(3)}(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^{\pi} e^{-n^{2k}(t-\tau)} f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) \sin n\xi d\xi d\tau \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-n^{2k}(t-\tau)} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) + f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi d\tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ ye göre uygulanırsa

$$|u_n^{(3)}(t)| \leq \left(\frac{1}{2n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \left(\frac{1}{2n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t)| \\ \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t)| \\ \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |Au^{(2)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(3)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(3)}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\ + \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} M_2 + \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} M_1 < \infty$ dır.

Tümevarım yöntemiyle her N için doğruluğunu gösterelim:

$$N = k-1 \text{ için } \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(k)}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(k-1)}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\ + \left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(k-1)}(t)\|_{B_T} M_2 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{2}} M_1 < \infty \text{ olsun.}$$

$N = k$ için

$$u_n^{(k+1)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{-n^{2k}(t-\tau)} f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) \sin n\xi d\xi d\tau \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-n^{2k}(t-\tau)} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) + f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi d\tau$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ ye göre uygulanırsa

$$|u_n^{(k+1)}(t)| \\ \leq \left(\frac{1}{2n^{2k}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \left(\frac{1}{2n^{2k}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k+1)}(t)| \\ \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k+1)}(t)| \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |Au^{(k)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(k+1)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(k+1)}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} M_2 + \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} M_1 < \infty$ olur. O halde $\bar{u}^{(N)}(t) \in B_T$ dir.

Şimdi $\{\bar{u}^{(N)}(t)\}$ dizisinin $N \rightarrow \infty$ iken B_T de düzgün yakınsak olduğunu göstere-
lim. Bunun için

$$\bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{N=0}^{\infty} (\bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t))$$

serisinin düzgün yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. Öncelikle $|\bar{u}_n^{(N+1)}(t) - \bar{u}_n^{(N)}(t)|$ farkları için kestirim elde etmek istiyoruz.

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}^{(1)}(t) - \bar{u}^{(0)}(t)\|_{B_T} &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(1)}(t) - u_n^{(0)}(t)| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(1)}(t)| \\
&\leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} M_1 = A_T < \infty
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
& |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)| \\
& \leq \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-n^{2k}(t-\tau)} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)| |\sin n\xi| d\xi d\tau
\end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ ye göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} & |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)| \\ & \leq \left(\frac{1}{2n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınır ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)| \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)| \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |Au^{(1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(2)}(t) - \bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)|$
 $\leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} A_T M_2 < \infty$ dır.

$$\begin{aligned} & |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \\ & \leq \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-n^{2k}(t-\tau)} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ ye göre uygulanırsa

$$|u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \leq \left(\frac{1}{2n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |Au^{(2)}(\xi, \tau) - Au^{(1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(2)}(t) - \bar{u}^{(1)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) \left\{ \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^\tau \int_0^\pi b^2(\xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 A_T \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) \left(\int_0^\tau \int_0^\pi b^2(\xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 \right) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 A_T \frac{1}{\sqrt{2!}} \left[\left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 A_T \frac{1}{\sqrt{2!}} \left[\left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(3)}(t) - \bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)|$
 $\leq \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 A_T \frac{1}{\sqrt{2!}} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 A_T \frac{1}{\sqrt{2!}} M_2^2 < \infty$ dır.

Tümevarım yöntemiyle her N için doğruluğunu gösterelim:

$N = k - 1$ için $|\bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t)| = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k)}(t) - u_n^{(k-1)}(t)|$
 $\leq \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{k-1} A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{k-1}{2}}$ olsun. Buradan
 $\|\bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(k)}(t) - u_n^{(k-1)}(t)|$
 $\leq \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{k-1} A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^{(k-1)} \leq \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{k-1} A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} M_2^{(k-1)} < \infty$ dır.
 $N = k$ için

$$|u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-n^{2k}(t-\tau)} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ ye göre uygulanırsa

$$|u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t)| \leq \left(\frac{1}{2n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t)| \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |Au^{(k)}(\xi, \tau) - Au^{(k-1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) \left\{ \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{k-1} A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{k-1}{2}} \right\}^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) \left(\int_0^{\tau} \int_0^{\pi} b^2(\xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 \right)^{k-1} d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \frac{1}{\sqrt{k}} \left[\left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^k \right]^{\frac{1}{2}} \\
& = \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} \left[\left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(k+1)}(t) - \bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t)|$
 $\leq \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^k \leq \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} M_2^k < \infty$ dir. Buradan

$$\bar{u}^{(N+1)}(t) = \bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{k=0}^N (\bar{u}^{(k+1)}(t) - \bar{u}^{(k)}(t)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} M_2^k$$

olur. $\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} M_2^k$ serisinin yakınsaklığından $\{\bar{u}^{(N)}(t)\}$ dizisinin B_T de düzgün yakınsaklığı elde edilir. Sonuç olarak $\bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{N=0}^{\infty} (\bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t))$ serisi düzgün yakınsaktır.

$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{u}^{(N+1)}(t) = \bar{u}(t)$ olsun. $\{\bar{u}^{(N)}(t)\}$ dizisi düzgün yakınsak olduğundan $\bar{u}(t)$ fonksiyonu B_T de süreklidir. $\bar{u}(t)$ fonksiyonunun (4.1.6) integral denklemini sağladığını gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} |\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t) - u_n^{(N+1)}(t)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-n^{2k}(t-\tau)} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ ye göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} |\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} |\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} &|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |Au(\xi, \tau) - Au^{(N)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

olur. Eğer $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)\|_{B_T} = 0$ olduğunu gösterirsek $\bar{u}(t)$ fonksiyonunun (4.1.6) integral denklemini sağladığı sonucu çıkar. Cauchy eşitsizliği τ ye göre, Hölder eşitsizliği, Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} |\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t) - u_n^{(N+1)}(t)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-n^{2k}(t-\tau)} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n^{2k}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n^{2k}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)\|_{B_T} &\leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\
&+ \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^N A_T \frac{1}{\sqrt{N!}} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^N \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)\|_{B_T} M_2 + \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{N+1}{2}} A_T \frac{1}{\sqrt{N!}} M_2^{N+1} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} M_2 \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)\|_{B_T} + \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} M_2 A_T \frac{\left[\left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} M_2 \right]^N}{\sqrt{N!}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)\|_{B_T} = 0$ olur.

$\bar{u}(t)$ fonksiyonunun (4.1.6) integral denklemini sağladığı gösterildi.

Lemma 4.1.2. Teorem 4.1.1 in koşulları altında (4.1.6) denkleminin B_T de en fazla bir çözümü vardır.

İspat. Çözümün tekliğini göstermek için $\bar{v}(t)$ nin diğer bir çözüm olduğunu kabul edelim. $|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|$ için kestirim elde edelim:

Cauchy eşitsizliği τ ye göre , Hölder eşitsizliği, Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu

uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t) - v_n(t)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-n^{2k}(t-\tau)} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} &\leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} M_2 \\
&= \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} M_2 \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} = 0$ olur. Yani $\bar{u}(t) = \bar{v}(t)$ olup $u_n(t) = v_n(t)$,

$(n = \overline{1, \infty})$ dır. Bu sonuç $|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)| \leq \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$

eşitsizliğine Gronwall eşitsizliği uygulanarak da elde edilebilir.

(4.1.6) integral denkleminin çözümünün tek olduğu gösterildi.

Teorem 4.1.1 in İspatı. Lemma 4.1.1 ve Lemma 4.1.2 den (4.1.6) denkleminin tek çözümü vardır. Böylece teorem ispat edildi.

Teorem 4.1.2. Teorem 4.1.1 koşulları altında (4.1.1)-(4.1.3) probleminin (4.1.5) şeklindeki düzgün yakınsak seri ile temsil edilen tek zayıf çözümü vardır.

İspat. (4.1.6) denkleminin çözümü kulnılarak oluşturulan (4.1.5) serisi düzgün yakınsak olduğundan süreklidir. (4.1.5) serisinin kısmi toplamlar dizisi

$$u_{(l)}(x, t) = \sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.1 ve $\lim_{l \rightarrow \infty} u_{(l)}(x, t) = u(x, t)$ den $\lim_{l \rightarrow \infty} f(x, t, u_{(l)}(x, t)) = f(x, t, u(x, t))$ dır.

$$S_l = \int_0^T \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} - (-1)^k \frac{\partial^{2k} v}{\partial x^{2k}} \right) u_{(l)} + f(x, t, u_{(l)}) v \right] dx dt$$

tanımlansın. $\lim_{l \rightarrow \infty} S_l = 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. Kısmi integral alma ard arda kullanılarak

$$\begin{aligned} S_l &= \int_0^T \int_0^\pi \left(-\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) - (-1)^k \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) (-1)^k n^{2k} \sin nx \right) \right) v dx dt \\ &+ \int_0^T \int_0^\pi f(x, t, u_{(l)}) v dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^\pi \left(-\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) - (-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) \right) v dx dt \\ &+ \int_0^T \int_0^\pi (f(x, t, u_{(l)})) v dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^\pi \left(-\frac{\partial}{\partial t} u_{(l)} - (-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} u_{(l)} + f(x, t, u_{(l)}) \right) v dx dt \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S_l = \int_0^T \int_0^\pi - \left(\frac{\partial}{\partial t} u + (-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} u - f(x, t, u) \right) v dx dt$$

olur. (4.1.1) denkleminde

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S_l = 0$$

dır. Böylece $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$ fonksiyonu (4.1.1)-(4.1.3) probleminin zayıf çözümüdür.

Teorem ispat edildi.

4.2 Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı (t çarpımlı) Hemen Hemen Doğrusal Parabolik Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı

Bu çalışmada aşağıdaki başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünün varlığını inceleriz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^k t \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x, t, u), \quad (x, t) \in \Omega = \{0 < x < \pi, 0 < t < T\}, \quad (4.2.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial^{2l} u(0, t)}{\partial x^{2l}} = \frac{\partial^{2l} u(\pi, t)}{\partial x^{2l}} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, k-1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.2.3)$$

Burada $k > 1$ doğal sayılar, $T > 0$ gerçel sayılar, $f(x, t, u), \bar{\Omega} \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde verilmiş fonksiyon ve $u = u(x, t)$ problemin çözümüdür.

Mevcut probleme ilişkin özdeğer probleminden elde edilen özfonksiyonları içeren Fourier serisi şeklindeki zayıf çözümü verildikten sonra Picard ardışık yaklaşımlarıyla oluşturulan çözüme ilişkin dizinin düzgün yakınsaklığı gösterilmektedir. Ayrıca zayıf çözümün tekliği de ispatlanmaktadır.

Tanım 4.2.1. Bir $v(x, t) \in C^{2k}(\bar{\Omega})$ fonksiyonu eğer (4.2.3) deki sınır koşulları ve $v(x, T) = 0$ koşulunu sağlarsa *test fonksiyonu* olarak adlandırılır:

Tanım 4.2.2. Keyfi $v(x, t)$ test fonksiyonu için aşağıdaki integral eşitliğini sağlayan $u(x, t) \in C(\bar{\Omega})$ fonksiyonuna (4.2.1)-(4.2.3) probleminin zayıf çözümü denir:

$$\int_0^T \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} - (-1)^k t \frac{\partial^{2k} v}{\partial x^{2k}} \right) u + f(x, t, u) v \right] dx dt = 0. \quad (4.2.4)$$

Fourier serisi formunda zayıf çözüm kullanılarak (4.2.1)-(4.2.3) probleminden Fourier serisi katsayıları için doğrusal olmayan sonsuz sayıda integral denklem elde edilir. Fourier serisi katsayılarının çözüm olduğu uzay tanımlanıp uygun norm verilir.

Tanım 4.2.3. B_T ile $[0, T]$ aralığındaki Fourier katsayıları olan sürekli fonksiyonlar kümesi

$$\{\bar{u}(t)\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$$

nin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)| < \infty$$

koşulunu sağlayanları gösterilsin. B_T de norm aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\|\bar{u}(t)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)|.$$

Açıkça B_T Banach uzayıdır.

Problemin Çözümü

(4.2.1)-(4.2.3) probleminin zayıf çözümünü

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \quad (4.2.5)$$

şeklinde arayalım. Burada $u_n(t)$ ($n = \overline{1, \infty}$) bilinmeyen fonksiyondur. Bunu bulmak için (4.2.4) eşitliği kullanılarak aşağıdaki integral denklemi elde edilir:

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{-\frac{n^2 k}{2}(t^2 - \tau^2)} f\left(\xi, \tau, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau) \sin n\xi\right) \sin n\xi d\xi d\tau. \quad (4.2.6)$$

Teorem 4.2.1. Aşağıdaki koşullar altında (4.2.6) denkleminin B_T de tek çözümü vardır:

- 1) $f(x, t, u)$ bütün değişkenlerine göre $\overline{\Omega} \times R$ bölgesinde sürekli,
- 2) $|f(x, t, u) - f(x, t, v)| \leq b(x, t) |u - v|$, $b(x, t) > 0$ ve $b(x, t) \in L_2(\Omega)$,
- 3) $f(x, t, 0) \in L_2(\Omega)$.

Lemma 4.2.1. Teorem 4.2.1 in koşulları altında (4.2.6) denkleminin B_T de en az bir çözümü vardır.

İspat. Ardışık yaklaşımlar yöntemini uygularsak $N = \overline{1, \infty}$ olmak üzere (4.2.6) denklemini için

$$u_n^{(N+1)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{-\frac{n^2 k}{2}(t^2 - \tau^2)} f\left(\xi, \tau, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(N)}(\tau) \sin n\xi\right) \sin n\xi d\xi d\tau \quad (4.2.7)$$

elde ederiz.

$$Au^{(N)}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(N)}(\tau) \sin n\xi \text{ ve } \{\bar{u}^{(N)}(t)\} = \{u_1^{(N)}(t), u_2^{(N)}(t), \dots, u_n^{(N)}(t), \dots\}$$

alalım.

Açıkça

$$\max_{0 \leq \tau \leq T} |Au^{(N)}(\xi, \tau)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq \tau \leq T} |u_n^{(N)}(\tau)| = \|\bar{u}^{(N)}(\tau)\|_{B_T} \quad (4.2.8)$$

dir. Şimdi her N için $\bar{u}^{(N)}(t) \in B_T$ yani $\sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(N)}(t)| < \infty$ olduğunu göstermek istiyoruz.

Teorem 4.2.1 deki koşullara göre

$$\|\bar{u}^{(0)}(t)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(0)}(t)| = 0 < \infty$$

olduğu açıktır.

$N = 0$ için

$$u_n^{(1)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^{\pi} e^{-\frac{n^2 k}{2}(t^2 - \tau^2)} f(\xi, \tau, Au^{(0)}(\xi, \tau)) \sin n\xi d\xi d\tau$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ ye göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} |u_n^{(1)}(t)| &\leq \frac{2}{\pi} \left(\int_0^t e^{-n^2 k(t^2 - \tau^2)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(1)}(t)| &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(1)}(t)| &\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{Buradan } \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(1)}(t)| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 M_1 < \infty \text{ dır.} \end{aligned}$$

$N = 1$ için

$$\begin{aligned} u_n^{(2)}(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^{\pi} e^{-\frac{n^2 k}{2}(t^2 - \tau^2)} f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) \sin n\xi d\xi d\tau \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-\frac{n^2 k}{2}(t^2 - \tau^2)} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) + f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi d\tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ ye göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} |u_n^{(2)}(t)| &\leq \frac{2}{\pi} \left(\int_0^t e^{-n^2 k(t^2 - \tau^2)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \left(\int_0^t \left[\int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \left(\int_0^t e^{-n^2 k(t^2 - \tau^2)} d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2n^k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2n^k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(2)}(t)| &\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(2)}(t)| &\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |Au^{(1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(2)}(t)| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}$
 $+ \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} M_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 M_1 < \infty$
 dır.

$N = 2$ için

$$\begin{aligned} u_n^{(3)}(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{-\frac{n^{2k}}{2}(t^2-\tau^2)} f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) \sin n\xi d\xi d\tau \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-\frac{n^{2k}}{2}(t^2-\tau^2)} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) + f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi d\tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ ye göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} |u_n^{(3)}(t)| &\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t)| &\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t)| &\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |Au^{(2)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(3)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(3)}(t)| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} M_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 M_1 < \infty$ dır.

Tümevarım yöntemiyle her N için doğruluğunu gösterelim:

$N = k - 1$ için

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(k)}(t)| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}^{(k-1)}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\
&+ \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}^{(k-1)}(t)\|_{B_T} M_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 M_1 < \infty
\end{aligned}$$

olsun.

$N = k$ için

$$\begin{aligned}
u_n^{(k+1)}(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{-\frac{n^2}{2}(t^2-\tau^2)} f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) \sin n\xi d\xi d\tau \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-\frac{n^2}{2}(t^2-\tau^2)} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) + f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi d\tau
\end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ ye göre uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|u_n^{(k+1)}(t)| &\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2n^k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2n^k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k+1)}(t)| &\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi\right]^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k+1)}(t)| &\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0))^2 d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |Au^{(k)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(k+1)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(k+1)}(t)|$

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)}$$

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} M_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 M_1 < \infty \text{ olur. O halde } \bar{u}^{(N)}(t) \in B_T \text{ dir.}$$

Şimdi $\{\bar{u}^{(N)}(t)\}$ dizisinin $N \rightarrow \infty$ iken B_T de düzgün yakınsak olduğunu göstere-

lim. Bunun için

$$\bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{N=0}^{\infty} (\bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t))$$

serisinin düzgün yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir.

Öncelikle $|\bar{u}_n^{(N+1)}(t) - \bar{u}_n^{(N)}(t)|$ farkları için kestirim elde etmek istiyoruz.

$$\begin{aligned} & \|\bar{u}^{(1)}(t) - \bar{u}^{(0)}(t)\|_{B_T} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(1)}(t) - u_n^{(0)}(t)| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(1)}(t)| \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|f(\xi, \tau, 0)\|_{L_2(\Omega)} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 M_1 = A_T < \infty \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} & |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)| \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-\frac{n^2}{2}(t^2-\tau^2)} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)| |\sin n\xi| d\xi d\tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ ye göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} & |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)| \leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2n^k}\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)| \leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)| \\
& \leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |Au^{(1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(2)}(t) - \bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)|$
 $\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 A_T M_2 < \infty$ dir.

$$\begin{aligned}
& |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \\
& \leq \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-\frac{n^2 k}{2}(t^2 - \tau^2)} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau
\end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ ye göre uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
& \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınırsa ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
& \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \\
& \leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |Au^{(2)}(\xi, \tau) - Au^{(1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(2)}(t) - \bar{u}^{(1)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \times \\
& \quad \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^{\tau} \int_0^{\pi} b^2(\xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \right]^2 A_T \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) \left(\int_0^{\tau} \int_0^{\pi} b^2(\xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 \right) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \right]^2 A_T \frac{1}{\sqrt{2!}} \left[\left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \right]^2 A_T \frac{1}{\sqrt{2!}} \left[\left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(3)}(t) - \bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)|$

$$\leq \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \right]^2 A_T \frac{1}{\sqrt{2!}} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \right]^2 A_T \frac{1}{\sqrt{2!}} M_2^2 < \infty \text{ dır.}$$

Tümevarım yöntemiyle her N için doğruluğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
N = k - 1 \text{ için } |\bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k)}(t) - u_n^{(k-1)}(t)| \\
&\leq \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \right]^{k-1} A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{k-1}{2}} \text{ olsun.}
\end{aligned}$$

$$\text{Buradan } \|\bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(k)}(t) - u_n^{(k-1)}(t)|$$

$$\leq \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \right]^{k-1} A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^{(k-1)} \leq \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \right]^{k-1} A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} M_2^{(k-1)} < \infty \text{ dir.}$$

$N = k$ için

$$\begin{aligned} & |u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t)| \\ & \leq \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-\frac{n^2}{2}(t^2-\tau^2)} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau \end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ ye göre uygulanırsa

$$\begin{aligned} & |u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t)| \leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınır ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t)| \leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t)| \\ & \leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |Au^{(k)}(\xi, \tau) - Au^{(k-1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \times \\
&\left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) \left\{ \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \right]^{k-1} A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{k-1}{2}} \right\}^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) \left(\int_0^\tau \int_0^\pi b^2(\xi_1, \tau_1) d\xi_1 d\tau_1 \right)^{k-1} d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{(k-1)!}} \frac{1}{\sqrt{k}} \left[\left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^k \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} \left[\left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right]^k
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\text{Buradan } \|\bar{u}^{(k+1)}(t) - \bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t)| \\
&\leq \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^k \leq \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} M_2^k < \infty \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Buradan

$$\bar{u}^{(N+1)}(t) = \bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{k=0}^N (\bar{u}^{(k+1)}(t) - \bar{u}^{(k)}(t)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} M_2^k$$

olur. $\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \right]^k A_T \frac{1}{\sqrt{k!}} M_2^k$ serisinin yakınsaklığından $\{\bar{u}^{(N)}(t)\}$ dizisinin B_T

de düzgün yakınsaklığı elde edilir. Sonuç olarak $\bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{N=0}^{\infty} (\bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t))$ serisi düzgün yakınsaktır.

$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{u}^{(N+1)}(t) = \bar{u}(t)$ olsun. $\{\bar{u}^{(N)}(t)\}$ dizisi düzgün yakınsak olduğundan $\bar{u}(t)$ fonksiyonu B_T de süreklidir. $\bar{u}(t)$ fonksiyonunun (4.2.6) integral denklemini sağladığını gösterebiliriz:

$$\begin{aligned}
&|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)| = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t) - u_n^{(N+1)}(t)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-\frac{n^2 k}{2}(t^2 - \tau^2)} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau
\end{aligned}$$

olur. Cauchy eşitsizliği τ ye göre uygulanırsa

$$|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)| \leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned} |\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)| &\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \times \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |Au(\xi, \tau) - Au^{(N)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

olur. Eğer $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)\|_{B_T} = 0$ olduğunu gösterirsek $\bar{u}(t)$ fonksiyonunun (4.2.6) integral denklemini sağladığı sonucu çıkar. Cauchy eşitsizliği τ ye göre, Hölder

eşitsizliği, Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t) - u_n^{(N+1)}(t)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-\frac{n^2}{2}(t^2-\tau^2)} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)\|_{B_T} &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\
&+ \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0\right]^N A_T \frac{1}{\sqrt{N!}} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)}^N \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)\|_{B_T} M_2 + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0\right]^{N+1} A_T \frac{1}{\sqrt{N!}} M_2^{N+1} \\
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 M_2 \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)\|_{B_T} + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0 A_T \frac{\left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} M_0\right]^N}{\sqrt{N!}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)\|_{B_T} = 0$ olur. Böylece $\bar{u}(t)$ fonksiyonunun (4.2.6) integral denklemini sağladığı gösterildi.

Lemma 4.2.2. Teorem 4.2.1 in koşulları altında (4.2.6) denkleminin B_T de en fazla bir çözümü vardır.

İspat. Çözümün tekliğini göstermek için $\bar{v}(t)$ nin diğer bir çözüm olduğunu kabul edelim. $|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|$ için kestirim elde edelim:

Cauchy eşitsizliği τ ye göre , Hölder eşitsizliği, Bessel eşitsizliği ve Lipschitz koşulu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t) - v_n(t)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-\frac{n^2 k}{2}(t^2 - \tau^2)} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-\frac{n^2}{2}(t^2-\tau^2)} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau))) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} \|b(\xi, \tau)\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} M_2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 M_2 \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} = 0$ olur. Yani $\bar{u}(t) = \bar{v}(t)$ olup $u_n(t) = v_n(t)$,

$(n = \overline{1, \infty})$ dır. Bu sonuç

$$\begin{aligned} |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)| &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} M_0 \left(\int_0^t |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 \left[\int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine Gronwall eşitsizliği uygulanarak da elde edilebilir.

Yani (4.2.6) integral denkleminin çözümünün tek olduğu gösterildi.

Teorem 4.2.1 in İspatı. Lemma 4.2.1 ve Lemma 4.2.2 den (4.2.6) denkleminin tek çözümü vardır. Böylece teorem ispat edildi.

Teorem 4.2.2. Teorem 4.2.1 koşulları altında (4.2.1)-(4.2.3) probleminin (4.2.5) şeklindeki düzgün yakınsak seri ile temsil edilen tek zayıf çözümü vardır.

İspat. (4.2.6) denkleminin çözümü kullanılarak oluşturulan (4.2.5) serisi düzgün yakınsak olduğundan süreklidir. (4.2.5) serisinin kısmi toplamlar dizisi

$$u_{(l)}(x, t) = \sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx$$

şeklinde dir. Teorem 4.2.1 ve $\lim_{l \rightarrow \infty} u_{(l)}(x, t) = u(x, t)$ den $\lim_{l \rightarrow \infty} f(x, t, u_{(l)}(x, t)) = f(x, t, u(x, t))$ dır.

$$S_l = \int_0^T \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} - (-1)^k t \frac{\partial^{2k} v}{\partial x^{2k}} \right) u_{(l)} + f(x, t, u_{(l)}) v \right] dx dt$$

tanımlansın. $\lim_{l \rightarrow \infty} S_l = 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. Kısmi integral alma ard arda kullanılarak

$$\begin{aligned} S_l &= \int_0^T \int_0^\pi \left(-\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) - (-1)^k t \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) (-1)^k n^{2k} \sin nx \right) \right) v dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^\pi [f(x, t, u_{(l)}) v] dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \int_0^\pi \left(-\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) - (-1)^k t \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) \right) v dx dt \\
&+ \int_0^T \int_0^\pi + f(x, t, u_{(l)}) v dx dt \\
&= \int_0^T \int_0^\pi \left(-\frac{\partial}{\partial t} u_{(l)} - (-1)^k t \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} u_{(l)} + f(x, t, u_{(l)}) \right) v dx dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S_l = \int_0^T \int_0^\pi - \left(\frac{\partial}{\partial t} u + (-1)^k t \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} u - f(x, t, u) \right) v dx dt$$

olur. (4.2.1) denkleminde

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S_l = 0$$

dır. Böylece $u(x, t) = \sum_{n=1}^\infty u_n(t) \sin nx$ fonksiyonu (4.2.1)-(4.2.3) probleminin zayıf çözümüdür. Teorem ispat edildi. Teorem ispat edildi.

4.3 Yüksek Mertebeden Değişken Katsayılı (t^m çarpımlı) Hemen Hemen Doğrusal Parabolik Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı

Bu çalışmada aşağıdaki başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünün varlığını inceleriz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^k t^m \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x, t, u), (x, t) \in \Omega = \{0 < x < \pi, 0 < t < T\}, \quad (4.3.1)$$

$$u(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq \pi, \quad (4.3.2)$$

$$\frac{\partial^{2l} u(0, t)}{\partial x^{2l}} = \frac{\partial^{2l} u(\pi, t)}{\partial x^{2l}} = 0, l = 0, 1, 2, \dots, k-1, 0 \leq t \leq T. \quad (4.3.3)$$

Burada $k \geq 1$ doğal sayılar, $m > 0$ ve $T > 0$ gerçel sayılar, $f(x, t, u), \bar{\Omega} \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde verilmiş fonksiyon ve $u = u(x, t)$ problemin çözümüdür.

Mevcut probleme ilişkin özdeğer probleminden elde edilen özfonksiyonları içeren Fourier serisi şeklindeki zayıf çözümü verildikten sonra Picard ardışık yaklaşımlarıyla oluşturulan çözüme ilişkin dizinin düzgün yakınsaklığı gösterilmektedir. Ayrıca zayıf çözümün tekliği de ispatlanmaktadır.

Tanım 4.3.1. Bir $v(x, t) \in C^{2k}(\overline{\Omega})$ fonksiyonu eğer (4.3.3) deki sınır koşulları ve $v(x, T) = 0$ koşulunu sağlarsa *test fonksiyonu* olarak adlandırılır:

Tanım 4.3.2. Keyfi $v(x, t)$ test fonksiyonu için aşağıdaki integral eşitliğini sağlayan $u(x, t) \in C(\overline{\Omega})$ fonksiyonuna (4.3.1)-(4.3.3) probleminin zayıf çözümü denir:

$$\int_0^T \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} - (-1)^k t^m \frac{\partial^{2k} v}{\partial x^{2k}} \right) u + f(x, t, u) v \right] dx dt = 0. \quad (4.3.4)$$

Fourier serisi formunda zayıf çözüm kullanılarak (4.3.1)-(4.3.3) probleminden Fourier serisi katsayıları için doğrusal olmayan sonsuz sayıda integral denklem elde edilir. Fourier serisi katsayılarının çözüm olduğu uzay tanımlanıp uygun norm verilir.

Tanım 4.3.3. B_T ile $[0, T]$ aralığındaki Fourier katsayıları olan sürekli fonksiyonlar kümesi

$$\{\overline{u}(t)\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$$

nin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)| < \infty$$

koşulunu sağlayanları gösterilsin. B_T de norm aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\|\overline{u}(t)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)|.$$

Açıkça B_T Banach uzayıdır.

Problemin Çözümü

(4.3.1)-(4.3.3) probleminin zayıf çözümünü

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \quad (4.3.5)$$

şeklinde arayalım. Burada $u_n(t)$ ($n = \overline{1, \infty}$) bilinmeyen fonksiyondur. Bunu bulmak için (4) eşitliği kullanılarak aşağıdaki integral denklemi elde edilir:

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{-\frac{n^{2k}}{m+1}(t^{m+1}-\tau^{m+1})} f \left(\xi, \tau, \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau) \sin n\xi \right) \sin n\xi d\xi d\tau. \quad (4.3.6)$$

Teorem 4.3.1. Aşağıdaki koşullar altında (4.3.6) denkleminin B_T de

$$M_2(\tau) = \max_{0 \leq \tau \leq t \leq T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) |\sin n\xi| d\xi$$

olmak üzere $TM_2(\tau) < 1$ koşulunu sağlayan bir $[0, T^0)$ aralığında tek çözümü vardır:

- 1) $f(x, t, u)$ bütün değişkenlerine göre $\bar{\Omega} \times R$ bölgesinde sürekli,
- 2) $|f(x, t, u) - f(x, t, v)| \leq b(x, t) |u - v|$, $b(x, t) > 0$, $b(x, t) \in C^1(\bar{\Omega})$ ve $b(0, t) = b(\pi, t) = 0$,
- 3) $f(x, t, 0) \in L_2(\Omega)$, $f(x, t, 0) \in C^1(\bar{\Omega})$ ve $f(0, t, 0) = f(\pi, t, 0) = 0$.

Lemma 4.3.1. Teorem 4.3.1 in koşulları altında (4.3.6) denkleminin B_T de en az bir çözümü vardır.

İspat. Ardışık yaklaşımlar yöntemini uygularsak $N = \overline{1, \infty}$ olmak üzere (4.3.6) denklemini için

$$u_n^{(N+1)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^{\pi} e^{-\frac{n^2 k}{m+1}(t^{m+1}-\tau^{m+1})} f\left(\xi, \tau, \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(N)}(\tau) \sin n\xi\right) \sin n\xi d\xi d\tau \quad (4.3.7)$$

elde ederiz.

$$Au^{(N)}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(N)}(\tau) \sin n\xi \text{ ve } \{\bar{u}^{(N)}(t)\} = \{u_1^{(N)}(t), u_2^{(N)}(t), \dots, u_n^{(N)}(t), \dots\}$$

alalım. Açıkça

$$\max_{0 \leq \tau \leq T} |Au^{(N)}(\xi, \tau)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq \tau \leq T} |u_n^{(N)}(\tau)| = \|\bar{u}^{(N)}(\tau)\|_{B_T} \quad (4.3.8)$$

dir. Şimdi her N için $\bar{u}^{(N)}(t) \in B_T$ yani $\sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(N)}(t)| < \infty$ olduğunu göstermek istiyoruz.

Teorem 4.3.1 deki koşullara göre

$$\|\bar{u}^{(0)}(t)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(0)}(t)| = 0 < \infty$$

olduğu açıktır.

$N = 0$ için

$$u_n^{(1)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^{\pi} e^{-\frac{n^2 k}{m+1}(t^{m+1}-\tau^{m+1})} f(\xi, \tau, Au^{(0)}(\xi, \tau)) \sin n\xi d\xi d\tau$$

olur. Buradan

$$|u_n^{(1)}(t)| \leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right|$$

dır. n ye göre toplam alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(1)}(t)| \leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi d\xi \right| = tM_1(\tau)$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(1)}(t)| \leq TM_1(\tau) < \infty$ dır.

$N = 1$ için

$$u_n^{(2)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{-\frac{n^2 k}{m+1}(t^{m+1} - \tau^{m+1})} f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) \sin n\xi d\xi d\tau$$

olur. Ekleme ve çıkarma yapılırsa

$$\begin{aligned} |u_n^{(2)}(t)| &\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)| |\sin n\xi| d\xi \\ &\quad + t \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi| d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınır ve Lipschitz koşulu da uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(2)}(t)| &\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)| |\sin n\xi| d\xi \\ &\quad + t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi| d\xi \\ &\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi b(\xi, \tau) |Au^{(1)}(\xi, \tau)| |\sin n\xi| d\xi + tM_1(\tau) \\ &\leq t \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi b(\xi, \tau) |\sin n\xi| d\xi + tM_1(\tau) \\ &\leq t \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} M_2(\tau) + tM_1(\tau) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(2)}(t)| \leq T \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} M_2(\tau) + TM_1(\tau) < \infty \text{ dır.}$$

$N = 2$ için

$$u_n^{(3)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{-\frac{n^{2k}}{m+1}(t^{m+1}-\tau^{m+1})} f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) \sin n\xi d\xi d\tau$$

olur. Ekleme ve çıkarma yapılırsa

$$\begin{aligned} |u_n^{(3)}(t)| &\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)| |\sin n\xi| d\xi \\ &\quad + t \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi| d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınır ve Lipschitz koşulu da uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t)| &\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)| |\sin n\xi| d\xi \\ &\quad + t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi| d\xi \\ &\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi b(\xi, \tau) |Au^{(2)}(\xi, \tau)| |\sin n\xi| d\xi + tM_1(\tau) \\ &\leq t \|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi b(\xi, \tau) |\sin n\xi| d\xi + tM_1(\tau) \\ &\leq t \|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} M_2(\tau) + tM_1(\tau) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|\bar{u}^{(3)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(3)}(t)| \leq T \|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} M_2(\tau) + TM_1(\tau) < \infty \text{ dır.}$$

Tümevarım yöntemiyle her N için doğruluğunu gösterelim:

$$N = k - 1 \text{ için } \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(k)}(t)| \leq T \|\bar{u}^{(k-1)}(t)\|_{B_T} M_2(\tau) + TM_1(\tau) < \infty \text{ olsun.}$$

$N = k$ için

$$u_n^{(k+1)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi e^{-\frac{n^{2k}}{m+1}(t^{m+1}-\tau^{m+1})} f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) \sin n\xi d\xi d\tau$$

olur. Ekleme ve çıkarma yapılırsa

$$\begin{aligned} |u_n^{(k+1)}(t)| &\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)| |\sin n\xi| d\xi \\ &\quad + t \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi| d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. n ye göre toplam alınır ve Lipschitz koşulu da uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k+1)}(t)| &\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)| |\sin n\xi| d\xi \\ &\quad + t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, 0) \sin n\xi| d\xi \\ &\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi b(\xi, \tau) |Au^{(k)}(\xi, \tau)| |\sin n\xi| d\xi + tM_1(\tau) \\ &\leq t \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi b(\xi, \tau) |\sin n\xi| d\xi + tM_1(\tau) \\ &\leq t \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} M_2(\tau) + tM_1(\tau) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(k+1)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(k+1)}(t)| \leq T \|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} M_2(\tau) + TM_1(\tau) < \infty$ olur. O halde $\bar{u}^{(N)}(t) \in B_T$ dir.

Şimdi $\{\bar{u}^{(N)}(t)\}$ dizisinin $N \rightarrow \infty$ iken B_T de düzgün yakınsak olduğunu göstere-
lim. Bunun için

$$\bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{N=0}^{\infty} (\bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t))$$

serisinin düzgün yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. Öncelikle $|\bar{u}_n^{(N+1)}(t) - \bar{u}_n^{(N)}(t)|$ farkları için kestirim elde etmek istiyoruz.

$$\begin{aligned} &\|\bar{u}^{(1)}(t) - \bar{u}^{(0)}(t)\|_{B_T} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(1)}(t) - u_n^{(0)}(t)| = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(1)}(t)| \leq TM_1(\tau) = A_T < \infty \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
& |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)| \\
& \leq \frac{2}{\pi} \int_0^t \left| e^{-\frac{n^{2k}}{m+1}(t^{m+1}-\tau^{m+1})} \right| \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)| |\sin n\xi| d\xi d\tau \\
& \leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)| |\sin n\xi| d\xi
\end{aligned}$$

olur. n ye göre toplam alınır ve Lipschitz koşulu da uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)| \\
& \leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)| |\sin n\xi| d\xi \\
& \leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi b(\xi, \tau) |Au^{(1)}(\xi, \tau)| |\sin n\xi| d\xi \\
& \leq t \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi b(\xi, \tau) |\sin n\xi| d\xi \\
& \leq t A_T M_2(\tau)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(2)}(t) - \bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(2)}(t) - u_n^{(1)}(t)| \leq T A_T M_2(\tau)$ dır.

$$\begin{aligned}
& |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \\
& \leq \frac{2}{\pi} \int_0^t \left| e^{-\frac{n^{2k}}{m+1}(t^{m+1}-\tau^{m+1})} \right| \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau \\
& \leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi
\end{aligned}$$

olur. n ye göre toplam alınır ve Lipschitz koşulu da uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \\
& \leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(1)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi \\
& \leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) |Au^{(2)}(\xi, \tau) - Au^{(1)}(\xi, \tau)| |\sin n\xi| d\xi \\
& \leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) \|\bar{u}^{(2)}(t) - \bar{u}^{(1)}(t)\|_{B_T} |\sin n\xi| d\xi \\
& \leq tTA_T M_2(\tau) \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) |\sin n\xi| d\xi \\
& \leq tTA_T M_2(\tau) M_2(\tau)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(3)}(t) - \bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(3)}(t) - u_n^{(2)}(t)| \leq T^2 A_T M_2^2(\tau)$ dır.

$$\begin{aligned}
& |u_n^{(4)}(t) - u_n^{(3)}(t)| \\
& \leq \frac{2}{\pi} \int_0^t \left| e^{-\frac{n^2 k}{m+1}(t^{m+1} - \tau^{m+1})} \right| \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au^{(3)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau \\
& \leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au^{(3)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi
\end{aligned}$$

olur. n ye göre toplam alınır ve Lipschitz koşulu da uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(4)}(t) - u_n^{(3)}(t)| \\
& \leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au^{(3)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(2)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi \\
& \leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) |Au^{(3)}(\xi, \tau) - Au^{(2)}(\xi, \tau)| |\sin n\xi| d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) \|\bar{u}^{(3)}(t) - \bar{u}^{(2)}(t)\|_{B_T} |\sin n\xi| d\xi \\
&\leq t T^2 A_T M_2^2(\tau) \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) |\sin n\xi| d\xi \\
&\leq t T^2 A_T M_2^2(\tau) M_2(\tau)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|\bar{u}^{(4)}(t) - \bar{u}^{(3)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(4)}(t) - u_n^{(3)}(t)| \leq T^3 A_T M_2^3(\tau)$ dır.

Tümevarım yöntemiyle her N için doğruluğunu gösterelim:

$N = k - 1$ için

$$\|\bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_n^{(k)}(t) - u_n^{(k-1)}(t)| \leq T^{k-1} A_T M_2^{k-1}(\tau) \text{ olsun.}$$

$N = k$ için

$$\begin{aligned}
&|u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t)| \\
&\leq \frac{2}{\pi} \int_0^t \left| e^{-\frac{n^2 k}{m+1}(t^{m+1} - \tau^{m+1})} \right| \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau \\
&\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi
\end{aligned}$$

olur. n ye göre toplam alınır ve Lipschitz koşulu da uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t)| \\
&\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(k-1)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi \\
&\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) |Au^{(k)}(\xi, \tau) - Au^{(k-1)}(\xi, \tau)| |\sin n\xi| d\xi \\
&\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) \|\bar{u}^{(k)}(t) - \bar{u}^{(k-1)}(t)\|_{B_T} |\sin n\xi| d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq tT^{k-1}A_TM_2^{k-1}(\tau)\max_{0\leq\tau\leq t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}b(\xi,\tau)|\sin n\xi|d\xi \\
&\leq tT^{k-1}A_TM_2^{k-1}(\tau)M_2(\tau)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|\bar{u}^{(k+1)}(t) - \bar{u}^{(k)}(t)\|_{B_T} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0\leq t\leq T} |u_n^{(k+1)}(t) - u_n^{(k)}(t)| \leq T^k A_T M_2^k(\tau) \text{ dir.}$$

Buradan

$$\bar{u}^{(N+1)}(t) = \bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{k=0}^N (\bar{u}^{(k+1)}(t) - \bar{u}^{(k)}(t)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} T^k A_T M_2^k(\tau)$$

olur. $TM_2(\tau) < 1$ koşulu altında $\sum_{k=0}^{\infty} T^k A_T M_2^k(\tau)$ serisinin yakınsaklığından $\{\bar{u}^{(N)}(t)\}$ dizisinin B_T de düzgün yakınsaklığı elde edilir. Sonuç olarak $\bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{N=0}^{\infty} (\bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t))$ serisi düzgün yakınsaktır.

$\lim_{N\rightarrow\infty} \bar{u}^{(N+1)}(t) = \bar{u}(t)$ olsun. $\{\bar{u}^{(N)}(t)\}$ dizisi düzgün yakınsak olduğundan $\bar{u}(t)$ fonksiyonu B_T de süreklidir. $\bar{u}(t)$ fonksiyonunun (4.3.6) integral denklemini sağladığını gösterebiliriz:

$$\begin{aligned}
&|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)| = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t) - u_n^{(N+1)}(t)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^t \left| e^{-\frac{n2k}{m+1}(t^{m+1}-\tau^{m+1})} \right| \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} t \max_{0\leq\tau\leq t} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi \\
&\leq t \max_{0\leq\tau\leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) |Au(\xi, \tau) - Au^{(N)}(\xi, \tau)| |\sin n\xi| d\xi \\
&\leq t \max_{0\leq\tau\leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)\|_{B_T} |\sin n\xi| d\xi \\
&\leq tM_2(\tau) \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)\|_{B_T}
\end{aligned}$$

olur. Eğer $\lim_{N\rightarrow\infty} \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)\|_{B_T} = 0$ olduğunu gösterirsek $\bar{u}(t)$ fonksiyonunun

(4.3.6) integral denklemini sağladığı sonucu çıkar.

$$\begin{aligned}
|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t) - u_n^{(N+1)}(t)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^t \left| e^{-\frac{n^{2k}}{m+1}(t^{m+1}-\tau^{m+1})} \right| \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} t \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} t \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} t \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au^{(N+1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Au^{(N)}(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi \\
&\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) |Au(\xi, \tau) - Au^{(N+1)}(\xi, \tau)| |\sin n\xi| d\xi \\
&\quad + t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) |Au^{(N+1)}(\xi, \tau) - Au^{(N)}(\xi, \tau)| |\sin n\xi| d\xi \\
&\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)\|_{B_T} |\sin n\xi| d\xi \\
&\quad + t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) \|\bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)\|_{B_T} |\sin n\xi| d\xi \\
&\leq tM_2(\tau) \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)\|_{B_T} + tM_2(\tau) \|\bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)\|_{B_T}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)\|_{B_T} \\
&\leq TM_2(\tau) \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)\|_{B_T} + TM_2(\tau) \|\bar{u}^{(N+1)}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)\|_{B_T} \\
&\leq TM_2(\tau) \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N+1)}(t)\|_{B_T} + T^{N+1}M_2^{N+1}(\tau) A_T
\end{aligned}$$

elde edilir. $TM_2(\tau) < 1$ koşulu da dikkate alınırsa $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\bar{u}(t) - \bar{u}^{(N)}(t)\|_{B_T} = 0$ olur.

Böylece $\bar{u}(t)$ fonksiyonunun (4.3.6) integral denklemini sağladığı gösterildi.

Lemma 4.3.2. Teorem 4.3.1 in koşulları altında (4.3.6) denkleminin B_T de en fazla bir çözüümü vardır.

İspat. Çözümün tekliğini göstermek için $\bar{v}(t)$ nin diğeri bir çözüm olduğunu kabul edelim. $|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|$ için kestirim elde edelim:

$$\begin{aligned}
|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)| &= \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t) - v_n(t)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^t \left| e^{-\frac{n^{2k}}{m+1}(t^{m+1} - \tau^{m+1})} \right| \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi d\tau \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} t \max_{0 \leq \tau \leq t} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(\xi, \tau, Au(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, Av(\xi, \tau))| |\sin n\xi| d\xi \\
&\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) |Au(\xi, \tau) - Av(\xi, \tau)| |\sin n\xi| d\xi \\
&\leq t \max_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b(\xi, \tau) \|\bar{u}(t) - v(t)\|_{B_T} |\sin n\xi| d\xi \\
&\leq t M_2(\tau) \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} \leq T M_2(\tau) \|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T}$$

elde edilir. $T M_2(\tau) < 1$ koşulu da dikkate alınırsa $\|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)\|_{B_T} = 0$ olur. Böylece $\bar{u}(t) = \bar{v}(t)$ olup $u_n(t) = v_n(t)$, $(n = \overline{1, \infty})$ olur. Yani (4.3.6) integral denkleminin çözüümünün tek olduğu gösterildi.

Teorem 4.3.1 in İspatı. Lemma 4.3.1 ve Lemma 4.3.2 den (4.3.6) denkleminin tek çözüümü vardır. Böylece teorem ispat edildi.

Teorem 4.3.2. Teorem 4.3.1 koşulları altında (4.3.1)-(4.3.3) probleminin (4.3.5) Şeklindeki düzgün yakınsak seri ile temsil edilen tek zayıf çözüümü vardır.

İspat. (4.3.6) denkleminin çözüümü kullanılarak oluşturulan (4.3.5) serisi düzgün yakın-

sak olduğundan süreklidir. (4.3.5) serisinin kısmi toplamlar dizisi

$$u_{(l)}(x, t) = \sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx$$

şeklindedir. Teorem 4.3.1 ve $\lim_{l \rightarrow \infty} u_{(l)}(x, t) = u(x, t)$ den
 $\lim_{l \rightarrow \infty} f(x, t, u_{(l)}(x, t)) = f(x, t, u(x, t))$ dır.

$$S_l = \int_0^T \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t} - (-1)^k t^m \frac{\partial^{2k} v}{\partial x^{2k}} \right) u_{(l)} + f(x, t, u_{(l)}) v \right] dx dt$$

tanımlansın. $\lim_{l \rightarrow \infty} S_l = 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. Kısmi integral alma ard arda kullanılarak

$$\begin{aligned} S_l &= \int_0^T \int_0^\pi \left(-\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) - (-1)^k t^m \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) (-1)^k n^{2k} \sin nx \right) \right) v dx dt \\ &+ \int_0^T \int_0^\pi f(x, t, u_{(l)}) v dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^\pi \left(-\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) - (-1)^k t^m \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \left(\sum_{n=1}^l u_n(t) \sin nx \right) \right) v dx dt \\ &+ \int_0^T \int_0^\pi f(x, t, u_{(l)}) v dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^\pi \left(-\frac{\partial}{\partial t} u_{(l)} - (-1)^k t^m \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} u_{(l)} + f(x, t, u_{(l)}) \right) v dx dt \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S_l = \int_0^T \int_0^\pi - \left(\frac{\partial}{\partial t} u + (-1)^k t^m \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} u - f(x, t, u) \right) v dx dt$$

olur. (4.3.1) denkleminde

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S_l = 0$$

dır. Böylece $u(x, t) = \sum_{n=1}^\infty u_n(t) \sin nx$ fonksiyonu (4.3.1)-(4.3.3) probleminin zayıf çözümüdür. Teorem ispat edildi.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasının esas kısmını oluşturan Araştırma Bulguları bölümünde ele alınan problemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği incelendi.

$m = 0$, $m = 1$ ve m doğal sayı olmak üzere t^m nin problem üzerindeki etkisi araştırıldı. Birinci kısımda $m = 0$ durumunda $k \geq 1$ için Teoremdeki koşullar altında varlık ve tekliğin her sınırlı T için geçerli olduğu yani global varlık ve teklik ispatlandı. İkinci kısımda $m = 1$ durumunda $k > 1$ için Teoremdeki koşullar altında varlık ve tekliğin her sınırlı T için geçerli olduğu yani global varlık ve teklik ispatlandı. Üçüncü kısımda m doğal sayı olma durumunda $k \geq 1$ için Teoremdeki koşullar altında varlık ve tekliğin küçük bir aralık olan $[0, T^0)$ için geçerli olduğu yani lokal varlık ve teklik ispatlandı.

5.1 Öneriler

Ele alınan denklemler yerine pseudo parabolik denklemler için benzer çalışmalar yapılabilir.

Ele alınan denklemler için sınır değer problemi için benzer çalışmalar yapılabilir.

Sadece parabolik değil aynı zamanda hiperbolik ve eliptik diferansiyel denklemler için de değişken katsayılı durumda benzer çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] T. Myint-U and L. Debnath, Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, (2007), Birkhauser Boston.
- [2] M. S. Baouendi and P. Grisvard, Sur une equation d'evolution changeant de type, J. Func. Anal., 2 (1968), 352-367.
- [3] L. C. Evans, Partial Differential Equations, (1998), Graduate Studies in Mathematics, vol. 19.
- [4] N. Polat, Doğrusal Olmayan Parabolik veya Hiperbolik Diferansiyel Denklemlerde Global Çözümlerin Yokluğu (Blow Up), (2005), Doktora Tezi.
- [5] I. Çiftçi, Değişken Katsayılı Fourier Serileriyle Parabolik Denklemler için Devirli Sınır Koşullu Karışık Problemin Analizi, (2007), Doktora Tezi.
- [6] I. Ciftci and H. Halilov, Fourier method functions for a quasi-linear parabolic equation with periodic boundary condition, Hacettepe J. Math. Stat., 37(2) (2008), 69-79.
- [7] H. Halilov and I. Ciftci, Fourier method for a quasilinear pseudo-parabolic equation with periodic boundary condition, Int. J. Pure and Applied Math., 52(5) 2009, 717-727.
- [8] D. Amanov and A. V. Yuldasheva, Solvability and Spectral Properties of Boundary Value Problems for Equations of Even Order, Malaysian Journal of Mathematical Sciences 3(2) (2009), 227-248.
- [9] D. Amanov and A. Ashyralyev, Well-Posedness of Boundary-Value Problems for Partial Differential Equations of Even Order, E. J. Diff. Equ., 2014(108) (2014), 1-18.
- [10] K.B. Sabitov, The Dirichlet Problem for Higher-Order Partial Differential Equations, Mathematical Notes, 97 (2) (2015), 255-2675.
- [11] D. Amanov, Solvability and spectral properties of the boundary value problem for degenerating higher order parabolic equation, Appl. Math. And Comp., 268 (2015), 1282-1291.
- [12] A.I. Kozhanov and N. R. Pinigina, Boundary-Value Problems for Some Higher-Order Nonclassical Differential Equations, Mathematical Notes, 101(3) 2017, 467-474.
- [13] A. V. Yuldasheva, On a problem for a quasi-linear equation of even order, J. Math. Sci., 241(4) (2019), 423-429.
- [14] Tyn Myint-U, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, (1981), Elsevier North Holland.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad

TANTAŞ, Ömer

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	2018
	Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	2013
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Sınıf Öğretmenliği Bölümü	2006
Lise	Açık Öğretim Lisesi	2002

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2006-	Milli Eğitim Bakanlığı, DİYARBAKIR	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce (YÖKDİL 67,5)

Yayınlar

1. Ö. Tantaş and N. Polat, Existence of Solutions to Higher Order Semilinear Parabolic Equations. (incelemede)
2. Ö. Tantaş ve N. Polat, Existence of Solutions to Semilinear Parabolic Equations of Even Order with Variable Coefficient. (incelemede)
3. O. Tantas and N. Polat, Existence of Solutions to Higher Order Semilinear Parabolic Equations with Variable Coefficient, Int. J. Open Problems Compt. Math., 17(4), December 2024.
4. O. Tantas and N. Polat, Existence of Solutions to Semilinear Parabolic Equations of even order with multiplied t . (incelemede)

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Ömer TANTAŞ		
Öğrenci No	18804602		
Ana Bilim Dalı	Matematik		
Program Türü	Proje ☐	Yüksek Lisans ☐	Doktora ☒
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Prof.Dr.Necat POLAT		
(Varsa) II. Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)			
Tez Başlığı	Değişken Katsayılı Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Matematiksel Davranışı		
RAPOR BİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	65		
Raporlama Tarihi	06/02/2025		
Benzerlik Oranı (%)	23		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 65 sayfalık kısmına ilişkin, 06/02/2025 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 23 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç
☐Kaynaklar hariç
☐Alıntılar hariç/dâhil
☒ Diğer (Herşey dahil)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Tez benzerlik oranı üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrencinin Adı, Soyadı: Ömer TANTAŞ

Tarih: 06/02/2025

İmza:

Danışman Adı, Soyadı: Prof. Dr. Necat POLAT

İmza:

Tarih: 06/02/2025

Ana Bilim Dalı Başkanı Adı, Soyadı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY

İmza:

Tarih: 06/02/2025