

**T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MAKİNE TEORİSİ VE DİNAMİĞİ BİLİM DALI**

DEĞİŞKEN KESİTLİ MİKRO KİRİŞ TİTREŞİMLERİ

**Yazar
Mehmet Mert KÜÇÜK**

**Danışman
Dr. Öğretim Üyesi Saim KURAL**



MANİSA-2023

Mehmet Mert
KÜÇÜK

DEĞİŞKEN KESİTLİ MİKRO KİRİŞ TİTREŞİMLERİ

2023

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Mehmet Mert KÜÇÜK



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ	III
TABLO DİZİNİ	V
TEŞEKKÜR	VI
ÖZET	VII
ABSTRACT	VIII
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	10
2.1. MİKRO KİRİŞLERİN TİTREŞİM ANALİZİ	10
2.2. HAREKET DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ	11
2.3. BOYUTSUZLAŞTIRMA	15
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER	16
3.1. PERTURBASYON ANALİZİ	16
3.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYEL KARESELLEŞTİRME METODU (GDKM)	17
3.3. DOĞRUSAL OLMAYAN PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ	23
3.2.1. SAYISAL SONUÇLAR	27
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	38
5. KAYNAKLAR	39

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A : Mikro kirişin kesit alanı

m_k : Mikro kiriş kütlesi

E_k : Mikro kiriş elastisite modülü

G_k : Mikro kiriş kayma modülü

I_k : Mikro kiriş kütle ataleti

L : Mikro kiriş uzunluğu

λ : Kararlılığı belirleyen özdeğerler

$\mathcal{L}$: Lagrangian

T : Kinetik enerji

V : Elastik potansiyel enerji

D_0, D_1 : Hızlı ve yavaş zaman ölçeklerine göre türevler

T_0, T_1 : Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri

Y : Yer değiştirmenin mekana ait fonksiyonları

ϕ : Yer değiştirme fonksiyonunun seküler terimleri ile ilgili kısım

W : Yer değiştirme fonksiyonunun seküler olmayan terimleri ile ilgili kısım

d/dt : Zamana göre türev

d/dx : Mekana göre türev

dx^* : Mikro kirişten alınan uzamamış parça

ds^* : Mikro kirişten alınan uzamış parça

δ : Varyasyon

KKT : Klasik Kiriş Teorisi

$MG\mathcal{C}T$: Modifiye Ediliş Gerilme Çifti Teorisi

Şekil 2.1 Kesit Alanı Değişimi.....	11
Şekil 3.1 Basit-Basit mesnet birinci mod yapısı için KKT – MGÇT karşılaştırması (- MGÇT,---KKT)	29
Şekil 3.2 Basit-Basit mesnet ikinci mod yapısı için KKT – MGÇT karşılaştırması (- MGÇT,---KKT)	29
Şekil 3.3 Basit-Basit mesnet üçüncü mod yapısı için KKT – MGÇT karşılaştırması (- MGÇT,---KKT)	30
Şekil 3.4 Ankastre-Ankastre mesnet birinci mod yapısı için KKT – MGÇT karşılaştırması (- MGÇT,---KKT)	30
Şekil 3.5 Ankastre-Ankastre mesnet ikinci mod yapısı için KKT – MGÇT karşılaştırması (- MGÇT,---KKT)	31
Şekil 3.6 Ankastre-Ankastre mesnet üçüncü mod yapısı için KKT – MGÇT karşılaştırması (- MGÇT,---KKT)	31
Şekil 3.7 Basit-Basit mesnet için yarıçap oranının birinci mod yapısına etkisi (KKT)	32
Şekil 3.8 Ankastre-Ankastre mesnet için yarıçap oranının birinci mod yapısına etkisi (KKT)	32
Şekil 3.9 Basit-Basit mesnet 1. Mod yapısı (MGÇT, $R=0.3, V_f = 5$).....	33
Şekil 3.10 Basit-Basit mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (KKT, $R=1, \mu=0.3$)	34
Şekil 3.11 Basit-Basit mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (KKT, $R=0.8, \mu=0.3$) .	34
Şekil 3.12 Basit-Basit mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (KKT, $R=0.5, \mu=0.3$) .	34
Şekil 3.13 Basit-Basit mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (KKT, $R=0.3, \mu=0.3$) .	34
Şekil 3.14 Ankastre-Ankastre mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (KKT, $R=1, \mu=0.3$).....	34
Şekil 3.15 Ankastre-Ankastre mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (KKT, $R=0.8, \mu=0.3$).....	34
Şekil 3.16 Ankastre-Ankastre mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (KKT, $R=0.5, \mu=0.3$).....	34
Şekil 3.17 Ankastre-Ankastre mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (KKT, $R=0.3, \mu=0.3$).....	34
Şekil 3.18 Ankastre-Ankastre mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (MGÇT, $R=0.5, \mu=0.3$).....	35
Şekil 3.19 Basit-Basit mesnet 1. Mod nonlinear frekansın genlikle değişimi.....	36
Şekil 3.20 Basit-Basit mesnet 1. Mod nonlinear frekansın genlikle değişimi.....	36
Şekil 3.21 Basit-Basit mesnet 1. Mod nonlinear frekansın genlikle değişimi.....	37

Şekil 3.22 Basit-Basit mesnet 1. Mod nonlinear frekansın genlikle değişiminde sönüm oranı etkisi.....	37
---	----



TABLO DİZİNİ

Tablo 3.1. Eksenel kuvvetin olmadığı durum ($N=0$), doğal frekans karşılaştırmaları ($Vf = 1$)	27
Tablo 3.2. Klasik kiriş teorisi için yarıçap oranına bağlı doğal frekans değişimleri ($Vf = 1$)	28
Tablo 3.3. Modifiye edilmiş gerilme çifti teorisi ile klasik kiriş teorisi doğal frekans karşılaştırmaları	28
Tablo 3.4 Modifiye edilmiş gerilme çifti teorisi için kiriş direngenliğine bağlı doğal frekans karşılaştırmaları	28



TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam Sayın Dr. Öğretim Üyesi SAİM KURAL'a, bilgi ve tecrübesi ile lisansüstü öğrenim hayatımın tüm zorlu aşamalarında maddi manevi her yönden yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan büyük onur duyduğum sevgili hocam Sayın Dr. Öğretim Üyesi ALİ YURDDAŞ'a, yüksek lisans eğitimim sırasında desteği Sayın Dr. Öğretim Üyesi MEHMET AYVAZ'a, çalışmalarım sırasında manevi desteğini her zaman hissettiğim değerli kardeşim Makine Mühendisi AYKUT KÜÇÜK'e, Eşim Çevre Mühendisi Burcu KÜÇÜK'e, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan aileme yürekten teşekkür ederim.

Mehmet Mert KÜÇÜK
Manisa, 2023

ÖZET

Yüksek Lisans

Mikro Kirişlerde Titreşim Analizi

Mehmet Mert KÜÇÜK

**Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı**

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Saim KURAL

Bu çalışmada değişken kesitli mikro kirişler ele alınmıştır. Sistemin mikro boyutlarda olmasının etkilerini görebilmek için, klasik sürekli ortam teorisinden farklı olarak “Modifiye Edilmiş Gerilme Çifti Teorisi” (MGÇT) kullanılarak mikro yapı etkileri de sisteme katılmıştır. Hamilton prensibi kullanılarak değişken kesitli mikro kiriş için nonlinear hareket denklemleri elde edilmiştir. Mikro kiriş için basit-basit ve ankastre ankastre mesnet tipleri incelenmiştir. Titreşim esnasına uzamalardan kaynaklanan terimler ilave nonlinear özellik kazandırmıştır. Elde edilen hareket denklemleri boyutsuzlaştırılarak incelenen matematiksel model malzemenin cinsi ve geometrik yapısından bağımsız hale getirilmiştir. Kiriş kesiti en soldaki mesnetteki yarıçapa oranlı bir şekilde değiştiği kabul edilmiştir. Bir pertürbasyon metodu olan “Çok Ölçekli Metot” kullanılarak sistemin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Mikro yapının, uzamalardan kaynaklanan nonlinear terimlerin, yarıçap oranının doğal frekansa ve çözümlere olan etkileri araştırılmıştır. Kullanılan MGÇT yöntemi klasik kiriş teorisi ile karşılaştırılmış ve mikro boyuttaki kirişlerde klasik kirişlerden farklı olarak ele almamız gereken etkilerin varlığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Değişken Kesitli Mikro Kiriş, Pertürbasyon Analizi, Nonlinear Titreşim, Modifiye Edilmiş Gerilme Çifti Teorisi

2023, 45 Sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Vibration Analysis in Micro Beams

Mehmet Mert KÜÇÜK

**Manisa Celal Bayar University
Institute of Science
Department of Mechanical Engineering**

Superisor: Assist. Prof. Dr. Saim KURAL

This study deals with variable cross-section micro beams. In order to observe the effects of micro size on the system, microstructure effects are also included in the system using the "Modified Couple Stress Theory" (MCST), which is different from classical continuum theory. Nonlinear motion equations have been obtained for variable cross-section micro beams using the Hamiltonian principle. Simply-supported and clamped-clamped support types are investigated for micro beams. Terms arising from elongations during vibration have given additional nonlinear characteristics. The resulting motion equations have been dimensionless to make the mathematical model independent of the material type and geometric structure. It is assumed that the beam section changes in proportion to the radius at the leftmost support. Approximate solutions of the system have been obtained using the "Multiple Scale Method", which is a perturbation method. The effects of microstructure, nonlinear terms arising from elongations, and radius ratio on natural frequency and solutions have been investigated. The MCST method used has been compared with classical beam theory and the existence of effects that need to be addressed differently in micro-sized beams compared to classical beams has been shown.

Keywords: Variable Cross-Section Micro Beam, Perturbation Analysis, Nonlinear Vibration, Modified Couple Stress Theory

45 Pages, 2023

1. GİRİŞ

Mikro kirişler ve nano-elektro-mekanik sistemlerde (MEMS, NEMS) yaygın uygulama alanı vardır. Otomasyon sektöründe sensör imalatından enerji toplama uygulamalarına, iletişim sistemlerinden kuantum mekaniğinin en alt başlıklarındaki çalışmalarına kadar çok kapsamlı alanlarda bu sistemler önümüze gelmektedir. Makro şekliyle mikro-elektro-mekanik mekanizmalar ufak boyut düzeyli elektro-mekanik sistem ve mekanizmaların araştırıldığı farklı bilimsel çalışma alanları arasında kalan bir konu alanıdır. Bahsi edilen mekanizmaların ortalama boyutu genellikle 1-5 mikrondan (μm) 1-5 cm'ye kadar değişkenlik gösterebilir. Üzerinde çalıştığımız araştırma konusunun bilime dayalı verilerde farklı isimleri bulunmaktadır. Mikro-mekanik sistemler, mikro sistem teknolojisi (MST) ve mikro-mühendislik konuları bu konuların bir kısmıdır [1].

Mikro-Elektro-Mekanik Sistemler (MEMS), mikro-kiriş tabanlı sensörler (MCSs), rezonatörler (kendi doğal frekansı veya sabit frekanslı, titreşim oluşturmak amacıyla birden fazla mikro-elektro-mekanik sistemlerin bir araya getirilmesiyle oluşturulan mikro cihaz [2]), vb. sistemlerin son zamanlarda faydalandığı alanlar yaygınlaşmıştır. Bahse konu mekanizmaların sağladıkları hassasiyet, enerji tasarrufu ve bu bağlamda az maliyetleri sebebiyle piezorezistif algılayıcıların yerine kullanılabilecek cazip bir hal almaktadırlar. Bunun yanı sıra mikro-mekanik sistemler devasa ebatlı makine yapılarına göre daha küçük alan kaplayıp, güç tasarrufu sağlarlar. Elverişli seri-üretim yöntemleriyle, bu tarz imalatların üretim maliyetinin düşük olması da dikkatleri cezbeden başka bir noktadır. [1,3,4]

MEMS ve MCSs vb. mekanizmalarda farklı amaçlar için mikro kirişler tercih edilmektedir. Bilhassa yanıt sürelerinin çok kısa olması ve yüksek hassasiyetleri nedeniyle, kullanım alanları anlık veri transferi olan sensörler için pozitif yönlü avantajlar açığa çıkarmaktadır. Mikro kirişlerin imalatındaki temel ihtiyaçlardan birisi, kullanım alanında talep edilen uygulanabilirlik için lüzumlu titreşim ve mekanik özelliklerini barındırmasıdır. Bu sebeple mikro kirişler konusunu ele alan çalışmaların önemi her geçen gün artmaktadır. Mikro kirişlerin doğal frekanslarının, kontrolünün

denetlenebilmesi için belirli koşullar altındaki hareket ve tepkileri gibi özelliklerinin açıkça bilinmesi gerekmektedir. [4,5,6,7,8]

Nano boyuttaki bir örneğin herhangi bir alan ile etkileşiminden açığa çıkan kuvvet ilişkilerinin gözlemlendiği aletlere atomik kuvvet mikroskopları adı verilmektedir. Bahsi edilen mikroskoplar, mikro-kiriş altyapılı algılayıcıların alan yapısını ve gerilmelerinin diyagramlarını araştırılmasında önemli aletlerdir. Bu aletler vasıtasıyla araştırmacılar bahsi edilen kirişlerin bir alanındaki moleküler yapı bağlanmasının ölçülebilir bozulmasına sebep olacak yeteri kadar yüzey gerilme enerjisini açığa çıkardığını tespit etmişlerdir. Bu tespit ile bu sistemlerin, biyolojik ve kimyasal alanlarda ilerlemelerle mikro-mekanik hareketlere çevrilmesindeki birçok araştırma için uygun olduğu gerçeği ortaya çıkartılmıştır. [9]

Bir örnek mekanik mekanizmayı mikro boyutlu olarak incelemek, hacimle ilgili kuvvetler olan; yer çekiminden bağısız kütle ve atalet kuvvetleri gibi kavramların etkilerinin azalmasını sağlayacaktır. Bunun neticesinde büyük hıza sahip mekanik sistemlerin mikro ölçekli olarak tasarlanan yeni uygulamalarının gelişmesinin önü açılabilir. Böylece kısa süre hızla hareket edilip, ani olarak durdurulabilen sistemlerden, çok yüksek ivmeli hareketleri karşılayabilecek sensörleri de kapsayan, büyük bir alanda, çok fazla mekanizma benzer ölçeklerde oluşturularak yeniden tasarlanabilir. [1]

Zamanımızda, mikro-elektro-mekanik mekanizmaların öncelikli faaliyet gösterdiği bölümler aşağıdaki gibidir;

Akışkanlar Mekaniği; Kayma gerilmesi hesaplanması, küçük Reynolds sayılarına sahip akışkanlar mekaniği sistemleri, Mikro pompalar, mikro valfler, mikro karıştırıcılar, mikro iğneler, mikro plastik kartlar, mikro akışkan algılayıcıları.

Bilgisayar; Optik bazlı veri depolama ve disk sürücü yenilikleri, mürekkep püskürtmeli yazıcılar.

Biyoloji ve Tıp; DNA incelemeleri, mikro-cerrahi cihazlar, kimyasal sensörler, sinirsel elektrotlar/sondalar.

Elektronik; Elektronik aletler ve bobinler.

Fizik; Gelişmiş mikroskop uygulamaları, küçük ölçekli sıcaklık ölçüm uygulamaları.

Haberleşme; Radyo sinyalleri, devre kartları ile filtre uygulamaları.

Havacılık ve Uzay; Sürüklenme karşısındaki hava kuvvetinin kontrolü, maket hava gereçleri, mikro-sinyal vericiler, sinyal vericiler için küçük alan kaplayan alet uygulamaları, radyasyon tespiti ve ölçülmesi.

Görsel işleme mekanizmaları; Tümüleşik görsel işleme mekanizmaları, görsel işleme şifreleme yöntemleri, sayısal ışık işleme, düz panel inceleme ve görüntüleme.

Taşıt Teknolojileri; Sıcaklık/ivme/basınç tespiti, taşıt izleme sistemleri. [10]

MEMS ve MCSs benzeyen mekanizmaların bazıları özellikle üretim yöntemleri nedeniyle değişken kesitleri mevcuttur. Bu düzlemdeki kesit değişimlerine sahip mikro giriş hareketleri üzerindeki etkisinin araştırmasının önemini artırmaktadır. Zamanımızda bu şekil değişken kesitli mikro mekanizmalar genellikle otomasyon sektöründe sensör kullanımlarında, elektronik cihazların iç mekanizmalarında vb. yerlerde yüklerin iletilmesi, gerekli mukavemet değerinin sağlanmasında küçük yapılara başvurulmaktadır.

Kaynaklarda mikro giriş yapıları mekanizmalar üzerine farklı çalışmalar yapılmıştır. MEMS'in öncüsü olarak genellikle ünlü fizikçi Richard Feynman kabul edilir. 1959 senesinde Feynman, malzemeleri ısı yöntemiyle buharlaştırarak veya depolayarak mikro düzeyde aletlerim üretilebileceği düşüncesini öne çıkarmıştır. [11] Feynman ehemmiyetli söyleminde; biyolojik yapıları emsal ederek, malzemelerin ilk olarak kimyasal şekilde ayrıştırmasını sağlayıp, devamı olarak malzemelerin fiziksel yapılarındaki atomik derecede bir arada toplayarak mikro makineler geliştirilmesi düşüncesini öne atmıştır.

“Veijola ve diğerleri 2000”, mikro kirişi orta bölümünde oluşan düzlemsel gerilmeyi tanımlayan kübik doğrusal olmama durumunu içinde bulunduran bir kütle-yay mekanizması şeklinde tasarlamıştır [12]. “Younis ve Nayfeh, 2003” elektriksel bir ilk enerjisi sağlanan rezonant mikro kirişin boy olarak ortasında yer alan bir alanında oluşan düzlemsel gerilmesini de göz önüne alan doğrusal olmayan bir örneğini pertürbasyon yöntemiyle analiz edip, bir bölü üç iç rezonans halini araştırmıştır [13].

“H. Onur Ekici, 2006” yüksek lisans tezinde manyetik olarak ilk enerjisi sağlanan mikro kirişlerin idealden uzak koşullardaki sınır koşullar altında titreşim analizini gerçekleştirmiştir [4]. Aynı zamanda doğrusal olmayan sınır koşullarında mikro kirişleri konu alan bir çalışma yapmıştır [16].

“Zhang ve diğerleri, 2005” ideal koşullarda elektro-statiksel tasarlanmış mikro kiriş alt yapılı aletlerin doğrusal olmayan dinamiği konusunu ele almışlardır. Uygulanan değişken voltajın, kübik doğrusal olmayan tasarlanmış yayın ve sıkıştırılmış film sönüm etkililerinin sistemin doğrusal olmayan ve karmaşık hareketlerinin sonuçlarını araştırmışlardır [15].

“Cleghorn ve diğerleri, 2007” eksenel olarak kuvvet yüklemesine tesir eden ve uzunluğu boyunca derişik kütleyi ileten rezonatörlerin düzensiz titreşimlerini ele almışlardır. Eksenel kuvvet ile derişik kütlenin doğal frekans ve mod yapıları üzerindeki sonuçlarını incelemişlerdir [2].

“Nayfeh ve diğerleri, 2009” uç kısmına elektro-statiksel uyarı uygulanmış tek mikro plaka katılmış olan mikro kirişten imal edilmiş rezonant gaz dedektörleri için matematiksel model ortaya koymuşlardır. Bahsi edilen model ile yaklaşık çözüm yaparak, bütün sonuç ile kıyaslamışlardır [17].

“Abdel - Rahman ve diğerleri , 2002” elektriksel olarak uyarılmış mikro kirişlerin mekanik hareket detaylarını araştırmışlardır. Bu konuda ürettikleri nonlinear modelin sonuçları ile deneysel sonuçlar arasındaki uyumu saptamışlardır [18].

“Değer ve diğerleri, 2010” elastik bir mesnet üzerine konumlandırılmış mikro kirişlerde oluşan nonlinear titreşimleri araştırmışlardır. Elastik mesnet üzerine

konumlandırılmaları nedeniyle hareket denkleminde ekstra terim olarak kübik nonlinear terimi yer almaktadır. Yanıt için pertürbasyon tekniklerinden biri olan çok zaman ölçekli metodu seçip, temel rezonansı araştırmışlardır [19].

“Paidoussis ve diğerleri, 2002” sıvı hareketi sırasında oluşan akışa maruz kalan silindirik kırımların nonlinear ve lineer dinamik hareket ve davranışlarını irdelemişler. Hareket denklemlerini sonuca bağlamadan iş-enerji metodu ışığında enerji transferin, araştırmış ve deneysel çalışmalar düzenlemişlerdir [20]. “Paidoussis ve diğerleri, 2007” uzunluğunca bir veya birden fazla yay mesnedi kapsayan akışkan ileten boruların uzunluk genişlik ve derinlik boyutlarında dinamiği konusunu araştırmışlardır. Teoride ortaya çıkan çözümler ile deneysel olarak elde edilen çözümleri kıyaslamışlardır [21].

“Öz ve diğerleri, 2002” akışkan ve derişik kütle taşıyan, rijitliği ihmal edilebilir borular için hareket denklemlerini çıkarmışlardır. Pertürbasyon metotlarıyla çeşitli derişik konumları için çözümler sağlamışlar ve konuyu ele alan eski araştırmalar ve kıyaslarda bulunmuşlardır [22].

“Rinaldi ve diğerleri, 2010” akışkan iletiminde kullanılan mikro kesitlere sahip mikro ölçekli boruların dinamiğini araştırmışlardır. Karalılık, sönüm ile doğal frekans değişimleri durumlarını çalışmışlardır [23].

“Wang, 2010” akışkan iletiminde kullanılan mikro tüpler için malzemenin boy uzunluğu ölçüsünü de ekledikleri parametreyi de hesaba katarak Hamilton Prensibi yöntemiyle hareket denklemlerine ulaşmış olup, DQM metodunu kullanarak ayrıştırdıktan sonra kararlık durumları ile doğal frekansı incelemişlerdir [24].

“Wang, 2009” nonlocal elastisite teorisinden faydalanarak boru kesitindeki nano ve mikro kırımlar üzerinde titreşim ile kararlılık çözümleri üzerine çalışmışlardır. Euler- Bernoulli kırımları üstünde çalışıp, Newtonyen Metottan faydalanarak hareket denklemini çıkarmışlardır. Basit mesnetli sistem üzerinden kritik akış hızı ve doğal frekanslarını bir sistem üzerinde araştırmalarda bulunmuşlardır [25].

Micro kirişler üzerine, klasik kiriş teorisi (Classical Beam Theory) ile yaptığı çalışmalarda elde ettiği denklemler doğrusal olmayan mertebeye indirgeyerek zorlama kuvvetlerini dikkate alınmadığı takdirde normal ölçülerdeki kirişler ile eşit olmaktadır. Bu şartlarda ise klasik kiriş teorisi ile kirişin mikro ölçülerde olması göze çarpar bir değişiklik kaydetmemektedir. Oysa yapılan çalışmalar da klasik kiriş teorisi ile ilişkilendirilemeyen bazı davranışlar, deneysel olarak ortaya çıkmıştır. Bir mikro kirişin, saf olmama durumuna sahip olması, kristal kafes yapısındaki uyumsuzluklar, kayma gerilmeleri ile mikro çatlaklar ve benzeri sebeplerden dolayı uzunluk genişlik ve derinlikleri üzerindeki tesirleri ortaya çıkardığı görülmüştür.

“Fleck ve diğerleri, 1994” yaptıkları araştırmada çok küçük tesirleri araştırmışlardır. Ebatların küçülmesi ile malzemenin kayma direncinin yükseldiğini tespit etmiştir [27]. “Yine Ma ve Clarke, 1995” [28], “Stolken ve Evans, 1998” [29], “Chong ve Lam, 1999” [30], “Lam ve diğerleri, 2003” [31], “McFarland ve Colton, 2005” [32] çok küçük ölçü tesirlerini inceleyen başka bilim insanlarıdır.

Klasik kiriş teorisi boyut etkileri üzerine detaylı sonuçlar sağlayamadığından ötürü mikro yapılar için daha çeşitli teoriler ortaya konulmuştur; “Couple Stress Theory” ve “Strain Gradient Theory”. Bu yaklaşımların ardından “Yang ve diğerleri, 2002” tarafından yapılması nitekim daha kolay ve sağlıklı olan “Modifiye Edilmiş Gerilme Çifti Teorisi (MGÇT)” ortaya konulmuştur [33]. Bu teori, gerilme tensörünün simetrik ve tek bir adet malzeme boyutu parametresini kabul etmektedir. Araştırmacıların birçoğu bu alanda diğer teorilere göre bu avantajı nedeniyle bu teori üzerinden çalışma yapmaktadır.

“Park ve Gao, 2006” Euler-Bernoulli mikro kirişlerinin özelliklerini MGÇT ile araştırmışlardır. Geçmişte epoksi mikro kirişler için sonuçlandırılmayan eğilme deneylerini sonuçlandırmayı bilmişlerdir [50].

Kong ve diğerleri yine MGÇT ile Euler-Bernoulli mikro kirişlerde sınır değer sorunlarını araştırmışlardır. Ulaştıkları yeni doğal frekans değerlerinin doğruluğunun klasik kiriş teorisine (CBT) göre yükseldiğini belirtmişlerdir [51]. Ma ve diğerleri MCST yöntemiyle Timoshenko kiriş modelini tasarlamışlardır. Mikro kirişler üzerine tasarladıkları tasarım kolaylıkla klasik tasarıma evrilebilmektedir [34].

Xia ve diğerkleri (2010) mikro kirişlerde MGÇT kullanarak farklı bir Euler-Bernoulli kiriş tasarımı tasarlamışlardır [35].

Civalek ve diğerkleri (2011) mikro tüplerde bölgesel olmayan Euler Bernoulli kiriş teorisiyle eğilme çözümlemelerini araştırmışlardır [36].

Chen ve diğerkleri (2011) MCS modeli ile Kompozit katmanlı kirişlerde birinci mertebedeki kayma deformasyonunun eğilme analizi yapmak amacıyla yeni bir model oluşturmuşlardır [37].

Rafiee ve diğerkleri (2011) nonlinear etkileri de inceleyecek basit-basit mesnetli mikro kiriş üzerindeki etkilerini gözlemleyecekleri zoraki osilasyonları konu almışlardır [38].

Ke ve diğerkleri (2012) Mindlin mikro plakaları için düzensiz titreşimleri “Modifiye Edilmiş Gerilme Çifti Teorisi (MGÇT)” yöntemiyle araştırmışlardır. Malzeme uzunluk parametresi ve Mikro plakaların kalınlığının birbirine yakın olduğunda boyut etkilerinin daha da arttığını tespit etmişlerdir [39].

Rafiee ve diğerkleri (2011) mikro kirişlerde zorlamalı aynı zamanda serbest doğrusal olmayan osilasyonları MGÇT yöntemiyle çalışmışlardır. Hareket denklemlerine ulaşmak için Hamilton Prensibine takviye olarak MGÇT ortaya çıkan terimlere de denklemlerinde yer vermişlerdir. Yaptıkları araştırmaları eski araştırmalarla kıyaslamışlardır [40].

Mirramezani ve diğerkleri (2012) Akışkan iletimi sağlayan nano borular üzerinde Knudsen metodunu uygulayarak nano akışın neden olduğu titreşim etkilerini incelemişlerdir. Knudsen’den ortaya çıkan akış hızını sıvı ve gazlar üzerindeki kayma sonuçlarının neden olduğu değişiklikleri incelemişlerdir. Çalışmalarında gaz iletimi yapan nano borular bahsi geçen etkiler dikkate alınınca çok çeşitli sonuçlar doğurduğunu belirtmişlerdir [41].

Ni ve diğerkleri (2011) akışkan iletimi yapan borularda diferansiyel dönüşüm yönteminden faydalanarak titreşimi araştırmışlardır [42].

Roque ve diğerkleri (2013) Mindlin Meshless Method ve MEGÇT ile mikro plakalarının analizini yapmışlardır [43].

Wang ve diğerkleri (2013) mikro ölçüdeki akışkan iletimini sağlayan borularda mikro-yapı ile mikro-akış etkilerini enine titreşimleri incelemek amacıyla araştırmışlardır [44].

Bağdatlı ve diğerkleri (2013, 2011a) eksenel hızlanan ara mesnetli ve çoklu mesnetli kirişleri çalışmışlardır. [45,46] Kural ve Özkaya (2012) yay- kiriş geçiş problemini ele almışlar, pertürbasyon metotlarından faydalanarak kestirimci sonuç sağlamışlardır. [47].

Yurddaş ve diğerkleri (2012a, 2012b), bir yayın üzerinde eksenel olarak hareket etmeyen bir orta mesnet ve çoklu mesnet koşulları altında nonlinear titreşimlerini araştırmışlardır. [48,49]

Bu konularda ayrıca çalışılan bir diğerk konu ise fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerdir. Bu kirişler için kullanılan Power Law (Kuvvet Kanunu) malzeme gradyanı, FDM'den üretilmiş olan kirişlerde malzeme türlerindeki değişikliklerin modellenmesinde en sık kullanılan ve bilinirliği yüksek olmasından kaynaklı tercih edilen yöntem malzeme gradyanıdır [52, 53, 54-55, 56, 57, 58,59,60]. İncelemeciler, eksponansiyel (üstel) [59, 53, 60-54, 56, 61-62, 63-64], trigonometrik [65, 66-67, 68] ve polinomiye [69, 70-71, 72, 73-74] malzeme gradyanları ve malzeme türlerindeki değişimlerini modelleyerek birden fazla malzeme çeşidi değişimlerini incelemişler ve sonuçlarını ortaya koymuşlardır.

“Kahya, Ç. (2023) Çalışmasında kirişlerin yan eksenindeki ve çubukların boyuna titreşimlerini araştırmıştır. İlk olarak çubuklarda boy üzerine etkileyen titreşimleri araştırırken, ikinci bölümde Timoshenko kirişleri üzerindeki çatlakların yan eksenindeki titreşimlerini araştırmıştır. [75]

“Köstenci, F. (2022)” çalışmasında, iki uç noktası serbest yatay ve düşey pozisyonda duran alüminyum malzemeli kiriş için ivmeölçer yardımıyla titreşim ölçümü çalışmaları yaparak, İvmeölçer yardımıyla ölçüm sağlamak için Vibroport 80 adında bir taşınabilir titreşim ölçüm aleti ve LabVIEW tabanında sonuç veren Ölçüm Ünitesinde iki farklı argüman kullanarak araştırma yapmıştır. [74]

“Matyar, B. (2022)” Yüksek lisansı için hazırladığı tezde kompozit ve çelik malzemelerin doğal frekanslarını araştırmış ve dinamik sönüm katsayılarının tespiti amacıyla araştırma yapmıştır. [75]



2. GENEL BİLGİLER

2.1. MİKRO KİRİŞLERİN TİTREŞİM ANALİZİ

Bu çalışma kapsamında değişken mikro kirişler detaylı bir şekilde araştırılmıştır. İlk olarak incelenecek sistemin genel matematiksel modeli tasarlanıp, hareket denklemleri oluşturulmuştur. Hareket denklemlerinin bulunmasında Hamilton prensibi kullanılmıştır. Mikro boyutlarda olmanın getirdiği etkileri görebilmek için MGÇT ile hareket denklemlerine ilave terim eklenmiştir. Sistemin geometrik özelliklerinden ve kullanılan malzemeden bağımsız olarak ve denklemin en kararlı halini elde etmek üzere hareket denklemi boyutsuzlaştırması yapılmıştır.

Çalışmamızda aşağıda verilen metotlar kullanılmıştır:

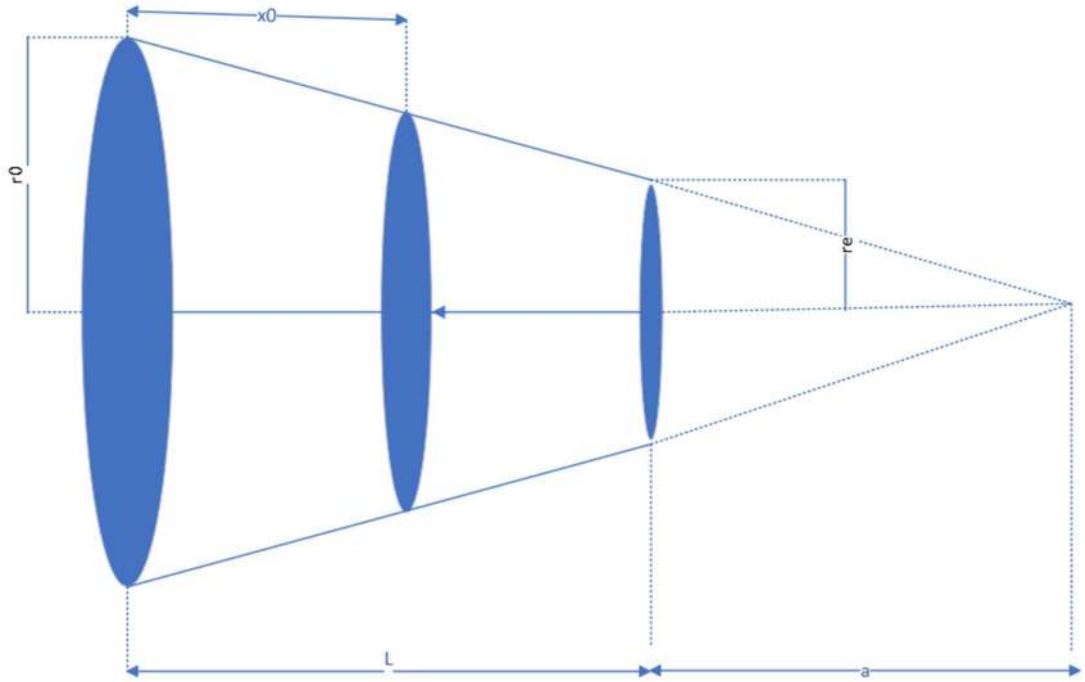
- Kirişin hareket denklemlerine ve sınır koşullarına Hamilton prensibinden faydalanarak ulaşılmıştır. Mikro kiriş etkilerini göstermek için Hamilton prensibine modifiye edilmiş gerilme çifti teorisinde yer alan malzeme uzunluk ölçeği parametresi dahil edilmiştir.
- Uzamalardan kaynaklanan doğrusal olmayan terimlerden dolayı oluşan gerilmelerin ve doğal frekansın etkileri araştırılmıştır.
- Elde edilen sınır şartları ve hareket denklemleri, sistemin geometrik özellikleri ve kullanılan malzeme özelliğinden bağımsızlığını sağlamak için boyutsuzlaştırılmıştır.
- Boyutsuzlaştırma işlemi uygulanan hareket denklemleri, çok zaman ölçekli metot yöntemi olarak bilinen pertürbasyon yöntemi yardımıyla çözülmüştür. Bu çözüm uygulanırken karşımıza çıkan, analitik olarak çözümü mümkün olmayan değişken katsayılı denklemleri çözebilmek için Genelleştirilmiş Diferansiyel Kareselleştirme Metodundan (GDKM) faydalanılmıştır.
- Mod yapıları ve Doğal frekans değerleri bulunmuştur.
- Nonlineer mertebe çözümünde ise numerik integral ve numerik türev metotlarından faydalanarak, analitik olarak çözümü mümkün olmayan denklemler çözülerek nonlineer doğal frekanslar elde edilmiştir.

2.2. HAREKET DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Bu bölümde sistemin hareket denklemleri ve sınır şartı Hamilton Prensibinden (Denklem 2.1) faydalanılarak üretilmiştir.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (2.1)$$

Hareket denklemlerini elde etmek için dairesel değişken kesitin alanı ve eylemsizlik momenti aşağıdaki gibi belirtilmiştir.



Şekil 2.1 Kesit Alanı Değişimi

$$x = 0' da \rightarrow A = \pi r_0^2 \quad (2.2)$$

$$x = L' de \rightarrow A = \pi r_e^2 \quad (2.3)$$

Benzerlikten,

$$\frac{a}{L+a} = \frac{r_e}{r_0} \quad (2.4)$$

$$a = L \frac{r_e}{r_0 - r_e} \quad (2.5)$$

$$\frac{L+u-x_0}{L+a} = \frac{r_{x_0}}{r_0} \quad (2.6)$$

$$r_{x_0} = \frac{(L-x_0)r_0+x_0r_e}{L} \quad (2.7)$$

Bu durumda alan,

$$A = \pi r_{x_0}^2 = \pi \frac{[(L-x_0)r_0+x_0r_e]^2}{L^2} \quad (2.8)$$

atalet momenti,

$$I = \frac{\pi r_{x_0}^4}{4} = \frac{\pi [(L-x_0)r_0+x_0r_e]^4}{L^4} \quad (2.9)$$

$$R = \frac{r_e}{r_0} \text{ dersek } P_{(x)} = \frac{[L+x(R-1)]^2}{L^2} \quad (2.10)$$

$$A = A_0 P_{(x)} \quad (2.11)$$

$$I = I_0 P_{(x)}^2 \quad (2.12)$$

İnceleyeceğimiz denklemlerde (‘) mekana göre türevi, (‘) zamana bağlı türevi göstermektedir. Sistemin kinetik ve potansiyel enerjileri aşağıdaki gibi yazılır,

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.13)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI_{(x)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EA(x) \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L GA(x) l^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + N \int_0^L \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx \quad (2.14)$$

Enerji ifadeleri denklem 2.1’deki Lagrange ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L \rho A_0 P(x) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L EI_0 P^2(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L EA_0 P(x) \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L GA l^2 P(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx - N \int_0^L \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx \right\} dt = 0 \quad (2.15)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde tüm terimler kısmı integrasyon ile çözülürse,

1. Denklem

$$\int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \rho A_0 P(x) (\dot{w} \delta \dot{w}) = -\rho A_0 \int_{t_1}^{t_2} P(x) (\ddot{w} \delta w) dt dx \quad (2.16)$$

2. Denklem

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EI_0 P^2(x) (w'' \delta w'') dx dt = & -EI_0 \int_{t_1}^{t_2} \left\{ P(x)^2 w'' \delta w' \Big|_0^L - P(x)^2 w' \delta w'' \Big|_0^L - \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial x} (P^2(x) w'') \delta w \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} (P(x)^2 w'') \delta w dx \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

3. Denklem

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EA_0 P(x) \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) (\delta u' + w' \delta w') dx dt = & -EA_0 \int_{t_1}^{t_2} \left\{ (P(x) u' + \right. \\ & \left. \frac{P(x)}{2} w'^2) \delta u \Big|_0^L + (P(x) u' + \frac{P(x)}{2} w'^2) w' \delta w \Big|_0^L - \int_0^L \left[P(x) u' + \frac{P(x)}{2} w'^2 \right]' \delta u dx - \right. \\ & \left. \int_0^L \left[P(x) u' + \frac{P(x)}{2} w'^2 \right]' \delta w dx \right\} dt \end{aligned} \quad (2.18)$$

4. Denklem

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L GA_0 l^2 P(x) (w'' \delta w'') dx dt = & -GA_0 l^2 \int_{t_1}^{t_2} \left\{ P(x) w'' \delta w' \Big|_0^L - \right. \\ & \left. \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [P(x) w''] \delta w \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} [P(x) w''] \delta w dx \right\} \right\} dt \end{aligned} \quad (2.19)$$

5. Denklem

$$\begin{aligned}
& -N \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta u' dx dt - N \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L w' \delta w' dx dt = -N \int_{t_1}^{t_2} \delta u|_0^L dt - \\
& N \int_{t_1}^{t_2} \left[w' \delta w|_0^L - \int_0^L w'' \delta w dx \right] dt
\end{aligned} \tag{2.20}$$

İfadeler yerine yazılıp ayıklandıktan sonra çift katlı integraller;

$$\begin{aligned}
& -\rho A_0 \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} P \ddot{w} \delta w dt dx - EI_0 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} (P^2 w'') \delta w dx dt + EA_0 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[Pu' + \right. \\
& \left. \frac{P}{2} w'^2 \right]' \delta u dx dt + EA_0 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[(Pu' + \frac{P}{2} w'^2) w' \right]' \delta w dx dt - \\
& GA_0 l^2 \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} [P w''] \delta w dx dt + N \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L w'' \delta w dx dt = 0
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Tek katlı integraller;

$$\begin{aligned}
& -EI_0 \int_{t_1}^{t_2} (P^2 w'') \delta w'|_0^L dt + EI_0 \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial x} (P^2 w'') \delta w|_0^L dt - EA_0 \int_{t_1}^{t_2} \left[Pu' + \frac{P}{2} w'^2 \right] \delta u \Big|_0^L dt - \\
& EA_0 \int_{t_1}^{t_2} \left[Pu' + \frac{P}{2} w'^2 \right] w' \delta w \Big|_0^L dt - GA_0 l^2 \int_{t_1}^{t_2} (P w'') \delta w'|_0^L dt + \\
& GA_0 l^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial x} [P w''] \delta w|_0^L dt - N \int_{t_1}^{t_2} \delta u|_0^L dt - N \int_{t_1}^{t_2} w' \delta w|_0^L dt = 0
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Buradan çıkarılan tek katlı ve çift katlı integraller ayrı ayrı sifıra eşit olmak zorundadır. Çift katlı integrallerden hareket denklemleri, tek katlı integrallerden ise mümkün olabilecek tüm sınır şartları elde edilir. $dw \cdot dx \cdot dt$ ve $du \cdot dx \cdot dt$ terimlerinin katsayıları bir araya toplanıp, gerekli sadeleştirme işlemleri yapıldıktan sonra düzenlenirse hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\rho A_0 P \ddot{w} + EI_0 [P^2 w^{iv} + 4PP'w''' + 2(P'^2 + PP'')w''] + GA_0 l^2 [Pw^{iv} + 2P'w''' + P''w''] = \frac{EA_0}{2L} \left[P \int_0^L w'^2 dx - \int_0^L P' \int_0^L w'^2 dx dx \right] w'' + Nw'' = 0 \quad (2.23)$$

2.3.BÖYÜTSÜZLAŞTIRMA

Bu bölümde bulunan nonlinear hareket denklemi boyutsuz parametreler cinsinden yazılacaktır. Bu sayede hareket denkleminin çıkacak sonuçlar malzeme özelliklerinden, boyut ve şeklinden bağımsız olacaktır.

$$x^* = \frac{x}{L} \quad w^* = \frac{w}{r} \quad t^* = \beta t \quad (2.24)$$

Burada * ifadeler boyutlu parametreleri göstermektedir. Enine yer değiştirme ifadesi, r kesit yarıçapıyla boyutsuzlaştırılmıştır.

Boyutsuzlaştırma sırasında birimsiz elemanlar için aşağıdaki sistematik semboller kullanılmıştır.

$$\beta = \sqrt{\frac{N}{\rho A_0 L^2}} \quad V_f = \sqrt{\frac{EI_0}{NL^2}} \quad \Gamma = \sqrt{\frac{GA_0 l^2}{NL}} \quad V_b = \sqrt{\frac{EA_0}{N}} \quad n_0 = \frac{r}{L} \quad (2.25)$$

Bu sistematik semboller aracılığı ile elde edilen boyutsuzlaştırılmış hareket denklemi aşağıdaki gibidir;

$$P \ddot{w} + (V_f^2 P^2 + \Gamma^2 P) w^{iv} + [4V_f^2 PP' + 2\Gamma^2 P'] w''' + \{2V_f^2 [P'^2 + PP''] + \Gamma^2 P'' - 1\} w'' + \varepsilon \mu \dot{w} = \frac{1}{2} V_b^2 n_0^2 (P \int_0^1 w'^2 dx - \int_0^1 P' \int_0^1 w'^2 dx dx) w'' \quad (2.26)$$

Nonlinear etkilerle ortaya çıkan boyuna direngenliğin (V_b) üst mertebede ortaya çıkabilmesi için aşağıdaki dönüşümü yapalım;

$$w = \sqrt{\varepsilon} y \quad (2.27)$$

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1. PERTURBASYON ANALİZİ

Bu bölümde elde edilen boyutsuz hareket denklemlerimizin yaklaşık çözümleri için pertürbasyon metotlarından “çok zaman ölçekli metot” kullanılarak lineer problem elde edilmiştir.

Çok ölçekli metot için aşağıdaki yaya açılımını ve türev tanımlarını yapalım,

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \dots \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (3.3)$$

Bu durumda hareket denklemi ifademiz;

$$\begin{aligned} P[D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1][y_0 + \varepsilon y_1] + [V_f^2 P^2 + P\Gamma^2][y_0^{iv} + \varepsilon y_1^{iv}] + [4V_f^2 PP' + 2\Gamma^2 P']y_0''' + \\ \varepsilon y_1''' + \{2V_f^2[P'^2 + PP''] + \Gamma^2 P'' - 1\}y_0'' + \varepsilon y_1'' = \frac{1}{2}\varepsilon V_b^2 n_0^2 \left[P \int_0^1 [y_0'^2 + \varepsilon y_1'^2] dx - \right. \\ \left. \int_0^1 P' \int_0^1 [y_0'^2 + \varepsilon y_1'^2] dx dx \right] y_0'' + \varepsilon y_1'' - \varepsilon \mu [D_0 + \varepsilon D_1][y_0 + \varepsilon y_1] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Buradan doğrusal merteye ifadeleri,

$O(1)$

$$PD_0^2 y_0 + (V_f^2 P^2 + \Gamma^2 P)y_0^{iv} + (4V_f^2 PP' + 2\Gamma^2 P')y_0''' + [2V_f^2(P'^2 + PP'') + \Gamma^2 P'' - 1]y_0'' = 0 \quad (3.4)$$

Doğrusal olmayan merteye ifadeleri ise,

$O(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} PD_0^2 y_1 + (V_f^2 P^2 + P\Gamma^2)y_0^{iv} + (4V_f^2 PP' + 2\Gamma^2 P')y_1''' + [2V_f^2(P'^2 + PP'') + \Gamma^2 P'' - \\ 1]y_1'' = -2PD_0 D_1 y_0 + \frac{1}{2}v_b^2 n_0^2 \left[P \int_0^1 y_0'^2 dx - \int_0^1 P' \left[\int_0^1 y_0'^2 dx dx \right] \right] y_0'' - \mu D_0 y_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Doğrusal mertebe denkleminin çözüm yapısını aşağıdaki formda önerelim,

$$y_0 = (A(T_1)e^{i\omega T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0})Y_0(x) \quad (3.6)$$

Doğrusal mertebedeki çözüm ifadesini denklem 3.5'te yerine koyarsak,

$$-\omega^2 P Y_0 + (V_f^2 P^2 + P \Gamma^2) Y_0^{iv} + (4v_f^2 P P' + 2\Gamma^2 P') Y_0''' + [2v_f^2 (P'^2 + P P'') + \Gamma^2 P'' - 1] Y_0'' + K.E. = 0 \quad (3.7)$$

Burada K.E. kompleks eşlenik terimleri ifade etmektedir. Elde edilen denklem 3.7 değişken katsayılı adi diferansiyel denklemdir ve analitik olarak çözümü mümkün olmadığı için mertebe çözümünün devamı için Genelleştirilmiş Diferansiyel Kareselleştirme Metodu yönteminden faydalanılarak sayısal analiz yapılacaktır.

3.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYEL KARESELLEŞTİRME METODU (GDKM)

Günümüzde gelişen teknolojik uygulamaların sayesinde bilim insanlarının kullandığı metotlarda da değişimler yaşanmaktadır. Özellikle bilgisayar alanında gelişen işlemci kapasiteleri ve geliştirilen yazılımlar ile problemleri sayısal çözümler üzerine yeni araçlar ortaya çıkarmıştır.

GDKM, mühendislikte sıkça karşımıza çıkan nonlinear başlangıç, lineer ve sınır değer problemlerinin çözümleri için doğruluğu yüksek ve uygun bir yaklaşım sağlamaktadır. Kolaylık, hesaplama sadeliği ve uygunluk gibi avantajlı taraflarından dolayı mühendislik problemlerinin cevaplanmasında bazı sayısal yöntemlere alternatif bir metottur.

Diferansiyel Kareselleştirme Yöntemi, matematiksel problemlerin çözümünde kullanılan bir optimizasyon yöntemidir. Bu yöntem, çözümün doğru bir şekilde yaklaştırılması için bir dizi parametre kullanır ve bu parametrelerin en uygun değerleri, bir optimizasyon problemi olarak tanımlanır. Bu yöntem, özellikle karmaşık ve nonlinear problemlerin çözümünde kullanılır.

Bu yöntemin temel fikri, bir fonksiyonun minimumunu hesaplamak için, fonksiyonun türevlerinin birinci ve ikinci derecelerine dayalı bir yaklaşım kullanmaktır. Daha spesifik olarak, diferansiyel kareselleştirme yöntemi, verilen bir fonksiyonun en küçük değerlerinin hesaplanması için, fonksiyonun bir yaklaşımını kullanarak bir dizi karesel denklem oluşturur. Bu karesel denklemlerin çözümü, en uygun parametre değerlerinin elde edilmesine yol açar.

Diferansiyel Kareselleştirme Metodu Nasıl Çalışır?

Diferansiyel kareselleştirme yöntemi, birçok parametreyi içeren bir optimizasyon problemini çözmek için kullanılır. Bu yöntem, verilen bir fonksiyonun en küçük değerini hesaplamak için, bir fonksiyonun türevlerine ve ikinci türevlerine dayalı bir yaklaşım kullanır.

Bu yöntemin temel adımları şu şekildedir;

1. Başlangıç değerleri atanır: İlk olarak, parametrelerin başlangıç değerleri atanır. Bu değerler, rastgele seçilebilir veya deneme yanılma yöntemiyle belirlenebilir.
2. Hesaplamalar yapılır: Fonksiyonun türevleri hesaplanır ve bu türevler, fonksiyonun yaklaşık bir çıktısını hesaplamak için kullanılır.
3. Yeni parametreler hesaplanır: Yeni bir dizi parametre hesaplanır ve bu parametreler, karesel denklemlerin çözümü için kullanılır.
4. Döngü: Adımlar 2 ve 3, parametrelerin belirli bir tolerans değerine kadar değiştirildiği bir döngü şeklinde tekrarlanır.
5. Optimum değer bulunur: En uygun parametre değerleri bulunur ve bu parametreler, fonksiyonun minimum değerini hesaplamak için kullanılır.

Bu sistemin avantajları ve dezavantajları şu şekildedir;

Avantajları:

Yüksek boyutlu problemler için uygundur: Diferansiyel kareselleştirme yöntemi, yüksek boyutlu problemlerin çözümünde kullanılabilir. Bu yöntem, çok sayıda parametreye sahip olabilen problemlerle başa çıkmak için idealdir.

Nonlinear problemler için etkilidir: Diferansiyel kareselleştirme yöntemi, nonlinear problemlerin çözümünde etkili bir şekilde kullanılabilir. Bu yöntem, nonlinear fonksiyonların minimum değerlerini hesaplamak için kullanılabilir.

Küresel minimuma ulaşır: Diferansiyel kareselleştirme yöntemi, küresel minimuma ulaşmayı garanti eder. Bu, farklı başlangıç noktalarından başlasa bile, sonuçların aynı olacağı anlamına gelir.

Hızlı çalışır: Diferansiyel kareselleştirme yöntemi, diğer optimizasyon yöntemlerine kıyasla hızlı bir şekilde çalışır. Bu, büyük veri kümeleri veya yüksek boyutlu problemler gibi zaman alıcı problemlerle başa çıkmak için idealdir.

Dezavantajları:

Başlangıç parametreleri kritiktir: Diferansiyel kareselleştirme yöntemi, başlangıç parametrelerinin seçimine çok duyarlıdır. Yanlış başlangıç parametreleri, optimum sonuçları elde etmek için daha fazla hesaplama zamanı gerektirir.

Aşırı uyumluluk sorunu: Diferansiyel kareselleştirme yöntemi, aşırı uyumluluk sorunu ile karşı karşıya kalabilir. Bu, farklı parametrelerin birbirleriyle çok uyumlu olması durumunda ortaya çıkar ve sonuçta optimum çözüme ulaşmak zorlaşır.

Diğer yöntemlere göre daha az hassas: Diferansiyel kareselleştirme yöntemi, diğer optimizasyon yöntemlerine kıyasla daha az hassastır. Bu, sonuçların belirli bir tolerans seviyesine ulaşmak için daha fazla hesaplama gerektirebileceği anlamına gelir.

Sonuç olarak, diferansiyel kareselleştirme yöntemi, birçok avantaja sahiptir ve birçok problem için etkili bir optimizasyon yöntemidir. Ancak, uygun başlangıç parametrelerinin seçilmesi önemlidir ve aşırı uyumluluk sorunu gibi bazı dezavantajları da vardır.

Genelleştirilmiş Diferansiyel Kareselleştirme Metodu ile türev tanımlarımız aşağıdaki gibidir.

$$Y_0^{iv} = \sum_{j=1}^H \xi_{ij}^{(4)} Y_0(x_j), \quad Y_0''' = \sum_{j=1}^H \xi_{ij}^{(3)} Y_0(x_j), \quad Y_0'' = \sum_{j=1}^H \xi_{ij}^{(2)} Y_0(x_j), \quad (3.8)$$

GDKM için türev açılımlarını denklem 3.7'de yerine yazarsak hareket denklemimiz;

$$\begin{aligned} & [v_f^2 P(x_i)^2 + \Gamma^2 P(x_i)] \sum_{j=1}^H \xi_{ij}^{(4)} Y_0(x_j) + [4v_f^2 P(x_i) P(x_i)^{(1)} + \\ & 2\Gamma^2 P(x_i)^{(1)}] \sum_{j=1}^H \xi_{ij}^{(3)} Y_0(x_j) + [2v_f^2 (P(x_i)^{(1)})^2 + P(x_i) P(x_i)^{(2)} + \Gamma^2 P(x_i)^{(2)} - \\ & 1] \sum_{j=1}^H \xi_{ij}^{(2)} Y_0(x_j) - \omega^2 P(x_i) Y_0(x_i) = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sınır şartları (basit-basit)

$$Y_0(x_1) = 0 \quad Y_0(x_H) = 0 \quad (3.10)$$

$$\sum_{j=2}^{H-1} \xi_{1j}^{(2)} Y_0(x_j) = 0 \quad \sum_{j=2}^{H-1} \xi_{Hj}^{(2)} Y_0(x_j) = 0 \quad (3.11)$$

Denklem 3.10'daki şartlar geçerli olduğu için denklem 3.11'de $j=2$ 'den $H-1$ 'e toplam alınmıştır. ($j = 1 \Rightarrow Y_0(x_1) = 0$ ve $j = H \Rightarrow Y_0(x_H) = 0$ olduğu için $j = 2$ 'den $H - 1$ 'e)

Sınır şartları (ankastre-ankastre)

$$Y_0(x_1) = 0 \qquad Y_0(x_H) = 0 \qquad (3.12)$$

$$\sum_{j=2}^{H-1} \xi_{ij}^{(1)} Y_0(x_j) = 0 \qquad \sum_{j=2}^{H-1} \xi_{Hj}^{(1)} Y_0(x_j) = 0 \qquad (3.13)$$

Kiriş incelediğimiz için solda iki sağda iki esnet şartımız bulunmaktadır. Bunlardan deplasman şartlarını ilk ve son terimlerde sağlıyoruz fakat basit-basit esnet için moment ve ankastre ankastre mesnet için eğim şartlarını ikinci ve $H-1$. terimler ile sağlayacağız.

Basit - basit

$$Y_0(x_2) \Rightarrow \xi_{12}^{(2)} Y_0(x_2) + \sum_{j=3}^{H-2} \xi_{1j}^{(2)} Y_0(x_j) + \xi_{1,H-1}^{(2)} Y_0(x_{H-1}) = 0 \qquad (3.14)$$

$$Y_0(x_{H-1}) \Rightarrow \xi_{H2}^{(2)} Y_0(x_2) + \sum_{j=3}^{H-2} \xi_{Hj}^{(2)} Y_0(x_j) + \xi_{H,H-1}^{(2)} Y_0(x_{H-1}) = 0 \qquad (3.15)$$

$$\xi_{12}^{(2)} Y_0(x_2) + \sum_{j=3}^{H-2} \xi_{1j}^{(2)} Y_0(x_j) + \xi_{1,H-1}^{(2)} Y_0(x_{H-1}) = 0 \qquad (3.16)$$

$$Y_0(x_2) = -\frac{1}{\xi_{12}^{(2)}} \sum_{j=3}^{H-2} \xi_{1j}^{(2)} Y_0(x_j) - \frac{\xi_{1,H-1}^{(2)}}{\xi_{1,2}^{(2)}} Y_0(x_{H-1}) \qquad (3.17)$$

$$\xi_{H2}^{(2)} Y_0(x_2) + \sum_{j=3}^{H-2} \xi_{Hj}^{(2)} Y_0(x_j) + \xi_{H,H-1}^{(2)} Y_0(x_{H-1}) = 0 \qquad (3.18)$$

Düzenleyip daha sade bir şekilde yazacak olursak,

$$-\frac{\xi_{H,2}^{(2)}}{\xi_{1,2}^{(2)}} \sum_{j=3}^{H-2} \xi_{1,j}^{(2)} Y_0(x_j) - \frac{\xi_{H,2}^{(2)} \xi_{1,H-1}^{(2)}}{\xi_{1,2}^{(2)}} Y_0(x_{H-1}) + \sum_{j=3}^{H-2} \xi_{H,j}^{(2)} Y_0(x_j) + \xi_{H,H-1}^{(2)} Y_0(x_{H-1}) = 0 \quad (3.19)$$

$$Y_0(x_{H-1}) \left[\xi_{H,H-1}^{(2)} \xi_{1,2}^{(2)} - \xi_{H,2}^{(2)} \xi_{1,H-1}^{(2)} \right] = \xi_{H,2}^{(2)} \sum_{j=3}^{H-2} \xi_{1,j}^{(2)} Y_0(x_j) - \xi_{1,2}^{(2)} \sum_{j=3}^{H-2} \xi_{H,j}^{(2)} Y_0(x_j) \quad (3.20)$$

Bu durumda sondan bir önceki terim,

$$Y_0(x_{H-1}) = \frac{1}{\xi_{H,H-1}^{(2)} \xi_{1,2}^{(2)} \xi_{H,2}^{(2)} \xi_{1,H-1}^{(2)}} \sum_{j=3}^{H-2} \left[\xi_{H,2}^{(2)} \xi_{1,j}^{(2)} - \xi_{1,2}^{(2)} \xi_{H,j}^{(2)} \right] Y_0(x_j) \quad (3.21)$$

$$Y_0(x_{H-1}) = -\frac{1}{\xi_{H,H-1}^{(2)}} \sum_{j=3}^{H-2} \xi_{H,j}^{(2)} Y_0(x_j) - \frac{\xi_{H,2}^{(2)}}{\xi_{H,H-1}^{(2)}} Y_0(x_2) \quad (3.22)$$

$$\xi_{1,2}^{(2)} Y_0(x_2) + \sum_{j=3}^{H-2} \xi_{1,j}^{(2)} Y_0(x_j) - \frac{\xi_{1,H-1}^{(2)}}{\xi_{H,H-1}^{(2)}} \sum_{j=3}^{H-2} \xi_{H,j}^{(2)} Y_0(x_j) - \frac{\xi_{1,H-1}^{(2)}}{\xi_{H,H-1}^{(2)}} \xi_{H,2}^{(2)} Y_0(x_2) = 0 \quad (3.23)$$

$$\left(\xi_{1,2}^{(2)} \xi_{H,H-1}^{(2)} - \xi_{1,H-1}^{(2)} \xi_{H,2}^{(2)} \right) Y_0(x_2) = \xi_{1,H-1}^{(2)} \sum_{j=3}^{H-2} \xi_{H,j}^{(2)} Y_0(x_j) - \xi_{H,H-1}^{(2)} \sum_{j=3}^{H-2} \xi_{1,j}^{(2)} Y_0(x_j) \quad (3.24)$$

$$Y_0(x_2) = \frac{1}{\xi_{1,2}^{(2)} \xi_{H,H-1}^{(2)} - \xi_{1,H-1}^{(2)} \xi_{H,2}^{(2)}} \sum_{j=3}^{H-2} \left(\xi_{1,H-1}^{(2)} \xi_{H,j}^{(2)} - \xi_{H,H-1}^{(2)} \xi_{1,j}^{(2)} \right) Y_0(x_j) \quad (3.25)$$

Tüm ifadeleri yerine koyup, sadeleştirme yaparsak şartlar şu şekilde elde edilir,

$$Y_0(x_2) = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=3}^{H-2} \alpha_2 Y_0(x_j) \quad (3.26)$$

$$Y_0(x_{H-2}) = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=3}^{H-2} \alpha_1 Y_0(x_j) \quad (3.27)$$

$$\alpha = \xi_{1,2}^{(2)} \xi_{H,H-1}^{(2)} - \xi_{1,H-1}^{(2)} \xi_{H,2}^{(2)} \quad (3.28)$$

$$\alpha_1 = \xi_{H,2}^{(2)} \xi_{1,j}^{(2)} - \xi_{1,2}^{(2)} \xi_{H,j}^{(2)} \quad (3.29)$$

$$\alpha_2 = \xi_{1,H-1}^{(2)} \xi_{H,j}^{(2)} - \xi_{H,H-1}^{(2)} \xi_{1,j}^{(2)} \quad (3.30)$$

Bu noktadan sonraki doğrusal merteye ile ilgili işlemler mod yapıları ve doğal frekanslar “Mathematica” programı ile sayısal olarak elde edilecektir.

3.3. DOĞRUSAL OLMAYAN PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

$O(\varepsilon)$ çözümüne geçecek olursak doğrusal mertebe için önerilen çözüm doğrusal olmayan mertebede yerine yazılırsa;

$O(\varepsilon)$

$$PD_0^2 y_1 + (v_f^2 P^2 + P\Gamma^2) y_1^{iv} + (4v_f^2 PP' + 2\Gamma^2 P') y_1''' + [2v_f^2 (P'^2 + PP'') + \Gamma^2 P'' - 1] y_1'' = -2PD_0 D_1 y_0 + \frac{1}{2} V_b^2 n_0^2 \left[P \int_0^1 y_0'^2 dx - \int_0^1 P' \int_0^1 y_0'^2 dx dx \right] y_0'' - \mu D_0 y_0 \quad (3.31)$$

Doğrusal mertebe çözümü şu şekildeydi,

$$y_0(x, \tau_0, \tau_1, \varepsilon) = (A(\tau_1) e^{i\omega_0 \tau_0} + \bar{A}(\tau_1) e^{-i\omega_0 \tau_0}) Y_0(x) \quad (3.32)$$

Doğrusal mertebe denklemi $O(1)$ homojen bir diferansiyel denklemdir ve basit çözüm haricinde bir çözüme sahip olabilmesi için $O(\varepsilon)$ ifadesinin çözülebilirlik şartını sağlayan bir çözümünün olması gerekir. Çözülebilirlik şartı ise seküler ve seküler olmayan terimlerin ayrıştırılması ile bulunur.

y_1 çözümünü şu şekilde önerelim:

$$y_1 = \underbrace{z(x, \tau_1) e^{i\omega_0 \tau_0}}_{\text{Seküler kısım ile ilgili}} + \underbrace{\Delta(x, \tau_0, \tau_1)}_{\text{Seküler olmayan kısım ile ilgili}} + K.E. \quad (3.33)$$

Bu ifadeyi mertebe denkleminde yerine yazıp, sekülerlik oluşturacak terimleri sıfıra eşitlersek çözülebilirlik şartını elde edeceğiz,

$$\begin{aligned}
& -\omega^2 z e^{i\omega T_0} + (v_f^2 P + \Gamma^2) z^{iv} e^{i\omega T_0} + \left(4v_f^2 P' + \frac{2\Gamma^2 P'}{P}\right) z''' e^{i\omega T_0} + \left[2v_f^2 \left(\frac{P'^2}{P} + \right.\right. \\
& \left.\left. P''\right) + \frac{\Gamma^2 P''}{P} - \frac{1}{P}\right] z'' e^{i\omega T_0} = -2i\omega D_1 A(T_1) Y_0 e^{i\omega T_0} + \frac{1}{2} Y_0'' V_b^2 n_0^2 [A^2(T_1) \bar{A}(T_1) e^{i\omega T_0} + \\
& 2A^2(T_1) \bar{A}(T_1) e^{i\omega T_0}] \int_0^1 Y_0'^2 dx - \frac{1}{2} Y_0'' V_b^2 n_0^2 \frac{1}{P} [A^2(T_1) \bar{A}(T_1) e^{i\omega T_0} + \\
& 2A^2(T_1) \bar{A}(T_1) e^{i\omega T_0}] \int_0^1 P' \int_0^1 Y_0'^2 dx dx - \mu \frac{1}{P} i\omega A(T_1) e^{i\omega T_0} Y_0 + S.O.T. + K.E.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Denklemin sol tarafı için şu tanımı yapalım;

$$\begin{aligned}
L(z) = & (V_f^2 P + \Gamma^2) z^{iv} + \left(4V_f^2 P' + 2\Gamma^2 \frac{P'}{P}\right) z''' + \left[2V_f^2 \left(\frac{P'^2}{P} + P''\right) + \Gamma^2 \frac{P''}{P} - \right. \\
& \left. \frac{1}{P}\right] z'' - \omega^2 z
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Denklemler 3.34 için her iki tarafı g fonksiyonu ile çarpıp tanım kümesi üzerinden integre edelim;

$$\int_0^1 g L dx = \int_0^1 g (\text{sağ taraf}) dx \tag{3.36}$$

$$\int_0^1 \left[(V_f^2 P + \Gamma^2) z^{iv} g + \left(4V_f^2 P' + 2\Gamma^2 \frac{P'}{P}\right) z''' g + \left[2V_f^2 \left(\frac{P'^2}{P} + P''\right) + \Gamma^2 \frac{P''}{P} - \frac{1}{P}\right] z'' g - \omega^2 z g \right] dx \tag{3.37}$$

Bu denklemi çözümledikten sonra $g(x)$ fonksiyonun doğrusal merteye çözümü ile aynı olduğu görülmüştür,

$$g(x) = Y_0(x) \tag{3.39}$$

Bu ifade yerine yazılırsa;

Yukarıda bahsedilen sağ taraf denklemi olarak adlandırılmış kısım aşağıdaki gibidir;

$$0 = \int_0^1 \left\{ -2i\omega D_1 A(T_1) Y_0 Y_0 + \frac{1}{2} V_b^2 n_0^2 3A^2 \bar{A} \left[Y_0 Y_0'' \int_0^1 Y_0'^2 dx - \frac{Y_0 Y_0''}{P} \int_0^1 P' \int_0^1 Y_0'^2 dx dx \right] - \mu \frac{1}{P} i\omega A Y_0 Y_0 \right\} dx \quad (3.40)$$

$$-D_1 A \left(2i\omega \int_0^1 Y_0 Y_0 dx \right) + \frac{1}{2} V_b^2 n_0^2 3A^2 \bar{A} \left[\int_0^1 Y_0 Y_0'' \int_0^1 Y_0'^2 dx dx - \int_0^1 \frac{Y_0 Y_0''}{P} \int_0^1 P' \int_0^1 Y_0'^2 dx dx dx \right] - \mu i\omega A \int_0^1 \frac{Y_0 Y_0}{P} dx = 0 \quad (3.41)$$

$$D_1 A + A^2 \bar{A} \frac{3}{4} V_b^2 n_0^2 \frac{\int_0^1 Y_0 Y_0'' \int_0^1 Y_0'^2 dx dx \int_0^1 \frac{Y_0 Y_0''}{P} \int_0^1 P' \int_0^1 Y_0'^2 dx dx dx}{-i\omega \int_0^1 Y_0 Y_0 dx} - A \mu \frac{i\omega \int_0^1 \frac{Y_0 Y_0}{P} dx}{2i\omega \int_0^1 Y_0 Y_0 dx} = 0 \quad (3.42)$$

Bu durumda çözülebilirlik şartı,

$$D_1 A + iA^2 \bar{A} K_1 + A K_2 = 0 \quad (3.43)$$

Basit olmayan çözüm için genlikleri polar formda tanımlarsak;

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\theta}, \quad \bar{A} = \frac{1}{2} a e^{-i\theta} \quad (3.44)$$

Yerine koyarsak;

$$\frac{1}{2} (a' + ai\theta') e^{i\theta} + i \frac{1}{4} a^2 e^{2i\theta} \frac{1}{2} a e^{-i\theta} K_1 + \frac{1}{2} a e^{i\theta} K_2 = 0 \quad (3.45)$$

$$a' + ai\theta' + i \frac{a^3}{4} K_1 + a K_2 = 0 \quad (3.46)$$

K_1 ve K_2 'nin de reel ve sanal kısımları bulunmaktadır.

$\begin{cases} K_1 = K_{1R} + iK_{1I} \\ K_2 = K_{2R} + iK_{2I} \end{cases}$ yerine yazarsak;

$$a' + ai\theta' + i\frac{a^3}{4}K_{1R} - \frac{a^3}{4}K_{1I} + aK_{2R} + iaK_{2I} = 0 \quad (3.47)$$

Reel ve sanal kısımları ayırıştırırsak;

$$\text{Re: } a' - \frac{a^3}{4}K_{1I} + aK_{2R} = 0 \quad (3.48)$$

$$\text{Sa: } a\theta' + \frac{a^3}{4}K_{1R} + aK_{2I} = 0 \quad (3.49)$$

Düzgün rejim hali için $a' = 0$ 'dır. Bu durumda $a = a_0$ 'dır.

$$a\theta' + \frac{a^3}{4}K_{1R} + aK_{2I} = 0 \quad (3.50)$$

$$\theta' = -\frac{a^2}{4}K_{1R} - K_{2I} \quad (3.51)$$

$$\theta = \theta_0 + \left(-\frac{a_0^2}{4}K_{1R} - K_{2I}\right)T_1 \quad (3.52)$$

Bu durumda;

$$\omega_{nl} = \omega + \varepsilon \left(-\frac{a_0^2}{4}K_{1R} - K_{2I}\right) \quad (3.53)$$

3.2.1. SAYISAL SONUÇLAR

Daha önce de bahsedildiği üzere; elde edilen denklemlerin değişken katsayılı olması sebebi ile analitik çözümleri mümkün olamamakta ve bu nedenle nümerik metotlardan yararlanma ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. Bu kapsamda kullanılan Genelleştirilmiş Diferansiyel Kareselleştirme Metodu için mikro kiriş eşit parçalara bölmek yerine sınır şartlarını daha iyi sağlatabileceğimiz aşağıdaki açılım kullanılmıştır,

$$x[i] = 0.5 (1 - \cos(((i - 1)/(N_p - 1)) \pi)) \quad (3.54)$$

Burada N_p mikro kiriş üzerinde alınan nokta sayısı ve $x[i]$ 1'den N_p 'ye kadar x boyunca konum değerlerdir.

GDKM ile elde edilen sonuçlar tablolar ve grafikler halinde gösterilmiştir. Tablo 3.1 'de literatürde sıklıkla karşılaşılan eksenel kuvvetin olmadığı klasik kiriş teorisi ile elde edilen ilk 3 doğal frekans basit-basit ve ankastre-ankastre mesnet durumları için analitik olarak ve GDKM ile elde edilerek karşılaştırılmıştır. Elde edilen değerler çalışmanın yüksek oranda doğruluğunu göstermektedir.

Tablo 3.1. Eksenel kuvvetin olmadığı durum ($N=0$), doğal frekans karşılaştırmaları ($V_f = 1$)

	Basit-Basit			Ankastre-Ankastre		
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
GDKM	9.86954	39.47829	88.84453	22.37329	61.67277	120.9163
Analitik	9.8696	39.4784	88.8264	22.3733	61.6728	120.9034

Tablo 3.2'de yine aynı mesnet şartları için mikro kiriş için R yarıçap oranına bağlı ilk üç doğal frekansın değişimi gösterilmiştir. R değerinin 1 yani kesit değişiminin hiç olmadığı duruma göre sağ uçtaki kesit alanı küçüldükçe tüm doğal frekans değerleri düşmektedir. Bu durum yarıçap oranı 0.8 iken, birinci doğal frekanslarda, basit-basit mesnet durumu için yaklaşık %8 düşüş iken ankastre-ankastre mesnet için ise yaklaşık %9,5 düşüş oluşmuştur. Bu durum üçüncü doğal frekanslarda ise sırası ile %9,9 ve %10 gibi birbirine çok yakın düşüş şeklinde olmuştur.

Tablo 3.2. Klasik kiriş teorisi için yarıçap oranına bağlı doğal frekans değişimleri ($V_f = 1$)

R	Basit-Basit			Ankastre-Ankastre		
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
1	10.35748	39.97516	89.34303	22.64639	62.04491	121.3245
0.8	9.49518	36.16097	80.46530	20.47638	55.88531	109.0866
0.5	8.20357	30.54653	66.74088	17.22599	46.24029	89.55199
0.3	7.57119	27.50310	58.20965	15.32548	39.82466	75.92285

Tablo 3.3'te ise mikro kiriş etkilerinin görülebilmesi için kullanılan Modifiye Edilmiş Gerilme Çifti Teorisi ile Klasik Kiriş Teorisi için ilk üç doğal frekansın basit-basit ve ankastre-ankastre mesnet durumları için karşılaştırılması verilmiştir. Görüleceği üzere mikro kiriş kabulü yapıldığı durumlarda doğal frekans değerleri gözle görülür bir biçimde daha yüksek çıkmaktadır.

Tablo 3.3. Modifiye edilmiş gerilme çifti teorisi ile klasik kiriş teorisi doğal frekans karşılaştırmaları

	Basit-Basit			Ankastre-Ankastre		
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
MGÇT	9.743366	37.47309	82.7585	21.13326	57.3292	111.5695
KKT	8.20357	30.54653	66.74088	17.22599	46.24029	89.55199

MGÇT; Modifiye Edilmiş Gerilme Çifti Teorisi

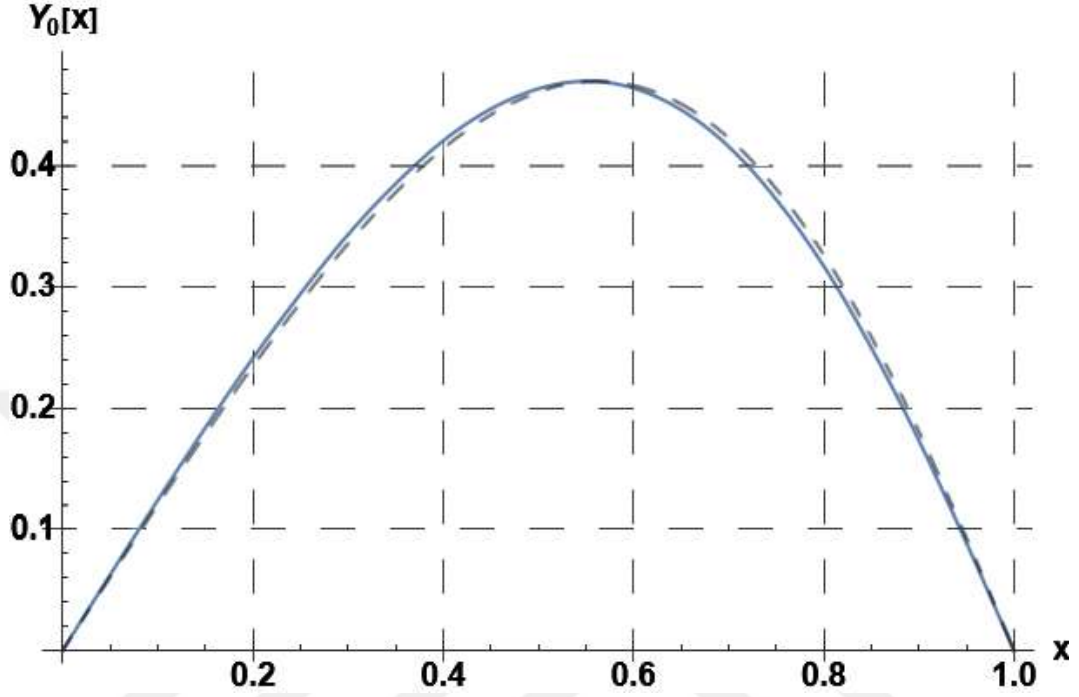
KKT; Klasik Kiriş Teorisi

Tablo 3.4'te MGÇT için ilk üç doğal frekansın basit-basit ve ankastre-ankastre mesnet şartları için kiriş direngenliği ile değişimi gösterilmektedir. Kiriş direngenliği ile doğal frekansların birbiri ile doğru orantılı olarak arttığı görülmektedir.

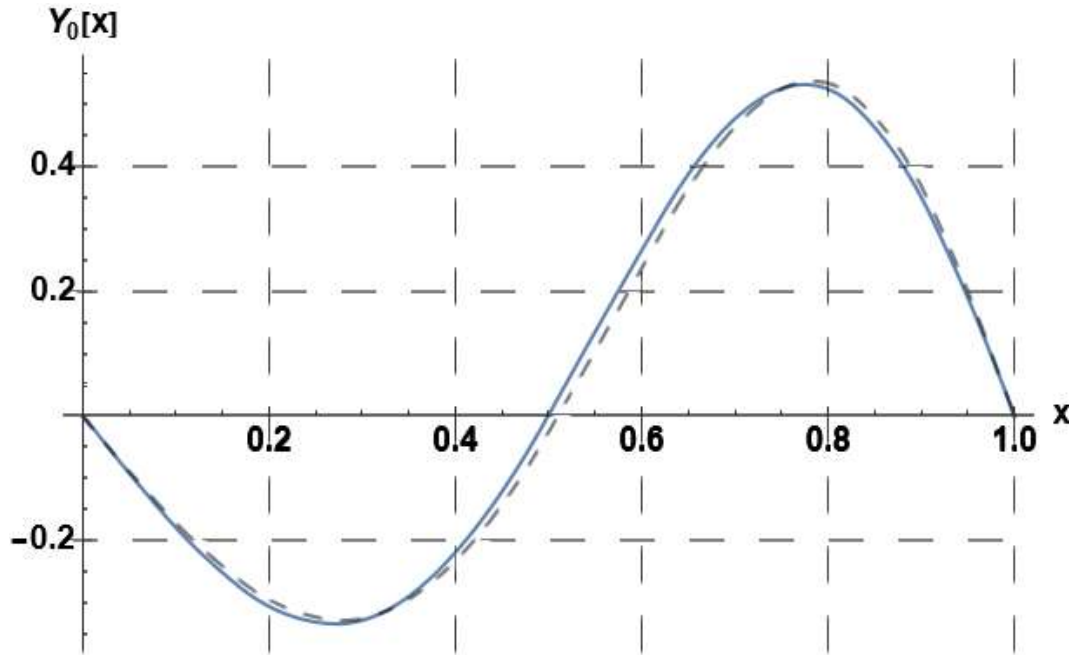
Tablo 3.4 Modifiye edilmiş gerilme çifti teorisi için kiriş direngenliğine bağlı doğal frekans karşılaştırmaları

V_f	Basit-Basit			Ankastre-Ankastre		
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
1	9.743366	37.47309	82.7585	21.13326	57.3292	111.5695
3	26.58325	109.4706	245.2124	61.85393	169.8051	332.2605
5	43.93191	182.0511	408.2758	102.8804	282.7151	553.4396

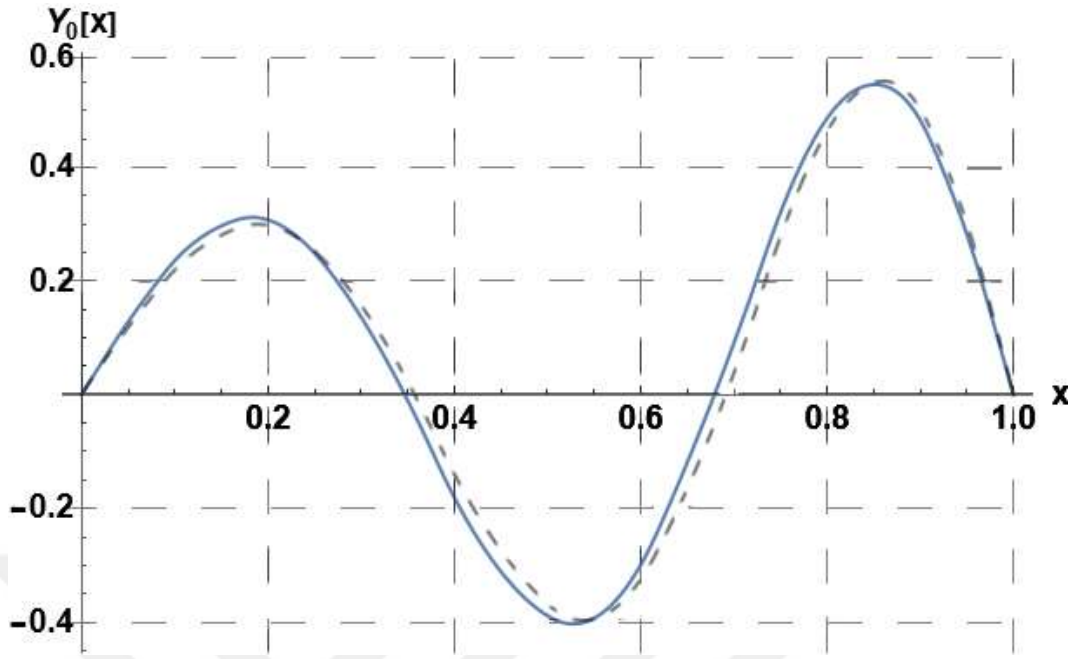
Şekil 3.1’den Şekil 3.8’e kadar analizlere ait çeşitli mod yapıları verilmektedir. Basit-basit mesnet durumu için MGÇT ile KKT arasındaki fark birinci mod yapısı için Şekil 3.1’de, ikinci mod yapısı için Şekil 3.2’de ve üçüncü mod yapısı için Şekil 3.3’te gösterilmektedir. Şekil 3.4 ile 3.6 arasında ise aynı karşılaştırmalar ankastre-ankastre mesnet şartları için gösterilmiştir.



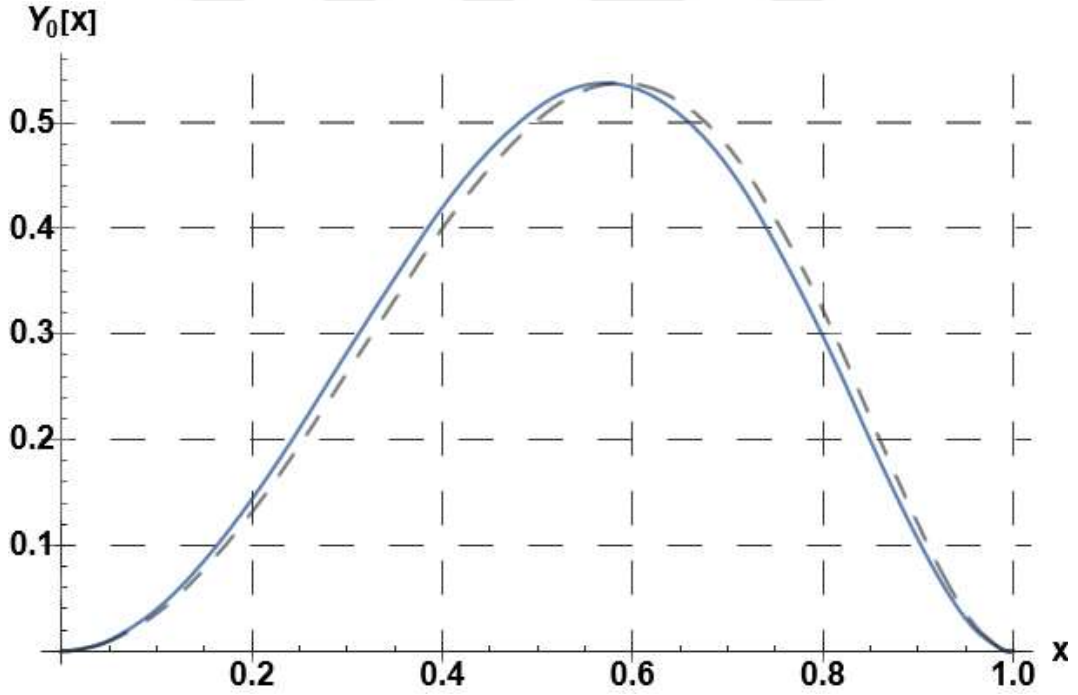
Şekil 3.1 Basit-Basit mesnet birinci mod yapısı için KKT – MGÇT karşılaştırması (- MGÇT,---KKT)



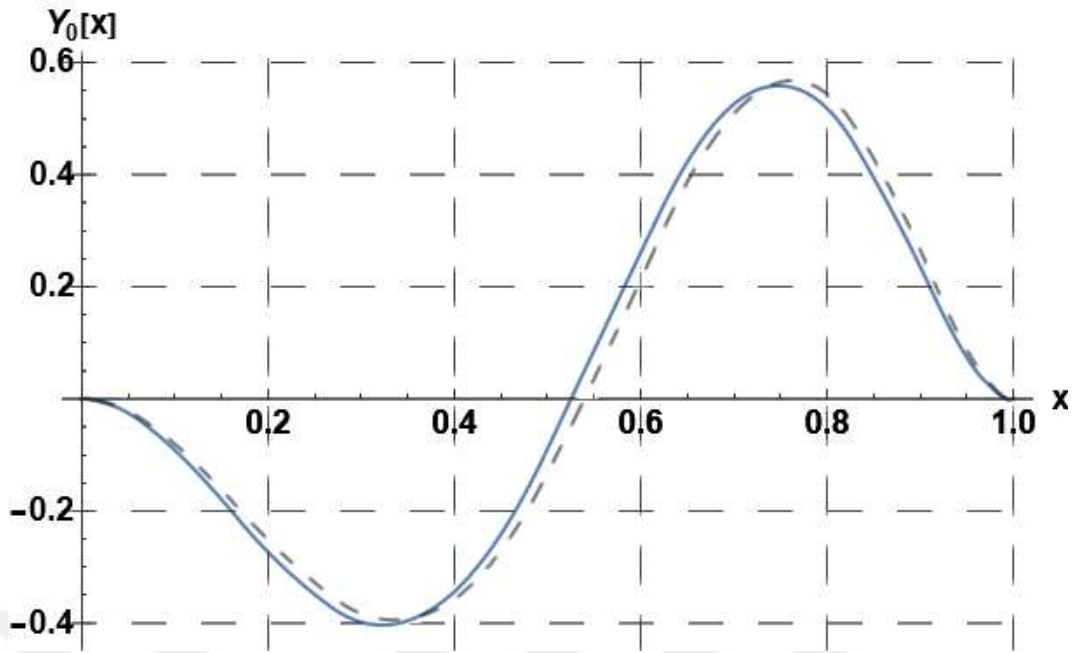
Şekil 3.2 Basit-Basit mesnet ikinci mod yapısı için KKT – MGÇT karşılaştırması (- MGÇT,---KKT)



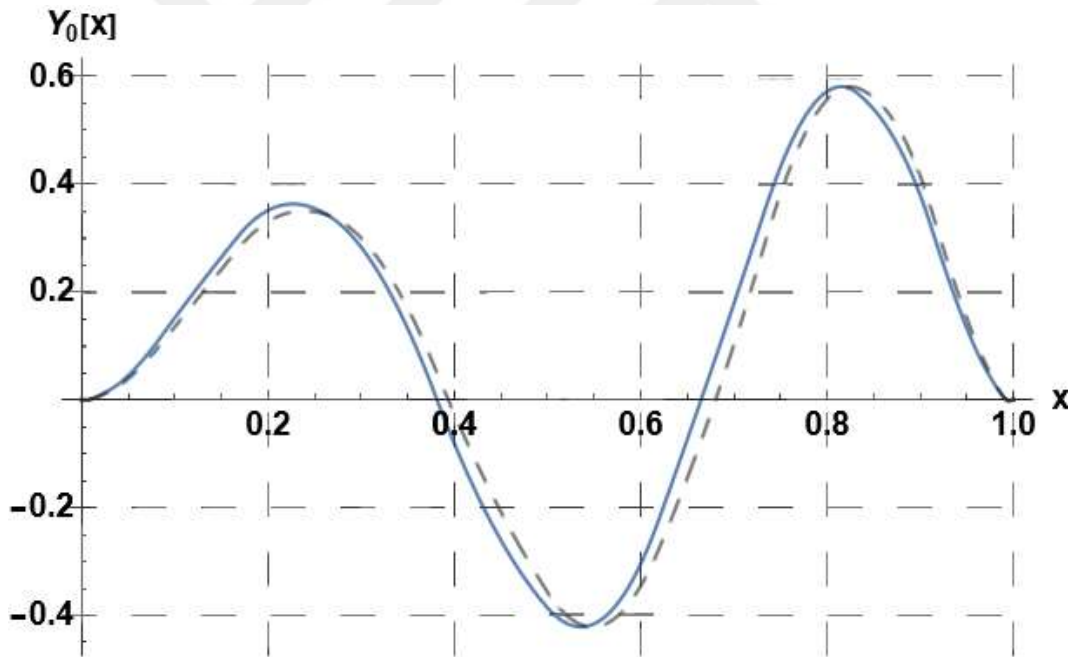
Şekil 3.3 Basit-Basit mesnet üçüncü mod yapısı için KKT – MGÇT karşılaştırması (- MGÇT,---KKT)



Şekil 3.4 Ankastre-Ankastre mesnet birinci mod yapısı için KKT – MGÇT karşılaştırması (- MGÇT,---KKT)

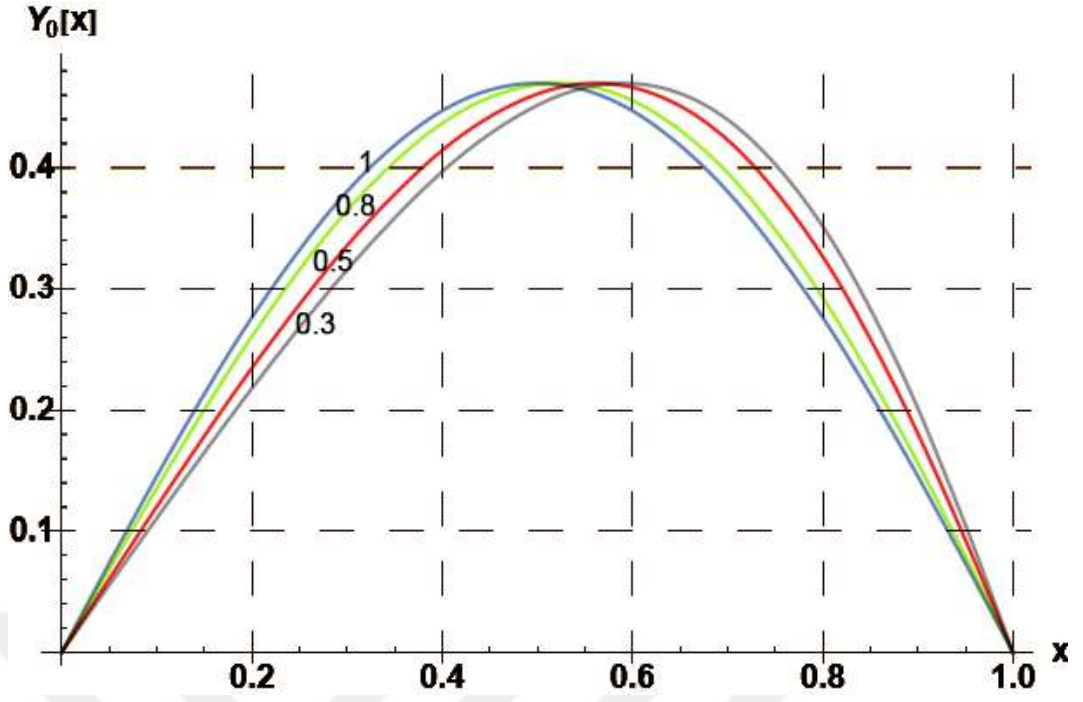


Şekil 3.5 Ankastre-Ankastre mesnet ikinci mod yapısı için KKT – MGÇT karşılaştırması (- MGÇT,---KKT)

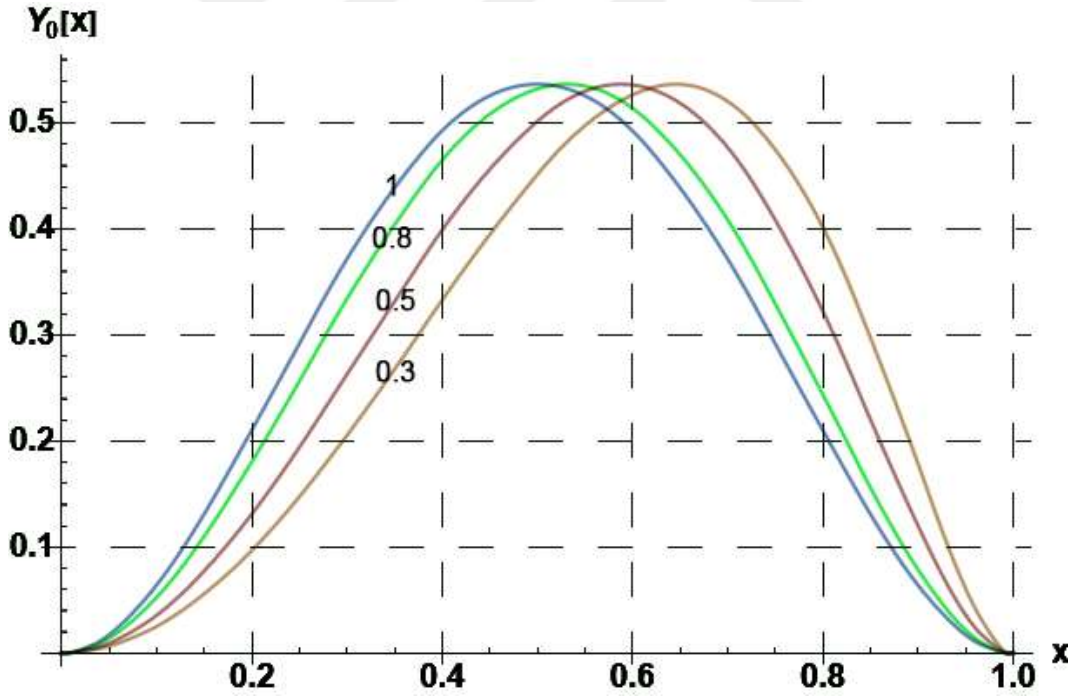


Şekil 3.6 Ankastre-Ankastre mesnet üçüncü mod yapısı için KKT – MGÇT karşılaştırması (- MGÇT,---KKT)

Şekil 3.7’de basit-basit mesnet ve Şekil 3.8’de ise ankastre-ankastre mesnet için yarıçap oranı değişiminin birinci mod yapısı üzerindeki etkileri gösterilmiştir. Görüleceği üzere kesit alanı değişmediğinde mod yapısında maksimum genlik tam ortada olup düzgün bir dağılım oluşmaktayken. Sağ taraftaki kesit alanı küçüldükçe maksimum genliğin oluştuğu nokta sağ tarafa doğru kaymaktadır. Bu da daha ince ve dolayısı ile daha az direngenliğe sahip sağ taraf için gayet mantıklı bir sonuçtur.

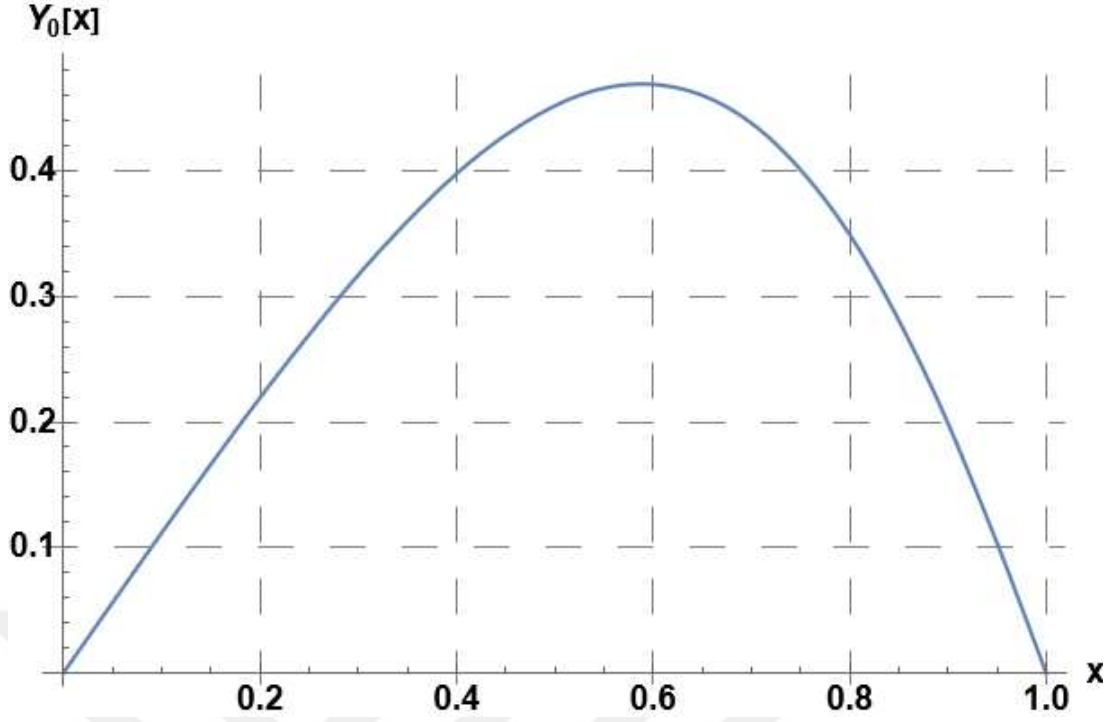


Şekil 3.7 Basit-Basit mesnet için yarıçap oranının birinci mod yapısına etkisi (KKT)



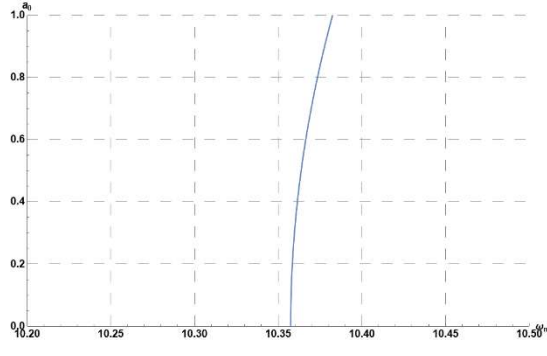
Şekil 3.8 Ankastre-Ankastre mesnet için yarıçap oranının birinci mod yapısına etkisi (KKT)

Şekil 3.9 da ise modifiye edilmiş gerilme teorisine göre elde edilmiş, basit-basit mesnet durumu için birinci mod yapısı grafiği görülmektedir.

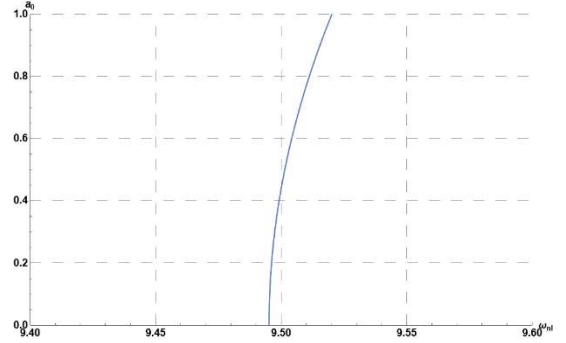


Şekil 3.9 Basit-Basit mesnet 1. Mod yapısı (MGÇT, $R=0.3$, $V_f = 5$)

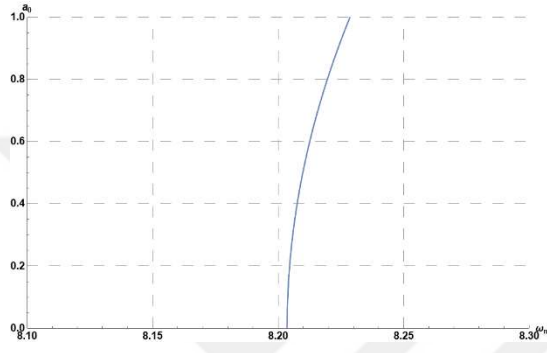
Şekil 3.10 ile 3.18 arasında ise nonlinear problemin sonucunda elde edilen nonlinear doğal frekansın çeşitli parametrelere bağlı değişimi gösterilmiştir. Şekil 3.10-11-12 ve 13’de basit-basit mesnet için Şekil 3.14-15-16 ve 17’de ise ankastre-ankastre mesnet için yarıçap oranına bağlı nonlinear frekans değişimleri gösterilmiştir. Şekil 3.18’de ise bu değişim MGÇT ile ankastre-ankastre mesnet için gösterilmiştir.



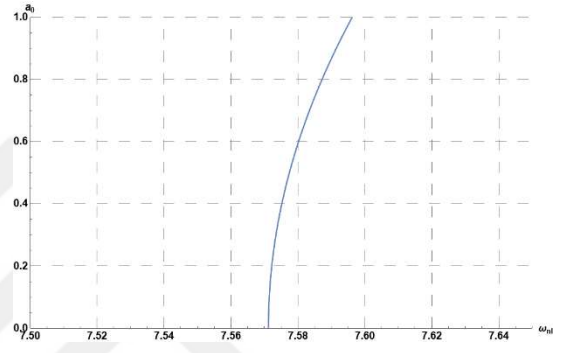
Şekil 3.10 Basit-Basit mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (KKT, $R=1, \mu=0.3$)



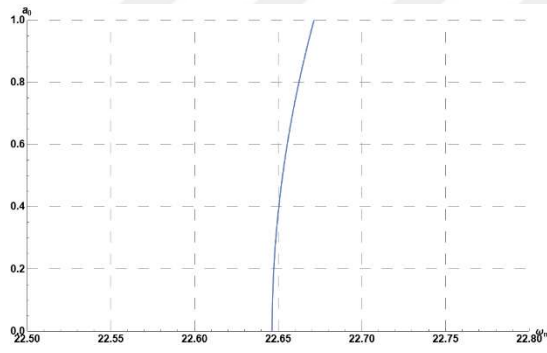
Şekil 3.11 Basit-Basit mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (KKT, $R=0.8, \mu=0.3$)



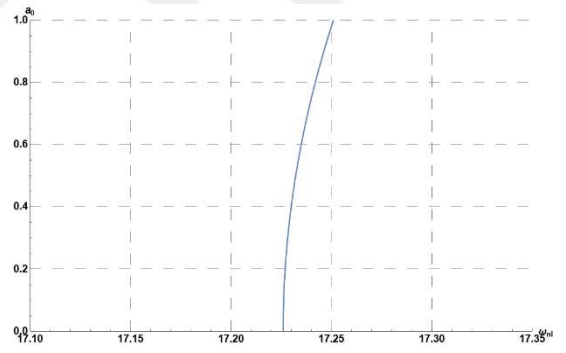
Şekil 3.12 Basit-Basit mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (KKT, $R=0.5, \mu=0.3$)



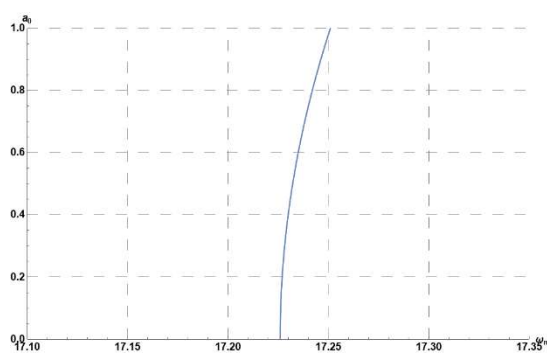
Şekil 3.13 Basit-Basit mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (KKT, $R=0.3, \mu=0.3$)



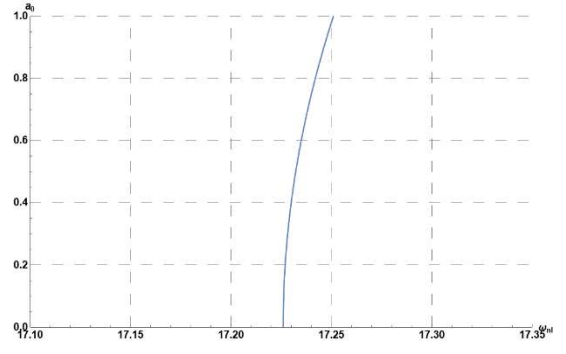
Şekil 3.14 Ankastre-Ankastre mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (KKT, $R=1, \mu=0.3$)



Şekil 3.15 Ankastre-Ankastre mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (KKT, $R=0.8, \mu=0.3$)



Şekil 3.16 Ankastre-Ankastre mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (KKT, $R=0.5, \mu=0.3$)

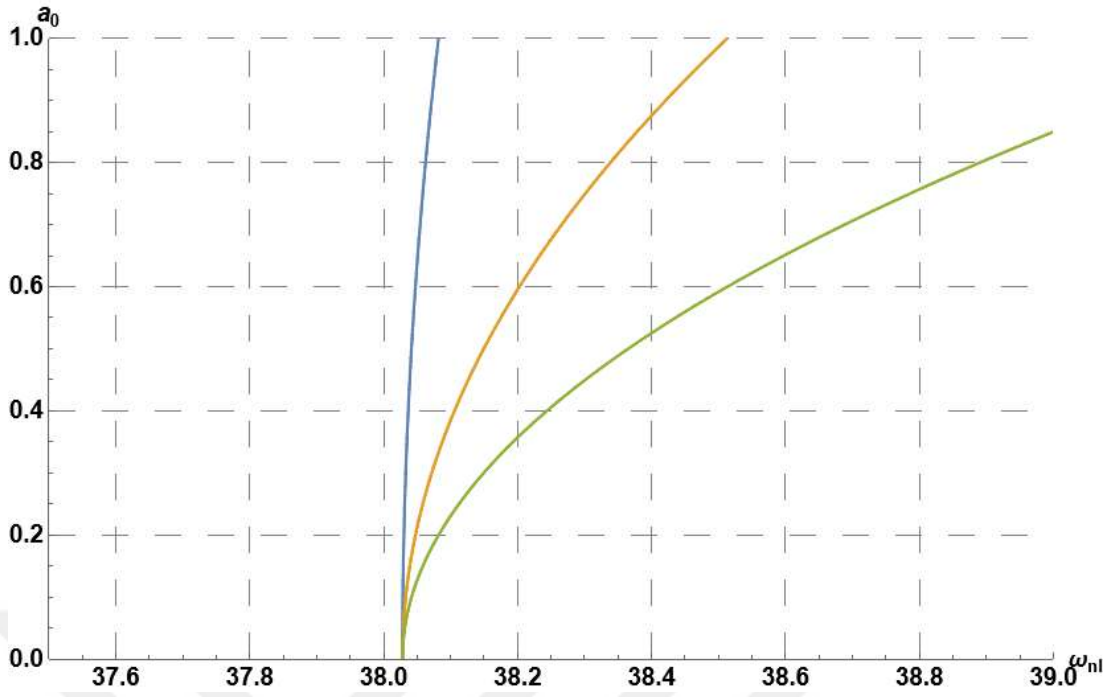


Şekil 3.17 Ankastre-Ankastre mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (KKT, $R=0.3, \mu=0.3$)



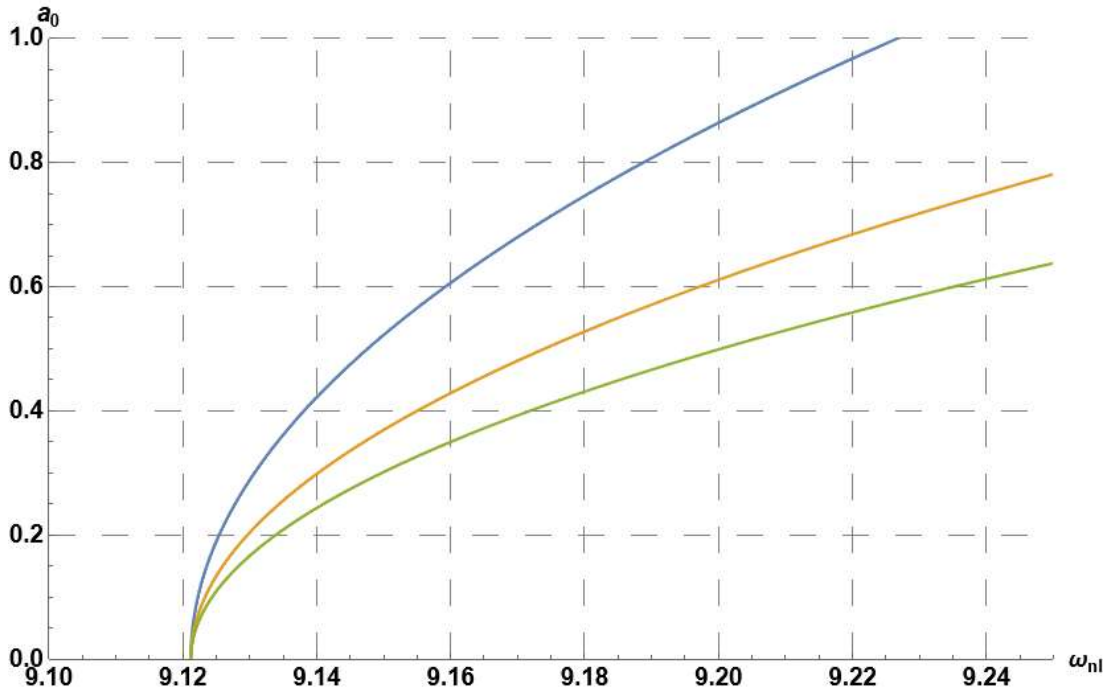
Şekil 3.18 Ankaste-Ankastre mesnet nonlinear doğal frekans - genlik değişimi (MGÇT, $R=0.5$, $\mu=0.3$)

Şekil 3.19’da Basit-Basit mesnet durumu için 1. mod nonlinear frekansın genlikle değişimi boyuna direngenlik katsayısına bağlı olarak gösterilmiştir. Boyuna direngenlik arttıkça sistemdeki nonlinearlik artmaktadır. Benzer şekilde Şekil 3.20’de ise epsilon (küçük pertürbasyon parametremiz) değerine bağlı olarak bu değişim gösterilmiş ve yine epsilon arttıkça nonlinearlik artmıştır. Şekil 3.20’deki sistemdeki kirişlik katsayısı 1’den 5’e çıkartıldığında ise bu nonlinearlikteki artış miktarı daha az olmaktadır. Bu durum Şekil 3.21’de açıkça gösterilmiştir. Bu durum gayet doğal bir sonuçtur. Direngenliği daha yüksek bir kirişte nonlinear etkiler daha az olmaktadır.



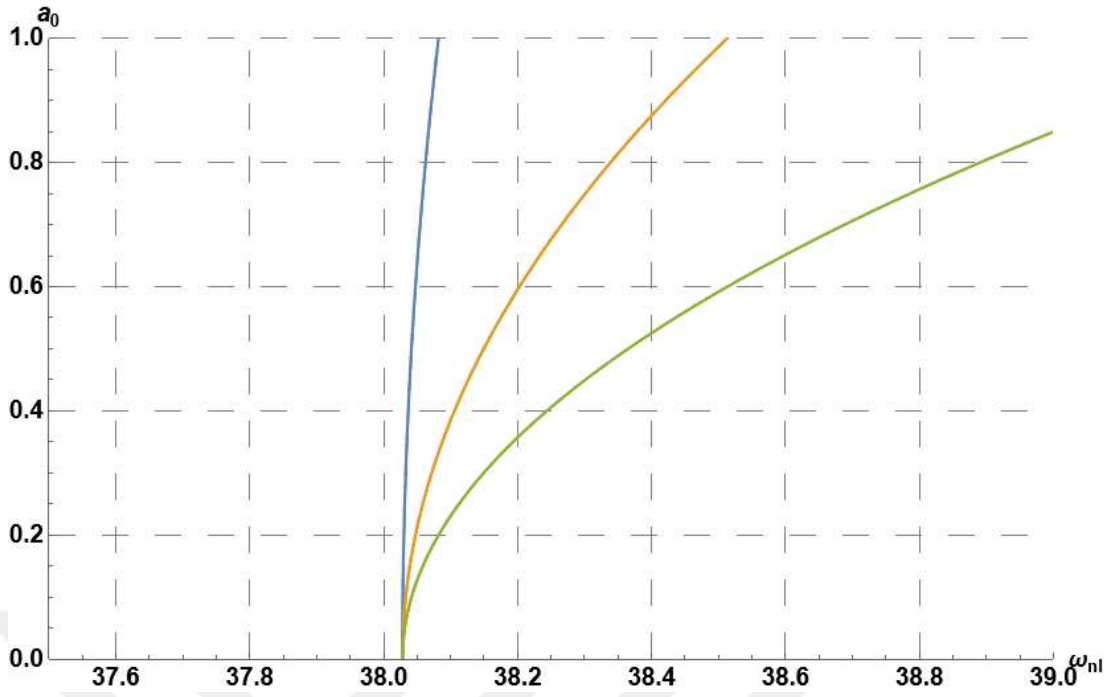
Şekil 3.19 Basit-Basit mesnet 1. Mod nonlinear frekansın genlikle değişimi

($R=0.3$, $V_f = 5$, $\varepsilon=0.2$, V_b — 1, — 3, — 5)



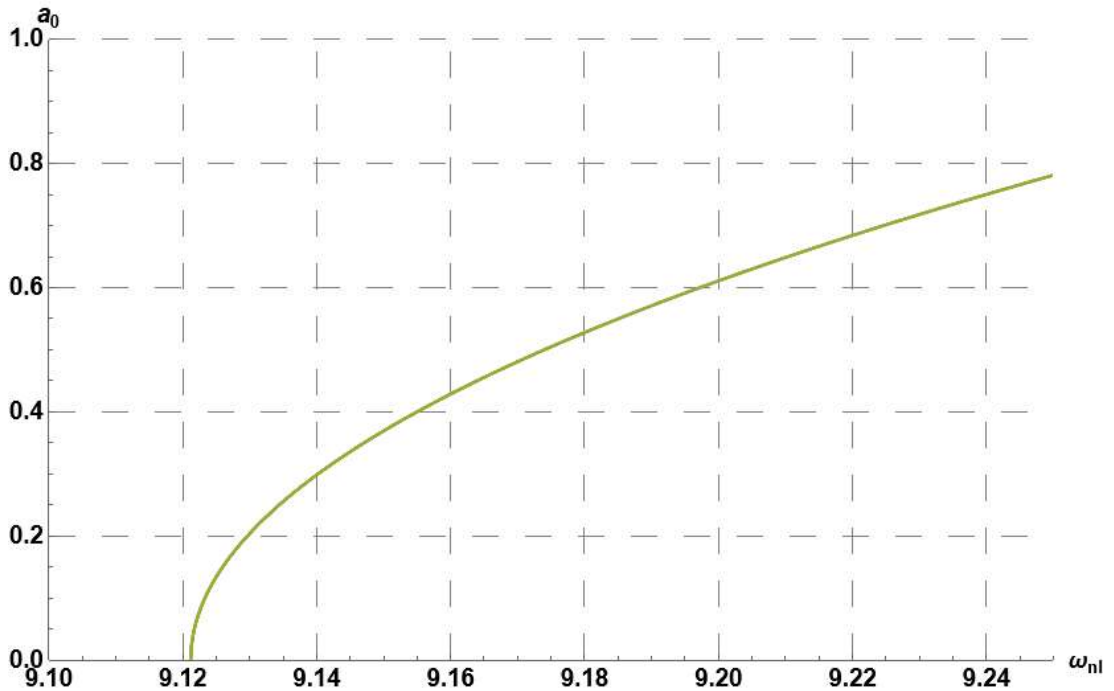
Şekil 3.20 Basit-Basit mesnet 1. Mod nonlinear frekansın genlikle değişimi

($R=0.3$, $V_f = 1$ ε — 0.1, — 0.2, — 0.3)



Şekil 3.21 Basit-Basit mesnet 1. Mod nonlinear frekansın genlikle değişimi

($R=0.3$, $V_f = 5$ $\epsilon=$ — 0.1, — 0.2, — 0.3)



Şekil 3.22 Basit-Basit mesnet 1. Mod nonlinear frekansın genlikle değişiminde sönüm oranı etkisi

($R=0.3$, $V_f = 5$, $\epsilon=0.2$, μ — 1, — 3, — 5)

4.SONUÇ VE ÖNERİLER

Yapılan çalışma sonucunda; değişken kesitli mikro kirişte doğrusal ve doğrusal olmayan parametrelerin sistemin tabii frekansına, mod yapılarına ve nonlinear frekansa tesirleri araştırılmıştır. Modifiye edilmiş gerilme çifti teorisi kullanılarak mikro kirişin titreşim davranışı incelenmiştir. Mikro ölçekteki etkilerin göz önünde bulundurulmasıyla, klasik elastisite teorisinde ihmal edilen yüksek düzeydeki küçük ölçekli etkiler dikkate alınmıştır. Elde edilen sonuçlar, mikro kirişin titreşim frekanslarını ve mod şekillerini belirlememize yardımcı olmuştur.

Sonuçlarımıza göre, MGÇT ile, kirişin titreşim davranışında önemli değişiklikler olduğu görülmüştür. Özellikle, mikro ölçekli etkilerin etkisiyle kirişin titreşim frekansları klasik teoriden farklılık göstermiştir. Mod şekilleri de mikro ölçekli etkilerin varlığıyla değişmiş ve bir miktar daha karmaşık hale gelmiştir.

Yarıçap oranı azaldıkça doğal frekanslar da azalmaktadır. MGÇT kullanılarak elde edilen doğal frekanslar daha yüksek çıkmaktadır. Bunun sebebi, kirişin mikro boyutlarda olmasından dolayı oluşan kayma gerilmelerinin etkisi ile direngenliğin artmasıdır. Kiriş direngenliği arttıkça bu durum tahmin edileceği üzere çok daha fazla artmaktadır.

Bu çalışma ve bunu takip edecek çalışmalar için aşağıdaki maddeler sıralanabilir;

1. Bu çalışma basit-basit ve ankastre–ankastre mesnet durumu için hazırlanmıştır. İlave olarak farklı mesnet halleri için doğal frekanslar, mod yapıları ve nonlinear frekanslar yeniden araştırılabilir.
2. Çalışmada serbest mikro kiriş titreşimleri incelenmiştir. Çeşitli zorlama kuvvetleri etkisi altındaki sistem incelenebilir.
3. Rezonans ve iç rezonans durumları incelenebilir.

5.KAYNAKLAR

- [1] Kaplan H., Dölen M. (2003), *Micro–Elektro–Mekanik Sistemler (MEMS) : Üretim Teknikleri*, 11. National Symposium on Machine Theory.
- [2] Hassanpour P.A., Cleghorn W.L., Esmailzadeh E., Mills J.K. (2007), *Vibration analysis of micro-machined beam-type resonators*, Journal of Sound and Vibration 308, 287– 301.
- [3] Romig, Jr A.D., Dugger M. T., McWhorter P. J. (2003), *Materials issues in microelectromechanical devices: science, engineering, manufacturability and reliability*, Acta Materialia 51 5837–5866.
- [4] Ekici H. O. (2006), *Mikro makinelerde giriş titreşimlerinin analizi*, Y. Lisans Tezi, CBÜ. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [5] Younis, M.I., Abdel-Rahman, E.M., and Nayfeh, A.H. (2003), *A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS*, Journal of Microelectromechanical Systems, to appear.
- [6] Chan, E. K., Garikipati, K., and Dutton, W.R. (1999), *Characteristics of contact elektromechanics through capacitance-voltage measurements and simulations*, Journal of Microelectromechanical Systems 8, 208-217.
- [7] McCarthy B, Adams, G.G. ve McGruer N.E. (2002), *A Dynamic Model, Including Contact Bounce of an Electrostatically Actuated Microswitch*, Journal of MEMS, cilt 11:3, sf. 276-283.
- [8] Rafiee, M., Nezamabadi, A. (2011), *Forced Oscillation Of Simply-Supported Microbeams Considering Nonlinear Effects*, International Journal of Engineering & Applied Sciences (IJEAS) Vol.3, Issue 1 27-41.
- [9] Bradley C., Daqaq M. F., Bibo A., Jalili N. (2010), *Sensitivity Enhancement of Cantilever-Based Sensors Using Feedback Delays*, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, vol.5 / 041014-1.
- [10] H. Kaplan, M. Dölen (2003), *Micro–Elektro–Mekanik Sistemler (MEMS) : Mikro Akışkan Uygulamaları*, 11. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu, Gazi Üniversitesi, Mühendislik- Mimarlık Fakültesi, 4-6 Eylül.
- [11] Feynman R. P. (1959), *There's Plenty of Room at the Bottom*, presented at the American Physical Society Meeting in Pasadena CA, Dec. 26.
- [12] Veijola, T., Mattila, T., Jaakkola O., Kiihamaki, J., Lamminmaki, T., Oja, A., Ruokonen, K., Sepa, H., Seppala, P., and Tittonen , I. (2000), *Large-displacement modeling and simulation of micromechanical electrostatically driven resonators using the harmonic balance method*, IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest, Boston, MA, T.Perkins (ed.), IEEE, New York, 2000, Vol.1, pp. 99–102.

- [13] Younis M. I. and Nayfeh A. H. (2003), *A Study of the Nonlinear Response of a Resonant Microbeam to an Electric Actuation*, Nonlinear Dynamics 31: 91–117.
- [14] Zhang, W. and Meng, G. (2005), *Nonlinear dynamical system of micro-cantilever under combined parametric and forcing excitations in MEMS*, Sensor and Actuators, A 119, 291-299.
- [15] Zhang, W. and Meng, G. (2005), *Nonlinear dynamical system of micro-cantilever under combined parametric and forcing excitations in MEMS*, Sensor and Actuators, A 119, 291-299.
- [16] Ekici H.O., Boyacı H. (2007), *Effects of non-linear boundary conditions on vibrations of microbeams*. Journal of Vibration and Control.
- [17] Nayfeh A.H., Ouakad H.M., Najar F., Choura S., Abdel-Rahman E.M. (2009), *Nonlinear dynamics of a resonant gas sensor*, Nonlinear Dyn, DOI 10.1007/s11071-009-9567-z,
- [18] Abdel-Rahman E. M.; Younis M. I. and Nayfeh A. H. (2002), *Characterization of the mechanical behaviour of an electrically actuated microbeam*, Journal of Micromechanics and Microengineering 12, 759-766.
- [19] Değer G., Pakdemirli M. (2010), *Non-Linear Vibrations of a Micro Beam Resting on an Elastic Foundation: Primary Resonance*, 1st International Symposium on Computing in Science & Engineering.
- [20] Paidoussis M.P., Grinevich E., Adamovic D. and Semler C. (2002), *Linear and nonlinear dynamics of cantilevered cylinders in axial flow. part 1 physical Dynamics*, Journal of Fluids and Structures 16(6), 691–713.
- [21] Paidoussis, M.P., Semler, C., Wadham-Gagnon, M., Saaïd, S. (2007), *Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 2: dynamics of the system with intermediate spring support*, Journal of Fluids and Structures 23, 569–587.
- [22] Öz H. R. and Evrensel C. A. (2007), *Natural frequencies of tensioned pipes conveying fluid and carrying a concentrated mass*, Journal of Sound and Vibration 250(2), 368-377.
- [23] Rinaldi, S., Prabhakar, S., Vengallatore, S., Paidoussis, M.P. (2010), *Dynamics of microscale pipes containing internal fluid flow: damping, frequency shift, and stability*. Journal of Sound and Vibration 329, 1081–1088.
- [24] Wang L. (2010), *Size-dependent vibration characteristics of fluid-conveying microtubes*. Journal of Fluids and Structures, 26 675–684.
- [25] Wang L. (2009), *Vibration and instability analysis of tubular nano- and micro-beams conveying fluid using nonlocal elastic theory*, Physica E 41 1835–1840.

- [26] Kural, S. (2013), “Akışkan Taşıyan Mikro Kiriş Titreşimleri”, Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği, Manisa, 221s (Doktora Tezi)
- [27] Fleck N.A., Muller G.M., Ashby M.F., Hutchinson J.W. (1994), *Strain gradient plasticity: theory and experiment*, Acta Metallurgica et Materialia 42, 475–487.
- [28] Ma Q., Clarke D.R. (1995), *Size dependent hardness of silver single crystals*, Journal of Materials Research 10, 853–863.
- [29] Stolken J.S., Evans A.G. (1998), *Microbend test method for measuring the plasticity length scale*, Acta Materialia 46, 5109–5115.
- [30] Chong A.C.M., Lam D.C.C. (1999), *Strain gradient plasticity effect in indentation hardness of polymers*, Journal of Materials Research 14 4103–4110.
- [31] Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P. (2003), *Experiments and theory in strain gradient elasticity*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 51, 1477–1508.
- [32] McFarland A.W., Colton J.S. (2005), *Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors*, Journal of Micromechanics and Microengineering 15, 1060–1067.
- [33] Yang F., Chong A.C.M., Lam D.C.C., Tong P. (2002), *Couple stress based strain gradient theory for elasticity*, International Journal of Solids and Structures 39, 2731–2743.
- [34] Ma H.M., Gao X.-L., Reddy J.N. (2008), *A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 56, 3379–3391.
- [35] Xia W., Wang L., Yin L. (2010), *Nonlinear non-classical microscale beams: Static bending, postbuckling and free vibrations.*, International Journal of Engineering Science 48 2044–2053.
- [36] Civalek Ö., Demir Ç. (2011), *Bending analysis of microtubules using nonlocal Euler–Bernoulli beam theory*, Applied Mathematical Modelling 35 2053–2067.
- [37] Chen W., Li L., Xu M. (2011), *A modified couple stress model for bending analysis of composite laminated beams with first order shear deformation*, Composite Structures 93 2723–2732.
- [38] Rafiee, M., Nezamabadi, A. (2011), *Forced Oscillation Of Simply-Supported Microbeams Considering Nonlinear Effects*, International Journal of Engineering & Applied Sciences (IJEAS) Vol.3, Issue 1 27-41.
- [39] Ke L.-L., Wang Y.-S., Yang J., Kitipornchai S. (2012), *Free vibration of size-dependent Mindlin microplates based on the Modified Couple stress theory*, Journal of Sound and Vibration 331 94–106.

- [40] Rafiee M., Shishehchi M. R., Mareishi S. (2011), *Nonlinear Free and Forced Oscillations of Microbeams Using Modified Couple Stress Theory*, ENOC 2011, 24-29 July 2011, Rome, Italy,
- [41] Mirramezani M., Mirdamadi H. R. (2012), *The effects of Knudsen-dependent flow velocity on vibrations of a nano-pipe conveying fluid*, Archive of Applied Mechanics, Volume 82, Issue 7, pp 879-890.
- [42] Ni Q., Zhang Z.L., Wang L. (2011), *Application of the differential transformation method to vibration analysis of pipes conveying fluid*, Applied Mathematics and Computation Volume 217, Issue 16, Pages 7028–7038.
- [43] Roque C.M.C., Ferreira A.J.M., Reddy J.N. (2013), *Analysis of Mindlin micro plates with a modified couple stress theory and a meshless method*, Applied Mathematical Modelling Volume 37, Issue 7, Pages 4626–4633.
- [44] Wang L., Liu H.T., Ni Q., Wu Y. (2013), *Flexural vibrations of microscale pipes conveying fluid by considering the size effects of micro-flow and micro-structure*, International Journal of Engineering Science, Volume 71, Pages 92–101.
- [45] Bağdatlı S.M., Özkaya E. and Öz H.R. (2013), *Dynamics of Axially Accelerating Beams with Multiple Supports*, Nonlinear Dynamics 74: 237-255.
- [46] Bağdatlı S.M., Öz H.R. and Özkaya E. (2011a), *Dynamics of Axially Accelerating Beams with An Intermediate Support*. Journal Of Vibration And Acoustics Transactions Of The Asme 133: article number: 031013.
- [47] Kural S. and Özkaya E. (2012), *Vibrations of an Axially Accelerating, Multiple Supported Flexible Beam*, Structural Engineering and Mechanics 44: 521-538
- [48] Yurddas A., Özkaya E. and Boyacı H. (2012a), *Nonlinear Vibrations of Axially Moving Multi-Supported Strings Having Non-Ideal Support Condition*, Nonlinear Dynamics: 73: 1223-1244.
- [49] Yurddas A., Özkaya E. and Boyacı H. (2012b), *Nonlinear Vibrations and Stability Analysis of Axially Moving Strings Having Nonideal Mid-Support Conditions*, Journal of Vibration and Control 20: 518-534.
- [50] Park S.K.; Gao X.L. (2006), *Bernoulli–Euler beam model based on a modified couple stress theory*, Journal of Micromechanics and Microengineering, 16, 2355-2359.
- [51] Kong, S., Zhou, S., Nie, Z., Wang, K. (2008), *The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams*, International Journal of Engineering Science, 46, 427-437.

- [52] Huang, Y., Yang, L.E., Luo, Q.-Z. (2013), *Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section*, Composites Part B: Engineering., 45(1), 1493–1498.
- [53] Yilmaz, Y., Girgin, Z., Evran, S. (2013), *Buckling analyses of axially functionally graded nonuniform columns with elastic restraint using a localized differential quadrature method*, Mathematical Problems in Engineering, Article ID 793062, 12 pp.
- [54] Li X.F. (2008), *A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams*, Journal of Sound and Vibration, 318(4-5), 1210–1229.
- [55] Mahi A., Adda Bedia E.A., Tounsi A., Mechab I. (2010), *An analytical method for temperature-dependent free vibration analysis of functionally graded beams with general boundary conditions*, Composite Structures, 92, 1877–1887.
- [56] Chakraborty A., Gopalakrishnan S. (2003), *A spectrally formulated finite element for wave propagation analysis in functionally graded beams*, International Journal of Solids and Structures, 40, 2421–2448.
- [57] Şimşek M., Kocatürk T., Akbaş Ş.D. (2012), *Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load*, Composite Structures, 94, 2358–2364
- [58] Alshorbagy A.E., Eltaher M.A., Mahmoud F.F. (2011), *Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method*, Applied Mathematical Modelling, 35, 412–425.
- [59] Kumar S., Mitra A., Roy H. (2015), *Geometrically nonlinear free vibration analysis of axially functionally graded taper beams*, Engineering Science and Technology An International Journal, 18(4), 579–593.
- [60] Alibeigloo A. (2010), *Thermoelasticity analysis of functionally graded beam with integrated surface piezoelectric layers*, Composite Structures, 92, 1535–1543.
- [61] Sankar B. V. (2001), *An elasticity solution for functionally graded beams*, Composites Science and Technology, 61, 689–696.
- [62] Chakraborty A., Gopalakrishnan S. (2003), *A spectrally formulated finite element for wave propagation analysis in functionally graded beams*, International Journal of Solids and Structures, 40, 2421–2448.
- [63] Li X.-F., Kang Y.-A., Wu J.-X. (2013), *Exact frequency equations of free vibration of exponentially functionally graded beams*, Applied Acoustics, 74, 413–420.
- [64] Anandakumar G., Kim J.-H. (2010), *On the modal behavior of a three-dimensional functionally graded cantilever beam: Poisson's ratio and material sampling effects*, Composite Structures, 92, 1358–1371.

- [65] Akgöz B., Civalek Ö. (2018), *Vibrational characteristics of embedded microbeams lying on a two-parameter elastic foundation in thermal environment*, Composites Part B, 150, 68–77
- [66] Hao D., Wei C. (2016), *Dynamic characteristics analysis of bi-directional functionally graded Timoshenko beams*, Composite Structures, 141, 253–263.
- [67] Hein H, Feklistova L. (2011), *Free vibrations of non-uniform and axially functionally graded beams using Haar wavelets*, Engineering Structures, 33(12), 3696– 3701.
- [68] Jin C. , Wang X. (2015), *Accurate free vibration analysis of Euler functionally graded beams by the weak form quadrature element method*, Composite Structures, 125, 41–50.
- [69] Chen D., Kitipornchai S., Yang J. (2016), *Nonlinear free vibration of shear deformable sandwich beam with a functionally graded porous core*, Thin-Walled Structures, 107, 39–48.
- [70] Shahba A, Rajasekaran S. (2012), *Free vibration and stability of tapered Euler–Bernoulli beams made of axially functionally graded materials*, Applied Mathematical Modelling, 36(7), 3094–111.
- [71] Candan S., Elishakoff I. (2001), *Constructing the axial stiffness of longitudinally vibrating rod from fundamental mode shape*, International Journal of Solids and Structures, 38(19), 3443–3452.
- [72] Akgöz B., Civalek Ö. (2013), *Longitudinal vibration analysis of strain gradient bars made of functionally graded materials (FGM)*, Composites Part B: Engineering, 55, 263–268
- [73] Kanani A.S., Niknam H., Ohadi A.R., Aghdam M.M. (2014), *Effect of nonlinear elastic foundation on large amplitude free and forced vibration of functionally graded beam*, Composite Structures, 115, 60–68.
- [74] Elishakoff I., Guede Z. (2004), *Analytical polynomial solutions for vibrating axially graded beams* Mechanics of Advanced Materials and Structures, 11, 17–33
- [75] Kahya Ç. (2023), *Değişken kesitli çubukların ve çatlaklı kirişlerin titreşim analizi*, Yayınlanmamış doktora tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [76] Köstekci F. (2022), *Kiriş Titreşimleri İçin Vibroport Cihazı ve LabVIEW Altında Çalışan Ölçüm Ünitesi Kullanımının İncelenmesi*, Selçuk Üniversitesi Sosyal ve Teknik Araştırmalar Dergisi USTEK’2022 Özel Sayısı 20(01): 155-165.
- [77] Matyar B. (2022), *Termoplastik kompozit kirişlerin titreşim sönümleme davranışları*, Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü