

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Değişken Kesite Sahip Fonksiyonel Derecelendirilmiş
Malzemedен Yapılmış Bir Dairesel Kanatçığın Termal
Gerilmelerin İncelenmesi**

İbrahim Erdem KAYPAK

Makine Mühendisliği (Türkçe) Anabilim Dalı

Kasım, 2024

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAYI

Değişken Kesite Sahip Fonksiyonel Derecelendirilmiş
Malzemedен Yapılmış Bir Dairesel Kanatçığın Termal
Gerilmelerin İncelenmesi

İbrahim Erdem KAYPAK

Makine Mühendisliği (Türkçe) Anabilim Dalı

Bu Yüksek Lisans Tezi 14/11/2024 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Değerlendirilmiş ve Oy Birliği / Oy Çokluğu ile Kabul Edilmiştir.

Jüri : Doç. Dr. Kerimcan ÇELEBİ (Danışman)
: Prof. Dr. Abdulkadir YAŞAR
: Doç. Dr. Erinc ULUDAMAR

Bu Tez Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği (Türkçe) Anabilim Dalında
Hazırlanmıştır.

Tez No:

Prof. Dr. Sadık DİNÇER
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak
gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZ	i
ABSTRACT	ii
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	iii
TEŞEKKÜR.....	ix
TABLolar DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xii
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	5
3. MATERYAL VE YÖNTEM	13
3.1. Halpin-Tsai Homojenizasyon Yöntemi	13
3.2. Sayısal Yöntem	13
3.2.1. Chebyshev-Gauss-Lobatto Örgü Noktaları.....	14
3.2.2. Pseudospektral Chebyshev Türevleme Matrisi.....	15
3.3. Dairesel Kanatçığın Sıcaklık Dağılımı ve Termal Gerilmeleri.....	19
3.4. Sayısal Çözüm	36
3.4.1. Sıcaklık Dağılımı	36
3.4.2. Termal Gerilme Dağılımı.....	37
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	39
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	45
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	53

**Değişken Kesite Sahip Fonksiyonel Derecelendirilmiş
Malzemedен Yapılmış Bir Dairesel Kanatçığın Termal
Gerilmelerin İncelenmesi**

İbrahim Erdem KAYPAK

Danışman: Doç. Dr. Kerimcan ÇELEBİ

Makine Mühendisliği (Türkçe) Anabilim Dalı

ÖZ

Bu tezde, değişken kesitli dairesel bir kanatçığın sıcaklık dağılımı ve termal gerilmeleri Pseudospectral Chebyshev Yöntemi (PCY) kullanılarak sayısal olarak incelenmiştir. Çalışmada, dairesel kanatçığın Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemedен (FDM) yapıldığı varsayılmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin mekanik özellikleri dairesel kanatçık boyunca değişkenlik göstermektedir. Kanatçık kalınlığının radyal yönde doğrusal olarak değiştiği düşünülmüştür. Bu durum, enerji dengesi ve termal gerilme denklemlerinin daha karmaşık hale gelmesine ve analitik çözümlerinin güçleşmesine yol açmıştır. Bu sebeple, Pseudospectral Chebyshev Yöntemi sabit kesitli bir dairesel kanatçık üzerinde doğrulanmıştır. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemedен yapılmış değişken kesitli dairesel kanatçığın sıcaklık dağılımı ve termal gerilmeler ayrıntılı olarak tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dairesel kanatçık, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme, termal gerilme, Pseudospectral Chebyshev Yöntemi

**Investigation of Thermal Stresses in a Annular Fin
Made of Functionally Graded Material With Variable Cross-
Section**

İbrahim Erdem KAYPAK

Advisor: Doç. Dr. Kerimcan ÇELEBİ

Department of Mechanical Engineering (Turkish)

ABSTRACT

In this thesis, the temperature distribution and thermal stresses of a variable cross-section annular fin have been numerically investigated using the Pseudospectral Chebyshev Method (PCM). The study assumes that the annular fin is made of Functionally Graded Material (FGM). The mechanical properties of the Functionally Graded Material vary along the radius of the annular fin. It is assumed that the fin thickness changes linearly in the radial direction. This results in more complex energy balance and thermal stress equations, making analytical solutions more difficult. Therefore, the Pseudospectral Chebyshev Method has been validated for a fin with a uniform cross-section. Based on the obtained results, the temperature distribution and thermal stresses of the variable cross-section annular fin made of Functionally Material are discussed in detail.

Keywords: Annular fin, Functionally Graded Material, thermal stress, Pseudospectral Chebyshev Method

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Isı transferi olgusu, sıcak bir ortamdan daha soğuk bir ortama enerji akışı olarak tanımlanır ve son yıllarda maliyet ve ısı verimliliği açısından önemli gelişmeler kaydedilmiştir. Bu bağlamda, ısı transferi konusundaki araştırmalar, aktif ve pasif teknikler olarak iki ana başlık altında toplanmıştır. Aktif teknikler ek enerji gerektirirken, pasif teknikler ek enerji gerektirmemektedir. Pasif kontrol teknikleri genellikle yüzey geometrisinin etkilerini incelemektedir. Bu bağlamda, pasif kontrol tekniklerinden biri olan kanatçıklar dikkat çekmektedir. Kanatçık tasarımı, kanatçık malzemelerinin, profillerinin ve boyutlarının seçilmesini kapsar ve ısı transferi oranlarını artırmak açısından kritik öneme sahiptir. Dairesel kanatçıklar, sıcaklık farkı bulunan iki ortam arasında ısı transferini sağlamak amacıyla kullanılmaktadır. Dairesel kanatçıkların tasarım aşamasında dikkate alınması gereken birkaç önemli unsur bulunmaktadır. Bunlardan biri, dairesele kanatçıkların geometrisidir (kesit alanı), çünkü bu doğrudan ısı verimliliği ve kanatçık üzerindeki sıcaklık farklarından kaynaklanan termal gerilmeleri etkiler. Bu nedenle, tasarım sürecinde geometrik faktörlerin dikkatle ele alınması kritik öneme sahiptir. Bir diğer önemli tasarım parametresi ise dairesele kanatçıkta kullanılan malzemedir. Kanatçık üzerindeki farklı sıcaklık değerleri, çeşitli ısı genleşmelere neden olur. Bu genleşmeler farklı miktarda termal gerilmelere yol açar ve bu gerilmeler mekanik kusurlara, örneğin sünme, yorgunluk, çatlaklar ve çatlakların ilerlemesi gibi sorunlara yol açabilir. Bu tür hataların önlenmesi ve uygun kanatçık tasarımının sağlanabilmesi için, kanatçık üzerinde oluşacak termal gerilmelerin önceden belirlenmesi gerekmektedir. Yüksek sıcaklık farklarına maruz kalan kanatçıklarda oluşan termal gerilmeleri azaltmanın bir yolu kompozit malzeme yerine Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM) kullanmaktır. FDM'ler mikro düzeyde homojen karakterde olmayan kompozit malzemelerdir. Mikro yapılarındaki sürekli değişiklikler FDM'leri geleneksel kompozit malzemelerden ayırır **(Koizumi, 1997)**. Bu tezde FDM'den yapılmış dairesele bir kanatçık kullanılmıştır. FDM'nin özellikleri verilen fonksiyona göre bir yüzeyden diğerine kademeli ve sürekli olarak değişir. Malzeme özelliklerinin kalınlığa göre derecelendirilmesi, gerilim dağılımındaki ani değişiklikleri önler. Ayrıca bu malzemeyi kullanmanın faydalarından birisi de yüksek sıcaklıklara iyi dayanabilmesidir. **(Maknun ve Zarfatina, 2021)**.

Kompozit malzemelerden yapılan dairesele kanatçıkların malzeme özellikleri, Halpin-Tsai yöntemi kullanılarak belirlenmiştir. Halpin-Tsai, deneysel verilere dayalı geliştirilmiş bir amprik model olup, özellikle parçacık takviyeli kompozitlerin malzeme özelliklerini tahmin etmede oldukça etkili bir yöntem olarak kabul edilmektedir. Bu yöntemle, kompozit malzemelerdeki takviye elemanlarının ve matris malzemenin özelliklerinin birleşimini dikkate alarak, malzemenin genel mekanik ve ısı özellikleri şu şekilde belirlenir.

$$\frac{p}{p_m} = \frac{1+\xi\eta V_f}{1-\eta V_m} \quad (0.1)$$

" η " ve " ξ " şu şekilde temsil edilebilir:

$$\eta = \frac{\frac{p_f}{p_m} - 1}{\frac{p_f}{p_m} + \xi}, \quad \xi = 2 \left(\frac{l}{m} \right) \quad (0.2)$$

Burada p , parçacık takviyeli kompozit malzemenin bir özelliğini temsil etmektedir. p_f , fiberin özelliğini; p_m ise matris malzemesinin özelliğini tanımlar. ξ , fiber geometrisi ile ilgili bir parametreyi ifade ederken, l , fiber geometrisinin uzunluğunu; m ise genişliğini belirtmektedir. V_f , fiberin hacim oranını; V_m ise matrisin hacim oranını temsil eder ve bunlar şu şekilde tanımlanmaktadır: (Shariyat, 2012; Eker ve ark., 2021)

$$V_f = \left(\frac{r-a}{b-a} \right)^n, \quad V_m = 1 - V_f \quad (0.3)$$

Bu tezde belirlendiği üzere, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde n değeri 2 olarak alınmıştır.

Bu çalışmada, değişken kesitli bir dairesel kanatçığın sıcaklık dağılımı ve buna bağlı termal gerilmeleri Pseudospectral Chebyshev Yöntemi kullanılarak sayısal olarak incelenmiştir. Sıcaklık dağılımını yöneten denklemler ve ilgili sınır koşulları oluşturulurken aşağıdaki varsayımlar yapılmıştır:

1. Dairesel kanatçık eksenel simetriktir.
2. Kanatçığın kalınlığı, yarıçapa kıyasla oldukça küçüktür.
3. Kanatçık yüzeyinde yalnızca ısı iletimi söz konusudur ve radyasyon ile ısı transferi ihmal edilmiştir.
4. Çevre sıcaklığı ve ısı transferi katsayısı sabit olarak kabul edilmiştir.
5. Kanatçık termal kararlılıktadır; dolayısıyla kanatçık içindeki sıcaklık zamana bağlı olarak değişmemektedir.
6. Kanatçık içinde ısı kaybı veya ısı üretimi göz önüne alınmamıştır.
7. Kanatçık kalınlığı, kanatçığın yarıçapına bağlı olarak değişmektedir.
8. Termal gerilmeleri yöneten denklemler ve sınır koşulları elde edilirken yukarıdaki varsayımlara ek olarak şu varsayımlar yapılmıştır:
9. Kanatçık içinde iç kuvvetlerin olmadığı,
10. Kanatçık yüzeylerinde traksiyon kuvvetlerinin bulunmadığı kabul edilmiştir.

Bu varsayımlar dikkate alındığında sıcaklık dağılımını yöneten denklem;

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} \left(\frac{k'(r)}{k(r)} + \frac{1}{r} + \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} \right) - \frac{2h}{\delta(r)k(r)} (T - T_\infty) = 0 \quad (0.4)$$

ve sınır koşulları,

$$T(a) = T_b \quad (0.5)$$

$$T'(b) = 0 \quad (0.6)$$

şeklinde elde edilmiştir.

Dairesel kanatçıklarda gerilme, gerinme ve sıcaklık arasındaki ilişkileri tanımlayan denklemler, gerinme ile deplasman arasındaki ilişkileri belirleyen denklemler ve gerilme denge denklemleri aşağıdaki şekilde sunulmuştur.

Gerilme, gerinme ve sıcaklık arasındaki ilişkiyi veren denklemler:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\phi - (1 + \nu) \alpha T) \quad (0.7)$$

$$\sigma_\phi = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_\phi + \nu \varepsilon_r - (1 + \nu) \alpha T) \quad (0.8)$$

Gerinme-deplasman arasındaki ilişkiyi veren denklemler:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (0.9)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{u}{r} \quad (0.10)$$

Gerilme denge denklemi:

$$\frac{\sigma_r}{\delta(r)_r} \frac{d\delta(r)_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} + \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (0.11)$$

şeklinde elde edilmiştir.

Değişken kesitli bir dairesel kanatçıkta gerilme bileşenini yöneten denklem, gerilme-gerinme-sıcaklık ilişkisini, gerinme-deplasman ilişkisini ve gerilme denge denklemlerini tanımlayan denklemler kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} \left[\frac{\delta'(r)}{\delta(r)} + \frac{E'(r)}{E(r)} + \frac{2\nu(r)v'(r)}{1-\nu(r)^2} + \frac{1}{r} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{u}{r} \left[\frac{\delta'(r)}{\delta(r)} v(r) + \frac{E'(r)}{E(r)} v(r) + \frac{2v(r)v'(r)}{1-v(r)^2} v(r) + v'(r) - \frac{1}{r} \right] = \\
& (1 + v(r))\alpha(r)T(r) \left[\frac{\delta'(r)}{\delta(r)} + \frac{E'(r)}{E(r)} + \frac{2v(r)v'(r)}{1-v(r)^2} \right] + \\
& v'(r)\alpha(r)T(r) + v(r)\alpha(r) + v(r)\alpha'(r)T(r) + \alpha(r)T'(r) + \alpha'(r)T(r)
\end{aligned} \tag{0.12}$$

Termal gerilmeler kısmındaki sınır koşulları (8) numaralı varsayım kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_r(a) = 0 \tag{0.13}$$

$$\sigma_r(b) = 0 \tag{0.14}$$

Sıcaklık dağılımını ve termal gerilmeleri yöneten denklemler, belirtilen sınır koşulları altında Pseudospectral Chebyshev yöntemi kullanılarak sayısal olarak incelenmiştir. Bu yöntemde, geometrik parçanın tamamı dikkate alınarak, sınır bölgelerinde daha yoğun ve merkeze doğru daha seyrek bölüntü noktaları yerleştirilerek çözümleme yapılmıştır. Bölüntü noktaları, Gauss-Lobatto noktaları kullanılarak sağdan sola doğru şu şekilde elde edilmiştir (**Trefethen, 2000**).

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, 2, 3 \dots N \tag{0.15}$$

Denklem (0.15) no'lu denklemde tanımlanan fonksiyonla ilişkili olarak, Chebyshev diferansiyel matrisinin örgü noktası dağılımları aşağıda belirtilen çözüm şemasına göre oluşturulacaktır. Çözüm şemasını kurgulamak için Chebyshev örgü noktalarında tanımlı bir v vektörü dikkate alınacaktır. Bu v vektörünün, aynı örgü noktalarındaki ayırık türevini w , iki aşamada elde etmek mümkündür (**Trefethen, 2000**).

- p derecesi $\leq N$ olan bir interpolasyon polinomu $p(x_j) = v_j$, $0 \leq j \leq N$ şeklinde seçilirse
- Örgü noktalarındaki türevi $w_j = p'(x_j)$, $0 \leq j \leq N$ şeklinde olacaktır.

Bu işlem doğrusal olmasından dolayı örgü noktalarındaki w türevi, D_N olarak isimlendirilecek olan $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutunda bir matris ile v çarpımı ile temsil edilebilir.

$$w = D_N v \tag{0.16}$$

D_N türevleme matrisi Lagrange interpolasyonu kullanılarak elde edilir ve bölüntü noktalarındaki birinci dereceden türevi temsil eder. İkinci ve daha yüksek dereceden türevler, türevleme matrislerinin (D_N) birbiri ile çarpılması sonucunda elde edilir ($D_N^2 = D_N X D_N$). Türevleme matrisleri kullanılarak sıcaklık kısmını yöneten denklemler aşağıdaki şekilde ayrıklaştırılır.

$$L_1 T = RHS_1 \quad (0.17)$$

Yukarıda verilen lineer sistem denklemindeki L_1 ve RHS_1 aşağıdaki gibi verilmiştir,

$$L_1 = D^2 + \left(\frac{k'(r)}{k(r)} + \frac{1}{r} + \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} \right) D - \frac{2h}{\delta(r)k(r)} \quad (0.18)$$

$$RHS_1 = \frac{2h}{\delta(r)k(r)} T_\infty \quad (0.19)$$

(0.17) no'lu lineer denklem sistemi, sıcaklık sınır koşullarında (0.5 ve 0.6) çözülür ise sıcaklık için aşikar olmayan çözüm elde edilmiş olur. Aynı prosedür termal gerilmeleri yöneten denklem için uygulanırsa

$$L_2 u = RHS_2 \quad (0.20)$$

şeklinde bir lineer sistem denklemini elde edilir. Bu denklemde geçen L_2 ve RHS_2 aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$L_2 = D^2 + \left[\frac{\delta'(r)}{\delta(r)} + \frac{E'(r)}{E(r)} + \frac{2v(r)v'(r)}{1-v(r)^2} + \frac{1}{r} \right] D + \frac{1}{r} \left[\frac{\delta'(r)}{\delta(r)} v(r) + \frac{E'(r)}{E(r)} v(r) + \frac{2v(r)v'(r)}{1-v(r)^2} v(r) + v'(r) - \frac{1}{r} \right] \quad (0.21)$$

$$RHS_2 = (1 + v(r))\alpha(r)T(r) \left[\frac{\delta'(r)}{\delta(r)} + \frac{E'(r)}{E(r)} + \frac{2v(r)v'(r)}{1-v(r)^2} \right] + v'(r)\alpha(r)T(r) + v(r)\alpha(r) + v(r)\alpha'(r)T(r) + \alpha(r)T'(r) + \alpha'(r)T(r) \quad (0.22)$$

(0.20) numaralı lineer denklem sistemi, gerilme (0.13-0.14) sınır koşullarında çözülür ise deplasmanlar için aşikar olmayan çözüm elde edilmiş olur.

Yöntemin doğruluğu, literatürde bulunan sabit kesitli dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımı ve termal gerilmeler için yapılmış analitik çözümle karşılaştırılarak doğrulanmıştır. Değişken kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış dairesel kanatçıkta elde edilen

sıcaklık dağılımları ve termal gerilmeler, aynı malzemeden yapılmış sabit kesitli kanatçıktaki sıcaklık dağılımları ve termal gerilmeler ile karşılaştırılmıştır.



TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez konumun belirlenerek tez çalışmamın yürütülmesini üstlenen, çalışmalarım boyunca değerli bilgi ve deneyimlerini esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Kerimcan ÇELEBİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme sürecimi özenle takip edip çalışmalarına tecrübeleriyle katkı sağlayan Prof. Dr. Abdulkadir YAŞAR'a ve Doç. Dr. Erinç ULUDAMAR'a teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarında bilgi ve tecrübelerini eksik etmeyen Öğr. Gör. Ali YILDIRIM'a teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmamın her aşamasında yardımını esirgemeyen Arş. Gör. Orhun ÇAĞLAR'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen annem Hülya KAYPAK ve babam Zahir KAYPAK'a tüm içtenliğimle teşekkür ederim.

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 4.1. Silisyum Karbür ve Alüminyumun Mekanik ve Termal Özellikleri	39
Tablo 4.2. Alüminyum Oksit Titanyum 6-Alüminyum 4- Vanadyumun Mekanik ve Termal Özellikleri.....	39
Tablo 4.3. Sayısal Yöntemin Analitik Sonuçlarla Karşılaştırılması (Caglar, 2024)	40



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Farklı Kesite Sahip Kanatçıklar	2
Şekil 3.1. Gauss-Lobatto Örgü Noktaları Dağılımı.....	15
Şekil 3.2. Değişken Kesitli Dairesel Kanatçık	19
Şekil 3.3. Normal ve Kayma Gerilmeleri.....	26
Şekil 3.4. Eksenel ve Teğetsel Gerilmeler	32
Şekil 4.1. Dairesel Kanatçığın Sıcaklık Dağılımı	41
Şekil 4.2. Dairesel Kanatçığın Radyal Gerilmeleri	42
Şekil 4.3. Dairesel Kanatçığın Teğetsel Gerilmeleri.....	43



SİMGELER VE KISALTMALAR

$A(r)$	: Kesit alanı
a, b	: Kanatçığın iç ve dış yarıçapları
$E(r)$	: r 'ye bağlı değişken elastisite modülü
y_b	: Kanatçığın tabanındaki kalınlık
M	: Kanatçığın ucundaki kalınlık
E_0	: $r=a$ daki elastisite modülü
h	: Isı transfer katsayısı
$k(r)$	: r 'ye bağlı değişken ısı iletkenlik
k_0	: $r=a$ daki ısı iletkenlik
r, ϕ	: Polar koordinatlar
T	: Kanatçık sıcaklığı
T_b	: Taban sıcaklığı
T_∞	: Çevre sıcaklığı
u	: Radyal deplasman
$\alpha(r)$	: r 'ye bağlı değişken lineer ısı genleşme katsayısı
α_0	: $r=a$ daki lineer ısı genleşme katsayısı
β	: Elastik modül homojensizlik katsayısı
γ	: Isı iletkenlik homojensizlik katsayısı
δ	: Kanatçık kalınlığı
$\varepsilon_r, \varepsilon_\phi$	: Radyal ve teğetsel gerilmeler
λ	: Lineer ısı genleşme homojensizlik katsayısı
ν	: Poison oranı
σ_r, σ_ϕ	: Radyal ve teğetsel gerilmeler
$\tau_{r\phi}, \tau_{\phi r}$	: Kayma gerilmeleri
R_r, R_ϕ	: İç gerilmeler
F_r, F_ϕ	: Radyal ve teğetsel kuvvetler

1. GİRİŞ

Günümüzde, ısı transferinin önemi; aşırı maliyetler, ısı verimlilik ve endüstriyel uygulamalardaki gereksinimler doğrultusunda giderek artmaktadır. Bu bağlamda, araştırmacılar, ısı transfer süreçlerini daha iyi anlamak ve bu süreçleri iyileştirmek amacıyla kapsamlı çalışmalar yürütmektedir.

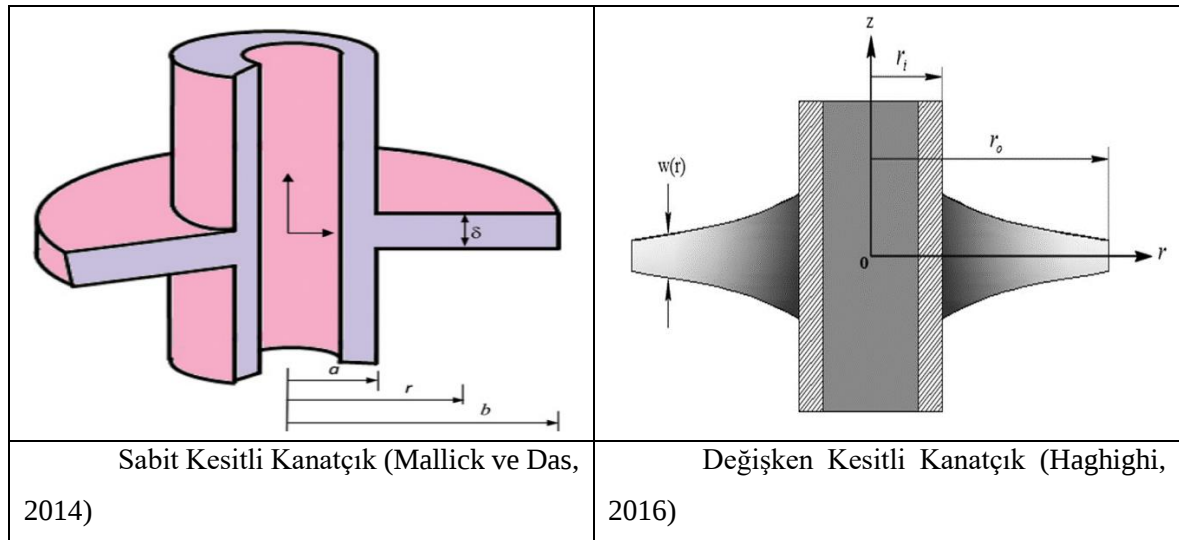
Isı transferi, genel olarak iki ana kategoriye ayrılarak incelenmektedir: Aktif ve pasif teknikler. Aktif teknikler, ısı transferini iyileştirmek için ek enerji gerektiren yöntemlerdir. Bu tür yöntemler, genellikle ısıtma veya soğutma süreçlerini hızlandırmak amacıyla dış bir enerji kaynağından faydalanır. Pasif teknikler ise ısı transferini iyileştirmek için ek enerjiye ihtiyaç duymadan çalışan yöntemlerdir. Bu tür yöntemler, genellikle yüzey geometrisinin, malzeme özelliklerinin ve doğal hava akışlarının etkilerini en iyi şekilde değerlendirmeye yöneliktir (**Mousavi Ajarostaghi ve ark, 2022**). Bu doğrultuda, kanatçıklar, pasif ısı transferini artırma konusunda son derece etkili bir teknik olarak dikkat çekmektedir. Kanatçıklar, çeşitli mühendislik alanlarında ısı transferini optimize etmek için tasarlanmış yapısal elemanlardır. Bu elemanlar, ısıyı daha verimli bir şekilde dağıtmak ve yüzey alanını artırmak amacıyla kullanılır, bu sayede ısı performans önemli ölçüde iyileştirilebilir. Kanatçıkların tasarımında dikkat edilmesi gereken unsurlar arasında; kullanılan malzemelerin özellikleri, kanatçık profillerinin şekli ve boyutları bulunmaktadır. Malzeme seçimi, kanatçığın dayanıklılığı ve ısı iletkenliği açısından belirleyici bir faktördür: Uygun malzeme seçimi, ısı transferinin etkinliğini artırmada kritik bir rol oynamaktadır. Kanatçıkların boyutları ve geometrik profilleri de akışkan dinamikleri ve ısı transfer süreçleri üzerinde doğrudan etkiye sahiptir. Bu nedenle, kanatçıkların boyutlandırılması ve şekillendirilmesi, mühendislik uygulamalarında büyük bir dikkatle ele alınmaktadır.

Silindir biçimindeki kanatçıklar, mühendislik dünyasında geniş bir uygulama yelpazesine sahip olup, ısı eşanjörlerinden içten yanmalı motorlara kadar pek çok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu tür yapılar, ısı transferini artırmak amacıyla tasarlanmış olup, özellikle radyal ve dairesel kanatçıklar en uygun çözümler arasında öne çıkmaktadır. Isı transferi uygulamalarında, dairesel kanatçıklar genellikle radyal kanatçıklara kıyasla daha fazla tercih edilmektedir. Bunun başlıca nedeni, dairesel kanatçıkların üretim ve tasarım süreçlerinin daha kolay ve maliyet etkin olmasıdır. Bu tezde endüstrinin gereksinimlerine uygun olarak dairesel kanatçıklar ele alınmıştır.

Dairesel kanatçıklar, sıcaklık farkı bulunan iki farklı ortam arasında ısı transferini artırmak amacıyla oldukça etkili bir araç olarak kullanılmaktadır. Kanatçıkların performansını ve dayanıklılığını etkileyen bazı kritik unsurlar tasarım esnasında dikkate alınmalıdır. İlk olarak, dairesel kanatçığın geometrisi, yani kesit alanı, önemli bir tasarım parametresidir. Geometrik özellikler, ısı transferi süreçlerini belirleyen faktörlerden biridir ve bu nedenle tasarım aşamasında dikkatlice seçilmesi gereken bir unsurdur. Kanatçığın şekli, yüzey alanını artırarak ısı transferini optimize etmektedir. Ayrıca, bu geometrik unsurlar, termal gerilmeler ve sıcaklık dağılımları

üzerinde de etkili olmaktadır. Bu durum, tasarımın hem işlevselliği hem de güvenilirliği açısından son derece önemlidir. Diğer bir kritik parametre ise dairesel kanatçığın malzeme seçimidir. Farklı malzemelerin, sıcaklık değişimlerine bağlı olarak farklı termal genleşme oranları bulunmaktadır. Bu termal genleşme, malzeme içinde iç gerilmelerin oluşmasına neden olmaktadır. İç gerilmeler, zamanla malzemenin yapısında zayıflıklara yol açarak çeşitli mekanik hasarların ortaya çıkmasına neden olur. Örneğin, sürünme, yorulma, çatlak oluşumu ve mevcut çatlakların genişlemesi gibi sorunlar, malzeme dayanıklılığını tehdit eden önemli problemlerdir. Bu tür hasarların önlenmesi için, dairesel kanatçıkların tasarımında doğru geometrinin ve uygun malzemenin seçilmesi hayati bir öneme sahiptir.

Literatürde gerçekleştirilen çeşitli araştırmalar, dairesel kanatçıkların farklı geometrik formlarının kullanıldığını ortaya koymaktadır (**Mokheimer, 2002**). Bu çalışmalar, özellikle sabit kesitli kanatçık geometrilerinin performansını artırmak amacıyla sıcaklık ve termal gerilme dağılımlarının optimize edilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Sabit kesitli tasarımlar genellikle belirli sıcaklık dağılımlarına ve termal gerilmelere maruz kaldıkları için, bu sorunların üstesinden gelmek için değişken kesitli geometrilerin araştırılması önemli bir konu haline gelmiştir (**Kanthimathi ve Naga, 2016**). Değişken kesitli dairesel kanatçıklar, ısı iletimi ve sıcaklık dağılımı açısından daha verimli çözümler sunmaktadır. Bu tür tasarımlar, kanatçığın belirli bölümlerinde geometrik değişiklikler yaparak, ısı transferini optimize etme olanağı sağlar. Örneğin, belirli bölgelerde daha fazla yüzey alanı sağlayarak ısı transferini artırmak ya da termal gerilmeleri azaltmak amacıyla çeşitli şekil ve boyutlandırma stratejileri geliştirilebilir. Bu bağlamda, bu tezde değişken kesit alanına sahip bir dairesel kanatçığın tasarımına odaklanılmıştır.



Şekil 1.1. Farklı Kesite Sahip Kanatçıklar

Yüksek termal iletkenliğe sahip malzemeler, genellikle kanatçık tasarımlarında tercih edilen ana bileşenler arasında yer almaktadır. Bu tür malzemeler, ısı transferini etkin bir şekilde gerçekleştirme kapasitesi sayesinde, mühendislik uygulamalarında önemli bir avantaj sağlamaktadır. Ancak, homojen malzeme kullanımı bazı durumlarda, kanatçık boyunca uniform bir sıcaklık dağılımı elde etme konusunda yetersiz kalabilmektedir. Bu durum, özellikle ısı transferinin kritik olduğu uygulamalarda, sıcaklık farklarının yönetimi açısından zorluklar yaratabilmektedir. Günümüzde tek tip malzeme kullanımı dışında alternatif çözümler de ortaya çıkmıştır. Bu alternatifler arasında, birden fazla madde içeren kompozit malzemeler ve fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeler yer almaktadır.

Kompozit malzemeler yüksek ısı iletkenliğe sahip olmalarından dolayı kanatçık tasarımlarında oldukça yaygın kullanılmaktadır (**Pashah ve ark, 2012**). Yapısı gereği kompozit yapılarda, geliştirilmiş mekanik ve ısı özellikler elde etmek için homojen elastik yüzeyler birbirine bağlanmaktadır. Ancak bu arayüzde tabakalar arası güçlü gerilmeler meydana gelir. Bu gerilme, delaminasyon, çatlama ve diğer mekanik hasarlara neden olabilir. Bu hasarları gidermek amacıyla bu tezde dairesel kanatçıklarda Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler (FDM) kullanılması önerilmiştir (**Benyamina ve ark, 2018**).

FDM'ler mikroskobik olarak homojen karakterde olmayan kompozit malzemelerdir. Mikro yapılarındaki sürekli değişiklikler FDM'leri kompozit malzemelerden ayırır (**Koizumi, 1997**). FDM'nin ısı-mekanik özellikleri verilen fonksiyona göre bir yüzeyden diğerine kademeli ve sürekli olarak değişir. Malzeme özelliklerinin kalınlığa göre derecelendirilmesi, gerilim dağılımındaki ani değişiklikleri önler. Ayrıca bu malzemeyi kullanmanın faydalarından birisi de yüksek sıcaklıklara dayanıklı olmasıdır. (**Maknun ve Zarfatina, 2021**).

Dairesel kanatçıklarda meydana gelebilecek potansiyel hasar türleri, gerilmelerin neden olduğu birçok problemle ilişkilidir. Bu tür hasarlar arasında yorulma, çatlama, çatlak yayılması ve aşınma gibi durumlar yer alır. Tasarım aşamasında bu hasarların önceden tahmin edilmesi büyük önem taşımaktadır. Ancak, bu sürecin en büyük zorluklarından biri, sıcaklık dağılımı ile gerilme dağılımını belirleyen denklemlerin karmaşıklığıdır. Bu denklemler, genellikle bir dizi değişken ve parametre içerdiğinden, analitik olarak çözülmesi oldukça güçtür. Bu zorlukları aşmak ve daha etkili bir tasarım süreci sağlamak amacıyla sayısal yöntemler kullanılmaktadır.

Literatürde, karmaşık problemleri çözmek için çeşitli sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemler arasında en yaygın olanları Spektral Yöntemler, Runge-Kutta, Perturbasyon Yöntemleri, Sonlu Farklar Yöntemi, Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi gibi teknikler yer alır. Bu yöntemlerin ortak amacı, karmaşık sayısal problemleri daha basit bir biçime, yani polinomlara dönüştürerek bilgisayarlardan faydalananak çözümlemektir. Polinomlar, sayısal yöntemlerin temelidir ve iki ana gruba ayrılır: yerel polinomlar ve global polinomlar. Yerel polinomlar, belirli bir bölge içinde tanımlanan ve o bölgedeki noktalara odaklanan fonksiyonlardır. Bununla birlikte, global polinomlar ise tüm çözüm alanını kapsayan ve tüm veri noktalarını dikkate alan daha geniş bir bakış açısı sunar.

Global polinomların kullanımı, bu yöntemlerin daha yüksek doğruluk sağlamasına ve daha az zaman maliyeti ile çalışmasına olanak tanır.

Spektral Yöntemler, sayısal analiz alanında dikkat çeken bir yere sahiptir ve hata oranları neredeyse sıfıra yakındır. Bunun temel nedeni, bu yöntemlerin fonksiyonların tam değerlerini bulabilme yeteneğidir. Bu özellik, Spektral Yöntemler'i, daha çok yerel polinomlar kullanan Sonlu Elemanlar Metodu gibi diğer sayısal yöntemlerden ayıran önemli bir faktördür. Ayrıca, Spektral Yöntemler'in bir diğer avantajı, çözüm sürecinde daha az veri ve bilinmeyen gerektirmesidir. Bu yöntemlerin uygulanmasında, iki ana polinom türü sıkça kullanılır: Legendre Polinomları ve Chebyshev Polinomları. Bu tezde, Chebyshev Polinomları kullanılmıştır. İlerleyen bölümlerde, bu polinomların çalışma prensipleri detaylı bir şekilde açıklanmıştır.

Bu tezde, değişken kesitli FDM'den yapılmış dairesel kanatçık için genel bir termal çözüm incelenmiştir. Dairesel kanatçığın mekanik ve termal özellikleri, fonksiyonel olarak derecelendirilmiştir. Elde edilen genel çözümün sıcaklık ve yer değiştirme hesaplamalarında Pseudospectral Chebyshev Yöntemi (PCY) kullanılmıştır. Sayısal çözüm, doğrulama amacıyla homojen sabit kesitli dairesel kanatçık ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Isı transferini artırmak amacıyla geçmişten günümüze kanatçıklarla ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar; kanatçıklarda oluşan termal gerilmelerin incelenmesi ve analizi, kanatçıklarda kullanılan malzemelerin özellikleri, kanatçık çeşitleri ve boyutları, kanatçıklarda oluşan ısı performans ve kanatçıkların verimi ile bu çalışmaların doğrultusunda kullanılan matematiksel yöntemler, yaklaşımlar ve paket programları içermektedir.

Wang ve ark (2013) çalışmalarında dikdörtgen profile sahip bir dairesel kanatçıktaki sıcaklık dağılımlarını ve termal gerilmeleri hibrid bir yöntem olan Ara Değer Fark yöntemini kullanarak sayısal olarak incelemişlerdir.

Yu ve Chen (1998) elastik izotropik dairesel bir kanatçıkta gerilim dağılımını incelemişlerdir. Kanatçıktaki sıcaklık dağılım denklemini Taylor dönüşüm yöntemini kullanarak bulmuşlar ve elastisite teorisi ile birleştirerek kanatçıktaki gerilmeleri hesaplamışlardır.

Wu (1997) çalışmasında, dairesel bir kanatçıkta zamanla azalan ısı akısına maruz kalan geçici termal gerilmeleri incelemiştir. Enerji denkleminde türetilen boyutsuz kısmi diferansiyel denklem, Laplace dönüşümü kullanılarak adi diferansiyel denkleme dönüştürülmüştür.

Mallick ve Das (2014) bir dairesel kanatçıkta oluşan termal gerilmeyi karşılayabilecek, bilinmeyen parametreleri bulmayı amaçlayan ters bir yaklaşım sunarak belirlemişlerdir. Sıcaklığa bağlı gerilmeleri, elastik teori ile yarı analitik çözümle birleştirmişler ve bu parametrelerin sıcaklık dağılımı ve gerilmeler üzerindeki etkilerini tartışmışlardır.

Chiu ve Chen (2002) periyodik ısı transferi sınır koşulu altında sıcaklığa bağlı ısı iletkenliğe sahip dairesel bir kanatçıkta termal gerilmeler incelemişlerdir. Sıcaklık dağılımını Adomian Ayırıştırma yöntemiyle analiz etmişlerdir.

Lee ve ark (2002) Dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık ve gerilme denklemlerini, sonlu farklar yöntemi ve Laplace dönüşüm yöntemini birleştirerek Laplace uzayında bulmuş, sonrasında ise bu denklemleri Fourier serileri ve matris benzerlik dönüşümü yöntemi ile gerçek uzaya dönüştürmüşlerdir. Bu denklemleri dairesel bir kanatçığın termoelastik problemini çözmek için uygulamışlardır.

Huang ve ark (2008) çalışmalarında, dört katmanlı ince bir filmde meydana gelen termal gerilmeleri incelemişlerdir. Tek boyutlu sıcaklık ve termal gerilim dağılımları iletimle ısı transferi dikkate alınarak analitik olarak elde edilmiştir. Bitişik katmanlar arasındaki normal ve kayma gerilmeleri iki boyutlu olarak ANSYS aracılığıyla birleşik olmayan elastik teori yöntemi ile hesaplanmıştır. Daha sonra tek boyutlu analitik modelin geçerliliğini incelemek amacıyla tek boyutlu ve iki boyutlu gerilim hesaplamaları arasında bir karşılaştırma yapmışlardır. Sonuç olarak tek boyutlu analitik model, katmanlı ince bir filmde meydana gelen termal gerilmelerin hızlı bir ön tahmin için kullanılabileceği sonucuna varmışlardır.

Mallick ve ark (2016) çalışmalarında ısı iletkenlik, termogeometrik ve ısı ıl genleşme parametrelerini Nelder-Mead Minimizasyon yöntemi kullanarak tersine çözümle elde etmişlerdir. Kanatçıktaki termal gerilmeler için homotopi pertürbasyon yöntemini uygulamışlardır. Sıcaklık dağılımına ve gerilmelere etkisi olan ısı ıl parametreleri incelemişlerdir. İncelenen bu ısı ıl parametrelerin farklı kombinasyonlarını oluşturarak gerilme ve sıcaklık dağılımına etkilerini analiz etmişlerdir.

Kundu ve ark (2022) termomekanik etkileşimleri araştırmışlardır. Başlangıçta Lord-Shulman modeli altında içi boş gözeneklere sahip bölgesel olmayan termoelastik gerilme gözlemlemişlerdir. Fiziksel büyüklüklerin ifadelerini elde etmek için normal mod tekniğini uygulamışlardır. Gerilmeler, yer değiştirme bileşenleri, sıcaklık alanı ve değişimi için uygun malzeme seçmişlerdir. Sayısal hesaplamalar kullanmışlar ve grafiksel olarak göstermişlerdir.

Lee ve Yang (2003) dairesel bir kanatçığın taban ısı akısını bulmak için Birleşik Gradyanların Minimizasyon yöntemini başarıyla uygulamışlardır. Kanatçığın herhangi bir noktasındaki sıcaklık değeri bilindiğinde taban ısı akısının hesaplanabilirliğini ortaya koydular. Ayrıca sıcaklık dağılımlarını ve termal gerilme dağılımlarını elde etmişlerdir. Tersine hesaplama yönteminin doğruluğu; kanatçıktaki modellenen ve kesin olmayan ölçümler kullanılarak elde edilen sonuçlar incelenmiş ve iyi sonuçlar verdiğini doğrulamışlardır.

Yang ve Chu (2001) dairesel bir kanatçıktaki zamanla değişen bir ısı akısına maruz kalan termoelastik davranışı incelemişlerdir. Enerji denge denkleminde termomekanik birleştirme etkisini dikkate almışlar ve elde ettikleri kısmi diferansiyel denklemi Laplace dönüşümü ile adi diferansiyel denkleme çevirmişlerdir. Bessel fonksiyonları yardımıyla sıcaklık dağılımını ve gerilmeleri Laplace uzayında hesaplamışlardır.

Bu çalışmalar sonucunda kanatçıklarda oluşan gerilmelerin karşılanabilmesi açısından bilim insanları kanatçıklarda kullanılacak olan malzemenin mekanik ve ısı ıl özelliklerinin incelenmesi arayışına girmişlerdir. Başta kanatçıklar için kompozit malzemeler uygun olarak görülse de daha sonraki yapılan araştırmalar neticesinde Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin (FDM) mekanik ve ısı ıl özellikler bakımından daha uygun olduğu görülmüştür. Bunun nedeni ise kompozit malzemelerde oluşan gerilme yığılmalarının malzemedeki çatlama, delaminasyon ve diğer mekanik hasarlara neden olmasıdır ancak FDM'lerde malzeme özelliklerinin sürekli değişmesi nedeniyle bu hasarlar meydana gelmemektedir.

Nemat-Alla ve ark (2009) FDM malzemedeki yapılan, termal yüklemeye maruz kalan kanatçığın termal gerilmeleri iki boyutlu olarak incelemesini yapmışlardır. Sıcaklığa bağlı malzeme özelliklerine sahip kanatçıktaki Elasto-plastik gerilim analizini gerçekleştirmek için sonlu elemanlar model yöntemini kullanmışlardır. FDM malzemesinin metalik bileşenlerinin ısı ıl iletkenliğinin sıcaklık dağılımları üzerinde büyük etkisi olduğunu bulmuşlardır.

Nemat-Alla (2009) şiddetli ısı ıl yüklere maruz kalan makine elemanlarındaki termal gerilmelerin azaltılması için fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeler geliştirmişlerdir. FDM

malzemesinden yapılan plakaların optimizasyonu ile termal gerilmelerin daha fazla azaltılmasını amaçlamaktadır. Kabul edilen ısı yükü FDM malzemesinden yapılan plakaların çatlama veya kırılma olmadan dayanabildiğini kanıtlamıştır. Kabul edilen ısı yüklerinde ele alınan plakaların elasto-plastik yapısal analiz modeli, ortaya çıkan termal gerilmeleri belirlemek için kullanılmıştır.

Aziz ve ark (2013) ısı transferinin taşınım ile gerçekleştiği, kanatçık ucu ve yüzeyindeki ısı transferinin taşınım ve ışıınım ile olduğu ve kanatçık içinde ısı üretiminin olduğu homojen malzeme ve fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeden yapılmış dairesel kanatçıklardaki ısı performansı diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanarak incelemişlerdir. Isıl iletkenliğin radyal yönde değişiminin performans üzerindeki etkilerini göstermişlerdir.

Aziz ve Rahman (2009) Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeden (FDM) yapılmış dikdörtgen profile sahip bir dairesel kanatçıktaki ısı performansı incelemişlerdir. Isıl performans üzerine etki eden radyal yönde değişen ısı iletkenliğin önemi vurgulanmış ve en yüksek verimin ısı iletkenliğin yarıçapın karesi ile ters orantılı olduğu durumda sağlandığı belirtilmiştir.

Gaba ve ark (2014) çalışmalarında, FDM'den yapılmış, sabit ağırlıktaki, parabolik dairesel bir kanatçığın performansını; kanatçık kalınlığının kuvvet kuralı ve üstel olarak değiştiği iki farklı durum için incelemiştir. Tüm profiller ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme için ikinci dereceden adi diferansiyel denklemler üretmiştir. Bu tür kanatçıkları, verimliliği ve etkinlikleri hesaplanmış ve grafikleri oluşturulmuştur.

Koizumi (1997) fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin yapısının, mekanik ve termal özelliklerinde dereceli bir değişime yol açtığını araştırmıştır. Bu çalışma işlevsel olarak yüksek performanslı, ısıya dayanıklı malzemelerin geliştirilmesine yönelik önemli bilgiler sunmuştur.

Hassanzadeh ve Pikel (2013) çalışmalarında FDM'den yapılmış dairesel bir kanatçıktaki ısı transferinin artırılmasına yönelik yeni bir yaklaşım sunmaktadırlar. Homojensizlik katsayısının ve termogeometrik parametrenin kanatçık verimi, sıcaklık dağılımı ve kanatçık uç sıcaklığına etkisi grafiksel olarak gösterilmiştir. Homojensizlik katsayısının ısı transferinin daha iyi bir şekilde gerçekleşmesinde önemli bir yere sahip olduğu fakat yarıçap oranlarının artması ile etkisinin azaldığı sonucuna varmışlardır.

Haghighi (2016) FDM'den yapılmış kalınlığın değişken olduğu bir dairesel kanatçıkta, yalnızca kanatçığın uç bokaından ölçülen sıcaklık verileri kullanılarak tabanda, zamana bağlı değişen bilinmeyen ısı akısını Birleşik Gradyanlar Metodu ve Artırımlı Diferansiyel Quadrature Metodu ile ters ısı iletimi prosedürü kullanarak belirlemiştir. Çalışma, yöntemin geçerliliğini ve daha az hesaplama zamanı ile etkin bir şekilde bilinmeyen ısı akısını hesaplamada başarılı olduğunu göstermiştir.

Lee ve ark (2012) çalışmalarında, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir kanatçığın tabanında zamana bağlı değişen ısı akısını, Birleşik Gradyanlar Yöntemi ve Farklılık prensibine dayalı ters algoritma kullanılarak elde etmişlerdir. Sayısal sonuçlar, kullanılan yöntemin zamana bağlı değişen taban ısı akısını doğru şekilde tahmin ettiğini göstermiştir.

Tutuncu ve Temel (2013) sıcaklık değişimine maruz kalan, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş, düzgün olmayan dönen disklerin termoelastik analizini iki noktalı sınır değer yöntemini kullanarak çözümlerini yapmışlardır. Termomekanik özellikler, kalınlığın ve sıcaklık değişiminin uzaysal değişimleri; değişken katsayılı diferansiyel denklemlerinden oluşur. Bu tür denklemlerin çözümü yalnızca derecelendirme fonksiyonlarının belirli formları için elde edilebilir. Denklemlerin genel varyasyonları için sayısal yöntemlere başvurmuşlardır ve tamamlayıcı işlevler yöntemini uygun bir seçenek olarak görmüşlerdir.

Kanatçıkların verimliliklerini, optimal uzunluklarını, performansını, sıcaklık dağılımlarını ve bunlara etki eden parametrelerin önemini gösterebilmek için birçok sayısal yöntemle başvurmuşlardır.

Chiu (2002) değişken termal iletkenliğe sahip dikdörtgen profilli kanatçık içindeki sıcaklık dağılımını belirlemiştir. Kanatçığın verimliliğini ve optimal uzunluğunu değerlendirmek için yaklaşık analitik sonuç veren Adomian Ayrıştırma yöntemini kullanmıştır. Adomian Ayrıştırma yönteminin sonuçları Newton'un doğrusallaştırma şemasını kullanan sonlu farklar yöntemiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak yöntemin doğruluğunu ispatlamışlardır.

Mokheimer (2002) bölgesel olarak değişken ısı transferine tabi farklı profillerdeki dairesel kanatçıkların ısı performansını sayısal bir yöntem olan sonlu farklar yöntemi ile incelemiştir. Ortamın ve kanatçık geometrisinin bir fonksiyonu olarak kanatçık verimliliği cinsinden ifade edilen kanatçık performansı, grafiksel olarak verilmiştir ve elde edilen sonuçlar literatürde bulunan analitik ve sayısal sonuçlarla karşılaştırmıştır. Elde edilen sonuçlar literatürdeki sonuçlardan daha yüksek çıkmıştır.

Peng ve Chen (2011) diferansiyel dönüşüm ve sonlu farklar yöntemiyle birleştiren hibrit bir sayısal teknik yöntemi, sıcaklığa bağlı ısı iletkenliğe sahip dairesel kanatçığı incelemek için kullanmışlardır. Konvektif ısı transfer katsayısı, emisyon, termal iletkenliğin etkileri ve sıcaklık dağılımına ilişkin parametreler incelenmiştir.

Chen (1999) konvektif ısı transfer olaylarının gerçekleştiği, dikdörtgen profilli dairesel bir kanatçıkta geçici sıcaklık dağılımlarını incelemişlerdir. Bir konveksiyon-radyasyon ısı transfer olayının gerçekleştiği kanat ucu dikkate alınmıştır ve lineer olmayan diferansiyel denklemler ile hibrit bir yöntem olan, sınır koşulları belirli Taylor dönüşümü ve sonlu farklar yaklaşımını kullanarak çözmüştür.

Agarwal (1982) Tamamlayıcı Fonksiyonlar yönteminin doğrusal olmayan sınır değer problemlerinin çözümleri için etkili bir şekilde kullanılabileceğini göstermiştir. Yapılan analiz iki noktalı sınır değer problemleri için aynı zamanda çok noktalı sınır değer problemleri ve sınır şartları verilen diğer problemler içinde doğruluğunu kanıtlamıştır. Tamamlayıcı fonksiyonlar yönteminin hem doğrusal hem de doğrusal olmayan iki noktalı sınır değer problemini çözebileceğini kanıtlamıştır.

Belhocine (2015) bir disk düzeneğinde sonlu elemanlar yaklaşımı kullanarak termal etkileri ve temas davranışını tanımlamayı amaçlamaktadır. İlk olarak termal etkilerin olmadığı disk modelinin analizi gerçekleştirilmiştir. Daha sonra konveksiyon, adyabatik ve ısı akışı parametrelerinin dahil edildiği disk modelinin analizi gerçekleştirilmiştir. Sıcaklığın disk üzerinde yapısal ve temas davranışını önemli ölçüde etkilediği görülmüştür. Geliştirilen sayısal modelin doğruluğunu kanıtlamak için deneysel çalışma yapmıştır.

Kang ve Look (2007) çalışmalarında ısıl asimetrik dikdörtgen profilli, konvektif ısı transfer durumundaki dairesel kanatçık incelenmiştir. İki Boyutlu Analitik Metod ve Artımlı Araştırma metodunu kullanmışlardır. Kanat tabanı durumu için akışkandan iç yüzeye ısı transferinin olduğunu varsaymaktadırlar.

Arslanturk (2004) termal olarak simetrik olmayan konvektif sınır koşulları göz önüne alınarak dikdörtgen kesitli, iki boyutlu ısı transferinin olduğu dairesel bir kanatçığın optimum boyutlarını araştırmıştır. Sıcaklık dağılımını ve ısı transfer hızını analitik olarak çözmüştür.

Campo ve Stuffle (1997) farklı şekillerdeki kanatçıkların ısı transfer analizlerini incelemişlerdir. Dairesel kanatçıklarda kontrol parametreleri açısından kanatçık verimi ve uç sıcaklığı, sembolik hesaplamalı matematik yardımıyla gerçekleştirmişler ve hesaplamışlardır. Sonuçları korelasyon denklemler yardımıyla analiz etmiş ve raporlamışlardır.

Zubair ve ark (1996) değişken profilli ve sıcaklığa bağlı termal özelliklere sahip dairesel kanatçıkların optimum boyutlarının iletkenlik üzerinde etkisini incelemişlerdir. Dairesel kanatçıkların optimizasyonu için genel güç yasası profili ve sıcaklığa bağlı termal iletkenliği dikkate almışlardır. IMSL ve FSQP paket programlarını kullanarak sayısal olarak incelemişlerdir. Sonuçları regresyon denklemleri ile sunmuşlardır ve en uygun sonucun parabolik profile sahip dairesel kanatçıklardan elde edildiğini sonucuna varmışlardır.

Arslanturk (2009) sıcaklığa bağlı ısıl iletkenliğe sahip dairesel bir kanatçığın optimum tasarımı için korelasyon denklemlerini mevcut çalışmada elde etmiştir. Lineer olmayan diferansiyel denklemi Adomian Ayırıştırma yöntemi ile çözerek sıcaklık dağılımını analitik olarak elde etmiştir. Yöntemin doğruluğunu göstermek için sayısal sonuçlar ile analitik çözüm karşılaştırılmıştır.

Ganji ve ark (2011) çalışmalarında, analitik bir çözüm olan Homotopi Pertürbasyon yöntemini kullanarak sıcaklığa bağlı dairesel bir kanatçığın sıcaklık dağılımını belirlemişlerdir. Bu yöntemin doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri çözmek için kullanışlı ve doğru sonuçlar verdiğini kanıtlamışlardır.

Kang ve Look (2009) çalışmalarında, yeni bir yöntem kullanarak trapez profilli dairesel bir kanatçık optimizasyon analizini gerçekleştirmişlerdir. İki boyutlu analitik yöntem yaklaşımını uygulamışlardır. Yeni yöntemin kesinliği dikdörtgen profilli dairesel kanatçıkların sonuçlarıyla karşılaştırılmış ve dairesel kanatçıklar için uygulanabilir olduğu sonucuna varmışlardır.

Khan ve Aziz (2012) çalışmalarında geçici durumdaki ısıl performansı incelemiştir. Kanatçık boyunca ısıl iletkenliğin lineer, quadratik ya da eksponansiyel olarak değiştiği

düşünülmüştür. Ekspansiyel değişimin hem kararlı hem de değişken durumda daha iyi kanatçık performansı sağladığını ortaya koymuşlardır.

Kullanılan matematiksel yöntemler kanatçık özelliklerine ilişkin önemli bilgiler vermekte ve bilim insanlarına ışık tutmaktadır. Bundan dolayı yapılan her çalışma, kanatçıklarla ilgili gelişmeleri ileriye taşımaktadır ve bu yüzden az sayıda nokta kullanarak yüksek hassasiyet elde etme prensibine dayanan sayısal bir yöntem olan Pseudospectral Chebyshev yöntemi tercih edilmektedir.

Darvishi ve ark (2016) sıcaklığa bağlı termal iletkenliğe sahip, hiperbolik profilden oluşan dairesel bir kanatçığı Pseudospectral yöntemiyle sayısal olarak hesaplamışlardır. Çalışma kanatçık ölçüleri, yüzey taşınım katsayısı ve ısı iletkenliğinin ısı performans üzerindeki etkilerini grafiklerle göstermiştir. Ayrıca, konveksiyon özelliklerini ve termal performans parametrelerini dikkate almışlardır ve elde edilen sayısal sonuçların, sabit ısı iletkenlik için mevcut olan analitik çözüm ile karşılaştırarak yöntemin doğruluğunu ispatlamışlardır.

Bazan (2008) bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemlerinin sayısal çözümlerini yüksek doğrulukta hesaplamak için bir yöntem geliştirmiştir. Bu yöntem öncelikle verilen denklemi uzaysal değişkene göre ayrıklaştırır, gerçek bir problemi sıradan diferansiyel denkleme dönüştür ve daha sonra ortaya çıkan denklem dördüncü dereceden Runge-Kutta yöntemine entegre edilir. Uzaysal ayrıklaştırma Pseudospectral-Chebyshev yöntemi kullanılarak yapılır. Konveksiyon-difüzyon denkleminde sonlu farklar yönteminin, zamana bağlı sınır koşulları içeren problemler için uygun olmadığını göstermiştir. Böylelikle bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemleri için Pseudospectral-Chebyshev yöntemi önerilmiş ve literatürden alınan problemlerin çözümüyle gösterilmiştir. Ayrıca bu yöntemin iki boyutlu problemler için uygulanabilmesi için de devam eden araştırmaları vardır.

Gottlieb (1981) parabolik ve hiperbolik problemlerin analizi için spectral bir yöntem olan Chebyshev yöntemini kullanmıştır. Pseudospectral-Chebyshev yöntemi ilk olarak sabit katsayılı parabolik ve hiperbolik problemler için uygulanmıştır. Daha sonra yöntemin kararlılığını, değişken katsayılı parabolik ve hiperbolik problemlerde göstermiştir. Bu yöntemin Sonlu Farklar yönteminden daha hızlı sonuçlar verdiği sonucuna varmıştır. Spectral yöntemlerin genel yakınsama teorisini özetlemiş olup eğer bir spectral yöntem bazı normlarda cebirsel olarak kararlı ise o zaman yöntem cebirsel olarak eşdeğer yeni bir normda güçlü bir şekilde kararlıdır. Sıralama noktalarının seçimi tartışılmıştır. Değişken katsayılı hiperbolik denklemler için sayısal örnekler vermiştir.

Funaro ve Gottlieb (1988) Pseudospectral yöntemlerin uygulanmasında yaygın olarak kullanılan işlem kısmi diferansiyel denklemlerin sınır düğümlerinin ve sınır koşullarının sağlanmasıdır. Diferansiyel denklemin çözümünde belirlenen noktaların sınır şartlarına yakın olarak keyfi verilemeyeceğini göstermişlerdir. Chebyshev yaklaşımları için denklemin sınır düğümleri ve sınır koşullarının kombinasyonu tartışılmıştır. Bu bağlamda bu yaklaşımları doğrusal hiperbolik denklemde uygulayıp analizini gerçekleştirmiştir. Daha sonra bu yöntemi parabolik denklemlere uygulamış olup gerçek ve negatif sonuçlar elde etmiştir.

Fox (1962) adi diferansiyel denklemlerinin çözümü için Chebyshev polinomlarının özelliklerinden yararlanan iki yöntem önermiştir. Lineer adi diferansiyel denklemlerinin çözümü, sonlu bir polinom veya sonlu bir Chebyshev yöntemi ile yaklaşık olarak tahmin edilebilir. Hesaplama çözümün tam olarak pertürbasyonlu diferansiyel sistemin karşılayacağı şekilde gerçekleştirilebilir, pertürbasyonlar bir veya daha fazla Chebyshev polinomunun katları olarak hesaplanır. Çözümdeki hataların üst sınırı genellikle diferansiyel sistemin yaklaşık çözümü ile tahmin edilebilir. Hataları daha küçük hale getirmek için verilen diferansiyel denklemin entegrasyonu ve sonuç sabitlerinin uygun seçimi de dahil olmak üzere çeşitli yöntemler kullanılır. Burada hem başlangıç değeri hem de sınır değeri problemleri için çeşitli yönlerini tartışmakta ve aynı zamanda otomatik hesaplama için bir yöntem önermektedir.

Chebyshev polinomları, başlangıç ve sınır değeri problemlerinin çözümünde yüksek doğruluk sağlarken, Bessel fonksiyonları, özellikle dalga ve ısı iletim problemlerinde kritik rol oynamaktadır. Bu bağlamda, Chebyshev polinomlarıyla elde edilen çözüm yöntemleri, Bessel denklemlerinin analitik özelliklerini anlamada da katkıda bulunur. Böylece, her iki alanda gerçekleştirilen araştırmaların birbirini tamamlayıcı nitelikte olduğu ve farklı matematiksel yapıları bir araya getirerek daha kapsamlı çözümler sunma potansiyeline sahip olduğu ortaya çıkmaktadır.

Li ve Qin (2022) Bessel fonksiyonları ilk olarak Daniel Bernoulli tarafından tanımlanmıştır. Matematiksel diferansiyel denklemlerinden biri olan Bessel denklemleri belirli koşullar altında Neother simetrisine sahiptir. Bessel fonksiyonları dalga problemleri gibi birçok alanla ilişkili olup çeşitli problemlerin çözülmesinde önemli bir yere sahiptir. Bundan dolayı bilim insanları Bessel fonksiyonları üzerine birçok çalışma yapmakta ve Bessel fonksiyonlarının türevinin analitik özelliklerini belirli parametrelere göre tartışmaktadır. En çok silindirik ve dairesel filmlerin ısı iletiminin analizinde kullanılır. Bessel fonksiyonlarının türevlerinin hızlı algoritmaları belli bir parametreye göre elde edilmiştir. Bu hızlı algoritmalar sayesinde heterojen Bessel fonksiyonlarının türevlerinin hesaplamalarını incelemiştir. Aynı zamanda Bessel fonksiyonlarıyla ilişkili birçok integralinde hızlı bir şekilde hesaplanması yapılmıştır. Bu hesaplamalar Mathematica programında yapılmıştır. Araştırmada algoritmaların hızlı ve yüksek duyarlılıkta olduğunu sayısal örneklerle göstermiştir.

Aziz ve Fang (2010) tabanında sabit sıcaklığa ve sabit ısı akısına maruz kalan kanatçıklarda, kanatçık ucunun izole edildiği ve izole edilmediği iki durumdaki sıcaklık dağılımını analitik bir yöntem olan Bessel fonksiyonlarını kullanarak incelemiştir. Çalışmada kanatçık ucunun izole edildiği durumda ve izole edilmediği durumda boyutsuz ısı akısının, kanatçık parametresinin ve ilgili diğer parametrelerinin analitik ilişkilerini vermişlerdir. Bu araştırmada sayısal yöntemler kullanılmıştır.

Acosta-Iborra ve Campo (2009) dairesel kanatçıklardaki sıcaklık değişiminin hesaplanmasında Bessel diferansiyel denklemini basitleştirmek için ortalama değeri teoremini kullanmışlardır. Analitik sıcaklık yaklaşımı arasındaki farklar bu çalışmada geliştirilen ve Bessel

fonksiyonlarına dayanan kesin analitik sıcaklık dağılımının aşağısındadır. Daire şeklindeki kanatçık için yaygın ifadelerin aksine boyuna kanatçık için verimlilik ve kanat ucu sıcaklığı olmak üzere ortalama değer teorimi yaklaşımı bu parametrelere ilişkin tahmin sağlar.

Kundu ve Das (2001) kademeli kalınlık değişimin olduğu eş merkezli dairesel bir kanatçıktaki sıcaklık dağılımını ve kalınlıktaki birim değişimini incelemişlerdir. Kanatçıktaki sıcaklık dağılımını Bessel fonksiyonları yardımıyla analitik olarak elde etmişlerdir. Bu tür kanatçıkların optimum tasarımını kanatçık hacmini dikkate alan Lagrange çarpanı tekniğiyle gerçekleştirmişlerdir. Belirli bir hacimde, sabit kalınlıklı dairesel kanatçıklara göre kademeli kalınlık değişimi olan kanatçıklarda daha fazla ısının transfer edildiğini ispatlamışlardır.

Baricz ve Mehrez (2018) çalışmalarındaki amaç değiştirilmiş birinci türden Bessel fonksiyonlarını ve Redheffer tipi yeni eşitsizlikleri göstermektir. Burada kanıt iki yargıya dayanmaktadır. Birincisi diferansiyellenebilir fonksiyonların kısımların monotonluğuna ikinci ise iki kuvvet serisinin kısımlarının monotonluğuna. Bunlara ek olarak değiştirilmiş Bessel fonksiyonlarının kısımları ve birinci türden Bessel fonksiyonlarının kısımları üzerine bilinen sonuçları referans olarak kullanmışlardır. Bessel fonksiyonları ve değiştirilmiş Bessel fonksiyonları matematiğin birçok uygulamasında görüldüğü için analitik eşitsizlikler bakımından da incelemeye değer olduğunu söylemişlerdir. Bu yüzden kendi çalışma konuları olan bu fonksiyonları içeren eşitsizliklere ilişkin çalışmalar yapmışlardır.

Ahmed (2020) Bessel fonksiyonları özellikle belirli diferansiyel denklemlerinin çözümlerinde yararlı olduğu bilinmektedir. Birçok özel fonksiyon gibi Bessel fonksiyonu da farklı şekillerde genelleştirilebilmektedir. Birinci türden k Bessel fonksiyonu adı verilen Bessel fonksiyonun genellemesi yapılmıştır. Çalışmasında birinci türden k Bessel fonksiyonunu barındıran belirli integralleri oluşturmuştur. k Bessel fonksiyonunun Laplace dönüşümü türetilmiştir. Çalışmalarının sonucunda birinci türden k Bessel fonksiyonunun yeni integrallerini elde etmiştir. Bulunan yeni integrallerin klasik Bessel fonksiyonuna uyarlanabileceğini göstermiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Halpin-Tsai Homojenizasyon Yöntemi

Halpin-Tsai Homojenleştirme Yöntemi, kompozit malzemelerin mekanik özelliklerini detaylı bir şekilde tanımlamak amacıyla geliştirilmiş önemli bir yaklaşımdır. Bu yöntem, özellikle çeşitli kompozit yapıların mekanik davranışlarını anlamak ve modellemek için sıklıkla başvurulmuş bir tekniktir. Kompozit malzemelerin belirli özelliklerini tanımlamak için Halpin-Tsai modelinin sunduğu olanaklar oldukça geniştir. Örneğin, bu model, kompozit dairesel kanatçıkların ısıl genleşme oranını etkili bir şekilde belirlemek için kullanılırken, aynı zamanda ısı transfer katsayısının, Poisson oranının ve elastik modülün hesaplanmasında da önemli bir rol oynamaktadır (Halpin, 1969; Halpin, 1992; Gibson, 2016).

$$\frac{p}{p_m} = \frac{1+\xi\eta V_f}{1-\eta V_m} \quad (3.1)$$

" η " ve " ξ " şu şekilde temsil edilebilir

$$\eta = \frac{\frac{p_f}{p_m} - 1}{\frac{p_f}{p_m} + \xi}, \quad \xi = 2 \left(\frac{l}{m} \right) \quad (3.2)$$

Burada p , parçacık takviyeli kompozit malzemenin bir özelliğini temsil etmektedir. p_f , lifin özelliğini; p_m ise matris malzemesinin özelliğini tanımlar. ξ , lif geometrisi ile ilgili bir parametreyi ifade ederken, l , lif geometrisinin uzunluğunu; m ise genişliğini belirtmektedir. V_f , lifin hacim oranını; V_m ise matrisin hacim oranını temsil eder ve bunlar şu şekilde tanımlanmaktadır: (Shariyat, 2012; Eker ve ark., 2021)

$$V_f = \left(\frac{r-a}{b-a} \right)^n, \quad V_m = 1 - V_f \quad (3.3)$$

Bu tezde belirlendiği üzere, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde n değeri ikiye eşittir.

3.2. Sayısal Yöntem

"Diferansiyel denklemler" terimi, matematiksel bir kavram olarak, bir veya birden fazla bağımsız değişkenin türevleri ile ilgili olan denklemleri tanımlar. Bu denklemler, genellikle bir fonksiyonun değişimini ve dinamik süreçlerin nasıl geliştiğini anlamamıza yardımcı olur. Farklı bilimsel ve mühendislik disiplinlerinde, birçok problemin temelinde, belirli değişkenlerin diğer

değişkenlere olan bağımlılıklarının incelenmesi yatmaktadır. Özellikle, bazı durumlarda bu değişiklikler o kadar ince ve hassas bir şekilde gerçekleşir ki, bu durumları açıklamak için diferansiyel denklemler tercih edilmektedir. Diferansiyel denklemler, değişkenleri ve bunların türevlerini içeren matematiksel modeller oluşturarak karmaşık sistemlerin dinamiklerini anlamamıza olanak tanır. Bu tür problemler, mühendislik, istatistik, aerodinamik ve hesaplamalı akışkanlar mekaniği gibi birçok alanda geniş bir uygulama yelpazesine yayılmaktadır. Örneğin, mühendislikte, yapısal analiz veya dinamik sistemlerin simülasyonunda sıklıkla diferansiyel denklemler kullanılır. Ayrıca, istatistikte veri analizi ve modelleme süreçlerinde de bu denklemler önemli bir rol oynamaktadır. Daha karmaşık durumlarda, bazı diferansiyel denklemler yalnızca tek bir bağımsız değişkene bağlı olmayabilir. Bu tür durumlarda, ilgili denklemler kısmi diferansiyel denklemler olarak adlandırılır (Cengel ve Palm, 2013).

Diferansiyel denklemlerin çözümü, genellikle denklemi tam olarak sağlayan bir fonksiyonun bulunması olarak tanımlanır. Ancak, birçok durumda analitik çözümler elde etmek ya imkansız ya da son derece zordur. Böyle durumlarda karşılaşıldığında, sayısal yöntemlerin kullanımı kaçınılmaz hale gelir (Cengel ve Palm, 2013). Modern matematiksel literatürde, sayısal yöntemlerin kullanımı giderek yaygınlaşmış ve bu alanda yapılan araştırmalar, analitik çözümlere oldukça yakın sonuçlar elde etmeyi mümkün kılan yeni tekniklerin geliştirilmesine öncülük etmiştir. Bu bağlamda, sayısal çözüm yöntemlerinden bazıları, sonlu eleman ve sonlu fark yöntemleri gibi yerel polinomlar kullanan yöntemlerdir. Bu yöntemler, belirli bir alandaki problem üzerinde çözüm elde etmek için bölgesel örgü noktalara dayanmaktadır. Ancak bu tür yöntemlerin önemli bir dezavantajı, yüksek doğruluk sağlamak için genellikle büyük sayıda örgü noktaya ihtiyaç duymalarıdır. Bu durum, hesaplama maliyetini artırarak işlem süresinin uzamasına yol açabilir. Öte yandan, küresel polinomlar kullanan spektral yöntemler, daha az örgü nokta ile yüksek doğrulukta sonuçlar elde etme avantajına sahiptir (Kirköse ve Yarımpabuç, 2019). Spektral yöntemler, örgü noktalarının dağılımı ve yapılarına bağlı olarak farklılık gösterir ve bu çeşitlilik, Fourier Galerkin yerleştirme, Legendre Galerkin yerleştirme ve Pseudospektral Chebyshev yöntemi gibi çeşitli tekniklerin gelişimine olanak tanımaktadır (Voigt ve ark, 1984; Trefethen, 2000). Pseudospektral yöntemler, spektral yöntemler kategorisinde yer alan bir alt grup olarak, çözümlerin elde edilmesinde oldukça etkili bir yol sunar. Pseudospektral yöntemlerin, sonlu eleman ve sonlu fark yöntemleriyle karşılaştırıldığında en belirgin farkı, çözüm alanının tamamını kapsayan yüksek dereceli bir polinom kullanmalarıdır. Bu yaklaşım, çözümün kalitesini artırarak daha doğru sonuçlar elde edilmesine olanak tanır. Polinomun derecesinin istenilen şekilde ayarlanabilmesi, bu yöntemlerin esnekliğini artırmakta ve dolayısıyla doğruluğunu önemli ölçüde yükseltmektedir (Altunalan, 2016).

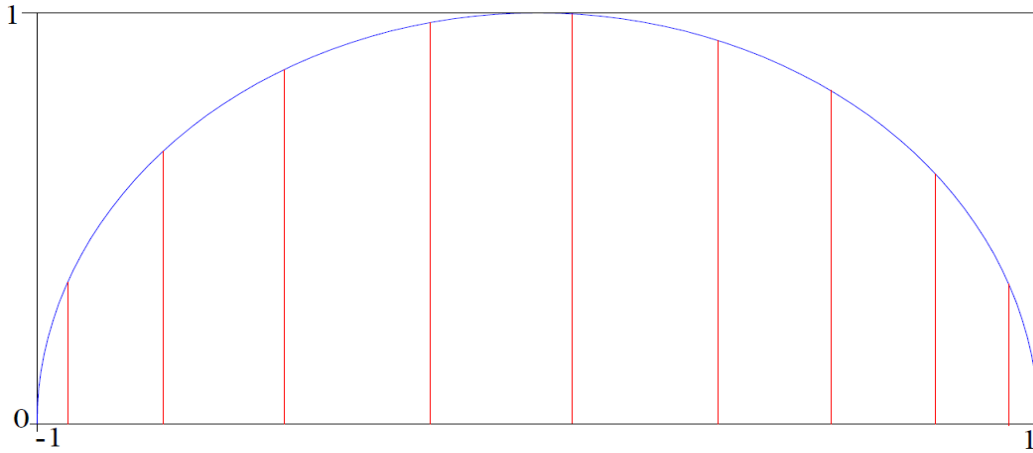
3.2.1. Chebyshev-Gauss-Lobatto Örgü Noktaları

Diferansiyel denklemlerde, periyodik aralıklar içeren problemlerde Fourier Spektral ve Fourier Pseudospektral yöntemleri; periyodik olmayan aralıklar içeren problemlerde ise Legendre

Spektral, Chebyshev Spectral ve Chebyshev Pseudospektral yöntemleri tercih edilmektedir (**Guo, 1998**). Bu çalışmada, periyodik olmayan aralıklar için kullanılan Pseudospektral Chebyshev yöntemi, $[-1,1]$ aralığında tanımlı Chebyshev polinomlarını taban fonksiyonlar olarak kabul ederek çözüm gerçekleştirmektedir. Bu tanımlı aralık, küçük düzenlemelerle herhangi bir aralığa dönüştürülebilir. Belirli bir aralıkta çözüm aranırken, hatayı en azda tutacak şekilde nokta dağılımı seçilerek bu noktalara karşılık gelen ara değer bulma polinomu elde edilir. Ayırık örgü noktalarını belirlemek için, sınır bölgelerinde orta noktalara göre daha sık nokta dağılımına sahip Chebyshev Gauss-Lobatto noktaları tercih edilmiştir. Bu noktalar (**Trefethen, 2000; Eker, 2020**);

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, 2, 3 \dots N \quad (3.4)$$

Yarım çember üzerinde eşit aralıklarla konumlandırılmış olan noktalar, yatay eksene izdüşümleri alındığında orta noktalarda seyrek aralıklı bir dağılım gözlenirken, sınır bölgelerinde daha sık aralıklı bir nokta dağılımı gözlemlenmektedir (Şekil 3.1.). Bu sayede, daha az sayıda örgü noktası kullanılarak elde edilen türevleme matrisleri yüksek hassasiyetle çözümler sunmaktadır (**Trefethen, 2000**). Bu noktalar üzerinde, Lagrange interpolasyon polinomlarından faydalanılarak türevleme matris operatörü oluşturulur. Elde edilen türevleme matrisini kullanarak, diferansiyel denklemlerdeki türevli ifadeler doğrusal denklem sistemine dönüştürülür ve bu sistem herhangi bir ayrıştırma yöntemi ile çözülebilir hale gelir.



Şekil 3.1. Gauss-Lobatto Örgü Noktaları Dağılımı

3.2.2. Pseudospektral Chebyshev Türevleme Matrisi

Denklem (3.4)'de tanımlanan fonksiyonla ilişkili olarak, Chebyshev diferansiyel matrisinin örgü noktası dağılımları aşağıda belirtilen çözüm şemasına göre oluşturulacaktır. Çözüm şemasını kurgulamak için Chebyshev örgü noktalarında tanımlı bir v vektörü dikkate alınacaktır. Bu v vektörünün, aynı örgü noktalarındaki ayırık türevini w , iki aşamada elde etmek mümkündür (**Trefethen, 2000**).

- p derecesi $\leq N$ olan bir interpolasyon polinomu $p(x_j) = v_j$, $0 \leq j \leq N$ şeklinde seçilirse
- Örgü noktalarındaki türevi $w_j = p'(x_j)$, $0 \leq j \leq N$ şeklinde olacaktır.

Bu işlem doğrusal olmasından dolayı örgü noktalarındaki w türevi, D_N olarak isimlendirilecek olan $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutunda bir matris ile v çarpımı ile temsil edilebilir.

$$w = D_N v \quad (3.5)$$

Burada N , pozitif bir tam sayıdır ve Pseudospektral Chebyshev yönteminde tam sayısının tek veya çift olmasına dair herhangi bir kısıtlama bulunmamaktadır. Chebyshev türevleme matrisinin türetilmesini daha anlaşılır hale getirmek amacıyla, 1. ve 2. dereceden Lagrange interpolasyon polinomlarının kullanımı ele alınacaktır.

Birinci dereceden Lagrange interpolasyon polinomu oluşturmak için gerekli olan iki nokta, Denklem (3.5) kullanılarak $x_0 = -1$ ve $x_1 = 1$ olarak belirlenmiştir. Bu iki nokta ve karşılık gelen bilinmeyen fonksiyon değerleri (x_0, v_0) ve (x_1, v_1) şeklinde verilmiştir. Bu verilere dayanarak, birinci dereceden Lagrange interpolasyon polinomu elde edilecektir (**Eker, 2020**).

$$p(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} v_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} v_1 \quad (3.6)$$

şeklinde olur. $N = 1$ için örgü noktaları $x_0 = -1$ ve $x_1 = 1$ noktalarını sağlayan Lagrange interpolasyon polinomunda yerine yazılırsa,

$$p(x) = \frac{1}{2}(1+x)v_0 + \frac{1}{2}(1-x)v_1 \quad (3.7)$$

elde edilir. $p(x)$ interpolasyon polinomunun türevi alınacak olursa

$$w_j = p'(x) = \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}v_1 \quad (3.8)$$

elde edilir. Belirlenen $x_0 = -1$ ve $x_1 = 1$ noktaları için elde edilecek türev değerleri

$$j = 0; w_0 = w'(x_0) = p'(1) = \frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{2}v_1$$

$$j = 1; w_1 = w'(x_1) = p'(-1) = \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}v_1 \quad (3.9)$$

olur. Bu bağlamda interpolasyon polinomunun birinci türevi matris biçiminde

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

bu şekilde yazılır. Bilinmeyenler vektörüne çarpım durumunda olan katsayılar matrisi, 2×2 boyutunda Chebyshev türevleme matrisi olup,

$$D_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

şeklinde elde edilir.

İkinci dereceden Lagrange interpolasyon polinomunu oluşturmak için gerekli üç nokta, Denklem (3.5) kullanılarak $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ değerleriyle hesaplanır. Bu üç nokta ve bunlara karşılık gelen bilinmeyen fonksiyon değerleri (x_0, v_0) , (x_1, v_1) ve (x_2, v_2) verildiğinde, ikinci dereceden Lagrange interpolasyon polinomu aşağıdaki şekilde ifade edilir (**Eker, 2020**):

$$p(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} v_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)} v_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} v_2 \quad (3.12)$$

şeklinde olur. $N = 2$ için örgü noktaları $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ noktalarını sağlayan Lagrange interpolasyon polinomunda yerine yazılırsa,

$$p(x) = \frac{x(x+1)}{2} v_0 + \frac{(x-1)(x+1)}{-1} v_1 + \frac{x(x-1)}{2} v_2 \quad (3.13)$$

elde edilir. $p(x)$ interpolasyon polinomunun türevi alınacak olursa,

$$w_j = p'(x) = \frac{2x+1}{2} v_0 + 2x v_1 + \frac{2x-1}{2} v_2 \quad (3.14)$$

elde edilir. Belirlenen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ noktaları için elde edilecek türev değerleri:

$$j = 0; w_0 = p'(x_0) = p'(1) = \frac{3}{2} v_0 - 2v_1 + \frac{1}{2} v_2 \quad (3.15)$$

$$j = 1; w_1 = p'(x_1) = p'(0) = \frac{1}{2} v_0 - \frac{1}{2} v_2 \quad (3.16)$$

$$j = 2; w_2 = p'(x_2) = p'(-1) = \frac{1}{2}v_0 + 2v_1 - \frac{3}{2}v_2 \quad (3.17)$$

elde edilir. Bu bağlamda interpolasyon polinomunun birinci türevi matris biçiminde

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

bu şekilde yazılır. Bilinmeyenler vektörüne çarpım durumunda olan katsayılar matrisi, 3×3 boyutunda Chebyshev türevleme matrisi olup

$$D_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

şeklinde elde edilir.

Bundan böyle, herhangi bir N nokta sayısı için diferansiyasyon matrisinin genel olarak elde edilebileceği belirtilmektedir. $N \geq 1$ interpolasyon noktası $p(x_0, v_0)$, $p(x_1, v_1)$ ve $p(x_N, v_N)$ ve en genel formu $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutunda olan Chebyshev diferansiyasyon matris D_N ele alınacaktır. Satır ve sütunlar 0'dan N 'e kadar indekslenmiştir.

$$(D_N)_{00} = \frac{2N^2+1}{6} \quad (3.20)$$

$$(D_N)_{jj} = \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)}, j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.21)$$

$$(D_N)_{ij} = \frac{c_i(-1)^{i+j}}{c_j(x_i-x_j)}, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.22)$$

$$(D_N)_{NN} = -\frac{2N^2+1}{6} \quad (3.23)$$

şeklinde bulunur ve

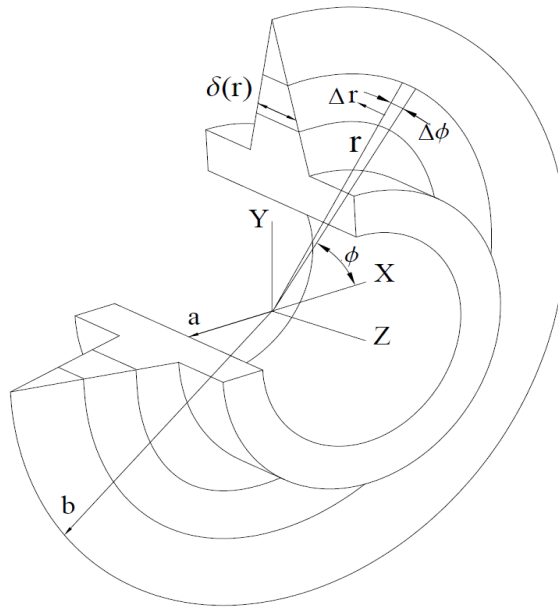
$$c_i = \begin{cases} 2, & i = 0 \text{ veya } i = N \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.24)$$

Bu yaklaşım ile, N ayrık noktalar üzerinde tanımlanan diferansiyasyon matrisine dair genel bir ilişki gösterilmiştir. Diferansiyasyon matrisinin ayrık bilinmeyen vektör $v = [v_0, v_1, \dots, v_N]^T$ ye uygulanması sonucunda $v''(x_j) = (Dv_j)$ elde edilmektedir. Matrisin $v' = [v'_0, v'_1, \dots, v'_N]$ vektörüne uygulanması, $v''(x_j) = (D(D(v_j)v_j))$ sonucunu üretir. Bu süreç, türevlerin istenilen doğrulukta hassas bir şekilde yaklaşık değerlerini sağlar.

3.3. Dairesel Kanatçığın Sıcaklık Dağılımı ve Termal Gerilmeleri

Değişken kesitli daireysel bir kanatçıkta enerji denkleminin genel hali, enerjinin korunumu yasası olan termodinamiğin birinci kanunundan aşağıdaki denklem elde edilir (Cengel, 2017).

$$\left(\begin{array}{c} \text{Kanatçıkta Biriken} \\ \text{Enerji} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Kanatçığa Giren} \\ \text{Enerji} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Kanatçık İçinde} \\ \text{Üretilen Enerji} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Kanatçıktan Çıkan} \\ \text{Enerji} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Kanatçıkta Tüketilen} \\ \text{Enerji} \end{array} \right) \quad (3.25)$$



Şekil 3. 2. Değişken Kesitli Dairesel Kanatçık

Kanatçığa enerji girişi, tabanından iletim yoluyla gerçekleşirken, enerji çıkışı ise kanatçık yüzeyinden ısıtım ve taşınım yoluyla sağlanır. Buna göre birim zamanda oluşan enerji denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$\dot{Q}_{iletim} + \dot{Q}_{uretim} - \dot{Q}_{tasinim} - \dot{Q}_{isitim} - \dot{Q}_{tuketim} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (3.26)$$

(3.26) no'lu enerji denklemini düzenlemek için aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

- 1) Dairesel Kanatçık aksel olarak simetrik bir yapıya sahiptir,
- 2) Kanatçık kalınlığı değişken kesitli olup bu kalınlık kanatçık çapına göre çok küçüktür,
- 3) Kanatçık yüzeyinde ısı yayılımı sadece taşınım ile olup, ışıınım ile ısı yayılımının ihmal edildiği,
- 5) Çevre sıcaklığının ve ısı transfer katsayısının sabit olduğu,
- 6) Kanatçığın herhangi bir noktasında zamana bağlı sıcaklık değişimi olmadığı, yani kanatçığın kararlı duruma ulaştığı,
- 7) Kanatçık içerisinde ısı kaybı ve üretimi olmadığı, kabul edilmiştir. Bu kabullere ek olarak
- 8) Kanatçıktaki ısı iletkenliğin ve kalınlığın kuvvet fonksiyonu olarak derecelendirildiği kabul edilmiştir.

(3), (5) ve (6) no'lu kabullere göre (3.26) no'lu denklem düzenlenirse enerji denklemi aşağıdaki gibi olur;

$$\dot{Q}_{\text{iletim}} - \dot{Q}_{\text{taşınım}} = 0 \quad (3.27)$$

(3.27) no'lu denklemdeki üç boyutlu bir kanatçıktaki birim zamanda iletilen ısı;

$$\dot{Q}_{\text{iletim}} = \dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{Q}_\phi - \dot{Q}_{\phi+\Delta\phi} + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{z+\Delta z} \quad (3.28)$$

şeklinde olur.

(1) no'lu kabul gereğince kanatçığın aksel olarak simetrik olması nedeniyle, teğetsel yöndeki ısı iletimi kanatçıktaki ısı iletimine etki etmemektedir ve (2) no'lu kabule göre kanatçık kalınlığının çok küçük olması nedeniyle, z yönünde gerçekleşen ısı iletimi ihmal edilmektedir.

Bu yüzden ısı iletimi;

$$\dot{Q}_{\text{iletim}} = \dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} \quad (3.29)$$

şeklinde ısı iletim denkleminde dönüşür.

(2) no'lu kabule göre kanatçık ucu alanının az olması sebebiyle kanatçık ucundan transfer edilen ısı ihmal edilmekte dolayısıyla ısı taşınımı kanatçığın yan yüzeyinde olmaktadır. (4) no'lu kabule göre sabit çevre sıcaklığı ve sabit ısı transfer katsayısı kabulünden ısı taşınımı;

$$\dot{Q}_{\text{taşınım}} = hA_{ts}(T - T_\infty) \quad (3.30)$$

şeklinde olur. (3.29) ve (3.30) denklemleri (3.27) no'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} - hA_{ts}(T - T_{\infty}) = 0 \quad (3.31)$$

denklemini elde edilir. Şekil 3.2 de r ile Δr arasında yer alan silindirik parçanın hacmi Δr ile radyal yöndeki yüzey alanı (A) çarpımına eşittir ve şu şekilde gösterilir.

$$V = A\Delta r \quad (3.32)$$

Silindirik parçanın hacmi farklı bir şekilde kanatçık kalınlığı $\delta(r)$ ve r ile Δr arasında bulunan yan yüzey alanı (A_s) çarpımına eşittir ve şu şekilde gösterilir.

$$V = A_s\delta(r) \quad (3.33)$$

İki hacim de birbirine eşit olduğuna göre;

$$A_s = \frac{A\Delta r}{\delta(r)} \quad (3.34)$$

şeklinde ifade edilir. Isı ile taşınım kanatçığının her iki yüzeyinde olduğundan

$$A_{ts} = 2A_s = \frac{2A\Delta r}{\delta(r)} \quad (3.35)$$

Kalınlık, radyal eksen boyunca değişkenlik göstermektedir. $\delta(r)$, kalınlığı ifade eden ve kanatçığının yarıçapına bağlı bir fonksiyon olarak tanımlanmaktadır. Kanatçığının ucundaki kalınlık sıfır olamayacağından, M bu uçtaki kalınlık olarak belirlenmiş; y_b ise kanatçığının tabanındaki kalınlık olarak tanımlanmıştır ve aşağıda gösterilmiştir:

$$r = a \quad \rightarrow \quad \delta(r) = y_b$$

$$r = b \quad \rightarrow \quad \delta(r) = M \quad (3.36)$$

$$\delta(r) = \frac{(r-b)(y_b-M)}{(a-b)} + M \quad (3.37)$$

ifade edilir. (3.35) no'lu denklem (3.31) no'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} - h \frac{2A\Delta r}{\delta(r)} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.38)$$

denklemini elde edilir. (3.38) no'lu denklemin her iki tarafı $\frac{1}{A(r)\Delta r}$ ile çarpılırsa;

$$\frac{1}{A(r)} \frac{\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r}}{\Delta r} - \frac{2h}{\delta(r)} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.39)$$

denklemini elde edilir. Δr 'nin çok küçük olduğu değerlerde,

$$\Delta r \rightarrow 0$$

$$\frac{\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r}}{\Delta r} = \frac{d\dot{Q}_r}{dr} \quad (3.40)$$

olur. Buna göre Δr 'nin çok küçük olduğu değerlerde enerji denklemi;

$$\frac{1}{A(r)} \frac{d\dot{Q}_r}{dr} - \frac{2h}{\delta(r)} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.41)$$

bu şekilde yazılır. Burada kalınlık (δ), kanatçık yarıçapına (r) bağlı bir fonksiyondur bu yüzden radyal yöndeki yüzey alan (A) da kalınlığa bağlı bir fonksiyon olduğu için aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$A(r) = 2\pi r \delta(r) \quad (3.42)$$

Fourier ısı iletim yasasına göre radyal yönde iletilecek ısı: ısı iletiminin olduğu yüzey alanı, ısı iletim katsayısı (k 'ye bağlı bir fonksiyon) ve ısı akısının çarpımına eşittir ve şu şekilde ifade edilir;

$$\dot{Q}_r = A(r)k(r) \frac{dT}{dr} \quad (3.43)$$

(3.43) no'lu denklem (3.41) no'lu denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{A(r)} \frac{d}{dr} \left(k(r)A(r) \frac{dT}{dr} \right) - \frac{2h}{\delta(r)} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.44)$$

(3.44) no'lu denklemde türev alma işlemi yapılırsa;

$$\frac{1}{A(r)} \left[(k'(r)A(r) + A'(r)k(r)) \frac{dT}{dr} + k(r)A(r) \frac{d^2T}{dr^2} \right] - \frac{2h}{\delta(r)} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.45)$$

(3.42) no'lu denklem (3.45) no'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$\frac{1}{2\pi r \delta(r)} \left[(k'(r)2\pi r \delta(r) + k(r)(2\pi \delta(r) + \delta'(r)2\pi r)) \frac{dT}{dr} + k(r)2\pi r \delta(r) \frac{d^2T}{dr^2} \right] - \frac{2h}{\delta(r)} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.46)$$

elde edilir.

(3.46) no'lu denklemde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (2π ifadesi yok olursa);

$$\frac{1}{r \delta(r)} \left[(k'(r)r \delta(r) + k(r)(\delta(r) + \delta'(r)r)) \frac{dT}{dr} + k(r)r \delta(r) \frac{d^2T}{dr^2} \right] - \frac{2h}{\delta(r)} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.47)$$

(3.47) no'lu denklemde $\frac{1}{r \delta(r)}$ ifadesi parantez içine dağıtılırsa;

$$\frac{dT}{dr} \left(k'(r) + \frac{k(r)}{r} + \frac{k(r)\delta'(r)}{\delta(r)} \right) + \frac{d^2T}{dr^2} k(r) - \frac{2h}{\delta(r)} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.48)$$

(3.48) no'lu denklem $\frac{1}{k(r)}$ ile çarpılırsa;

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} \left(\frac{k'(r)}{k(r)} + \frac{1}{r} + \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} \right) - \frac{2h}{\delta(r)k(r)} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.49)$$

genel denklem elde edilir.

Sıcaklık farkı bulunan iki ortam arasında transfer edilen ısı miktarını artırmak için kullanılan dairesel kanatçıklarda sıcaklık farkı nedeniyle termal gerilmeler meydana gelir. 3. bölümde yapılan kabullere ek aşağıdaki kabuller de yapılmıştır (**Yıldırım ve ark, 2018**).

- 9) Kanatçıkta iç kuvvetlerin olmadığı,
- 10) Kanatçık yüzeylerinde traksiyon olmadığı,
- 11) Elastik modül, lineer ısı genleşme katsayısı, Poisson oranı ve sıcaklığın kuvvet fonksiyonu olarak derecelendirildiği kabul edilmiştir.

Şekil 3.2’de verilen dairesel bir kanatçığın eksenlerinde meydana gelen gerilmeler, bu eksenlerde oluşan gerilmelere ve sıcaklık farkına bağlıdır ve aşağıda gösterildiği gibidir **(Timoshenko, 1970)**.

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^T \quad (3.50)$$

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon_\phi^e + \varepsilon_\phi^T \quad (3.51)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^T \quad (3.52)$$

Sıcaklıktan dolayı oluşan gerilmeler, ısı genleşme katsayısı (α) ve r ’nin bir fonksiyonu olan sıcaklığın (T) çarpımına eşittir ve aşağıda gösterildiği gibidir.

$$\varepsilon_r^T + \varepsilon_\phi^T + \varepsilon_z^T = \alpha T \quad (3.53)$$

Kanatçıkta ısı iletimi tek boyutlu ve simetrik olduğu için sıcaklık sadece r ’ye bağlı olarak değişmektedir.

Kanatçık kalınlığı, çapına göre çok küçük olduğu için z yönündeki gerilmeler ihmal edilmekte ve problem yüzey gerilme problemine dönüşmektedir. Aynı zamanda z yönündeki sıcaklık farkı, tek boyutlu ısı iletimi varsayımı sebebiyle ihmal edilmektedir. Bu nedenle z yönünde gerilme olmadığı düşünülmektedir.

Kanatçık malzemesinin elastik sınırları içerisinde radyal yönde etki eden gerinmeyle bu yönde uzama meydana gelirken, teğetsel yönde Poisson oranına (ν) bağlı olarak daralma meydana gelir ve Hooke yasası ile aşağıdaki gibi ifade edilir **(Yayla, 2014)**.

$$\varepsilon_r^e = \frac{\sigma_r}{E} \quad (3.54)$$

$$\varepsilon_\phi^e = -\nu \frac{\sigma_r}{E} \quad (3.55)$$

$$\varepsilon_r^e = -\nu \frac{\sigma_\phi}{E} \quad (3.56)$$

$$\varepsilon_\phi^e = \frac{\sigma_\phi}{E} \quad (3.57)$$

Radyal ve teğetsel yöndeki gerilmeler neticesinde oluşan radyal ve teğetsel gerilmeler;

$$\varepsilon_r^e = \frac{\sigma_r}{E} - v \frac{\sigma_\phi}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_r - v\sigma_\phi) \quad (3.58)$$

$$\varepsilon_\phi^e = \frac{\sigma_\phi}{E} - v \frac{\sigma_r}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_\phi - v\sigma_r) \quad (3.59)$$

Gerilmeler neticesinde elde edilen (3.58) ve (3.59) no'lu denklemler ile sıcaklığın etkisi ile oluşan (3.53) no'lu denklem (3.50) ve (3.51) no'lu denklemde yerine yazılırsa;

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - v\sigma_\phi) + \alpha T \quad (3.60)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{E} (\sigma_\phi - v\sigma_r) + \alpha T \quad (3.61)$$

ifadeleri elde edilir. (3.60) ve (3.61) no'lu denklemler düzenlenecek olursa;

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-v^2)} (\varepsilon_r + v\varepsilon_\phi - (1+v)\alpha T) \quad (3.62)$$

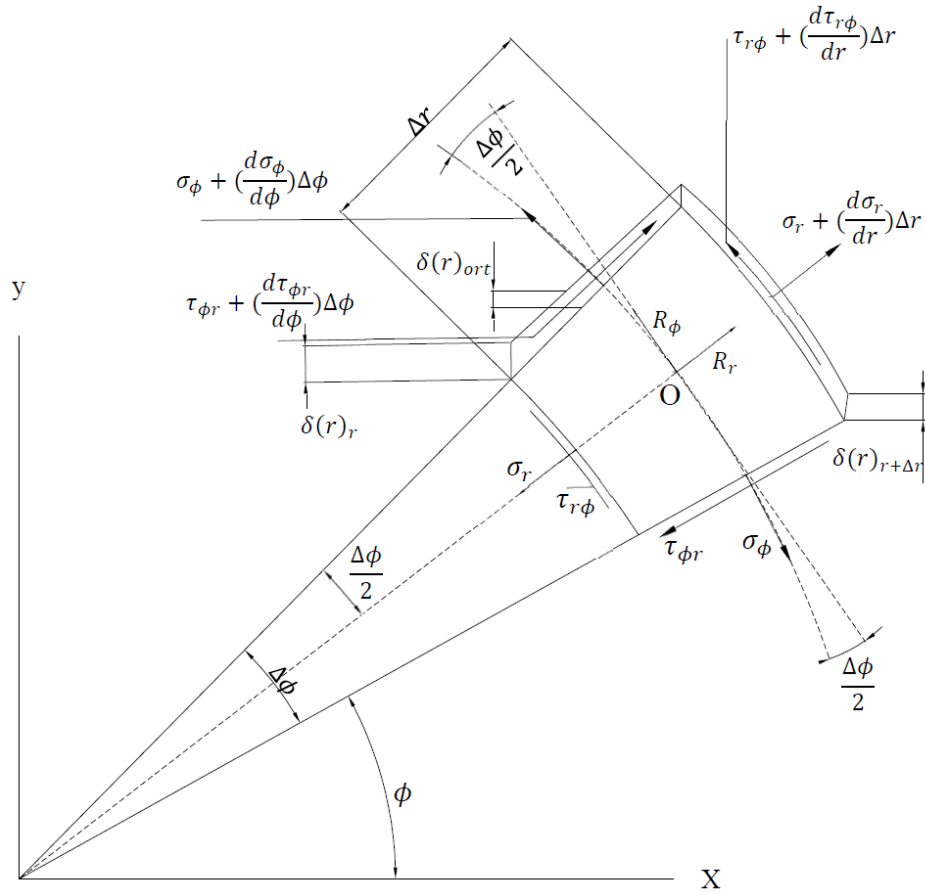
$$\sigma_\phi = \frac{E}{(1-v^2)} (\varepsilon_\phi + v\varepsilon_r - (1+v)\alpha T) \quad (3.63)$$

Gerilme ve sıcaklığa bağlı gerilme denklemleri elde edilir. Denge halinde toplam kuvvet ve toplam moment sıfır ($\sum F = 0, \sum M = 0$) olur. Radyal ve teğetsel gerilme arasındaki ilişki Şekil 3.2'de verilen r ile Δr arasında kalan parçanın incelenmesi ile edilir. Elemanın başlangıç noktasındaki kalınlık $\delta(r)_r$ olarak tanımlanırken başlangıç noktasından Δr uzaklıkta $\delta(r)_{r+\Delta r}$ olarak gösterilmektedir. Bu iki sınır noktası arasındaki bölgede, kalınlığın bu iki sınır değerinin ortalaması olarak kabul edildiği varsayılmaktadır. İlişkiler aşağıda gösterilmiştir:

$$\delta(r)_r = \frac{(r-b)(y_b-M)}{(a-b)} + M \quad (3.64)$$

$$\delta(r)_{r+\Delta r} = \frac{(r+\Delta r-b)(y_b-M)}{(a-b)} + M \quad (3.65)$$

$$\delta(r)_{ort} = \frac{\delta(r)_r + \delta(r)_{r+\Delta r}}{2} \quad (3.66)$$



Şekil 3.3. Normal ve Kayma Gerilmeleri

r ile Δr arasında kalan parça ve bu parçaya etki eden normal gerilmeler (σ_r, σ_ϕ), kayma gerilmeleri ($\tau_{\phi r}, \tau_{r\phi}$) ve parçacık içerisindeki iç kuvvetler (R_r, R_ϕ) Şekil 3.3 de gösterilmiştir.

Merkezden r birim uzaklıktaki bir noktada oluşacak gerilme σ_r ise bu noktadan Δr gibi çok küçük bir uzaklıkta oluşacak gerilme $\sigma_{r+\Delta r}$ ' ye eşittir. r yönündeki gerilme de değişim miktarı ise aşağıdaki gibidir (Yayla, 2014).

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{r+\Delta r} - \sigma_r}{\Delta r} = \frac{d\sigma_r}{dr} \quad (3.67)$$

Bu ifadeye göre Δr birim uzunluğundaki normal gerilme aşağıda gösterilmiştir.

$$\sigma_{r+\Delta r} = \sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} \Delta r \quad (3.68)$$

Aynı şekilde Δr birim uzunluğundaki kayma gerilmesi de aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\tau_{r\phi+\Delta r} = \tau_{r\phi} + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} \Delta r \quad (3.69)$$

Aynı yaklaşımda teğetsel yönde de $\Delta\phi$ gibi çok küçük bir açıdan sonraki normal ve kayma gerilmeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sigma_{\phi+\Delta\phi} = \sigma_{\phi} + \frac{d\sigma_{\phi}}{d\phi} \Delta\phi \quad (3.70)$$

$$\tau_{\phi r+\Delta\phi} = \tau_{\phi r} + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta\phi \quad (3.71)$$

Şekil 3.3 deki parçacık dengede olduğundan, parçacık üzerine etki eden radyal ve teğetsel yöndeki kuvvetlerin toplamı sıfıra eşittir ve aşağıda gösterilmiştir.

$$\sum F_r = 0 \quad (3.72)$$

$$\sum F_{\phi} = 0 \quad (3.73)$$

Bir parça üzerine etki eden gerilme birim yüzey alandaki kuvvete eşittir ve aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow F = \sigma A \quad (3.74)$$

$$\tau = \frac{F}{A} \rightarrow F = \tau A \quad (3.75)$$

Denge durumunda radyal yöndeki kuvvetlerin toplamı sıfırdır. Radyal yönde etki eden kuvvetlerin toplamı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \sum F_r = & \left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} \Delta r \right) (r + \Delta r) \Delta\phi \delta(r)_{r+\Delta r} + \left(\tau_{\phi r} + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta\phi \right) \Delta r \delta(r)_{ort} \cos \frac{\Delta\phi}{2} \\ & + R_r \frac{(r + r + \Delta r) \Delta\phi}{2} \Delta r \delta(r)_{ort} - \sigma_r r \Delta\phi \delta(r)_r - \sigma_{\phi} \Delta r \delta(r)_{ort} \sin \frac{\Delta\phi}{2} \\ & - \left(\sigma_{\phi} + \frac{d\sigma_{\phi}}{d\phi} \Delta\phi \right) \Delta r \delta(r)_{ort} \sin \frac{\Delta\phi}{2} - \tau_{\phi r} \Delta r \delta(r)_{ort} \cos \frac{\Delta\phi}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

(3.76) no'lu denklemde gerekli çarpma işlemleri yapılırsa;

$$\begin{aligned} \sum F_r = & \sigma_r (r + \Delta r) \Delta\phi \delta(r)_{r+\Delta r} + \frac{d\sigma_r}{dr} \Delta r (r + \Delta r) \Delta\phi \delta(r)_{r+\Delta r} + \tau_{\phi r} \Delta r \delta(r)_{ort} \cos \frac{\Delta\phi}{2} + \\ & \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta\phi \Delta r \delta(r)_{ort} \cos \frac{\Delta\phi}{2} + R_r \frac{(2r + \Delta r) \Delta\phi}{2} \Delta r \delta(r)_{ort} - \sigma_r r \Delta\phi \delta(r)_r - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sigma_\phi \Delta r \delta(r)_{ort} \sin \frac{\Delta\phi}{2} - \sigma_\phi \Delta r \delta(r)_{ort} \sin \frac{\Delta\phi}{2} - \frac{d\sigma_\phi}{d\phi} \Delta\phi \Delta r \delta(r)_{ort} \sin \frac{\Delta\phi}{2} - \\ & \tau_{\phi r} \Delta r \delta(r)_{ort} \cos \frac{\Delta\phi}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.77)$$

elde edilir. $\Delta\phi$ çok küçük değerler aldığıında,

$$\sin \frac{\Delta\phi}{2} \approx \frac{\Delta\phi}{2} \text{ ve } \cos \frac{\Delta\phi}{2} = 1 \quad (3.78)$$

olarak yazılır. (3.78) no'lu denklemdeki değerler (3.77) no'lu denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \Sigma F_r &= \sigma_r(r + \Delta r) \Delta\phi \delta(r)_{r+\Delta r} + \frac{d\sigma_r}{dr} \Delta r(r + \Delta r) \Delta\phi \delta(r)_{r+\Delta r} + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta\phi \Delta r \delta(r)_{ort} + \\ & R_r \frac{(2r+\Delta r)\Delta\phi}{2} \Delta r \delta(r)_{ort} - \sigma_r r \Delta\phi \delta(r)_r - \sigma_\phi \Delta r \delta(r)_{ort} \Delta\phi - \\ & \frac{d\sigma_\phi}{d\phi} \Delta\phi \Delta r \delta(r)_{ort} \sin \frac{\Delta\phi}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

elde edilir. (3.79) no'lu denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \Sigma F_r &= \sigma_r r \Delta\phi (\delta(r)_{r+\Delta r} - \delta(r)_r) + \sigma_r \Delta r \Delta\phi \delta(r)_{r+\Delta r} + \frac{d\sigma_r}{dr} \Delta r(r + \Delta r) \Delta\phi \delta(r)_{r+\Delta r} + \\ & \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta\phi \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) + R_r \frac{(2r+\Delta r)\Delta\phi \Delta r}{2} \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) - \\ & \sigma_\phi \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \Delta\phi - \frac{d\sigma_\phi}{d\phi} \Delta\phi \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \frac{\Delta\phi}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

elde edilir. (3.80) no'lu denklem $\frac{1}{\Delta r \Delta\phi}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \Sigma F_r &= \sigma_r r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} - \delta(r)_r}{\Delta r} \right) + \sigma_r \delta(r)_{r+\Delta r} + \frac{d\sigma_r}{dr} (r + \Delta r) \delta(r)_{r+\Delta r} + \\ & \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) + R_r \frac{(2r+\Delta r)}{2} \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) - \sigma_\phi \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) - \\ & \frac{d\sigma_\phi}{d\phi} \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \frac{\Delta\phi}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

elde edilir. $\Delta r \rightarrow 0$ ve $\Delta\phi \rightarrow 0$ limiti altında, (3.81) no'lu denklem

$$\Sigma F_r = \sigma_r r \frac{d\delta(r)}{dr} + \sigma_r \delta(r)_r + \frac{d\sigma_r}{dr} r \delta(r)_r + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \delta(r)_r + R_r r \delta(r)_r - \sigma_\phi \delta(r)_r = 0 \quad (3.82)$$

ifadesine yaklaşıır. (3.82) no'lu denklem $\frac{1}{r\delta(r)_r}$ ile çarpılırsa, radyal yöndeki denge denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\Sigma F_r = \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \frac{1}{r} + \sigma_r \frac{d\delta(r)}{dr} \frac{1}{\delta(r)_r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} + \frac{d\sigma_r}{dr} + R_r = 0 \quad (3.83)$$

Denge durumunda teğetsel yöndeki kuvvetlerin toplamı sıfırdır. Teğetsel yönde etki eden kuvvetlerin toplamı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \Sigma F_\phi = & \left(\sigma_\phi + \frac{d\sigma_\phi}{d\phi} \Delta\phi \right) \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \cos \frac{\Delta\phi}{2} + \\ & \left(\tau_{\phi r} + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta\phi \right) \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \sin \frac{\Delta\phi}{2} + \tau_{\phi r} \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \sin \frac{\Delta\phi}{2} + \\ & R_\phi \frac{(r+r+\Delta r)\Delta\phi}{2} \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) + \left(\tau_{r\phi} + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} \Delta r \right) (r + \Delta r) \Delta\phi \delta(r)_{r+\Delta r} - \\ & \sigma_\phi \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \cos \frac{\Delta\phi}{2} - \tau_{r\phi} r \Delta\phi \delta(r)_r = 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

(3.84) no'lu denklemde gerekli çarpma işlemleri yapılıp ve $\Delta\phi$ çok küçük değerlerde aşağıdaki ifade elde edilip (3.84) no'lu denklemde yerine yazılırsa,

$$\cos \frac{\Delta\phi}{2} \approx 1 \text{ ve } \sin \frac{\Delta\phi}{2} \approx \frac{\Delta\phi}{2} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_\phi = & \sigma_\phi \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) + \frac{d\sigma_\phi}{d\phi} \Delta\phi \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) + \\ & \tau_{\phi r} \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \frac{\Delta\phi}{2} + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta\phi \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \frac{\Delta\phi}{2} + \\ & \tau_{\phi r} \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \frac{\Delta\phi}{2} + R_\phi \frac{(2r+\Delta r)\Delta\phi}{2} \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) + \\ & \tau_{r\phi} r \Delta\phi (\delta(r)_{r+\Delta r} - \delta(r)_r) + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} \Delta r (r + \Delta r) \Delta\phi \delta(r)_{r+\Delta r} - \\ & \sigma_\phi \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.86)$$

elde edilir. (3.86) no'lu denklem $\frac{1}{\Delta r \Delta\phi}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \Sigma F_\phi = & \frac{d\sigma_\phi}{d\phi} \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) + \tau_{\phi r} \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \frac{\Delta\phi}{2} + \\ & R_\phi \frac{(2r+\Delta r)}{2} \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) + \tau_{r\phi} r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} - \delta(r)_r}{\Delta r} \right) + \\ & \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} (r + \Delta r) \delta(r)_{r+\Delta r} = 0 \end{aligned} \quad (3.87)$$

elde edilir. $\Delta r \rightarrow 0$ ve $\Delta \phi \rightarrow 0$ limiti altında, (3.87) no'lu denklem,

$$\Sigma F_\phi = d\sigma_\phi \delta(r)_r + \tau_{\phi r} \delta(r)_r + R_\phi r \delta(r)_r + \tau_{r\phi} r \frac{d\delta(r)_r}{dr} + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} r \delta(r)_r = 0 \quad (3.88)$$

ifadesine yaklaşıp. (3.88) no'lu denklem $\frac{1}{r\delta(r)_r}$ ile çarpılırsa teğetsel yöndeki denge denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\Sigma F_\phi = \frac{d\sigma_\phi + \tau_{\phi r}}{r} + \tau_{r\phi} \frac{d\delta(r)_r}{dr} \frac{1}{\delta(r)_r} + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} + R_\phi = 0 \quad (3.89)$$

Parçanın dengede olabilmesi için “O” noktasına etki eden toplam momentin sıfıra eşit olması gerekir. Radyal yöne dik olan kayma gerilmelerin “O” noktasına olan dik uzaklığı $\frac{\Delta r}{2}$ dir. Teğetsel yöne olan dik olan kayma gerilmelerinin “O” noktasına olan dik uzaklığı $\left(r + \frac{\Delta r}{2}\right) \frac{\Delta \phi}{2}$ dir. Denge durumundaki momentlerin toplamı sıfırdır ($\Sigma M = 0$) ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \Sigma M = & \left(\tau_{r\phi} + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} \Delta r \right) (r + \Delta r) \Delta \phi \delta(r)_{r+\Delta r} \frac{\Delta r}{2} + \tau_{r\phi} r \Delta \phi \delta(r)_r \frac{\Delta r}{2} - \\ & \left(\tau_{\phi r} + \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta \phi \right) \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\Delta \phi}{2} - \\ & \tau_{\phi r} \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\Delta \phi}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.90)$$

(3.90) no'lu denklemde gerekli çarpma işlemleri yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Sigma M = & \tau_{r\phi} (r + \Delta r) \Delta \phi \delta(r)_{r+\Delta r} \frac{\Delta r}{2} + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} \Delta r (r + \Delta r) \Delta \phi \delta(r)_{r+\Delta r} \frac{\Delta r}{2} + \\ & \tau_{r\phi} r \Delta \phi \delta(r)_r \frac{\Delta r}{2} - \tau_{\phi r} \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\Delta \phi}{2} - \\ & \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \Delta \phi \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\Delta \phi}{2} - \\ & \tau_{\phi r} \Delta r \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\Delta \phi}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.91)$$

elde edilir. (3.91) no'lu denklem $\frac{1}{\Delta r \Delta \phi}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \Sigma M = & \tau_{r\phi} (r + \Delta r) \frac{\delta(r)_{r+\Delta r}}{2} + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} (r + \Delta r) \delta(r)_{r+\Delta r} \frac{\Delta r}{2} + \tau_{r\phi} r \frac{\delta(r)_r}{2} - \\ & \tau_{\phi r} \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{4} \right) \frac{d\tau_{\phi r}}{d\phi} \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{2} \right) \frac{\Delta \phi}{2} - \\ & \tau_{\phi r} \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \left(\frac{\delta(r)_{r+\Delta r} + \delta(r)_r}{4} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.92)$$

elde edilir. $\Delta r \rightarrow 0$ ve $\Delta \phi \rightarrow 0$ limiti altında, (3.92) no'lu denklem

$$\tau_{r\phi} r \delta(r)_r - \tau_{\phi r} r \delta(r)_r = 0 \quad (3.93)$$

ifadesine yaklaşır. (3.93) no'lu denklem düzenlenirse,

$$\tau_{r\phi} r \delta(r)_r = \tau_{\phi r} r \delta(r)_r \quad (3.94)$$

$$\tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} \quad (3.95)$$

elde edilir. (3.83) no'lu radyal yöndeki denge denklemi ile (3.89) no'lu teğetsel yöndeki denge denkleminde $\tau_{\phi r}$ yerine $\tau_{r\phi}$ yazılarak denge denklemleri aşağıdaki gibi oluşur.

$$\frac{d\tau_{r\phi}}{d\phi} \frac{1}{r} + \sigma_r \frac{d\delta(r)_r}{dr} \frac{1}{\delta(r)_r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} + \frac{d\sigma_r}{dr} + R_r = 0 \quad (3.96)$$

$$\frac{d\sigma_r - \tau_{r\phi}}{r} + \tau_{r\phi} \frac{d\delta(r)_r}{dr} \frac{1}{\delta(r)_r} + \frac{d\tau_{r\phi}}{dr} + R_\phi = 0 \quad (3.97)$$

Dairesel kanatçığın aksenal simetrik olması sebebiyle gerilmeler ϕ 'ye bağlı olmayıp r 'nin bir fonksiyonu olması nedeniyle ayrıca kanatçıkta iç kuvvetlerin olmaması aşağıdaki ifadelerde gösterilmiştir.

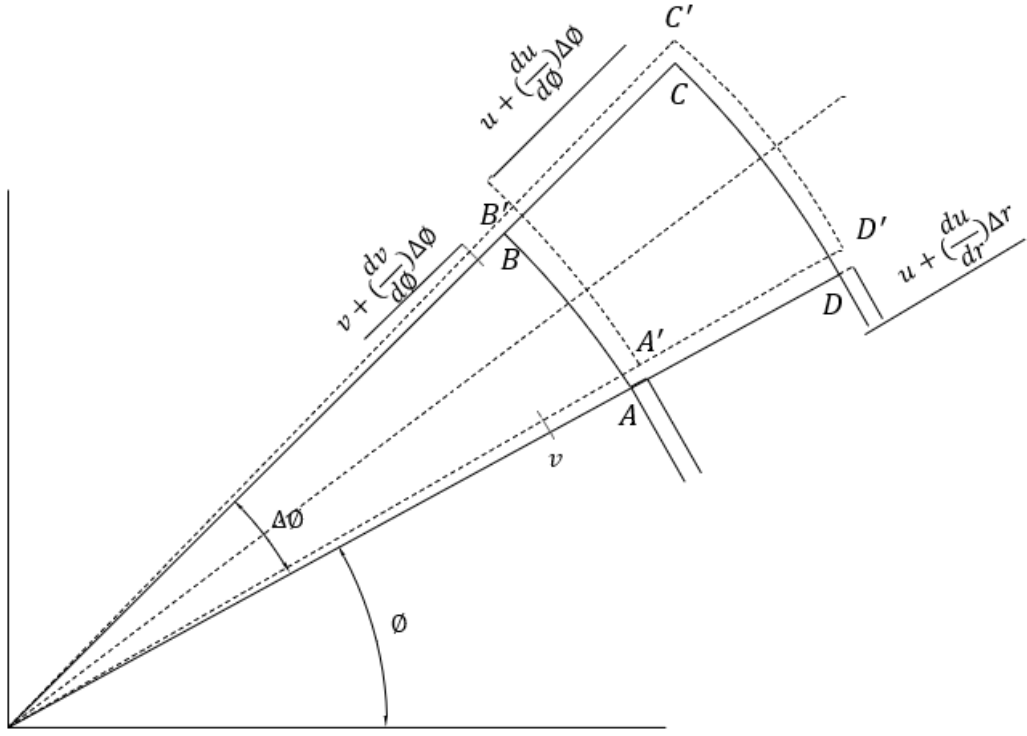
$$\frac{d\sigma_\phi}{d\phi} = 0 \text{ ve } \tau_{r\phi} = 0 \quad (3.98)$$

$$R_r = 0 \text{ ve } R_\phi = 0 \quad (3.99)$$

Bundan dolayı teğetsel yönde denge denklemindeki bütün terimler sıfıra eşit olacağından bu yönde denge denklemi elde edilmez. Radyal yöndeki denge denklemi ise aşağıda gösterilmiştir.

$$\frac{\sigma_r}{\delta(r)_r} \frac{d\delta(r)_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} + \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (3.100)$$

r ile Δr arasındaki elemanın, gerilmelere maruz kaldıktan sonra oluşan gerinmeler şekil 3.4'te yer almaktadır. $A'B'C'D'$ elemanı, $ABCD$ elemanının gerilmelere maruz kaldıktan sonraki gerinmeyi temsil etmektedir.



Şekil 3.4. Eksenel ve Teğetsel Gerinmeler

Şekil 3.4'te görüldüğü gibi u_r , AB yüzeyinde etkili olan gerilmelere bağlı olarak oluşan gerinmeyi temsil ederken, $u_{r+\Delta r}$ DC yüzeyindeki gerinmeyi ifade etmektedir.

r ile Δr arasında kalan ve gerilmelere maruz kalan parçada gerinmeler meydana gelmektedir. Gerinmedeki değişim miktarı ise

$$\frac{u_{r+\Delta r} - u_r}{\Delta r} \quad (3.101)$$

olur. (3.101) no'lu ifadedeki $\Delta r \rightarrow 0$ radyal yöndeki gerinme değişim hızı yani radyal gerinme aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{u_{r+\Delta r} - u_r}{\Delta r} = \frac{du}{dr} \quad (3.102)$$

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (3.103)$$

Radyal yöndeki gerinme hızı aynı zamanda teğetsel yönde de gerinmeye sebep olur. Buna göre sadece radyal gerinme için teğetsel gerinmedeki değişim miktarı aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{(r+u)\Delta\phi - r\Delta\phi}{r\Delta\phi} = \frac{r\Delta\phi + u\Delta\phi - \Delta\phi}{r\Delta\phi} = \frac{u\Delta\phi}{\Delta\phi} = \frac{u}{r} \quad (3.104)$$

Teğetsel yöndeki gerinme yine aynı yaklaşımla bulunur ve aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varepsilon_\phi = \frac{dv}{d\phi} \quad (3.105)$$

Teğetsel yöndeki toplam gerinme;

$$\varepsilon_\phi = \frac{dv}{d\phi} + \frac{u}{r} \quad (3.106)$$

elde edilir. Dairesel kanatçığın eksenel simetrik olması sebebiyle gerilme bileşenleri yani gerinmeler ϕ 'ye bağlı değildir. Bundan dolayı teğetsel yöndeki gerinme aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varepsilon_\phi = \frac{u}{r} \quad (3.107)$$

Dairesel kanatçığın sınır koşulları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 0 & r &= a \\ \sigma_r &= 0 & r &= b \end{aligned} \quad (3.108)$$

(3) no'lu kabule göre elastik modül, lineer ısı genleşme katsayısı, Poisson oranı ve sıcaklığın kanatçık boyunca radyal yönde değiştiği varsayılmıştır ve aşağıda verilmiştir.

$$E = E(r) \quad (3.109)$$

$$v = v(r) \quad (3.110)$$

$$\alpha = \alpha(r) \quad (3.111)$$

$$T = T(r) \quad (3.112)$$

(3.103) ve (3.107) no'lu gerinme denklemleri ile (3.109)-(3.112) no'lu denklemler (3.62) ve (3.63) no'lu gerilme denklemlerinde yerine yazılarak elastik modül, lineer ısı genleşme katsayısı, Poisson oranı ve sıcaklığın değişken olduğu gerilme denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sigma_r = \frac{E(r)}{1-v(r)^2} \left[\frac{du}{dr} + v(r) \frac{u}{r} - (1+v(r))\alpha(r)T(r) \right] \quad (3.113)$$

$$\sigma_\phi = \frac{E(r)}{1-v(r)^2} \left[\frac{u}{r} + v(r) \frac{du}{dr} - (1+v(r))\alpha(r)T(r) \right] \quad (3.114)$$

(3.113) ve (3.114) no'lu gerilme denklemleri (3.100) no'lu denge denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \frac{d\delta(r)}{\delta(r)dr} \frac{E(r)}{1-v(r)^2} \left[\frac{du}{dr} + v(r) \frac{u}{r} - (1+v(r))\alpha(r)T(r) \right] + \\ & \frac{E(r)}{r(1-v(r)^2)} \left[\frac{du}{dr} + v(r) \frac{u}{r} - (1+v(r))\alpha(r)T(r) \right] - \\ & \frac{E(r)}{r(1-v(r)^2)} \left[\frac{u}{r} + v(r) \frac{du}{dr} - (1+v(r))\alpha(r)T(r) \right] + \\ & \frac{d}{dr} \left[\frac{E(r)}{1-v(r)^2} \left[\frac{du}{dr} + v(r) \frac{u}{r} - (1+v(r))\alpha(r)T(r) \right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.115)$$

elde edilir. (3.115) no'lu denklemde türev işlemi yapıp $\frac{E(r)}{r(1-v(r)^2)}$ parantezine alınırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} \frac{E(r)}{1-v(r)^2} \left[\frac{du}{dr} + v(r) \frac{u}{r} - (1+v(r))\alpha(r)T(r) \right] + \\ & \frac{E(r)}{r(1-v(r)^2)} \left[\frac{du}{dr} + v(r) \frac{u}{r} - (1+v(r))\alpha(r)T(r) - \frac{u}{r} - v(r) \frac{du}{dr} + (1+v(r))\alpha(r)T(r) \right] + \\ & \frac{E'(r)(1-v(r)^2) + E(r)(2v(r)v'(r))}{(1-v(r)^2)^2} \left[\frac{du}{dr} + v(r) \frac{u}{r} - (1+v(r))\alpha(r)T(r) \right] + \\ & \left[\frac{d^2u}{dr^2} + v'(r) \frac{u}{r} + v(r) \left(\frac{du}{dr} \frac{1}{r} - \frac{u}{r^2} \right) - v'(r)\alpha(r)T(r) - \right. \\ & \left. (1+v(r)) [\alpha'(r)T(r) + \alpha(r)T'(r)] \right] \frac{E(r)}{1-v(r)^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.116)$$

elde edilir. (3.116) no'lu denklemde gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} \frac{E(r)}{1-v(r)^2} \left[\frac{du}{dr} + v(r) \frac{u}{r} - (1+v(r))\alpha(r)T(r) \right] + \\ & \frac{E(r)}{r(1-v(r)^2)} \left[\frac{du}{dr} (1-v(r)) - \frac{u}{r} (1-v(r)) \right] + \\ & \frac{E'(r)(1-v(r)^2) + E(r)(2v(r)v'(r))}{(1-v(r)^2)^2} \left[\frac{du}{dr} + v(r) \frac{u}{r} - (1+v(r))\alpha(r)T(r) \right] + \\ & \left[\frac{d^2u}{dr^2} + v'(r) \frac{u}{r} + v(r) \left(\frac{du}{dr} \frac{1}{r} - \frac{u}{r^2} \right) - v'(r)\alpha(r)T(r) - \right. \\ & \left. (1+v(r)) [\alpha'(r)T(r) + \alpha(r)T'(r)] \right] \frac{E(r)}{1-v(r)^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.117)$$

elde edilir. $\left(\frac{du}{dr} \frac{1}{r} - \frac{u}{r^2} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right)$ eşitliği (3.117) no'lu denklemde yazılıp ve gerekli çarpma işlemleri yapılırsa,

$$\frac{\delta'(r)}{\delta(r)} \frac{E(r)}{1-v(r)^2} \frac{du}{dr} + \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} \frac{E(r)}{1-v(r)^2} v(r) \frac{u}{r} - \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} \frac{E(r)}{1-v(r)^2} (1+v(r))\alpha(r)T(r) +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{E(r)}{1-v(r)^2} \frac{d}{dr} \frac{u}{r} (1-v(r)) + \frac{E'(r)}{1-v(r)^2} \frac{du}{dr} + \frac{E'(r)}{1-v(r)^2} v(r) \frac{u}{r} - \frac{E'(r)}{1-v(r)^2} (1+v(r)) \alpha(r) T(r) + \\
& \frac{E(r)(2v(r)v'(r))}{(1-v(r)^2)^2} \frac{du}{dr} + \frac{E(r)(2v(r)v'(r))}{(1-v(r)^2)^2} v(r) \frac{u}{r} - \frac{E(r)(2v(r)v'(r))}{(1-v(r)^2)^2} (1+v(r)) \alpha(r) T(r) + \\
& \frac{E(r)}{1-v(r)^2} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{E(r)}{1-v(r)^2} v'(r) \frac{u}{r} + \frac{E(r)}{1-v(r)^2} v(r) \frac{d}{dr} \frac{u}{r} - \frac{E(r)}{1-v(r)^2} v'(r) \alpha(r) T(r) - \\
& \frac{E(r)}{1-v(r)^2} \alpha'(r) T(r) - \frac{E(r)}{1-v(r)^2} \alpha(r) T'(r) - \frac{E(r)}{1-v(r)^2} v(r) \alpha'(r) T(r) - \\
& \frac{E(r)}{1-v(r)^2} v(r) \alpha(r) T'(r) = 0
\end{aligned} \tag{3.118}$$

elde edilip, (3.118) no'lu denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} \frac{E(r)}{1-v(r)^2} \frac{du}{dr} + \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} \frac{E(r)}{1-v(r)^2} v(r) \frac{u}{r} - \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} \frac{E(r)}{1-v(r)^2} (1+v(r)) \alpha(r) T(r) + \\
& \frac{E(r)}{1-v(r)^2} \frac{d}{dr} \frac{u}{r} + \frac{E'(r)}{1-v(r)^2} \frac{du}{dr} + \frac{E'(r)}{1-v(r)^2} v(r) \frac{u}{r} - \frac{E'(r)}{1-v(r)^2} (1+v(r)) \alpha(r) T(r) + \\
& \frac{E(r)(2v(r)v'(r))}{(1-v(r)^2)^2} \frac{du}{dr} + \frac{E(r)(2v(r)v'(r))}{(1-v(r)^2)^2} v(r) \frac{u}{r} - \frac{E(r)(2v(r)v'(r))}{(1-v(r)^2)^2} (1+v(r)) \alpha(r) T(r) + \\
& \frac{E(r)}{1-v(r)^2} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{E(r)}{1-v(r)^2} v'(r) \frac{u}{r} - \frac{E(r)}{1-v(r)^2} v'(r) \alpha(r) T(r) - \frac{E(r)}{1-v(r)^2} \alpha'(r) T(r) - \\
& \frac{E(r)}{1-v(r)^2} \alpha(r) T'(r) - \frac{E(r)}{1-v(r)^2} v(r) \alpha'(r) T(r) - \frac{E(r)}{1-v(r)^2} v(r) \alpha(r) T'(r) = 0
\end{aligned} \tag{3.119}$$

(3.119) no'lu denklem $\frac{1-v(r)^2}{E(r)}$ ifadesi ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} \frac{du}{dr} + \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} v(r) \frac{u}{r} - \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} (1+v(r)) \alpha(r) T(r) + \frac{d}{dr} \frac{u}{r} + \frac{E'(r)}{E(r)} \frac{du}{dr} + \frac{E'(r)}{E(r)} v(r) \frac{u}{r} - \\
& \frac{E'(r)}{E(r)} (1+v(r)) \alpha(r) T(r) + \frac{2v(r)v'(r)}{1-v(r)^2} \frac{du}{dr} + \frac{2v(r)v'(r)}{1-v(r)^2} v(r) \frac{u}{r} - \\
& \frac{2v(r)v'(r)}{1-v(r)^2} (1+v(r)) \alpha(r) T(r) + \frac{d^2 u}{dr^2} + v'(r) \frac{u}{r} - v'(r) \alpha(r) T(r) - \alpha'(r) T(r) - \\
& \alpha(r) T'(r) - v(r) \alpha'(r) T(r) - v(r) \alpha(r) T'(r) = 0
\end{aligned} \tag{3.120}$$

elde edilir $\frac{d}{dr} \frac{u}{r} = \frac{1}{r} \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right)$ eşitliği (3.120) no'lu denklemde yazılıp, ortak ifadeler parantez

içine alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} \left[\frac{\delta'(r)}{\delta(r)} + \frac{E'(r)}{E(r)} + \frac{2v(r)v'(r)}{1-v(r)^2} + \frac{1}{r} \right] + \\
& \frac{u}{r} \left[\frac{\delta'(r)}{\delta(r)} v(r) + \frac{E'(r)}{E(r)} v(r) + \frac{2v(r)v'(r)}{1-v(r)^2} v(r) + v'(r) - \frac{1}{r} \right] = \\
& (1+v(r)) \alpha(r) T(r) \left[\frac{\delta'(r)}{\delta(r)} + \frac{E'(r)}{E(r)} + \frac{2v(r)v'(r)}{1-v(r)^2} \right] +
\end{aligned}$$

$$v'(r)\alpha(r)T(r) + v(r)\alpha(r) + v(r)\alpha'(r)T(r) + \alpha(r)T'(r) + \alpha'(r)T(r) \quad (3.121)$$

genel denklem elde edilir.

3.4. Sayısal Çözüm

Sıcaklık dağılımını ve değişken kesitli FDM'den yapılmış dairesel kanatçığın gerilmelerini elde etmek amacıyla, önceki bölümde açıklanan Pseudospectral Chebyshev Yöntemi uygulanmıştır. Sıcaklık dağılımı ve yer değiştirme denklemlerini içeren (3.49) ve (3.121) numaralı denklemler, Pseudospectral Chebyshev Yöntemi kullanılarak lineer bir denklemler sistemine dönüştürülmüştür. Bu lineer denklemler matris biçiminde oluşturulmuş ve MATLAB ile yazılan kod içerisinde kullanılmıştır.

İkinci dereceden homojen olmayan diferansiyel denklemlerin lineer sistem denklemlerine dönüşüm süreci aşağıda açıklanmaktadır.

3.4.1. Sıcaklık Dağılımı

Dairesel kanatçığın varsayımları ve geometrisi göz önünde bulundurularak, enerji denge denklemi (3.25) oluşturulmuştur ve sıcaklık dağılımı için aşağıdaki (3.122) numaralı denklem elde edilmiştir:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} \left(\frac{k'(r)}{k(r)} + \frac{1}{r} + \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} \right) - \frac{2h}{\delta(r)k(r)} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.122)$$

(3.122) numaralı denklemi Pseudospectral Chebyshev Yöntemi kullanarak çözmek için, ayrıklaştırma işlemi aşağıdaki gibi gerçekleştirilmiştir:

$$L_1 = D^2 + \left(\frac{k'(r)}{k(r)} + \frac{1}{r} + \frac{\delta'(r)}{\delta(r)} \right) D - \frac{2h}{\delta(r)k(r)} \quad (3.123)$$

$$RHS_1 = \frac{2h}{\delta(r)k(r)} T_\infty \quad (3.124)$$

Burada, bu yaklaşımlar ile lineer denklemler sistemi elde edilmiştir.

$$L_1 T = RHS_1 \quad (3.125)$$

Pseudospektral Chebyshev Yöntemi, tüm lineer denklem sistemini aynı anda çözmek amacıyla matrisler kullanır. Önceden belirtilen lineer denklem sistemi matris biçiminde ifade edilmiştir.

$$\begin{bmatrix} (L_1)_1 \\ (L_1)_2 \\ (L_1)_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ (L_1)_8 \\ (L_1)_9 \\ (L_1)_{10} \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} (RHS_1)_1 \\ (RHS_1)_2 \\ (RHS_1)_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ (RHS_1)_8 \\ (RHS_1)_9 \\ (RHS_1)_{10} \end{bmatrix}$$

Sınır değerleri:

$$T(a) = T_b$$

$$T'(b) = 0 \quad (3.126)$$

3.4.2. Termal Gerilme Dağılımı

Dairesel kanatçıkların varsayımları ve geometrisine dayanarak, denge denklemi (3.121) elde edilmiştir. Termal gerilme dağılımlarını incelemek için, denklemi (3.108) yer değiştirme ikinci dereceden homojen olmayan diferansiyel denklem olarak formüle edilmiştir. Pseudospektral Chebyshev Yöntemi'ni kullanarak (3.121) numaralı denklemi çözmek için, ayrıklaştırma işlemi aşağıdaki gibi gerçekleştirilmiştir.

$$L_2 = D^2 + \left[\frac{\delta'(r)}{\delta(r)} + \frac{E'(r)}{E(r)} + \frac{2v(r)v'(r)}{1-v(r)^2} + \frac{1}{r} \right] D + \frac{1}{r} \left[\frac{\delta'(r)}{\delta(r)} v(r) + \frac{E'(r)}{E(r)} v(r) + \frac{2v(r)v'(r)}{1-v(r)^2} v(r) + v'(r) - \frac{1}{r} \right] \quad (3.127)$$

$$RHS_2 = (1 + v(r))\alpha(r)T(r) \left[\frac{\delta'(r)}{\delta(r)} + \frac{E'(r)}{E(r)} + \frac{2v(r)v'(r)}{1-v(r)^2} \right] + v'(r)\alpha(r)T(r) + v(r)\alpha(r) + v(r)\alpha'(r)T(r) + \alpha(r)T'(r) + \alpha'(r)T(r) \quad (3.128)$$

$$L_2 u = RHS_2 \quad (3.129)$$

Pseudospektral Chebyshev Yöntemi, tüm lineer denklem sistemini aynı anda çözmek amacıyla matrisler kullanır. Önceden belirtilen lineer denklem sistemi matris biçiminde ifade edilmiştir.

$$\begin{bmatrix} (L_2)_1 \\ (L_2)_2 \\ (L_2)_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ (L_2)_8 \\ (L_2)_9 \\ (L_2)_{10} \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} (RHS_2)_1 \\ (RHS_2)_2 \\ (RHS_2)_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ (RHS_2)_8 \\ (RHS_2)_9 \\ (RHS_2)_{10} \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

Sınır değerleri:

$$\sigma_a = 0$$

$$\sigma_b = 0 \quad (3.131)$$

Sınır koşulları (3.62-3.63) numaralı denklemlere uygulanırsa:

$$\sigma_a = 0 ; \frac{du}{dr} + v \frac{u(a)}{a} = (1 + v)aT(a)$$

$$\sigma_b = 0 ; \frac{u(b)}{b} + v \frac{du}{dr} = (1 + v)aT(b) \quad (3.132)$$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeden yapılmış değişken kesitli dairesel bir kanatçığın genel termal analizi, Pseudospectra Chebyshev Yöntemi (PCY) kullanılarak yapılmıştır. Analizde iç yarıçap $a = 0.01$ (m), dış yarıçap $b = 0.02$ (m), kanatçığın tabanındaki kalınlık $y_b = 0.005$ (m) ve uçtaki kalınlık $M = 0.0005$ (m) olarak alınmıştır. Isı transferi katsayısı $h = 2.560165 \times 10^3$ ($\frac{W}{m^2K}$), çevre sıcaklığı $T_\infty = 273$ (K) ve taban sıcaklığı $T_b = 373$ (K) olarak kabul edilmiştir. Kanatçığın kesiti değişken kesitli olarak seçilmiş olup, bu kesit Şekil (3.2)'de gösterilmiştir. Kompozit kanadın Silisyum Karbür ve Alüminyum malzemelerinden yapılmış olduğu varsayılmaktadır. Analiz için dikkate alınan malzeme çiftinin mekanik ve termal özellikleri, Tablo-4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1. Silisyum Karbür ve Alüminyumun Mekanik ve Termal Özellikleri

	E (Pa)	k (W/mK)	α (1/K)	ν
SiC	350×10^9	80	$4,6 \times 10^{-6}$	0.27
Al	69×10^9	220	$23,6 \times 10^{-6}$	0.33

Sayısal yöntemin doğrulama işlemi yapılırken, dairesel kanatçığın Silisyum Karbür ve Alüminyumdan yapıldığı ve homojen bir dağılım gösterdiği varsayılmıştır. Tablo 4.3 incelendiğinde, sadece 10 örgü noktası ile büyük oranda doğruluk elde edildiği görülmektedir.

Tablo 4.1 incelendiğinde, Silisyum Karbür ve Alüminyum malzemelerinin ısı genleşme katsayıları arasındaki fark çok büyüktür. Bu sebeple termal gerilmeler homojen dağılımlı bir dairesel kanatçığa kıyasla çok yüksek çıkmaktadır (Yıldırım ve ark, 2022). Bundan dolayı fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde çözüm yapılırken, birbirlerine daha yakın ısı genleşme katsayısına sahip malzemeler kullanılmıştır.

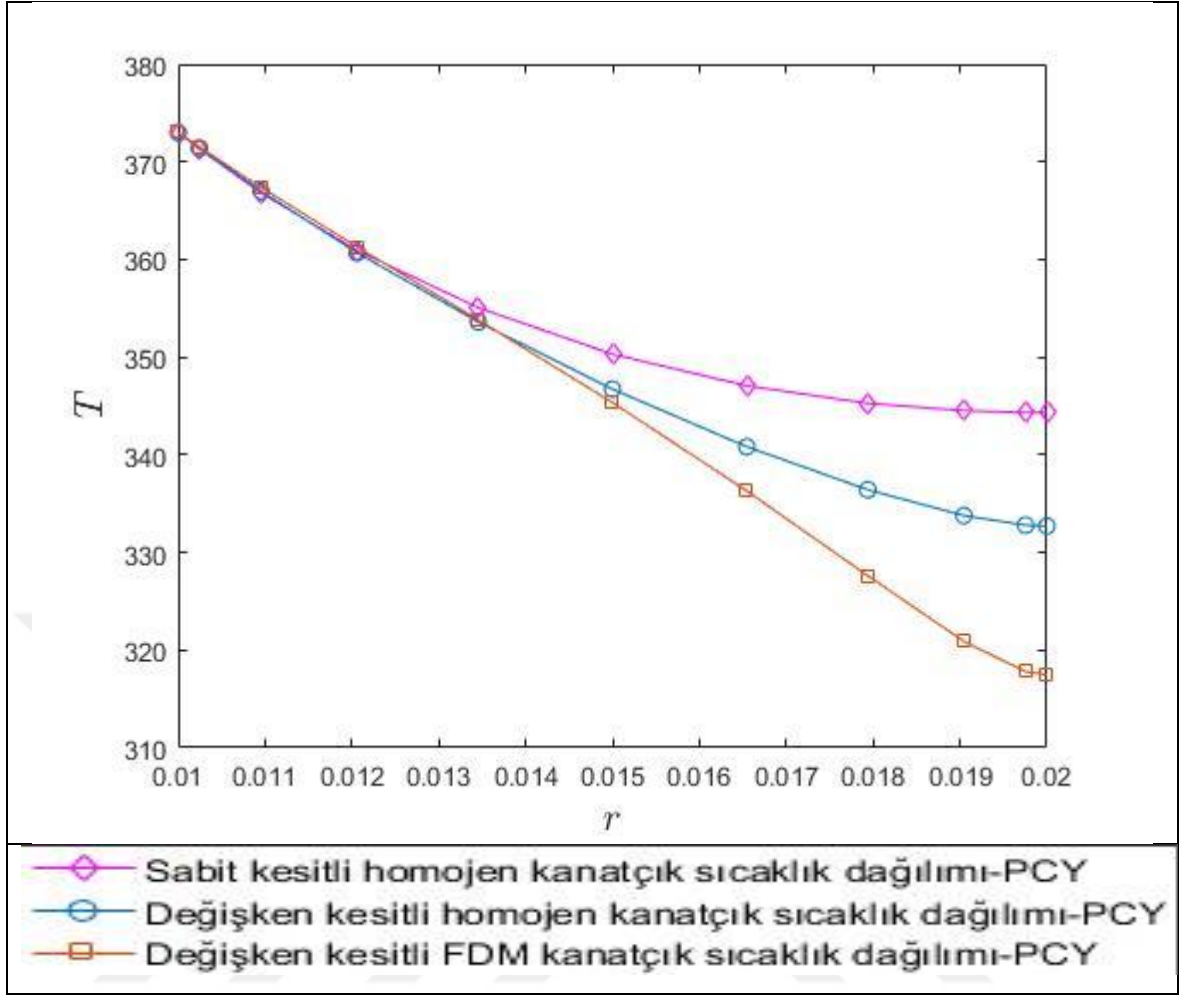
FDM'den yapılmış kanatçığın ısı-mekanik özellikleri Tablo 4.2'de gösterilmiştir.

Tablo 4.2. Alüminyum Oksit Titanyum 6-Alüminyum 4- Vanadyumun Mekanik ve Termal Özellikleri

	E (Pa)	k (W/mK)	α (1/K)	ν
Al_2O_3	380×10^9	39	$7,4 \times 10^{-6}$	0.22
$Ti - 6Al - 4V$	$116,7 \times 10^9$	7,5	$9,5 \times 10^{-6}$	0.312

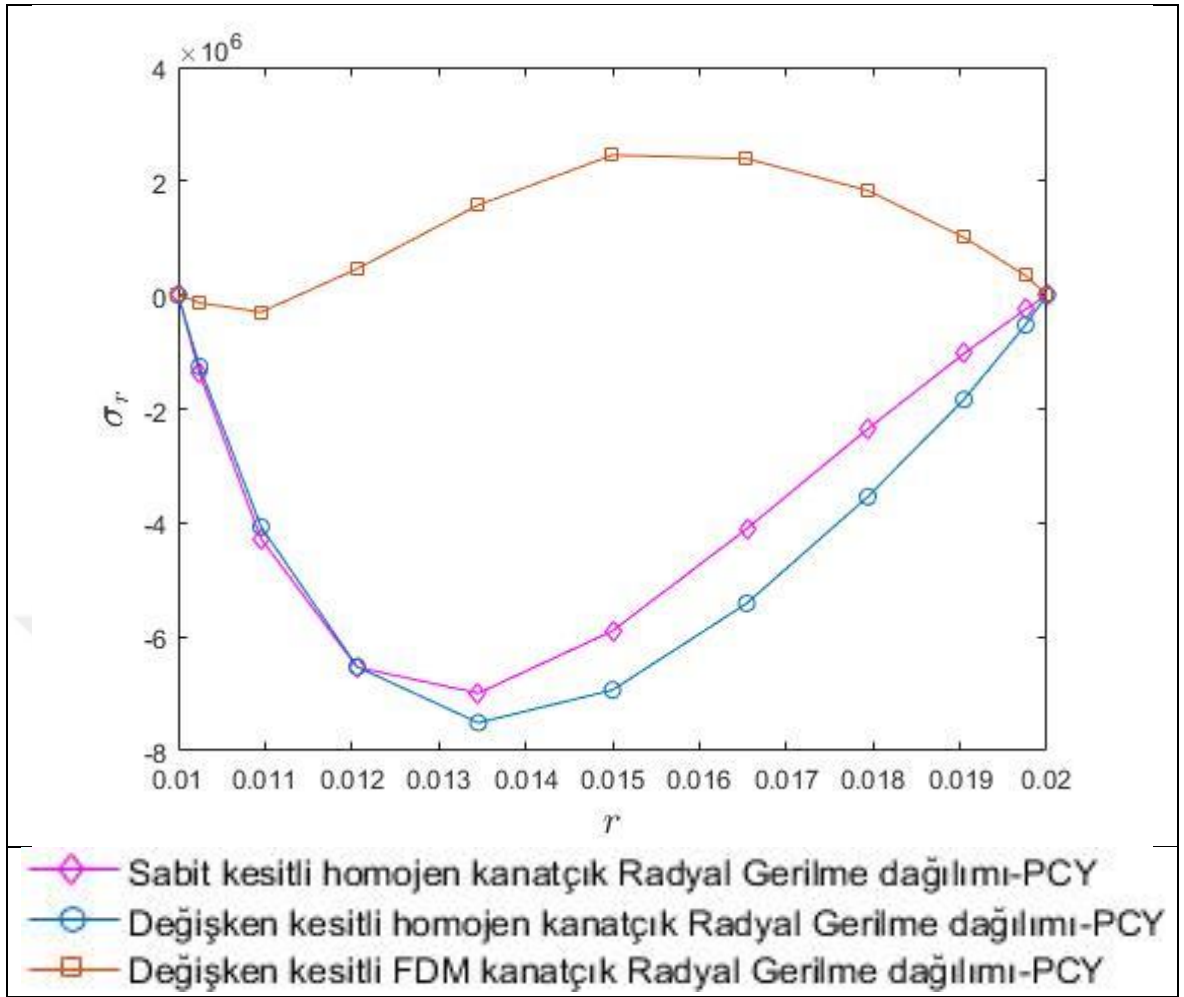
Tablo 4.3. Sayısal Yöntemin Analitik Sonuçlarla Karşılaştırılması (Caglar, 2024)

r	T (K)			$\sigma_r \times 10^6$ (Pa)			$\sigma_\phi \times 10^6$ (Pa)		
	Analytical	PCM	Error $\times 10^{-8}$	Analytical	PCM	Error $\times 10^{-3}$	Analytical	PCM	Error $\times 10^{-5}$
0.010000	373.000000	372.999999	0.00000013	0,00000000	0,00000000	0,00000000	-40.0079587	-40.0079587	0.06282991
0.010244	371.309552	371.309552	0.03662082	-0.90670874	-0.90670874	0.06912914	-35.9553306	-35.9553306	0.01012795
0.010954	366.815964	366.815964	0.09261584	-2.83426246	-2.83426246	0.00028606	-25.6652201	-25.6652201	0.07623740
0.012061	360.904549	360.904548	0.19691170	-4.32633675	-4.32633675	0.01188002	-13.1720138	-13.1720138	0.01447886
0.013454	355.053252	355.053251	0.31241889	-4.62587336	-4.62587336	0.00031646	-01.9832269	-1.9832269	0.49715404
0.015000	350.295940	350.295938	0.43369227	-3.90228207	-3.90228207	0.01041034	06.1465300	6.1465300	0.11547695
0.016545	347.060492	347.060490	0.55623001	-2.71596667	-2.71596667	0.00037147	10.9813763	10.9813763	0.02626142
0.017938	345.265629	345.265627	0.65457545	-1.55508863	-1.55508863	0.02212730	13.1607337	13.1607337	0.07704613
0.019045	344.519249	344.519246	0.74296706	-0.68063951	-0.68063951	0.00044122	13.6752970	13.6752970	0.00610759
0.019755	344.333698	344.333695	0.78815199	-0.16647095	-0.16647095	0.19101726	13.5064382	13.5064382	0.08524002
0.020000	344.320831	344.320828	0.81352758	0,00000000	0,00000000	0,00000000	13.3639122	13.3639122	0.01494372



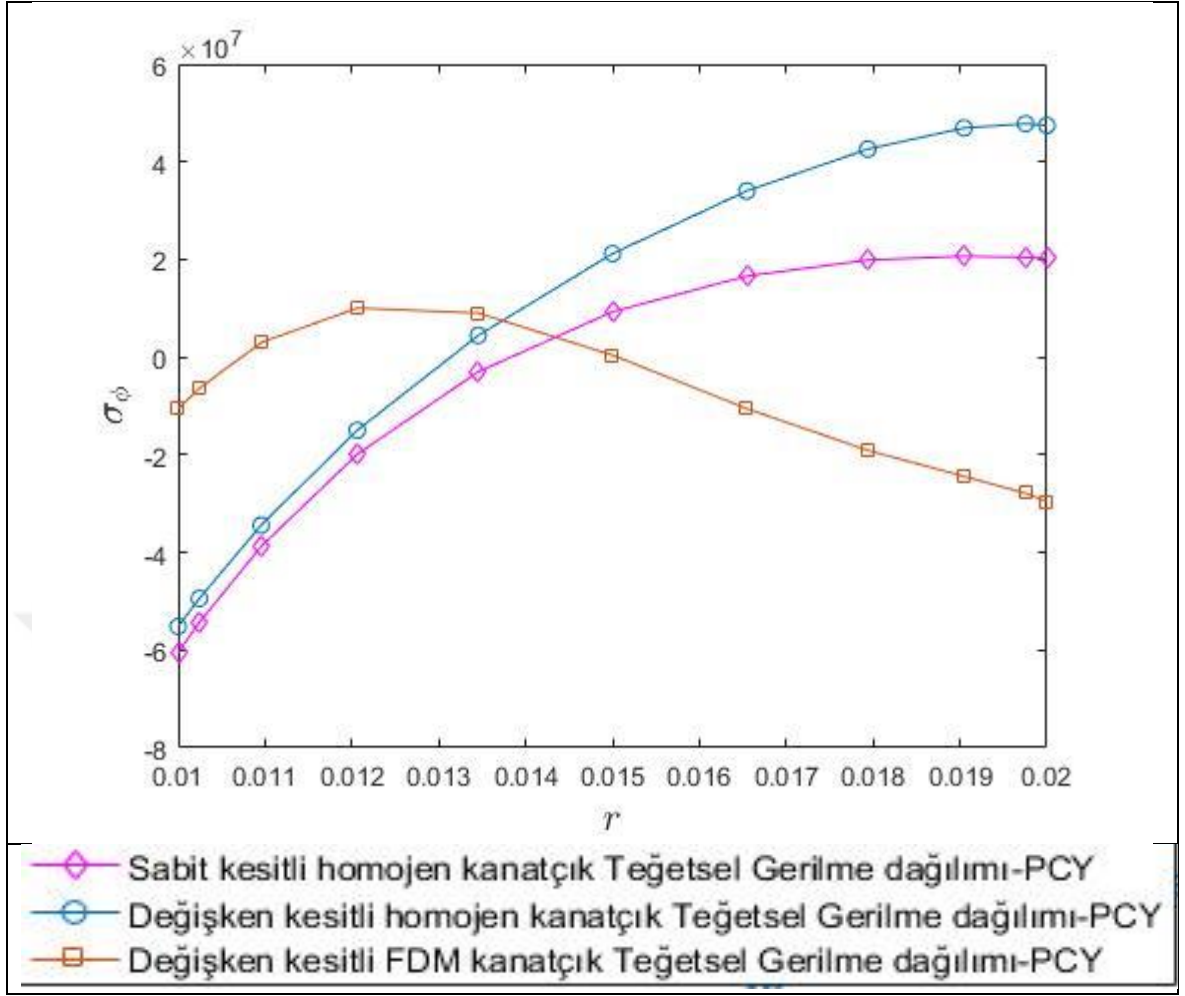
Şekil 4.1. Dairesel Kanatçığın Sıcaklık Dağılımı

Şekil 4.1’de, yarıçapın 0.01 (m) ile 0.02 (m) arasında değiştiği fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış bir dairesel kanatçığın sıcaklık dağılımları gösterilmektedir. Radyal yönde ilerledikçe kanatçığın kesit kalınlığı azalırken, yan yüzey alanı artar. Bu durum, kesiti sabit ve değişken olan homojen yapıli kanatçıklarla karşılaştırıldığında ısı transfer oranının artmasına neden olur. Kanatçık uçlarındaki sıcaklık değerleri ise, kanatçığın geometrisine bağlı olarak değişim göstermektedir. Değişken kesitli FDM’den yapılmış kanatçık uçlarının sıcaklığı, sabit kesitli ve değişken kesitli homojen yapıli kanatçık uçlarına göre daha düşük olduğundan, bu tip kanatçıklar konveksiyon yoluyla daha verimli bir ısı transferi sunar. Ayrıca, aynı ısı transfer performansını sağlamak için değişken kesitli FDM’den yapılmış kanatçıklar, sabit kesitli homojen yapıli kanatçıklara kıyasla daha az malzeme kullanımı avantajı sunar.



Şekil 4.2. Dairesel Kanatçığın Radyal Gerilmeleri

Şekil 4.2’de, kanatçık kalınlığının ve malzemenin fonksiyonel derecelendirilmesinin radyal gerilmeler üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Değişken kesitli kanatçıkta, sabit kesitli kanatçığa kıyasla radyal gerilmede artan bir eğilim gözlemlenmiştir. Değişken kesitli FDM’den yapılmış dairesel kanatçıkta radyal gerilmeler önce basma sonra çekme yönündeyken, sabit ve değişken kesitli homojen malzemeli kanatçıklarda radyal gerilmeler basma yönündedir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin kullanımıyla kanatçıkta gerilmelerin azaldığı gözlemlenmiştir. Şekil 4.2 incelendiğinde en yüksek radyal gerilmenin değişken kesitli homojen malzemeden yapılmış dairesel kanatçıkta elde edildiği görülmektedir. Radyal gerilmelerin büyüklükleri dairesel kanatçığın tabanında birbirlerine çok yakinken, en düşük radyal gerilmenin ise değişken kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış dairesel kanatçıkta elde edildiği gözlemlenmiştir.



Şekil 4.3. Dairesel Kanatçığın Teğetsel Gerilmeleri

Şekil 4.3'te dairesel kanatçıkta meydana gelen radyal gerilmenin davranışı gösterilmiştir. Bu şekilde, kanatçık kalınlığının ve malzemenin fonksiyonel derecelendirilmesinin teğetsel gerilmeler üzerindeki etkisi incelenmiştir. Değişken kesitli FDM'den yapılmış kanatçıkta teğetsel gerilmeler önce çekme eğilimindeyken daha sonra basma eğiliminde ilerleme göstermiştir. Homojen yapıdaki kanatçıklarda ise tam tersi gözlemlenmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin kullanımıyla kanatçıkta gerilmelerin azaldığı görülmüştür. Şekil 4.3 incelendiğinde en yüksek teğetsel gerilmenin sabit kesitli homojen malzemeden yapılmış dairesel kanatçıkta elde edildiği görülmektedir. En düşük teğetsel gerilmenin değişken kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış dairesel kanatçıkta elde edildiği gözlemlenmiştir.



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Değişken kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış dairesel kanatçığın genel termal analizi, Pseudospektral Chebyshev Yöntemi (PCM) kullanılarak incelenmiştir. Dairesel kanatçığın kalınlığı, radyal yönde doğrusal olarak değişmekte olup, üçgen bir profile sahiptir. Bu durumda enerji denge denklemleri ve termal gerilme denklemleri daha karmaşık hale gelmekte ve analitik çözümler zorlaşmaktadır. Bu nedenle, sunulan sayısal tekniğin doğruluğunu test etmek amacıyla, düzgün kesitli bir dairesel kanatçık üzerinde karşılaştırmalı bir çalışma yapılmıştır. Ayrıca, farklı uç kalınlıkları dikkate alınarak sıcaklık dağılımları ve gerilme değerleri birbirleriyle karşılaştırılmıştır.

Sonuç olarak, aşağıdaki çıkarımlara ulaşılmıştır:

- Dairesel kanatçıkların ısıl-mekanik özelliklerinin fonksiyonel olarak derecelendirilmesi sayesinde termal gerilmelerde ciddi bir düşüş gözlemlenmiştir.
- Aynı ısı transfer kapasitesi için, değişken kesitli kanatçık, sabit kesitli kanatçığa göre malzeme tasarrufu sağlamaktadır.
- Uç noktalarındaki sıcaklık farkına bağlı olarak elde edilen sonuçlar değişken kesitli FDM'den yapılmış kanatçığın sabit kesitli ve değişken kesitli homojen yapıdaki kanatçığa göre konveksiyonel ısı transferi açısından üstün olduğunu göstermiştir.
- Kanatçık kalınlığının radyal yönde değişmesi, konveksiyonla ısı transferini, sabit kesitli dairesel kanatçıktan daha olumlu etkilemiştir.
- Radyal ve teğetsel gerilme grafikleri incelendiğinde, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler dairesel kanatçıklarda gerilmelerin ciddi oranda azalmasına sebep olduğu görülmüştür.



KAYNAKLAR

- Acosta-Iborra, A., & Campo, A. (2009). Approximate analytic temperature distribution and efficiency for annular fins of uniform thickness. *International Journal of Thermal Sciences*, 48(4), 773-780.
- Agarwal, R. P. (1982). On the method of complementary functions for nonlinear boundary-value problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 36(1), 139-144.
- Ahmed, S. (2020). CERTAIN DEFINITE INTEGRALS OF k BESSEL FUNCTION OF FIRST KIND. *Journal of Science and Arts*, 20(2), 291-304.
- Altunalan, T. (2016). *Some spectral methods with applications for the numerical solutions of partial differential Eqs* (Master's thesis).
- Arslanturk, C. (2004). Performance analysis and optimization of a thermally non-symmetric annular fin. *International communications in heat and mass transfer*, 31(8), 1143-1153.
- Arslanturk, C. (2009). Correlation equations for optimum design of annular fins with temperature dependent thermal conductivity. *Heat and Mass Transfer*, 45, 519-525.
- Aziz, A., & Fang, T. (2010). Alternative solutions for longitudinal fins of rectangular, trapezoidal, and concave parabolic profiles. *Energy conversion and Management*, 51(11), 2188-2194.
- Aziz, A., & Rahman, M. M. (2009). Thermal performance of a functionally graded radial fin. *International Journal of Thermophysics*, 30, 1637-1648.
- Aziz, A., Torabi, M., & Zhang, K. (2013). Convective–radiative radial fins with convective base heating and convective–radiative tip cooling: homogeneous and functionally graded materials. *Energy Conversion and Management*, 74, 366-376.
- Baricz, Á., & Mehrez, K. (2018). Redheffer type bounds for Bessel and modified Bessel functions of the first kind. *Aequationes mathematicae*, 92, 425-439.
- Bazán, F. S. (2008). Chebyshev pseudospectral method for computing numerical solution of convection–diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*, 200(2), 537-546.
- Belhocine, A. (2015). Numerical investigation of a three-dimensional disc-pad model with and without thermal effects. *Thermal science*, 19(6), 2195-2204.
- Benyamina, A. B., Boudierba, B., & Saoula, A. (2018). Bending response of composite material plates with specific properties, case of a typical FGM" Ceramic/Metal" in thermal environments. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 62(4), 930-938.
- Caglar, O., 2024. Thermal stresses in variable cross-sectional composite annular fins. Yüksek Lisans tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana, 77 s.
- Campo, A., & Stuffle, R. E. (1997). Symbolic mathematics for the calculation of thermal efficiencies and tip temperatures in annular fins of uniform thickness. *International journal of heat and mass transfer*, 40(2), 490-492.
- Cengel, Y. A. (2017). *Heat transfer: a practical approach* 2nd Edition.

- Cengel, Y. A., & Palm, W. J. (2013). *Differential Equations for Engineers and Scientists*. McGraw Hill.
- Chen, L. T. Y. C. O. K. (1999). Application of the Taylor transformation to the transient temperature response of an annular fin. *Heat transfer engineering*, 20(1), 78-87.
- Chiu, C. H. (2002). A decomposition method for solving the convective longitudinal fins with variable thermal conductivity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(10), 2067-2075.
- Chiu, C. H., & Chen, C. O. K. (2002). Thermal stresses in annular fins with temperature-dependent conductivity under periodic boundary condition. *Journal of Thermal Stresses*, 25(5), 475-492.
- Darvishi, M. T., Khani, F., & Aziz, A. (2016). Numerical investigation for a hyperbolic annular fin with temperature dependent thermal conductivity. *Propulsion and Power Research*, 5(1), 55-62.
- Eker, M., 2020. Bir ve İki Boyutta İşlevsel Derecelendirilmiş Silindirlerin Isılmekanik İncelenmesi. Doktora tezi, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Osmaniye, 169 s.
- Eker, M., Yarımpabuç, D., & Çelebi, K. (2021). Thermal stress analysis of functionally graded solid and hollow thick-walled structures with heat generation. *Engineering Computations*, 38(1), 371-391.
- Fox, L. (1962). Chebyshev methods for ordinary differential equations. *The Computer Journal*, 4(4), 318-331.
- Funaro, D., & Gottlieb, D. (1988). A new method of imposing boundary conditions in pseudospectral approximations of hyperbolic equations. *Mathematics of computation*, 51(184), 599-613.
- Gaba, V. K., Tiwari, A. K., & Bhowmick, S. (2014). Thermal performance of functionally graded parabolic annular fins having constant weight. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 28, 4309-4318.
- Ganji, D. D., Ganji, Z. Z., & Ganji, D. H. (2011). Determination of temperature distribution for annular fins with temperature dependent thermal conductivity by HPM. *Thermal science*, 15(suppl. 1), 111-115.
- Gottlieb, D. (1981). The stability of pseudospectral-Chebyshev methods. *Mathematics of Computation*, 36(153), 107-118.
- Guo, B. (1998). *Spectral methods and their applications*. World Scientific.
- Haghighi, M. G. (2016). Estimation of heat flux in variable thickness functionally graded annular fin. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 40, 203-214.
- Halpin, J. C. (1969). Stiffness and expansion estimates for oriented short fiber composites. *Journal of composite materials*, 3(4), 732-734.
- Hassanzadeh, R., & Pekel, H. (2013). Heat transfer enhancement in annular fins using functionally graded material. *Heat Transfer—Asian Research*, 42(7), 603-617.

- Huang, M. J., Chou, P. K., & Lin, M. C. (2008). An investigation of the thermal stresses induced in a thin-film thermoelectric cooler. *Journal of Thermal Stresses*, 31(5), 438-454.
- Kang, H. S., & Look Jr, D. C. (2007). Optimization of a thermally asymmetric convective and radiating annular fin. *Heat transfer engineering*, 28(4), 310-320.
- Kang, H. S., & Look Jr, D. C. (2009). Optimization of a trapezoidal profile annular fin. *Heat transfer engineering*, 30(5), 359-367.
- Kanthimathi, T., & Naga, S. R. G. (2016). Heat Transfer Through Annular Composite Fins. *Journal of Mechanical Engineering and Technology*, 4(1), 1.
- Khan, W. A., & Aziz, A. (2012). Transient heat transfer in a functionally graded convecting longitudinal fin. *Heat and mass transfer*, 48, 1745-1753.
- Kirköse, M. A., & YARIMPABUÇ, D. *Fonksiyonel derecelendirilmiş silindirin ısı iletiminin chebyshev pseudospektral yöntemi ile geçici rejimdeki analizi* (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü).
- Koizumi, M. F. G. M. (1997). FGM activities in Japan. *Composites part b: engineering*, 28(1-2), 1-4.
- Kundu, B., & Das, P. K. (2001). Performance analysis and optimization of annular fin with a step change in thickness. *J. Heat Transfer*, 123(3), 601-604.
- Kundu, S., Kalkal, K. K., Sangwan, M., & Sheoran, D. (2022). Two-dimensional deformations in an initially stressed nonlocal micropolar thermoelastic porous medium subjected to a moving thermal load. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, (ahead-of-print).
- Lee, H. L., & Yang, Y. C. (2003). Function estimation in predicting time-dependent heat flux of an annular fin. *Journal of Thermal stresses*, 26(8), 799-813.
- Lee, H. L., Chang, W. J., Chen, W. L., & Yang, Y. C. (2012). Inverse heat transfer analysis of a functionally graded fin to estimate time-dependent base heat flux and temperature distributions. *Energy Conversion and Management*, 57, 1-7.
- Lee, H. L., Yang, Y. C., & Chu, S. S. (2002). Transient thermoelastic analysis of an annular fin with coupling effect and variable heat transfer coefficient. *Journal of thermal stresses*, 25(12), 1105-1120.
- Li, A., & Qin, H. (2022). Fast Calculation of the Derivatives of Bessel Functions with Respect to the Parameter and Applications. *Symmetry*, 15(1), 64.
- Maknun, I. J., & Zarfatina, S. (2021). Shear Correction Factor Effects on Functionally Graded Materials (FGMs) Beams using Discrete Shear Gap (DSG) Element. *International Journal of Technology*, 12(6), 1250-1260.
- Mallick, A., & Das, R. (2014). Application of simplex search method for predicting unknown parameters in an annular fin subjected to thermal stresses. *Journal of Thermal Stresses*, 37(2), 236-251.

- Mallick, A., Ranjan, R., & Das, R. (2016). Application of homotopy perturbation method and inverse prediction of thermal parameters for an annular fin subjected to thermal load. *Journal of Thermal Stresses*, 39(3), 298-313.
- Mokheimer, E. M. (2002). Performance of annular fins with different profiles subject to variable heat transfer coefficient. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(17), 3631-3642.
- Mousavi Ajarostaghi, S. S., Zaboli, M., Javadi, H., Badenes, B., & Urchueguia, J. F. (2022). A review of recent passive heat transfer enhancement methods. *Energies*, 15(3), 986.
- Nemat-Alla, M. (2009). Reduction of thermal stresses by composition optimization of two-dimensional functionally graded materials. *Acta mechanica*, 208, 147-161.
- Nemat-Alla, M., Ahmed, K. I., & Hassab-Allah, I. (2009). Elastic-plastic analysis of two-dimensional functionally graded materials under thermal loading. *International Journal of Solids and Structures*, 46(14-15), 2774-2786.
- Pashah, S., Arif, A. F. M., Zubair, S. M., & Mustafa, M. T. (2012). The effect of coating and interface resistance on thermal performance of variable thickness annular composite fins. *Energy conversion and management*, 54(1), 152-161.
- Peng, H. S., & Chen, C. L. (2011). Hybrid differential transformation and finite difference method to annular fin with temperature-dependent thermal conductivity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54(11-12), 2427-2433.
- Shariyat, M. (2012). Nonlinear transient stress and wave propagation analyses of the FGM thick cylinders, employing a unified generalized thermoelasticity theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 65(1), 24-37.
- Timoshenko, S. (1970). Goodier, JN, *Theory of Elasticity*. New. York McGraw—Hill, 970(4), 279-291.
- Trefethen, L. N. (2000). *Spectral methods in MATLAB*. Society for industrial and applied mathematics.
- Tutuncu, N., & Temel, B. (2013). An efficient unified method for thermoelastic analysis of functionally graded rotating disks of variable thickness. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 20(1), 38-46.
- Voigt, R.G., Gottlieb, D., Hussaini, M.Y., *Spectral Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, USA, 1984.
- Wang, C. C., Liao, W. J., & Yang, C. Y. (2013). Hybrid spline difference method for heat transfer and thermal stresses in annular fins. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 64(1), 71-88.
- Wu, S. S. (1997). Analysis on transient thermal stresses in an annular fin. *Journal of thermal stresses*, 20(6), 591-615.
- Yang, Y. C., & Chu, S. S. (2001). Transient coupled thermoelastic analysis of an annular fin. *International communications in heat and mass transfer*, 28(8), 1103-1114.

- Yayla, P. (2014). Uygulamalı Elastisite Teorisi (Applied Theory of Elasticity), 1. basım
- YILDIRIM, A., Mehmet, E. K. E. R., YARIMPABUÇ, D., ARIKAN, V., & Çelebi, K. (2022). İŞLEVSEL DERECELENDİRİLMİŞ DAİRESEL BİR KANATÇIĞIN TERMOELASTİK DAVRANIŞININ SAYISAL İNCELENMESİ. *Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 25(4), 602-614.
- Yildirim, A., Yarimpabuç, D., & Çelebi, K. (2018). İzotropik Malzemeden Yapılmış Dairesel Kanatçıklardaki Isıl Gerilmelerin Sayısal Modellemesi. *Çukurova Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Dergisi*, 33(3), 67-80.
- Yu, L. T., & Chen, C. O. K. (1998). Application of Taylor transformation to the thermal stresses in isotropic annular fins. *Journal of thermal stresses*, 21(8), 781-809.
- Zubair, S. M., Al-Garni, A. Z., & Nizami, J. S. (1996). The optimal dimensions of circular fins with variable profile and temperature-dependent thermal conductivity. *International journal of heat and mass transfer*, 39(16), 3431-3439.



ÖZGEÇMİŞ

İbrahim Erdem KAYPAK, 2015 yılında Şanlıurfa Anadolu Lisesinden mezun oldu. 2020 yılında ise Karadeniz Teknik Üniversitesi Makine Mühendisliği bölümünden mezun oldu. 2021 yılında Çukurova Üniversitesi Ceyhan Makine Mühendisliği (Türkçe) Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitimine başladı.

