

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN ÜSLÜ BAZI HİPERBOLİK TİPTEN
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KALİTATİF ANALİZİ

DOKTORA TEZİ

Zülal MISIR

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

HAZİRAN 2025

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN ÜSLÜ BAZI HİPERBOLİK TİPTEN
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KALİTATİF ANALİZİ

DOKTORA TEZİ

Zülal MISIR

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin YAMAN

HAZİRAN 2025

Zülal Mısır tarafından hazırlanan ‘‘Değişken sl Bazı Hiperbolik Tipten Denklemlerin zmlerinin Kalitatif Analizi’’ adlı tez çalışması 12.06.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Bařkanı :	Prof. Dr. şevket GR Sakarya Üniversitesi	
Jüri yesi :	Prof. Dr. Metin YAMAN (Danışman) Sakarya Üniversitesi	
Jüri yesi :	Doç. Dr. Engin CAN Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniversitesi	
Jüri yesi :	Dr. Öęr. Üyesi Sertaç ERMAN Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniversitesi	
Jüri yesi :	Dr. Öęr. Üyesi Emine ÇELİK Sakarya Üniversitesi	



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “DEĞİŞKEN ÜSLÜ BAZI HİPERBOLİK TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KALİTATİF ANALİZİ” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(12/06/2025)

Zülal MISIR







TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca ve bu tez çalışmasının her anında rehberliğiyle, akademik bilgisiyle yanımda olan ve her türlü sıkıntıda, sorunumda bana destek olan kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Metin Yaman’a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bana tez çalışmamda ve akademik hayatımda destek olan ve yol gösteren değerli hocam Prof. Dr. Şevket Gür’e teşekkürlerimi borç bilirim.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca, en önemlisi de beni hayallerime ulaştıran tez yazma dönemimde, her daim desteklerini hissettiren anneme, babama ve kardeşlerime teşekkürlerimi sunarım. Bu dönemde benim için bazen bir arkadaş, bazen bir psikolog olan ve beni her defasında hayallerimin peşinden gitmem için destekleyen, yüreklendiren eşim Muhammet Sabri Mısır’a ne kadar teşekkür etsem az kalır.

Son olarak, doktora eğitimim süresince alınan 2211-Yurt içi doktora bursu ile, bu tezin oluşturulmasında maddi desteklerini esirgemeyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı’na içten teşekkürlerimi sunarım.

Zülal MISIR



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	v
TEŞEKKÜR	ix
İÇİNDEKİLER	xi
SİMGELER	xiii
ÖZET.....	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı ve Literatür Taraması	1
2. ÖN BİLGİLER.....	7
2.1. Normlu Uzak, İç Çarpım Uzak, Hilbert Uzak.....	7
2.2. Lebesgue Uzak ($L^p(\Omega)$)	8
2.3. Sobolev Uzak ($W^{m,p}(\Omega)$)	9
2.4. Değişken Üslü Lebesgue Uzak	9
2.4.1. Temel kavramlar	9
2.4.2. $L^{p(x)}(\Omega)$ Uzak.....	10
2.5. Değişken Üslü Sobolev Uzak ($W^{m,p(x)}(\Omega)$).....	12
2.6. Bazı Önemli Eşitlikler ve Eşitsizlikler	13
3. ÇÖZÜMLERİN ENERJİ AZALMASI VE PATLAMASI İLE İLGİLİ BAZI LEMMA VE EŞİTSİZLİKLER	19
3.1. Çözümlerin Enerjisinin Azalması ile İlgili Bazı Lemma ve Eşitsizlikler	19
3.1.1. Nakao eşitsizliği	19
3.2. Çözümlerin Patlaması ile İlgili Kullanılan Bazı Lemma ve Eşitsizlikler	21
3.2.1. Georgiev ve Todorova metodu	21
3.2.2. Li ve Tsai metodu	22
4. DEĞİŞKEN ÜSLÜ KAYNAK VE SÖNÜMLEME TERİMİ İÇEREN BİR LAME TERS PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ENERJİ AZALIMI	27
4.1. Giriş.....	27
4.2. Ön Bilgiler.....	28
4.3. Enerji Azalımı	31
5. DOĞRUSAL OLMAYAN DEĞİŞKEN ÜSLERE SAHİP BİR YARI LİNEER DALGA DENKLEMİ TİPİNDEKİ TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN PATLAMA ANALİZİ	39
5.1. Giriş.....	39
5.2. Tanım ve Ön Bilgiler.....	40
5.3. Negatif Başlangıç Enerjisi ile Çözümlerin Patlaması	43
6. DOĞRUSAL OLMAYAN DEĞİŞKEN ÜSLÜ SÖNÜMLEME TERİMİ İÇEREN LOKAL OLMAYAN TEKİL VİSKOELASTİK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI, ENERJİ AZALMASI VE PATLAMASI.....	57
6.1. Giriş.....	57

6.2. Tanım ve Ön Bilgiler.....	58
6.3. Çözümlerin Global Varlığı.....	60
6.4. Çözümlerin Enerjisinin Azalması.....	63
6.4.1. Durum 1. ($\rho = 1$).....	71
6.4.2. Durum 2. ($1 < \rho < \frac{3}{2}$).....	72
6.5. Çözümlerin Patlaması.....	75
6.5.1. $m(x) = 2$	75
6.5.2. $m(x) \neq 2$	89
7. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	99
KAYNAKLAR.....	101
ÖZGEÇMİŞ.....	105



SİMGELER

$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
$C(\Omega)$	: Sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_B(\Omega)$	: Zayıf sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^m(\Omega)$	: m . mertebeye kadar türevli ve sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^\infty(\Omega)$	: Sonsuz mertebeden türevli ve sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^m([0, T]; X)$	: $[0, T]$ den X e tanımlanmış m . mertebeye kadar türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayı
$L^p(a, b; X)$	: (a, b) den X e tanımlanmış ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
$L^p(\Omega)$	: p . mertebeden Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	: Sobolev uzayı
$L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$	: Lebesgue uzayı
$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$	: Hilbert uzayı
$L^{p(\cdot)}(\Omega)$	: Değişken üslü Lebesgue uzayı
$W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$	: Değişken üslü Sobolev uzayı
$\rho_{p(\cdot)}$	: Modüler fonksiyonu
$\ u\ $	: u 'nun normu
$\ u\ _{p(\cdot)}$	: Luxemburg normu
$E(t)$	: Enerji fonksiyoneli



DEĞİŞKEN ÜSLÜ BAZI HİPERBOLİK TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KALİTATİF ANALİZİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Global varlık, Çözümlerin patlaması, Enerji azalması, Değişken üs, Ters problem, Dalga denklemi, Viskoelastik denklem

Birinci bölümde, enerji azalımı ve çözümlerin patlamasıyla ilgili olarak bugüne kadar gerçekleştirilen çalışmaların tarihsel süreci incelenmiştir.

İkinci bölümde, tezde kullanılacak olan temel kavramlar, ana teoremler ve önemli eşitsizlikler ayrıntılı olarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde, çalışmada yararlanılacak enerji azalımı ve çözümlerin patlamasına ilişkin temel lemmalar ile bunların ispatları sunulmuştur.

Dördüncü bölümde lineer olmayan kaynak ve sönümleme terim içeren bir Lamé ters probleminin çözümlerinin enerji azalmasına çalışılmıştır. Bu problem elastisite teorisinden gelmekte olup, yapısal analizlerde sıklıkla karşılaşılan bir modeldir. Çözümlerin enerji fonksiyonelinin zamanla azaldığı, belirli koşullar altında sıfıra yakınsadığı gösterilmiştir. Luxemburg normu altında yapılan analizler, Poincaré tipi eşitsizlikler ve türevsel enerji tahminleri ile desteklenmiştir. Teorem 4.3.1 ile çözümlerin enerji fonksiyonelinin zamana bağlı olarak üstel biçimde azaldığı ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde, doğrusal olmayan yarı lineer bir dalga denklemi tipi için değişken üslü sönümleme ve kaynak terimleri içeren ters problem analiz edilmiştir. Negatif başlangıç enerjisine sahip çözümlerin sonlu zamanda patladığı Georgiev-Todorova metodu ile gösterilmiştir. Bu sonuç, fiziksel sistemlerde enerji birikimi veya instabilite durumlarının matematiksel modellemesi açısından önemlidir. Teorem 5.3.1 ile enerji fonksiyonunun negatif kaldığı sürece çözümlerin sonsuz hale gelmeden önce bir sonlu zamanda patladığı ispatlanmıştır.

Altıncı bölümde, doğrusal olmayan değişken üslü sönümleme ve kaynak terim içeren lokal olmayan tekil viskoelastik denkleminin çözümlerinin global varlığı, enerji azalması ve patlaması incelenmiştir. Enerji azalımı Nakao eşitsizliği kullanılarak ispatlanmıştır. İlk olarak bu denklem sistemine bağlı bir $E(t)$ fonksiyonu bulunup, $E(t)$ fonksiyonunun artmayan olduğu gösterilmiştir. Daha sonra belli eşitsizlikler,

lemmalar kullanılarak $\rho = 1$ için ve $1 < \rho < \frac{3}{2}$ için iki farklı durumda enerji azalması gösterilmiştir. Çözümlerin patlaması başlangıç enerjisinin $m(x) = 2$ olduğunda, $E(0) = 0$, $E(0) > 0$ ve $E(0) < 0$ üç farklı durumu için 2003 yılında Li ve Tsai tarafından bulunan yöntem kullanılarak gösterilmiştir. Ayrıca, $m(x) \neq 2$ için, 1994 yılında Georgiev-Todorova tarafından geliştirilen yöntemle problemin bir $u(x)$ çözümü için sonlu bir T^* zamanında çözümün patlaması gösterilmiştir.

Tezin son ve yedinci bölümünde, tartışma ve sonuç bölümüne yer verilmiştir. Burada tezde yapılan sonuçların literatüre kattığı yeniliklerden ve gelecekte hangi tür çalışmalara yardımcı olabileceğinden bahsedilmiştir.



QUALITATIVE ANALYSIS OF SOLUTIONS OF SOME OF HYPERBOLIC- TYPE EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENT

SUMMARY

Keywords: Global existence, Blow-up of solutions, Energy decay, Variable exponent, Inverse problem, Wave equation, Viscoelastic equation

The first chapter thoroughly reviews the historical development of studies concerning energy decay and blow-up of solutions.

In the second chapter, the fundamental concepts, main theorems, and important inequalities that will be utilized throughout the thesis are presented in detail.

In the third chapter, the basic lemmas related to energy decay and blow-up of solutions, along with their proofs, are provided, forming the essential analytical tools employed in the subsequent analysis.

In the fourth chapter, the energy decay of solutions to a Lamé-type inverse problem involving nonlinear source and damping terms is studied. The following problem is examined:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_e u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{r(x)-2} \nabla u) + \beta u_t + h(x, t, u, \nabla u) + a |u_t|^{m(x)-2} u_t + b |u|^{p(x)-2} u \\ = f(t)w(x), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ \int_{\Omega} u(x, t)w(x)dx = \phi(t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

where Ω is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ in $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$, $\beta, b, a > 0$ and $w(x)$, $h(x, t, u, \nabla u)$ are real functions. Also, Δ_e refers to the elasticity operator, which is a differential operator of size $n \times n$ and is defined as follows;

$$\Delta_e u = \mu \Delta u + (\alpha + \mu) \nabla(\operatorname{div} u), \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T,$$

where μ and α are the Lamé constants such that,

$$\mu > 0, \quad \alpha + \mu \geq 0.$$

This problem originates from elasticity theory and represents a model frequently encountered in structural analysis. It is demonstrated that the energy functional of the solutions decreases over time and converges to zero under certain conditions. The analysis carried out under the Luxemburg norm is supported by Poincaré-type inequalities and differential energy estimates. In Theorem 4.3.1, it is proved that the energy functional of the solutions decays exponentially with respect to time.

In the fifth chapter, blow up of solutions of inverse problem for the wave equation with source and nonlinear damping terms is studied. The following problem is examined:

$$\begin{aligned}
& u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{r(x)-2} |\nabla u|) + a|u_t|^{m(x)-2} u_t - b|u|^{p(x)-2} u = f(t)w(x), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\
& u(x, t) = 0, \quad \partial\Omega \times (0, T), \\
& u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \Omega, \\
& \int_{\Omega} u(x, t)w(x)dx = \phi(t), \quad t > 0,
\end{aligned}$$

where Ω is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ in $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), and a unit outer normal ν . Also, a and b are positive constants and $w(x)$ and $\phi(t)$ are real valued functions. The exponents $p(x)$, $m(x)$, and $r(x)$ are measurable and continuous functions on $\bar{\Omega}$ such that satisfy the following inequality;

$$2 \leq r_2 < m_1 \leq m(x) \leq m_2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 \leq r_*(x),$$

with

$$\begin{aligned}
p_1 &:= \operatorname{ess\,inf}_{x \in \bar{\Omega}} p(x), & p_2 &:= \operatorname{ess\,sup}_{x \in \bar{\Omega}} p(x), \\
r_1 &:= \operatorname{ess\,inf}_{x \in \bar{\Omega}} r(x), & r_2 &:= \operatorname{ess\,sup}_{x \in \bar{\Omega}} r(x), \\
m_1 &:= \operatorname{ess\,inf}_{x \in \bar{\Omega}} m(x), & m_2 &:= \operatorname{ess\,sup}_{x \in \bar{\Omega}} m(x),
\end{aligned}$$

and

$$r_*(x) = \begin{cases} \frac{Nr(x)}{\operatorname{ess\,sup}_{x \in \bar{\Omega}} (N - m(x))}, & r_2 < N \\ +\infty, & r_2 \geq N \end{cases}.$$

It is shown by the Georgiev-Todorova method that solutions with negative initial energy blow up in finite time. This result is significant for the mathematical modeling of energy accumulation or instability phenomena in physical systems. In Theorem 5.3.1, it is proven that as long as the energy functional remains negative, the solutions blow up at a finite time before becoming unbounded.

In the sixth chapter, energy decay, global existence and blow up of a singular nonlocal viscoelastic system with a nonlinear damping term, nonlocal boundary condition and variable exponents are studied. We examine the following problem:

$$\begin{aligned}
& u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g(t-\tau) \frac{1}{x}(xu_x(x, \tau))_x d\tau + |u_t|^{m(x)-2} u_t = |u|^{p(x)-2} u, \quad (0, \ell) \times (0, T), \\
& u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, \ell), \\
& u(\ell, t) = 0, \quad \int_0^\ell xu(x, t)dx = 0,
\end{aligned}$$

where $\ell < \infty, T < \infty$, and $g(\cdot): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ is a function. Additionally, the exponents $m(x)$ and $p(x)$ are measurable functions on the domain that satisfy the following inequality:

$$2 \leq m_1, p_1 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in (0, \ell)} m(x), p(x) \\ \leq m(x), p(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in (0, \ell)} m(x), p(x) = m_2, p_2 \leq \frac{2n}{n-2}, n \geq 3.$$

The definitions of the lower and upper bounds for the variable exponents are given as follows:

$$m_1 := \operatorname{ess\,inf}_{x \in (0, \ell)} m(x), \quad m_2 := \operatorname{ess\,sup}_{x \in (0, \ell)} m(x), \\ p_1 := \operatorname{ess\,inf}_{x \in (0, \ell)} p(x), \quad p_2 := \operatorname{ess\,sup}_{x \in (0, \ell)} p(x).$$

Additionally, the log-Hölder continuity condition is written as:

$$|r(x) - r(y)| \leq -\frac{w}{\log|x-y|}, \quad x, y \in (0, \ell) \quad \text{ve} \quad |x-y| < \delta,$$

where $w > 0$ and $0 < \delta < 1$.

Energy decay has been proven using the Nakao inequality. First, an $E(t)$ function associated with this system of equations is derived, and it is shown that the function $E(t)$ is non-increasing. Then, energy decay is demonstrated in two different cases: for $\rho = 1$ and for $1 < \rho < \frac{3}{2}$, using certain inequalities and lemmas. The blow-up of the solutions has been shown for three different initial energy conditions: $E(0) > 0$, $E(0) = 0$, and $E(0) < 0$, in the case where $m(x) = 2$ is the given function using the method found by Li and Tsai in 2003. Additionally, for $m(x) \neq 2$, the blow-up of the solution in a finite time T^* for a solution $u(x)$ is shown using the method developed by Georgiev-Todorova in 1994.

The final and seventh chapter of the thesis contains the discussion and conclusion sections. Here, the innovations of the results presented in the thesis are discussed, as well as the potential future studies that could benefit from these findings.



1. GİRİŞ

1.1. Tezin Amacı ve Literatür Taraması

Bu tezin amacı, dördüncü bölümde ele alınan doğrusal olmayan değişken üslü kaynak terimi, doğrusal olmayan değişken üslü sönümlleme terimi ve esneklik operatörü içeren,

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_e u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{r(x)-2} \nabla u) + \beta u_t + h(x, t, u, \nabla u) + a |u_t|^{m(x)-2} u_t + b |u|^{p(x)-2} u \\ = f(t)w(x), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ \int_{\Omega} (x, t)w(x)dx = \phi(t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

ters problemin çözümlerinin enerji azalımını, beşinci bölümde ele alınan doğrusal olmayan değişken üslü yarı lineer dalga denklemi tipindeki,

$$\begin{aligned} u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{r(x)-2} |\nabla u|) + a |u_t|^{m(x)-2} u_t - b |u|^{p(x)-2} u = f(t)w(x), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0, \quad \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \Omega, \\ \int_{\Omega} u(x, t)w(x)dx = \phi(t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

ters problemin çözümlerinin patlamasını, altıncı bölümde değişken üslü sönümlleme terimi içeren,

$$\begin{aligned} u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g(t-s) \frac{1}{x}(xu_x(x, s))_x ds + |u_t|^{m(x)-2} u_t = |u|^{p(x)-2} u, \quad (0, \ell) \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, \ell), \\ u(\ell, t) = 0, \quad \int_0^{\ell} xu(x, t)dx = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

doğrusal olmayan tekil viskoelastik denkleminin çözümlerinin global varlığını, enerji azalımını ve patlamasını incelemektir.

Öncelikle (1.1) ve (1.2) ile verilen ters problemler ile ilgili yapılmış olan çalışmalar aşağıda verilmiştir. Eden ve Kalantarov 2005 yılında aşağıdaki ters problemi incelediler (Eden ve Kalantarov, 2005):

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + b(x, t, u, \nabla u) - b |u|^p u &= F(t)w(x), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, t) &= 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \Omega, \\ \int_{\Omega} u(x, t)w(x)dx &= \phi(t), & t > 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Özellikle $\phi(t) \equiv 1$ alındığında, çözümlerin global varlığını engelleyen yeterli koşulları buldular. Ek olarak, $b(x, t, u, \nabla u) \equiv 0$ durumunda, zıt işaret koşullarına bağlı bir kararlılık sonucu elde etmişlerdir. Daha sonra, Tahamtani ve Shahrouzi 2012 yılında önceki sonuçları bir Petrovsky ters kaynak problemine genişlettiler (Shahrouzi ve Tahamtani, 2012). Ayrıca bkz. (Tahamtani ve Shahrouzi, 2013). Shahrouzi ise 2020 yılında aşağıdaki sönümlenme terim içeren viskoelastik ters problemini inceledi:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \nabla[(a_0 + a|\nabla u|^m)\nabla u] + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} g(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau + bu_t &= h(x, t, u, \nabla u) + |u|^p u + f(t)w(x), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, t) &= 0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \Omega, \\ \int_{\Omega} u(x, t)w(x)dx &= 1, & t > 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

ve başlangıç fonksiyonları üzerinde yeterli koşullar altında, değiştirilmiş konkavlık argümanını kullanarak çözümlerin patladığını kanıtladı (Shahrouzi, 2020). Bkz. (Shahrouzi, 2016).

Öte yandan, elektro-reolojik akışkanlar, doğrusal olmayan viskoelastisite ve görüntü işleme gibi bazı fiziksel olayların modellenmesinin, standart olmayan büyüme koşullarına sahip denklemlere, yani doğrusal olmayan değişken üslure sahip denklemlere yol açtığı bilinmektedir. Değişken üslü tipte doğrusal olmayan terimlere sahip denklemler çoğu yazar tarafından tartışılmıştır. Örneğin, Antontsev 2011 yılında aşağıdaki denklemi ele almıştır (Antontsev, 2011):

$$u_{tt} = \operatorname{div}\left(a(x, t)|\nabla u|^{p(x, t)-2} \nabla u\right) + \alpha \Delta u_t + b(x, t)u|u|^{\sigma(x, t)-2} + f(x, t) \quad (1.6)$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ üzerinde, burada $\alpha > 0$ bir sabittir ve a, b, p, σ verilen fonksiyonlardır. a, b, p, σ üzerindeki belirli koşullar altında, küçük ve herhangi bir sonlu zaman için varlık teoremleri kanıtlanmış ve ayrıca, veriler üzerinde uygun bazı koşullar altında çözümlerin patlaması (blow-up) gösterilmiştir. Messaoudi ve Talahmeh 2017 yılında aşağıdaki değişken üslü doğrusal olmayan denklemi incelemişlerdir (Messaoudi ve Talahmeh, 2017):

$$u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{r(x)-2} \nabla u) + a|u_t|^{m(x)-2} u_t = b|u|^{p(x)-2} u. \quad (1.7)$$

Negatif başlangıç enerjisine sahip çözümler için sonlu zamanda patlama (blow-up) sonucunu kanıtladılar ve ayrıca uygun $m(x)$, $r(x)$ ve $p(x)$ değerleri için pozitif enerjiye sahip belirli çözümler için de bu sonucu elde ettiler.

Şimdi, (1.3) viskoelastik denklemi ile alakalı yapılan çalışmalar incelenirse, Mesloub ve Messaoudi 2010 yılında, $\mathbb{Q} = (0, a) \times (0, T)$ bölgesinde, $T < \infty$, $a < \infty$, $p > 2$ ve $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ olduğu durumda,

$$\begin{aligned} u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g(t-s) \frac{1}{x}(xu_x(x, s))_x ds &= |u|^{p-2} u, \quad \mathbb{Q} \text{ içinde,} \\ \int_0^a xu(x, t) dx &= 0, \quad u(a, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in (0, a), \end{aligned} \quad (1.8)$$

probleminin çözümünün global varlığını, enerji azalımını ve patlamasını çalıştılar. Patlamasını çalışırken Georgiev ve Todorova metodunu kullandılar (Mesloub ve Messaoudi, 2010). Shuntang 2011 yılında aynı problemin, aynı koşullar altında çözümünün patlamasına çalıştı (Shuntang, 2011). Çalışmasında Li ve Tsai metodunu kullandı (Pişkin, 2021). Liu, Sun and Li 2010 yılında,

$$\begin{aligned} u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g(t-s) \frac{1}{x}(xu_x(x, s))_x ds + au_t &= |u|^{p-2} u, \quad x \in (0, \ell), \quad t \in (0, \infty), \\ \int_0^\ell xu(x, t) dx &= 0, \quad u(\ell, t) = 0, \quad [0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in [0, \ell], \end{aligned} \quad (1.9)$$

$\ell < \infty$, $p > 2$ ve $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ olduğu durumda, sönümlenme terimi içeren problemin enerji azalımını ve çözümün patlamasını çalıştılar (Liu ve ark., 2017). Boulaaras and

Mezouar 2020 yılında, $\mathbb{Q} = (0, \alpha) \times (0, T)$ bölgesinde $\alpha < \infty, T < \infty$, $p, q > 1$ ve $g_1(\cdot), g_2(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ olduğu durumda,

$$\begin{aligned} u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g_1(t-s) \frac{1}{x}(xu_x(x, s))_x ds + a(x)u_t &= |v|^{q+1}|u|^{p-1}u \quad \mathbb{Q}, \\ v_{tt} - \frac{1}{x}(xv_x)_x + \int_0^t g_2(t-s) \frac{1}{x}(xv_x(x, s))_x ds + a(x)v_t &= |u|^{p+1}|v|^{q-1}v \quad \mathbb{Q}, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, \alpha), \\ v(x, 0) &= v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad x \in (0, \alpha), \\ u(\alpha, t) &= v(\alpha, t) = 0, \quad \int_0^\alpha xu(x, t)dx = \int_0^\alpha xv(x, t)dx = 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

denklem sisteminin çözümlerinin global varlığını ve enerji azalımını çalıştılar (Boulaaras ve Mezouar, 2020). Zarai, Draïfia and Boulaaras 2017 yılında (1.10) probleminin çözümlerinin patlamasını çalıştılar (Zarai ve ark., 2018). Alaeddine 2021 yılında, yukarıdaki denklem sisteminin sönümleme terimi içermeyen halininin çözümünün enerji azalımını çalıştı. Sonuca ulaşırken farklı bir yöntem kullandı (Alaeddine, 2021).

Park ve Kang 2018 yılında, $0 < T < \infty$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ Lipschitz sınırlı bir bölge olmak üzere, $a, b > 0$ sabitler, g artmayan bir fonksiyon, $p(x)$ ve $m(x)$ ölçülebilir fonksiyonlar olan,

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + a|u_t|^{m(x)-2}u_t &= b|u|^{p(x)-2}u, \quad \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) &= 0, \quad \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \end{aligned} \quad (1.11)$$

probleminin pozitif olmayan başlangıç enerjisinin yanında pozitif başlangıç enerjisi ile çözümünün patlamasını çalıştılar (Park ve Kang, 2018). Bu çalışmada Georgiev-Todorova metodunu kullandılar (Georgiev ve Todorova, 1994).

Pişkin, Boulaaras, Kandemir, Cherif ve Biomy 2021 yılında,

$$\begin{aligned} f_1(u, v), f_2(u, v) &: \mathbb{R}^2, \\ f_1(u, v) &= a|u+v|^{2(r+1)}(u+v) + b|u|^r|v|^{r+2}, \\ f_2(u, v) &= a|u+v|^{2(r+1)}(u+v) + b|v|^r|u|^{r+2}, \end{aligned}$$

olduğu durumda,

$$\begin{aligned}
u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g_1(t-s) \frac{1}{x}(xu_x(x,s))_x ds + |u_t|^{m-1} u_t &= f_1(u,v), \quad (0,a) \times (0,T), \\
v_{tt} - \frac{1}{x}(xv_x)_x + \int_0^t g_2(t-s) \frac{1}{x}(xv_x(x,s))_x ds + |v_t|^{m-1} v_t &= f_2(u,v), \quad (0,a) \times (0,T), \\
u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in (0,a), \\
v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in (0,a), \\
u(a,t) = v(a,t) = 0, \\
\int_0^a xu(x,t)dx = \int_0^a xv(x,t)dx = 0,
\end{aligned} \tag{1.12}$$

denklem sisteminin, $a, b \in \mathbb{R}$, $r \geq -1, (a=b=1)$, $a < \infty$, $T < \infty$ ve $g_1(\cdot), g_2(\cdot): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ iken, çözümünün (1.11) probleminde kullanılan yöntemle patlamasını çalıştılar (Pişkin ve ark., 2021).



2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, dördüncü, beşinci ve altıncı bölümler için gerekli olan bazı tanımlar, uzaylar ve eşitsizlikler verilmiştir (Adams, 1975, Adams ve Fournier, 2003; Brezis, 2011, Diening ve ark., 2011, Evans, 1998, Zeidler, 1995).

2.1. Normlu Uzay, İç Çarpım Uzayı, Hilbert Uzayı

Tanım 2.1.1. X bir reel (veya kompleks) vektör uzayı olsun. $\vec{x} \in X$ vektörünü $\|\vec{x}\|$ reel sayısına dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* denir. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in X$ ve $\forall \lambda \in K$ için, şartlar

i) $\|\vec{x}\| \geq 0$ ve $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$;

ii) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$;

iii) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

dir. Norm uzayı $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ üzerindeyse, sırasıyla bir *reel norm* uzayı veya bir *kompleks norm* uzayı olarak adlandırılır. Bu durumda X vektör uzayına norm ile birlikte *normlu vektör uzayı* veya *normlu uzay* denir. $\|\vec{x}\|$ gösterimine de $\vec{x}$ in normu denir.

Tanım 2.1.2. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay olsun. Böylece $\forall \vec{x}, \vec{y} \in X$ için

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe normun oluşturduğu metrik denir.

Tanım 2.1.3. (x_n) , X normlu uzayında bir dizi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine *yakınsak* veya *güçlü yakınsak* dizi denir ve bu yakınsama

$$x_n \rightarrow x$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.4. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayda her Cauchy dizisi bir limite sahipse, bu uzay *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.5. X bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu

- i) $\langle u, u \rangle \geq 0$ ve $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- ii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- iii) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- iv) $\langle cu, v \rangle = \langle u, cv \rangle = c \langle u, v \rangle$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona *iç çarpım* denir. Bu iç çarpım ile

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu norm olur. Normu, bir iç çarpım ile tanımlanan uzay, *iç çarpım uzayı* olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.6. Bir $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi, X uzayında bir limit içeriyorsa, bu tür bir uzay *Hilbert uzayı* olarak adlandırılır.

2.2. Lebesgue Uzayı ($L^p(\Omega)$)

Tanım 2.2.1. Ω , $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir bölge olmak üzere, u fonksiyonu ölçülebilir ve $1 \leq p < \infty$ koşulu altında, $|u(x)|^p$ fonksiyonu Lebesgue anlamında integrallenebilir ise, yani,

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

o zaman $u(x)$, p . kuvvetle integrallenebilir fonksiyonlar kümesine aittir ve bu uzay $L^p(\Omega)$ ya da kısaca L^p olarak gösterilir. Bu uzayda norm,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır.

2.3. Sobolev Uzayı ($W^{m,p}(\Omega)$)

Tanım 2.3.1. Ω , $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p < \infty$ koşulları altında,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

bu şekilde tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir. Sobolev uzaylarında normlar,

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p \right)^{1/p}$$

şeklindedir.

2.4. Değişken Üslü Lebesgue Uzayı

2.4.1. Temel kavramlar

Tanım 2.4.1.1. Ω , $\mathbb{R}^n$ de pozitif ölçümlü ($|\Omega| > 0$) bir bölge olsun. Bu durumda

$$p : \Omega \rightarrow [1, \infty]$$

ölçülebilir fonksiyonuna *değişken üs* denir. Değişken üslü fonksiyonların ailesi $P(\Omega)$ ile gösterilir.

$$p^- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x) \quad \text{ve} \quad p^+ = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x)$$

olmak üzere

$$1 \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ \leq \infty$$

dır. Ayrıca Ω bölgesi

$$\Omega_{\infty}^{p(x)} = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\},$$

$$\Omega_1^{p(x)} = \{x \in \Omega : p(x) = 1\},$$

$$\Omega_*^{p(x)} = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < \infty\},$$

şeklinde üç kümeye ayrılır. Bu üç küme sırasıyla $p(x)$ yazılmadan $\Omega_\infty, \Omega_1, \Omega_*$ şeklinde de yazılabilir.

Tanım 2.4.1.2. $p(x)$ üs fonksiyonunun eşleniği $p'(x)$ şeklinde gösterilir. Burada $x \in \Omega$ olmak üzere

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} (p'(x))^+ &= (p^-)', \\ (p'(x))^- &= (p^+)', \end{aligned}$$

yazılabilir.

Tanım 2.4.1.3. $\Omega \in \mathbb{R}, r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $\forall x, y \in \Omega$ ve $|x - y| < \frac{1}{2}$ için

$$|r(x) - r(y)| \leq \frac{c_0}{\ln(e + |x|)}$$

olacak şekilde c_0 sabiti varsa $r(x)$ fonksiyonuna *lokal log-Hölder süreklidir* denir ve $r(x) \in LH_0(\Omega)$ ile gösterilir.

Eğer $\forall x \in \Omega$ için

$$|r(x) - r_\infty| \leq \frac{c_\infty}{-\ln|x - y|}$$

olacak şekilde c_∞ ve r_∞ sabitleri varsa $r(x)$ fonksiyonuna *sonsuzda log-Hölder süreklidir* denir ve $r(x) \in LH_\infty(\Omega)$ ile gösterilir. $r(x)$ fonksiyonu hem lokal log-Hölder sürekli hem de sonsuzda log-Hölder sürekli ise $r(x) \in LH(\Omega)$ ile gösterilir.

2.4.2. $L^{p(x)}(\Omega)$ Uzayı

Tanım 2.4.2.1. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de $|\Omega| > 0$ olacak şekilde bir bölge olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)}(u) &= \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |u(x)|^{p(x)} dx + \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega_\infty} |u(x)| \\ &= \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |u(x)|^{p(x)} dx + \|u(x)\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} < \infty \end{aligned}$$

veya $p^+ < \infty$ ise ($|\Omega_\infty| = 0$ olacağından)

$$\rho_{p(\cdot)}(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty$$

bu koşulu sağlayan ölçülebilir u fonksiyonlarının oluşturduğu uzaya değişken üslü Lebesgue uzayı denir ve $L^{p(x)}(\Omega)$ veya $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ile gösterilir. Burada $\rho_{p(\cdot)}(u)$ (veya $\rho(u)$) *modular fonksiyoneli* olarak adlandırılır.

Örnek 2.4.2.2. $\Omega = [1, 4]$, $p(x) = \frac{1}{x}$ ve $u(x) = 2^{x^2}$ için $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Verilen Ω bölgesinde $p(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu sınırlı olduğundan $|\Omega_\infty| = 0$ dır.

Böylece

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)}(u) &= \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx = \int_1^4 \left| 2^{x^2} \right|^{\frac{1}{x}} dx \\ &= \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_1^4 = \frac{14}{\ln 2} < \infty \end{aligned}$$

olduğundan $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ dır.

Tanım 2.4.2.3. $p^+ < \infty$ ise değişken üslü Lebesgue uzayında norm

$$\begin{aligned} \|u\|_{p(x)} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu norma *Luxemburg normu* denir. Burada $p(\cdot) = p$ (sabit) olursa klasik Lebesgue uzayındaki norm elde edilir.

Tanım 2.4.2.4. $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır. Ayrıca $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ise $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı yansımalıdır.

Teorem 2.4.2.5. $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve hemen hemen her yerde

$$|u(x)| \leq |v(x)|$$

ise

$$\|u\|_{p(x)} \leq \|v\|_{p(x)}$$

dir.

İspat: Bakınız (Diening ve ark., 2011).

2.5. Değişken Üslü Sobolev Uzayı ($W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$)

Tanım 2.5.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, m pozitif bir tam sayı, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ çoklu indis ve $p : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$W^{m,p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : D^\alpha u \in L^{p(\cdot)}(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

uzayına *değişken üslü Sobolev uzayı* denir. Bu uzay

$$\|u\|_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)} = \|u\|_{m,p(\cdot)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{p(\cdot)}$$

normu ile Banach uzayıdır. $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ise $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı yansımalıdır.

Ayrıca $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ dır. Açıktır ki

$$W_0^{m,p(\cdot)}(\Omega) \subset W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$$

dır.

Teorem 2.5.2. Ω , $\mathbb{R}^n$ de koni koşulunu sağlayan açık bir bölge, $0 < m < \frac{n}{p}$, $p(\cdot)$

fonksiyonu $\bar{\Omega}$ bölgesinde $1 < p^- \leq p^+ < \frac{n}{m}$ koşulunu sağlayan Lipschitz sürekli bir

fonksiyon ve $q(\cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ hemen hemen her $x \in \bar{\Omega}$ için

$$p(\cdot) \leq q(\cdot) \leq p^*(\cdot) = \frac{np(\cdot)}{n - mp(\cdot)} \text{ olsun. Bu durumda}$$

$$W^{m,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$$

sürekli gömülmesi vardır.

İspat: Bakınız (Diening ve ark., 2011, Edmunds ve Rakosnik, 2000, 2002, Fan ve Zhao, 2001, Fan ve Zhang, 2003).

Teorem 2.5.3. Ω , $\mathbb{R}^n$ de koni koşulunu sağlayan açık bir bölge, $0 < m < \frac{n}{p}$, $p(\cdot)$

fonksiyonu $\bar{\Omega}$ bölgesinde $1 < p^- \leq p^+ < \frac{n}{m}$ koşulunu sağlayan Lipschitz sürekli bir

fonksiyon ve $q(\cdot): \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ hemen hemen her $x \in \bar{\Omega}$ için $p(\cdot) \leq q(\cdot)$ ve

$$\operatorname{ess\,inf}_{\bar{\Omega}} [p^*(x) - q(x)] > 0$$

olsun. Bu durumda

$$W^{m,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$$

sürekli gömülmesi vardır.

İspat: Bakınız (Diening ve ark., 2011, Edmunds ve Rakosnik, 2000, 2002, Fan ve Zhao, 2001, Fan ve Zhang, 2003).

Teorem 2.5.4. Ω , $\mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge ve $p(\cdot): \bar{\Omega} \rightarrow [1, n)$ sürekli bir fonksiyon

olsun. Ayrıca $0 < \varepsilon < \frac{1}{n-1}$ ve $\forall x \in \Omega$ için $1 \leq q(\cdot) \leq p^*(\cdot) - \varepsilon$ ise

$$\|u\|_{q(\cdot)} \leq c \|\nabla u\|_{p(\cdot)}$$

dır.

İspat: Bakınız (Diening ve ark., 2011, Edmunds ve Rakosnik, 2000, 2002, Fan ve Zhao, 2001, Fan ve Zhang, 2003).

Lemma 2.5.5. Eğer

$$1 \leq p_1 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x) \leq p(x) \leq p_2 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x) < \infty$$

ise, o zaman herhangi bir $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$

$$\min \left\{ \|u\|_{p(\cdot)}^{p_1}, \|u\|_{p(\cdot)}^{p_2} \right\} \leq \rho_{p(\cdot)}(u) \leq \max \left\{ \|u\|_{p(\cdot)}^{p_1}, \|u\|_{p(\cdot)}^{p_2} \right\}$$

dır.

2.6. Bazı Önemli Eşitlikler ve Eşitsizlikler

Lemma 2.6.1. (Cauchy Eşitsizliği) Eğer $\varepsilon > 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ ise, bu durumda

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 2.6.2. (Young Eşitsizliği) $a, b \geq 0$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\varepsilon > 0$ ise

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği ya da

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği yazılabilir.

Lemma 2.6.3. (Sobolev Eşitsizliği) $n > 1$ olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık olsun. $n > p$, $p \geq 1$ ve $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise, o zaman

$$\|u\|_{L_{np/(n-p)}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

olacak biçimde bir $C = C(n, p)$ sabiti vardır.

$p > n$ ve Ω sınırlı ise, bu durumda $u \in C(\bar{\Omega})$ ve

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C |\Omega|^{1/n-1/p} \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

olur.

Lemma 2.6.4. (Sobolev-Poincare Eşitsizliği)

$$\begin{cases} 2 \leq p < \infty & ; \quad n = 1, 2 \\ 2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2} & ; \quad n \geq 3 \end{cases}$$

olsun. O zaman, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_p \leq C_* \|\nabla u\|_2$$

dir. Burada $C_* = C_*(\Omega, p)$ dir.

Lemma 2.6.5. (Hölder Eşitsizliği) $1 \leq p^- \leq p(\cdot) \leq p^+ < \infty$, $1 \leq q^- \leq q(\cdot) \leq q^+ < \infty$,

$\frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{q(\cdot)} = 1$, $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $v \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ olsun. Bu durumda $uv \in L^1(\Omega)$ ve

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} \right) \|u\|_{p(\cdot)} \|v\|_{q(\cdot)}$$

dır. Eğer $\frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{q(\cdot)} = \frac{1}{r(\cdot)}$, $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $v \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ ise

$$\|uv\|_{r(\cdot)} \leq c \|u\|_{p(\cdot)} \|v\|_{q(\cdot)}$$

eşitsizliğine genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği denir.

Teorem 2.6.6. ($L^{p(\cdot)}$ Uzayında Gömülme) Ω , $\mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, $0 < |\Omega| < \infty$ ve

$p(\cdot), q(\cdot) \in L_+^\infty(\Omega) = \left\{ u \in L^\infty(\Omega) : \text{ess inf}_{\Omega} u \geq 1 \right\}$ olsun.

$$L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$$

gömülmesinin olması için gerek ve yeter koşul hemen hemen her $x \in \Omega$ için $p(\cdot) \leq q(\cdot)$ olmasıdır. Bu durumda

$$\|u\|_{p(\cdot)} \leq c(1 + |\Omega|) \|u\|_{q(\cdot)}$$

olacak şekilde $c > 0$ sayısı vardır.

Lemma 2.6.7. (Poincare Eşitsizliği) Ω , $\mathbb{R}^n$ de sınırlı düzgün bir bölge ve

$p(\cdot) \in LH(\Omega)$ olsun. Bu durumda $\forall u \in W_0^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{p(\cdot)} \leq c \|\nabla u\|_{p(\cdot)}$$

olur. Burada $c = c(n, p(\cdot), \Omega)$ dır.

Teorem 2.6.8. (Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$ olsun. Eğer $u, v \in L^p(\Omega)$ ise bu

durumda $u + v \in L^p(\Omega)$ ve

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

dır.

Lemma 2.6.9. (Kısmi İntegral Alma Formülleri) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($\partial\Omega \in C^1$ sınırına sahip) bölgesinde tanımlı $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$ vektörü $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $F_i(x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ bileşenleri ile verilmiş olsun. $\text{div } F(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$ fonksiyonu Ω bölgesinde integrallenebilir veya $\bar{\Omega}$ ($\mathbb{R}^n$ uzayında sınırlı bölge) bölgesinde sürekli ise,

$$\int_{\Omega} \text{div} F(x) dx = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

olur. $n(x)$; Ω bölgesine göre dışa yönlendirilmiş $\partial\Omega$ sınırının birim normal vektörüdür. Buna Ostrogradsky formülü de denir.

Teorem 2.6.10. (Green Özdeşliği) $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $v(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ ve $\Delta u = \text{div}(\nabla u)$ fonksiyonu Ω bölgesinde integrallenebilir olsun.

$v\Delta u = v \cdot \text{div}(\nabla u) = \text{div}(v\nabla u) - \nabla u \cdot \nabla v$, $\nabla u \cdot \nabla v = u_{x_1} v_{x_1} + \dots + u_{x_n} v_{x_n}$ olduğundan

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

bulunur. Burada n , dışa doğru yönelen birim vektörü temsil etmekte olup, $\frac{\partial u}{\partial n} = n \cdot \nabla u$

olduğu takdirde bu ifade Green formülü olarak bilinmektedir.

Lemma 2.6.11. (Gronwall Eşitsizliği (Diferansiyel Form)) $\eta(t)$, $[0, T]$ aralığında negatif olmayan mutlak sürekli bir fonksiyon, $\psi(t)$ ve $\phi(t)$ negatif olmayan $[0, T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman $0 \leq t \leq T$ için

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right)$$

yazılabilir.

Lemma 2.6.12. (Gronwall Eşitsizliği (İntegral Form))

(i) $\xi(t)$, hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ ve $C_1, C_2 \geq 0$ sabitleri için

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds + C_2$$

integral eşitsizliğini sağlayan, $[0, T]$ üzerinde toplanabilir, negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi(t) \leq C_2 \left(1 + C_1 t e^{C_1 t}\right)$$

olur.

(ii) Eğer hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds$$

ise, bu durumda $\xi(t) = 0$ dır.

Teorem 2.6.13. $a, b \geq 0$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1} (a^p + b^p)$$

dır.

Teorem 2.6.14. (Birim Yuvar Özelliği) $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olsun.

$$\|u\|_{p(\cdot)} \leq 1$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\rho_{p(\cdot)} \leq 1$$

olmasıdır.

3. ÇÖZÜMLERİN ENERJİ AZALMASI VE PATLAMASI İLE İLGİLİ BAZI LEMMA VE EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde dördüncü, beşinci ve altıncı bölümlerde verilen problemlerin çözümlerinin enerjisinin azalması ve patlaması ile ilgili sonuçlara ulaşmak için kullanılan lemma ve eşitsizliklere yer verilmiştir.

3.1. Çözümlerin Enerjisinin Azalması ile İlgili Bazı Lemma ve Eşitsizlikler

3.1.1. Nakao eşitsizliği

Lemma 3.1.1.1. $\phi(t)$ fonksiyonu, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı negatif olmayan ve artmayan bir fonksiyon olmak üzere; $w_0 > 0$ ve $m \geq 0$ için

$$\phi^{1+m}(t) \leq w_0 (\phi(t) - \phi(t+1))$$

eşitsizliğini sağlasın. O zaman $\forall t \in [0, T]$ için

$$\begin{cases} \phi(t) \leq \phi(0)e^{(-w_1[t-1]^+)} & ; \quad m = 0, \\ \phi(t) \leq (\phi(0)^{-m} + w_0^{-1}m[t-1]^+)^{-\frac{1}{m}} & ; \quad m > 0 \end{cases}$$

dır. Burada $[t-1]^+ = \max\{t-1, 0\}$ ve $w_1 = \ln\left(\frac{w_0}{w_0-1}\right)$ dır (Nakao, 1977, 1978).

İspat:

i) $m > 0$ için $y(t) = \phi^{-m}(t)$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} y(t+1) - y(t) &= \phi^{-m}(t+1) - \phi^{-m}(t) = \int_0^1 \frac{d}{d\theta} [\theta\phi(t+1) + (1-\theta)\phi(t)]^{-m} d\theta \\ &= \int_0^1 -m [\theta\phi(t+1) + (1-\theta)\phi(t)]^{-m-1} [\phi(t+1) - \phi(t)] d\theta \\ &\geq m \int_0^1 [\theta\phi(t+1) + (1-\theta)\phi(t)]^{-m-1} w_0^{-1} \phi^{1+m}(t) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= mw_0^{-1} \phi^{1+m}(t) \int_0^1 [\theta \phi(t+1) + (1-\theta) \phi(t)]^{-m-1} d\theta \\
&\geq mw_0^{-1} \phi^{1+m}(t) \phi^{-1-m}(t) = mw_0^{-1}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$y(t+1) \geq y(t) + mw_0^{-1} \quad \Rightarrow \quad \int_t^{t+1} y'(\tau) d\tau \geq mw_0^{-1}$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizlik $t > 0$ için $[0, t]$ üzerinde integre edilirse,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^{t+1} y'(\tau) d\tau dt &\geq \int_0^t mw_0^{-1} dt \\
\int_0^{t+1} y'(\tau) d\tau &\geq mw_0^{-1} t \\
y(t+1) &\geq y(0) + mw_0^{-1} t
\end{aligned}$$

yazılabilir. $y(t)$ nin tanımından, $(y(t) = \phi^{-m}(t))$

$$\phi^{-m}(t+1) \geq \phi^{-m}(0) + mw_0^{-1} t$$

ve $t \geq 1$ alınırsa, $n \leq t \leq n+1$ olacak şekilde n tamsayısı için

$$\phi^{-m}(t) \geq \phi^{-m}(0) + mw_0^{-1} (t-1)$$

elde edilir. $[t-1]^+ = \max\{t-1, 0\}$ olmak üzere,

$$\phi^{-m}(t) \geq \phi^{-m}(0) + mw_0^{-1} [t-1]^+$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin $\left(-\frac{1}{m}\right)$ kuvveti alınırsa, eşitsizlik yön değiştirir

ve böylece

$$\phi(t) \leq \left(\phi^{-m}(0) + mw_0^{-1} [t-1]^+ \right)^{-\frac{1}{m}}$$

bulunur.

ii) Şimdi $m = 0$ olsun. Bu durumda

$$\phi^{1+m}(t) \leq w_0 (\phi(t) - \phi(t+1))$$

eşitsizliği

$$\begin{aligned}\phi(t) \leq w_0(\phi(t) - \phi(t+1)) &\Rightarrow w_0\phi(t+1) \leq (w_0 - 1)\phi(t) \\ &\Rightarrow \phi(t+1) \leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)\phi(t)\end{aligned}$$

olur. Ayrıca eğer $t \geq 1$ alınırsa, n tamsayısı için $n \leq t \leq n+1$ dir.

O halde

$$\phi(t) \leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)\phi(t-1)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\phi(t) \leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^2 \phi(t-2) \leq \dots \leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^n \phi(t-n)$$

olur. Böylece ($\phi(1) \leq \phi(0)$ olduğundan)

$$\begin{aligned}\phi(t) &\leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^n \phi(t-n) \leq \phi(0) \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^{[t-1]^+} \\ &= \phi(0) e^{-[t-1]^+ \ln\left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^{-1}} = \phi(0) e^{-w_1 [t-1]^+}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $w_1 = \ln\left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^{-1} = \ln\left(\frac{w_0}{w_0 - 1}\right)$ dır.

Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

3.2. Çözümlerin Patlaması ile İlgili Kullanılan Bazı Lemma ve Eşitsizlikler

3.2.1. Georgiev ve Todorova metodu

Bu metot 1994 yılında Georgiev ve Todorova tarafından geliştirilmiştir.

Lemma 3.2.1.1. Bu metodun temel fikri uygun seçilmiş bir $\psi(t)$ fonksiyoneli için

$$\psi'(t) \geq c_1 \psi^{c_2}(t)$$

$c_1 > 0$, $c_2 > 1$, $t \geq 0$ olduğu durumda diferansiyel eşitsizliğini elde etmektir. Buradan $(0, t)$ aralığında integral alınırsa

$$\frac{\psi'(t)}{\psi^{c_2}(t)} \geq c_1,$$

$$\frac{\psi^{1-c_2}(t)}{1-c_2} - \frac{\psi^{1-c_2}(0)}{1-c_2} \geq c_1 t$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$\psi^{c_2-1}(t) \geq \frac{1}{\psi^{1-c_2}(0) - c_1(c_2-1)t}$$

elde edilir. Böylece paydayı sıfır yapan

$$\psi^{1-c_2}(0) - c_1(c_2-1)t = 0; \quad t = \frac{\psi^{1-c_2}(0)}{c_1(c_2-1)}$$

zamanında $\psi(t)$ sınırsız olur.

Georgiev ve Todorova çalışmalarında lineer olmayan sönümlleme $(|u_t|^{p-1} u_t)$ ve kaynak

terim $(|u|^{q-1} u)$ içeren

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{p-1} u_t = |u|^{q-1} u$$

denkleminin lokal varlığını ve negatif başlangıç enerjisi ($E(0) < 0$) için çözümlerin patlamasını çalıştılar. Burada

$$\begin{cases} 1 < q \leq p & \text{ise global çözüm,} \\ 1 < p < q \leq \frac{n}{n-2} & \text{ise patlama,} \end{cases}$$

olduğunu gösterdiler (Georgiev ve Todorova, 1994).

3.2.2. Li ve Tsai metodu

Lemma 3.2.2.1. $\delta > 0$ ve $B(t) \in C^2(0, \infty)$ negatif olmayan fonksiyonu, $t \geq 0$ için

$$B''(t) - 4(\delta+1)B'(t) + 4(\delta+1)B(t) \geq 0 \quad (3.1)$$

eşitsizliği sağlansın. $r_2 = 2(\delta+1) - 2\sqrt{(\delta+1)\delta}$ olmak üzere; eğer

$$B'(0) > r_2 B(0) + K_0 \quad (3.2)$$

ise, o zaman $t > 0$ için $B'(t) > K_0$ dır. Burada K_0 sabit sayıdır (Li ve Tsai, 2003).

İspat.

$r^2 - 4(\delta + 1)r + 4(\delta + 1) = 0$ denkleminin kökleri $r_1 = 2(\delta + 1) + 2\sqrt{\delta(\delta + 1)}$ ve $r_2 = 2(\delta + 1) - 2\sqrt{\delta(\delta + 1)}$ dir. O halde (3.1) diferansiyel eşitsizliği

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - r_1\right)\left(\frac{d}{dt} - r_2\right)B(t) &\geq 0, \\ B''(t) - r_2B'(t) - r_1B'(t) + r_1r_2B(t) &\geq 0, \\ B''(t) - r_2B'(t) &\geq r_1B'(t) - r_1r_2B(t) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$\frac{(B'(t) - r_2B(t))'}{B'(t) - r_2B(t)} \geq r_1 \quad (3.3)$$

bulunur. (3.3)'ün 0 dan t ye integrali alınır

$$\begin{aligned} \ln(B'(t) - r_2B(t)) \Big|_0^t &\geq r_1 t \\ \ln\left(\frac{B'(t) - r_2B(t)}{B'(0) - r_2B(0)}\right) &\geq r_1 t \\ \frac{B'(t) - r_2B(t)}{B'(0) - r_2B(0)} &\geq e^{r_1 t} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$B'(t) \geq r_2B(t) + (B'(0) - r_2B(0))e^{r_1 t}$$

olur. Böylece $B'(t) > K_0$ elde edilir.

Lemma 3.2.2.2. Eğer $H(t)$, $[t_0, \infty]$ aralığında artmayan ve $t \geq t_0$ için

$$[H'(t)]^2 \geq a + b[H(t)]^{2+\frac{1}{\delta}} \quad (3.4)$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon ise, o zaman

$$\lim_{t \rightarrow T^*} H(t) = 0$$

eşitliğini sağlayacak şekilde sonlu bir T^* zamanı vardır. Burada $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ dir.

T^* in üst sınırları için aşağıdaki kestirimler geçerlidir:

i) Eğer $b < 0$ ve $H(t_0) < \min \left\{ 1, \sqrt{-\frac{a}{b}} \right\}$ ise, o zaman

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln \frac{\sqrt{-\frac{a}{b}}}{\sqrt{-\frac{a}{b}} - H(t_0)} \quad (3.5)$$

dır.

ii) Eğer $b = 0$ ise, o zaman

$$T^* \leq t_0 + \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \quad (3.6)$$

dır.

iii) Eğer $b > 0$ ise, o zaman

$$T^* \leq \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \quad \text{veya} \quad T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}} \frac{\delta c}{\sqrt{a}} \left[1 - \left(1 + cH(t_0) \right)^{-\frac{1}{2\delta}} \right] \quad (3.7)$$

dır. Burada $c = \left(\frac{a}{b} \right)^{2+\frac{1}{\delta}}$ dır (Li ve Tsai, 2003).

İspat.

i) $c \geq d > 0$ için $\sqrt{c^2 - d^2} \geq c - d$ olduğundan, (3.4) den $t \geq t_0$ için

$$\begin{aligned} H'(t) &\leq -\sqrt{a} + \sqrt{-b} [H(t)]^{1+\frac{1}{2\delta}} \\ &\leq -\sqrt{a} + \sqrt{-b} H(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$H(t) \leq \left(H(t_0) - \sqrt{-\frac{a}{b}} \right) e^{(t-t_0)\sqrt{-b}} + \sqrt{-\frac{a}{b}}$$

olur. Burada $\lim_{t \rightarrow T^*-} H(t) = 0$ olacak şekilde pozitif bir $T^* < \infty$ sayısı vardır ve T^*

sayısının üst sınırı (3.5)'de verilmiştir.

ii) $b = 0$ ise, (3.4) den $t \geq t_0$ için

$$H(t) \leq H(0) - \sqrt{a}(t - t_0)$$

olur. Böylece burada $\lim_{t \rightarrow T^*} H(t) = 0$ olacak biçimde pozitif bir $T^* < \infty$ sayısı vardır ve

T^* sayısının üst sınırı (3.6) da verilmiştir.

iii) $b > 0$ ise, (3.4) den

$$H'(t) \leq -\sqrt{a \left(1 + (cH(t))^{2+\frac{1}{\delta}} \right)} \quad (3.8)$$

dır. Burada $c = \left(\frac{a}{b} \right)^{2+\frac{1}{\delta}}$ dır.

$m, n > 0$ ve $q \geq 1$ olmak üzere

$$m^q + n^q \geq 2^{1-q} (m+n)^q$$

eşitsizliği ele alınırsa, $q = 2 + \frac{1}{\delta}$ olarak seçilip (3.8) den

$$H'(t) \leq -\sqrt{a} 2^{\frac{-1-\delta}{2\delta}} (1 + cH(t))^{1+\frac{1}{2\delta}}$$

diferansiyel eşitsizliği elde edilir. Bu diferansiyel eşitsizliğin çözülmesiyle

$$H(t) \leq \frac{1}{c} \left\{ -1 + \left[\left(1 + cH(t_0) \right)^{\frac{1}{2\delta}} + \frac{\sqrt{a}}{\delta c} 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}} (t - t_0) \right]^{-2\delta} \right\}$$

bulunur. Böylece burada $\lim_{t \rightarrow T^*} H(t) = 0$ olacak biçimde pozitif bir $T^* < \infty$ sayısı vardır

ve T^* sayısının üst sınırı (3.7) de verilmiştir.



4. DEĞİŞKEN ÜSLÜ KAYNAK VE SÖNÜMLEME TERİMİ İÇEREN BİR LAME TERS PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ENERJİ AZALIMI

Bu bölümde değişken üslü doğrusal olmayan kaynak ve sönümlleme terim içeren Lamé ters probleminin çözümlerinin enerji azalımı incelenecektir.

4.1. Giriş

Bu bölümde değişken üslü doğrusal olmayan kaynak ve sönümlleme terim içeren

$$u_{tt} - \Delta_e u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{r(x)-2} \nabla u) + \beta u_t + h(x, t, u, \nabla u) + a |u_t|^{m(x)-2} u_t + b |u|^{p(x)-2} u = f(t)w(x), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \quad (4.1)$$

$$u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \quad (4.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \quad (4.3)$$

$$\int_{\Omega} u(x, t)w(x)dx = \phi(t), \quad t > 0, \quad (4.4)$$

Lamé ters problemi ele alınmıştır. Burada Ω , $\mathbb{R}^n$ de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. Δ_e ,

$$\Delta_e u = \mu \Delta u + (\alpha + \mu) \nabla(\operatorname{div} u), \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T,$$

eşitliği ile tanımlanan, $n \times n$ matris değerli diferansiyel operatörü temsil eden esneklik operatörüdür. μ ve α ,

$$\mu > 0, \quad \alpha + \mu \geq 0$$

eşitsizliklerini sağlayan Lamé sabitleridir. β , a ve b pozitif sabitler olup $h(x, t, u, \nabla u)$ ve $w(x)$ ise daha sonra belirlenecek özel koşulları sağlayan bilinen fonksiyonlar olmak üzere, $\{u(x, t), f(t)\}$ bilinmeyendir. Değişken üsler için koşullar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
2 < r_1 \leq r(x) \leq r_2 < \infty, \\
2 < m_1 \leq m(x) \leq m_2 < \infty, \\
2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \infty \\
r_1 &:= \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} r(x), r_2 := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} r(x), \\
m_1 &:= \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} m(x), m_2 := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} m(x), \\
p_1 &:= \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x), p_2 := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

4.2. Ön Bilgiler

Bu bölümde sonuca ulaşmak için kullanılan gerekli notasyonlar, fonksiyonlar ve lemmalar verilmiştir. $\|\cdot\|_q$, Ω bölgesi üzerinde L^q - normunu göstermektedir, daha özel olarak Ω bölgesi üzerinde L^2 - normu $\|\cdot\|$ ile gösterilmektedir.

M_1, M_2 pozitif sayıları ve $p(x)$, $r(x)$ değişken üsleri için $h(x, t, u, \nabla u)$,

$$|h(x, t, u, \nabla u)| \leq M_1 |u|^{\frac{p(x)}{2}} + M_2 |\nabla u|^{\frac{r(x)}{2}} \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned}
u_0 &\in H_0^2(\Omega) \cap L^{r(x)}(\Omega) \cap L^{p(x)}(\Omega), \\
u_1 &\in L^2(\Omega) \cap L^{m(x)}(\Omega),
\end{aligned}$$

olduğu durumda, $w(x)$ fonksiyonu ise aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u_0(x) w(x) dx &= \phi(0), \\
w &\in H_0^2(\Omega) \cap L^{r(x)}(\Omega) \cap L^{m(x)}(\Omega) \cap L^{p(x)}(\Omega), \quad \int_{\Omega} w^2(x) dx = 1.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Burada değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayları hakkında bazı hipotez ve teorilere ihtiyaç duyulmaktadır. $p(x) \geq 1$ ve ölçülebilir fonksiyon olmak üzere, aşağıdaki eşitliklerin sağlandığı varsayalım:

$$C_+(\bar{\Omega}) = \{h \mid h \in C(\bar{\Omega}), \quad h(x) > 1 \quad \forall x \in \bar{\Omega}\},$$

$$h^+ = \max_{\bar{\Omega}} h(x), \quad h^- = \min_{\bar{\Omega}} h(x) \quad \forall h \in C(\bar{\Omega}),$$

$$L^{p(x)}(\Omega) = \{u \mid u \text{ reel değerli ölçülebilir bir fonksiyon, } \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty\}.$$

İşlemlerde kullanılacak lemmalar aşağıda sırasıyla verilmiştir (Diening ve ark., 2011, Edmunds ve Rakosnik, 2000, 2002, Fan ve Zhao, 2001, Fan ve Zhang, 2003).

Lemma 4.2.1. Ω bölgesi $\mathbb{R}^n$ ile sınırlı bölge olsun,

- i. $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$ olduğu durumda, $(L^{p(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(x)})$ Banach uzayı olup bu uzaya ait eşlenik uzayı da $L^{q(x)}(\Omega)$ 'dir. Herhangi $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \right) \|u\|_{p(x)} \|v\|_{q(x)}.$$

- ii. Eğer, herhangi $x \in \bar{\Omega}$ için $p, q \in C_+(\bar{\Omega})$ olmak üzere $q(x) \leq p(x)$ eşitsizliği sağlanıyorsa $L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ gömülmesi sağlanır ve bu gömülme süreklidir. Değişken üslü Lebesgue Sobolev uzayı olan $W^{1,p(x)}(\Omega)$, aşağıdaki eşitlik ile tanımlanmıştır.

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) \mid \nabla u \text{ ve } |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega) \right\}.$$

Tanımlanan bu uzay $\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}$ normuna göre Banach uzayıdır.

Ayrıca $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ üzerinde $C_0^\infty(\Omega)$ 'ın kapanışı olsun. $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ 'ın eşleniği $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ olarak tanımlanırsa, klasik Sobolev uzayları ile aynı şekilde

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1 \text{ eşitliği sağlanır.}$$

Eğer $p^*(x)$;

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{\text{ess sup}_{x \in \Omega} (N - p(x))}, & p_2 < N \\ \infty, & p_2 \geq N \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, aşağıdaki lemma yazılır:

Lemma 4.2.2. Ω , $\mathbb{R}^n$ ile sınırlı bölge olmak üzere; herhangi ölçülebilir sınırlı değişken üssü $p(x)$ için, aşağıdaki maddeler yazılır:

- i. $W^{1,p(x)}(\Omega)$ ve $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ ayrılabilir Banach uzaylarıdır;

- ii. Eğer herhangi $x \in \bar{\Omega}$ için $q \in C_+(\bar{\Omega})$ ve $q(x) < p^*(x)$ ise, $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ gömülmesi kompakt ve süreklidir;
- iii. Eğer Ω üzerinde $p(x)$ sürekli fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır,

$$\|u\|_{p(x)} \leq C \|\nabla u\|_{p(x)} \quad \forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Eğer $C(\theta, q(x)) = \frac{1}{q'(x)} (\theta q(x))^{-q'(x)/q(x)}$ ise, Young's eşitsizliği aşağıdaki gibi yazılır:

$$ab \leq \theta a^{q(x)} + C(\theta, q(x)) b^{q'(x)}, \quad a, b \geq 0, \theta > 0, \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{q'(x)} = 1. \quad (4.8)$$

Özel durum olarak $\theta = \frac{1}{q(x)}$ alınırsa, (4.8)'den,

$$ab \leq \frac{a^{q(x)}}{q(x)} + \frac{b^{q'(x)}}{q'(x)} \quad (4.9)$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.1) denklemi $w(x)$ ile çarpılıp, (4.7) koşulları altında bölge üzerinde integre edildiğinde, bu çalışmanın temel gözlemi, (4.1)–(4.4) numaralı probleminin aşağıdaki doğrudan problem ile eşdeğer olduğu görülmektedir;

$$u_{tt} - \Delta_x u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{r(x)-2} \nabla u) + \beta u_t + h(x, t, u, \nabla u) + a |u_t|^{m(x)-2} u_t + b |u|^{p(x)-2} u = f(t)w(x), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \quad (4.10)$$

$$u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \quad (4.11)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \quad (4.12)$$

burada bilinmeyen $f(t)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(t) = & \phi''(t) + \beta \phi'(t) + \mu \int_{\Omega} \nabla u \nabla w(x) dx + (\alpha + \mu) \int_{\Omega} (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} w(x)) dx \\ & + \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)-1} \nabla w(x) dx + \int_{\Omega} h(x, t, u, \nabla u) w(x) dx + a \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-2} u_t w(x) dx \\ & + b \int_{\Omega} |u|^{p(x)-2} u w(x) dx \end{aligned} \quad (4.13)$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.3. (Lokal Varlık) $u_0 \in W_0^{1,r(x)}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ olsun ve (4.5), (4.6) ve (4.7) sağlansın. Her $T > 0$ ve $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r'(x)} = 1$ olduğu durumda, (4.1)-(4.3) problemi aşağıdaki özellikleri sağlayan tekil bir zayıf çözüme sahiptir:

$$u \in L^{p(x)}((0,T),\Omega) \cap L^\infty((0,T),W_0^{1,r(x)}(\Omega)),$$

$$u_t \in L^{m(x)}((0,T),\Omega) \cap L^\infty((0,T),L^2(\Omega)),$$

$$u_{tt} \in L^\infty((0,T),W_0^{-1,r'(x)}(\Omega)).$$

İspat. Teoremin ispatı Junning'in çalışmasındakine benzer şekilde yapılabilir (Junning, 1993).

4.3. Enerji Azalımı

Bu bölümde denklemdaki tüm terimler dahil olmak üzere (4.10)-(4.12) probleminin çözümünün enerji azalımı incelenecektir.

Problem ile ilişkili olan enerji fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \mu \|\nabla u\|^2 + (\alpha + \mu) \int_{\Omega} |\operatorname{div} u|^2 dx \right) + \int_{\Omega} \frac{1}{r(x)} |\nabla u|^{r(x)} dx \\ & + b \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)} dx. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Üstel anlamda bir enerji azalması elde edebilmek için, aşağıda verilen eşitsizliklerin sağlandığı varsayalım:

$$a \geq \frac{m_2 - 1}{m_2 - \varepsilon(m_2 - 1)}, \quad \frac{r_1(2r_2 + 1)}{2r_2(r_1 - 1)}, \quad \frac{p_1(2p_2 + 1)}{b2p_2(p_1 - 1)} \geq \varepsilon \quad \text{ve} \quad \varepsilon < \frac{m_2}{m_2 - 1} \quad (4.15)$$

burada $\varepsilon \in (1, 2)$ dir.

Bu bölümün temel sonuç teoremi aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.3.1. (4.5), (4.7), (4.15) 'in sağlandığı ve μ ve β 'nın yeteri kadar büyük seçildiği varsayalım. Ayrıca, ϕ, ϕ', ϕ'' fonksiyonlarının $[0, \infty)$ üzerinde ϕ'' sınırlı fonksiyon olacak şekilde sürekli fonksiyonlar olduğu ve ϕ, ϕ' fonksiyonlarının $t \rightarrow \infty$ için sifıra gittiği kabul edilsin. O halde, (4.1)-(4.4) probleminin enerji fonksiyonu olan $E(t)$ çözüm boyunca sifıra yaklaşır.

Teoremin ispatı için ihtiyaç duyulan lemmalar aşağıda verilmiştir.

Lemma 4.3.2. Teorem 4.3.1 koşulları altında, (4.14) ile tanımlanan $E(t)$ enerji fonksiyoneli aşağıdaki eşitliği sağlar;

$$E'(t) = -\beta \|u_t\|^2 - a \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} h(x, t, u, \nabla u) u_t dx + f(t) \phi'(t). \quad (4.16)$$

İspat. (4.10) denkleminin tüm terimleri u_t ile çarpılıp bölge üzerinde integre edilirse,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{tt} u_t dx &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|u_t\|^2, \\ - \int_{\Omega} \Delta_e u u_t dx &= - \int_{\Omega} \mu \Delta u u_t dx - \int_{\Omega} (\alpha + \mu) \nabla(\operatorname{div} u) u_t dx \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{(\alpha + \mu)}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{div} u|^2 dx \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{(\alpha + \mu)}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{div} u|^2 dx \right), \\ - \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^{r(x)-2} \nabla u) u_t dx &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{r(x)} |\nabla u|^{r(x)} dx \right), \\ \int_{\Omega} \beta u_t u_t dx &= \beta \int_{\Omega} u_t^2 dx, \\ \int_{\Omega} h(x, t, u, \nabla u) u_t dx &= \int_{\Omega} h(x, t, u, \nabla u) u_t dx, \\ \int_{\Omega} a |u_t|^{m(x)-2} u_t u_t dx &= a \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx, \\ \int_{\Omega} b |u|^{p(x)-2} u u_t dx &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)} dx \right), \\ \int_{\Omega} f(t) w(x) u_t dx &= f(t) \int_{\Omega} w(x) u_t dx = f(t) \phi'(t), \end{aligned}$$

sırasıyla yukarıdaki ifadeler elde edilir. Elde edilen tüm ifadeler (4.10)'da yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{(\alpha + \mu)}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{div} u|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{r(x)} |\nabla u|^{r(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)} dx \right) \\ &+ \beta \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\Omega} h(x, t, u, \nabla u) u_t dx + a \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx = f(t) \phi'(t), \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan $E(t)$ fonksiyonunun (4.14)'de yazıldığı gibi olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Lemma 4.3.3. Teorem 4.3.1 koşulları altında, (4.13) ile tanımlanan $f(t)$ fonksiyonu bazı $\varepsilon > 0$ değerleri için aşağıdaki eşitsizliği sağlar;

$$\begin{aligned} & |\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)| f(t) \\ & \leq \frac{\beta\varepsilon^2 B_2^2}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{\varepsilon(\alpha + \mu)}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{div} u|^2 dx + \frac{m_2 - 1}{m_2} \int_{\Omega} |\mu_t|^{m(x)} dx \\ & + \left(\frac{2r_2 - 1}{2r_2} \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx + \left(\frac{2p_2 - 1}{2p_2} \right) \int_{\Omega} |\mu|^{p(x)} dx + H(t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

burada B_2 Poincaré eşitsizliğinde en iyi sabittir ve $H(t)$ fonksiyonu,

$$\begin{aligned} H(t) &= |\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)| (\phi''(t) + \beta\phi'(t)) + \frac{\mu^2 |\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)|^2}{2\beta\varepsilon^2 B_2^2} \|\nabla w(x)\|^2 \\ &+ \int_{\Omega} \frac{|\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)|^{r(x)}}{r(x)} |\nabla w(x)|^{r(x)} dx + \frac{(\alpha + \mu)}{2\varepsilon} |\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)|^2 \int_{\Omega} |\operatorname{div} w(x)|^2 dx \\ &+ \int_{\Omega} \frac{[a|\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)|]^{m(x)}}{m(x)} |w(x)|^{m(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{[b|\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)|]^{p(x)}}{p(x)} |w(x)|^{p(x)} dx \\ &+ \frac{|\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)|^2}{2} \left(\sqrt{p_2 M_1^3} + \sqrt{r_2 M_2^3} \right) \|w\|^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

şeklindedir.

İspat. (4.13)'ün her iki tarafı $|\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)|$ ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned} & |\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)| f(t) = |\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)| (\phi''(t) + \beta\phi'(t)) \\ & + \mu |\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)| \int_{\Omega} \nabla u \nabla w(x) dx + |\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)| \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)-1} \nabla w(x) dx \\ & + (\alpha + \mu) |\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)| \int_{\Omega} (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} w(x)) dx \\ & + a |\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)| \int_{\Omega} |\mu_t|^{m(x)-1} w(x) dx \\ & + b |\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)| \int_{\Omega} |\mu|^{p(x)-1} w(x) dx \\ & + |\phi'(t) + \varepsilon\phi(t)| \int_{\Omega} h(x, t, u, \nabla u) w(x) dx \end{aligned} \quad (4.19)$$

elde edilir. Cauchy-Schwarz ve Young's eşitsizliği ile birlikte (4.5) ve (4.6) kullanılarak, (4.19) un sağ tarafındaki ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci ve altıncı terimleri aşağıdaki gibi sınırlandırılabilir:

$$\begin{aligned}
& \mu |\phi'(t) + \varepsilon \phi(t)| \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla w(x) dx \right| \\
& \leq \frac{\beta \varepsilon^2 B_2^2}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{\mu^2 |\phi'(t) + \varepsilon \phi(t)|^2}{2\beta \varepsilon^2 B_2^2} \|\nabla w\|^2,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
& |\phi'(t) + \varepsilon \phi(t)| \left| \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)-1} \nabla w(x) dx \right| \\
& \leq \int_{\Omega} \frac{r(x)-1}{r(x)} |\nabla u|^{r(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{|\phi'(t) + \varepsilon \phi(t)|^{r(x)}}{r(x)} |\nabla w(x)|^{r(x)} dx \\
& \leq \frac{r_2-1}{r_2} \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{|\phi'(t) + \varepsilon \phi(t)|^{r(x)}}{r(x)} |\nabla w(x)|^{r(x)} dx,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha + \mu) |\phi'(t) + \varepsilon \phi(t)| \left| \int_{\Omega} (\operatorname{div} u)(\operatorname{div} w(x)) dx \right| \\
& \leq \frac{\varepsilon(\alpha + \mu)}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{div} u|^2 dx + \frac{(\alpha + \mu)}{2\varepsilon} |\phi'(t) + \varepsilon \phi(t)|^2 \int_{\Omega} |\operatorname{div} w(x)|^2 dx,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
& a |\phi'(t) + \varepsilon \phi(t)| \left| \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-1} w(x) dx \right| \\
& \leq \int_{\Omega} \frac{m(x)-1}{m(x)} |u_t|^{m(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{[a |\phi'(t) + \varepsilon \phi(t)|]^{m(x)}}{m(x)} |w(x)|^{m(x)} dx \\
& \leq \frac{m_2-1}{m_2} \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{[a |\phi'(t) + \varepsilon \phi(t)|]^{m(x)}}{m(x)} |w(x)|^{m(x)} dx,
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
& b |\phi'(t) + \varepsilon \phi(t)| \left| \int_{\Omega} |u|^{p(x)-1} w(x) dx \right| \\
& \leq \int_{\Omega} \frac{p(x)-1}{p(x)} |u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{[b |\phi'(t) + \varepsilon \phi(t)|]^{p(x)}}{p(x)} |w(x)|^{p(x)} dx \\
& \leq \frac{p_2-1}{p_2} \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{[b |\phi'(t) + \varepsilon \phi(t)|]^{p(x)}}{p(x)} |w(x)|^{p(x)} dx.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Elde edilen (4.20)-(4.24) kestirimleri (4.19) denkleminde yerlerine yazıldığında ispat tamamlanır.

Bazı $\varepsilon > 0$ değeri için, aşağıdaki eşitlik tanımlansın,

$$F(t) = E(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u u_t dx. \tag{4.25}$$

Aşağıdaki lemma $F'(t)$ için yaklaşık üst sınır hesaplamasıyla ilgilidir.

Lemma 4.3.4. Teorem 4.3.1 koşulları altında, çözüm boyunca $F(t)$ aşağıdaki eşitsizliği sağlar;

$$\begin{aligned}
F'(t) \leq & -\left(\frac{\beta}{2} - \varepsilon - \left(\frac{\sqrt{p_2 M_1^3} + \sqrt{r_2 M_2^3}}{2}\right)\right) \|u_t\|^2 - a \left[1 - \varepsilon \left(\frac{m_2 - 1}{m_2}\right)\right] \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx \\
& - \left(\varepsilon \mu - \frac{\varepsilon a \bar{C}}{m_1} - \frac{\beta \varepsilon^2 B_2^2}{2}\right) \|\nabla u\|^2 - \varepsilon(\alpha + \mu) \int_{\Omega} |\operatorname{div} u|^2 dx \\
& - \left(\varepsilon - \frac{1}{r_2}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx - \left(\varepsilon b - \frac{1}{p_2}\right) \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \\
& + \varepsilon^2 \left(\frac{\sqrt{p_2 M_1^3} + \sqrt{r_2 M_2^3}}{2}\right) \|u\|^2 + (\phi'(t) + \varepsilon \phi(t)) f(t).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

İspat. (4.25)'in t ye göre türevi aldığında aşağıdaki eşitlik yazılır;

$$\begin{aligned}
F'(t) = & -(\beta - \varepsilon) \|u_t\|^2 - a \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx - \mu \varepsilon \|\nabla u\|^2 - \varepsilon(\alpha + \mu) \int_{\Omega} |\operatorname{div} u|^2 dx \\
& - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx - \varepsilon \beta \int_{\Omega} u u_t dx - \varepsilon a \int_{\Omega} u |u_t|^{m(x)-1} dx - \varepsilon b \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \\
& - \int_{\Omega} h(x, t, u, \nabla u) u_t dx - \varepsilon \int_{\Omega} h(x, t, u, \nabla u) u dx + (\phi'(t) + \varepsilon \phi(t)) f(t)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

(4.8), (4.9), Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve (4.5) kullanılırsa aşağıdaki kestirimler elde edilir:

$$\varepsilon \beta \left| \int_{\Omega} u u_t dx \right| \leq \frac{\beta}{2} \|u_t\|^2 + \frac{\beta \varepsilon^2 B_2^2}{2} \|\nabla u\|^2, \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} u |u_t|^{m(x)-2} u_t dx \right| & \leq \int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |u|^{m(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{m(x)-1}{m(x)} |u_t|^{m(x)} dx \\
& \leq \frac{1}{m_1} \int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx + \frac{m_2-1}{m_2} \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Ayrıca, $H_0^1 \hookrightarrow L^{m(x)}(\Omega)$ gömülmesinin en iyi sabiti c_* olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx & \leq \max \left\{ \left(\int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx \right)^{\frac{m_1}{m(x)}}, \left(\int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx \right)^{\frac{m_2}{m(x)}} \right\} \\
& \leq \max \{ c_*^{m_1} \|\nabla u\|^{m_1}, c_*^{m_2} \|\nabla u\|^{m_2} \} \\
& \leq \max \{ c_*^{m_1} \|\nabla u\|^{m_1-2}, c_*^{m_2} \|\nabla u\|^{m_2-2} \} \|\nabla u\|^2 \leq \bar{C} \|\nabla u\|^2.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

(4.29) ile (4.30) birlikte yazılırsa,

$$\left| \int_{\Omega} u |u_t|^{m(x)-2} u_t dx \right| \leq \frac{\bar{C}}{m_1} \|\nabla u\|^2 + \frac{m_2-1}{m_2} \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx, \tag{4.31}$$

ve (4.27)'in sondan ikinci ve üçüncü terimine kestirimler uygulanırsa aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} h(x, t, u, \nabla u) u_t dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2p_2} \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx + \frac{1}{2r_2} \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx + \frac{\sqrt{p_2 M_1^3} + \sqrt{r_2 M_2^3}}{2} \|u_t\|^2, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} & \left| \varepsilon \int_{\Omega} h(x, t, u, \nabla u) u dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2p_2} \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx + \frac{1}{2r_2} \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx + \frac{\varepsilon^2 \left(\sqrt{p_2 M_1^3} + \sqrt{r_2 M_2^3} \right)}{2} \|u\|^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

(4.28), (4.31), (4.32), (4.33) kestirimlerinin hepsi (4.27)'de yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilerek ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.1'in İspatı. $F(t)$ nin tanımı ve Lemma 4.3.4 kullanılarak, herhangi $\delta > 0$ için,

$$\begin{aligned} F'(t) + \delta F(t) & \leq - \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2} - \varepsilon - \left(\frac{\sqrt{p_2 M_1^3} + \sqrt{r_2 M_2^3}}{2} \right) \right) \|u_t\|^2 \\ & - a \left(1 - \varepsilon \left(\frac{m_2 - 1}{m_2} \right) \right) \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx - \left(\varepsilon \mu - \frac{\delta \mu}{2} - \frac{\varepsilon a \bar{C}}{m_1} - \frac{\beta \varepsilon^2 B_2^2}{2} \right) \|\nabla u\|^2 \\ & - (\alpha + \mu) \left(\varepsilon - \frac{\delta}{2} \right) \int_{\Omega} |\operatorname{div} u|^2 dx - \left(\varepsilon - \frac{1}{r_2} - \frac{\delta}{r_1} \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx \\ & - \left(\varepsilon b - \frac{1}{p_2} - \frac{\delta b}{p_1} \right) \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx + \varepsilon^2 \left(\sqrt{p_2 M_1^3} + \sqrt{r_2 M_2^3} \right) \|u\|^2 \\ & + \delta \varepsilon \int_{\Omega} u u_t dx + |\phi'(t) + \varepsilon \phi(t)| f(t) \end{aligned} \quad (4.34)$$

elde edilir. Cauchy-Schwarz, Poincaré and Young's eşitsizlikleri (4.34)'ün sondan ikinci terimine uygulanırsa aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon \left| \int_{\Omega} u u_t dx \right| & \leq \frac{a \varepsilon \bar{C}}{m_1 B_2^2} \|u\|^2 + \frac{m_1 \delta^2 B_2^2}{4a \bar{C}} \|u_t\|^2 \\ & \leq \frac{a \varepsilon \bar{C}}{m_1} \|\nabla u\|^2 + \frac{m_1 \delta^2 B_2^2}{4a \bar{C}} \|u_t\|^2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

(4.35), (4.34)'de yerine yazılıp, ardından Poincaré eşitsizliği ve Lemma 4.3.3 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
F'(t) + \delta F(t) \leq & - \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\delta}{2} - \varepsilon - \frac{m_1 \delta^2 B_2^2}{4a\bar{C}} - \left(\frac{\sqrt{p_2 M_1^3} + \sqrt{r_2 M_2^3}}{2} \right) \right) \|u_t\|^2 \\
& - \left(a \left(1 - \varepsilon \left(\frac{m_2 - 1}{m_2} \right) \right) - \left(\frac{m_2 - 1}{m_2} \right) \right) \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx \\
& - \left(\varepsilon \mu - \frac{\delta \mu}{2} - \frac{2\varepsilon a \bar{C}}{m_1} - \beta \varepsilon^2 B_2^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} C_1 \left(\sqrt{p_2 M_1^3} + \sqrt{r_2 M_2^3} \right) \right) \|\nabla u\|^2 \\
& - \left(\frac{\alpha + \mu}{2} \right) (\varepsilon - \delta) \int_{\Omega} |\operatorname{div} u|^2 dx - \left(\varepsilon - \frac{1}{r_2} - \frac{\delta}{r_1} - \frac{2r_2 - 1}{2r_2} \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx \\
& - \left(\varepsilon b - \frac{1}{p_2} - \frac{\delta b}{p_1} - \frac{2p_2 - 1}{2p_2} \right) \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx + H(t),
\end{aligned} \tag{4.36}$$

yazılır. (4.36) eşitsizliğinde, $\delta := \varepsilon$ ve μ, β ise bulundukları parantezi sıfırdan büyük yapacak şekilde seçilerek, (4.15) ile verilen koşullar altında,

$$F'(t) + \varepsilon F(t) \leq H(t) \tag{4.37}$$

elde edilir. (t_0, t) aralığında (4.37) çözülürse,

$$F(t) \leq e^{-\varepsilon(t-t_0)} \left(F(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\varepsilon(s-t_0)} H(s) ds \right) \tag{4.38}$$

yazılır. $\phi(t)$ üzerine getirilen şartla $t \rightarrow \infty$ için $H(t) \rightarrow 0$ olacağından, (4.38) eşitsizliği $\phi(t)$ açısından $F(t)$ fonksiyonelinin sıfıra gittiğini gösterir. Böylece bazı pozitif C_0 için sonuç, $C_0 E(t) \leq F(t)$ eşitsizliğinden gelir ve Teorem 4.3.1 in ispatı tamamlanır.



5. DOĞRUSAL OLMAYAN DEĞİŞKEN ÜSLERE SAHİP BİR YARI LİNEER DALGA DENKLEMİ TİPİNDEKİ TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN PATLAMA ANALİZİ

Bu çalışmada, hiperbolik tipten bir ters problemin çözümlerinin sonlu zamandaki davranışı incelenecek olup, literatürde incelenmemiş olan farklı metot kullanılacaktır. Sonuca ulaşıldığında, ters problemler Georgiev ve Todorova metodu ile incelenebilir hale gelecektir (Georgiev ve Todorova, 1994).

5.1. Giriş

Ω , düzgün bir sınır $\partial\Omega$ ile $\mathbb{R}^n$ 'de sınırlı bir bölge olsun. Aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemi incelensin:

$$u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{r(x)-2} \nabla u) + a|u_t|^{m(x)-2} u_t - b|u|^{p(x)-2} u = f(t)w(x), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \quad (5.1)$$

$$u(x, t) = 0, \quad \partial\Omega \times (0, T) \quad (5.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \Omega \quad (5.3)$$

$$\int_{\Omega} u(x, t)w(x)dx = \phi(t), \quad t > 0, \quad (5.4)$$

burada $a, b > 0$ sabitler ve $m(x), p(x)$ ve $r(x)$ üsleri Ω üzerinde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan ölçülebilir fonksiyonlardır,

$$2 \leq r_2 < m_1 \leq m(x) \leq m_2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 \leq r_*(x). \quad (5.5)$$

Bahsedilen değişken üsler için alt ve üst sınır tanımlamaları aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\begin{aligned} p_1 &:= \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x), & p_2 &:= \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x), \\ r_1 &:= \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} r(x), & r_2 &:= \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} r(x), \\ m_1 &:= \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} m(x), & m_2 &:= \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} m(x), \end{aligned}$$

ve

$$r_*(x) = \begin{cases} \frac{Nr(x)}{\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} (N - m(x))}, & r_2 < N \\ +\infty & , \quad r_2 \geq N \end{cases}.$$

Ayrıca $m(x)$, $p(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonlarının log-Hölder süreklilik koşulunu sağladığı varsayalım,

$$|q(x) - q(y)| \leq -\frac{A}{\log|x-y|}, \quad x, y \in \Omega \quad \text{için,} \quad |x-y| < \tau \quad \text{iken} \quad (5.6)$$

burada $A > 0$, $0 < \tau < 1$ dir. $\Delta_{r(x)} u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{r(x)-2} \nabla u)$ terimi $r(x)$ -Laplacian olarak adlandırılmaktadır.

5.2. Tanım ve Ön Bilgiler

Şimdi bazı notasyon ve fonksiyon tanımlamaları yapılacak olursa, $\|\cdot\|_q$, Ω bölgesi üzerinde L^q - normunu göstermektedir, daha özel olarak Ω bölgesi üzerinde L^2 - normu $\|\cdot\|$ ile gösterilmektedir.

$$\begin{aligned} u_0 &\in H_0^2(\Omega) \cap L^{r(x)}(\Omega) \cap L^{p(x)}(\Omega), \\ u_1 &\in L^2(\Omega) \cap L^{m(x)}(\Omega), \end{aligned}$$

olmak üzere $w(x)$ fonksiyonu aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_0(x) w(x) dx &= \phi(0), \\ w &\in H_0^2(\Omega) \cap L^{r(x)}(\Omega) \cap L^{m(x)}(\Omega) \cap L^{p(x)}(\Omega), \quad \int_{\Omega} w^2(x) dx = 1. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Amaçlanan sonuca ulaşmak için değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayları hakkında gerekli bazı bilgileri vermek gerekir (Diening ve ark., 2011, Edmunds ve Rakosnik, 2000, 2002, Fan ve Zhao, 2001, Fan ve Zhang, 2003). Ω , $\mathbb{R}^n$ de bir bölge olmak üzere, $p: \Omega \rightarrow [1, \infty]$ olacak şekilde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. O halde, $p(x)$ değişken üslü bir Lebesgue uzayı,

$$L^{p(x)}(\Omega) := \{v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \text{ölçülebilir } \Omega: \varphi_{p(x)}(\lambda v) < +\infty, \text{ bazı } \lambda > 0 \text{ için}\},$$

şeklindedir. Burada $\varphi_{p(x)}(v)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$\varphi_{p(x)}(v) = \int_{\Omega} |v(x)|^{p(x)} dx.$$

$$\|v\|_{p(\cdot)} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left| \frac{v(x)}{\lambda} \right| dx \leq 1 \right\},$$

Luxembourg tipi norm ile tanımlanan $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının bir Banach uzayı olduğu bilinmektedir.

Değişken üslü Sobolev uzayı $W^{1,p(x)}(\Omega)$ aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır,

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ v \in L^{p(x)}(\Omega) \mid \nabla v \text{ yazılabilir ve } \nabla v = L^{p(x)}(\Omega) \text{ dir.} \right\}$$

Yukarıda yazılan eşitlik, $\|v\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|v\|_{p(x)} + \|\nabla v\|_{p(x)}$ normuna göre bir Banach uzayıdır. İlave olarak, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ 'ın kapanışı olarak verilsin. Değişken üsler söz konusu olduğunda $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayı farklı bir tanıma sahiptir. Ancak (5.6) koşulu altında her iki tanım da eşdeğerdir (Diening ve ark., 2011). $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$ uzayı $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayının ikili uzayıdır ve klasik Sobolev uzaylarıyla aynı şekilde tanımlanır, burada $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ dir (Messaoudi ve Talahmeh, 2017).

Lemma 5.2.1. (Diening ve ark., 2011) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olsun ve $p(x)$ 'in (5.6) eşitsizliğini sağladığı varsayılın, öyleyse,

$$\|v\|_{p(x)} \leq C \|\nabla v\|_{p(x)}, \quad \forall v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \text{ için},$$

sağlanır. Burada $C > 0$, yalnızca p_1, p_2 ve Ω ya bağlı bir sabittir. Özellikle $\|\nabla v\|_{p(x)}$, $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ normuna eşdeğer bir norm tanımlar.

Lemma 5.2.2. (Diening ve ark., 2011) Eğer $r(x) \in C(\bar{\Omega})$ ve $q(x) : \Omega \rightarrow [1, \infty)$,

$$es \sin f_{x \in \Omega} (r^*(x) - q(x)) > 0 \text{ ile } r^*(x) = \begin{cases} \frac{nr(x)}{\text{ess sup}_{x \in \Omega} (n - r(x))}, & r_2 < n \\ \infty, & r_2 \geq n \end{cases},$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde ölçülebilir fonksiyonlar ise, $W_0^{1,r(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ gömülmesi sürekli ve kompaktır.

Lemma 5.2.3. (Diening ve ark., 2011) Ω üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar olan $p(x), q(x), s(x) \geq 1$,

$$\frac{1}{s(x)} = \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)}, \quad x \in \Omega,$$

eşitliğini sağlasın.

Eğer, $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ ve

$$\|uv\|_{s(x)} \leq 2\|u\|_{p(x)}\|v\|_{q(x)}$$

ise, $uv \in L^{s(x)}(\Omega)$ 'dir.

Lemma 5.2.4. (Diening ve ark., 2011) $p(x)$, Ω üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olun. Aşağıdaki iki ifade birbirine eşittir,

$$\|f\|_{p(x)} \leq 1 \text{ ve } \varphi_{p(x)}(f) \leq 1.$$

Lemma 5.2.5. (Diening ve ark., 2011) Eğer $p(x)$, (5.5) i sağlayan Ω üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ise, $\forall u \in L^{p(x)}(\Omega)$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$\min \left\{ \|u\|_{p(x)}^{p_1}, \|u\|_{p(x)}^{p_2} \right\} \leq \varphi_{p(x)}(u) \leq \max \left\{ \|u\|_{p(x)}^{p_1}, \|u\|_{p(x)}^{p_2} \right\}.$$

$\phi(t) \equiv 1$ alınarak, (5.1) denklemi $w(x)$ ile çarpılıp, (5.7) koşulları altında bölge üzerinde integre edildiğinde, bu çalışmanın temel gözlemi, (5.1)–(5.4) numaralı probleminin aşağıdaki doğrudan problem ile eşdeğer olduğu görülmektedir;

$$u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{r(x)-2} \nabla u) + a|u_t|^{m(x)-2} u_t - b|u|^{p(x)-2} u = f(t)w(x), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \quad (5.8)$$

$$u(x, t) = 0, \quad \partial\Omega \times (0, T) \quad (5.9)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \Omega \quad (5.10)$$

burada bilinmeyen $f(t)$ fonksiyonu

$$f(t) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)-1} \nabla w(x) dx + a \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-1} w(x) dx - b \int_{\Omega} |u|^{p(x)-1} w(x) dx \quad (5.11)$$

şeklindedir.

Teorem 5.2.6. (Lokal Varlık) $u_0 \in W_0^{1,r(x)}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ olsun ve (5.5), (5.6) ve (5.7) sağlansın. Her $T > 0$ ve $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r'(x)} = 1$ olduğu durumda, (5.1)-(5.3) problemi aşağıdaki özellikleri sağlayan tekil bir zayıf çözüme sahiptir:

$$u \in L^{p(x)}((0,T),\Omega) \cap L^\infty((0,T),W_0^{1,r(x)}(\Omega)),$$

$$u_t \in L^{m(x)}((0,T),\Omega) \cap L^\infty((0,T),L^2(\Omega)),$$

$$u_{tt} \in L^\infty((0,T),W_0^{-1,r'(x)}(\Omega)).$$

İspat. Teoremin ispatı Antontsev'in çalışmasındakine benzer yapılabilir (Antontsev, 2011).

5.3. Negatif Başlangıç Enerjisi ile Çözümlerin Patlaması

Bu bölümde çözümlerin patlama sonucu ve onun ispatı verilmektedir. Çözümün enerji fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{r(x)} |\nabla u|^{r(x)} dx - b \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)} dx. \quad (5.12)$$

Teorem 5.3.1. Teorem 5.2.6 'nın sağlandığı ve

$$E(0) < 0 \quad (5.13)$$

olduğu kabul edilsin. Öyleyse (5.1)-(5.3) probleminin çözümü sonlu zamanda patlar.

Teoremin ispatı için ihtiyaç duyulan lemmalar aşağıda verilmektedir.

Lemma 5.3.2. Lemma 5.2.2' nin koşullarının geçerli olduğu varsayımı altında, yalnızca Ω ya bağlı olan $C > 1$ vardır, öyle ki

$$\varphi_{p(x)}^{\frac{s}{p_1}}(u) \leq C \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right), \quad (5.14)$$

eşitsizliği her $u \in W_0^{1,r(x)}(\Omega)$ ve $r_1 \leq s \leq p_1$ için geçerlidir.

İspat. Eğer $\varphi_{p(x)}(u) > 1$ ise, $\varphi_{p(x)}^{\frac{s}{p_1}}(u) \leq \varphi_{p(x)}(u) \leq C \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right)$ eşitsizliğinin sağlandığı açıkça görülür.

Eğer $\varphi_{p(x)}(u) \leq 1$ ise, Lemma 5.2.4 koşulu aracılığıyla $\|u\|_{p(x)} \leq 1$ yazılır. Sonrasında Lemma 5.2.2 ve Lemma 5.2.5, $C > 1$ olduğu durumlar için uygulanırsa,

$$\varphi_{p(x)}^{\frac{s}{p_1}}(u) \leq \varphi_{p(x)}^{\frac{r_1}{p_1}}(u) \leq \left[\max \left\{ \|u\|_{p(x)}^{p_1}, \|u\|_{p(x)}^{p_2} \right\} \right]^{\frac{r_1}{p_1}} = \|u\|_{p(x)}^{r_1} \leq C \|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1}$$

elde edilir. Böylece Lemma 5.3.2 nin ispatı tamamlanır.

Özel bir durum olarak, aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 5.3.3. Lemma 5.3.2 varsayımları altında, her $u \in W_0^{1,r(x)}(\Omega)$ ve $r_1 \leq s \leq p_1$ için,

$$\|u\|_{p_1}^s \leq C \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \|u\|_{p_1}^{p_1} \right), \quad (5.15)$$

eşitsizliği yazılır.

Şimdi,

$$H(t) := -E(t) = b \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{1}{r(x)} |\nabla u|^{r(x)} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \quad (5.16)$$

olsun ve C , yalnızca Ω ya bağlı olan genel pozitif bir sabit olarak belirtilsin. (5.12) ve (5.14) bir arada kullanılırsa aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 5.3.4. Lemma 5.3.2 varsayımları altında, her $u \in W_0^{1,r(x)}(\Omega)$ ve $r_1 \leq s \leq p_1$ için, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$\varphi_{p(x)}^{\frac{s}{p_1}}(u) \leq C \left(|H(t)| + \|u_t\|_2^2 + \varphi_{p(x)}(u) \right). \quad (5.17)$$

Özel bir durum olarak, aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 5.3.5. Lemma 5.3.2 varsayımları altında, her $u \in W_0^{1,r(x)}(\Omega)$ ve $r_1 \leq s \leq p_1$ için, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$\|u\|_{p_1}^s \leq C \left(|H(t)| + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_{p_1}^{p_1} \right). \quad (5.18)$$

Lemma 5.3.6. (5.5) ve (5.6) 'nın sağlandığı ve $E(0) < 0$ olduğu kabul edilirse, (5.1)-(5.3) probleminin çözümü, bazı $c > 0$ sabitleri için aşağıdaki eşitsizliği sağlar,

$$\varphi_{p(x)}(u) \geq c \|u\|_{p_1}^{p_1}. \quad (5.19)$$

İspat. $\Omega_+ = \{x \in \Omega / |u(x,t)| \geq 1\}$ ve $\Omega_- = \{x \in \Omega / |u(x,t)| < 1\}$ bölgeleri üzerinde,

$$\varphi_{p(x)}(u) = \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx = \int_{\Omega_+} |u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega_-} |u|^{p(x)} dx$$

eşitliği sağlanır. Burdan yola çıkarak,

$$\varphi_{p(x)}(u) \geq \int_{\Omega_+} |u|^{p_1} + \int_{\Omega_-} |u|^{p_2} \geq \int_{\Omega_+} |u|^{p_1} + c_1 \left(\int_{\Omega_-} |u|^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}}$$

ifadesi yazılır. Bu eşitsizlik, aşağıdaki iki durumun yazılmasını sağlar,

$$\begin{aligned} c_2 \left(\varphi_{p(x)}(u) \right)^{\frac{p_1}{p_2}} &\geq \int_{\Omega_-} |u|^{p_1} \text{ ve } \varphi_{p(x)}(u) \geq \int_{\Omega_+} |u|^{p_1}, \\ c_2 \left(\varphi_{p(x)}(u) \right)^{\frac{p_1}{p_2}} + \varphi_{p(x)}(u) &\geq \|u\|_{p_1}^{p_1}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

(5.20) ve

$$0 < H(0) < H(t) \leq \frac{b}{p_1} \varphi_{p(x)}(u),$$

sayesinde

$$\varphi_{p(x)}(u) \left[1 + c_2 \left(\frac{p_1}{b} H(0) \right)^{\frac{p_1}{p_2} - 1} \right] \geq \|u\|_{p_1}^{p_1}$$

elde edilir.

Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Lemma 5.3.7. (5.5) 'in sağlandığı varsayılсын ve u , (5.1)-(5.3) denkleminin çözümü olsun. Öyleyse aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$\int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx \leq C \left(\left(\varphi_{p(x)}(u) \right)^{\frac{m_1}{p_1}} + \left(\varphi_{p(x)}(u) \right)^{\frac{m_2}{p_1}} \right). \quad (5.21)$$

İspat.

$$\int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx \leq \int_{\Omega_-} |u|^{m_1} dx + \int_{\Omega_+} |u|^{m_2} dx \leq C \left[\left(\int_{\Omega_-} |u|^{p_1} dx \right)^{\frac{m_1}{p_1}} + \left(\int_{\Omega_+} |u|^{p_1} dx \right)^{\frac{m_2}{p_1}} \right]$$

$$\leq C \left(\|u\|_{p_1}^{m_1} + \|u\|_{p_1}^{m_2} \right) \leq C \left(\left(\varphi_{p(x)}(u) \right)^{\frac{m_1}{p_1}} + \left(\varphi_{p(x)}(u) \right)^{\frac{m_2}{p_1}} \right),$$

burada son satıra Lemma 5.3.2 şartı doğrultusunda geçilip, ispat tamamlanır.

Lemma 5.3.8. u , (5.1)-(5.3) denkleminin çözümü olsun, aşağıdaki eşitsizlik sağlanacak şekilde $c_1 > 0$ sabiti vardır,

$$\|\nabla u(x, t)\|_{r(x)} \geq c_1, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.22)$$

İspat. Varsayalım ki, çelişkiyle,

$$\|\nabla u(x, t)\|_{r(x)} \rightarrow 0 \quad \text{iken} \quad k \rightarrow \infty,$$

olacak şekilde bir t_k dizisi vardır. Öyleyse, Lemma 5.2.2 ve 5.2.5 sayesinde,

$$\varphi_{p(x)}(u(x, t_k)) \rightarrow 0 \quad \text{iken} \quad k \rightarrow \infty,$$

yazılır. . Bu durum, $E(t) < 0$, $\forall t \geq 0$ gerçeğiyle çelişen, aşağıdaki eşitsizliği verir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(t_k) \geq 0.$$

Teorem 5.3.1 in İspatı. (5.8) denkleminin tüm terimleri u_t ile çarpılıp Ω bölgesi üzerinde integre edilirse,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t u_t dx &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right), \\ - \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^{r(x)-2} \nabla u) u_t dx &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{r(x)} |\nabla u|^{r(x)} dx \right), \\ \int_{\Omega} a |u_t|^{m(x)-2} u_t u_t dx &= a \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx, \\ - \int_{\Omega} b |u|^{p(x)-2} u u_t dx &= - \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)} dx \right), \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} u(x, t) w(x) dx = 1 \quad \text{olduğundan} \quad \int_{\Omega} f(t) w(x) u_t dx = f(t) \int_{\Omega} w(x) u_t dx = 0,$$

eşitlikleri bulunur. Elde edilen tüm terimler (5.8)'de yerine yazıldığında,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{1}{r(x)} |\nabla u|^{r(x)} dx - b \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)} dx \right) = -a \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)} dx,$$

ifadesi elde edilir. Burada türev operatörü içindeki ifadenin (5.12) ile verilen enerji fonksiyonuna ait olduğu görülmektedir.

Öyleyse, $E(t)$ mutlak sürekli bir fonksiyon olduğu için (Messaoudi ve Talahmeh, 2017), $t \in [0, T)$ ise,

$$E'(t) = -a \int_{\Omega} |u_t(x, t)|^{m(x)} dx \leq 0, \quad (5.23)$$

yazılır. Buradan, $H'(t) \geq 0$ ve tüm $t \in [0, T)$ için, (5.13) eşitsizliği aracılığıyla,

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{b}{p_1} \varphi_{p(x)}(u), \quad (5.24)$$

elde edilir.

Şimdi,

$$L(t) := H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u u_t(x, t) dx, \quad (5.25)$$

fonksiyonu tanımlansın. Burada ε daha sonra tanımlanacak yeterince küçük bir sayıdır ve α ,

$$0 < \alpha \leq \min \left\{ \frac{p_1 - 2}{2p_1}, \frac{p_1 - m_2}{p_1(m_2 - 1)}, \frac{1}{m_2 - 1}, \frac{1}{r_2 - 1}, \frac{1}{p_2 - 1} \right\}, \quad (5.26)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (5.25)'in her iki tarafının türevi alınıp, (5.8)-(5.11) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} L'(t) &= (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u_t^2 dx + \varepsilon b \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx \\ &\quad - \varepsilon a \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-1} u dx + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)-1} \nabla w(x) dx \\ &\quad + \varepsilon a \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-1} w(x) dx - \varepsilon b \int_{\Omega} |u|^{p(x)-1} w(x) dx \end{aligned} \quad (5.27)$$

elde edilir. $0 < \eta < 1$ olmak üzere, (5.16) eşitliğinden faydalanarak,

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{b}{p_1} \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx &\geq \varepsilon b \int_{\Omega} \frac{|u|^{p(x)}}{p(x)} dx \\
&= \varepsilon(1-\eta)H(t) + \frac{\varepsilon(1-\eta)}{2} \|u_t\|_2^2 + \varepsilon(1-\eta) \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{r(x)}}{r(x)} dx + \varepsilon b \eta \int_{\Omega} \frac{|u|^{p(x)}}{p(x)} dx \\
&\geq \varepsilon(1-\eta)H(t) + \frac{\varepsilon(1-\eta)}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{\varepsilon(1-\eta)}{r_2} \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx + \frac{\varepsilon b \eta}{p_2} \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx
\end{aligned} \tag{5.28}$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\varepsilon b \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx &\geq \varepsilon(1-\eta)p_1 H(t) + \frac{\varepsilon(1-\eta)}{2} p_1 \|u_t\|_2^2 \\
&\quad + \frac{\varepsilon(1-\eta)}{r_2} p_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx + \frac{\varepsilon b \eta}{p_2} p_1 \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx
\end{aligned} \tag{5.29}$$

elde edilir. Şimdi, (5.27) eşitliğinin sağ tarafındaki son dört terime $\forall \delta > 0$ için sırasıyla Young's eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-1} |u| dx \leq \frac{1}{m_1} \int_{\Omega} \delta^{m(x)} |u|^{m(x)} dx + \frac{m_2-1}{m_2} \int_{\Omega} \delta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} |u_t|^{m(x)} dx, \tag{5.30}$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)-1} |\nabla w(x)| dx \leq \frac{1}{r_1} \int_{\Omega} \delta^{r(x)} |\nabla w(x)|^{r(x)} dx + \frac{r_2-1}{r_2} \int_{\Omega} \delta^{-\frac{r(x)}{r(x)-1}} |\nabla u|^{r(x)} dx, \tag{5.31}$$

$$\int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-1} |w(x)| dx \leq \frac{1}{m_1} \int_{\Omega} \delta^{m(x)} |w(x)|^{m(x)} dx + \frac{m_2-1}{m_2} \int_{\Omega} \delta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} |u_t|^{m(x)} dx, \tag{5.32}$$

$$\int_{\Omega} |u|^{p(x)-1} |w(x)| dx \leq \frac{1}{p_1} \int_{\Omega} \delta^{p(x)} |w(x)|^{p(x)} dx + \frac{p_2-1}{p_2} \int_{\Omega} \delta^{-\frac{p(x)}{p(x)-1}} |u|^{p(x)} dx, \tag{5.33}$$

kestirimleri elde edilir.

k daha sonra belirlenecek olan yeterince büyük bir sabit olmak üzere δ ,

$$\delta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} = kH^{-\alpha}(t),$$

şeklinde seçilip, (5.30)'da yerine yazılırsa,

$$\int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-1} |u| dx \leq \frac{1}{m_1} \int_{\Omega} k^{1-m(x)} |u|^{m(x)} H^{\alpha(m(x)-1)}(t) dx + \frac{(m_2-1)k}{am_2} H^{-\alpha}(t) H'(t), \tag{5.34}$$

elde edilir. (5.24) eşitsizliği ve Lemma 5.3.7 kullanılarak,

$$H^{\alpha(m_2-1)}(t) \int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx \leq C \left[\left(\varphi_{p(x)}(u) \right)^{\frac{m_1 + \alpha(m_2-1)}{p_1}} + \left(\varphi_{p(x)}(u) \right)^{\frac{m_2 + \alpha(m_2-1)}{p_1}} \right], \quad (5.35)$$

yazılır.

$$s = m_2 + \alpha p_1(m_2 - 1) \leq p_1 \quad \text{ve} \quad s = m_1 + \alpha p_1(m_2 - 1) \leq p_1,$$

seçilsin, (5.26) ve Lemma 5.3.2 kullanılarak, (5.35) aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$H^{\alpha(m_2-1)}(t) \int_{\Omega} |u|^{m(x)} dx \leq C \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right). \quad (5.36)$$

Lemma 5.2.5 ve (5.20)'den yola çıkarak,

$$\varphi_{r(x)}(\nabla u) \geq c_2 \|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1}, \quad (5.37)$$

elde edilir. (5.36), (5.34)'de yerine yazıldığında, (5.30) aşağıdaki gibi yazılır,

$$\int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-1} |u| dx \leq \frac{k^{1-m_1}}{m_1} C \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right) + \frac{(m_2-1)k}{am_2} H^{-\alpha}(t) H'(t). \quad (5.38)$$

Benzer şekilde (5.32) eşitsizliği için aynı δ değeri ile kestirim elde edilecek olursa,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-1} |w(x)| dx &\leq \frac{1}{m_1} \int_{\Omega} k^{1-m(x)} |w(x)|^{m(x)} H^{\alpha(m(x)-1)}(t) dx \\ &+ \frac{(m_2-1)k}{am_2} H^{-\alpha}(t) H'(t), \end{aligned} \quad (5.39)$$

yazılır. (5.24) eşitsizliği kullanılarak,

$$H^{\alpha(m_2-1)}(t) \leq \left(\frac{b}{p_1} \right)^{\alpha(m_2-1)} \left(\varphi_{p(x)}(u) \right)^{\alpha(m_2-1)}, \quad (5.40)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$h = p_1 \alpha(m_2 - 1) \leq p_1,$$

seçilip $r_1 < h$ olduğu durumda, (5.26) eşitsizliği ve Lemma 5.3.2 kullanılarak, (5.40) aşağıdaki gibi yazılır,

$$H^{\alpha(m_2-1)}(t) \leq C_1 \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right). \quad (5.41)$$

Ayrıca,

$$\int_{\Omega} |w(x)|^{m(x)} dx = C_2,$$

olmak üzere, burada C_2 pozitif bir sabittir. Buradan yola çıkarak (5.32),

$$\int_{\Omega} |u_t|^{m(x)-1} w(x) dx \leq \frac{k^{1-m_1}}{m_1} C_3 \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right) + \frac{(m_2-1)k}{am_2} H^{-\alpha}(t) H'(t), \quad (5.42)$$

şeklinde yazılır. Burada $C_3 = C_1 C_2$ 'dir.

Şimdi (5.31) eşitsizliği ele alınsın, $n < k$ ve daha sonra belirlenecek olan yeterince büyük bir sabit olmak üzere, δ aşağıdaki eşitliği sağlayacak şekilde seçilirse,

$$\delta^{-\frac{r(x)}{r(x)-1}} = n H^{-\alpha}(t),$$

(5.31) aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)-1} |\nabla w(x)| dx &\leq \frac{1}{r_1} \int_{\Omega} n^{1-r(x)} |\nabla w(x)|^{r(x)} H^{\alpha(r(x)-1)}(t) dx \\ &+ \frac{(r_2-1)n}{r_2} H^{-\alpha}(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx. \end{aligned} \quad (5.43)$$

(5.24) eşitsizliği kullanılarak,

$$H^{\alpha(r_2-1)}(t) \leq \left(\frac{b}{p_1} \right)^{\alpha(r_2-1)} \left(\varphi_{p(x)}(u) \right)^{\alpha(r_2-1)}, \quad (5.44)$$

yazılır ve

$$v = \alpha p_1 (r_2 - 1) \leq p_1,$$

seçilerek, $r_1 < v$ olduğu durumda (5.26) eşitsizliği ve Lemma 5.3.2 kullanılarak, (5.44)

aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$H^{\alpha(r_2-1)}(t) \leq C_4 \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right). \quad (5.45)$$

Ayrıca,

$$\int_{\Omega} |\nabla w(x)|^{r(x)} dx = C_5,$$

olmak üzere, C_5 pozitif bir sabittir. Buradan yola çıkarak (5.43)'ün son hali,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)-1} |\nabla w(x)| dx \leq \frac{n^{1-r_1}}{r_1} C_6 \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right) + \frac{(r_2-1)n}{r_2} H^{-\alpha}(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx, \quad (5.46)$$

şeklindedir. Burada $C_6 = C_4 C_5$ 'dir.

Şimdi (5.33) eşitsizliği ele alınsın, $k < l$ ve daha sonra belirlenecek olan yeterince büyük bir sabit olmak üzere, δ aşağıdaki eşitliği sağlayacak şekilde seçilirse,

$$\delta^{\frac{-p(x)}{p(x)-1}} = l H^{-\alpha}(t),$$

(5.33) aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{p(x)-1} |w(x)| dx &\leq \frac{1}{p_1} \int_{\Omega} l^{1-p(x)} |w(x)|^{p(x)} H^{\alpha(p(x)-1)}(t) dx \\ &+ \frac{(p_2-1)l}{p_2} H^{-\alpha}(t) \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx. \end{aligned} \quad (5.47)$$

(5.24) eşitsizliği kullanılarak,

$$H^{\alpha(p_2-1)}(t) \leq \left(\frac{b}{p_1} \right)^{\alpha(p_2-1)} \left(\varphi_{p(x)}(u) \right)^{\alpha(p_2-1)} \quad (5.48)$$

yazılır ve

$$z = p_1 \alpha(p_2 - 1) \leq p_1,$$

eşitliği $r_1 < z$ olacak şekilde seçilirse, (5.26) eşitsizliği ve Lemma 5.3.2 kullanılarak, (5.48) aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$H^{\alpha(p_2-1)}(t) \leq C_7 \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right). \quad (5.49)$$

Ayrıca,

$$\int_{\Omega} |w(x)|^{p(x)} dx = C_8,$$

olmak üzere, C_8 pozitif bir sabittir. Buradan yola çıkarak (5.47)'nin son hali,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{p(x)-1} |w(x)| dx &\leq \frac{l^{1-p_1}}{p_1} C_9 \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right) \\ &+ \frac{(p_2-1)l}{p_2} H^{-\alpha}(t) \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx, \end{aligned} \quad (5.50)$$

şeklindedir. Burada $C_9 = C_7 C_8$ dir.

Elde edilen (5.29), (5.38), (5.42), (5.46) ve (5.50) eşitsizlikleri, (5.27)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
L'(t) &\geq (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u_t^2 dx + \varepsilon(1-\eta)p_1 H(t) + \frac{\varepsilon(1-\eta)}{2} p_1 \|u_t\|_2^2 \\
&+ \frac{\varepsilon(1-\eta)}{r_2} p_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx + \frac{\varepsilon b \eta}{p_2} p_1 \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx \\
&- \frac{k^{1-m_1} \varepsilon a}{m_1} C \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right) - \frac{\varepsilon(m_2-1)k}{m_2} H^{-\alpha}(t)H'(t) \\
&- \frac{n^{1-r_1} \varepsilon}{r_1} C_6 \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right) - \frac{\varepsilon(r_2-1)n}{r_2} H^{-\alpha}(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx \\
&- \frac{k^{1-m_1} \varepsilon a}{m_1} C_3 \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right) - \frac{\varepsilon(m_2-1)k}{m_2} H^{-\alpha}(t)H'(t) \\
&- \frac{l^{1-p_1} \varepsilon b}{p_1} C_9 \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right) - \frac{(p_2-1)l\varepsilon b}{p_2} H^{-\alpha}(t) \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx
\end{aligned} \tag{5.51}$$

elde edilir. Düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned}
L'(t) &\geq \left[(1-\alpha) - \frac{2\varepsilon(m_2-1)k}{m_2} \right] H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon(1-\eta)p_1 H(t) \\
&+ \varepsilon \left[1 + \frac{(1-\eta)p_1}{2} \right] \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
&+ \varepsilon \left[\frac{(1-\eta)p_1}{r_2} - \frac{(r_2-1)\delta^{\frac{r_2}{r_2-1}}}{r_2} - 1 \right] \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx \\
&+ \varepsilon \left[\frac{b\eta p_1}{p_2} - \frac{(p_2-1)b\delta^{\frac{p_2}{p_2-1}}}{p_2} \right] \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \\
&- \varepsilon \left[\frac{k^{1-m_1} a}{m_1} C + \frac{k^{1-m_1} a}{m_1} C_3 + \frac{n^{1-r_1}}{r_1} C_6 + \frac{l^{1-p_1} b}{p_1} C_9 \right] \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right)
\end{aligned} \tag{5.52}$$

yazılır. η yeterince küçük seçildiğinde,

$$\beta = \min \left\{ (1-\eta)p_1, \frac{b\eta p_1}{p_2} - \frac{(p_2-1)b\delta^{\frac{p_2}{p_2-1}}}{p_2}, \frac{(1-\eta)p_1}{r_2} - \frac{(r_2-1)\delta^{\frac{r_2}{r_2-1}}}{r_2} - 1, 1 + \frac{(1-\eta)p_1}{2} \right\} > 0,$$

olmak üzere, (5.52) aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$\begin{aligned}
L'(t) \geq & \left[(1-\alpha) - \frac{2\varepsilon(m_2-1)k}{m_2} \right] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\
& + \varepsilon \beta \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^{r(x)} dx + \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \right] \\
& - \varepsilon \left[\frac{k^{1-m_1}a}{m_1} C + \frac{k^{1-m_1}a}{m_1} C_3 + \frac{n^{1-r_1}}{r_1} C_6 + \frac{l^{1-p_1}b}{p_1} C_9 \right] \left(\|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right).
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Yazılan bu eşitlikten yola çıkılarak,

$$\sigma = \left[\frac{k^{1-m_1}a}{m_1} + \frac{k^{1-m_1}a}{m_1} C_3 + \frac{n^{1-r_1}}{r_1} C_6 + \frac{l^{1-p_1}b}{p_1} C_9 \right] > 0,$$

olarak seçilirse,

$$\begin{aligned}
L'(t) \geq & \left[(1-\alpha) - \frac{2\varepsilon(m_2-1)k}{m_2} \right] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\
& + \varepsilon(\beta - \sigma) \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_{r(x)}^{r_1} + \varphi_{p(x)}(u) \right],
\end{aligned} \tag{5.54}$$

elde edilir. $\beta - \sigma > 0$ olacak şekilde, k, l ve n değerleri uygun şekilde yeterince büyük seçilir. Seçilen k değeri ve yeterince küçük seçilen ε değeri ile birlikte,

$$(1-\alpha) - \frac{2\varepsilon(m_2-1)k}{m_2} \geq 0 \text{ ve } L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int_{\Omega} u_0(x) u_1(x) dx > 0,$$

yazılır. (5.54) eşitsizliği bu bilgiler dahilinde ve (5.19) aracılığıyla,

$$L'(t) \geq \varepsilon(\beta - \sigma) \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_{p_1}^{p_1} \right], \tag{5.55}$$

olarak yazılabilir. Sonuç olarak tüm $t \geq 0$ değerleri için,

$$L(t) \geq L(0) > 0,$$

eşitsizliği doğrudur. O zaman, Hölder's ve Young's eşitsizlikleri kullanılarak,

$$\|u\|_2 = \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left[\left(\int_{\Omega} (|u|^2)^{p_1/2} dx \right)^{\frac{2}{p_1}} \left(\int_{\Omega} 1 dx \right)^{1-\frac{2}{p_1}} \right]^{\frac{1}{2}} \leq c \|u\|_{p_1}, \tag{5.56}$$

ve

$$\left| \int_{\Omega} uu_t dx \right| \leq \|u_t\|_2 \|u\|_2 \leq c \|u_t\|_2 \|u\|_{p_1},$$

ifadesinden, $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$ ise,

$$\left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq c \|u_t\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}} \|u\|_{p_1}^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq c \left[\|u_t\|_2^{\frac{\theta}{1-\alpha}} + \|u\|_{p_1}^{\frac{\mu}{1-\alpha}} \right], \quad (5.57)$$

elde edilir. $\theta = 2(1-\alpha)$ alınarak, (5.26) eşitsizliği aracılığıyla, $\frac{\mu}{1-\alpha} = \frac{2}{1-2\alpha} \leq p_1$

yazılır. $s = \frac{2}{1-2\alpha} \leq p_1$ olduğu yerde,

$$\left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq c \left[\|u\|_{p_1}^s + \|u_t\|_2^2 \right],$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç 5.3.5 ile yukarıdaki elde edilen eşitsizlik birlikte kullanıldığında,

$$\left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C \left[H(t) + \|u\|_{p_1}^{p_1} + \|u_t\|_2^2 \right], \quad \forall t \geq 0, \quad (5.58)$$

yazılır. Bu işlemlerden yola çıkarak,

$$\begin{aligned} L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) &= \left\{ H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t dx \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\leq c \left\{ H(t) + \left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\} \leq c \left\{ H(t) + \|u\|_{p_1}^{p_1} + \|u_t\|_2^2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

elde edilir. (5.55) ve (5.59)'dan yola çıkarak, $\lambda(\varepsilon(\beta - \sigma), c) > 0$ olduğu durumda,

$$L'(t) \geq \lambda L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t), \quad (5.60)$$

sağlanır. (5.60) eşitsizliğinin her iki tarafının $(0, t)$ aralığında integrali alınır,

$$L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t) \geq \frac{1}{L^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}(0) - \lambda \frac{\alpha}{1-\alpha} t},$$

yazılır ve buradan çözümün patladığı sonlu zaman,

$$T^* = \frac{1-\alpha}{\lambda\alpha L^{\alpha/(1-\alpha)}(0)},$$

olarak bulunur. Böylelikle ispat tamamlanır.





6. DOĞRUSAL OLMAYAN DEĞİŞKEN ÜSLÜ SÖNÜMLEME TERİM İÇEREN LOKAL OLMAYAN TEKİL VISKOELASTİK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI, ENERJİ AZALMASI VE PATLAMASI

Bu bölümde doğrusal olmayan değişken üslü sönümleme ve kaynak terim içeren lokal olmayan tekil viskoelastik denkleminin çözümlerinin global varlığı, enerji azalması ve patlaması iki durum için incelenecektir.

6.1. Giriş

Ele alınan denklem aşağıdaki gibidir:

$$u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g(t-\tau) \frac{1}{x}(xu_x(x, \tau))_x d\tau + |u_t|^{m(x)-2} u_t = |u|^{p(x)-2} u, \quad (0, \ell) \times (0, T), \quad (6.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, \ell), \quad (6.2)$$

$$u(\ell, t) = 0, \quad \int_0^\ell xu(x, t) dx = 0, \quad (6.3)$$

burada $\ell < \infty$, $T < \infty$ ve $g(\cdot): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ daha sonra tanımlanacak olan bir fonksiyondur. Ayrıca, $m(x)$ ve $p(x)$ üsleri bölge üzerinde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan ölçülebilir fonksiyonlardır,

$$\begin{aligned} 2 \leq m_1, p_1 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in (0, \ell)} m(x), p(x) \\ \leq m(x), p(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in (0, \ell)} m(x), p(x) = m_2, p_2 \leq \frac{2n}{n-2}, n \geq 3. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Bahsedilen değişken üsler için alt ve üst sınır tanımlamaları,

$$\begin{aligned} m_1 &:= \operatorname{ess\,inf}_{x \in (0, \ell)} m(x), m_2 := \operatorname{ess\,sup}_{x \in (0, \ell)} m(x), \\ p_1 &:= \operatorname{ess\,inf}_{x \in (0, \ell)} p(x), p_2 := \operatorname{ess\,sup}_{x \in (0, \ell)} p(x). \end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca log-Hölder süreklilik koşulu,

$$|r(x) - r(y)| \leq -\frac{w}{\log|x-y|}, \quad x, y \in (0, \ell) \text{ ve } |x-y| < \delta, \quad (6.5)$$

yazıldığı gibidir, burada $w > 0, 0 < \delta < 1$ dir.

6.2. Tanım ve Ön Bilgiler

Bu bölümde sonuca ulaşmak için kullanılacak olan bazı notasyon ve lemmalara yer verilecektir.

$L_x^p = L_x^p((a, b))$ normlu Banach uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır,

$$\|u\|_{L_x^p} = \left[\int_a^b x |u|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (6.6)$$

Özel olarak $p = 2$ alındığında $H = L_x^2(a, b)$ olarak gösterilen ağırlıklı Hilbert uzayının sonlu normu,

$$\|u\|_2 = \left(\int_a^b x |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.7)$$

olarak gösterilir. Ağırlıklı Hilbert uzayının,

$$\|u\|_V = \left(\|u\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.8)$$

ve

$$V_0 = \{v \in V; v(a) = 0 = v_x(a)\} \quad (6.9)$$

norm hali $V = V^{1,1}(0, a)$ gösterilir.

Lemma 6.2.1. [Poincare Eşitsizliği] (Mesloub ve Messaoudi, 2010) Herhangi $v \in V_0$ için,

$$\int_0^a x v^2(x) dx \leq c_s \int_0^a x v_x^2(x) dx \quad (6.10)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada c_s pozitif sabittir.

Lemma 6.2.2 (Pişkin ve ark., 2021) $2 < p < 4$ olmak üzere, her $u \in V_0$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır;

$$\|u\|_{L_x^p(0,a)}^p \leq C_* \|u_x\|_{H=L_x^2(0,a)}^p, \quad (6.11)$$

burada C_* yalnızca a ve p 'ye bağlı bir sabittir.

$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, C^2 de artmayan fonksiyon olmak üzere,

$$g(0) > 0, \quad 1 - \int_0^\infty g(\tau) d\tau = l > 0. \quad (6.12)$$

yazılan eşitsizlik sağlanır. Aynı zamanda ε pozitif türevlenebilir fonksiyon olmak üzere g ,

$$g'(t) \leq \varepsilon(t)g^\rho(t), \quad t \geq 0, \quad 1 \leq \rho < \frac{3}{2}, \quad (6.13)$$

ve bazı pozitif L sabiti için, ε ,

$$\left| \frac{\varepsilon'(t)}{\varepsilon(t)} \right| \leq L, \quad \varepsilon'(t) \leq 0, \quad \text{tüm } t > 0 \text{ için,} \quad \int_0^{+\infty} \varepsilon(\tau) d\tau = +\infty, \quad (6.14)$$

(6.13) ve (6.14) eşitsizliklerini sağlar.

İlave olarak, $1 < \rho \leq 3/2$ olduğu durumda herhangi bir sabit $t_0 > 0$ için, aşağıdaki eşitsizlikler sağlanacak şekilde ρ 'e bağlı bir C_ρ pozitif sabiti vardır;

$$\frac{t}{\left(1 + \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) d\tau\right)^{1/(2(\rho-1))}} \leq C_\rho, \quad \int_0^\infty \frac{1}{\left(1 + \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) d\tau\right)^\nu} < +\infty, \quad (6.15)$$

tüm $t \geq t_0$, $\nu > 1$ için sağlanır (Liu ve ark., 2017).

Not 6.2.3. $\rho < 3/2$ olması aşağıdaki eşitsizliği garanti eder,

$$\int_0^\infty g^{2-\rho}(\tau) d\tau < \infty. \quad (6.16)$$

İlave olarak,

$$(gou_x)(t) = \int_0^\ell \int_0^t xg(t-\tau) |u_x(x,t) - u_\tau(x,\tau)|^2 d\tau dx, \quad (6.17)$$

olduğu yerde uhesaplama yapılarak,

$$\int_0^t g(t-\tau)(\nabla u(\tau) - \nabla u_t(t)) ds = -\frac{1}{2} g(t) \|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2} (g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ (g' \circ \nabla u)(t) - \left(\int_0^t g(\tau) d\tau \right) \|\nabla u(t)\|^2 \right\}, \quad (6.18)$$

elde edilir.

Teorem 6.2.4. (Lokal Varlık) $2 < p_1 = p(x) = p_2 < 3$ ve (6.12) sağlansın. Öyleyse herhangi $u_0 \in V_0$ ve $u_1 \in H$ için, (6.1)-(6.3) probleminin $T > 0$ için $u \in C(0, T; V_0) \cap C^1(0, T; H)$ olduğu durumda tek bir lokal çözümü vardır (Muravei ve Philinovskii, 1993).

6.3. Çözümlerin Global Varlığı

Bu bölümde, $E(0)$ pozitif ve yeterince küçük olduğunda, (6.1) problemine ait her çözümün global olduğu gösterilecektir. Sonuçları ispatlamak için aşağıdaki kavramlara ihtiyaç duyulmaktadır.

$$I(t) = \left(1 - \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \int_0^\ell x u_x^2 dx + (g \circ u_x)(t) - \int_0^\ell x |u(t)|^{p(x)} dx, \quad (6.19)$$

$$J(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \int_0^\ell x u_x^2 dx + \frac{1}{2} (g \circ u_x)(t) - \int_0^\ell \frac{x |u(t)|^{p(x)}}{p(x)} dx, \quad (6.20)$$

eşitlikleri tanımlansın.

Not 6.3.1. Aşağıdaki eşitlik not edilsin,

$$E(t) = J(t) + \frac{1}{2} \int_0^\ell x u_t^2 dx. \quad (6.21)$$

Ayrıca, (6.1)-(6.3) problemine ait enerji fonksiyonu,

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell x u_t^2 dx + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \int_0^\ell x u_x^2 dx + \frac{1}{2} (g \circ u_x)(t) - \int_0^\ell \frac{x |u(t)|^{p(x)}}{p(x)} dx, \quad (6.22)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Lemma 6.3.2. (6.1) eşitliğinin her iki tarafı xu_t ile çarpılıp, $(0, \ell)$ bölgesi üzerinde integre edilirse, her $t \geq 0$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\frac{d}{dt} E(t) = \frac{1}{2} (g' ou_x)(t) - \frac{1}{2} g(t) \int_0^\ell x u_x^2 dx - \int_0^\ell x u_t^{m(x)} dx \leq - \int_0^\ell x u_t^{m(x)} dx \leq 0. \quad (6.23)$$

İspat. (6.1) eşitliğinin her iki tarafı xu_t ile çarpılıp, $(0, \ell)$ bölgesi üzerinde integre edilirse, her $t \geq 0$ için,

$$\begin{aligned} \int_0^\ell u_t x u_t dx &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^\ell x u_t^2 dx \right), \\ - \int_0^\ell \frac{1}{x} (x u_x)_x x u_t dx &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^\ell x u_x^2 dx \right), \\ \int_0^\ell \int_0^t g(t-s) \frac{1}{x} (x u_x(x, \tau))_x x u_t d\tau dx &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left((g ou_x)(t) - \int_0^t g(\tau) d\tau \int_0^\ell x u_x^2 dx \right) \right), \\ \int_0^\ell |u_t|^{m(x)-2} u_t x u_t dx &= \int_0^\ell x u_t^2 dx, \\ \int_0^\ell |u|^{p(x)-2} u x u_t dx &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^\ell \frac{x |u|^{p(x)}}{p(x)} dx \right), \end{aligned}$$

yukarıdaki kestirimler yazılır. Elde edilen tüm kestirimler (6.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^\ell x u_t^2 dx + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \int_0^\ell x u_x^2 dx + \frac{1}{2} (g ou_x)(t) - \int_0^\ell \frac{x |u(t)|^{p(x)}}{p(x)} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} (g' ou_x)(t) - \frac{1}{2} g(t) \int_0^\ell x u_x^2 dx - \int_0^\ell x u_t^{m(x)} dx, \end{aligned} \quad (6.24)$$

elde edilir. Türev operatörünün içindeki ifadenin (6.22) ile verilen enerji fonksiyonuna ait olduğu görülmektedir. Ayrıca g fonksiyonuna ait (6.12) ve (6.13) göz önüne alınarak kolaylıkla (6.23)'ün sağlandığı görülür. Böylelikle ispat tamamlanır.

Lemma 6.3.3. $2 < p(x) < 3$ sağlansın ve g fonksiyonu (6.12)'yi sağlasın. Öyleyse, her $\varphi \in V_0$, $\chi \in H$ için,

$$I(\varphi) > 0, \quad \beta = \frac{C_*}{l} \left(\frac{2p_1}{l(p_1-2)} E(0) \right)^{p_2-2/2} < 1, \quad (6.25)$$

$I(u(t)) > 0, \forall t \in [0, T)$ olduğu durumda yukarıdaki eşitsizlik sağlanır.

İspat. $I(\varphi) > 0$ olduğundan $t \in [0, T_m)$ değerleri için $I(u(t)) \geq 0$ olacak şekilde $T_m \leq T$ değeri vardır. Bu bilgiye dayanarak,

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \int_0^\ell x u_x^2 dx + \frac{1}{2} (gou_x)(t) - \int_0^\ell \frac{x |u(t)|^{p(x)}}{p(x)} dx \\ &= \frac{p_1 - 2}{2p_1} \left[\left(1 - \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \int_0^\ell x u_x^2 dx + \frac{1}{2} (gou_x)(t) \right] + \frac{1}{p_1} I(t) \quad (6.26) \\ &\geq \frac{p_1 - 2}{2p_1} l \int_0^\ell x u_x^2 dx, \quad \forall t \in [0, T_m); \end{aligned}$$

yazılır, dolayısıyla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\int_0^\ell x u_x^2 dx \leq \frac{2p_1}{l(p_1 - 2)} J(t) \leq \frac{2p_1}{l(p_1 - 2)} E(t) \leq \frac{2p_1}{l(p_1 - 2)} E(0), \quad \forall t \in [0, T_m). \quad (6.27)$$

(6.11), (6.25) ve (6.27) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \int_0^\ell x |u|^{p(x)} dx &\leq C_* \|u_x\|_H^{p(x)} = \frac{C_*}{l} \|u_x\|_H^{p(x)-2} l \|u_x\|_H^2 \\ &\leq \frac{C_*}{l} \left(\frac{2p_1}{l(p_1 - 2)} E(0) \right)^{p(x)-2/2} l \|u_x\|_H^2 \quad (6.28) \\ &\leq \frac{C_*}{l} \left(\frac{2p_1}{l(p_1 - 2)} E(0) \right)^{p_2-2/2} l \|u_x\|_H^2 = \beta l \|u_x\|_H^2 \\ &\leq l \|u_x\|_H^2, \quad \forall t \in [0, T_m); \end{aligned}$$

kolaylıkla elde edilir. Dolayısıyla,

$$I(t) = \left(1 - \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \|u_x\|_H^2 + (gou_x)(t) - \int_0^\ell x |u|^{p(x)} dx > 0, \quad \forall t \in [0, T_m), \quad (6.29)$$

yazılır. Böylelikle $\forall t \in [0, T_m)$ değeri için $I(u(t)) > 0$ olduğu görülür.

Teorem 6.3.4. (Global Varlık) $2 < p(x) < 3$ sağlansın ve g fonksiyonu (6.12)'yi sağlansın. Öyleyse, (6.25)'i sağlayan her $\varphi \in V_0$, $\chi \in H$ için, (6.1) probleminin çözümü sınırlı ve globaldir.

İspat. İspatı tamamlamak için $\|u_x\|_H^2 + \|u_t\|_H^2$ değerinin t den bağımsız olarak sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için (6.21), (6.23) ve (6.26) kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik $I(t) > 0$ olduğu için yazılabilir,

$$\begin{aligned} E(0) &\geq E(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \|u_x\|_H^2 + \frac{1}{2} (gou_x)(t) - \frac{1}{p_1} \int_0^\ell x |u(t)|^{p(x)} dx + \frac{1}{2} \|u_t\|_H^2 \\ &\geq \frac{p_1 - 2}{2p_1} \left[\left(1 - \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \|u_x\|_H^2 + \frac{1}{2} (gou_x)(t) \right] + \frac{1}{p_1} I(t) + \frac{1}{2} \|u_t\|_H^2 \\ &\geq \frac{p_1 - 2}{2p_1} l \|u_x\|_H^2 + \frac{1}{2} \|u_t\|_H^2. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Böylelikle,

$$\|u_x\|_H^2 + \|u_t\|_H^2 \leq CE(0)$$

elde edilir. Burada C , p_1 ve l 'ye bağlı bir sabittir. İstenilen amaca ulaşılarak, global varlık ispatı tamamlanmış olur.

6.4. Çözümlerin Enerjisinin Azalması

Bu bölümde, değişken üslü ve doğrusal olmayan sönümleme terimi içeren (6.1) probleminin çözümlerinin enerji azalımı incelenecektir. Çözümün enerji azalımını kanıtlamak için gerekli fonksiyonlar aşağıda tanımlanmaktadır:

$$F(t) := E(t) + \sigma_1 \varphi(t) + \sigma_2 \chi(t), \quad (6.31)$$

burada σ_1 ve σ_2 pozitif sabitler olup φ ve χ ,

$$\varphi(t) = \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_t u dx, \quad (6.32)$$

$$\chi(t) = -\varepsilon(t) \int_0^\ell x u_t \int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau dx. \quad (6.33)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Lemma 6.4.1. Yeteri kadar küçük σ_1 ve σ_2 değerleri için, aşağıdaki eşitsizlik δ_1 ve δ_2 pozitif sabitler olmak üzere sağlanır;

$$\delta_1 F(t) \leq E(t) \leq \delta_2 F(t). \quad (6.34)$$

İspat. $F(t)$ fonksiyonunda tüm değerler yerine yazılıp düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}
F(t) &= E(t) + \sigma_1 \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_t^2 dx - \sigma_2 \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_t \int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau)) d\tau dx \\
&\leq E(t) + \frac{\sigma_1}{2} \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_t^2 dx + \frac{\sigma_1}{2} \varepsilon(t) \int_0^\ell x u^2 dx + \frac{\sigma_2}{2} \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_t^2 dx \\
&\quad + \frac{\sigma_2}{2} \varepsilon(t) \int_0^\ell x \left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau)) d\tau \right)^2 dx \\
&\leq E(t) + \frac{\sigma_1}{2} \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_t^2 dx + \frac{\sigma_1}{2} \varepsilon(t) \int_0^\ell x u^2 dx + \frac{\sigma_2}{2} \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_t^2 dx \\
&\quad + \frac{\sigma_2}{2} \varepsilon(t) \int_0^\ell x \int_0^t g(\tau) d\tau \int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))^2 d\tau dx \\
&\leq E(t) + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) \varepsilon(t)}{2} \int_0^\ell x u_t^2 dx + \frac{C_p \sigma_1}{2} \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_x^2 dx \\
&\quad + \frac{\sigma_2}{2} (1-l) \varepsilon(t) \int_0^\ell \int_0^t x g(t-\tau)(u(t)-u(\tau))^2 d\tau dx \\
&\leq E(t) + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) \varepsilon(t)}{2} \int_0^\ell x u_t^2 dx + \frac{C_p \sigma_1}{2} \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_x^2 dx + \frac{\sigma_2}{2} (1-l) C_p \varepsilon(t) (gou_x)(t) \\
&\leq \frac{1}{\delta_1} E(t),
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yolla,

$$\begin{aligned}
F(t) &\geq E(t) - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) \varepsilon(t)}{2} \int_0^\ell x u_t^2 dx - \frac{C_p \sigma_1}{2} \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_x^2 dx - \frac{\sigma_2}{2} (1-l) C_p \varepsilon(t) (gou_x)(t) \\
&\geq \left[\frac{1}{2} - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) \varepsilon(t)}{2} \right] \int_0^\ell x u_t^2 dx + \left(\frac{1}{2} l - \frac{C_p \sigma_1}{2} \varepsilon(t) \right) \int_0^\ell x u_x^2 dx \\
&\quad + \left[\frac{1}{2} - \frac{C_p}{2} \sigma_2 (1-l) \varepsilon(t) \right] (gou_x)(t) - \frac{1}{p_1} \int_0^\ell x |u|^{p(x)} dx \\
&\geq \frac{1}{\delta_2} E(t),
\end{aligned}$$

yazılır. Burada δ_1 ve δ_2 yeterince küçüktür.

Lemma 6.4.2. $v \in L^\infty((0, T); H)$, $v_x \in L^\infty((0, T); H)$ ve $g, [0, T]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun ve $0 < \vartheta < 1$ ve $\rho > 0$ olduğu varsayalım. Öyleyse aşağıdaki eşitsizlik sağlanacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır;

$$\int_0^t g(t-\tau) \|v_x(.,t) - v_x(.,\tau)\|_H^2 d\tau \leq C \left(\sup_{0 < \tau < T} \|v_x(.,\tau)\|_H^2 \int_0^t g^{1-\theta}(\tau) d\tau \right)^{\frac{\rho-1}{(\rho-1+\theta)}} \times \left(\int_0^t g^\rho(t-\tau) \|v_x(.,t) - v_x(.,\tau)\|_H^2 d\tau \right)^{\frac{\theta}{(\rho-1+\theta)}}. \quad (6.35)$$

İspat. Bakınız (Mesloub ve Messaoudi, 2010).

Lemma 6.4.3. $v \in L^\infty((0, T); H)$, $v_x \in L^\infty((0, T); H)$ ve $g, [0, T]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun ve $\rho > 0$ olduğu varsayalım. Öyleyse aşağıdaki eşitsizlik sağlanacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır;

$$\int_0^t g(t-\tau) \|v_x(.,t) - v_x(.,\tau)\|_H^2 d\tau \leq C \left(t \|v_x(.,t)\|_H^2 + \int_0^t \|v_x(.,\tau)\|_H^2 d\tau \right)^{(\rho-1)/r} \times \left(\int_0^t g^\rho(t-\tau) \|v_x(.,t) - v_x(.,\tau)\|_H^2 d\tau \right)^{1/\rho}. \quad (6.36)$$

İspat. [Bakınız (Mesloub ve Messaoudi, 2010)]

Lemma 6.4.4. $2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < 3$ olmak üzere, (6.12), (6.13), ve (6.25) sağlansın. Öyleyse (6.32) ile tanımlanan φ fonksiyonu (6.1)-(6.3) probleminin çözümü boyunca, aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) \leq & \left(1 + \frac{L}{2\alpha} + (2E(0))^{m_2-2} \right) \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_t^2 dx - \left[\frac{l}{2} - \frac{C_p}{4\gamma} - \frac{\alpha C_p L}{2} \right] \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_x^2 dx \\ & + \frac{\varepsilon(t)}{2l} \left(\int_0^t g^{2-\rho}(\tau) d\tau \right) (g^\rho o u_x(t)) + \varepsilon(t) \int_0^\ell x u^{p(x)} dx. \end{aligned} \quad (6.37)$$

İspat. Öncelikle (6.32) ile verilen $\varphi(t)$ fonksiyonunun türevi alınırsa,

$$\varphi'(t) = \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_{tt} u dx + \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_t^2 dx + \varepsilon'(t) \int_0^\ell x u u_t dx, \quad (6.38)$$

elde edilir. (6.38)'in birinci terimi, (6.1) denkleminin her ki tarafının Lemma 6.3.2'nin ispatına benzer şekilde xu ile çarpılıp, bölge üzerinde integre edilmesiyle bulunur. Sonrasında bulunan eşitlik, tekrardan (6.38)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) = & \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_t^2 dx - \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_x^2 dx + \varepsilon(t) \int_0^\ell x u^{p(x)} dx - \varepsilon(t) \int_0^\ell x |u_t|^{m(x)-1} u dx \\
& + \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_x \int_0^t g(t-\tau) u_x(x, \tau) d\tau dx + \varepsilon'(t) \int_0^\ell x u u_t dx,
\end{aligned} \tag{6.39}$$

ifadesi kolaylıkla elde edilir. (6.39)'un sondan ikinci terimi için kestirim elde edilirken, g fonksiyonuna ait olan eşitlikler, Young's eşitsizliği ve Poincare eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_x \int_0^t g(t-\tau) u_x(x, \tau) d\tau dx \\
& \leq \frac{\varepsilon(t)}{2} \int_0^\ell x u_x^2 dx + \frac{\varepsilon(t)}{2} \int_0^\ell x \left(\int_0^t g(t-\tau) |u_x(\tau)| d\tau \right)^2 dx \\
& \leq \frac{\varepsilon(t)}{2} \int_0^\ell x u_x^2 dx + \frac{\varepsilon(t)}{2} \int_0^\ell x \left(\int_0^t g(t-\tau) (|u_x(\tau) - u_x(t)| + |u_x(t)|) d\tau \right)^2 dx,
\end{aligned} \tag{6.40}$$

rahatlıkla yazılır. Ardından (6.40)'ın sağ tarafındaki ikinci terim için, her $\eta > 0$ olduğunda, Young's eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\ell x \left(\int_0^t g(t-\tau) (|u_x(\tau) - u_x(t)| + |u_x(t)|) d\tau \right)^2 dx \\
& \leq \int_0^\ell x \left(\int_0^t g(t-\tau) |u_x(\tau) - u_x(t)| d\tau \right)^2 dx \\
& \quad + \int_0^\ell x \left(\int_0^t g(t-\tau) |u_x(t)| d\tau \right)^2 dx \\
& \quad + 2 \int_0^\ell x \left(\int_0^t g(t-\tau) |u_x(\tau) - u_x(t)| d\tau \right) \left(\int_0^t g(t-\tau) |u_x(t)| d\tau \right) dx \\
& \leq (1+\eta) \int_0^\ell x \left(\int_0^t g(t-\tau) |u_x(t)| d\tau \right)^2 dx \\
& \quad + \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \int_0^\ell x \left(\int_0^t g(t-\tau) |u_x(\tau) - u_x(t)| d\tau \right)^2 dx,
\end{aligned} \tag{6.41}$$

elde edilir. Aşağıdaki ifade direkt olarak yazılabilir;

$$\left(\int_0^t g(t-\tau) |u_x(\tau) - u_x(t)| d\tau \right)^2 dx \leq \int_0^t g^{2-\rho}(\tau) d\tau \int_0^t g^\rho(t-\tau) |u_x(\tau) - u_x(t)|^2 d\tau dx.$$

Böylece, $\int_0^t g(\tau) d\tau \leq \int_0^\infty g(\tau) d\tau = 1-l$ ifadesi kullanılarak, (6.41),

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell x \left(\int_0^t g(t-\tau) (|u_x(\tau) - u_x(t)| + |u_x(t)|) d\tau \right)^2 dx \\ & \leq (1+\eta)(1-l)^2 \int_0^\ell x |u_x(t)|^2 dx \\ & + \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \int_0^t g^{2-\rho}(\tau) d\tau \int_0^\ell \int_0^t x g^\rho(t-\tau) |u_x(\tau) - u_x(t)|^2 d\tau dx, \end{aligned} \quad (6.42)$$

halini alır. Elde edilen ifadeler (6.40)'da yerine yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir;

$$\begin{aligned} & \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_x \int_0^t g(t-\tau) u_x(x, \tau) d\tau dx \\ & \leq \frac{\varepsilon(t)}{2} \int_0^\ell x u_x^2 dx + \frac{\varepsilon(t)}{2} (1+\eta)(1-l)^2 \int_0^\ell x |u_x(t)|^2 dx \\ & + \frac{\varepsilon(t)}{2} \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \int_0^t g^{2-\rho}(\tau) d\tau \int_0^\ell \int_0^t x g^\rho(t-\tau) |u_x(\tau) - u_x(t)|^2 d\tau dx. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Ayrıca, $\alpha > 0$ için (6.39)'un son terimi aşağıdaki şekilde yazılır,

$$\varepsilon'(t) \int_0^\ell x u u_t dx \leq \frac{\varepsilon(t)}{2} \left| \frac{\varepsilon'(t)}{\varepsilon(t)} \right| \left(C_p \alpha \int_0^\ell x u_x^2 dx + \frac{1}{\alpha} \int_0^\ell x u_t^2 dx \right). \quad (6.44)$$

Benzer şekilde (6.39)'un sondan üçüncü terimi aşağıdaki gibi yazılır,

$$-\varepsilon(t) \int_0^\ell x |u_t|^{m(x)-1} u dx \leq \gamma \varepsilon(t) \int_0^\ell x |u_t|^{2(m(x)-1)} dx + \frac{\varepsilon(t) C_p}{4\gamma} \int_0^\ell x u_x^2 dx. \quad (6.45)$$

(6.21) eşitliğinden yola çıkarak, $2(E(t) - J(t)) = \int_0^\ell x u_t^2 dx$ ve $E(0) \geq E(t)$ olduğundan,

$$2E(0) \geq \int_0^\ell x u_t^2 dx, \quad (6.46)$$

elde edilir. Bu bilgiye dayanarak, (6.45) in sağ tarafındaki birinci terime kestirim uygulanırsa,

$$\int_0^\ell x |u_t|^{2(m(x)-1)} dx \leq \left(\int_0^\ell x u_t^2 dx \right)^{m(x)-1} \leq (2E(0))^{m_2-2} \int_0^\ell x u_t^2 dx = C^\bullet \int_0^\ell x u_t^2 dx, \quad (6.47)$$

yazılır. Son olarak elde edilen tüm eşitsizlikler (6.39)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) \leq & \left(1 + \frac{L}{2\alpha} + C^{\bullet}\right) \varepsilon(t) \int_0^{\ell} x u_t^2 dx \\
& - \frac{\varepsilon(t)}{2} \left[1 - (1+\eta)(1-l)^2 - \frac{C_p}{2\gamma} - \alpha C_p L\right] \int_0^{\ell} x u_x^2 dx \\
& + \frac{\varepsilon(t)}{2} \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \left(\int_0^t g^{2-\rho}(\tau) d\tau\right) (g^{\rho} o u_x(t)) + \varepsilon(t) \int_0^{\ell} x u^{p(x)} dx,
\end{aligned} \tag{6.48}$$

bulunur. Burada $\eta = l/(1-l)$ alındığında, (6.37) elde edilir ve ispat tamamlanır.

Lemma 6.4.5. $2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < 3$ olmak üzere, (6.12), (6.13), ve (6.25) sağlansın.

Öyleyse, (6.33) ile tanımlanan χ fonksiyonu tüm $\mu > 0$ değeri için, aşağıdaki eşitsizliği sağlar;

$$\begin{aligned}
\chi'(t) \leq & \varepsilon(t) \mu \left[1 + C^* + 2(1-l)^2\right] \int_0^{\ell} x u_x^2 dx \\
& + \varepsilon(t) \left[\mu - \int_0^t g(\tau) d\tau + \mu C^{\bullet} + \mu L\right] \int_0^{\ell} x u_t^2 dx \\
& + \left[\frac{1}{2\mu} + 2\mu + \frac{(2+L)C_p}{4\mu}\right] \varepsilon(t) \left(\int_0^t g^{2-\rho}(\tau) d\tau\right) (g^{\rho} o u_x)(t) \\
& - \frac{C_p}{4\mu} g(0) \varepsilon(t) (g' o u_x)(t).
\end{aligned} \tag{6.49}$$

İspat. χ fonksiyonunun direkt olarak türevi alınıp, (6.1) denkleminde de yardım alındığında, aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$\begin{aligned}
\chi'(t) = & \varepsilon(t) \int_0^{\ell} x u_x(t) \left(\int_0^t g(t-\tau)(u_x(t) - u_x(\tau)) d\tau\right) dx \\
& - \varepsilon(t) \int_0^{\ell} x \left(\int_0^t g(t-\tau)(u_x(t) - u_x(\tau)) d\tau\right) \left(\int_0^t g(t-\tau) u_x(\tau) d\tau\right) dx \\
& - \varepsilon(t) \int_0^{\ell} x |u|^{p(x)-2} u \left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau\right) dx \\
& - \varepsilon(t) \int_0^{\ell} x u_t \int_0^t g'(t-\tau)(u(t) - u(\tau)) d\tau dx
\end{aligned} \tag{6.50}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon(t) \int_0^\ell x |u_t|^{m(x)-2} u_t \int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau)) d\tau dx \\
& - \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_t^2 \int_0^t g(t-\tau) d\tau dx.
\end{aligned}$$

Şimdi (6.50) denkleminin sağ tarafındaki terimlerine, tüm $\mu > 0$ değerleri için kestirim uygulansın. İlk terim,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_x(t) \left(\int_0^t g(t-\tau)(u_x(t)-u_x(\tau)) d\tau \right) dx \\
& \leq \mu \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_x^2 dx + \frac{1}{4\mu} \varepsilon(t) \left(\int_0^t g^{2-\rho}(\tau) d\tau \right) (g^\rho ou_x)(t).
\end{aligned} \tag{6.51}$$

İkinci terim,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon(t) \int_0^\ell x \left(\int_0^t g(t-\tau)(u_x(t)-u_x(\tau)) d\tau \right) \left(\int_0^t g(t-\tau) u_x(\tau) d\tau \right) dx \\
& \leq 2\mu(1-l)^2 \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_x^2 dx + \left(2\mu + \frac{1}{4\mu} \right) \varepsilon(t) \left(\int_0^t g^{2-\rho}(\tau) d\tau \right) (g^\rho ou_x)(t).
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Üçüncü terim,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon(t) \int_0^\ell x |u|^{p(x)-2} u \left(\int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau)) d\tau \right) dx \\
& \leq \mu C^* \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_x^2 dx + \varepsilon(t) \frac{C_p}{4\mu} \left(\int_0^t g^{2-\rho}(\tau) d\tau \right) (g^\rho ou_x)(t),
\end{aligned} \tag{6.53}$$

burada, C^* aşağıdaki gibidir,

$$C^* = \frac{C_*}{3-p_1} \left(\frac{2p_1}{l(p_1-2)} E(0) \right)^{p_2-2}.$$

Dördüncü terim,

$$\begin{aligned}
& - \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_t \int_0^t g'(t-\tau)(u(t)-u(\tau)) d\tau dx \\
& \leq \mu \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_t^2 dx - \frac{g(0)}{4\mu} C_p \varepsilon(t) (g' ou_x)(t).
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Beşinci terim için, (6.45) e uygulanan kestirime benzer bir kestirim uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon(t) \int_0^\ell x |u_t|^{m(x)-2} u_t \int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau)) d\tau dx \\
& \leq \mu \varepsilon(t) C^\bullet \int_0^\ell x u_t^2 dx + \left(\frac{C_p}{4\mu} \right) \varepsilon(t) \left(\int_0^t g^{2-\rho}(\tau) d\tau \right) (g^\rho ou_x)(t).
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Son terim için,

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon'(t) \int_0^\ell x u_t \int_0^t g(t-\tau)(u(t)-u(\tau)) d\tau dx \\
& \leq \varepsilon(t) \left| \frac{\varepsilon'(t)}{\varepsilon(t)} \right| \left[\mu \int_0^\ell x u_t^2 dx + \frac{C_p}{4\mu} \left(\int_0^t g^{2-\rho}(\tau) d\tau \right) (g^\rho ou_x)(t) \right] \\
& \leq \mu L \varepsilon(t) \int_0^\ell x u_t^2 dx + \frac{C_p L}{4\mu} \varepsilon(t) \left(\int_0^t g^{2-\rho}(\tau) d\tau \right) (g^\rho ou_x)(t).
\end{aligned} \tag{6.56}$$

Elde edilen tüm kestirimler, (6.50)'de yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 6.4.6. Teorem 6.2.4 koşulları geçerli olmak üzere, ilave olarak (6.13) ve (6.14) sağlansın. Öyleyse, her $t_0 > 0$ değeri için, aşağıdaki eşitsizlik sağlanacak şekilde K ve κ pozitif sabitleri vardır,

$$E(t) \leq \begin{cases} K e^{-\kappa \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) d\tau} & ; \quad \rho = 1 \\ K \left(1 + \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)^{-1/\rho-1} & ; \quad 1 < \rho < \frac{3}{2} \end{cases} \tag{6.57}$$

İspat. g fonksiyonu sürekli ve $g(0) > 0$ olduğunda her $t_0 > 0$ için, aşağıdaki eşitsizlik yazılır,

$$\int_0^t g(\tau) d\tau \geq \int_0^{t_0} g(\tau) d\tau := g_0, \quad \text{tüm } t \geq t_0 \text{ için.} \tag{6.58}$$

(6.23), (6.37), (6.49) ve (6.58) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
F'(t) &= E'(t) + \sigma_1 \phi'(t) + \sigma_2 \chi'(t) \\
&= \frac{1}{2} (g' ou_x)(t) - \frac{1}{2} g(t) \int_0^\ell x u_x^2 dx - \int_0^\ell x u_t^{m(x)} dx + \sigma_1 \phi'(t) + \sigma_2 \chi'(t) \\
&\leq \frac{1}{2} (g' ou_x)(t) - \frac{1}{2} g(t) \int_0^\ell x u_x^2 dx + C^\bullet \int_0^\ell x u_t^2 dx + \sigma_1 \phi'(t) + \sigma_2 \chi'(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq -\left[-C^{\frac{1}{2}} - \sigma_1 \left(1 + \frac{L}{2\alpha} + C^{\bullet}\right) + \sigma_2 (g_0 - \mu(1+L) - \mu C^{\bullet})\right] \varepsilon(t) \int_0^{\ell} x u_t^2 dx \\
&+ \sigma_1 \varepsilon(t) \int_0^{\ell} x |u|^{p(x)} dx + \left[\frac{1}{2} - \frac{\sigma_2 E(0)}{4\mu} C_p g(0)\right] (g' ou_x)(t) \\
&- \left\{ \sigma_1 \left(\frac{l}{2} - \frac{C_p}{4\gamma} - \frac{\alpha C_p L}{2}\right) - \sigma_2 \mu (1 + C^* + 2(1-l)^2) \right\} \varepsilon(t) \int_0^{\ell} x u_x^2 dx \\
&+ \left\{ \frac{\sigma_1}{2l} + \sigma_2 \left[\frac{1}{2\mu} + 2\mu + \frac{(2+L)C_p}{4\mu}\right] \right\} \varepsilon(t) \left(\int_0^t g^{2-\rho}(\tau) d\tau \right) (g^{\rho} ou_x(t)),
\end{aligned}$$

elde edilir. α ve γ değeri, $\frac{l}{2} - \frac{C_p}{4\gamma} - \frac{\alpha C_p L}{2} > \frac{l}{4}$ eşitsizliği sağlanacak şekilde seçilip,

yeteri kadar küçük μ değeri için aşağıdaki kestirim yazılabilir,

$$k_2 = \frac{\sigma_1 l}{4} - \sigma_2 \mu (1 + C^* + 2(1-l)^2) > 0. \quad (6.59)$$

α , γ ve μ değerleri sabit olmak üzere, σ_1 ve σ_2 değerleri (6.34) ve (6.59) eşitsizlikleri geçerli kalacak şekilde yeterince küçük seçildiğinde,

$$k_1 = -\sigma_1 \left(1 + \frac{L}{2\alpha} + C^{\bullet} + \frac{C^{\frac{1}{2}}}{\sigma_1}\right) + \sigma_2 (g_0 - \mu(1+L) - \mu C^{\bullet}) > 0, \quad (6.60)$$

$$k_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sigma_2 C_p g(0)}{4\mu} E(0) - \left\{ \frac{\sigma_1}{2l} + \sigma_2 \left[\frac{1}{2\mu} + 2\mu + \frac{(2+L)C_p}{4\mu}\right] \right\} \left(\int_0^t g^{2-\rho}(\tau) d\tau \right) > 0, \quad (6.61)$$

kestirimleri yazılabilir. Bu nedenle, (6.13) ile verilen eşitsizlik kullanıldığında, $t \geq t_0$ değeri için,

$$F'(t) \leq -\zeta \varepsilon(t) \left[\int_0^{\ell} x u_t^2 dx - \int_0^{\ell} x |u|^{p(x)} dx + \int_0^{\ell} x u_x^2 dx + (g^{\rho} ou_x)(t) \right], \quad (6.62)$$

elde edilir. Burada $\zeta = \min\{k_1, k_2, k_3\}$ dir.

Şimdi ρ nin farklı değerleri için aşağıda iki farklı durum verilecektir:

6.4.1. Durum 1. ($\rho=1$)

σ_1, σ_1 ve μ seçimi sayesinde (6.62) yazıldı, ve şimdi $\beta_1 > 0$ sabiti için aşağıdaki yazılır,

$$F'(t) \leq -\beta_1 \varepsilon(t) E(t), \quad \text{tüm } t \geq t_0 \text{ için.} \quad (6.63)$$

Devamında, (6.34) eşitsizliğinin sol tarafından ve (6.63)'den yardım alarak,

$$F'(t) \leq -\beta_1 \delta_1 \varepsilon(t) F(t), \quad \text{tüm } t \geq t_0 \text{ için,} \quad (6.64)$$

elde edilir. (6.64) eşitsizliğinin (t_0, t) aralığında integrali alındığında, aşağıdaki eşitsizlik yazılır,

$$F(t) \leq F(t_0)^{-\beta_1 \delta_1 \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) d\tau}, \quad \text{tüm } t \geq t_0 \text{ için.} \quad (6.65)$$

Böylelikle, (6.34) yardımıyla, (6.57) sağlanır.

6.4.2. Durum 2. $(1 < \rho < \frac{3}{2})$

(6.13) ve (6.14) kullanılarak,

$$g(t)^{1-\rho} \geq (\rho-1) \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) d\tau + g(t_0)^{1-\rho},$$

yazılabilir. $0 < \vartheta < 1$ için, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\int_0^\infty g^{1-\vartheta}(\tau) d\tau \leq \int_0^\infty \frac{1}{\left[(\rho-1) \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) d\tau + g(t_0)^{1-\rho} \right]^{(1-\vartheta)/(\rho-1)}} d\tau. \quad (6.66)$$

$0 < \vartheta < 2-\tau < 1$ için, $(1-\vartheta)/(1-\tau) > 1$ olduğu görülür. Bu bilgi ve (6.15) kullanılarak,

$$\int_0^\infty g^{1-\vartheta}(\tau) d\tau < \infty, \quad \text{tüm } 0 < \vartheta < 2-\rho \text{ için,}$$

elde edilir. Lemma 6.4.2 ve (6.27)'ye bakılarak,

$$(gou_x)(t) \leq C \left(E(0) \int_0^\infty g^{1-\vartheta}(\tau) d\tau \right)^{(\rho-1)/(\rho-1+\vartheta)} (g^\rho ou_x)^{\vartheta/(\rho-1+\vartheta)},$$

bazı pozitif C sabiti için yukarıdaki eşitsizlik elde edilir. Buradan, her $\rho_1 > 1$ değeri için,

$$E^{\rho_1}(t) \leq CE^{\rho_1-1}(0) \left(\int_0^\ell x u_t^2 dx - \int_0^\ell x |u|^{p(x)} dx + \int_0^\ell x u_x^2 dx \right) + C(gou_x)^{\rho_1}$$

$$\begin{aligned}
&\leq CE^{\rho_1-1}(0) \left(\int_0^\ell xu_t^2 dx - \int_0^\ell x|u|^{p(x)} dx + \int_0^\ell xu_x^2 dx \right) \\
&+ C \left\{ \left(E(0) \int_0^\infty g^{1-\vartheta}(\tau) d\tau \right) \right\}^{\rho_1(\rho-1)/(\rho-1+\vartheta)} \left\{ (g^\rho ou_x)(t) \right\}^{\vartheta\rho_1/(\rho-1+\vartheta)}.
\end{aligned} \tag{6.67}$$

elde edilir. $\vartheta\rho_1/(\rho-1+\vartheta)=1$ olması için $\vartheta=1/2$ ve $\rho_1=2\rho-1$ seçildiğinde, (6.67)

eşitsizliği bazı $\Gamma = \int_0^\infty g^{\frac{\rho_1-1}{2}}(\tau) d\tau > 0$ değeri için,

$$E^{\rho_1}(t) \leq \Gamma \left(\int_0^\ell xu_t^2 dx - \int_0^\ell x|u|^{p(x)} dx + \int_0^\ell xu_x^2 dx + (g^\rho ou_x)(t) \right), \tag{6.68}$$

elde edilir. (6.34), (6.62) ve (6.68) bir arada kullanılırsa aşağıdaki ifade yazılır,

$$F'(t) \leq -\frac{\zeta}{\Gamma} \varepsilon(t) E^{\rho_1}(t) \leq -\frac{\zeta}{\Gamma} \delta_1^{\rho_1} F^{\rho_1}(t), \quad \text{tüm } t \geq t_0 \text{ için.} \tag{6.69}$$

(6.69)'un (t_0, t) aralığında integrali alınırsa,

$$F(t) \leq C_1 \left(1 + \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)^{-1/(\rho_1-1)}, \quad \text{tüm } t \geq t_0 \text{ için} \tag{6.70}$$

yazılır. Buradan aşağıdaki eşitsizlik yazılır,

$$\int_{t_0}^\infty F(t) dt \leq \int_{t_0}^\infty \frac{1}{\left(1 + \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)^{1/(\rho_1-1)}} dt.$$

$1/(\rho_1-1) > 1$ ve $t \rightarrow +\infty$ iken $1 + \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) d\tau \rightarrow +\infty$ olduğu için, (6.15)'den,

$$\int_{t_0}^\infty F(t) dt < \infty, \tag{6.71}$$

elde edilir. Ek olarak, (6.15) kullanılarak, aşağıdaki eşitsizlik yazılır,

$$tF(t) \leq \int_{t_0}^\infty \frac{C_1 t}{\left(1 + \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)^{1/(\rho_1-1)}} dt \leq C_\rho. \tag{6.72}$$

Buradan, aşağıdaki ifade elde edilir,

$$\sup_{t \geq t_0} tF(t) \leq +\infty. \quad (6.73)$$

$E(t)$ sınırlı olduğundan, aşağıdaki eşitsizliği elde etmek için (6.34), (6.71) ve (6.73) kullanılmıştır,

$$\int_{t_0}^{\infty} F(t)dt + \sup_{t \geq 0} tF(t) < \infty.$$

Öyleyse, Lemma 6.4.3 ve (6.27) kullanıldığında,

$$\begin{aligned} & (gou_x)(t) \\ & \leq C_2 \left(t \|u_x(.,t)\|_H^2 + \int_0^t \|u_x(.,\tau)\|_H^2 d\tau \right)^{(\rho-1)/\rho} \left(\int_0^t g^\rho(t-\tau) \|u_x(.,t) - u_x(.,\tau)\|_H^2 d\tau \right)^{1/\rho} \\ & \leq C_2 \left(tF(t) + \int_0^t F(\tau)d\tau \right)^{(\rho-1)/\rho} (g^\rho ou_x)^{1/\rho} \leq C_3 (g^\rho ou_x)^{1/\rho}, \end{aligned}$$

elde edilir. $C_3 = C_2 \left(tF(t) + \int_0^t F(\tau)d\tau \right)^{(\rho-1)/\rho}$ olan pozitif bir sabittir. Buradan da,

$$(g^\rho ou_x)(t) \geq C_4 (gou_x)^\rho, \quad (6.74)$$

sonucu çıkar. Yani pozitif sabit olan $C_4 = C_3^\rho = C_2^\rho \left(tF(t) + \int_0^t F(\tau)d\tau \right)^{(\rho-1)}$ şeklindedir. Sonuç olarak, (6.62) ve (6.74) birlikte kullanıldığında, $t \geq t_0$ ve $C_5 = \zeta C_4 > 0$ için,

$$F'(t) \leq -C_5 \varepsilon(t) \left[\int_0^\ell x u_t^2 dx - \int_0^\ell x |u|^{p(x)} dx + \int_0^\ell x u_x^2 dx + (gou_x)^\rho(t) \right],$$

yazılır. Diğer taraftan $C_6 = \Gamma C_4 > 0$ olmak üzere (Mesloub ve Messaoudi, 2010) daki gibi $t \geq t_0$ için, aşağıdaki eşitsizlik yazılır,

$$E^\rho(t) \leq C_6 \left[\int_0^\ell x u_t^2 dx - \int_0^\ell x |u|^{p(x)} dx + \int_0^\ell x u_x^2 dx + (gou_x)^\rho(t) \right].$$

Son iki eşitsizlik ve (6.34) kullanılarak,

$$F'(t) \leq -C_7 \varepsilon(t) F^\rho(t), \quad \text{tüm } t \geq t_0 \text{ için}, \quad (6.75)$$

$C_7 = \frac{C_5}{C_6} \delta_2 > 0$ olmak üzere, elde edilir. (t_0, t) aralığında (6.75)'in integrali alınırsa,

$C_8 > 0$ olmak üzere aşağıdaki sonuca varılır,

$$F(t) \leq C_8 \left(1 + \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) d\tau \right)^{-1/(\rho-1)}, \quad \text{tüm } t \geq t_0 \text{ için}.$$

Böylelikle yeniden (6.34) aracılığıyla, (6.57) elde edilir ve ispat tamamlanır.

6.5. Çözümlerin Patlaması

Bu bölümde $m(x) = 2$ olduğu durumda yani sönümleme terimi lineer iken çözümün patlaması Li ve Tsai metodu ile incelenecektir. İlave olarak $m(x) \neq 2$ olduğu durumda yani sönümleme terimi lineer değilken çözümün patlaması Georgiev ve Todorova yöntemi ile incelenecektir.

6.5.1. $m(x) = 2$

Sonuca ulaşmak için Lemma 3.2.2.1 ile verilen Li ve Tsai metodu kullanılacaktır. $m(x) = 2$ alındığında (6.1)-(6.3) problemi,

$$u_{tt} - \frac{1}{x}(xu_x)_x + \int_0^t g(t-\tau) \frac{1}{x}(xu_x(x, \tau))_x d\tau + u_t = |u|^{p(x)-2} u, \quad (0, \ell) \times (0, T), \quad (6.76)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, \ell), \quad (6.77)$$

$$u(\ell, t) = 0, \quad \int_0^\ell xu(x, t) dx = 0, \quad (6.78)$$

halini alır. Sonuca ulaşmak için (6.12)'ye ilave koşul olarak,

$$g(\tau) \geq 0, \quad g'(\tau) \leq 0 \quad \text{ve} \quad \int_0^\infty g(\tau) d\tau < \frac{4\delta}{1+4\delta}, \quad (6.79)$$

yazılsın.

Tanım 6.5.1.1. (6.76)-(6.78) probleminin u çözümü için,

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \left(\int_0^\ell x u_x^2 \right)^{-1} = 0 \quad (6.80)$$

şartını sağlayan sonlu bir T^* zamanı varsa, buna çözümün patlaması denir.

Not 6.5.1.2. $E(t)$ fonksiyonu (6.76)-(6.78) problemi için de (6.22)'de yazıldığı gibidir. Ayrıca benzer şekilde,

$$\frac{d}{dt} E(t) = (g' ou_x)(t) - g(t) \int_0^\ell x u_x^2 dx - \int_0^\ell x u_t^2 dx \leq 0, \quad (6.81)$$

yazılır.

Not 6.5.1.3. (6.81) eşitsizliği, $(0, t)$ aralığında integre edilirse,

$$E(t) = E(0) + \int_0^t (g' ou_x)(\tau) d\tau - \int_0^t g(\tau) \int_0^\ell x u_x^2(x, \tau) dx d\tau - \int_0^t \int_0^\ell x u_\tau^2(x, \tau) dx d\tau, \quad (6.82)$$

elde edilir.

Şimdi u , (6.76)'nın çözümü olmak üzere,

$$H(t) = \int_0^\ell x u^2(x, t) dx + \int_0^t \int_0^\ell x u^2(x, \tau) dx d\tau, \quad (6.83)$$

fonksiyonu tanımlansın.

Lemma 6.5.1.4. (6.79) ve $0 < \delta < \frac{p_1 - 2}{4}$ sağlansın, o halde aşağıdaki eşitsizlik yazılır,

$$H''(t) - 4(\delta + 1) \int_0^\ell x u_t^2 dx \geq (-4 - 8\delta)E(0) + 4(2\delta + 1) \int_0^t \int_0^\ell x u_\tau^2(x, \tau) dx d\tau. \quad (6.84)$$

İspat. (6.83)'den,

$$H'(t) = 2 \int_0^\ell x u u_t dx + \int_0^\ell x u^2 dx, \quad (6.85)$$

yazılır. (6.85)'den,

$$H''(t) = 2 \int_0^\ell x u_t^2 dx + 2 \int_0^\ell x u u_{tt} dx + 2 \int_0^\ell x u u_{tt} dx, \quad (6.86)$$

elde edilir. Bu eşitliğin son terimi, (6.76) denkleminin her iki tarafı xu ile çarpılıp $(0, \ell)$ üzerinde integre edilerek yeniden düzenlenirse,

$$H''(t) = 2 \int_0^\ell xu_t^2 dx + 2 \int_0^\ell xuu_t dx + 2 \int_0^\ell xu \left\{ |u|^{p(x)-2} u + \frac{1}{x} (xu_x)_x - \int_0^t g(t-\tau) \frac{1}{x} (u_x(x, \tau))_x d\tau - u_t \right\} dx, \quad (6.87)$$

bulunur. Parantez içindeki terimler tek tek düzenlenirse, diverjans teoremi de kullanılarak,

$$H''(t) = 2 \int_0^\ell xu_t^2 dx + 2 \int_0^\ell xuu_t dx + 2 \int_0^\ell x|u|^{p(x)} dx - 2 \int_0^\ell xu_x^2 dx + 2 \int_0^\ell \int_0^t g(t-\tau) xu_x(x, t) u_x(x, \tau) d\tau dx - 2 \int_0^\ell xuu_t dx, \quad (6.88)$$

elde edilir. Son eşitliğin sağ tarafındaki baştan ikinci terim ile son terimin birbirini götürdüğü görülür, yani eşitliğin son hali aşağıdaki gibidir,

$$H''(t) = 2 \int_0^\ell xu_t^2 dx + 2 \int_0^\ell x|u|^{p(x)} dx - 2 \int_0^\ell xu_x^2 dx + 2 \int_0^\ell \int_0^t g(t-\tau) xu_x(x, t) u_x(x, \tau) d\tau dx. \quad (6.89)$$

İspatı tamamlayabilmek için $4(2\delta+1)E(0)$ elde edilmesi gerekir. Öncelikle (6.82) eşitliğinden,

$$E(0) = E(t) - \int_0^t (g' ou_x)(\tau) d\tau + \int_0^t g(\tau) \int_0^\ell xu_x^2(x, \tau) dx d\tau + \int_0^t \int_0^\ell xu_s^2(x, \tau) dx d\tau, \quad (6.90)$$

olduğu görülür. (6.22) ile verilen $E(t)$ fonksiyonu (6.83)'de yerine yazılırsa,

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^\ell xu_t^2 dx + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \int_0^\ell xu_x^2 dx + \frac{1}{2} (g ou_x)(t) - \int_0^\ell \frac{x|u|^{p(x)}}{p(x)} dx - \int_0^t (g' ou_x)(\tau) d\tau + \int_0^t g(\tau) \int_0^\ell xu_x^2(x, \tau) dx d\tau + \int_0^t \int_0^\ell xu_\tau^2(x, \tau) dx d\tau, \quad (6.91)$$

elde edilir. (6.84) eşitliğinin her iki tarafı $4(2\delta+1)$ ile çarpıldığında istenen elde edilir,

$$\begin{aligned}
4(2\delta+1)E(0) &= 2(2\delta+1)\int_0^\ell xu_t^2 dx + (2+4\delta)\left(1-\int_0^t g(\tau)d\tau\right)\int_0^\ell xu_x^2 dx \\
&\quad + 2(2\delta+1)(gou_x)(t) - 4(2\delta+1)\int_0^\ell \frac{x|u|^{p(x)}}{p(x)} dx \\
&\quad - 4(2\delta+1)\int_0^t (g'ou_x)(\tau)d\tau + 4(2\delta+1)\int_0^t \int_0^\ell xu_\tau^2(x,\tau)dx d\tau.
\end{aligned} \tag{6.92}$$

Şimdi (6.92) eşitliği (6.89) eşitliğine eklenip çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}
H''(t) &\geq (-8\delta-4)E(0) + 4(\delta+1)\int_0^\ell xu_t^2 dx + (2+4\delta)\left(1-\int_0^t g(\tau)ds\right)\int_0^\ell xu_x^2 dx \\
&\quad + 2(2\delta+1)(gou_x)(t) + 2\left(1-\frac{4\delta+2}{p_1}\right)\int_0^\ell x|u|^{p(x)} dx - 4(2\delta+1)\int_0^t (g'ou_x)(\tau)d\tau \\
&\quad + 4(2\delta+1)\int_0^t \int_0^\ell xu_\tau^2 dx d\tau - 2\int_0^\ell xu_x^2 dx + 2\int_0^\ell \int_0^t g(t-\tau)xu_x(x,t)u_x(x,\tau)d\tau dx,
\end{aligned} \tag{6.93}$$

elde edilir. (6.93) eşitsizliğinin sağ tarafındaki son terim aşağıdaki gibi yazılır,

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell \int_0^t g(t-\tau)xu_x(x,t)u_x(x,\tau)d\tau dx &= \int_0^\ell \int_0^t xg(t-\tau)u_x(x,t)(u_x(x,\tau)-u_x(x,t))d\tau dx \\
&\quad + \int_0^\ell \int_0^t g(t-\tau)xu_x^2(x,t)d\tau dx.
\end{aligned} \tag{6.94}$$

(6.94) ün sağ tarafına Hölder ve Young's eşitsizlikleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell \int_0^t g(t-\tau)xu_x(x,t)u_x(x,\tau)d\tau dx &\geq -\left[\frac{1}{2}(gou_x)(t) + \frac{1}{2}\int_0^t g(\tau)d\tau\int_0^\ell xu_x^2(x,t)dx\right] \\
&\quad + \int_0^t g(\tau)d\tau\int_0^\ell xu_x^2(x,t)dx \\
&= -\frac{1}{2}(gou_x)(t) + \frac{1}{2}\int_0^t g(\tau)d\tau\int_0^\ell xu_x^2(x,t)dx,
\end{aligned} \tag{6.95}$$

bulunur. (6.95) eşitsizliği (6.93)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
H''(t) - 4(\delta+1)\int_0^\ell xu_t^2 dx &\geq (-4-8\delta)E(0) + \left(4\delta - (1+4\delta)\int_0^t g(\tau)d\tau\right)\int_0^\ell xu_x^2 dx \\
&\quad + (4\delta+1)(gou_x)(t) + 2\left(1-\frac{4\delta+2}{p_1}\right)\int_0^\ell x|u|^{p(x)} dx
\end{aligned} \tag{6.96}$$

$$-2(2+4\delta)\int_0^t (g'ou_x)(\tau)d\tau + 4(2\delta+1)\int_0^t \int_0^\ell xu_\tau^2 dx d\tau,$$

elde edilir. Lemma 6.5.1.4’de verilen koşullar altında, ispat tamamlanır.

Lemma 6.5.1.5. (6.79) sağlansın ve $0 < \delta < \frac{p_1-2}{4}$ olsun. Ayrıca aşağıdaki durumlardan biri sağlansın:

- i) $E(0) < 0$ ve $\int_{\Omega} xu_0 u_1 dx > 0$,
- ii) $E(0) = 0$ ve $\int_{\Omega} xu_0 u_1 dx > 0$ ve

$$H'(0) > \int_0^\ell xu_0^2 dx, \quad (6.97)$$

- iii) $E(0) > 0$ ve

$$H'(0) > r_2 \left[H(0) + \frac{K_1}{4(\delta+1)} \right] + \int_0^\ell xu_0^2 dx. \quad (6.98)$$

Bu durumda $t > t^*$ için $H'(t) > \int_0^\ell xu_0^2 dx$ olur. Burada, (i) durumunda $t_0 = t^*$ ve (ii), (iii)

durumlarında da $t_0 = 0$ dır. Ayrıca K_1 ve t^* sırasıyla (6.110) ve (6.105)’de verilmiştir.

İspat.

- i) $E(0) < 0$ ve $\int_0^\ell xu_0 u_1 dx > 0$ olması durumunda, (6.84)’den

$$H''(t) \geq -4(1+2\delta)E(0),$$

yazılır. Burada 0 dan t ye integral alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^t H''(\tau) d\tau &\geq \int_0^t -4(1+2\delta)E(0) d\tau, \\ (H'(t) - H'(0)) &\geq -4(1+2\delta)E(0)t, \\ H'(t) &\geq H'(0) - 4(1+2\delta)E(0)t. \end{aligned} \quad (6.99)$$

elde edilir. (6.85) ifadesinde t yerine 0 yazılırsa,

$$H'(0) = 2 \int_0^{\ell} x u_0 u_1 dx + \int_0^{\ell} x u_0^2 dx, \quad (6.100)$$

elde edilir. Bu eşitlik (6.99)'da yerine yazılırsa,

$$H'(t) \geq 2 \int_0^{\ell} x u_0 u_1 dx + \int_0^{\ell} x u_0^2 dx - 4(1+2\delta) E(0)t, \quad (6.101)$$

halini alır. $E(0) < 0$ ve $\int_{\Omega} x u_0 u_1 dx > 0$ olduğundan, $t > t^*$ için,

$$H'(t) \geq \int_0^{\ell} x u_0^2 dx, \quad (6.102)$$

olur. Bu ifade ve (6.99)'dan,

$$4(1+2\delta) E(0)t \geq H'(0) - \int_0^{\ell} x u_0^2 dx, \quad (6.103)$$

olacak şekilde t vardır. Bu eşitsizlikten t çekilirse,

$$t \geq \frac{H'(0) - \int_0^{\ell} x u_0^2 dx}{4(1+2\delta) E(0)}, \quad (6.104)$$

elde edilir. $t \geq t^*$ için,

$$t^* = \max \left\{ 0, \frac{H'(0) - \int_0^{\ell} x u_0^2 dx}{4(1+2\delta) E(0)} \right\}, \quad (6.105)$$

bulunur.

ii) Eğer $E(0) = 0$ ve $\int_0^{\ell} x u_0 u_1 dx > 0$ ise, bu durumda (6.84)'den $t \geq 0$ için,

$$H''(t) \geq 0,$$

olur. Burada $(0, t)$ aralığında integral alınır,

$$H'(t) \geq H'(0)$$

yazılır. Ayrıca,

$$H'(t) = 2 \int_0^\ell x u u_t dx + \int_0^\ell x u^2 dx$$

ve

$$H'(0) = 2 \int_0^\ell x u_0 u_1 dx + \int_0^\ell x u_0^2 dx$$

dır. $H'(t) > H'(0)$ ifadesi üstteki eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$H'(t) \geq 2 \int_0^\ell x u_0 u_1 dx + \int_0^\ell x u_0^2 dx,$$

elde edilir. Böylece $t \geq 0$ için ve $\int_\Omega x u_0 u_1 dx > 0$ kabulünden,

$$H'(t) \geq \int_0^\ell x u_0^2 dx,$$

olur.

iii) $E(0) > 0$ ise, öncelikle

$$2 \int_0^t \int_0^\ell x u u_t dx d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^t \int_0^\ell x u^2 dx d\tau = \int_0^\ell x u^2(t) dx - \int_0^\ell x u^2(0) dx \quad (6.106)$$

eşitliği yazılsın. (6.106) denkleminde,

$$\int_0^\ell x u^2(t) dx = \int_0^\ell x u^2(0) dx + 2 \int_0^t \int_0^\ell x u u_t dx d\tau,$$

dir. Bu denklemde eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terime Hölder eşitsizliği ardından Young's eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^\ell x u^2(t) dx &= \int_0^\ell x u^2(0) dx + 2 \int_0^t \int_0^\ell x^{\frac{1}{2}} u x^{\frac{1}{2}} u_t dx d\tau \\ &\leq \int_0^\ell x u^2(0) dx + 2 \int_0^t \left[\left(\int_0^\ell x^{\frac{1}{2}} u \right)^2 dx \left(\int_0^\ell x^{\frac{1}{2}} u_t \right)^2 dx \right] d\tau \\ &\leq \int_0^\ell x u^2(0) dx + \int_0^t \int_0^\ell x u^2(\tau) dx d\tau + \int_0^t \int_0^\ell x u_\tau^2(\tau) dx d\tau, \end{aligned} \quad (6.107)$$

yazılır. (6.83) ile verilen $H(t)$ eşitliğinden yola çıkarak,

$$\int_0^{\ell} xu^2(x, t) dx = H(t) - \int_0^t \int_0^{\ell} xu^2(x, \tau) dx d\tau,$$

elde edilir. Ayrıca (6.85) yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$H'(t) = H(t) - \int_0^t \int_0^{\ell} xu^2(x, \tau) dx d\tau + 2 \int_0^{\ell} xu u_t dx,$$

bulunur. Bu ifadeye önce Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$H'(t) \leq H(t) - \int_0^t \int_0^{\ell} xu^2(x, \tau) dx d\tau + 2 \left(\int_0^{\ell} \left(x^{\frac{1}{2}} u \right)^2 dx \right) \left(\int_0^{\ell} \left(x^{\frac{1}{2}} u_t \right)^2 dx \right),$$

elde edilir. Ardından Young's eşitsizliği uygulandığında,

$$H'(t) \leq H(t) - \int_0^t \int_0^{\ell} xu^2 dx d\tau + \int_0^{\ell} xu^2 dx + \int_0^{\ell} xu_t^2 dx,$$

yazılır. (6.107) ifadesinden $\int_0^{\ell} xu^2(t) dx$ yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$H'(t) \leq H(t) + \int_0^{\ell} xu_0^2 dx + \int_0^{\ell} xu_t^2 dx + \int_0^t \int_0^{\ell} xu_{\tau}^2 dx d\tau, \quad (6.108)$$

elde edilir. (6.108) eşitsizliğinin her iki tarafı $-4(\delta + 1)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} -4(\delta + 1)H'(t) &\geq -4(\delta + 1)H(t) - 4(\delta + 1) \int_0^{\ell} xu_0^2 dx \\ &\quad - 4(\delta + 1) \int_0^{\ell} xu_t^2 dx - 4(\delta + 1) \int_0^t \int_0^{\ell} xu_{\tau}^2 dx d\tau, \end{aligned}$$

olur. Bu ifade ile (6.84) taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} H''(t) - 4(\delta + 1)H'(t) &\geq -4(\delta + 1)H(t) - 4(\delta + 1) \int_0^{\ell} xu_0^2 dx - 4(\delta + 1) \int_0^{\ell} xu_t^2 dx \\ &\quad - 4(\delta + 1) \int_0^t \int_0^{\ell} xu_{\tau}^2 dx d\tau - 4(2\delta + 1)E(0) \\ &\quad + 4(2\delta + 1) \int_0^t \int_0^{\ell} xu_{\tau}^2(x, \tau) dx d\tau + 4(\delta + 1) \int_0^{\ell} xu_t^2 dx, \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$H''(t) - 4(\delta + 1)H'(t) + 4(\delta + 1)H(t) + 4(2\delta + 1)E(0) - 4(2\delta + 1) \int_0^t \int_0^\ell x u_\tau^2 dx d\tau + 4(\delta + 1) \int_0^\ell x u_0^2 dx + 4(\delta + 1) \int_0^t \int_0^\ell x u_\tau^2 dx d\tau \geq 0,$$

olur. Böylece,

$$H''(t) - 4(\delta + 1)H'(t) + 4(\delta + 1)H(t) + K_1 \geq 0, \quad (6.109)$$

bulunur. Burada,

$$K_1 = (8\delta + 4)E(0) + 4(\delta + 1) \int_0^\ell x u_0^2 dx - 4\delta \int_0^t \int_0^\ell x u_\tau^2 dx d\tau, \quad (6.110)$$

dir. $t > 0$ için,

$$B(t) = H(t) + \frac{K_1}{4(\delta + 1)},$$

olsun. Bu durumda $B(t)$, Lemma 3.2.2.1'i sağlar. Lemma ispatı tamamlanır.

Teorem 6.5.1.6. (6.79) şartları sağlansın ve $0 < \delta < \frac{p_1 - 2}{4}$ olsun. Aşağıdaki durumlarda,

i) $E(0) < 0$ ve $\int_0^\ell x u_0 u_1 dx > 0$,

ii) $E(0) = 0$, $\int_0^\ell x u_0 u_1 dx > 0$ ve (6.97) sağlanır,

iii) $0 < E(0) < \frac{\left(H'(t_0) - \int_0^\ell x u_0^2 dx\right)^2}{8 \left(H(t_0) + (T_1 - t_0) \int_0^\ell x u_0^2 dx\right)}$ ve (6.98) sağlanır. Öyleyse, u

çözümü (6.80) anlamında sonlu bir T^* zamanında patlar.

i) durumunda:

$$T^* \leq t_0 - \frac{L(t_0)}{L'(t_0)} \quad (6.111)$$

dır. Ayrıca, eğer $L(t_0) < \min \left\{ 1, \sqrt{-\frac{a}{b}} \right\}$ ise, o zaman,

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln \frac{\sqrt{-\frac{a}{b}}}{\sqrt{-\frac{a}{b}} - L(t_0)} \quad (6.112)$$

olur. Burada,

$$a = \delta^2 L^{2+\frac{2}{\delta}}(t) \left[\left(H'(t_0) - \int_0^\ell x u_0^2 dx \right)^2 - 8E(0)L^{-\frac{1}{\delta}}(t_0) \right] \quad (6.113)$$

ve

$$b = 8\delta^2 E(0) \quad (6.114)$$

dir.

ii) durumunda:

$$T^* \leq t_0 - \frac{L(t_0)}{L'(t_0)} \quad (6.115)$$

dır.

iii) durumunda:

$$T^* \leq \frac{L(t_0)}{\sqrt{a}} \text{ veya } T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}} \frac{\delta c}{\sqrt{a}} \left\{ 1 - [1 + cL(t_0)]^{-\frac{1}{2\delta}} \right\},$$

olup, burada $c = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{\delta}{2+\delta}}$ dir. Burada a ve b sırasıyla (6.113) ve (6.114)'de verildiği

gibidir. i durumunda $t_0 = t^*$ (6.105)'de verildiği gibidir, ii ve iii durumunda $t_0 = 0$ dır.

İspat. $t \in [0, T_1]$ için,

$$L(t) = \left[H(t) + (T_1 - t) \int_0^\ell x u_0^2 dx \right]^{-\delta} \quad (6.116)$$

olsun. Burada T_1 daha sonra belirlenecek olan bir sabittir. (6.116)'nın birinci ve ikinci mertebeden türevleri alınır,

$$L'(t) = -\delta \left[H(t) + (T_1 - t) \int_0^\ell x u_0^2 dx \right]^{-\delta-1} \left[H'(t) - \int_0^\ell x u_0^2 dx \right],$$

buradan,

$$L'(t) = -\delta L^{1+\frac{1}{\delta}}(t) \left[H'(t) - \int_0^\ell x u_0^2 dx \right] \quad (6.117)$$

yazılır, ve

$$\begin{aligned} L''(t) = & -\delta(-\delta-1) \left[H(t) + (T_1-t) \int_0^\ell x u_0^2 dx \right]^{-\delta-2} \left[H'(t) - \int_0^\ell x u_0^2 dx \right]^2 \\ & - \delta \left[H(t) + (T_1-t) \int_0^\ell x u_0^2 dx \right]^{-\delta-1} H''(t) \end{aligned} \quad (6.118)$$

dir.

$$L^{1+\frac{2}{\delta}}(t) = \left[H(t) + (T_1-t) \int_0^\ell x u_0^2 dx \right]^{-\delta-2}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} L''(t) = & -\delta L^{1+\frac{2}{\delta}}(t) H''(t) \left[H(t) + (T_1-t) \int_0^\ell x u_0^2 dx \right] \\ & + \delta L^{1+\frac{2}{\delta}}(t) (1+\delta) \left[H'(t) - \int_0^\ell x u_0^2 dx \right]^2 \end{aligned} \quad (6.119)$$

elde edilir. Buradan,

$$V(t) = H''(t) \left[H(t) + (T_1-t) \int_0^\ell x u_0^2 dx \right] - (1+\delta) \left[H'(t) - \int_0^\ell x u_0^2 dx \right]^2 \quad (6.120)$$

olmak üzere,

$$L''(t) = -\delta L^{1+\frac{2}{\delta}}(t) V(t) \quad (6.121)$$

yazılabilir. Hesaplamalarda kolaylık olması için,

$$\begin{aligned} P_u &= \int_0^\ell x u^2 dx, & R_u &= \int_0^\ell x u_t^2 dx, \\ Q_u &= \int_0^t \int_0^\ell x u^2 dx d\tau, & S_u &= \int_0^t \int_0^\ell x u_\tau^2 dx d\tau, \end{aligned}$$

gösterimleri kullanılacaktır. (6.84)'den,

$$H''(t) \geq (-4 - 8\delta)E(0) + 4(\delta + 1) \int_0^\ell x u_t^2 dx + 4(2\delta + 1) \int_0^t \int_0^\ell x u_\tau^2(x, \tau) dx d\tau$$

yazılır. Buradan,

$$H''(t) \geq (-4 - 8\delta)E(0) + 4(\delta + 1) \left\{ \int_0^\ell x u_t^2 dx + \int_0^t \int_0^\ell x u_\tau^2 dx d\tau \right\} \quad (6.122)$$

elde edilir. (6.106), (6.85)'de yerine yazılırsa,

$$H'(t) = 2 \int_0^\ell x u u_t dx + 2 \int_0^t \int_0^\ell x u u_t dx d\tau + \int_0^\ell x u_0^2 dx$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafının ilk iki terimine Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} H'(t) &\leq 2 \left(\int_0^\ell x u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\ell x u_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + 2 \left(\int_0^t \int_0^\ell x u^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\ell x u_\tau^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^\ell x u_0^2 dx \end{aligned} \quad (6.123)$$

bulunur. (6.116) ve (6.122)-(6.123) eşitsizlikleri (6.120)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} V(t) &\geq \left[(-4 - 8\delta)E(0) + 4(\delta + 1) \left\{ \int_0^\ell x u_t^2 dx + \int_0^t \int_0^\ell x u_\tau^2 dx d\tau \right\} \right] L^{\frac{1}{\delta}}(t) \\ &\quad - 4(1 + \delta) \left[\sqrt{\int_0^\ell x u^2 dx \int_0^\ell x u_t^2 dx} + \sqrt{\int_0^t \int_0^\ell x u^2 dx d\tau \int_0^t \int_0^\ell x u_\tau^2 dx d\tau} \right]^2 \end{aligned} \quad (6.124)$$

olur. Yani,

$$\begin{aligned} V(t) &\geq \left[(-4 - 8\delta)E(0) + 4(\delta + 1) \{R_u + S_u\} \right] L^{\frac{1}{\delta}}(t) \\ &\quad - 4(1 + \delta) \left[\sqrt{R_u \cdot P_u} + \sqrt{Q_u \cdot S_u} \right]^2 \end{aligned} \quad (6.125)$$

yazılabilir. (6.125)'de düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned} V(t) &\geq (-4 - 8\delta)E(0) L^{\frac{1}{\delta}}(t) \\ &\quad + 4(\delta + 1) \left[(R_u + S_u) \left(H(t) + (T_1 - t) \int_0^\ell x u_0^2 dx \right) - \left(\sqrt{R_u \cdot P_u} + \sqrt{Q_u \cdot S_u} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (6.126)$$

elde edilir.

$$H(t) = P_u + Q_u$$

olmak üzere, (6.126)'nın son hali,

$$M(t) = (R_u + S_u)(P_u + Q_u) - \left(\sqrt{R_u P_u} + \sqrt{Q_u S_u} \right)^2 \quad (6.127)$$

olduğu durumda,

$$V(t) \geq (-4 - 8\delta)E(0)L^{-\frac{1}{\delta}}(t) + 4(\delta + 1)(R_u + S_u)(T_1 - t) \int_0^t x u_0^2 dx + M(t) \quad (6.128)$$

şeklinde yazılır. $a, b, c, d \geq 0$ olmak üzere,

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

formundaki Schwarz eşitsizliğinden ötürü $M(t)$ nin negatif olmadığı açıkça görülür.

Böylece $t \geq t_0$ için,

$$V(t) \geq (-4 - 8\delta)E(0)L^{-\frac{1}{\delta}}(t) \quad (6.129)$$

dir. (6.121) ve (6.129)'dan $t \geq t_0$ için,

$$L''(t) = -\delta L^{1+\frac{2}{\delta}}(t)V(t) \leq 4\delta(1+2\delta)E(0)L^{1+\frac{1}{\delta}}(t) \quad (6.130)$$

eşitsizliği elde edilir.

(6.117) ve Lemma 6.5.1.5'den $t \geq t_0$ için $L'(t) < 0$ olduğu görülür. (6.130) eşitsizliği

$L'(t)$ ile çarpılıp $[t_0, t]$ üzerinde integrali alınırsa, $t \geq t_0$ için,

$$\int_{t_0}^t L'(t)L''(t)dt \geq 4\delta(1+2\delta)E(0) \int_{t_0}^t L^{1+\frac{1}{\delta}}(t)L'(t)dt$$

elde edilir. Yukarıda yazılan integral eşitsizlikten,

$$\begin{aligned} \frac{L'^2(t)}{2} \Big|_{t_0}^t &\geq (4\delta(1+2\delta)E(0)) \frac{L^{2+\frac{1}{\delta}}(t)}{2+\frac{1}{\delta}} \Big|_{t_0}^t, \\ \frac{L'^2(t) - L'^2(t_0)}{2} &\geq 4\delta^2 E(0) \left(L^{2+\frac{1}{\delta}}(t) - L^{2+\frac{1}{\delta}}(t_0) \right), \end{aligned}$$

$$(L'^2(t) - L'^2(t_0)) \geq 8\delta^2 E(0) L^{2+\frac{1}{\delta}}(t) - 8\delta^2 E(0) L^{2+\frac{1}{\delta}}(t_0)$$

elde edilir, buradan da,

$$L'^2(t) \geq 8\delta^2 E(0) L^{2+\frac{1}{\delta}}(t) - 8\delta^2 E(0) L^{2+\frac{1}{\delta}}(t_0) + L'^2(t_0) \quad (6.131)$$

yazılır. (6.117)'den,

$$L'^2(t_0) = \delta^2 L^{2+\frac{2}{\delta}}(t_0) \left[H'(t_0) - \int_0^\ell x u_0^2 dx \right]^2$$

bulunur ve (6.131)'de yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned} L'^2(t) &\geq 8\delta^2 E(0) L^{2+\frac{1}{\delta}}(t) - 8\delta^2 E(0) L^{2+\frac{1}{\delta}}(t_0) \\ &\quad + 8\delta^2 E(0) L^{2+\frac{2}{\delta}}(t_0) \left[H'(t_0) - \int_0^\ell x u_0^2 dx \right]^2 \\ &= 8\delta^2 E(0) L^{2+\frac{1}{\delta}}(t) \\ &\quad + \delta^2 L^{2+\frac{2}{\delta}}(t_0) \left[\left(H'(t_0) - \int_0^\ell x u_0^2 dx \right)^2 - 8E(0) L^{-\frac{1}{\delta}}(t_0) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $t \geq t_0$ için,

$$L'^2(t) \geq a + b L^{2+\frac{1}{\delta}}(t)$$

bulunur. Burada a ve b sırasıyla (6.113) ve (6.114)'deki gibidir.

Eğer (iii) sağlanıyor ise, (i) deki adımlara benzer olarak, $a > 0$ olması için ancak ve ancak,

$$\left(H'(t_0) - \int_0^\ell x u_0^2 dx \right)^2 - 8E(0) L^{-\frac{1}{\delta}}(t_0) > 0,$$

$$\frac{\left(H'(t_0) - \int_0^\ell x u_0^2 dx \right)^2}{8L^{-\frac{1}{\delta}}(t_0)} > E(0)$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. (6.116)'dan yola çıkarak,

$$L(t)^{-\frac{1}{\delta}} = H(t) + (T_1 - t) \int_0^{\ell} x u_0^2 dx$$

yazılır. O halde bu eşitlikten yola çıkarak,

$$E(0) < \frac{\left(H'(t_0) - \int_0^{\ell} x u_0^2 dx \right)^2}{8 \left(H(t_0) + (T_1 - t_0) \int_0^{\ell} x u_0^2 dx \right)} \quad (6.132)$$

olur. Böylece Lemma 3.2.2.2'den,

$$\lim_{t \rightarrow T^*} L(t) = 0$$

şartını sağlayan sonlu bir T^* zamanı vardır ki T^* in üst sınırları $E(0)$ ın işaretine göre belirlenir.

6.5.2. $m(x) \neq 2$

Bu bölümde $m(x)$, (6.4) ile tanımlanan şekilde üstten sınırlı olduğu durumda çözümlerin patlaması Georgiev ve Todorova metodu ile incelenecektir. $m(x) \neq 2$ olması, denklemdeki sönmüleme teriminin lineer olmadığı anlamına gelmektedir. Bu sebeple yapılan bu inceleme literatüre önemli bir katkı sunmaktadır. $m(x) \neq 2$ alındığında (6.1)-(6.3) problemi,

$$u_{tt} - \frac{1}{x} (x u_x)_x + \int_0^t g(t-\tau) \frac{1}{x} (x u_x(x, \tau))_x d\tau + |u_t|^{m(x)-2} u_t = |u|^{p(x)-2} u, \quad (6.133)$$

$$(0, \ell) \times (0, T),$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, \ell), \quad (6.134)$$

$$u(\ell, t) = 0, \quad \int_0^{\ell} x u(x, t) dx = 0, \quad (6.135)$$

halini alır. Sonuca ulaşmak için (6.12)'ye ilave koşul olarak,

$$g(\tau) \geq 0, \quad g'(\tau) \leq 0 \quad \text{ve} \quad \int_0^{\infty} g(\tau) d\tau < \frac{\frac{p_1}{2} - 1}{\frac{p_1}{2} - 1 + \frac{1}{2p_1}}, \quad (6.136)$$

yazılsın.

Not 6.5.2.1. $E(t)$ fonksiyonu (6.133)-(6.134) problemi için de (6.22)'de yazıldığı gibidir. Ayrıca benzer şekilde,

$$E'(t) = (g'ou_x)(t) - g(t) \int_0^\ell x u_x^2 dx - \int_0^\ell x |u_t|^{m(x)} dx \leq 0, \quad (6.137)$$

elde edilir.

Şimdi aşağıdaki eşitlikler yazılsın,

$$B_1 = \max \left\{ 1, \frac{B}{l^{1/2}} \right\}, \quad \lambda_1 = \left(\frac{1}{bB_1^{p_1}} \right)^{\frac{1}{p_1-2}}, \quad E_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1} \right) \lambda_1^2, \quad G(t) = E_2 - E(t). \quad (6.138)$$

$E_2 \in (E(0), E_1)$ olacak şekilde daha sonra seçilecek bir sabittir. (6.138)'den, aşağıdaki ifade yazılır,

$$G'(t) = -E'(t) \geq \int_0^\ell x |u_t|^{m(x)} dx \geq 0. \quad (6.139)$$

Lemma 6.5.2.2. (Park ve Kang, 2019) (6.12) sağlansın ve $p(x)$ ve $m(x)$ (6.4) ve (6.5) koşullarını sağlansın. O zaman,

$$E(0) < E_1 \quad \text{ve} \quad \lambda_1 < \lambda(0) = l^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_0\|_H \leq B_1^{-1},$$

eşitsizliklerinin sağlandığı varsayılınsın. Öyleyse,

$$l \|\nabla u(t)\|_H^2 \geq \lambda_2^2, \quad t \geq 0, \quad (6.140)$$

ve

$$\int_0^\ell x |u(t)|^{p(x)} \geq B_1^{p_1} \lambda_2^{p_1}, \quad t \geq 0, \quad (6.141)$$

olacak şekilde $\lambda_2 > \lambda_1$ sabiti vardır.

Lemma 6.5.2.3. $p(x)$, (6.4) koşullarını sağlayan ölçülebilir fonksiyon olsun. Öyleyse $u = H_0^1(0, \ell)$ ve $2 \leq s \leq p_1$ için,

$$\left[\|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \right]^{\frac{s}{p_1}} \leq C_1 (\|\nabla u\|_H^2 + \|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)}), \quad (6.142)$$

yazılır, burada $C_1 = \max \{1, B^2\}$ dir.

Lemma 6.5.2.4. Lemma 6.5.2.2'nin koşulları sağlansın. Öyleyse, $u = H_0^1(0, \ell)$ ve $2 \leq s \leq p_1$ için,

$$\left[\|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \right]^{\frac{s}{p_1}} \leq C_2 \left(-G(t) - \|u_t\|_H^2 + \|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \right), \quad (6.143)$$

elde edilir. C_2 , l ve C_1 e bağlı pozitif sabittir.

Özel Hal 6.5.2.5. Lemma 6.5.2.2'nin koşulları sağlansın. Öyleyse, $u = H_0^1(0, \ell)$ ve $2 \leq s \leq p_1$ için, aşağıdaki ifade yazılır,

$$\|u(t)\|_{L_x^{p_1}}^s \leq C_2 \left(-G(t) - \|u_t(t)\|_H^2 + \|u\|_{L_x^{p_1}}^{p_1} \right). \quad (6.144)$$

Lemma 6.5.2.6. Lemma 6.5.2.2'nin koşulları sağlansın. Öyleyse,

$$0 < G(0) \leq G(t) \leq \int_0^\ell x |u(t)|^{p(x)} dx, \quad (6.145)$$

elde edilir.

Lemma 6.5.2.7. Lemma 6.5.2.2'nin koşulları sağlansın. $C_3 > 0$ olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$\|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \leq C_3 (\|u\|_{L_x^{p_1}}^{p_1}). \quad (6.146)$$

Lemma 6.5.2.7 ve $L^{p_1}(0, \ell) \hookrightarrow L^{m_2}(0, \ell)$ Sobolev gömmesi ile, aşağıdaki lemma yazılır.

Lemma 6.5.2.8. Lemma 6.5.2.2'nin koşulları altında ve $m_2 < p_1$ olmak üzere, $C_4 > 0$ değeri için,

$$\|u\|_{L_x^{m(x)}}^{m(x)} \leq C_4 \left[\left(\|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \right)^{m_1/p_1} + \left(\|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \right)^{m_2/p_1} \right], \quad (6.147)$$

yazılır. Patlama sonucunu göstermek için, beşinci bölümde yazılanlara benzer argümanlar kullanılacaktır.

Teorem 6.5.2.9. $p(x)$ ve $m(x)$, (6.4) ve (6.5) koşullarını sağlasın. $m_2 < p_1$ olmak üzere, g fonksiyonu (6.12) ve (6.136) koşullarını sağlasın. Öyleyse,

$$E(0) < \left(1 - \frac{1-l}{p_1(p_1-2)l}\right) E_1 \quad \text{ve} \quad \lambda_1 < l^{\frac{1}{2}} \|\nabla u_0\|_H \leq B_1^{-1},$$

olduğunda, (6.133)-(6.135) probleminin çözümü sonlu zamanda patlar.

İspat.

$$F(t) = G^{1-\nu}(t) + \varepsilon \int_0^\ell x u u_t dx \quad (6.148)$$

fonksiyonu, $\varepsilon > 0$ daha sonra seçilecek bir sayı ve

$$0 < \nu < \min \left\{ \frac{p_1-2}{2p_1}, \frac{p_1-m_2}{p_1(m_2-1)} \right\} \quad (6.149)$$

olmak üzere, tanımlansın.

(6.133) ve Young's eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} F'(t) &= (1-\nu)G^{-\nu}(t)G'(t) + \varepsilon \|u_t(t)\|_H^2 - \varepsilon \|\nabla u(t)\|_H^2 \\ &\quad + \varepsilon \int_0^\ell \int_0^t g(t-\tau) x u_x(x,t) u_x(x,\tau) d\tau dx \\ &\quad - \varepsilon \int_0^\ell x |u_t(t)|^{m(x)-2} u_t u dx + \varepsilon \int_0^\ell x |u(t)|^{p(x)} dx, \end{aligned} \quad (6.150)$$

elde edilir. Bazı $0 < \varepsilon_1 < 1$ için, Young's eşitsizliğini kullanarak, aşağıdaki ifade yazılır,

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \int_0^t g(t-\tau) x u_x(x,t) u_x(x,\tau) d\tau dx &= \int_0^\ell \int_0^t x g(t-\tau) \nabla u(t) (\nabla u(\tau) - \nabla u(t)) d\tau dx \\ &\quad + \int_0^t g(t-\tau) \|\nabla u(t)\|_H^2 d\tau = \int_0^\ell \int_0^t x g(t-\tau) \nabla u(t) \nabla u(\tau) d\tau dx \\ &\quad - \int_0^\ell \int_0^t x g(t-\tau) |\nabla u(t)|^2 d\tau dx + \int_0^t g(t-\tau) \|\nabla u(t)\|_H^2 d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} (g o u_x)(t) + \frac{1}{2} \int_0^t g(\tau) d\tau \int_0^\ell x u_x^2 dx \geq \left(1 - \frac{1}{2p_1(1-\varepsilon_1)}\right) \int_0^t g(\tau) d\tau \|\nabla u(t)\|_H^2 \\ &\quad - \frac{p_1(1-\varepsilon_1)}{2} (g o \nabla u)(t). \end{aligned} \quad (6.151)$$

(6.151), (6.150)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
F'(t) &\geq (1-\nu)G^{-\nu}(t)G'(t) + \varepsilon \|u_t(t)\|_H^2 - \varepsilon \|\nabla u(t)\|_H^2 \\
&+ \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2p_1(1-\varepsilon_1)}\right) \int_0^t g(\tau) d\tau \|\nabla u(t)\|_H^2 - \frac{\varepsilon p_1(1-\varepsilon_1)}{2} (go\nabla u)(t) \quad (6.152) \\
&- \varepsilon \int_0^\ell x |u_t(t)|^{m(x)-2} u_t u dx + \varepsilon \int_0^\ell x |u(t)|^{p(x)} dx,
\end{aligned}$$

elde edilir. (6.152) de $(go\nabla u)(t)$ yerine (6.22) ve (6.138)'den gerekli terimler yazılarak, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\begin{aligned}
F'(t) &\geq (1-\nu)G^{-\nu}(t)G'(t) + \varepsilon \left(1 + \frac{p_1(1-\varepsilon_1)}{2}\right) \|u_t(t)\|_H^2 + \varepsilon p_1(1-\varepsilon_1)G(t) \\
&+ \varepsilon \left\{ \left(\frac{p_1(1-\varepsilon_1)}{2} - 1 \right) \left(1 - \int_0^t g(\tau) d\tau \right) - \frac{1}{2p_1(1-\varepsilon_1)} \int_0^t g(\tau) d\tau \right\} \|\nabla u(t)\|_H^2 \quad (6.153) \\
&- \varepsilon p_1(1-\varepsilon_1)E_2 - \varepsilon \int_0^\ell x |u_t(t)|^{m(x)-2} u_t u dx + \varepsilon \varepsilon_1 \|u(t)\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)}.
\end{aligned}$$

(6.12) ve (6.136) kullanılarak, aşağıdaki eşitsizlik yazılır,

$$\left(\frac{p_1}{2} - 1 \right) l - \frac{1}{2p_1} (1-l) > 0. \quad (6.154)$$

(6.154) den, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$ ve $t > T_0$ olacak şekilde $\varepsilon_1^* > 0$ ve $T_0 > 0$ bulmak kolaydır,

$$\begin{aligned}
&\left\{ \left(\frac{p_1(1-\varepsilon_1)}{2} - 1 \right) l - \frac{1}{2p_1(1-\varepsilon_1)} (1-l) \right\} \lambda_2^2 \\
&> \left\{ \left(\frac{p_1(1-\varepsilon_1)}{2} - 1 \right) l - \frac{1}{2p_1(1-\varepsilon_1)} (1-l) \right\} \lambda_1^2. \quad (6.155)
\end{aligned}$$

Ayrıca,

$$E(0) < \left(1 - \frac{1-l}{p_1(p_1-2)l}\right) E_1 = \frac{\left(\frac{p_1}{2} - 1\right) l - \frac{1}{2p_1} (1-l)}{p_1 l} \lambda_1^2 < E_1,$$

ve

$$\frac{\left(\frac{p_1(1-\varepsilon_1)}{2} - 1\right) l - \frac{1}{2p_1(1-\varepsilon_1)} (1-l)}{p_1 l} \lambda_1^2 < \frac{\left(\frac{p_1}{2} - 1\right) l - \frac{1}{2p_1} (1-l)}{p_1 l} \lambda_1^2,$$

eşitsizliklerinden yola çıkarak,

$$\frac{\left(\frac{p_1(1-\varepsilon_1)}{2}-1\right)l-\frac{1}{2p_1(1-\varepsilon_1)}(1-l)}{p_1 l} \lambda_1^2 \geq (1-\varepsilon_1)E_2, \quad (6.156)$$

sağlanacak şekilde $\varepsilon_1 > 0$ yeterince küçük ve $E_2 \in (E(0), E_1)$ alındığında, elde edilir.

(6.12), (6.140), (6.155) ve (6.156) kullanılarak, aşağıdaki ifade yazılır,

$$\left\{ \left(\frac{p_1(1-\varepsilon_1)}{2}-1 \right) \left(1 - \int_0^t g(\tau) d\tau \right) - \frac{1}{2p_1(1-\varepsilon_1)} \int_0^t g(\tau) d\tau \right\} \|\nabla u(t)\|_H^2 - p_1(1-\varepsilon_1)E_2 \geq 0. \quad (6.157)$$

(6.157), (6.153)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} F'(t) &\geq (1-\nu)G^{-\nu}(t)G'(t) + \varepsilon \left(1 + \frac{p_1(1-\varepsilon_1)}{2} \right) \|u_t(t)\|_H^2 + \varepsilon p_1(1-\varepsilon_1)G(t) \\ &\quad + \varepsilon \varepsilon_1 \|u(t)\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} - \varepsilon \int_0^\ell x |u_t(t)|^{m(x)-2} u_t u dx, \quad t \geq T_0, \end{aligned} \quad (6.158)$$

elde edilir. (6.158)'in son terimi hesaplanacak olursa, (6.4) ve Young's eşitsizliği kullanılarak, $\forall \eta > 0$ için,

$$\int_0^\ell x |u_t(t)|^{m(x)-1} u dx \leq \frac{1}{m_1} \int_0^\ell \eta^{m(x)} x |u(t)|^{m(x)} dx + \frac{m_2-1}{m_2} \int_0^\ell \eta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} x |u_t(t)|^{m(x)} dx, \quad (6.159)$$

yazılır. η değeri,

$$\eta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} = \beta G^{-\nu}(t)$$

daha sonra belirlenecek büyük bir β katsayısı için, yukarıda yazılan eşitlik sağlanacak şekilde seçilip, (6.139)'daki bilgiler kullanılarak, (6.159)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^\ell x |u_t(t)|^{m(x)-1} u dx &\leq \frac{1}{m_1} \int_0^\ell \beta^{1-m(x)} G^{\nu(m(x)-1)}(t) x |u(t)|^{m(x)} dx \\ &\quad + \frac{(m_2-1)\beta}{m_2} G^{-\nu}(t)G'(t), \end{aligned} \quad (6.160)$$

elde edilir. (6.145) ve (6.147) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m_1} \int_0^\ell \beta^{1-m(x)} G^{\nu(m(x)-1)}(t)x |u(t)|^{m(x)} dx \leq \frac{\beta^{1-m_1}}{m_1} \int_0^\ell G^{\nu(m(x)-1)}(t)x |u(t)|^{m(x)} dx \\
& \leq \frac{\beta^{1-m_1}}{m_1} \max \{G^{\nu(m_1-1)}(t), G^{\nu(m_2-1)}(t)\} \int_0^\ell x |u(t)|^{m(x)} dx \\
& \leq \frac{\beta^{1-m_1}}{m_1} C_4 \max \{G^{\nu(m_1-1)}(t), G^{\nu(m_2-1)}(t)\} \left[\left(\|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \right)^{m_1/p_1} + \left(\|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \right)^{m_2/p_1} \right] \\
& \leq \frac{\beta^{1-m_1}}{m_1} C_4 \max \left\{ \left(\frac{1}{p_1} \|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \right)^{\nu(m_1-1)}, \left(\frac{1}{p_1} \|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \right)^{\nu(m_2-1)} \right\} \left[\left(\|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \right)^{m_1/p_1} + \left(\|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \right)^{m_2/p_1} \right] \\
& \leq \frac{\beta^{1-m_1}}{m_1} C_4 \max \left\{ \left(\frac{1}{p_1} \right)^{\nu(m_1-1)} \left(\left[\|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \right]^{\nu(m_1-1)+\frac{m_1}{p_1}} + \left[\|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \right]^{\nu(m_1-1)+\frac{m_2}{p_1}} \right), \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{1}{p_1} \right)^{\nu(m_2-1)} \left(\left[\|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \right]^{\nu(m_2-1)+\frac{m_1}{p_1}} + \left[\|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \right]^{\nu(m_2-1)+\frac{m_2}{p_1}} \right) \right\},
\end{aligned}$$

elde edilir. $2 \leq m_1 \leq m_2 < p_1$ den, aşağıdaki yazılır,

$$\begin{aligned}
& \max \left\{ \nu(m_1-1) + \frac{m_1}{p_1}, \nu(m_1-1) + \frac{m_2}{p_1}, \nu(m_2-1) + \frac{m_1}{p_1}, \nu(m_2-1) + \frac{m_2}{p_1} \right\} \\
& = \nu(m_2-1) + \frac{m_2}{p_1}.
\end{aligned}$$

(6.149) ve Lemma 6.5.2.4 kullanılarak, $s = m_2 + \nu p_1(m_2-1) \leq p_1$ için,

$$\frac{1}{m_1} \int_0^\ell \beta^{1-m(x)} G^{\nu(m(x)-1)}(t)x |u(t)|^{m(x)} dx \leq C_5 \beta^{1-m_1} \left(-G(t) - \|u_t\|_H^2 + \|u\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)} \right), \quad (6.161)$$

elde edilir, burada $C_5 = \frac{2C_2C_4}{m_1} \max \left\{ \left(\frac{1}{p_1} \right)^{\nu(m_1-1)}, \left(\frac{1}{p_1} \right)^{\nu(m_2-1)} \right\}$ dir.

(6.158), (6.160), ve (6.161) birlikte kullanıldığında, aşağıdaki ifade bulunur,

$$\begin{aligned}
F'(t) & \geq \left[(1-\nu) - \frac{(m_2-1)\varepsilon\beta}{m_2} \right] G^{-\nu}(t) G'(t) + \varepsilon \left(1 + C_5 \beta^{1-m_1} + \frac{p_1(1-\varepsilon_1)}{2} \right) \|u_t(t)\|_H^2 \\
& \quad + \varepsilon \left(p_1(1-\varepsilon_1) + C_5 \beta^{1-m_1} \right) G(t) + \varepsilon \left(\varepsilon_1 - C_5 \beta^{1-m_1} \right) \|u(t)\|_{L_x^{p(x)}}^{p(x)}, \quad t \geq T_0.
\end{aligned} \quad (6.162)$$

Öncelikle,

$$\varepsilon_1 - C_5 \beta^{1-m_1} > 0$$

sağlanacak şekilde $\beta > 0$ yeterince büyük seçilir.

Öyleyse burdan elde edilen β kullanılarak ve

$$(1-\nu) - \frac{(m_2-1)\varepsilon\beta}{m_2} > 0, \quad G^{1-\nu}(T_0) + \varepsilon \int_0^\ell u(T_0)u_t(T_0)dx > 0,$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ yeterince küçük seçilir.

Elde edilenlerden, (6.146) ve (6.162)'den,

$$F'(t) \geq C \left(\|u_t(t)\|_H^2 + \|u\|_{L_x^{p_1}}^{p_1} + G(t) \right), \quad t \geq T_0, \quad (6.163)$$

yazılır. Burada ve devamında C genel pozitif bir sabiti ifade eder. Öyleyse,

$$F(t) \geq F(T_0) > 0, \quad t \geq T_0,$$

yazılır. O zaman, beşinci bölümde kullanılan geçişler kullanılırsa,

$$F^{\frac{1}{1-\nu}}(t) \leq C \left(\|u_t(t)\|_H^2 + \|u\|_{L_x^{p_1}}^{p_1} + G(t) \right), \quad t \geq T_0, \quad (6.164)$$

elde edilir. $L_x^{p_1}(0, \ell) \hookrightarrow L_x^H(0, \ell)$ gömmesinin kullanıldığı not edilsin,

$$\left| \int_0^\ell xu(t)u_t(t)dx \right| \leq \|u(t)\|_H \|u_t(t)\|_H \leq C \|u(t)\|_{L_x^{p_1}} \|u_t(t)\|_H,$$

bulunur. $\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} + \frac{1}{2(1-\nu)} = 1$ olmak üzere Young's eşitsizliği kullanılarak, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\left| \int_0^\ell xu(t)u_t(t)dx \right|^{\frac{1}{1-\nu}} \leq C \left(\|u(t)\|_{L_x^{p_1}}^{1/1-\nu} \|u_t(t)\|_H^{1/1-\nu} \right) \leq \left(\|u(t)\|_{L_x^{p_1}}^{2/1-2\nu} \|u_t(t)\|_H^2 \right). \quad (6.165)$$

(6.144) ve (6.149) kullanılarak, $s = \frac{2}{1-2\sigma} \leq p_1$ için,

$$\left| \int_0^\ell xu(t)u_t(t)dx \right|^{\frac{1}{1-\nu}} \leq C \left(\|u_t(t)\|_H^2 + \|u\|_{L_x^{p_1}}^{p_1} + G(t) \right). \quad (6.166)$$

yazılır. (6.148) ve (6.165)'den, (6.164)'ün sağlandığı görülür. (6.163) ve (6.164) birlikte kullanıldığında,

$$F'(t) \geq CF^{\frac{1}{1-\nu}}(t), \quad t \geq T_0,$$

yazılır. Basit bir integral alınarak,

$$F^{\frac{\nu}{1-\nu}}(t) \geq \frac{1}{F^{\frac{\nu}{1-\nu}}(T_0) - \frac{C\nu t}{1-\nu}}, \quad t \geq T_0,$$

elde edilir. Sonuç olarak, (6.1)-(6.3) probleminin çözümü $T^* \leq \frac{1-\nu}{C\nu} F^{\frac{\nu}{1-\nu}}(T_0)$ zamanında patlar.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, değişken üsler içeren doğrusal olmayan dinamik denklemlerin çözümlerinin kalitatif davranışları kapsamlı bir şekilde analiz edilmiştir. Yapılan titiz matematiksel incelemeler sonucunda aşağıdaki temel sonuçlara ulaşılmıştır:

Bazı ters problemler için, uygun koşullar altında çözümlerin enerji fonksiyonlarının üstel biçimde azaldığı gösterilmiş ve bu sonuç klasik Nakao eşitsizliği çerçevesinin değişken üslü uzaylara başarıyla genellendiğini ortaya koymuştur.

Başlangıç enerjisi negatif olan veya belirli bir eşik değeri sağlayan durumlarda, yarı lineer dalga denklemleri ve viskoelastik denklemlerin çözümlerinin sonlu zamanda patladığı ispatlanmıştır. Bu, hem doğrusal hem de doğrusal olmayan sönümleme terimlerinin çözüm davranışları üzerindeki etkisini açık bir şekilde göstermiştir.

Geliştirilen yöntemlerin esnek ve sağlam olduğu, elektroeolojik akışkanlar, biyomekanik sistemler ve doğrusal olmayan malzeme bilimi gibi karmaşık fiziksel modellerin matematiksel analizinde etkin biçimde kullanılabileceği ortaya konulmuştur.

Bu çalışmada elde edilen bulgular, değişken üslü fonksiyonel uzaylarda tanımlı dinamik denklemlerin teorik anlayışına önemli katkılar sağlamaktadır. Gelecekte yapılacak çalışmalarda bu yöntemlerin, zamanla stokastik pertürbasyonlar veya kesirli türevler içeren sistemlere uygulanması mümkün olup, bu yöndeki çalışmalar soyut matematiksel modellemeyle mühendislik ve fizik bilimlerinde karşılaşılan gerçek dünya uygulamaları arasındaki bağı daha da güçlendirecektir.



KAYNAKLAR

- Adams, R. A. (1975). *Sobolev Spaces*, Academic Press: New York.
- Adams, R. A., Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev Spaces* (2nd ed.), Academic Press: New York.
- Alaeddine, D. (2021). Decay rates for the energy of a singular nonlocal viscoelastic system. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44 (1), 196-219. <https://doi.org/10.1002/mma.6720>.
- Antontsev, S. (2011). Wave equation with $p(x,t)$ -Laplacian and damping term: existence and blow-up. *Differential Equations & Applications*, 3 (4), 503-525. <https://doi.org/10.7153/dea-03-32>.
- Antontsev, S. (2011). Wave equation with $p(x,t)$ -Laplacian and damping term: blow-up of solutions. *Comptes Rendus. Mécanique*, 339 (12), 751-755. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2011.09.001>.
- Boulaaras, S., ve Mezouar, N. (2020). Global existence and decay of solutions of a singular nonlocal viscoelastic system with a nonlinear source term, nonlocal boundary condition, and localized damping term. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43 (10), 6140-6164. <https://doi.org/10.1002/mma.6361>.
- Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer.
- Diening, L., Petteri, H., Hasto, P., & Ruzicka, M. (2011). *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*. Springer.
- Eden, A., ve Kalantarov, V. K. (2005). On global behavior of solutions to an inverse problem for nonlinear parabolic equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 307 (1), 120-133. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.01.007>.
- Edmunds, D., ve Rakosnik, J. (2000). Sobolev embeddings with variable exponent. *Studia Mathematica*, 143, 267-293.
- Edmunds, D., ve Rakosnik, J. (2002). Sobolev embeddings with variable exponent II. *Mathematische Nachrichten*, 246 (1), 53-67.
- Evans, L. C. (1998). *Partial differential equations*, Graduate studies in mathematics, vol 19.
- Fan, X., ve Zhao, D. (2001). On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 263, 424-446. <https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7617>.

- Fan, X., ve Zhang, Q. H. (2003). Existence of solutions for $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 52 (8), 1843–1852. [https://doi.org/10.1016/S0362-546X\(02\)00150-5](https://doi.org/10.1016/S0362-546X(02)00150-5).
- Georgiev, V., ve Todorova, G. (1994). Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms. *Journal of Differential Equations*, 109 (2), 295-308.
- Junning, Z. (1993). Existence and nonexistence of solutions for $u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + f(\nabla u, u, x, t)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 172 (1), 130–146.
- Li, M. R., ve Tsai, L. Y. (2003). Existence and nonexistence of global solutions of some system of semilinear wave equations. *Nonlinear Analysis*, 54 (8), 1397-1415.
- Liu, W., Sun, Y., & Li, G. (2017). On decay and blow-up of solutions for a singular nonlocal viscoelastic problem with a nonlinear source term. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 49 (1), 299-323. <https://doi.org/10.12775/TMNA.2016.077>.
- Mesloub, S., ve Messaoudi, S. A. (2010). Global existence, decay, and blow up of solutions of a singular nonlocal viscoelastic problem. *Acta Applicandae Mathematicae*, 110, 705-724. <https://doi.org/10.1007/s10440-009-9469-6>.
- Messaoudi, S. A., ve Talahmeh A. A. (2017). Blow-up in solutions of a quasilinear wave equation with variable-exponent nonlinearities. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40 (18), 6976-6986. <https://doi.org/10.1002/mma.4505>.
- Muravei, L. A., Philinovskii, A. V. (1993) On a certain nonlocal boundary problem for hyperbolic equation. *Matematicheskie Zametki*, 54, 98-116.
- Nakao, M. (1977). Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with nonlinear dissipative term. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 58 (2), 336–343. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(77\)90211-6](https://doi.org/10.1016/0022-247X(77)90211-6).
- Nakao, M. (1978). A difference inequality and its application to nonlinear evolution equations. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 30 (4), 747–762. <https://doi.org/10.2969/jmsj/03040747>.
- Park, S. H., ve Kang, J. R. (2019). Blow-up of solutions for a viscoelastic wave equation with variable exponents. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42 (6), 2083-2097. <https://doi.org/10.1002/mma.5501>.
- Pişkin, E., Boulaaras, S. M., Kandemir, H., Cherif, B. B., & Biomy, M. (2021). On a couple of nonlocal singular viscoelastic equations with damping and general source terms: blow-up of solutions. *Journal of Function Spaces*, 2021 (1), 1-9. <https://doi.org/10.1155/2021/9914386>.
- Shahrouzi, M., ve Tahamtani, F. (2012). Global nonexistence and stability of solutions of inverse problems for a class of Petrovsky systems. *Georgian Mathematical Journal*, 19 (3), 575-586. <https://doi.org/10.1515/gmj-2012-00285>.

- Shahrouzi, M. (2016). Asymptotic stability and blowup of solutions for a class of viscoelastic inverse problem with boundary feedback. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39 (9), 2368-2379. <https://doi.org/10.1002/mma.36468>.
- Shahrouzi, M. (2016). On behavior of solutions to a class of nonlinear hyperbolic inverse source problem. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 32, 683-698. <https://doi.org/10.1007/s10114-016-5081-7>.
- Shahrouzi, M. (2020). Blow up of solutions to a class of damped viscoelastic inverse source problem. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 28 (4), 889-899. <https://doi.org/10.1007/s12591-017-0356-8>.
- Shuntang, W. U. (2011). Blow-up of solutions for a singular nonlocal viscoelastic equation. *Journal of Partial Differential Equations*, 24 (2), 140-149. <https://doi.org/10.4208/jpde.v24.n2.3>.
- Tahamtani, F., ve Shahrouzi, M. (2013). Asymptotic stability and blow up of solutions for a Petrovsky inverse source problem with dissipative boundary condition. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36 (7), 829-839. <https://doi.org/10.1002/mma.2629>.
- Zarai, A., Draifia, A., & Boulaaras, S. (2018). Blow up of solutions for a system of nonlocal viscoelastic equations. *Applicable Analysis*, 97 (13), 2231-2245. <https://doi.org/10.1080/00036811.2017.1359564>.
- Zeidler, E. (1995). *Applied Functional Analysis*, Springer.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Zülal MISIR

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2015, Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalurji Fakültesi, Matematik Mühendisliği
- **Yükseklisans** : 2019, Sakarya Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik

MESLEKİ DENEYİM:

- 2019 yılından itibaren Sakarya Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- Yaman, M. ve Mısır, Z. (2022, 20-22, Ekim). Energy Decay Of Solutions For An Inverse Problem With Variable-Exponent, *International E-Conference on Mathematical and Statistical Science: A Selcuk Meeting*, Konya, Turkey.
- Mısır, Z. ve Yaman, M. (2024). Blow up solution of inverse problem for nonlinear hyperbolic equation with variable-exponents, *Filomat*, 38(21), 7479-7491.
- Mısır, Z. ve Yaman, M. Decay estimates for a Lamé inverse problem involving source and damping term with variable-exponent, *Axioms*, 14(6), 1-13.
- Mısır, Z. ve Yaman, M. Global existence, decay and blow-up of solutions of a singular nonlocal viscoelastic system with a nonlinear damping term, nonlocal boundary condition and variable exponents, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Under Review.

DİĞER ESERLER:

- Gözükızı, Ö. F., Mısı, Z. ve Gündoğdu, H. (2016, 12-16, Aralık). Solvability of Nonlinear Symetric Regular Long Wave Equation by Using Laplace Decomposition, Yanlış Çözmede Optimizasyon Problemleri, Rusya.
- Mısı, Z. ve Gözükızı, Ö. F. (2020). Kuantum Tam Diferansiyel ve Uygulaması, *Bilecik Şeyh Edebalı Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7, 344-352.
- Yaman, M. ve Mısı, Z. (2022). Finite-time behaviour of solutions to nonlinear parabolic equation, *New Trends in Mathematical Sciences*, 10(4), 47-53.
- Yılmaz, Z. S., Mısı, Z. ve Gür, Ş. (2025). Blow-up of Solutions of The Rosenau Equation with Hydrodynamically Damped Term, *Honam Mathematical Journal*, 47(1), 119-127.

