

DEĞİŞKEN ÜSLÜ SOBOLEV UZAYLARINDA HİPERBOLİK
TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ

NEBİ YILMAZ

ARALIK 2024

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN ÜSLÜ SOBOLEV UZAYLARINDA HİPERBOLİK
TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ

NEBİ YILMAZ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
DOKTORA TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

ARALIK 2024

DİYARBAKIR

DEĞİŞKEN ÜSLÜ SOBOLEV UZAYLARINDA HİPERBOLİK TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ

Nebi YILMAZ tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı'nda Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, Fen Bilimleri Enstitüsü

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Danışman, Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Sınav Jürisi:

Prof. Dr. Ülkü DİNLEMEZ KANTAR(*)
Matematik Bölümü, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN (**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Başak KARPUZ
Matematik Bölümü, Dokuz Eylül Üniversitesi

Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Işık Yeşim ERDAMAR
Fizik Bölümü, Dicle Üniversitesi



Savunma Tarihi: 11/12 /2024

(*) Jüri Başkanı.

(**) Tez Danışmanı.

*Anneme, babama, eşime ve çocuklarım; Mira,
Leyya Dilara ve Asım'a...*

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Nebi YILMAZ

İmza:

TEŞEKKÜR

Çalışmamın fikir aşamasından tezin tamamlanmasına kadar gösterdikleri özveri ve sabır için danışmanım Prof. Dr. Erhan PİŞKİN hocama derin teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, tezimin daha kaliteli bir hale gelmesi için sundukları değerli öneri ve eleştirilerden dolayı jüri üyelerime de minnettarım.

Bu zorlu süreçte her daim yanımda olan, destekleriyle beni motive eden sevgili annem ve babama, değerli eşim Kübra'ya ve sevgili çocuklarım Mira, Leyya Dilara ve Asım'a yürekten teşekkür ederim. Sizlerin varlığı, bu çalışmayı tamamlamamdaki en büyük güç kaynağım oldu.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
TABLolar LİSTESİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	xi
ÖZET.....	xii
ABSTRACT.....	xiii
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	4
2.1 Denklemlerin Fiziksel Anlamları	5
2.1.1 Değişken Üslü problemler	5
2.1.2 Petrovsky Denklemler	5
2.1.3 Logaritmik Kaynak Terim İçeren Denklemler	5
2.2 Literatür Taraması	5
2.2.1 Değişken Üslü Sönüm Terim İçeren Denklemler	5
2.2.2 Değişken Üslü Logaritmik Terim İçeren Denklemler	7
2.2.3 Değişken Üslü Denklem Sistemleri	8
3. ÖN BİLGİLER.....	10
3.1 Temel Kavramlar.....	10
3.2 Lebesgue Uzayı	11
3.3 Lebesgue Uzayı	11
3.4 Lebesgue Uzayı	11
3.5 Bazı Önemli Eşitlikler ve Eşitsizlikler	14
3.6 Çözümlerin Patlaması.....	18
3.7 Zayıf Çözüm.....	18

3.8	Faedo-Galerkin Yöntemi	18
3.9	Genelleştirilmiş α -Yöntemi	19
4.	DEĞİŞKEN ÜSLÜ DOĞRUSAL OLMAYAN PETROVSKY DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE PATLAMASI.....	21
4.1	Lokal Varlık	27
4.2	Çözümün Tekliği	34
4.3	Çözümün Patlaması	35
5.	DEĞİŞKEN ÜSLÜ YÜKSEK MERTEBELİ LOGARİTMİK KIRCHHOFF TİPİ DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI.....	42
5.1	Ön Bilgiler	42
5.2	Çözümlerin Patlaması.....	47
6.	DEĞİŞKEN ÜSLÜ VİSKOELASTİK DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI.....	53
6.1	Çözümlerin Patlaması.....	53
7.	DEĞİŞKEN ÜSLÜ VİSKOELASTİK DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI VE PATLAMASI.....	63
7.1	Global Varlık	63
7.2	Çözümün Azalması	69
8.	DEĞİŞKEN ÜSLÜ KLEİN-GORDON DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI İLE İLGİLİ TEORİK VE NÜMERİK SONUÇLAR.	76
8.1	Ön Bilgiler	78
8.2	Çözümün Patlaması	79
8.3	Nümerik Sonuçlar.....	88
8.3.1	Mesh Alanı ve Nümerik Uygulama Sistemi	88
8.3.2	Geriye Doğru Farklılaşma Formülü (BDF) ile Çözümler.....	90
8.3.3	Genelleştirilmiş- α (GA) çözücü ile Çözümler	92

8.3.4 Sistemin Enerjisi.....	92
8.3.5 Teorik ve Sayısal Patlama Zamanlarını Karşılaştıran Bir Örnek	94
9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	95
KAYNAKLAR	97
ÖZGEÇMİŞ	102



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 8.1 Yüzey bölgesi.....	89
Şekil 8.2 $t = 0$ Başlangıç zamanı	90
Şekil 8.3 $t = 0.0032$ anındaki nümerik çözümleri	90
Şekil 8.4 $t = 0.0046$ anındaki nümerik çözümleri.....	91
Şekil 8.5 $t = 0.0053$ anındaki nümerik çözümleri	91
Şekil 8.6 $t = 0.0055$ anındaki nümerik çözümleri	91
Şekil 8.7 $t = 0.0056$ anındaki nümerik çözümü-Patlama zamanı.....	92
Şekil 8.8 $n = 0$ ile $n = 0.0056$ iterasyonlarda enerji.....	93

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 8.1 $\ U\ _{\infty}$, $\ V\ _{\infty}$ ve $E(t)$ değerlerinin zamanla değişimi	93
Y89	



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
R^n	n-boyutlu Euclid Uzayı
Ω	R^n de sınırlı bir bölge
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
$L^p(\Omega)$	Lebesgue uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev uzayı
$L^{p(x)}(\Omega)$	Değişken üslü Lebesgue uzayı
$W^{m,p(x)}(\Omega)$	Değişken üslü Sobolev uzayı
∇	Nabla operatörü (Gradyent)
Δ	Laplace operatörü
$C(\Omega)$	Sürekli fonksiyonlar uzayı

ÖZET

DEĞİŞKEN ÜSLÜ SOBOLEV UZAYLARINDA HİPERBOLİK TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ

YILMAZ, Nebi

Doktora, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

Aralık 2024, 117 sayfa

Diferansiyel denklemler, fiziksel sistemlerin zaman içerisindeki değişimlerini modellemek için kullanılan matematiksel araçlardır ve pek çok alanda (fizik, kimya, mühendislik,...) önemli bir rol oynarlar. Evolüsyon denklemler ise zaman bağımlı süreçleri modellemek için kullanılır ve sistemlerin zamana bağlı olarak nasıl değiştiğini anlamamıza olanak tanır. Bu denklemlerin daha karmaşık formlarından biri olan değişken üslü diferansiyel denklemler, klasik diferansiyel denklemlerden farklı olarak üslerin mekâna (x) veya zamana (t) bağlı olduğu daha esnek modeller sunar. Bu modeller, daha heterojen yapılar üzerinde çalışmayı mümkün kılar ve birçok modern mühendislik ve bilimsel problemin çözümünde kullanılır. Bu bağlamda tezin ilk bölümünde mühendislik ve fen gibi uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan değişken üslü denklemlerden söz edilmiştir. Tezin ikinci bölümünde, değişken üslü hiperbolik tipten denklemler üzerine yapılan önceki çalışmalar ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise, tezde kullanılacak temel tanım, lemma ve teoremler yer almıştır. Bu bölüm, sonraki teorik sonuçların anlaşılması için gerekli olan matematiksel altyapıyı oluşturur. Dördüncü bölümde, değişken üslü doğrusal olmayan Petrovsky denklemin çözümlerin varlığı ve patlaması ele alınmıştır. Beşinci bölümde ise, değişken üslü yüksek mertebeden logaritmik kaynak terimli Kirchhoff tipi denklemin çözümlerinin patlaması incelenmiştir. Altıncı bölümde, değişken üslü viskoelastik denklemin çözümlerinin global varlığı ve patlaması ele alınmıştır. Yedinci bölümde, değişken üslü logaritmik kaynak terimli m -Laplacian denkleminin çözümlerinin global varlığı ve azalması incelenmiştir. Son olarak, sekizinci bölümde değişken üslü Klein-Gordon denklem sistemi incelenmiş, bu sistemin patlaması ve sayısal sonuçları sunulmuştur. İki boyutlu sayısal örnekler verilmiş ve grafikler çizilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Azalma, Değişken üs, Değişken üslü Sobolev uzayı, Değişken üslü Lebesgue uzayı, Global varlık, Klein-Gordon denklemi, Kirchhoff tipli denklem, Lokal Varlık, m -Laplacian denklem, Patlama, Viskoelastik tipli denklem.

ABSTRACT

ANALYSIS OF SOLUTIONS FOR HYPERBOLIC-TYPE EQUATIONS IN VARIABLE EXPONENT SOBOLEV SPACES

YILMAZ, Nebi

Doctorate of Science in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

December 2024, 117 pages

Differential equations are mathematical tools used to model the changes in physical systems over time and play a significant role in many fields (physics, chemistry, engineering, etc.). Evolution equations, on the other hand, are used to model time-dependent processes and help us understand how systems evolve over time. Variable exponent differential equations, as more complex forms of these equations, differ from classical differential equations by allowing the exponents to depend on space (x) or time (t), offering more flexible models. These models enable the study of more heterogeneous structures and are utilized in solving many modern engineering and scientific problems. In this context, the first chapter of the thesis discusses variable exponent equations that arise in applied sciences such as engineering and physics. The second chapter provides a detailed review of previous studies on variable exponent hyperbolic-type equations. In the third chapter, the fundamental definitions, lemmas, and theorems to be used in the thesis are presented. This chapter establishes the mathematical groundwork necessary for understanding subsequent theoretical results. In the fourth chapter, the existence and blow-up of solutions to variable exponent nonlinear Petrovsky equations are examined. The fifth chapter focuses on the blow-up of solutions to a variable exponent higher-order Kirchhoff-type equation with a logarithmic source term. In the sixth chapter, the global existence and blow-up of solutions for the variable exponent viscoelastic equation is addressed. The seventh chapter examines the global existence and decay of solutions for the variable exponent m -Laplacian equation with a logarithmic source term. Finally, the eighth chapter investigates the variable exponent Klein-Gordon system, presenting its blow-up and numerical results. Two-dimensional numerical examples are provided, and graphs are illustrated.

Keywords: Blow up, Decay, Global existence, Kirchhoff-type equation, Klein-Gordon equation, Local existence m -Laplacian equation, Variable exponent, Variable exponent Lebesgue space, Variable exponent Sobolev space, Viscoelastic type equation.

1. GİRİŞ

Bilim ve matematik, insanlığın bilgi birikimini derinleştirmek ve anlamak için temel araçlar olarak kabul edilmektedir. Bu iki disiplin, birbirini tamamlayan ve karşılıklı olarak besleyen önemli alanlardır. Matematik, mantık ve sayıların sistemli incelenmesiyle oluşturulmuş bir yapı sunarken, bilim doğanın temel yasalarını keşfetmek ve açıklamak için gözlemler ve deneylerle desteklenen bir süreç sunar.

Matematik, bilimin temelinde yatan yapıyı oluşturur ve bu yapı, kendine özgü bir çerçeve sunar. Öte yandan, bilim deneyler ve gözlemler yoluyla elde edilen verileri analiz etmek ve anlamak için matematiksel yöntemler kullanır. Matematik, kendine has bu yöntemleri kullanırken gerçek dünyayla her zaman tam uyum sağlamayabilir. Bu olumsuzluğu ortadan kaldırmak için modelleme adı verilen bir dil kullanılır.

Bilimsel araştırmalarda sıkça karşılaşılan matematiksel araçlardan biri diferansiyel denklemlerdir. Diferansiyel denklemler ilk olarak 17. yüzyılın sonlarında Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz ve Bernoulli kardeşler Jakob ve Johann'ın çalışmalarıyla tanıtılmıştır. Bu denklemler, bu büyük bilim insanlarının kalkülüsün yeniliklerini mekanikteki belirli problemlere uygulama çabalarının doğal bir ürünü olarak ortaya çıkmıştır. Üç yüzyıldan fazla bir süredir, diferansiyel denklemler, birçok bilim dalındaki sorunları tanımlamak ve analiz etmek için vazgeçilmez bir araç olmuştur. Bu denklemlerin önemi, nesiller boyu matematikçileri ve diğer bilim insanlarını, çözümlerinin özelliklerini incelemek için yöntemler geliştirmeye yönlendirmiştir. Bu yöntemler, basit fonksiyonlar üzerinden kesin çözümler bulmaktan, modern analitik ve sayısal yaklaşımlara kadar geniş bir yelpazede yer almaktadır. Ayrıca, diferansiyel denklemler matematiğin ilerlemesinde merkezi bir rol oynamış, bu denklemlerle ilgili sorular yeni matematiksel alanların doğmasına yol açmış analiz, topoloji, cebir ve geometri gibi alanlardaki gelişmeler diferansiyel denklemler için yeni bakış açıları sağlamıştır (Kelley ve Peterson 2010).

Bu denklemler, sistemlerin zaman içindeki değişimlerini anlamamıza olanak tanır ve birçok alanda uygulanabilir. Ancak, bu tür karmaşık sistemlerin analizi genellikle daha gelişmiş matematiksel araçlar gerektirir. Bu noktada, kısmi türevli denklemleri önemli bir rol oynar.

Bazı denklemler değişken üs içerebilir. Bu denklemler ve modellerin incelenmesinde, değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayları devreye girer. Değişken üslü Lebesgue uzayları, klasik Lebesgue uzaylarından farklı olarak, $p(x)$ gibi değişken bir üsle tanımlanır ve bu özellik, daha heterojen yapılar ve fonksiyonlar üzerinde çalışma esnekliği sağlar. Sobolev uzayları ise, diferansiyel denklemlerin çözümlerini incelemek için kullanılan fonksiyonel analiz araçlarıdır ve değişken üslü Sobolev uzayları, bu analizlerde daha karmaşık ve heterojen sistemlerin incelenmesine olanak tanır.

Değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayları, değişken üslü diferansiyel denklemler gibi karmaşık matematiksel modellerin analizinde güçlü araçlar sunar. Bu araçlar, matematikçilerin daha doğru ve kapsamlı modeller geliştirmelerine olanak tanır, böylece gerçek dünya olaylarını daha iyi anlamamızı sağlar.

Değişken üslü Lebesgue uzayları literatürde ilk kez Orlicz'in (1931) makalesinde ortaya çıkmıştır. Daha sonraki büyük adım, 1990 ların başında Kovácik ve Rákosník'in makalesidir. Bu makale, $L^{p(\cdot)}$ ve Sobolev uzaylarının temel birçok özelliğini ortaya koymuştur. Bunu izleyen yıllarda birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Bu tür problemler, elektro-reolojik akışkanlar, sıcaklığa bağlı viskoziteli akışkanlar, gözenekli ortam üzerinden filtreleme işlemleri, görüntü işleme ve termoreolojik akışkanlar gibi birçok modern fiziksel ve mühendislik modellerinde ortaya çıkmaktadır ve bu modeller standart olmayan modellerle modellenmesi gerekmektedir (Chen vd.,2006; Dienes vd., 2017; Růžicka, 2000).

Doęada karşılaşılan karmaşık mühendislik problemlerinin çözümleri oldukça karmaşıktır. Problemin karmaşık olması çözüm aşamasını da hassasiyetten uzaklaştırır. Karmaşık problemlerin kısa yoldan çözüme götürülmesi fiziksel bir sistemin matematiksel olarak ifade edilmesi mantığına göre çalışan sonlu elemanlar metodu kullanılarak yapılabilir.

Sonlu elemanlar yöntemi, fizik ve mühendislikte ortaya çıkan problemlerin modelini oluşturan diferansiyel denklemlere yaklaşık çözümler veren sayısal bir tekniktir. Daha yaygın olarak kullanılan sonlu fark şemalarında olduğu gibi, sonlu elemanlar yöntemi de geometrik alanda (veya bölgede) tanımlanan problemleri, alanı daha küçük bölgelere (bir aę) bölerek, belirli noktalarda bir çözüm bulma problemine indirger.

Sonlu elemanlar yönteminin matematiksel temelleri, ilk olarak Rayleigh (1877) ve Ritz (1909) tarafından geliştirilen klasik Rayleigh–Ritz ve varyasyonel hesap yöntemlerine dayanır. Bu teoriler, varyasyonel ifadelerin elde edilebildiği problem sınıflarında yöntemin neden iyi çalıştığını açıklamıştır (örneğin, doğrusal difüzyon tipi problemler). Ancak yöntem, sıvılarla ilgili problemler gibi klasik teorinin uygulanamadığı alanlara genişletilince, bu teoriler sınırlı kalmıştır (Pepper ve Heinrich, 2017).



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezin orijinal bölümleri dördüncü, beşinci, altıncı yedinci ve sekizinci bölümlerdir.

Tezin dördüncü bölümünde

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u_t + |u_t|^{p(x)-2} u_t = |u|^{q(x)-2} u$$

değişken üslü doğrusal olmayan Petrovsky denklemi için çözümlerin varlığı ve patlaması çalışıldı. (Yılmaz vd., 2023a).

Tezin beşinci bölümünde

$$u_{tt} + \mathcal{M} \left(\left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \right) \mathcal{P} u + |u_t|^{p(x)-2} u_t = |u|^{q(x)-2} u \ln u$$

değişken üslü logaritmik yüksek mertebeli Kirchhoff tipi denklemin, çözümlerinin patlamasını çalışıldı (Yılmaz ve Pişkin, Baskıda) . Burada $\mathcal{P} = (-\Delta)^m$, $m \geq 1$ doğal bir sayıdır. $\mathcal{M}(\lambda) = s_1 + s_2 \lambda^\gamma$ ve $s_1, s_2 \geq 0, \gamma \geq 1$ dir.

Tezin altıncı bölümünde

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s) \Delta^2 u(s) ds + \mu u_t = |u|^{q(x)-2} u$$

değişken üslü viskoelastik denkleminin çözümlerinin pozitif başlangıç enerjisi için patlamasını çalışıldı (Yılmaz, vd., 2024).

Tezin yedinci bölümünde

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_m u + u + \mu_1 u_t |u_t|^{p(\cdot)-2} + \mu_2 u_t(x, t - \tau) |u_t|^{p(\cdot)-2}(x, t - \tau) \\ = u |u|^{q(\cdot)-2} \ln |u|^k, \end{aligned}$$

değişken üslü logaritmik kaynak terimli m -Laplacian denkleminin çözümlerinin global varlığı ve enerji azalması ele alınmıştır (Yılmaz ve Pişkin, 2024b). Burada m -Laplacian

$$\Delta_m u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{m-2} \nabla u)$$

dir.

Tezin sekizinci bölümünde

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m_1^2 u + |u_t|^{p(x)-1} u_t = f_1(u, v), \\ v_{tt} - \Delta v + m_2^2 v + |v_t|^{r(x)-1} v_t = f_2(u, v) \end{cases}$$

değişken üslü Klein-Gordon denklem sisteminin çözümlerinin patlamasını ve nümerik sonuçlarını incelendi (Yılmaz vd., 2023b).

2.1 Denklemlerin Fiziksel Anlamları

Bu kısımda çalıştığımız denklemlerin fiziksel anlamlarına yer verdik (Bialynicki-Birula ve Mycielski, 1975; Cazenave ve Haraux, 1980; Dening vd., 2017; Růžicka, 2000).

2.1.1 Değişken üslü problemler

Değişken üsler içeren denklemler, üslerinin belirli bir fonksiyon veya parametreye bağlı olarak değiştiği matematiksel modelleri ifade eder. Bu tür denklemler, görüntü işleme, gözenekli ortamlardaki filtreleme süreçleri (örneğin, su veya gazın geçirgenliği), elektro-reolojik sıvıların (elektriksel alan etkisi altında viskozite özelliklerini değiştiren sıvılar) ve doğrusal olmayan viskoelastisitenin (maddelerin hem elastik hem de viskoz özelliklerini içeren davranışları) modellenmesinde kullanılır. Değişken üsler, bu problemleri daha esnek bir şekilde modellemeye olanak tanır ve bilimsel alanlarda geniş kapsamlı etki sağlar.

2.1.2 Petrovsky denklemleri

Petrovsky denklemleri, sabit üsler içeren kısmi diferansiyel denklemler olarak tanımlanır ve tarihsel olarak levha ve kirişlerin incelenmesiyle ilgili Petrovsky modelinden türetilmiştir. Bu denklemler, okyanus akustiği, jeofizik, optik ve akustik gibi çeşitli fiziksel alanlarda uygulama bulur. Petrovsky denklemlerinin bu alanlardaki kullanımı, bu tür denklemlerin çok sayıda disiplinin gerçek dünya problemlerini çözmede pratik önemini ortaya koyar.

2.1.3 Logaritmik kaynak terim içeren denklemler

Logaritmik kaynak terim içeren denklemler, nükleer fizik, kuantum alan teorisi, optik, jeofizik gibi fiziğin birçok alanında geniş uygulamalara sahiptir.

2.2 Literatür Taraması

2.2.1 Değişken üslü sönüm terim İçeren Denklemler

Messaoudi, Talahmeh ve Al-Smail (2017)

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{p(x)-2} u_t = |u|^{q(x)-2} u$$

denkleminin zayıf çözümlerinin varlığını Faedo-Galerkin yöntemiyle ve sonlu zamanda patlamasını negatif başlangıç enerjisi için incelediler.

Pişkin (2019)

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u + |u_t|^{p(x)-2} u_t = |u|^{q(x)-2} u$$

Klein-Gordon denkleminin çözümlerinin patlamasına çalıştı.

Tebba vd. (2020), değişken üslü:

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + a |u_t|^{m(x)-2} u_t = b |u|^{p(x)-2} u$$

denklemin çözümlerinin lokal varlığını Faedo-Galerkin yöntemini kullanarak gösterdiler. Ayrıca, çözümlerin sonlu zamanda patladığını kanıtladılar.

Pişkin (2020)

$$u_{tt} - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + |u_t|^{p(x)-2} u_t = |u|^{q(x)-2} u$$

Kirchhoff denkleminin çözümlerinin patlamasını çalıştı.

Antontsev vd. (2021a) çalışmalarında şu dalga denklemini incelemişlerdir:

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u + |u_t|^{p(x)-2} u_t = |u|^{q(x)-2} u$$

Timoshenko denkleminin çözümlerinin lokal varlığını ve patlamasını çalıştılar.

Antontsev vd. (2021b)

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u_t + |u_t|^{p(x)-2} u_t = |u|^{q(x)-2} u$$

denkleminin çözümünün lokal varlığını ve patlamasını incelediler.

Liao ve Li (2023)

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u - \Delta u_t + |u_t|^{m(x)-2} u_t = |u|^{p(x)-2} u$$

değişken üslü denkleminin çözümlerinin patlamasını çalıştılar.

Ouaoua ve Boughamsa (2023)

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u + |u_t|^{m(x)-2} u_t = |u|^{r(x)-2} u$$

denklemin çözümlerinin lokal varlığını ve patlamasını çalıştılar.

Dinç vd. (2023)

$$u_{tt} - M \left(\|\nabla u\|_p^p \right) \Delta_p u + |u_t|^{r(x)-2} u_t = |u|^{q(x)-2} u$$

değişken üslü Kirchhoff-tipi denkleminin çözümlerinin patlamasını çalıştılar.

2.2.2 Değişken Üslü Logaritmik Kaynak Terim İçeren Denklemler

Rahmoune (2022)

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{m(x)-2} u_t = |u|^{p(x)-2} u \ln u$$

denkleminin çözümünün lokal varlığı , tekliği ve patlamasına çalıştı.

Kafini ve Noor (2023)

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \mu_1 |u_t|^{m(x)-2} (x, t) u_t (x, t) \\ + \mu_2 |u_t|^{m(x)-2} (x, t - \tau) u_t (x, t - \tau) = |u|^{p(x)-2} u \ln |u|^k$$

çözümünün global varlığını ve azalmasını çalıştılar. Aynı zamanda nümerik sonuçlarını gösterdiler.

Kafini (2024)

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t - \tau) \Delta u(\tau) d\tau + |u_t|^{m(x)-2} u_t = |u|^{p(x)-2} u \ln |u|^k$$

denkleminin global yokluğuna ve sonsuzda patlamasına çalıştılar.

Yılmaz ve Pişkin (2024c)

$$u_{tt} + \Delta^2 u + |u_t|^{p(x)-2} u_t = |u|^{q(x)-2} u \ln u$$

denkleminin çözümünün patlamasını incelediler.

2.2.3 Değişken üslü denklem sistemleri

Messaoudi vd., (2021)

$$\begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla u) + |u_t|^{m(x)-2} u_t = f_1(x, u, v), \\ v_{tt} - \operatorname{div}(\mathcal{B}\nabla v) + |v_t|^{r(x)-2} v_t = f_2(x, u, v) \end{cases}$$

denklem sistemin çözümlerinin global varlığına, patlamasına ve nümerik sonuçlarına çalıştılar. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, $C^1(\Omega \times [0, \infty))$ sınıfında simetrik matrislerdir ve $a_0, b_0 > 0$ sabitleri ile tüm $\xi \in \mathbb{R}^n$ için aşağıdaki koşullar sağlanır:

$$\mathcal{A}\xi \cdot \xi \geq a_0|\xi|^2, \quad \mathcal{B}\xi \cdot \xi \geq b_0|\xi|^2,$$

$$\mathcal{A}'\xi \cdot \xi \leq 0, \quad \mathcal{B}'\xi \cdot \xi \leq 0,$$

Burada $\mathcal{A}' = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$ ve $\mathcal{B}' = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$ olarak tanımlanır.

Messaoudi vd., (2022)

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{m(x)-2} u_t = f_1(u, v), \\ v_{tt} - \Delta v + |v_t|^{r(x)-2} v_t = f_2(u, v) \end{cases}$$

denklem sistemin çözümlerinin global varlığını ve azalma sonuçlarını ispatladılar.

Bouhoufani vd., (2022)

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + |u_t|^{m(x)-2} u_t = f_1(x, u, v), \\ v_{tt} + \Delta^2 v + |v_t|^{r(x)-2} v_t = f_2(x, u, v) \end{cases}$$

değişken üslü lineer olmayan biharmonik denklem sisteminin çözümlerinin patlamasını ve azalmasını çalıştılar.

Messaoudi vd., (2023a)

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t r_1(t-s) \Delta u(s) ds + |u_t|^{\alpha(x)-2} u_t = h_1(u, v), \\ v_{tt} - \Delta v + \int_0^t r_2(t-s) \Delta v(s) ds + |v_t|^{\beta(x)-2} v_t = h_2(u, v) \end{cases}$$

viskoelastik denklem sisteminin uygun şartlar altında çözümlerin varlığı ve enerji azalmasını gösterdiler.

Messaoudi vd., (2023b)

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + |u_t|^{m(x)-2} u_t = f_1(u, v), \\ v_{tt} - \Delta v + |v_t|^{r(x)-2} v_t = f_2(u, v) \end{cases}$$

denklem sisteminin çözümlerinin global varlığı, patlamasını ve azalmasını ispatladılar.

Ayrıca, bazı yazarlar hiperbolik tipten denklemlerin çözümlerinin varlığı, tekliği, patlaması ve enerji azalması ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir (Al-Mahdi vd., 2023; Kafini ve Messaoudi, 2019; Messaoudi ve Talahmeh, 2017; Park, 2021; Pişkin ve Yılmaz, 2022a; Pişkin ve Yılmaz, 2022b; Segal, 1965; Yılmaz ve Pişkin, 2024a; Yılmaz ve Pişkin, 2024b; Yılmaz ve Pişkin, 2024c; Yüksekaya ve Pişkin, 2022; Zhang, vd., 2013).



3. ÖN BİLGİLER

3.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde Lineer cebir ve Analiz ile ilgili temel tanımlar verilecektir. Daha sonra değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayları hakkında bazı önemli tanım, teorem ve lemmalar yer verilecektir (Adams ve Fournier 2003; Brezis 2011; Dening vd., 2017; Dening ve Růžicka, 2003; Kaya ve Dinlemez Kantar, 2018; Kesavan 1989; Pişkin 2017; Pişkin ve Okutmuşur 2021; Pişkin 2022; Shahrour, 2018, Sobolev 1991; Zheng, 2004).

Tanım 3.1.1 (Vektör uzayı) V boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun (K cismi reel sayılar olsun).

$\forall u, v, w \in V$ ve $\forall a, b \in R$ olmak üzere

- i. $u + v \in V$ (kapalılık)
- ii. $u + v = v + u$ (değişme)
- iii. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (birleşme)
- iv. $u + 0 = 0 + u = u$ olacak şekilde bir tek $0 \in V$ vardır (etkisiz eleman)
- v. $u + (-u) = (-u) + u = 0$ olacak şekilde bir tek $-u \in V$ vardır (ters eleman)
- vi. $au \in V$
- vii. $a(u + v) = au + av$
- viii. $(a + b)u = au + bu$
- ix. $a(bu) = (ab)u$
- x. $1u = u$ olacak şekilde bir tek $1 \in V$

aksiyomlar sağlanıyorsa V kümesi cismi üzerinde bir reel vektör uzayıdır.

Tanım 3.1.2 (Alt vektör uzayı) V bir vektör uzayı $U \neq \emptyset$ ve $U \subset V$ olsun. Eğer U , V vektör uzayındaki işlemlere göre bir vektör uzayı ise U ya V nin alt vektör uzayı veya alt uzayı denir.

Tanım 3.1.3 (Lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık) V bir vektör uzayı, $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ ve $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$ olmak üzere

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n = 0$$

eşitliğinde

- i. $c_1, c_2, \dots, c_n$ lerden en az biri sıfırdan farklı ise $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektörleri lineer bağımlı
- ii. $c_1, c_2, \dots, c_n$ lerden tümü sıfır ise $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektörleri lineer bağımsızdır denir.

Tanım 3.1.4 (Germe) V bir vektör uzayı her $v \in V$ vektörü $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabiliyorsa, yani

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$$

olacak şekilde $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$ skalerleri bulunabiliyorsa $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektörlerine V yi geren (üreten) küme denir.

$$\text{span} \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \text{ } s_p \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle \text{ veya } \text{ger} \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

ile gösterilir.

Tanım 3.1.5 (Baz (Taban)) V bir vektör uzayı ve $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ da V deki vektörlerin sonlu bir alt kümesi olsun. Eğer,

- i. U lineer bağımsızdır,
- ii. U kümesi V yi gerer.

şartlarını sağlıyorsa U, V vektör uzayının bir bazı(tabanı) dır denir.

Ayrıca, U nun eleman sayısına V nin boyutu denir ve $\text{boy}V$ veya $\dim V$ ile gösterilir.

3.2 Lebesgue Uzayı ($L^p(\Omega)$)

Tanım 3.2.1 Ω, R^n de bir bölge olsun. u ölçülebilir ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $|u(x)|^p$ Lebesgue anlamında integrallenebilir ise, yani

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

ise $u(x)$ fonksiyonları p . kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır ve $L^p(\Omega)$ veya L^p ile gösterilir. Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır.

3.3 Sobolev Uzayı ($W^{m,p}(\Omega)$)

Tanım 3.3.1 Ω , R^n de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. Sobolev uzaylarında normlar:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}.$$

3.4 Değişken Üslü Uzaylar ($L^{p(x)}(\Omega)$ ve $W^{m,p(x)}(\Omega)$)

Tanım 3.4.1 $A > 0$, $0 < \delta < 1$ olmak üzere her $x, y \in \Omega$ ve $|x - y| < \delta$ için

$$|p(x) - p(y)| \leq -\frac{A}{\ln|x - y|} \quad (3.1)$$

log-Hölder süreklilik koşuludur.

Tanım 3.4.2 $\Omega \subset R^n$ de pozitif ölçümlü bir bölgeden seçilsin. O halde

$$p : \Omega \rightarrow [1, \infty]$$

ölçülebilir fonksiyonuna değişken üs denir ve $P(\Omega)$ şeklinde gösterilir.

$$p_1 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x) \text{ ve } p_2 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x)$$

olmak üzere

$$1 \leq p_1 \leq p(x) \leq p_2 \leq \infty$$

dır. Ayrıca Ω bölgesini üç kümeye ayırabiliriz:

$$\Omega_\infty^{p(\cdot)} = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\},$$

$$\Omega_1^{p(\cdot)} = \{x \in \Omega : p(x) = 1\},$$

$$\Omega_*^{p(\cdot)} = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < \infty\}.$$

Burada $p(\cdot)$ yazılmadan kümeleri Ω_∞ , Ω_1 ve Ω_* şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.4.3 (Değişken üslü Lebesgue uzayı) Ω , R^n de $|\Omega| > 0$ olacak şekilde bir bölge olsun.

$$\begin{aligned}\rho_{p(\cdot)}(u) &= \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |u(x)|^{p(x)} dx + \text{ess sup}_{x \in \Omega_\infty} |u(x)| \\ &= \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |u(x)|^{p(x)} dx + \|u\|_{L^\infty(\Omega_\infty)} \\ &< \infty\end{aligned}$$

veya $p_2 < \infty$ ise ($|\Omega_\infty| = 0$ olacağından)

$$\rho_{p(\cdot)}(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir $u(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa değişken üslü Lebesgue uzayı denir ve $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ veya $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ile gösterilir. Burada $\rho_{p(\cdot)}(u)$ (veya $\rho(u)$) modular fonksiyoneli olarak adlandırılır.

Tanım 3.4.4 $p_2 < \infty$ ise değişken üslü Lebesgue uzayında norm

$$\begin{aligned}\|u\|_{p(x)} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu norma Luxemburg norm denir. Burada $p(\cdot) = p$ (sabit) alınırsa klasik Lebesgue uzayındaki norm elde edilir.

Tanım 3.4.5 (Değişken üslü Sobolev uzayı) Ω , R^n , m pozitif tam sayı, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ çoklu indis ve $p : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$W^{m,p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : D^\alpha u \in L^{p(\cdot)}(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

uzayına değişken üslü Sobolev uzayı denir. Bu uzay

$$\|u\|_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)} = \|u\|_{m,p(\cdot)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{p(\cdot)}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. $1 < p_1 \leq p_2 < \infty$ ise $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı yansımalıdır.

Lemma 3.4.6 Eğer

$$1 \leq p_1 = \text{ess inf}_{x \in \Omega} p(x) \leq p(x) \leq p_2 = \text{ess sup}_{x \in \Omega} p(x) < \infty$$

ise, o zaman herhangi bir $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$

$$\min \left\{ \|u\|_{p(\cdot)}^{p_1}, \|u\|_{p(\cdot)}^{p_2} \right\} \leq \rho_{p(\cdot)}(u) \leq \max \left\{ \|u\|_{p(\cdot)}^{p_1}, \|u\|_{p(\cdot)}^{p_2} \right\},$$

dır.

Lemma 3.4.7 Eğer $m, r, s \geq 1$, Ω üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar ise ve

$$\frac{1}{s(y)} = \frac{1}{m(y)} + \frac{1}{r(y)}, \quad y \in \Omega$$

noktasal olarak neredeyse her $y \in \Omega$ için geçerli ise o zaman $v_1 \in L^{m(\cdot)}(\Omega)$ ve $v_2 \in L^{r(\cdot)}(\Omega)$ olduğunda geçerli ise, $v_1 v_2 \in L^{s(\cdot)}(\Omega)$ olur ve aşağıdaki norm ile sınırlıdır:

$$\|v_1 v_2\|_{s(\cdot)} \leq 2 \|v_1\|_{m(\cdot)} \|v_2\|_{r(\cdot)}.$$

3.5 Bazı Önemli Eşitlikler ve Eşitsizlikler

Lemma 3.5.1 (Cauchy eşitsizliği) $a, b \in R$ ve $\varepsilon > 0$ ise

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2$$

eşitsizliği yazılabilir.

Lemma 3.5.2 (Young eşitsizliği) $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\varepsilon > 0$ ve $a, b \in R$ ise

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği ya da

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği yazılabilir.

Lemma 3.5.3 (Hölder eşitsizliği) $p \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $u \in L^p(\Omega)$ ve $v \in L^q(\Omega)$ ise $uv \in L^1(\Omega)$ uzayının elemanı olup

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitsizliği yazılabilir. Ayrıca, $p = q = 2$ olduğunda bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliği adı verilir.

Lemma 3.5.4 (Komornik) $F : R^+ \rightarrow R^+$ artmayan bir fonksiyon ve $\alpha > 0$ ve $C > 0$ iki sabit olmak üzere $\forall t \in R^+$ için

$$\int_t^\infty F^{\alpha+1}(s) ds \leq C F^\alpha(0) F(s),$$

olduğunda $\forall t \geq C$ için

$$F(t) \leq F(0) \left(\frac{C + \alpha t}{C + \alpha C} \right)^{\frac{-1}{\alpha}},$$

dır (Komornik, 1994).

Lemma 3.5.5 (Poincaré eşitsizliği) Ω , R^n de sınırlı bir bölge olsun ve $q(\cdot)$ (3.1) i sağlayan bir fonksiyon olsun ve $1 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2 < \infty$, burada

$$q_1 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} q(x), \quad q_2 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} q(x)$$

olur. O zaman

$$\|u\|_{q(\cdot)} \leq C \|\nabla u\|_{q(\cdot)}, \quad u \in W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega)$$

dır. Burada pozitif sabit C yalnızca q_1 , q_2 ve Ω ya bağlıdır.

Lemma 3.5.6 (Gronwall eşitsizliği (Diferansiyel form)) u_t , $[0, T]$ aralığında negatif olmayan mutlak sürekli bir fonksiyon, $\varphi_1(t)$ ve $\varphi_2(t)$ negatif olmayan $[0, T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$u_t(t) \leq \varphi_1(t) u(t) + \varphi_2(t)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $0 \leq t \leq T$ için

$$u_t(t) \leq e^{\int_0^t \varphi_1(\tau) d\tau} \left(u(0) + \int_0^t \varphi_2(\tau) d\tau \right)$$

dır.

Lemma 3.5.7 (Gronwall eşitsizliği (İntegral form))

i. $u(t)$, hemen hemen her t ve C_1, C_2 negatif olmayan sabitler için

$$u(t) \leq C_1 \int_0^t u(\tau) d\tau + C_2$$

integral eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan, $0 \leq t \leq T$ de toplanabilir fonksiyon olsun, bu durumda hemen hemen her $[0, T]$ için

$$u(t) \leq C_2 (1 + C_1 t e^{C_1 t})$$

sağlanır.

ii. Özel durum olarak, eğer hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$u(t) \leq C_1 \int_0^t u(\tau) d\tau$$

ise, bu durumda her yerde $u(t) = 0$ sağlanır.

Lemma 3.5.8 Her $a, b \in R^+$ ve her $x \in \Omega$ için

$$\left(|a|^{p(x)-2} a - |b|^{p(x)-2} b \right) (a - b) \geq 0$$

dır.

İspat. $f(x) = |a|^{p(x)-2} a$ fonksiyonunu ele alalım. $p(x) > 1$ için

$$f'(x) = (p(x) - 1) |a|^{p(x)-2} \ln a > 0$$

olduğundan $f(x)$ fonksiyonu monotondur. Dolayısıyla $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki farkın, $a - b$ ile aynı işaretlidir. Bu nedenle,

$$(f(a) - f(b)) (a - b) \geq 0$$

eşitsizliği sağlar.

Lemma 3.5.9 σ pozitif bir sayı olsun. $\gamma = \frac{1}{e\sigma}$ iken tüm $\phi \in [1, \infty)$ için aşağıdaki

$$\ln \phi \leq \gamma \phi^\sigma$$

eşitsizlik sağlanır.

İspat. Her $u \in R$ için

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots$$

olduğu biliniyor. Bu nedenle

$$1 + u \leq e^u$$

olsun. Burada $u = \sigma \ln \phi - 1$ dönüşümü uygulanırsa ve eşitsizlikte yerine yazılırsak

$$\ln \phi \leq \frac{\phi^\sigma}{e\sigma}$$

elde ederiz.

Lemma 3.5.10 (Green özdeşliği) $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ olsun. O halde

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx$$

şeklinde yazılabilir. Burada n dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n \nabla u$ dır.

Lemma 3.5.11 (Zorn Lemması) Boş olmayan kısmi sıralı bir küme içindeki her zincirin o kümede bir üst sınıra sahip ise, bu kısmi sıralı kümenin bir maksimal elemanı vardır.

Lemma 3.5.12 (Aubin-Lions Lemması) X, V ve Y Banach uzayları olsun. $1 \leq p < \infty$ ve $q = 1$ veya $p = 1$ ve $q > 1$ için aşağıdaki şartlar sağlansın:

- i. $X \hookrightarrow V$ gömülmesi kompakt,
- ii. $V \hookrightarrow Y$ gömülmesi süreklidir,
- iii. $U = \{u \in L^p(0, T; X) \mid \frac{\partial u}{\partial t} \in L^q(0, T; Y)\}$ kümesi $U \subset L^p(0, T; X)$ şeklinde tanımlansın.

Bu şartlar altında, U kümesi $L^p(0, T; V)$ uzayında nispeten kompakt bir kümedir (Aubin, 1963; Lions, 1969).

Teorem 3.5.13 (İşaret koruma özelliği) f fonksiyonu a noktasında sürekli ve $f(a) \neq 0$ olsun. Bu durumda a nın öyle bir δ komşuluğu vardır ki bu komşuluktaki her x için $f(x)$ ile $f(a)$ aynı işaretlidir.

Teorem 3.5.14 (Birim yuvar özelliği) $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olsun.

$$\|u\|_{p(\cdot)} \leq 1$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\rho_{p(\cdot)} \leq 1$$

olmasıdır.

3.6 Çözümlerin Patlaması

$\Omega \subset R^n$ de açık bir bölge ve $T > 0$ olsun. Bir başlangıç sınır değer probleminin çözümü $\Omega \times [0, T)$ de olsun. T lerin supremumuna çözümün varlık aralığının uzunluğu denir ve $T_{\max}$ ile gösterilir. Eğer

- i. $T_{\max} = \infty$ ise global çözüm vardır,
- ii. $T_{\max} < \infty$ ise global çözüm yoktur. Bu durumda çözüm sonlu zamanda patlar.

3.7 Zayıf Çözüm

Her $r \in W_0^{1,2}(m, n)$ için

$$\int_m^n [p(x) y' r'(x) + q(x) y r(x)] dx = \int_m^n f(x) r(x) dx$$

eşitliği sağlayan $y \in W_0^{1,2}(m, n)$ fonksiyonuna

$$\begin{cases} (-p(x) y')' + q(x) y = f(x), & m < x < n \\ y(m) = y(n) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin zayıf (genelleştirilmiş) çözümü denir.

3.8 Faedo-Galerkin Yöntemi

Bu yöntem çözümlerin varlığının ispatında kullanılan önemli metotlardan biridir. Ayrılabilir bir V Hilbert uzayında tanımlı bir fonksiyon uzayında, bir $(\mathcal{A})$ probleminin çözümlerinin varlığını bulmak isteyelim. Bu $(\mathcal{A})$ probleminin tek bir çözümü u olsun. V nin bir V_m Galerkin yaklaşımını seçtikten sonra, sonlu boyutlu (V_m) uzayında, tek bir (u_m) çözümüne sahip yaklaşık bir $(\mathcal{A}_m)$ probleminin tanımlanması gereklidir. Daha sonra aşağıdaki adımlar uygulanır:

Adım 1: $(\mathcal{A}_m)$ probleminin çözümü u_m olsun.

Adım 2: u_m nin düzgün sınırlı olduğunu göstermek için u_m üzerinde kestirimler oluştururuz.

Adım 3: u_m nin düzgün sınırlı olmasından dolayı, 2. adımdaki kestirimleri içeren uzayın zayıf topolojisinde, bir limite sahip, $\{u_m\}_{m \in N^*}$ dizisinin bir $\{u'_m\}_{m \in N^*}$ alt dizisini seçmek mümkündür. Elde edilen limit u olsun.

Adım 4: $(\mathcal{A})$ probleminin çözümünün u olduğunu gösteririz.

Adım 5: Böylece, güçlü yakınsaklık sonuçları elde edilir.

Yaklaşım sürecinin oluşturulmasının esas amacı, bir çözümün varlığının elde edilmesini sağlamaktır, bu süreç $u_m(x, t)$ ya, $(x, t) \in \Omega \times [0; T]$ için

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^n r_{im}(t) w_i$$

olacak şekilde w_i tabanlarının fonksiyonlarının doğrusal bir kombinasyonu olarak yaklaşıma tekabül eder. Başka bir deyişle, bir problem için yaklaşık bir problem tanımlanır. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi, ele alınan yaklaşık sistemin, doğrusal olmayan terimleri düzgün olduğundan Zorn Lemması kullanılarak maksimal bir $[0, t_k)$ aralığına genişletilecek şekilde tek bir lokal çözüme sahiptir. Sonraki adım olarak bazı kestirimler elde edilir. Böylece tüm $t > 0$ için tanımlı bir çözüm elde etmek için aralık $[0, t_k)$ dışına genişletilebilir (Lions, 1969).

3.9 Genelleştirilmiş- α Yöntemi

Genelleştirilmiş- α yönteminin temel formu aşağıdaki gibidir:

$$d_{n+1} = d_n + \Delta t (\alpha(a_n - \beta a_{n+1})) \quad (3.2)$$

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t ((1 - \gamma)a_n + \gamma a_{n+1}) \quad (3.3)$$

$$M a_{n+1} - a_n + C v_{n+1} - v_n + K d_{n+1} - d_n = F(t_{n+1}) - F(t_n)$$

Başlangıç koşulları:

$$d_0 = d$$

$$v_0 = v$$

$$a_0 = M^{-1} (F(0) - C v - K d)$$

Burada:

$$d_{n+1} - \alpha = (1 - \alpha)d_n + \alpha d_{n+1}$$

$$v_{n+1} - \alpha = (1 - \alpha)v_n + \alpha v_{n+1}$$

$$a_{n+1} - \alpha = (1 - \alpha)a_n + \alpha a_{n+1}$$

$$\gamma_{n+1} - \alpha = (1 - \alpha)\gamma_n + \alpha \gamma_{n+1}$$

Burada $n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$, N zaman adım sayısıdır ve Δt zaman adımıdır. Yer değıştirme ve hız güncelleme denklemleri olan (3.2) ve (3.3) Newmark algoritmasındakiyle aynıdır. Bu güncelleme denklemlerinin yapısı, $d(t_{n+1})$ ve $v(t_{n+1})$ nin Taylor serisi açılımında yer alan ivme terimlerinin katsayılarının toplamını sınırlayarak elde edilmiştir. Basit sayısal deneyler, bu güncelleme denklemi yapısının her periyotta zirve yer değıştirme ve hız hatalarında monoton bir artışa yol açtığını göstermiştir (Chung ve Hulbert, 1993).



4. DEĞİŞKEN ÜSLÜ DOĞRUSAL OLMAYAN PETROVSKY DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE PATLAMASI

Bu bölümde, $\Omega \times (0, T)$ bölgesinde aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemi incelenmiştir (Yılmaz vd., 2023a):

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u_t + |u_t|^{p(x)-2} u_t = |u|^{q(x)-2} u, \\ u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x). \end{cases} \quad (4.1)$$

Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^+$), $\partial\Omega$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge ve $u_0(x) \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, $u_1(x) \in L^2(\Omega)$ başlangıç koşullarıdır. ν dış birim vektördür. $p(\cdot)$ ve $q(\cdot)$ ölçülebilir fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlar:

$$\begin{cases} 2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \infty, & n \leq 4, \\ 2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \frac{2n-4}{n-4}, & n > 4 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} 2 < q_1 \leq q(x) \leq q_2 < \infty, & n \leq 4, \\ 2 < q_1 \leq q(x) \leq q_2 < \frac{2n-4}{n-4}, & n > 4 \end{cases}$$

burada

$$\begin{aligned} p_1 &= \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x), \quad p_2 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x), \\ q_1 &= \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} q(x), \quad q_2 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} q(x) \end{aligned}$$

dır.

Lemma 4.1 Eğer Ω üzerinde ölçülebilir bir $r(\cdot)$ fonksiyonu (3.1) koşulunu sağlıyorsa

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{r(\cdot)}(\Omega)$$

ve

$$H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$$

gömülmeleri sürekli ve kompaktır.

Aşağıdaki fonksiyonelleri tanımlayalım:

$$E(t) = \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2) - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx, \quad (4.2)$$

$$I(t) = \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 - \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \quad (4.3)$$

ve

$$J(t) = \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \quad (4.4)$$

dır.

Aşağıdaki lemma enerji fonksiyonelinin artmayan olduğunu ifade etmektedir.

Lemma 4.2 Eğer u , (4.1) denkleminin bir çözümü ise $t \in [0, T]$ için

$$E'(t) = - \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx - \int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} dx$$

ve

$$E(t) \leq E(0)$$

dır.

İspat. (4.1) deki denklemi u_t ile çarpıp Ω bölgesi üzerinde integral alınırsa

$$\int_{\Omega} u_t (u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u_t + |u_t|^{p(x)-2} u_t) dx = \int_{\Omega} u_t |u|^{q(x)-2} u dx$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{\Omega} u_t u_{tt} dx}_{A_1} - \underbrace{\int_{\Omega} u_t \Delta u dx}_{A_2} - \underbrace{\int_{\Omega} u_t \Delta u_{tt} dx}_{A_3} + \underbrace{\int_{\Omega} u_t \Delta^2 u dx}_{A_4} \\ & - \underbrace{\int_{\Omega} u_t \Delta u_t dx}_{A_5} - \underbrace{\int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} dx}_{A_6} = \underbrace{\int_{\Omega} u_t |u|^{q(x)-2} u dx}_{A_7} \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi her terimi ayrı ayrı düzenlenirse:

A_1 terimi

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\Omega} u_t u_{tt} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2 \end{aligned}$$

dir.

A_2 terimi Green özdeşliğinden

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

A_3 terimi Green özdeşliğinden

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u_{tt} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_t\|^2 \end{aligned}$$

olur.

A_4 terimi Green özdeşliğinden

$$\begin{aligned} A_4 &= \int_{\Omega} \Delta u_t \Delta u dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

A_5 terimi Green özdeşliğinden

$$\begin{aligned} A_5 &= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u_t dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx \\ &= \|\nabla u_t\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

A_6 terimini düzenlenirse

$$\begin{aligned} A_6 &= \int_{\Omega} u_t |u_t|^{p(x)-2} u_t dx \\ &= \int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} dx \end{aligned}$$

elde edilir.

A_7 terimini düzenlenirse

$$A_7 = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} u dx$$

elde edilir. Bulunan bu ifadeler (4.5) te yazılırsa,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2) - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \right) \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx - \int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} dx \end{aligned}$$

olur. Yani

$$E'(t) = - \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx - \int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} dx \leq 0, \quad (4.6)$$

$$E'(t) \leq 0$$

dır. (4.6) eşitsizliğini $(0, t)$ aralığında integral alınırsa

$$\int_0^t E'(t) dt \leq \int_0^t 0 dt$$

$$E(t)|_0^t \leq 0$$

$$E(t) - E(0) \leq 0$$

$$E(t) \leq E(0)$$

dır.

Lemma 4.3 Lemma 4.2 nin koşulları sağlansın ve $E(0) > 0$ olsun. Ayrıca

$$I(0) > 0$$

ve

$$\theta_1 + \theta_2 < 1 \quad (4.7)$$

ise her $t \in [0, T]$ için

$$I(t) > 0$$

dır. Burada $c_{1,*}$ ve $c_{2,*}$ sırasıyla $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ ve $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ gömümlerinin gömülme sabitleri olmak üzere $0 < \alpha < 1$ için

$$\theta_1 = \alpha \left\{ c_{1,*}^{q_1} \left(\frac{2q_1}{q_1 - 2} E(0) \right)^{\frac{q_2 - 2}{2}}, c_{1,*}^{q_2} \left(\frac{2q_1}{q_1 - 2} E(0) \right)^{\frac{q_2 - 2}{2}} \right\},$$

$$\theta_2 = (1 - \alpha) \left\{ c_{2,*}^{q_1} \left(\frac{2q_1}{q_1 - 2} E(0) \right)^{\frac{q_2 - 2}{2}}, c_{2,*}^{q_2} \left(\frac{2q_1}{q_1 - 2} E(0) \right)^{\frac{q_2 - 2}{2}} \right\}$$

dır.

İspat. Sürekli fonksiyonun işaret koruma özelliğinden dolayı $I(0) > 0$ olduğundan öyle bir T_* vardır ki $t \in [0, T_*]$ için

$$I(t) \geq 0 \tag{4.8}$$

dır. Şimdi, $q_1 < q(x)$ den ve tüm $t \in [0, T_*]$ için

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \\ &\geq \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) - \frac{1}{q_1} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \end{aligned} \tag{4.9}$$

dır.

$$I(t) = \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 - \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx$$

ise

$$\int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx = \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 - I(t)$$

dır. Bu ifade (4.9) da yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} J(t) &\geq \frac{1}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) - \frac{1}{q_1} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 - I(t)) \\ &\geq \frac{q_1 - 2}{2q_1} (\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) + \frac{1}{q_1} I(t) \end{aligned}$$

olur. (4.8) den $t \in [0, T_*]$ için

$$(\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2) \leq \frac{2q_1}{q_1 - 2} J(t) \tag{4.10}$$

dır. Lemma 4.2 den

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 &\leq \frac{2q_1}{q_1 - 2} E(t) \\ &\leq \frac{2q_1}{q_1 - 2} E(0)\end{aligned}\quad (4.11)$$

dır. Ayrıca, Lemma 3.4.6 dan

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx &\leq \max \left\{ \|u\|_{q(\cdot)}^{q_1}, \|u\|_{q(\cdot)}^{q_2} \right\} \\ &= \alpha \max \left\{ \|u\|_{q(\cdot)}^{q_1}, \|u\|_{q(\cdot)}^{q_2} \right\} \\ &\quad + (1 - \alpha) \max \left\{ \|u\|_{q(\cdot)}^{q_1}, \|u\|_{q(\cdot)}^{q_2} \right\}\end{aligned}$$

elde edilir. $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ ve $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ gömülmelerinden

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx &\leq \alpha \max \left\{ c_{1,*}^{q_1} \|\nabla u\|_2^{q_1}, c_{1,*}^{q_2} \|\nabla u\|_2^{q_2} \right\} \\ &\quad + (1 - \alpha) \max \left\{ c_{2,*}^{q_1-2} \|\Delta u\|_2^{q_1}, c_{2,*}^{q_2-2} \|\Delta u\|_2^{q_2} \right\} \\ &\leq \alpha \max \left\{ c_{1,*}^{q_1} \|\nabla u\|_2^{q_1}, c_{1,*}^{q_2} \|\nabla u\|_2^{q_2} \right\} \|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad + (1 - \alpha) \max \left\{ c_{2,*}^{q_1} \|\Delta u\|_2^{q_1}, c_{2,*}^{q_2} \|\Delta u\|_2^{q_2} \right\} \|\Delta u\|_2^2 \\ &\leq \alpha \max \left\{ c_{1,*}^{q_1} \left(\frac{2q_1}{q_1 - 2} E(0) \right)^{\frac{q_1-2}{2}}, c_{1,*}^{q_2} \left(\frac{2q_1}{q_1 - 2} E(0) \right)^{\frac{q_2-2}{2}} \right\} \|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad + (1 - \alpha) \max \left\{ c_{2,*}^{q_1} \left(\frac{2q_1}{q_1 - 2} E(0) \right)^{\frac{q_1-2}{2}}, c_{2,*}^{q_2} \left(\frac{2q_1}{q_1 - 2} E(0) \right)^{\frac{q_2-2}{2}} \right\} \\ &\quad \times \|\Delta u\|_2^2\end{aligned}$$

olur. Daha sonra $t \in [0, T_*]$ için

$$\int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \leq \theta_1 \|\nabla u\|^2 + \theta_2 \|\Delta u\|^2 \quad (4.12)$$

elde edilir. $\theta_1 + \theta_2 < 1$ olduğundan $t \in [0, T_*]$ için

$$\int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx < \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 \quad (4.13)$$

dır. Böylece $t \in [0, T_*]$ için

$$I(t) > 0$$

elde edilir. Yukarıdaki süreci tekrarlayarak, T_* zamanını T ye genişletilebilir.

Lemma 4.4 B ve B^* Banach uzayları ve $B = (B^*)'$ olsun. Ayrıca $1 < p \leq \infty$ için $L^p([0, T] : [B])$ uzayında $u_n \rightharpoonup u$ ve $u'_n \rightharpoonup u'$ ne zayıf yıldızl yakınsak ise B uzayında $u_n(0) \rightharpoonup u(0)$ a zayıf yıldızl yakınsar (Zheng, 2004).

4.1 Lokal Varlık

Bu bölüm, problem (4.1) in lokal varlığını Faedo-Galerkin yöntemini kullanarak elde edilecektir.

Teorem 4.1.1 Kabul edelim ki $p(x), q(x) \in C(\overline{\Omega})$ ve log-Hölder koşulu sağlansın. Bu durumda herhangi bir $(u_0, u_1) \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega) \times L^2(\Omega)$ için (4.1) problemi lokal bir çözüme sahiptir ve

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty((0, T), H_0^2(\Omega)), \\ u_t &\in L^\infty((0, T), H_0^2(\Omega)) \cap L^{m(\cdot)}(\Omega \times (0, T)) \end{aligned}$$

dır.

İspat. $\{v_l\}_{l=1}^\infty, H_0^2(\Omega)$ uzayının bir ortonormal tabanı olsun. $\{v_l\}_{l=1}^\infty$ bazının ilk k vektöründen oluşan bir altuzayı $V_k = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ olsun. Normalizasyon nedeniyle, $\|v_l\| = 1$ dır. Bir k tam sayısı için yaklaşık çözüm:

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^k u_{lk}(t) v_l$$

olacak şekilde aşağıdaki Cauchy probleminin çözümü olsun. $l = 1, 2, \dots, k$ için

$$\begin{aligned} &(u_k''(t), v_l) - (\Delta u_k(t), v_l) - (\Delta u_k''(t), v_l) + (\Delta^2 u_k(t), v_l) \\ &- (\Delta u_k'(t), v_l) + (|u_k'(t)|^{p(x)-2} u_k'(t), v_l) \\ &= (|u_k(t)|^{q(x)-2} u_k(t), v_l), \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$u_k(0) = u_{0k} = \sum_{l=1}^k (u_k(0), v_l) v_l \rightarrow u_0, H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega), \tag{4.15}$$

$$u_k'(0) = u_{1k} = \sum_{l=1}^k (u_k'(0), v_l) v_l \rightarrow u_1, H_0^2(\Omega) \tag{4.16}$$

olur. (4.14)-(4.16) problemi adi diferansiyel denklem olduğu gibi Picard ardışık yaklaşım yöntemi ile çözülebilir. Dolayısıyla $T_* > 0$ için $[0, T_*)$ aralığında bir çözüm mevcuttur. Aşağıda verilen kestirimleri kullanarak bu çözümü herhangi bir $T > 0$ için $[0, T)$ aralığına genişletilebilir.

I. Kestirim: (4.14) denklemini $u'_{lk}(t)$ ile çarparak ve l yi 1 den k ye kadar toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\sum_{l=1}^k \int_{\Omega} u''_k(t) u'_{lk}(t) v_l dx}_{B_1} - \underbrace{\sum_{l=1}^k \int_{\Omega} \Delta u_k(t) u'_{lk}(t) v_l dx}_{B_2} - \underbrace{\sum_{l=1}^k \int_{\Omega} \Delta u''_k(t) u'_{lk}(t) v_l dx}_{B_3} \\
& + \underbrace{\sum_{l=1}^k \int_{\Omega} \Delta^2 u_k(t) u'_{lk}(t) v_l dx}_{B_4} - \underbrace{\sum_{l=1}^k \int_{\Omega} \Delta u'_k(t) u'_{lk}(t) v_l dx}_{B_5} \\
& - \underbrace{\sum_{l=1}^k \int_{\Omega} |u'_k(t)|^{p(x)-2} u'_k(t) u'_{lk}(t) v_l dx}_{B_6} \\
& = \underbrace{\sum_{l=1}^k \int_{\Omega} |u_k(t)|^{q(x)-2} u_k(t) u'_{lk}(t) v_l dx}_{B_7}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir. Şimdi her terimi ayrı ayrı düzenlenirse:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \sum_{l=1}^k \int_{\Omega} u''_k(t) u'_{lk}(t) v_l dx \\
&= \int_{\Omega} u''_k(t) \sum_{l=1}^k u'_{lk}(t) v_l dx \\
&= \int_{\Omega} u''_k(t) u'_k(t) dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u'_k(t)|^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'_k(t)\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= \sum_{l=1}^k \int_{\Omega} \Delta u_k(t) u'_{lk}(t) v_l dx \\
&= \int_{\Omega} \Delta u_k(t) u'_k(t) dx \\
&= - \int_{\Omega} \nabla u_k(t) \nabla u'_k(t) dx \\
&= - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u_k(t)|^2 dx \\
&= - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_k(t)\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3 &= \sum_{l=1}^k \int_{\Omega} \Delta u_k''(t) u_{lk}'(t) v_l dx \\
&= \int_{\Omega} \Delta u_k''(t) u_k'(t) dx \\
&= - \int_{\Omega} \nabla u_k''(t) \nabla u_k'(t) dx \\
&= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_k'(t)\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4 &= \sum_{l=1}^k \int_{\Omega} \Delta^2 u_k(t) u_{lk}'(t) v_l dx \\
&= \int_{\Omega} \Delta^2 u_k(t) u_k'(t) dx \\
&= \int_{\Omega} \Delta u_k(t) \Delta u_k'(t) dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u_k(t)\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_5 &= \sum_{l=1}^k \int_{\Omega} \Delta u_k'(t) u_{lk}'(t) v_l dx \\
&= \int_{\Omega} \Delta u_k'(t) u_k'(t) dx \\
&= - \int_{\Omega} \nabla u_k'(t) \nabla u_k'(t) dx \\
&= - \int_{\Omega} |\nabla u_k'(t)|^2 dx \\
&= - \|\nabla u_k'(t)\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_6 &= \sum_{l=1}^k \int_{\Omega} |u_k'(t)|^{p(x)-2} u_k'(t) u_{lk}'(t) v_l dx \\
&= \int_{\Omega} |u_k'(t)|^{p(x)-2} u_k'(t) u_k'(t) dx \\
&= \int_{\Omega} |u_k'(t)|^{p(x)} dx,
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
B_7 &= \sum_{l=1}^k \int_{\Omega} |u_k(t)|^{q(x)-2} u_k(t) u_{lk}'(t) v_l dx \\
&= \int_{\Omega} |u_k(t)|^{q(x)-2} u_k(t) u_k'(t) dx \\
&= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u_k(t)|^{q(x)} dx
\end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen $B_1, B_2, \dots, B_7$ ifadeleri (4.17) de yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\|u'_k\|^2 + \|\nabla u_k\|^2 + \|\Delta u'_k\|^2 + \|\Delta u_k\|^2 \right) - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \right] \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla u'_k|^2 dx - \int_{\Omega} |u'_k|^{p(x)} dx \end{aligned} \quad (4.18)$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$E'(u_k(t)) = - \int_{\Omega} |\nabla u'_k|^2 dx - \int_{\Omega} |u'_k|^{p(x)} dx \leq 0$$

olur. (4.18) in $(0, t)$ aralığında integrali alınır:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u'_k\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_k\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u'_k\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u_k\|^2 \\ & - \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u_k|^{q(x)} dx \\ & \leq E(0) \end{aligned} \quad (4.19)$$

eşitsizliği elde edilir.. Daha sonra (4.13) ten (4.19) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sup_{t \in (0, T)} \|u'_k\|^2 + \frac{q_1 - 2}{2q_1} \sup_{t \in (0, T)} \|\nabla u_k\|^2 + \frac{q_1 - 2}{2q_1} \sup_{t \in (0, T)} \|\Delta u_k\|^2 \\ & + \frac{1}{2} \sup_{t \in (0, T)} \|\Delta u'_k\|^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |u'_k(x, s)|^{p(x)} dx ds \\ & \leq E(0) \end{aligned} \quad (4.20)$$

eşitsizliğine dönüşür. (4.20) den

$$\left\{ \begin{array}{l} \{u_k\}, L^{\infty}((0, T); H_0^2(\Omega)) \text{ uzayında düzgün sınırlıdır,} \\ \{u'_k\}, L^{\infty}((0, T); H_0^2(\Omega)) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega \times (0, T)) \\ \text{uzayında düzgün sınırlıdır,} \end{array} \right. \quad (4.21)$$

$\{u'_k\}, L^{p(x)}(\Omega \times [0, T])$ uzayında düzgün sınırlı olduğundan, $\left\{ |u'_k|^{p(x)-2} u'_k \right\}$ de $L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega \times [0, T])$ uzayında sınırlıdır; dolayısıyla bir alt diziye kadar $|u'_k|^{p(x)-2} u'_k$, Φ ye $L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega \times [0, T])$ uzayında zayıf sınırlıdır. $\Phi = |u'|^{p(x)-2} u'$ olduğunu göstermek gerekir. Ayrıca, Lemma 3.5.5 ve (4.21) den,

$$\left\{ |u_k|^{q(x)-2} u_k \right\}, L^{\infty}([0, T]) \text{ ve } L^2(\Omega) \text{ de eşit olarak sınırlanmıştır.} \quad (4.22)$$

(4.21) ve (4.22) den, u_k dizisinin bir alt dizisi ile bir u fonksiyonu elde edilir:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k, u \text{ ya } L^\infty([0, T]; H_0^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf}^* \text{ yakınsar;} \\ u'_k, u' \text{ ye } L^\infty([0, T]; H_0^2(\Omega) \text{ ve } L^{p(\cdot)}(\Omega \times (0, T)) \text{ uzayında} \\ \text{zayıf}^* \text{ yakınsar;} \\ |u_k|^{q(x)-2} u_k, \psi \text{ ya } L^\infty([0, T]), L^2(\Omega) \text{ zayıf yakınsar.} \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Aubin-Lions lemmasını (Lions, 1969) kullanarak (4.23) dan u_k, u ya $C([0, T]; H_0^2(\Omega))$ uzayında güçlü yakınsar yani

$$u_k, u \text{ ya } \Omega \times [0, T] \quad (4.24)$$

bölgesinde yakınsar. (4.23) ve (4.24) den

$$|u_k|^{q(x)-2} u_k, |u|^{q(x)-2} u \text{ ya } L^\infty([0, T]), L^2(\Omega) \text{ uzayında yakınsar.} \quad (4.25)$$

II. Kestirim : Şimdi de (4.14) ü t ye göre türevini alırsak $l = 1, 2, \dots, k$ için

$$\begin{aligned} & (u_k'''(t), v_l) - (\Delta u_k'(t), v_l) - (\Delta u_k'''(t), v_l) + (\Delta^2 u_k'(t), v_l) \\ & - (\Delta u_k''(t), v_l) + \left((p(x) - 1) |u_k''(t)|^{p(x)-2} u_k''(t), v_l \right) \\ & = \left((q(x) - 1) |u_k(t)|^{q(x)-2} u_k'(t), v_l \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

elde edilir. Sonra, (4.26) denklemini $u_{lk}''(t)$ ile çarparak ve l için 1 den k ya kadar toplanarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|u_k''\|^2 + \|\nabla u_k'\|^2 + \|\nabla u_k''\|^2 + \|\Delta u_k'\|^2 \right] + \int_{\Omega} (p(x) - 1) |u_k'|^{p(x)-1} |u_k''|^2 dx \\ & + \int_{\Omega} |\nabla u_k''|^2 dx = - \int_{\Omega} (q(x) - 1) |u_k|^{q(x)-2} u_k' u_k'' dx. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (q(x) - 1) |u_k|^{q(x)-2} |u_k'| |u_k''| dx \right| & \leq (q_2 - 1) \|u_k\|_{2(q(x)-1)}^{q(x)-2} \\ & \times \|u_k'\|_{2(q(x)-1)} \|u_k''\|_2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

dır. Dolayısıyla

$$u_k \in L^\infty([0, T], H_0^2(\Omega))$$

ve

$$\begin{aligned} 2(q_1 - 1) &\leq 2(q(x) - 1) \\ &\leq 2(q_2 - 1) \\ &\leq 2\frac{n}{n-2} \end{aligned}$$

den

$$\int_{\Omega} |u_k|^{2q(x)-2} dx \leq \int_{\Omega} |u_k|^{2q_1-2} dx + \int_{\Omega} |u_k|^{2q_2-2} dx < +\infty$$

olur. (4.28) eşitsizliği

$$\left| \int_{\Omega} (q(x) - 1) |u_k|^{q(x)-2} |u'_k| |u''_k| dx \right| \leq c_1 \|u'_k\|_{2(q(x)-1)} \|u''_k\|_2 \quad (4.29)$$

olur. Young ve Poincaré eşitsizliğinden

$$\left| \int_{\Omega} (q(x) - 1) |u_k|^{q(x)-2} |u'_k| |u''_k| dx \right| \leq c_{\delta} \|\nabla u'_k\|^2 + \delta \|u''_k\|^2 \quad (4.30)$$

elde edilir. (4.30) ü (4.27) de yerine yazılırsa ve $t \in [0, T]$ için $(0, t)$ aralığında integral alınır

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left(|u''_k|^2 + |\nabla u'_k|^2 + |\nabla u''_k|^2 + |\Delta u'_k|^2 + |\nabla u''_k|^2 \right) dx \\ &\leq \left(\|u''_k(0)\|^2 + \|\nabla u'_k(0)\|^2 + \|\nabla u''_k(0)\|^2 + \|\Delta u'_k(0)\|^2 \right) \\ &\quad + c_2 \int_0^t \left(\|\nabla u'_k\|^2 + \|u''_k\|^2 \right) ds \end{aligned} \quad (4.31)$$

ve (4.16) ile $\|\nabla u'_k(0)\|^2 \leq c_3 \|\Delta u'_k(0)\|^2$ dan

$$\|\nabla u'_k(0)\|^2 + \|\Delta u'_k(0)\|^2 \leq c_4 \quad (4.32)$$

elde edilir. Burada c_4 , k dan bağımsız pozitif bir sabittir.

(4.14) denkleminin her iki tarafını $u''_{lk}(t)$ ile çarparak, l için 1 den k kadar toplayarak, $t = 0$ için

$$\begin{aligned} &\|u''_k(0)\|^2 - (\Delta u_k(0), u''_k(0)) - (\Delta u''_k(0), u''_k(0)) + (\Delta^2 u_k(0), u''_k(0)) \\ &- (\Delta u'_k(0), u''_k(0)) + \left(|u'_k(0)|^{p(x)-2} u'_k(0), u''_k(0) \right) = \left(|u_k(0)|^{q(x)-2} u_k(0), u''_k(0) \right) \end{aligned}$$

olur. (4.15), (4.16) ve Young eşitsizliği kullanılarak

$$\|u''_k(0)\|^2 \leq c_5 \quad (4.33)$$

elde edilir. Burada c_5 , k dan bağımsız pozitif bir sabittir.

(4.32) ve (4.33) ten (4.31) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u_k''|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_k'|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_k''|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta u_k'|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_k''|^2 dx \\ & \leq c_6 + c_7 \int_0^t \left(|u_k''|^2 + |\nabla u_k'|^2 + |\nabla u_k''|^2 + |\Delta u_k'|^2 + |\nabla u_k''|^2 \right) ds \end{aligned} \quad (4.34)$$

olur. (4.34) ve Gronwall lemmasından, $t \in [0, T]$ için

$$\|u_k''\|^2 + \|\nabla u_k'\|^2 + \|\nabla u_k''\|^2 + \|\Delta u_k'\|^2 + \|\nabla u_k''\|^2 \leq c_8, \quad (4.35)$$

elde edilir. Burada c_8 , k dan bağımsız pozitif bir sabittir.

(4.35) ten

$$\begin{cases} \{u_k'\}, L^\infty([0, T], H_0^2(\Omega)) \text{ uzayında düzgün sınırlıdır,} \\ \{u_k''\}, L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega)) \text{ uzayında düzgün sınırlıdır.} \end{cases} \quad (4.36)$$

Benzer şekilde

$$\begin{cases} u_k', L^\infty([0, T], H_0^2(\Omega)) \text{ uzayında düzgün sınırlıdır,} \\ u_k'', L^\infty([0, T], H_0^1(\Omega)) \text{ uzayında düzgün sınırlıdır.} \end{cases} \quad (4.37)$$

$k \rightarrow \infty$ alındığında (4.14) denkleminde

$$\begin{aligned} & (u''(t), v_l) - (\Delta u(t), v_l) - (\Delta u''(t), v_l) + (\Delta^2 u(t), v_l) - (\Delta u'(t), v_l) \\ & + \left(|u'(t)|^{p(x)-2} u'(t), v_l \right) = \left(|u(t)|^{q(x)-2} u(t), v_l \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

elde edilir. $\{v_l\}_{l=1}^\infty, H_0^2(\Omega)$ uzayının bir ortonormal tabanı olduğundan u , (4.1) denkleminini sağlar. (4.23), (4.37) ve Lemma 4.4 ü, sırasıyla $B = H_0^2(\Omega)$ ve $L^2(\Omega)$ alındığında

$$\begin{cases} u_k', H_0^2(\Omega) \text{ uzayında düzgün sınırlıdır,} \\ u_k'', H_0^1(\Omega) \text{ uzayında düzgün sınırlıdır} \end{cases} \quad (4.39)$$

elde edilir. (4.15), (4.16) ve (4.39) dan $u(0) = u_0, u_t(0) = u_1$ sonucu elde edilir.

Böylece çözümün var olduğu ispatlanmış oldu.

4.2 Çözümün Tekliği

Şimdi çözümün tek olduğunu kanıtlamak için y ve z ifadesi (4.1) in iki çözüm olsun ve $w = y - z$ olsun. Bu durumda w aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\begin{aligned} w_{tt} - \Delta w - \Delta w_{tt} + \Delta^2 w - \Delta w_t \\ + |y_t|^{p(x)-2} y_t - |z_t|^{p(x)-2} z_t = |y|^{q(x)-2} y - |z|^{q(x)-2} z \end{aligned} \quad (4.40)$$

burada

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x)$$

dır. (4.40) ifadesini w_t ile çarpıp ve x e göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|w_t|^2 + |\nabla w|^2 + |\nabla w_t|^2 + |\Delta w|^2) dx \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta w|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} (|y_t|^{p(x)-2} y_t - |z_t|^{p(x)-2} z_t) w_t dx ds \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} (|y|^{q(x)-2} y - |z|^{q(x)-2} z) w_t dx ds. \end{aligned}$$

elde ederiz. Lemma 3.5.8 den her $x \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} & \|w_t\|^2 + \|\nabla w\|^2 + \|\nabla w_t\|^2 + \|\Delta w\|^2 \\ & \leq C \int_0^t \int_{\Omega} (|y|^{q(x)-2} y - |z|^{q(x)-2} z) w_t dx ds \end{aligned} \quad (4.41)$$

elde edilir. Daha sonra benzer kestirimlerde bulunarak aşağıdaki sonuca varılır:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|w_t|^2 + |\nabla w|^2 + |\nabla w_t|^2 + |\Delta w|^2) dx \\ & \leq C \int_0^t \int_{\Omega} (|w_t|^2 + |\nabla w|^2) dx ds. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Buradan da

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|w_t|^2 + |\nabla w|^2 + |\nabla w_t|^2 + |\Delta w|^2) dx \\ & \leq C \int_0^t \int_{\Omega} (|w_t|^2 + |\Delta w|^2 + |\nabla w|^2 + |\Delta w|^2) dx ds \end{aligned} \quad (4.43)$$

dır. Gronwall eşitsizliğinden

$$\|w_t\|^2 + \|\nabla w\|^2 + \|\nabla w_t\|^2 + \|\Delta w\|^2 = 0$$

dır. Böylece, $w = 0$ olur. Yani

$$y - z = 0$$

olacağından

$$y = z$$

dır.

4.3 Çözümün Patlaması

Bu bölümde, (4.1) probleminin çözümünün patlaması incelenecektir.

Önce aşağıdaki lemmaları verilecektir.

Lemma 4.3.1 Eğer $q : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\begin{cases} 2 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2 < \infty & n \leq 4, \\ 2 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2 < \frac{2n}{n-4} & n > 4 \end{cases} \quad (4.44)$$

ve

$$\min \left\{ \|u\|_{q(\cdot)}^{q_1}, \|u\|_{q(\cdot)}^{q_2} \right\} \leq \rho(u) \leq \max \left\{ \|u\|_{q(\cdot)}^{q_1}, \|u\|_{q(\cdot)}^{q_2} \right\}$$

geçerli ise, o zaman

$$\rho_{q(x)}^{\frac{s}{q_1}}(u) \leq C (\|\Delta u\|^2 + \rho_{q(\cdot)}(u)) \quad (4.45)$$

eşitsizliği elde edilir (Messaoudi ve Talahmeh, 2017).

İspat. Eğer $\rho(u) > 1$ ise $C > 1$ için

$$\rho_{q(x)}^{\frac{s}{q_1}}(u) \leq \rho(u) \leq C (\|\Delta u\|^2 + \rho(u))$$

dır. Eğer $\rho(u) \leq 1$ ise birim yuvar özelliğinden

$$\|u\|_{q_1} \leq 1$$

dır. Buradan Lemma 4.4.1 den

$$\begin{aligned} \rho_{q(x)}^{\frac{s}{q_1}}(u) &\leq \rho_{q(x)}^{\frac{2}{q_1}}(u) \\ &\leq \left[\max \left\{ \|u\|_{q(\cdot)}^{q_1}, \|u\|_{q(\cdot)}^{q_2} \right\} \right]^{\frac{2}{q_1}} \\ &= \|u\|_{q(\cdot)}^2 \\ &\leq C \|\Delta u\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 4.3.2 Lemma 4.4.1'in koşullarının sağlandığı varsayılın ve u , (4.1) denkleminin bir çözümü olarak kabul edilsin. Bu durumda

$$i) \quad \|u\|_{q_1}^s \leq C \left(\|\Delta u\|^2 + \|u\|_{q_1}^{q_1} \right), \quad (4.46)$$

$$ii) \quad \rho_{q(\cdot)}^{\frac{s}{q_1}}(u) \leq C \left(\mathcal{H}(t) + \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \rho_{q(\cdot)}(u) \right), \quad (4.47)$$

$$iii) \quad \|u\|_{q_1}^s \leq C \left(\mathcal{H}(t) + \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \|u\|_{q_1}^{q_1} \right), \quad (4.48)$$

$$iv) \quad \|u\|_{q_1}^{q_1} \leq C \rho_{q(\cdot)}(u) \quad (4.49)$$

dır. Burada $u \in H_0^2(\Omega)$ ve $2 \leq s \leq q_1$ dır. Burada $\rho_{q(\cdot)}(u) = \int_{\Omega} |u|^{q(\cdot)} dx$ ve $C > 1$ pozitif bir sabit olup, $H(t) = -E(t)$ dir. $H(t)$, $E(t)$ fonksiyonelleri daha sonra tanımlanacaktır.

Şimdi, patlama sonucumuz ifade edilip kanıtlanacaktır.

Teorem 4.3.3 $n > 4$ için

$$2 \leq p_1 \leq p(x) \leq p_2 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2 < 2 \frac{(n-2)}{n-4}$$

olsun ve Lemma 4.4.2 nin koşulları sağlansın ve

$$E(0) < 0$$

olsun. Böylece, (4.1) in çözümü bir T^* sonlu bir zaman patlar ve

$$T^* \leq \frac{1 - \alpha}{\xi \alpha \Psi^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)}$$

olur. Burada $\xi \in (0, 1)$, $\Psi(t)$ ve α daha sonra sırasıyla (4.51) ve (4.53) te belirtilecektir.

İspat. Tüm zamanlarda çözümün var olduğu kabul edilip buradan çelişki elde edilecektir. Bunun için $\mathcal{H}(t) = -E(t)$ olarak tanımlanacaktır. Bu durumda $E(0) < 0$ kabulümüzden ve (4.6) dan $\mathcal{H}(t) \geq \mathcal{H}(0) > 0$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t) &= -\frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2) + \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \\ &\leq \frac{1}{q_1} \rho_{q(\cdot)}(u) \end{aligned} \quad (4.50)$$

dir. ε daha sonra belirlenecek yeterince küçük bir sayı olmak üzere

$$\Psi(t) = \mathcal{H}^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u u_t dx + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u\|^2 \quad (4.51)$$

ve

$$0 < \alpha \leq \min \left\{ \frac{q_1 - 2}{q_1}, \frac{q_1 - p_1}{q_1(p_1 - 1)} \right\} \quad (4.52)$$

olsun. (4.51) ifadesinin türevi alınırsa

$$\Psi'(t) = (1 - \alpha) \mathcal{H}^{-\alpha}(t) \mathcal{H}'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u_t^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} u u_{tt} dx$$

olur. (4.1) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \Psi'(t) + \frac{d}{dt} \left(\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right) \\ &= (1 - \alpha) \mathcal{H}^{-\alpha}(t) \mathcal{H}'(t) \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} (u_t^2 - |\nabla u|^2 + |\nabla u_t|^2 - |\Delta u|^2) dx \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx - \varepsilon \int_{\Omega} u |u_t|^{p(x)-2} u_t dx \end{aligned} \quad (4.53)$$

elde ederiz. (4.53) eşitliğin son terimi için her $\delta > 0$, $X, Y \geq 0$ ve $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$ olmak üzere

$$XY \leq \frac{\delta^s}{s} X^s + \frac{\delta^{-t}}{t} Y^t$$

şeklindeki Young eşitsizliğini kullanılırsa (4.53) ün son terimi

$$\int_{\Omega} u |u_t|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} \delta^{p(x)} |u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{p(x) - 1}{p(x)} \delta^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} |u_t|^{p(x)} u_t dx$$

olur. Elde edilen bu ifadeyi (4.53) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \Psi'(t) + \frac{d}{dt} \left(\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right) \\ &\geq (1 - \alpha) \mathcal{H}^{-\alpha}(t) \mathcal{H}'(t) \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} (u_t^2 - |\nabla u|^2 + |\nabla u_t|^2 - |\Delta u|^2) dx + \varepsilon \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \\ &- \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} \delta^{p(x)} |u|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{p(x) - 1}{p(x)} \delta^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} |u_t|^{p(x)} u_t dx \end{aligned} \quad (4.54)$$

elde edilir. Bu nedenle, k yeterince büyük olmak üzere δ yı

$$\delta^{-p(x)/p(x)-1} = k \mathcal{H}^{-\alpha}(t)$$

olacak şekilde alıp (4.54) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) + \frac{d}{dt} \left(\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right) &\geq \left[(1 - \alpha) - \varepsilon k \frac{p_2 - 1}{p_2} \right] \mathcal{H}^{-\alpha}(t) \mathcal{H}'(t) \\
&+ \varepsilon \int_{\Omega} (u_t^2 - |\nabla u|^2 - |\nabla u_t|^2 - |\Delta u|^2) dx \\
&+ \varepsilon \int_{\Omega} |u|^{q(x)-1} u dx \\
&- \frac{k^{1-p_1}}{p_1} \mathcal{H}^{p_2-1}(t) \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx
\end{aligned} \tag{4.55}$$

elde edilir. (4.55) in sağ tarafına $\varepsilon q_1 \mathcal{H}(t)$ ekleyip ve çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) + \frac{d}{dt} \left(\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right) &\geq \left[(1 - \alpha) - \varepsilon k \frac{p_2 - 1}{p_2} \right] \mathcal{H}^{-\alpha}(t) \mathcal{H}'(t) \\
&+ \varepsilon \left(1 + \frac{q_1}{2} \right) \int_{\Omega} u_t^2 dx + \varepsilon \left(\frac{q_1}{2} - 1 \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\
&+ \varepsilon \left(\frac{q_1}{2} - 1 \right) \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx \\
&+ \varepsilon \left(\frac{q_1}{2} - 1 \right) \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + \varepsilon q_1 \mathcal{H}(t) \\
&- \varepsilon \frac{k^{1-p_1}}{p_1} \mathcal{H}^{\alpha(p_2-1)}(t) \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx
\end{aligned} \tag{4.56}$$

elde edilir. (4.56) ve Lemma 4.4.2 nin eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{\alpha(p_2-1)}(t) \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx &\leq \mathcal{H}^{\alpha(p_2-1)}(t) C \left(\varrho(u)^{\frac{p_1}{q_1}} + \varrho(u)^{\frac{p_2}{q_1}} \right) \\
&\leq \left(\frac{1}{q_1} \right)^{\alpha(p_2-1)} C \left(\|u\|_{q_1}^{p_1 + \alpha q_1(p_2-1)} + \|u\|_{q_1}^{p_2 + \alpha q_1(p_2-1)} \right)
\end{aligned} \tag{4.57}$$

elde edilir. (4.57) den

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) + \frac{d}{dt} \left(\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right) &\geq \left[(1 - \alpha) - \varepsilon k \frac{p_2 - 1}{p_2} \right] \mathcal{H}^{-\alpha}(t) \mathcal{H}'(t) \\
&+ \varepsilon \left(1 + \frac{q_1}{2} \right) \int_{\Omega} u_t^2 dx + \varepsilon \left(\frac{q_1}{2} - 1 \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\
&+ \varepsilon \left(\frac{q_1}{2} - 1 \right) \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx \\
&+ \varepsilon \left(\frac{q_1}{2} - 1 \right) \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + \varepsilon q_1 \mathcal{H}(t) \\
&- \varepsilon \frac{k^{1-p_1}}{p_1} \left(\frac{1}{q_1} \right)^{\alpha(p_2-1)} \\
&\times C \left(\|u\|_{q_1}^{p_1 + \alpha q_1(p_2-1)} + \|u\|_{q_1}^{p_2 + \alpha q_1(p_2-1)} \right)
\end{aligned} \tag{4.58}$$

elde ed. Sonra Lemma 4.4.1 ve (4.52) yi kullanarak

$$s = p_1 + \alpha q_1 (p_2 - 1) \leq q_1$$

ve

$$s = p_2 + \alpha q_1 (p_2 - 1) \leq q_1$$

olmak üzere, (4.58) eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \Psi'(t) + \frac{d}{dt} \left(\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right) \\ & \geq \left[(1 - \alpha) - \varepsilon k \frac{p_2 - 1}{p_2} \right] \mathcal{H}^{-\alpha}(t) \mathcal{H}'(t) \\ & \quad + \varepsilon \left(1 + \frac{q_1}{2} \right) \int_{\Omega} u_t^2 dx + \varepsilon \left(\frac{q_1}{2} - 1 \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ & \quad + \varepsilon \left(\frac{q_1}{2} - 1 \right) \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx + \varepsilon \left(\frac{q_1}{2} - 1 \right) \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \\ & \quad + \varepsilon \left[q_1 \mathcal{H}(t) - k^{1-p_1} C_1 \left(\mathcal{H}(t) + \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \|u\|_{q_1}^{q_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.59)$$

eşitsizliğine dönüşür. Burada $C_1 = \frac{2C}{p_1} \left(\frac{1}{q_1} \right)^{\alpha(p_2-1)}$. Ayrıca

$$q_1 = (q_1 + 2) / 2 + (q_1 - 2) / 2$$

ve

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{q_1} \|u_t\|_{q_1}^{q_1} - \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2) \quad (4.60)$$

ifadelerinden

$$\begin{aligned} N(t) & \geq \left[(1 - \alpha) - \varepsilon k \frac{p_2 - 1}{p_2} \right] \mathcal{H}^{-\alpha}(t) \mathcal{H}'(t) \\ & \quad + \varepsilon \left(\left(\frac{6 + q_1}{4} \right) - k^{1-p_1} C_1 \right) \|u_t\|^2 + \varepsilon \left(\frac{q_1 - 2}{4} \right) \|\nabla u\|^2 \\ & \quad + \varepsilon \left(\frac{q_1 - 2}{4} - k^{1-p_1} C_1 \right) \|\nabla u_t\|^2 + \varepsilon \left(\frac{q_1 - 2}{4} \right) \|\Delta u\|^2 \\ & \quad + \varepsilon \left(\frac{q_1 + 2}{2} - k^{1-p_1} C_1 \right) \mathcal{H}(t) + \varepsilon \left(\frac{q_1 - 2}{2q_1} - k^{1-p_1} C_1 \right) \|u\|_{q_1}^{q_1} \end{aligned} \quad (4.61)$$

elde edilir. Burada

$$N(t) = \Psi'(t) + \frac{d}{dt} \left(\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right)$$

dır. k yı yeterince büyük seçilirse $\mathcal{H}(t)$, $\|u_t\|^2$, $\|\nabla u_t\|^2$ $\|u\|_{q_1}^{q_1}$ ifadelerin katsayıları pozitif olacağından

$$\begin{aligned} \Psi'(t) + \frac{d}{dt} \left(\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right) &\geq \left[(1 - \alpha) - \varepsilon k \frac{p_2 - 1}{p_2} \right] \mathcal{H}^{-\alpha}(t) \mathcal{H}'(t) \\ &+ \varepsilon \left[\mathcal{H}(t) + \|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 \right. \\ &\left. + \|\Delta u\|^2 + \|u\|_{q_1}^{q_1} \right] \end{aligned} \quad (4.62)$$

olur. Burada $\gamma > 0$ bu katsayıların minimumudur. Bir k sabit, ε yeterince küçük seçilsin ki

$$(1 - \alpha) - \varepsilon k (p_2 - 1) / p_2 \geq 0$$

ve

$$\Psi(0) = \mathcal{H}^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int_{\Omega} u_0 u_1 dx + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u_0\|^2 > 0$$

olsun. Bu nedenle (4.62) yi

$$\begin{aligned} &\Psi'(t) + \frac{d}{dt} \left(\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right) \\ &\geq \varepsilon \gamma \left[\mathcal{H}(t) + \|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|u\|_{q_1}^{q_1} \right] \end{aligned} \quad (4.63)$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece $t \geq 0$ için

$$\Psi(t) \geq \Psi(0) > 0$$

dır. Şimdi $t \geq 0$ için

$$\Psi'(t) + \frac{d}{dt} \left(\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right) \geq \Gamma \Psi^{1/(1-\alpha)}(t) \quad (4.64)$$

diferansiyel eşitsizliği gösterilecektir. Bu da $\Psi(t)$ nin sonlu bir zamanda patladığını göstermektedir (örneğin Batle vd., 2016 ya bakınız). Burada $\Gamma, \varepsilon \gamma$ ve C ye ((4.46) denkleminin sabiti) bağlı olan bir pozitif sabittir. (4.64) ü kanıtlamak için önce şu kestirimde bulunulacaktır:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u u_t(x, t) dx \right| &\leq \|u\|_2 \|u_t\|_2 \\ &\leq C \left(\|u\|_{q_1} \|u_t\|_2 \right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

dır. Buradan

$$\left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \|u\|_{q_1}^{1/(1-\alpha)} \|u_t\|_2^{1/(1-\alpha)}$$

yazılabilir. Young eşitsizliği kullanılırsa

$$\left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \left[\|u\|_{q_1}^{\mu/(1-\alpha)} + \|u_t\|_2^{\theta/(1-\alpha)} \right] \quad (4.66)$$

elde edilir. Burada $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\mu} = 1$ dır. $\theta = \frac{2}{1-\alpha}$, alınır ve (4.52) den $\frac{\mu}{1-\alpha} = \frac{2}{1-2\alpha} \leq q_1$ olur. Böylece (4.66) eşitsizliği

$$\left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \left[\|u\|_{q_1}^s + \|u_t\|_2^2 \right]$$

olur. Burada $s = \frac{2}{1-2\alpha} \leq q_1$ dır. $t \geq 0$ olmak üzere (4.48) i kullanılırsa

$$\left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right|^{1/(1-\alpha)} \leq C \left[\mathcal{H}(t) + \|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \|u\|_{q_1}^{q_1} \right] \quad (4.67)$$

elde edilir. Son olarak

$$\begin{aligned} \Psi^{1/(1-\alpha)}(t) &\leq C \left[\mathcal{H}^{1/(1-\alpha)}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right]^{1/(1-\alpha)} \\ &\leq 2^{1/(1-\alpha)} C \left[\mathcal{H}^{1/(1-\alpha)}(t) + \left| \int_{\Omega} uu_t(x, t) dx \right|^{1/(1-\alpha)} \right] \end{aligned}$$

göz önünde bulundurarak ve (4.63) ile (4.67) den, (4.64) eşitsizliği elde edilir. (4.64) eşitsizliğini $(0, t)$ aralığında integrallenirse

$$\Psi^{1/(1-\alpha)}(t) \geq \frac{1}{\Psi^{-\alpha/(1-\alpha)}(t) - \Gamma t \alpha / (1-\alpha)} \quad (4.68)$$

olur. (4.68) bize $\Psi(t)$ nin sonlu bir zamanda patladığını gösterir:

$$\Psi^* \geq \frac{1-\alpha}{\Gamma \alpha [\Psi(0)]^{\alpha/(1-\alpha)}}$$

burada Γ ve $\alpha < 1$ olacak şekilde pozitif bir sabittir. Böylece ispat tamamlanır.

5. DEĞİŞKEN ÜSLÜ YÜKSEK MERTEBELİ LOGARİTMİK KİRCHHOFF TİPİ DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

Bu bölümde

$$\begin{cases} u_{tt} + \mathcal{M} \left(\left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \right) \mathcal{P}u + |u_t|^{p(x)-2} u_t = |u|^{q(x)-2} u \ln u, & \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial^i u(x, t)}{\partial u^i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

yüksek mertebeden logaritmik Kirchhoff tipi denklemin patlama davranışı incelenmiştir (Yılmaz ve Pişkin, Baskıda). Burada $\mathcal{P} = (-\Delta)^m$, $m \geq 1$ doğal bir sayıdır. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) de $\partial\Omega$ düzgün sınıra sahip sınırlı bölgedir. Ayrıca $\mathcal{M}(\lambda) = s_1 + s_2\lambda^\gamma$ ve $s_1, s_2 \geq 0, \gamma \geq 1$ dir.

$p(\cdot)$ ve $q(\cdot)$ fonksiyonları Ω bölgesinde ölçülebilir ve aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

$$\begin{cases} 2 \leq p_1 \leq p(x) \leq p_2 \leq p_*, \\ 2 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2 \leq q_*. \end{cases} \quad (5.2)$$

Burada

$$\begin{cases} p_1 = \text{ess inf}_{x \in \Omega} p(x), \quad p_2 = \text{ess sup}_{x \in \Omega} p(x) \\ q_1 = \text{ess inf}_{x \in \Omega} q(x), \quad q_2 = \text{ess sup}_{x \in \Omega} q(x) \end{cases} \quad (5.3)$$

ve

$$\begin{cases} 2 < p_* < \infty & n \leq 2m, \\ 2 < p_* < \frac{2n}{n-2m} & n > 2m \end{cases} \quad (5.4)$$

dir. Ayrıca log-Hölder süreklilik koşulunuda sağlamaktadır.

5.1 Ön Bilgiler

Bu kısımda, bazı lemma ve teoremler ifade edilmektedir (Diening vd., 2017; Diening ve Růžicka, 2003).

Lemma 5.1.1 Eğer $p : \Omega \rightarrow [1, \infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon ve u , Ω üzerindeki bir fonksiyon ise, $n \geq 3$ için

$$2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \frac{2n}{n-2} \quad (5.5)$$

dir. O zaman, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$ gömülmesi sürekli ve kompaktır.

Yukarıdaki lemmadan ve Sobolev gömme teoreminden, aşağıdaki sonuç çıkarılabilir:

Sonuç 5.1.2 $p : \Omega \rightarrow [1, \infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon ve u, Ω üzerindeki bir fonksiyon, $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları

$$2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < q_1 \leq q(x) < q_2 < \frac{2n}{n-2m} \quad (5.6)$$

olsun. O zaman $H_0^m(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$ gömülmesi sürekli ve kompaktır.

Lemma 5.1.3 (5.1) de verilen problemin enerji fonksiyoneli (5.2) koşulu altında artmayandır. Yani

$$E'(t) = - \int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} dx \leq 0 \quad (5.7)$$

ve

$$E(t) \leq E(0)$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} E(0) = & \frac{1}{2} \|u_1\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u_0 \right\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u_0 \right\|^{2(\gamma+1)} \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u_0|^{q(x)} \ln |u_0| dx + \int_{\Omega} \frac{1}{q^2(x)} |u_0|^{q(x)} dx \end{aligned} \quad (5.8)$$

ve

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^{2(\gamma+1)} \\ & + \int_{\Omega} \frac{1}{q^2(x)} |u|^{q(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{|u|^{q(x)}}{q(x)} \ln |u| dx \end{aligned} \quad (5.9)$$

dır.

İspat. (5.1) de verilen denklemi u_t ile çarpıp, Ω bölgesi üzerinde integrali alınırsa

$$\int_{\Omega} u_t \left[u_{tt} + \left(s_1 + s_2 \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^{2\gamma} \right) P u + |u_t|^{p(x)-2} u_t \right] = \int_{\Omega} u_t |u|^{q(x)-2} u \ln u$$

olur. Buradan

$$\underbrace{\int_{\Omega} u_t u_{tt} dx}_{C_1} - \underbrace{\int_{\Omega} u_t \left(s_1 + s_2 \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^{2\gamma} \right) P u dx}_{C_2} + \underbrace{\int_{\Omega} u_t |u_t|^{p(x)-2} u_t dx}_{C_3}$$

$$= \underbrace{\int_{\Omega} u_t |u|^{q(x)-2} u \ln u dx}_{C_4} \quad (5.10)$$

yazılabilir. Şimdi her terim ayrı ayrı düzenlenirse:

C_1 terimi,

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{\Omega} u_t u_{tt} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

C_2 terimi,

$$\begin{aligned} C_2 &= \int_{\Omega} u_t \left(s_1 + s_2 \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^{2\gamma} \right) Pu, \\ &= s_1 \int_{\Omega} u_t (-\Delta)^m u + s_2 \int_{\Omega} u_t \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^{2\gamma} Pu \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{s_1}{2} \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \frac{s_2}{2(\gamma+1)} \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^{2(\gamma+1)} \right) \end{aligned}$$

dır.

C_3 terimi,

$$\begin{aligned} C_3 &= \int_{\Omega} u_t |u_t|^{q(x)-2} u_t dx \\ &= \int_{\Omega} |u_t|^{q(x)} dx \end{aligned}$$

olur.

C_4 terimi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} \ln u \right) &= u_t |u|^{q(x)-1} \ln u + \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} \frac{u_t}{u} \\ &= u_t |u|^{q(x)-1} \ln u + \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)-1} u_t \\ &= u_t |u|^{q(x)-1} \ln u + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{q^2(x)} |u|^{q(x)} \right) \end{aligned}$$

dolayısıyla C_4 terimi

$$\begin{aligned} C_4 &= \int_{\Omega} u_t |u|^{q(x)-2} u \ln u dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} \ln u dx - \int_{\Omega} \frac{1}{q^2(x)} |u|^{q(x)} dx \end{aligned}$$

olur. Düzenlenen C_1, C_2, C_3, C_4 ifadelerini (5.10) da yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^{2(\gamma+1)} + \int_{\Omega} \frac{1}{q^2(x)} |u|^{q(x)} dx \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Omega} \frac{|u|^{q(x)}}{q(x)} \ln |u| dx \right) \\ &= - \int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} dx \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} E'(t) &= - \int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} dx \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

olur.

Lemma 5.1.4 (5.5) koşulu sağlansın ve u , (5.1) in çözümü olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx &\geq \int_{\Omega_2} |u|^{q_1} dx \\ &= \|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} \end{aligned}$$

dır. Burada $\Omega_2 = \{x \in \Omega : |u(x, t)| \geq 1\}$ dır.

İspat $\Omega_1 = \{x \in \Omega : |u(x, t)| < 1\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx &= \int_{\Omega_2} |u|^{q(x)} dx + \int_{\Omega_1} |u|^{q(x)} dx \\ &\geq \int_{\Omega_2} |u|^{q_1} dx + \int_{\Omega_1} |u|^{q_2} dx \\ &\geq \int_{\Omega_2} |u|^{q_1} dx \\ &= \|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 5.1.5 (5.6) şartları altında, $\mathcal{H}(t)$ fonksiyonunu $t \geq 0$ için

$$0 < \mathcal{H}(0) \leq \mathcal{H}(t) \leq \frac{|\Omega|}{q_1 e} + \frac{\mathcal{B}_s}{(s - q_2) q_1 e} \|\nabla u\|_2^s$$

eşitsizliğini sağlar. Burada s yeterince küçük seçilirse

$$\begin{cases} q_1 \leq q_2 < s < \infty, & n = 1, 2, \\ q_1 \leq q_2 < s \leq \frac{2n}{n-2}, & n \geq 3 \end{cases}$$

ve $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_s \leq \mathcal{B}_s \|\nabla u\|_2$$

dır. $\mathcal{B}_s, H_0^1(\Omega)$ nin $L^s(\Omega)$ deki gömülmenin pozitif bir sabitidir.

Burada, $\mathcal{H}(t)$, (5.11) de tanımlanmıştır.

İspat. Lemma 5.1.3 ten $\mathcal{H}(t)$, $t \geq 0$ için artmayan olduğundan

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t) &\geq \mathcal{H}(0) \\ &= -E(0) \\ &> 0 \end{aligned}$$

dır. (5.8), (5.10), (5.12) ve $\sigma > 0$ için

$$\ln \phi \leq \frac{1}{e\sigma} \phi^\sigma$$

eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} 0 &< \mathcal{H}(t) \\ &< \frac{1}{q_1} \int_{\Omega} |u(x, t)|^{q(x)} \ln(|u(x, t)|) dx \\ &= \frac{1}{q_1} \int_{\{x \in \Omega: |u(x, t)| < 1\}} |u(x, t)|^{q(x)-1} |u(x, t)| \ln(|u(x, t)|) dx \\ &\quad + \frac{1}{q_1} \int_{\{x \in \Omega: |u(x, t)| \geq 1\}} |u(x, t)|^{q(x)-1} |u(x, t)| \ln(|u(x, t)|) dx \\ &\leq \frac{|\Omega|}{q_1 e} + \frac{1}{\sigma q_1 e} \int_{\{x \in \Omega: |u(x, t)| \geq 1\}} |u(x, t)|^{q_2} dx \\ &\leq \frac{|\Omega|}{q_1 e} + \frac{1}{\sigma q_1 e} \|\nabla u\|_{q_2+\sigma}^{q_2+\sigma} \\ &\leq \frac{|\Omega|}{q_1 e} + \frac{\mathcal{B}_s}{(s - q_2) q_1 e} \|\nabla u\|_2^s \end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıdaki lemmadan ve Sobolev gömme teoreminin uygulanmasından

aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 5.1.6 Lemma 5.1.5 şartları altında, $\mathcal{H}(t)$ fonksiyonunu $t \geq 0$ için

$$0 < \mathcal{H}(0) \leq \mathcal{H}(t) \leq \frac{|\Omega|}{q_1 e} + \frac{\mathcal{B}_s}{(s - q_2) q_1 e} \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^s$$

eşitsizliğini sağlar. Burada s yeterince küçük seçilirse

$$\begin{cases} q_1 \leq q_2 < s < \infty, & \text{for } n \leq 2m, \\ q_1 \leq q_2 < s \leq \frac{2n}{n-2m}, & \text{for } n \geq 2m \end{cases}$$

ve $\forall u \in H_0^m(\Omega)$ için

$$\|u\|_s \leq \mathcal{B}_s \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2$$

dır. $\mathcal{B}_s, H_0^m(\Omega)$ nın $L^s(\Omega)$ daki gömülmenin pozitif bir sabitidir.

5.2 Çözümlerin Patlaması

Bu kısımda, patlama sonucunun kanıtı verilmektedir.

Teorem 5.2.1 Kabul edilsin ki (5.6) sağlansın ve $E(0) < 0$ koşulu geçerli olsun. Bu durumda, (5.1) denkleminin çözümü sonlu zamanda patlar.

İspat. $\mathcal{H}(t)$ fonksiyoneli $t \geq 0$ için

$$\mathcal{H}(t) = -E(t) \tag{5.11}$$

olsun. Bu durumda $\mathcal{H}'(t) \geq 0$ ve

$$0 < \mathcal{H}(0) \leq \mathcal{H}(t) \leq \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} \ln |u| dx$$

dır. Şimdi

$$\Phi(t) = \mathcal{H}^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t dx \tag{5.12}$$

şeklinde tanımlansın. Daha sonra yeterince küçük seçilecek olan $\sigma > 0$ sayısı

$$0 < \sigma \leq \min \left\{ \frac{q_1 - 2}{2q_1}, \frac{q_1 - p_2}{q_1(p_2 - 1)}, \frac{2(q_1 - p_1)}{s(p_1 - 1)q_1}, \frac{2(q_1 - p_1)}{s(p_2 - 1)q_1} \right\} \tag{5.13}$$

dır. (5.12) nin türevi alınırsa

$$\Phi'(t) = (1 - \sigma) \mathcal{H}^{-\sigma}(t) \mathcal{H}'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} uu_{tt} dx$$

elde edilir. Burada (5.1) problemin birinci denkleminde faydalanarak

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= (1 - \sigma) \mathcal{H}^{-\sigma}(t) \mathcal{H}'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} u \mathcal{M} \left(\left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \right) \mathcal{P} u dx \\ &\quad - \varepsilon \int_{\Omega} u |u_t|^{p(x)-2} u_t dx + \varepsilon \int_{\Omega} u |u|^{q(x)-2} u \ln u dx \\ &= (1 - \sigma) \mathcal{H}^{-\sigma}(t) \mathcal{H}'(t) + \varepsilon \|u_t\|^2 - \varepsilon \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \\ &\quad - \varepsilon \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^{2(\gamma+1)} + \varepsilon \int_{\Omega} |u_t|^{q(x)} \ln u dx - \varepsilon \int_{\Omega} u |u_t|^{p(x)-2} u_t dx \end{aligned} \tag{5.14}$$

elde edilir. (5.14) eşitliğin sağ tarafına $0 < \eta < \frac{q_1-2}{q_1}$ için $\varepsilon(1-\eta)q_1\mathcal{H}(t)$ ekleyip çıkarılırsa

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &\geq (1-\sigma)\mathcal{H}^{-\sigma}(t)\mathcal{H}'(t) + \varepsilon(1-\eta)q_1\mathcal{H}(t) + \varepsilon\left(1 + \frac{(1-\eta)q_1}{2}\right)\|u_t\|^2 \\ &\quad + \varepsilon\left(\frac{(1-\eta)q_1}{2} - 1\right)\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \varepsilon\left(\frac{(1-\eta)q_1}{2(\gamma+1)} - 1\right)\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|_2^{2(\gamma+1)} \\ &\quad + \varepsilon\eta\int_{\Omega}|u|^{q(x)}\ln u\,dx + \varepsilon\left(\frac{(1-\eta)q_1}{q_2^2}\right)\int_{\Omega}|u|^{q(x)}\,dx \\ &\quad - \varepsilon\int_{\Omega}uu_t|u_t|^{p(x)-2}\,dx\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\frac{1}{q_2^2}\int_{\Omega}|u|^{q(x)}\,dx < \frac{1}{q_1}\int_{\Omega}|u_t|^{q(x)}\ln u\,dx$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &\geq (1-\sigma)\mathcal{H}^{-\sigma}(t)\mathcal{H}'(t) + \varepsilon(1-\eta)q_1\mathcal{H}(t) + \varepsilon\left(1 + \frac{(1-\eta)q_1}{2}\right)\|u_t\|^2 \\ &\quad + \varepsilon\left(\frac{(1-\eta)q_1}{2} - 1\right)\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \varepsilon\left(\frac{(1-\eta)q_1}{2(\gamma+1)} - 1\right)\left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|_2^{2(\gamma+1)} \\ &\quad + \varepsilon\frac{q_1}{q_2^2}\int_{\Omega}|u|^{q(x)}\,dx - \varepsilon\int_{\Omega}uu_t|u_t|^{p(x)-2}\,dx\end{aligned}\tag{5.15}$$

elde edilir. Lemma 5.1.4 ve (5.15) ten

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &\geq (1-\sigma)\mathcal{H}^{-\sigma}(t)\mathcal{H}'(t) \\ &\quad + \varepsilon\beta\left[\mathcal{H}(t) + \|u_t\|^2 + \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|_2^{2(\gamma+1)} + \int_{\Omega}|u|^{q(x)}\,dx\right] \\ &\quad - \varepsilon\int_{\Omega}uu_t|u_t|^{p(x)-2}\,dx \\ &\geq (1-\sigma)\mathcal{H}^{-\sigma}(t)\mathcal{H}'(t) \\ &\quad + \varepsilon\beta\left[\mathcal{H}(t) + \|u_t\|^2 + \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|^2 + \left\|\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}u\right\|_2^{2(\gamma+1)} + \|u\|_{q_1,\Omega_2}^{q_1}\right] \\ &\quad - \varepsilon\int_{\Omega}uu_t|u_t|^{p(x)-2}\,dx\end{aligned}\tag{5.16}$$

dır. Burada

$$\beta = \min\left\{(1-\eta)q_1, \left(1 + \frac{(1-\eta)q_1}{2}\right), \left(\frac{(1-\eta)q_1}{2} - 1\right), \left(\frac{(1-\eta)q_1}{2(\gamma+1)} - 1\right), \frac{q_1}{q_2^2}\right\}$$

dır. Şimdi, Young eşitsizliğinden ($ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$); a yerine $u\gamma$, b yerine $\frac{u_t}{\gamma}$ yazılırsa (5.14) ün son terimi $\forall \gamma > 0$ için

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u u_t |u_t|^{p(x)-2} dx &\leq \frac{1}{p_1} \int_{\Omega} \gamma^{p(x)} |u|^{p(x)} dx \\ &\quad + \frac{p_2 - 1}{p_2} \int_{\Omega} \gamma^{-\frac{p(x)}{p(x)-1}} |u_t|^{p(x)} dx \end{aligned} \quad (5.17)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda, $k > 0$ yeterince büyük olmak üzere γ aşağıdaki gibi seçilirse:

$$\gamma^{-\frac{p(x)}{p(x)-1}} = k \mathcal{H}^{-\sigma}(t)$$

ve bu ifadeyi (5.17) eşitsizliğinde yerine yazılırsa, $\forall \gamma > 0$ için

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u |u_t|^{p(x)-1} dx &\leq \frac{1}{p_1} \int_{\Omega} k^{1-p(x)} \mathcal{H}^{\sigma(p(x)-1)}(t) |u|^{p(x)} dx \\ &\quad + \frac{p_2 - 1}{p_2} k \mathcal{H}^{-\sigma}(t) \mathcal{H}'(t) \end{aligned} \quad (5.18)$$

eşitsizliği elde edilir. (5.16) ile (5.18) den

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &\geq \left[(1 - \sigma) - \varepsilon \frac{p_2 - 1}{p_2} k \right] \mathcal{H}^{-\sigma}(t) \mathcal{H}'(t) \\ &\quad + \varepsilon \beta \left[\mathcal{H}(t) + \|u_t\|^2 + \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^2 + \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^{2(\gamma+1)} + \|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} \right] \\ &\quad - \varepsilon \frac{k^{1-p_1}}{p_1} \mathcal{H}^{\sigma(p_2-1)}(t) \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \end{aligned} \quad (5.19)$$

elde edilir. Sonuç 5.1.6 kullanılarak

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}^{\sigma(p_2-1)}(t) \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \\ &\leq 2^{\sigma(p_2-1)-1} C \left(\frac{|\Omega|}{q_1 e} \right)^{\sigma(p_2-1)} \left(\left(\|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} \right)^{\frac{p_1}{q_1}} + \left(\|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} \right)^{\frac{p_2}{q_1}} \right) \\ &\quad + 2^{\sigma(p_2-1)-1} C \frac{(\mathcal{B}_s)^{\sigma(p_2-1)}}{(s - q_2) e q_1} \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^{s\sigma(p_2-1)} \left(\|u\|_{q_1, \Omega_2}^{p_1} + \|u\|_{q_1, \Omega_2}^{p_2} \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

elde edilir. Şimdi de (5.20) eşitsizliğinin sağ tarafındaki terimlere Young eşitsizliği uygulanarak kestirim yapılırsa:

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^{s\sigma(p_2-1)} \|u\|_{q_1, \Omega_2}^{p_1} &\leq \frac{p_1}{q_1} \|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} + C \frac{q_1 - p_1}{q_1} \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^{\frac{s\sigma(p_2-1)q_1}{q_1 - p_1}} \\ &= \frac{p_1}{q_1} \|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} + C \frac{q_1 - p_1}{q_1} \left(\left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^2 \right)^{\frac{s\sigma(p_2-1)q_1}{2(q_1 - p_1)}} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde kestirimde bulunulursa

$$\left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^{s\sigma(p_2-1)} \|u\|_{q_1, \Omega_2}^{p_2} \leq \frac{p_2}{q_1} \|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} + C \frac{q_1 - p_2}{q_1} \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^{\frac{s\sigma(p_2-1)q_1}{q_1 - p_1}}$$

olur. Aşağıdaki eşitsizlik kullanılarak

$$a^z \leq a + 1 \leq \left(1 + \frac{1}{b}\right) (a + b); \quad \forall a \geq 0, \quad 0 < z < 1, \quad b \geq 0 \quad (5.21)$$

ve $a = \|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1}$, $c_1 = 1 + \frac{1}{\mathcal{H}(0)}$, $b = \mathcal{H}(0)$ ve $z = \frac{p_1}{q_1}$ ($z = \frac{p_2}{q_1}$) için (5.6) koşulunu göz önünde bulundurarak

$$\begin{aligned} \left(\|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} \right)^{\frac{p_1}{q_1}} + \left(\|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} \right)^{\frac{p_2}{q_1}} &\leq 2c_1 \left(\|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} + \mathcal{H}(0) \right) \\ &\leq 2c_1 \left(\|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} + \mathcal{H}(t) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $a = \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^2$, $c_2 = 1 + \frac{1}{\mathcal{H}(0)}$, $b = \mathcal{H}(0)$ ve $z = \frac{s\sigma(p_2-1)q_1}{2(q_1-p_1)}$ için (5.13) koşulunu göz önünde bulundurarak

$$\begin{aligned} \left(\left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^2 \right)^{\frac{s\sigma(p_2-1)q_1}{2(q_1-p_1)}} &\leq c_2 \left(\left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^2 + \mathcal{H}(0) \right) \\ &\leq c_2 \left(\left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^2 + \mathcal{H}(t) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $a = \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} \theta \right\|_2^2$, $c_3 = 1 + \frac{1}{\mathcal{H}(0)}$, $b = \mathcal{H}(0)$ ve $z = \frac{s\sigma(p_2-1)q_1}{2(q_1-p_2)}$ için

$$\left(\left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^2 \right)^{\frac{s\sigma(p_2-1)q_1}{2(q_1-p_2)}} \leq c_3 \left(\left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^2 + \mathcal{H}(t) \right)$$

olur.çin

$$\mathcal{H}^{\sigma(p_2-1)}(t) \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \leq C \left(\|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} + \mathcal{H}(t) + \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^2 \right) \quad (5.22)$$

elde edilir. Burada $C = C(\Omega, e, a, p_{1,2}, q_{1,2}) > 0$ dir. (5.19) ve (5.22) den

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &\geq \left[(1 - \sigma) - \varepsilon \frac{p_2 - 1}{p_2} k \right] \mathcal{H}^{-\sigma}(t) \mathcal{H}'(t) \\ &\quad + \varepsilon \left[\beta - \frac{k^{p_2-1}}{p_2} C \right] \\ &\quad \times \left[\mathcal{H}(t) + \|u_t\|^2 + \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^2 + \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^{2(\gamma+1)} + \|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} \right] \end{aligned} \quad (5.23)$$

dır. Buradan $\gamma = \beta - \frac{k^{p_2-1}}{p_2} C \geq 0$, ($k > \left(\frac{\beta p_1}{C}\right)^{\frac{1}{1-p_1}}$) olacak şekilde seçilir, $\varepsilon > 0$ yeterince küçük seçilirse

$$(1 - \sigma) - \varepsilon \frac{p_2 - 1}{p_2} k \geq 0$$

ve

$$\Phi(0) = \mathcal{H}^{1-\sigma}(0) + \varepsilon \int_{\Omega} u_0(x) u_1(x) dx > 0$$

olur. Böylece (5.23) eşitsizliği

$$\Phi'(t) \geq \gamma \left[\mathcal{H}(t) + \|u_t\|^2 + \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 + \left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|_2^{2(\gamma+1)} + \|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} \right] \quad (5.24)$$

şeklini alır. Bu durumda $t \geq 0$ için

$$\Phi(t) \geq \Phi(0) > 0$$

dır. Öte yandan (5.12) denkleminde

$$\Phi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \leq 2^{\frac{1}{(1-\sigma)}} \left(\mathcal{H}(t) + \left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{(1-\sigma)}} \right) \quad (5.25)$$

dır. Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{(1-\sigma)}} &\leq C \|u\|_{q_1} \|u_t\|_2 \\ &\leq C \|u\|_{q_1, \Omega} \|u_t\|_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar, (5.21) eşitsizliğinde, $a = \|\theta\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1}$, $c = 1 + \frac{1}{\mathcal{H}(0)}$, $b = \mathcal{H}(0)$ ve $0 < z = \frac{2p_1}{(1-2\alpha)q_1} \leq 1$ alınırsa (bkz 5.13)

$$\left(\|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} \right)^{\frac{2}{(1-2\sigma)q_1}} \leq C \left(\|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} + \mathcal{H}(t) \right)$$

elde edilir. Bu durumda, Young eşitsizliğinden $t \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{(1-\sigma)}} &\leq C \left[\|u\|_{q_1, \Omega_2}^{\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}} + \|u_t\|_2^{2(1-\sigma)} \right]^{\frac{1}{(1-\sigma)}} \\ &\leq C \left[\left(\|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} \right)^{\frac{2}{(1-2\sigma)q_1}} + \|u_t\|_2^2 \right] \\ &\leq C \left[\|u\|_{q_1, \Omega_2}^{q_1} + \mathcal{H}(t) + \|u_t\|_2^2 \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.24) ve (5.25) den

$$\Phi'(t) \geq \zeta \Phi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \quad (5.26)$$

dır. Burada $\zeta = \zeta(\varepsilon, \gamma, C) > 0$ olarak alınır. Şimdi (4.26) ifadesini $(0, t)$ aralığında integrali alınarak,

$$\begin{aligned} \int_0^t \Phi'(\tau) \Phi^{\frac{1}{1-\sigma}}(\tau) d\tau &\geq \int_0^t \zeta d\tau, \\ \left. \frac{\Phi^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(\tau)}{\frac{-\sigma}{1-\sigma}} \right|_0^t &\geq \zeta \tau|_0^t, \\ \Phi^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(t) - \Phi^{\frac{-\sigma}{1-\sigma}}(0) &\geq \frac{-\sigma}{1-\sigma} \zeta t, \\ \Phi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) &\geq \frac{1}{\Phi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0) - \frac{\sigma}{1-\sigma} \zeta t} \end{aligned} \tag{5.27}$$

elde edilir. Burada çözüm sonlu bir T^* zamanında patlar. Burada

$$T^* \leq \frac{1-\sigma}{\zeta \sigma \Phi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

6. DEĞİŞKEN ÜSLÜ VİSKOELASTİK DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

Bu bölümde çözümlerinin pozitif başlangıç enerjisi için patlaması ele alındı (Yılmaz vd., 2024).

6.1 Çözümün Patlaması

Tezin bu bölümünde

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s) \Delta^2 u(s) ds + \mu u_t = |u|^{q(x)-2} u, & \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = \frac{\partial}{\partial \nu} u(x, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (6.1)$$

probleminin çözümünün patlamasını başlangıç enerjisi pozitif iken ele alındı. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^+$), $\partial\Omega$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölgedir. ν dış birim vektördür. $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ başlangıç fonksiyonlar olup $p(x)$, $n \geq 5$ için

$$2 \leq p_1 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x) \leq q(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x) = p_2 \leq \frac{2n}{n-4}$$

dır. Ayrıca (6.1) probleminin enerji fonksiyoneli

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta u\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (g \circ \Delta u)(t) - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \end{aligned} \quad (6.2)$$

dır. Burada

$$(g \circ v)(t) = \int_0^t g(t-s) \|v(t) - v(s)\|^2 ds$$

dır.

Lemma 6.1.1 $q \rightarrow [1, \infty)$ sürekli bir fonksiyon ve $n \geq 5$ için

$$2 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2 < \frac{2n}{n-4}$$

olduğunda $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ gömülmesi sürekli ve kompaktır (Diening vd., 2017).

Şimdi g çekirdek fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

(H1) $g : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu $\forall t \geq 0$ için

$$g(0) > 0, \quad 1 - \int_0^\infty g(s) ds = l > 0 \quad (6.3)$$

ve

(H2)

$$\int_0^\infty g(s) ds < \frac{\frac{p_1}{2} - 1}{\frac{p_1}{2} - 1 + \frac{1}{2p_1}} \quad (6.4)$$

şartlarını sağlayan $C^1(R^+)$ de artmayan bir fonksiyondur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \int_0^t g(t-s) (\Delta u(s), \Delta u_t(t)) ds &= -\frac{1}{2} g(t) \|\Delta u(t)\|^2 + \frac{1}{2} (g' \circ \Delta u)(t) \\ &- \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[(g \circ \Delta u)(t) - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta u(t)\|^2 \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

eşitliği kolayca hesaplanabilir. Burada

$$(g \circ \Delta u)(t) = \int_0^t g(t-s) \|\Delta u(t) - \Delta u(s)\|^2 ds$$

dır.

Lemma 6.1.2 (Korpusov, 2012). Kabul edelim ki $\Phi \in C^2([0, T])$ fonksiyonu, $\alpha > 1$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \Phi \Phi_{tt} - \alpha \Phi_t^2 + \gamma \Phi \Phi_t + \beta \Phi &\geq 0, \quad \alpha > 1, \quad \beta \geq 0, \quad \gamma \geq 0 \\ \Phi(t) &\geq 0, \quad \Phi(0) > 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

ve

$$\Phi'(0) > \frac{\gamma}{\alpha-1} \Phi(0) \quad \text{ve} \quad \left(\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha-1} \Phi(0) \right)^2 > \frac{2\beta}{2\alpha-1} \Phi(0)$$

şartlarını sağlasın. Bu durumda

$$\lim_{t \rightarrow T_\infty} \sup \Phi(t) = \infty$$

olur. Burada $T \leq T_\infty \leq \Phi^{1-\alpha}(0) A^{-1}$ dır, A ise daha sonra belirlenecektir. Ayrıca

$$\Phi(t) \geq \frac{e^{\frac{\gamma t}{\alpha-1}}}{(\Phi^{1-\alpha}(0) - At)^{\frac{1}{\alpha-1}}}$$

dır.

İspat.

$$\Phi \Phi'' - \alpha (\Phi')^2 + \gamma \Phi \Phi' + \beta \Phi \geq 0$$

eşitsizliğini $\Phi^{1+\alpha}$ ya bölersek

$$\frac{\Phi''}{\Phi^\alpha} - \alpha \frac{(\Phi')^2}{\Phi^{1+\alpha}} + \gamma \frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} + \frac{\beta}{\Phi^\alpha} \geq 0$$

$$\left(\frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} \right)' + \gamma \frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} + \frac{\beta}{\Phi^\alpha} \geq 0$$

$$\frac{(\Phi^{1-\alpha})''}{1-\alpha} + \frac{\gamma}{1-\alpha} (\Phi^{1-\alpha})' + \beta \Phi^{-\alpha} \geq 0$$

olur. Burada $\Phi^{1-\alpha}(t) = z(t)$ alınır

$$\frac{z''}{1-\alpha} + \frac{\gamma z'}{1-\alpha} + \beta z^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \geq 0$$

$$z'' + \gamma z' - \beta(\alpha-1)z^{\alpha_1} \leq 0$$

olur. Burada $\alpha_1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ dir.

$$z(t) = e^{-\gamma t} Y(t)$$

alınır

$$(e^{-\gamma t} Y)'' + \gamma (e^{-\gamma t} Y)' - \beta(\alpha-1)(e^{-\gamma t} Y)^{\alpha_1} \leq 0,$$

$$\gamma^2 e^{-\gamma t} Y - 2\gamma e^{-\gamma t} Y' + e^{-\gamma t} Y'' - \gamma^2 e^{-\gamma t} Y + \gamma e^{-\gamma t} Y' - \beta(\alpha-1)e^{-\gamma \alpha_1 t} Y^{\alpha_1} \leq 0,$$

$$e^{-\gamma t} Y'' - \gamma e^{-\gamma t} Y' - \beta(\alpha-1)e^{-\gamma \alpha_1 t} Y^{\alpha_1} \leq 0,$$

$$Y'' - \gamma Y' - \beta(\alpha-1)e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} \leq 0$$

olur. Burada $\delta = \gamma(\alpha_1 - 1) = \gamma\left(\frac{\alpha}{\alpha-1} - 1\right) = \frac{\gamma}{\alpha-1}$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^{\gamma t} z(t) \\ &= e^{\gamma t} \Phi^{1-\alpha}(t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Y' &= (e^{\gamma t} \Phi^{1-\alpha})' \\ &= \gamma e^{\gamma t} \Phi^{1-\alpha} + e^{\gamma t} (1-\alpha) \Phi' \Phi^{-\alpha} \\ &= e^{\gamma t} (\alpha-1) \Phi^{-\alpha} \left(\frac{\gamma}{\alpha-1} \Phi(t) - \Phi'(t) \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. $\Phi'(0) > \frac{\gamma}{\alpha-1} \Phi(0)$ olduğundan $t_0 > 0$ için $\Phi'(t) > \frac{\gamma}{\alpha-1} \Phi(t)$ eşitsizliği $t \in [0, t_0)$ aralığında sağlanır. Böylece $Y' < 0$ olacağından $-\gamma Y' > 0$ dir. Yukarıdaki eşitsizlikten $t \in [0, t_0)$ için

$$Y'' - \beta(\alpha-1)e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} \leq 0$$

yazılabilir. Bu eşitsizliği Y' ile çarpalım ($Y' < 0$ olduğundan)

$$Y'Y'' - \beta(\alpha - 1)e^{-\delta t}Y^{\alpha_1}Y' \geq 0$$

olur.

$$e^{-\delta t}Y^{\alpha_1}Y' = \frac{d}{dt}(e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}) + \delta e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1} - \alpha_1 e^{-\delta t}Y^{\alpha_1}Y',$$

$$e^{-\delta t}Y^{\alpha_1}Y' = \frac{1}{1+\alpha_1} \frac{d}{dt}(e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}) + \frac{1}{1+\alpha_1} \delta e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}$$

olduğundan

$$Y'Y'' - \frac{\beta(\alpha - 1)}{1+\alpha_1} \frac{d}{dt}(e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}) - \underbrace{\frac{\beta(\alpha - 1)\delta}{1+\alpha_1} e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}}_{\geq 0 \text{ olduğundan ihmal edilirse}} \geq 0$$

$$Y'Y'' - \frac{\beta(\alpha - 1)}{1+\alpha_1} (e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1})' \geq 0$$

$$\left(\frac{(Y')^2}{2} - \frac{\beta(\alpha - 1)}{1+\alpha_1} e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1} \right)' \geq 0$$

olur. Buradan integral alınırsa

$$\left(\frac{(Y')^2}{2} - \frac{\beta(\alpha - 1)}{1+\alpha_1} e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1} \right) - \left(\frac{(Y'(0))^2}{2} - \frac{\beta(\alpha - 1)}{1+\alpha_1} Y^{1+\alpha_1}(0) \right) \geq 0,$$

$$\begin{aligned} (Y')^2 &\geq (Y'(0))^2 - \frac{2\beta(\alpha - 1)}{1+\alpha_1} Y^{1+\alpha_1}(0) + \frac{2\beta(\alpha - 1)}{1+\alpha_1} e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1} \\ &= \underbrace{(Y'(0))^2 - \frac{2\beta(\alpha - 1)^2}{2\alpha - 1} Y^{1+\alpha_1}(0)}_{A^2} + \frac{2\beta(\alpha - 1)^2}{2\alpha - 1} e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1} \\ &= A^2 + \underbrace{\frac{2\beta(\alpha - 1)^2}{2\alpha - 1} e^{-\delta t}Y^{1+\alpha_1}}_{\geq 0 \text{ olduğundan ihmal edilirse}} \end{aligned}$$

$$(Y')^2 \geq A^2$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} A^2 &= (Y'(0))^2 - \frac{2\beta(\alpha - 1)^2}{2\alpha - 1} Y^{1+\alpha_1}(0) \\ &= \left[(\alpha - 1) \Phi^{-\alpha}(0) \left(\frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0) - \Phi'(0) \right) \right]^2 \\ &\quad - \frac{2\beta(\alpha - 1)^2}{2\alpha - 1} [\Phi^{-(\alpha-1)}]^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}} \\ &= (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0) \right]^2 \\ &\quad - \frac{2\beta(\alpha - 1)^2}{2\alpha - 1} \Phi^{-2\alpha}(0) \Phi(0), \end{aligned}$$

$$A^2 = (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \underbrace{\left\{ \left[\Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0) \right]^2 - \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0) \right\}}_{\text{Kabulden } > 0 \text{ dır}} > 0$$

dır. Kabulden dolayı parantez içi pozitiftir. Dolayısıyla $A^2 > 0$ olur.

$$(Y')^2 \geq A^2,$$

$$|Y'| \geq |A|, \quad (A > 0, Y' < 0)$$

$$Y' \leq -A < 0$$

dır. Sonuç olarak $Y'(t_0) < 0$ olduğundan

$$\Phi'(t_0) > \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(t_0)$$

dır. Buradan devam edilirse $\forall t \in [0, T]$ için $Y'(t) < 0$ olur. $Y'(t) < -A$ integrali alınırsa $Y(t) \leq Y(0) - At$ bulunur. Buradan $Y(t) = e^{\gamma t} \Phi^{1-\alpha}(t)$ olduğundan

$$Y(t) \leq Y(0) - At,$$

$$e^{\gamma t} \Phi^{1-\alpha}(t) \leq \Phi^{1-\alpha}(0) - At,$$

$$\Phi^{1-\alpha}(t) \leq e^{-\gamma t} (\Phi^{1-\alpha}(0) - At),$$

$$\Phi(t) \geq \frac{e^{\frac{\gamma t}{\alpha-1}}}{(\Phi^{1-\alpha}(0) - At)^{\frac{1}{\alpha-1}}}$$

bulunur. $(\Phi^{1-\alpha}(0) - At)^{\frac{1}{\alpha-1}} = 0$ için $t = \Phi^{1-\alpha}(0) A^{-1}$ olur. Böylece

$$\lim_{t \rightarrow \Phi^{1-\alpha}(0) A^{-1}} \sup \Phi(t) = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow T_\infty} \sup \Phi(t) = \infty$$

olur.

Teorem 6.1.3 (H1) koşulu altında ve $q(\cdot) \in C(\overline{\Omega})$ (6.6) daki gibi tanımlansın. Ayrıca $q_1 > 2$ için

$$\int_0^\infty g(s) ds < \frac{q_1^2 - 2q_1}{q_1^2 - 2q_1 + 1} \quad (6.7)$$

olsun. Eğer başlangıç verileri için

$$E(0) > 0,$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} u_0 u_1 dx &> \frac{2\mu}{q_1 - 2} \|u_0\|_2^2 \\ &> 0\end{aligned}$$

ve

$$\left(\int_{\Omega} u_0 u_1 dx - \frac{2\mu}{q_1 - 2} \|u_0\|_2^2 \right)^2 > 2E(0) \|u_0\|_2^2$$

ise bu durumda

$$T^* \leq \frac{1}{A} \|u_0\|_2^{1-\frac{q_1}{2}}$$

olmak üzere

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \sup \|u(\cdot, t)\|_2 = +\infty$$

dır. Burada

$$A^2 = \left(\frac{q_1}{2} - 1 \right)^2 \|u_0\|^{-2-p_1} \left[\left(\int_{\Omega} u_0 u_1 dx - \frac{2\mu}{q_1 - 2} \|u_0\|^2 \right)^2 - 2E(0) \|u_0\|^2 \right] \quad (6.8)$$

dır.

İspat. (6.1) probleminin ilk denklemini u ile çarpıp Ω bölgesinde integral alınırsa

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} u u_{tt} dx + \int_{\Omega} u \Delta^2 u dx - \int_{\Omega} u \int_0^t g(t-s) \Delta^2 u(s) ds dx + \mu \int_{\Omega} u u_t dx \\ &= \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx\end{aligned}$$

elde edilir. Green özdeşliğinden

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} u_t u_{tt} dx - \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + \int_{\Omega} \Delta u \Delta u dx \\ &- \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta u(s) dx ds + \mu \int_{\Omega} u u_t dx \\ &= \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |u_t(t)|^2 dx \right) - \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx \\ &- \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta u(s) dx ds + \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx \right) \\ &= \int_{\Omega} |u(t)|^{q(x)} dx\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\phi(t) = \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx$$

ve

$$J(t) = \int_{\Omega} |u_t(t)|^2 dx$$

alınırsa, yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d^2 \phi}{dt^2} - J(t) - \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta u(s) dx ds \\ & + \frac{\mu}{2} \frac{d\phi}{dt} + \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx ds \\ & = \int_{\Omega} |u(t)|^{q(x)} dx \end{aligned} \quad (6.9)$$

eşitliğine dönüşür. Aşağıda, (6.9) eşitliğindeki üçüncü terimle ilgili olarak $\delta > 0$ için kestirim yapılırsa:

$$\begin{aligned} & - \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta u(s) dx ds \\ & = - \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta u(t) [\Delta u(s) - \Delta u(t)] dx ds \\ & \quad - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx \\ & \leq \delta \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx \\ & \quad + \frac{1}{4\delta} \int_{\Omega} \left| \int_0^t g(t-s) [\Delta u(s) - \Delta u(t)] d\tau \right|^2 dx \\ & \quad - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx \end{aligned} \quad (6.10)$$

yazılabilir.

Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$\int_{\Omega} \left| \int_0^t g(t-s) [\Delta u(s) - \Delta u(t)] ds \right|^2 dx \leq \left(\int_0^t g(s) ds \right) (g \circ \Delta u)(t) \quad (6.11)$$

dır. Dolayısıyla, (6.10) eşitsizliği $\forall \delta > 0$ için

$$\begin{aligned} & - \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta u(s) dx ds \\ & \leq \delta \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx + \frac{1}{4\delta} \left(\int_0^t g(s) ds \right) (g \circ \Delta u)(t) \\ & \quad - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx \end{aligned} \quad (6.12)$$

eşitsizliğine dönüşür. Sonuç olarak (6.9) eşitsizliği $\forall \delta > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d^2 \phi}{dt^2} - J(t) + \frac{\mu}{2} \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{4\delta} \left(\int_0^t g(s) ds \right) (g \circ \Delta u)(t) \\
& + \left(1 + \delta - \int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx d\tau \\
& \geq \int_{\Omega} |u(t)|^{q(x)} dx
\end{aligned} \tag{6.13}$$

olur. Benzer şekilde, (6.1) probleminin ilk denklemi u_t ile çarpılıp Ω bölgesinde integral alınsın:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} J(t) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx \right] + \mu J(t) \\
& - \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta u(s) \Delta u_t(t) dx ds \\
& = \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx
\end{aligned} \tag{6.14}$$

dır. (6.5) teki

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta u(t) \Delta u(s) dx ds \\
& = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[(g \circ \Delta u)(t) - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx \right] \\
& + \frac{1}{2} g(t) \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx - \frac{1}{2} (g' \circ \Delta u)(t)
\end{aligned}$$

eşitliği göz önüne alınırsa, (6.14) eşitliği

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[J(t) + \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx + (g \circ \Delta u)(t) \right] \\
& + \frac{1}{2} g(t) \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx - \frac{1}{2} (g' \circ \Delta u)(t) + \int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} dx \\
& = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx
\end{aligned} \tag{6.15}$$

eşitliğine dönüşür. Buradan (6.15) denklemi $(0, t)$ aralığında integral alınırsa

$$\int_0^t \left[\frac{1}{2} g(t) \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx - \frac{1}{2} (g' \circ \Delta u)(t) + \int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} dx \right] dt \geq 0$$

eşitsizliğine dönüşür. Gerekli düzenlemeler yapılsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} J(t) + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx + \frac{1}{2} (g \circ \Delta u)(t) - E(0) \\
& \leq \frac{1}{q_1} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx
\end{aligned} \tag{6.16}$$

olur. Burada

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta u_0|^2 dx - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u_0|^{q(x)} dx$$

dır. (6.13) ve (6.16) dan

$$\begin{aligned} & \frac{q_1}{2} J(t) + \frac{q_1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx \\ & + \frac{q_1}{2} (g \circ \Delta u)(t) - q_1 E(0) \\ \leq & \frac{1}{2} \frac{d^2 \phi}{dt^2} - J(t) + \frac{1}{4\delta} \left(\int_0^t g(s) ds \right) (g \circ \Delta u)(t) \\ & + \left(1 + \delta - \int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx \end{aligned} \quad (6.17)$$

elde edilir. Buradan $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{q_1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx \\ & - \left(1 + \delta - \int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx \geq 0, \\ & \frac{q_1}{2} - \frac{1}{4\delta} \left(\int_0^t g(s) ds \right) (g \circ \Delta u)(t) \geq 0 \end{aligned}$$

olur. Burada (6.7) eşitsizliği kullanılırsa (6.17) eşitsizliği

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{\mu}{2} \frac{d\phi}{dt} + q_1 E(0) \geq \left(1 + \frac{q_1}{2} \right) J(t)$$

eşitsizliğine dönüşür. Tekrar Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanılırsa

$$\phi_t^2 \leq 4J\phi$$

eşitsizliğine kolayca ulaşılır. Son iki eşitsizliği birleştirerek

$$\phi \phi_{tt} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{q_1}{2} \right) \phi_t^2 + \mu \phi \phi_{tt} + 2q_1 E(0) \phi \geq 0 \quad (6.18)$$

elde edilir. Şimdi (6.6) ile (6.18) den

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{q_1}{2} \right) > 1, \quad \beta = 2q_1 E(0) > 0, \\ \gamma &= \mu \geq 0, \quad \frac{2\beta}{2\alpha - 1} = 8E(0), \quad \frac{\gamma}{\alpha - 1} = \frac{4\mu}{q_1 - 2} \end{aligned} \quad (6.19)$$

elde edilir. Böylece Lemma 6.1.1 den $t \rightarrow T^*$ için

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \sup \|u(\cdot, t)\|_2 = +\infty$$

olacak şekilde

$$T^* \leq \frac{1}{A} \|u_0\|_2^{1-\frac{q_1}{2}}$$

değeri vardır. Burada A , (6.9) da verilmiştir. Ayrıca

$$\|u\|_2 \geq \frac{e^{\frac{2\mu t}{q_1-2}}}{\left[\|u_0\|_2^{1-\frac{q_1}{2}} - At\right]^{\frac{2}{q_1-2}}}$$

eşitsizliği istenen sonuçtur.



7. DEĞİŞKEN ÜSLÜ LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ m -LAPLACIAN DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI VE ENERJİ AZALMASI

Bu bölümde, aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemi ele alındı (Yılmaz ve Pişkin, 2024b):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta_m u + u + \mu_1 u_t |u_t|^{p(\cdot)-2} \\ + \mu_2 u_t(x, t - \tau) |u_t|^{p(\cdot)-2}(x, t - \tau) \\ = u |u|^{q(\cdot)-2} \ln |u|^k, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ u_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), \quad \Omega \times (0, \tau) \end{array} \right. \quad (7.1)$$

burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de, $\partial\Omega$ düzgün sınıra sahip sınırlı bölgedir. $\tau, k, \mu_1 > 0, m \geq 2, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ve m -Laplacian

$$\Delta_m u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{m-2} \nabla u)$$

şeklinde ifade edilir. Başlangıç fonksiyonları u_0, u_1 ve f_0 daha sonra belirlenecektir.

$p(\cdot)$ ve $q(\cdot)$ değişken üsler Ω bölgesinde

$$2 \leq p_1 \leq p(x) \leq p_2 < q_1 \leq q(x) \leq q_2 \leq 2 \frac{n-1}{n-2}, \quad n \geq 3, \quad (7.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x), \quad p_2 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x), \\ q_1 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} q(x), \quad q_2 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} q(x), \end{array} \right.$$

$p(\cdot)$ ve $q(\cdot)$ log-Hölder koşulunu sağlar.

7.1 Global Varlık

Bu bölümde, (8.1) probleminin çözümlerinin global varlığı gösterilecektir. Bunun için $x \in \Omega, \rho \in (0, 1)$ ve $t > 0$ için

$$u(x, \rho, t) = z_t(x, t - \tau\rho)$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım (Nicaise ve Pignotti, 2006). Buradan

$$\tau u_t(x, \rho, t) + u_\rho(x, t - \tau\rho) = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadeleri (7.1) probleminde yazılırsa

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta_m u + u + \mu_1 |u_t|^{p(\cdot)-2} u_t \\ + \mu_2 z(x, 1, t) |z(x, 1, t)|^{p(\cdot)-2} \\ = u |u|^{q(\cdot)-2} \ln |u|^k, & \Omega \times (0, \infty), \\ \tau z_t(x, \rho, t) + u_\rho(x, \rho, t) = 0, & \Omega \times (0, 1) \times (0, \infty), \\ z(x, \rho, 0) = f_0(x, -\rho\tau), & \Omega \times (0, 1), \\ u(x, t) = 0, & \partial\Omega \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \Omega \end{array} \right. \quad (7.3)$$

şekline dönüşür. (7.3) probleminin $t \geq 0$ için enerji fonksiyoneli

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{m} \|\nabla u\|_m^m + \frac{1}{2} \|u\|^2 + k \int_{\Omega} \frac{|u|^{q(x)}}{q^2(x)} dx \\ & - k \int_{\Omega} \frac{|u|^{q(x)} \ln u}{q(x)} dx + \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\zeta(x) |z(x, \rho, t)|^{p(x)}}{p^2(x)} dx d\rho \end{aligned} \quad (7.4)$$

dır. ζ sürekli fonksiyonu $x \in \overline{\Omega}$ için

$$\tau |\mu_2| (p(x) - 1) < \zeta(x) < \tau (\mu_1 m(x) - |\mu_2|) \quad (7.5)$$

şeklinde tanımlansın. Örneğin ζ sürekli fonksiyonu

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \frac{\tau}{2} |\mu_2| (p(x) - 1) + \mu_1 m(x) - |\mu_2| \\ &= \frac{\tau}{2} [(\mu_1 + |\mu_2|) p(x) - 2 |\mu_2|] \\ &> 0 \end{aligned}$$

şeklinde alınabilir.

Aşağıdaki lemma uygun koşullar altında enerji fonksiyonelinin artmayan olduğunu ifade etmektedir.

Lemma 7.1.1 (7.3) probleminin bir çözümü (u, z) olsun. $C_0 > 0$ için

$$E'(t) \leq -C_0 \left[\int_{\Omega} \left(|u_t|^{p(x)} + |z(x, 1, t)|^{p(x)} dx \right) \right] \leq 0 \quad (7.6)$$

dır.

İspat. (7.3) problemin ilk denklemini u_t ile çarpıp Ω bölgesinde integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u_t u_{tt} dx - \int_{\Omega} u_t \operatorname{div} (|\nabla u|^{m-2} \nabla u) dx \\
& + \int_{\Omega} u_t u dx + \mu_1 \int_{\Omega} u_t |u_t|^{p(\cdot)-2} u_t dx \\
& + \mu_2 \int_{\Omega} u_t z(x, 1, t) |z(x, 1, t)|^{p(\cdot)-2} dx \\
& = \int_{\Omega} u_t u |u|^{q(\cdot)-2} \ln |u|^k dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{1}{m} \int_{\Omega} |\nabla u|^m dx \\
& + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \mu_1 \int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} dx \\
& + \mu_2 \int_{\Omega} u_t z(x, 1, t) |z(x, 1, t)|^{p(\cdot)-2} dx \\
& = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|u|^{q(x)} \ln |u|^k}{q(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{k |u|^{q(x)} u_t}{q(x) u} dx \\
& = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|u|^{q(x)} \ln |u|^k}{q(x)} dx - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{k |u|^{q(x)}}{q^2(x)} dx
\end{aligned} \tag{7.7}$$

olur. Şimdi (7.3) probleminin ikinci denklemini $\frac{1}{\tau} \zeta(x) |z|^{p(x)-2} z$ çarpıp $\Omega \times (0, 1)$ bölgesinde integral alınırsa

$$\int_0^1 \int_{\Omega} \frac{1}{\tau} \zeta(x) |z|^{p(x)-2} z [\tau z_t(x, \rho, t) + u_{\rho}(x, \rho, t)] dx d\rho = 0$$

eşitlik düzenlenirse

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\zeta(x) |z|^{p(x)}}{p^2(x)} dx d\rho + \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{1}{\tau} \zeta(x) |z|^{p(x)-2} z u_{\rho}(x, \rho, t) dx d\rho = 0 \tag{7.8}$$

elde edilir. (7.7) ve (7.8) ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{m} \|\nabla u\|_m^m + \frac{1}{2} \|z\|^2 + k \int_{\Omega} \frac{|u|^{q(x)}}{q^2(x)} dx \right. \\
& \left. - k \int_{\Omega} \frac{|u|^{q(x)} \ln u}{q(x)} dx + \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\zeta(x) |z|^{p(x)}}{p^2(x)} dx d\rho \right] \\
& = - \mu_1 \int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} dx - \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \int_0^1 \zeta(x) |z(x, \rho, t)|^{p(x)-2} z(x, \rho, t) z_{\rho}(x, \rho, t) d\rho dx \\
& - \mu_2 \int_{\Omega} u_t |u(x, 1, t)|^{p(x)-2} u(x, 1, t) dx
\end{aligned} \tag{7.9}$$

elde edilir. Şimdi (7.9) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü terimleri için kesti-
rimde bulunulacak:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \int_0^1 \zeta(x) |z(x, \rho, t)|^{p(x)-2} z z_{\rho}(x, \rho, t) d\rho dx \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \frac{\zeta(x)}{p(x)} \left(|z(x, 0, t)|^{p(x)} - |z(x, 1, t)|^{p(x)} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{\zeta(x)}{\tau p(x)} |u_t|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{\zeta(x)}{\tau p(x)} |z(x, 1, t)|^{p(x)} dx \end{aligned}$$

olur. Son terim $r = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ ve $r' = p(x)$ olacak şekilde Young eşitsizliği uygulanırsa

$$|u_t| |z(x, 1, t)|^{p(x)-1} \leq \frac{1}{p(x)} |u_t|^{p(x)} + \frac{p(x)}{p(x)-1} |z(x, 1, t)|^{p(x)}$$

elde edilir. Sonuç olarak son terim

$$\begin{aligned} & -\mu_2 \int_{\Omega} u_t z |z(x, 1, t)|^{p(x)-2} dx \\ & \leq |\mu_2| \left(\int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |u_t|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{p(x)}{p(x)-1} |z(x, 1, t)|^{p(x)} dx \right) \end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= - \int_{\Omega} \left[\mu_1 - \left(\frac{\zeta(x)}{\tau p(x)} + \frac{|\mu_2|}{p(x)} \right) \right] |u_t|^{p(x)} dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \left(\frac{\zeta(x)}{\tau p(x)} - \frac{|\mu_2| (p(x)-1)}{p(x)} \right) |z(x, 1, t)|^{p(x)} dx \end{aligned}$$

olur. (7.5) ifadesinden $\forall x \in \bar{\Omega}$ için

$$\psi_1(x) = \mu_1 - \left(\frac{\zeta(x)}{\tau p(x)} + \frac{|\mu_2|}{p(x)} \right) > 0$$

ve

$$\psi_2(x) = \frac{\zeta(x)}{\tau p(x)} - \frac{|\mu_2| (p(x)-1)}{p(x)} > 0$$

dır. Eğer $p(x)$ sınırlı ise $\zeta(x)$ de sınırlıdır. Bu durumda $\psi_1(x)$ ve $\psi_2(x)$ de sınırlıdır.

Bu nedenle $x \in \bar{\Omega}$ için

$$C_0(x) = \min \{ \psi_1(x), \psi_2(x) \} > 0$$

olacak şekilde tanımlanırsa $C_0 = \inf_{\bar{\Omega}} C_0(x)$ olacağından $C_0(x) > C_0 > 0$ olur.

Böylece

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -C_0 \left[\int_{\Omega} \left(|u_t|^{p(x)} + |z(x, 1, t)|^{p(x)} \right) dx \right] \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

olur.

Şimdi de aşağıdaki fonksiyoneller tanımlansın:

$$I(t) = \|\nabla u\|_m^m + \|u\|^2 - \int_{\Omega} |u|^{q(x)} \ln |u|^k dx$$

ve

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{m} \|\nabla u\|_m^m + \frac{1}{2} \|u\|^2 + k \int_{\Omega} \frac{|u|^{q(x)}}{q^2(x)} dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{|u|^{q(x)} \ln |u|^k}{q(x)} dx + \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\zeta(x) |z|^{p(x)}}{p^2(x)} dx dt \end{aligned}$$

Buradan

$$E(t) = J(t) + \frac{1}{2} \|u_t\|^2$$

yazılabilir.

Lemma 7.1.2 Kabul edelim ki başlangıç verileri $z_0 \in W_0^{1,m}(\Omega)$ ve $z_1 \in L^2(\Omega)$ olsun.

Ayrıca $q_1 > m$, $I(0) > 0$ ve

$$\beta = C_{q_2+k} \left(\frac{q_1 E(0)}{q_1 - m} \right)^{\frac{q_2+k-m}{m}} < 1$$

koşulu sağlansın. Bu durumda $t \in [0, T]$ için

$$I(t) > 0$$

dır. Burada $\gamma > 0$ sonra belirlenecektir.

İspat. Eğer

$$\int_{\Omega} |u|^{q(x)} \ln |u|^k dx \leq 0$$

ise sonuç açıktır. Bu durumda $t \in [0, T^*]$ için

$$\int_{\Omega} |u|^{q(x)} \ln |u|^k dx > 0$$

ise $I(0) > 0$ olduğundan süreklilikten $T^* \leq T$ olacak şekilde bir T^* vardır ve bu durumda $t \in [0, T^*]$ için $I(t) \geq 0$ sağlanır.

Bu durumda $t \in [0, T^*]$ için

$$\begin{aligned}
J(t) &\geq \frac{1}{m} \|\nabla u\|_m^m + \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{k}{q_2^2} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \\
&\quad - \frac{1}{q_1} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} \ln |u|^k dx + \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\zeta(x) |z|^{p(x)}}{p^2(x)} dx dt \\
&\geq \left(\frac{q_1 - m}{q_1} \right) \|\nabla u\|_m^m + \left(\frac{q_1 - 2}{q_1} \right) \|u\|^2 \\
&\quad + \frac{k}{q_2^2} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx + \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\zeta(x) |z|^{p(x)}}{p^2(x)} dx dt + \frac{1}{q_1} I(t) \\
&\geq \left(\frac{q_1 - m}{q_1} \right) \|\nabla u\|_m^m
\end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_m^m &\leq \left(\frac{q_1}{q_1 - m} \right) J(t) \\
&\leq \left(\frac{q_1}{q_1 - m} \right) E(t) \\
&\leq \left(\frac{q_1}{q_1 - m} \right) E(0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan, $\ln |u| < |u|$ ve $|u| > 1$ eşitsizliğinden

$$\int_{\Omega} |u|^{q(x)} \ln |u|^k dx < \int_{\Omega} |u|^{q(x)+k} dx \leq \int_{\Omega} |u|^{q_2+k} dx$$

elde edilir. Eğer $0 < k < \frac{2}{n-2}$ ve $W_0^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_2+k}(\Omega)$ gömülmesi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u|^{q_2+k} dx &\leq C_{q_2+k} \|\nabla u\|_m^{q_2+k} \\
&= C_{q_2+k} \|\nabla u\|_m^m \|\nabla u\|_m^{q_2+k-m} \\
&= C_{q_2+k} \|\nabla u\|_m^m (\|\nabla u\|_m^m)^{\frac{q_2+k-m}{m}} \\
&\leq C_{q_2+k} \|\nabla u\|_m^m \left(\frac{q_1 E(0)}{q_1 - m} \right)^{\frac{q_2+k-m}{m}}
\end{aligned} \tag{7.10}$$

elde edilir. Burada C_{q_2+k} gömülme sabitidir. Böylece

$$\int_{\Omega} |u|^{q(x)} \ln |u|^k dx \leq \beta \|\nabla u\|_m^m \tag{7.11}$$

dır. Sonuç olarak (7.10) ve (7.11) den $\forall t \in [0, T^*]$ için

$$I(t) > (1 - \beta) \|\nabla u\|_m^m > 0$$

elde edilir. Bu işlemin tekrarıyla, T^*, T ye kadar genişletilebilir.

Teorem 7.1.3 Eğer başlangıç verileri z_0 ve z_1 Lemma 7.1.2 koşulunu sağlıyorsa (7.3) problemi düzgün sınırlı ve globaldir.

İspat. $\|\nabla z\|_m^m + \|z_t\|^2$ ifadesini t den bağımsız sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Açıkça görülmektedir ki

$$\begin{aligned} E(0) &\geq E(t) \\ &= \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + J(t) \\ &\geq \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \left(\frac{q_1 - m}{q_1}\right) \|\nabla u\|_m^m + \left(\frac{q_1 - 2}{q_1}\right) \|u\|^2 \\ &\quad + \frac{k}{q_2^2} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx + \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\zeta(x) |z|^{p(x)}}{p^2(x)} dx dt + \frac{1}{q_1} I(t) \\ &\geq \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \left(\frac{q_1 - m}{q_1}\right) \|\nabla u\|_m^m \end{aligned}$$

dır. Buna göre

$$\|\nabla u\|_m^m + \|u_t\|^2 \leq CE(0)$$

elde edilir. Burada C pozitif sabiti; k , q_1 ve q_2 ye bağlıdır.

7.2 Çözümün Azalması

Bu bölümde, (7.3) probleminin çözümlerinin azalması gösterilecektir.

Lemma 7.2.1 (Komornik) $E : R^+ \rightarrow R^+$ artmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $\sigma > 0$, $\omega > 0$ ve $\forall s > 0$ için

$$\int_s^\infty E^{1+\sigma}(t) dt \leq \frac{1}{\omega} E^\sigma(0) E^\sigma(s) = cE(s)$$

eşitliği sağlanıyorsa $\forall t \geq 0$ için

$$E(t) \leq \begin{cases} cE(0) (1+t)^{\frac{-1}{\sigma}}, & \sigma > 0, \\ E(t) \leq cE(0) e^{-\omega t}, & \sigma = 0 \end{cases}$$

dır.

Lemma 7.2.2 (7.3) problemin çözümü boyunca

$$F(t) = \tau \int_0^1 \int_{\Omega} e^{-\rho\tau} \zeta(x) |u(x, \rho, t)|^{p(x)} dx d\rho,$$

fonksiyoneli

$$F'(t) \leq \int_{\Omega} \zeta(x) |u_t|^{p(x)} dx - \tau e^{-\tau} \int_0^1 \int_{\Omega} \zeta(x) |z(x, \rho, t)|^{p(x)} dx d\rho$$

eşitsizliği sağlar (Kafini ve Noor, 2023).

İspat. $F(t)$ nin türevini alıp (7.3) probleminin ikinci denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
F'(t) &= - \int_0^1 \int_{\Omega} e^{-\rho\tau} \zeta(x) p(x) |z|^{p(x)-1} z_{\rho} dx d\rho \\
&\quad - \tau \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{d}{d\rho} \left(e^{-\rho\tau} \zeta(x) |z|^{p(x)} \right) dx d\rho \\
&\quad - \tau \int_0^1 \int_{\Omega} e^{-\rho\tau} \zeta(x) |z(x, \rho, t)|^{p(x)} dx d\rho \\
&\leq \int_{\Omega} e^{-\tau} \zeta(x) |z(x, 0, t)|^{p(x)} dx d\rho \\
&\quad - \tau \int_0^1 \int_{\Omega} e^{-\rho\tau} \zeta(x) |z|^{p(x)} dx d\rho \\
&\leq \int_{\Omega} \zeta(x) |u_t|^{p(x)} dx - \tau e^{-\tau} \int_0^1 \int_{\Omega} \zeta(x) |z(x, \rho, t)|^{p(x)} dx d\rho
\end{aligned}$$

Teorem 7.2.3 Kabul edelim ki (3.1) ve (7.2) koşulları sağlansın. (7.3) probleminin

$$E(t) \leq \begin{cases} cE(0) (1+t)^{\frac{-2}{(p_2-2)}}, & p_2 > 0, \\ ce^{-\alpha t}, & p(x) = 0 \end{cases}$$

koşulunu sağlayacak şekilde c ve α pozitif iki sabit olmak üzere global çözümü vardır.

İspat. (7.3) probleminin birinci denklemini $s < T$ olmak üzere $uE^r(t)$ ile çarpıp $\Omega \times (s, T)$ bölgesinde integral alınırsa

$$\begin{aligned}
\beta &= \min \left\{ q_1(1-\xi), \left(\frac{q_1(1-\xi)}{2} + 1 \right), \left(\frac{q_1(1-\xi)}{2} - 1 \right), c_0(2(q_1+2) - q_1(1-\xi)) \right\} \\
&> 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da

$$\begin{aligned}
&\int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (uu_t) dx dt - \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} u_t^2 dx dt + \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} |\nabla u|^m dx dt \\
&+ \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} u^2 dx dt + \mu_1 \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} u |u_t|^{p(x)-2} u_t dx dt \\
&+ \mu_2 \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} u z(x, 1, t) |z(x, 1, t)|^{p(x)-2} dx dt \\
&- \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} |u|^{q(x)} \ln |u|^k dx dt \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7.12}$$

dır. (7.4) deki $E(t)$ tanımını ve

$$\frac{d}{dt} \left(E^r(t) \int_{\Omega} uu_t dx \right) = rE^{r-1}(t) E'(t) \int_{\Omega} uu_t dx + E^r(t) \frac{d}{dt} \int_{\Omega} uu_t dx$$

eşitliğinden faydalanarak (7.12) ifadesi

$$\begin{aligned}
2 \int_s^T E^{r+1}(t) dt = & - \int_s^T \frac{d}{dt} \left(E^r(t) \int_{\Omega} u u_t dx \right) dt \\
& + r \int_s^T E^{r-1}(t) E'(t) \int_{\Omega} u u_t dx dt \\
& - \mu_1 \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} u |u_t|^{p(x)-2} u_t dx dt \\
& - \mu_2 \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} u z(x, 1, t) |z(x, 1, t)|^{p(x)-2} dx dt \\
& + 2 \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt + \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} |u|^{q(x)} \ln |u|^k dx dt \\
& + 2 \int_s^T E^r(t) \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\zeta(x) |z(x, \rho, t)|^{p(x)}}{p(x)} dx dt
\end{aligned} \tag{7.13}$$

ifadesine dönüşür. (7.13) ifadesinde eşitliğin sağ tarafındaki birinci terimi aşağıdaki kestirimde bulunulursa

$$\begin{aligned}
& \left| - \int_s^T \frac{d}{dt} \left(E^r(t) \int_{\Omega} z z_t dx \right) dt \right| \\
= & \left| E^r(ts) \int_{\Omega} z z_t(x, s) dx - E^r(T) \int_{\Omega} z z_t(x, T) dx \right| \\
\leq & \frac{1}{2} E^r(s) \left[\int_{\Omega} z^2(x, s) dx + \int_{\Omega} z_t^2(x, s) dx \right] \\
& + \frac{1}{2} E^r(T) \left[\int_{\Omega} z^2(x, T) dx + \int_{\Omega} z_t^2(x, T) dx \right] \\
\leq & \frac{1}{2} E^r(s) [C_* \|\nabla z\|^2 + 2E(s)] \\
& + \frac{1}{2} E^r(T) \left[\int_{\Omega} z^2(x, T) dx + \int_{\Omega} z_t^2(x, T) dx \right] \\
\leq & E^r(s) [C_* E(s) + E(s)] + E^r(s) [C_* E(T) + E(T)]
\end{aligned}$$

eşitsizliğine dönüşür. Burada C_* , Poincaré sabitidir. $E(t)$ nin monotonluğundan

$$\begin{aligned}
\left| - \int_s^T \frac{d}{dt} \left(E^r(t) \int_{\Omega} u u_t dx \right) dt \right| & \leq c E^{r+1}(s) \\
& \leq c E^r(0) E(s) \\
& \leq c E(s)
\end{aligned} \tag{7.14}$$

elde edilir. Benzer şekilde ikinci terim

$$\begin{aligned}
\left| r \int_s^T E^{r-1}(t) E'(t) \int_{\Omega} u u_t dx dt \right| &\leq -r \int_s^T E^{r-1}(t) E'(t) [C_* E(t) + 2E(t)] \\
&\leq -c \int_s^T E^r(t) E'(t) dt \\
&\leq c E^{r+1}(s) \\
&\leq c E(s)
\end{aligned} \tag{7.15}$$

dönüşür. Diğer terim için

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : |z_t(x, t)| \geq 1\} \text{ ve } \Omega_- = \{x \in \Omega : |z_t(x, t)| < 1\}$$

ve Hölder ile Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\left| \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt \right| &= \left| \int_s^T E^r(t) \left[\int_{\Omega_+} u_t^2 dx + \int_{\Omega_-} u_t^2 dx \right] dt \right| \\
&\leq c \int_s^T E^r(t) \left[\left(\int_{\Omega_+} |u_t|^{p_1} dx \right)^{\frac{2}{p_1}} + \left(\int_{\Omega_-} |u_t|^{p_2} dx \right)^{\frac{2}{p_2}} \right] dt \\
&\leq c \int_s^T E^r(t) \left[\left(\int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} dx \right)^{\frac{2}{p_1}} + \left(\int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} dx \right)^{\frac{2}{p_2}} \right] dt \\
&\leq c \int_s^T E^r(t) \left[(-E'(t))^{\frac{2}{p_1}} + (-E'(t))^{\frac{2}{p_2}} \right] dt \\
&\leq c\varepsilon \int_s^T [E(t)]^{\frac{rp_1}{p_1-2}} dt + c(\varepsilon) \int_s^T (-E'(t)) dt \\
&\quad + c\varepsilon \int_s^T E^{r+1}(t) dt + c(\varepsilon) \int_s^T (-E'(t))^{\frac{2(r+1)}{p_2}} dt
\end{aligned}$$

ifadesine dönüşür. $p_1 > 2$ ve $r = \frac{p_2}{2} - 1$ için $\frac{rp_1}{p_1-2} = r + 1 + \frac{p_2-p_1}{p_1-2}$ dır. Buradan

$$\begin{aligned}
\left| \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} z_t^2 dx dt \right| &\leq c\varepsilon \int_s^T E^{r+1}(t) dt \\
&\quad + c\varepsilon [E(0)]^{\frac{p_2-p_1}{p_1-2}} \int_s^T E^{r+1}(t) dt + c(\varepsilon) E(s) \\
&\leq c\varepsilon \int_s^T E^{r+1}(t) dt + c(\varepsilon) E(s)
\end{aligned} \tag{7.16}$$

elde edilir. $p_1 = 2$ durum için $r = \frac{p_2}{2} - 1$ seçimi de benzer sonuçlar verecektir.

Diğer terim için Young eşitsizliğinden $\forall x \in \Omega$

$$\begin{aligned}
& \left| -\mu_1 \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} u |u_t|^{p(x)-2} u_t dx dt \right| \\
& \leq \varepsilon \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} |u(t)|^{p(x)} dx dt \\
& \quad + c \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} c_{\varepsilon}(x) |u_t|^{p(x)} dx dt \\
& \leq \varepsilon \int_s^T E^r(t) \left[\int_{\Omega_+} |u(t)|^{p_1} dx + \int_{\Omega_-} |u_t|^{p_2} dx \right] dt \\
& \quad + c \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} c_{\varepsilon}(x) |u|^{p(x)} dx dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Young eşitsizliğinde

$$q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1} \text{ ve } q'(x) = p(x)$$

ifadeleri kullanırsak

$$c_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{1-p(x)} \left[(p(x))^{-p(x)} (p(x)-1) \right]^{p(x)-1}$$

olur. Dolayısıyla $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega)$ ve $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p_2}(\Omega)$ gömülmelerinden

$$\begin{aligned}
& \left| -\mu_1 \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} u |u_t|^{p(x)-2} u_t dx dt \right| \\
& \leq \varepsilon \int_s^T E^r(t) [c \|\nabla z(s)\|_2^{p_1} + c \|\nabla z(s)\|_2^{p_2}] dt + c \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} c_{\varepsilon}(x) |u_t|^{p(x)} dx dt \\
& \leq \varepsilon \int_s^T E^r(t) \left[c E^{\frac{p_1-2}{2}}(0) E(t) + c E^{\frac{p_2-2}{2}}(0) E(t) \right] + c \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} c_{\varepsilon}(x) |u_t|^{p(x)} dx dt \\
& \leq \varepsilon \int_s^T E^{r+1}(t) dt + c \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} c_{\varepsilon}(x) |u_t|^{p(x)} dx dt \\
& \leq \varepsilon \int_s^T E^{r+1}(t) dt + c(\varepsilon) E(s)
\end{aligned} \tag{7.17}$$

elde edilir. Burada $c(\varepsilon)$, ε bağlı sabittir.

(7.13) ifadesindeki sıradaki terim benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \left| -\mu_2 \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} u |z(x, 1, t)|^{p(x)-1} dx dt \right| \\
& \leq \varepsilon \int_s^T E^r(t) [c \|\nabla u(s)\|_2^{p_1} + c \|\nabla u(s)\|_2^{p_2}] dt \\
& \quad + \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} c_{\varepsilon}(x) |z(x, 1, t)|^{p(x)} dx dt \\
& \leq \varepsilon \int_s^T E^{r+1}(t) dt + c(\varepsilon) E(s)
\end{aligned} \tag{7.18}$$

ifadesine dönüşür. Logaritmik terim için $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q_2+k}(\Omega)$ gömülmesi ve

$$\int_{\Omega} |u|^{q(x)} \ln |u|^k dx \leq \beta_* \|\nabla u\|^2$$

ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} u^2 |u|^{q(x)-2} \ln |u|^k dx dt \right| &\leq \left| \int_s^T E^r(t) \int_{\Omega} |u|^{q(x)} \ln |u|^k dx dt \right| \\ &\leq \beta_* \int_s^T E^r(t) \|\nabla u\|^2 dt \\ &\leq \beta_* \int_s^T E^{r+1}(t) dt \end{aligned} \quad (7.19)$$

elde edilir. Burada $0 < \beta_* < 1$ ve $q_2 + k < \frac{n}{n-2} + k < \frac{2n}{n-2}$ dır. (7.13) ifadesinin son terimine Lemma 7.1.2 uygulanırsa

$$\begin{aligned} &2 \int_s^T E^r(t) \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\zeta(x) |z(x, \rho, t)|^{p(x)}}{p(x)} dx d\rho \\ &\leq \frac{2}{p_1} \int_s^T E^r(t) \int_0^1 \int_{\Omega} \zeta(x) |z(x, \rho, t)|^{p(x)} dx d\rho \\ &\leq \frac{2\tau}{p_1} \left(E^r(t) \int_0^1 \int_{\Omega} e^{-\rho\tau} \zeta(x) |z|^{p(x)} dx d\rho \right) \Big|_{t=s}^{t=T} \\ &\quad + \frac{2}{p_1} \int_s^T E^r(t) \int_0^1 \int_{\Omega} e^{-\rho\tau} \zeta(x) |u_t|^{p(x)} dx d\rho \end{aligned}$$

elde edilir. $\zeta(x)$ sınırlılığından ve $c > 0$ için

$$\begin{aligned} &2 \int_s^T E^r(t) \int_0^1 \int_{\Omega} \frac{\zeta(x) |z(x, \rho, t)|^{p(x)}}{p(x)} dx d\rho \\ &\leq \frac{2\tau e^{-\tau}}{p_1} E^r(s) E(s) + \frac{2c}{p_1} E^{r+1}(T) \\ &\leq \frac{2\tau e^{-\tau}}{p_1} E^r(0) E(s) + \frac{2c}{p_1} E^{r+1}(T) E(s) \\ &\leq cE(s) \end{aligned} \quad (7.20)$$

dır. (7.13) - (7.20) den

$$\int_s^T E^{r+1}(t) dt \leq (\varepsilon + \beta_*) \int_s^T E^{r+1}(t) dt + cE(s)$$

elde edilir. $\beta_* < 1$, ε yeterince küçük olacak şekilde $\varepsilon + \beta_* < 1$ dır. Bundan dolayı

$$\int_s^T E^{r+1}(t) dt \leq cE(s)$$

dır. $T \longrightarrow \infty$ için

$$\int_s^\infty E^{r+1}(t) dt \leq cE(s)$$

dır. Sonuç olarak, Komornik lemması $\sigma = r = \frac{p_2}{2} - 1$ ile sağlanır ve bu da istenilen sonucu verir.



8. DEĞİŞKEN ÜSLÜ KLEİN-GORDON DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI İLE İLGİLİ TEORİK VE NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde (8.1) denklem sisteminin çözümlerinin lokal varlığı , patlaması ve sayısal sonuçları elde edilecektir (Yılmaz vd., 2023b).

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m_1^2 u + |u_t|^{p(x)-1} u_t = f_1(u, v), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_{tt} - \Delta v + m_2^2 v + |v_t|^{r(x)-1} v_t = f_2(u, v), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = v(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = u_1(x), v_t(x, 0) = v_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (8.1)$$

burada Ω, R^n de ($n = 1, 2, 3$) $\partial\Omega$ düzgün sınıra sahip sınırlı bölgedir, $f_1(u, v)$ ve $f_2(u, v)$ kaynak terimleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} f_1(u, v) = a |u + v|^{2(q(\cdot)+1)} (u + v) + b |u|^{q(\cdot)} u |v|^{q(\cdot)+2}, \\ f_2(u, v) = a |u + v|^{2(q(\cdot)+1)} (u + v) + b |u|^{q(\cdot)+2} |v|^{q(\cdot)} v \end{cases} \quad (8.2)$$

burada m_1, m_2 pozitif sabitlerdir ve a, b pozitif olmayan sabitlerdir ve $f_1(u, v)$ ve $f_2(u, v)$ tanımından, aşağıdaki ifade kolayca elde edilebilir: $\forall (u, v) \in R^2$

$$u f_1(u, v) + v f_2(u, v) = 2(q(x) + 2) F(u, v) \quad (8.3)$$

dır. Burada

$$F(u, v) = \frac{1}{2(q(x) + 2)} \left[a |u + v|^{2(q(x)+2)} + 2b |uv|^{q(x)+2} \right]$$

dır.

Lemma 8.1 Messaoudi ve Talahmeh, 2022. c_0 ve c_1 olmak üzere iki sabit vardır, öyle ki

$$\frac{c_0}{2(q(x) + 2)} F_1(u, v) \leq F(u, v) \leq \frac{c_1}{2(q(x) + 2)} F_2(u, v)$$

Burada

$$\begin{aligned} F_1(u, v) &= \left[|u|^{2(q(x)+2)} + |v|^{2(q(x)+2)} \right] \\ F_2(u, v) &= \left[|u|^{2(q(x)+2)} + |v|^{2(q(x)+2)} \right] \end{aligned}$$

dır.

İspat. Eşitsizliğin sağ tarafın doğruluğu açıktır. Sol tarafta $u = v = 0$ ise eşitsizlik sağlanır. Genelliği kaybetmeden $v \neq 0$ kabul edilirse, o zaman ya $|u| \leq |v|$ veya $|u| > |v|$ olur.

Eğer $|u| \leq |v|$ ise,

$$F(u, v) = \frac{1}{2(q(x) + 2)} |v|^{2(q(x)+2)} \left[a \left| 1 + \frac{u}{v} \right|^{2(q(x)+2)} + 2b \left| \frac{u}{v} \right|^{q(x)+2} \right]$$

elde edilir. $s \in [-1, 1]$ ve $x \in \Omega$ olacak şekilde

$$\Upsilon(s) = a |1 + s|^{2(q(x)+2)} + 2b |s|^{q(x)+2}$$

sürekli bir fonksiyonunu tanımlayalım.

Dolayısıyla, $\min \Upsilon(s) \geq 0$ olur. Eğer $\min \Upsilon(s) = 0$ ise, $s_0 \in [-1, 1]$ aralığı için $\Upsilon(s) = a |1 + s_0|^{2(q(x)+2)} + 2b |s_0|^{q(x)+2} = 0$ elde ederiz.

Bu, $|1 + s_0| = |s_0| = 0$ anlamına gelir ki bu imkansızdır. Bu nedenle, $\Upsilon(s) = 2c_0 > 0$ olur.

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} F(u, v) &\geq \frac{c_0}{q(x) + 2} |v|^{2(q(x)+2)} \\ &\geq \frac{c_0}{q(x) + 2} |u|^{2(q(x)+2)} \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla,

$$2F(u, v) \geq \frac{c_0}{q(x) + 2} |v|^{q(x)+2} \left[a \left| 1 + \frac{u}{v} \right|^{2(q(x)+2)} + 2b \left| \frac{u}{v} \right|^{q(x)+2} \right]$$

veya

$$\frac{c_0}{2(q(x) + 2)} |u|^{q(x)+2} \left[a \left| 1 + \frac{u}{v} \right|^{2(q(x)+2)} + 2b \left| \frac{u}{v} \right|^{q(x)+2} \right] \leq 2F(u, v)$$

dır. Eğer $|u| \geq |v|$ ise,

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{2(q(x) + 2)} |u|^{(q(x)+2)} \left[a \left| 1 + \frac{v}{u} \right|^{2(q(x)+2)} + 2b \left| \frac{v}{u} \right|^{q(x)+2} \right] \\ &\leq \frac{c_0}{q(x) + 2} |v|^{q(x)+2} \end{aligned}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 8.2 c_0 ve c_1 olmak üzere iki sabit vardır, öyle ki

$$c_0 [\varrho(u) + \varrho(v)] \leq \int_{\Omega} F(u, v) dx \leq c_1 [\varrho(u) + \varrho(v)] \quad (8.4)$$

dır.

$p(\cdot)$, $r(\cdot)$ ve $q(\cdot)$ değişken üsler, Ω üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{cases} 2 \leq p_1 \leq p(x) \leq p_2 \leq p^*, \\ 2 \leq r_1 \leq r(x) \leq r_2 \leq r^*, \\ 2 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2 \leq q^* \end{cases}$$

burada

$$\begin{cases} p_1 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x), \quad p_2 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x), \\ r_1 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} r(x), \quad r_2 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} r(x), \\ q_1 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} q(x), \quad q_2 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} q(x) \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} 2 \leq p^*, r^*, q^* < \infty, & n = 1, 2, \\ 2 \leq p^*, r^*, q^* < 6, & n = 3 \end{cases}$$

dır.

8.1 Ön Bilgiler

Bu bölümde, bazı lemma ve teoremleri ifade edelim (bkz. Antontsev ve Shmarev 2015, Diening vd., 2017, Pişkin ve Okutmuşur 2021).

Lemma 8.1.1 Eğer $1 < q_1 \leq q(x) \leq q_2 < \infty$ sağlanıyorsa, o zaman

$$\min \left\{ \|w\|_{q(\cdot)}^{q_1}, \|w\|_{q(\cdot)}^{q_2} \right\} \leq \varrho_{q(\cdot)}(w) \leq \max \left\{ \|w\|_{q(\cdot)}^{q_1}, \|w\|_{q(\cdot)}^{q_2} \right\}$$

herhangi bir $w \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ için geçerlidir.

Tanım 8.1.2 (Zayıf çözüm) (u, v) ikilisi $T > 0$ için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa (8.1) probleminin zayıf çözümü vardır:

$$\begin{aligned} (u, v) &\in L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega)), \\ u_t &\in L^\infty((0, T), L^2(\Omega)) \cap L^{p(\cdot)+1}(\Omega \times (0, T)), \\ v_t &\in L^\infty((0, T), L^2(\Omega)) \cap L^{r(\cdot)+1}(\Omega \times (0, T)). \end{aligned}$$

Ayrıca $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p(\cdot)+1}(\Omega)$, $\psi \in H_0^1(\Omega) \cap L^{r(\cdot)+1}(\Omega)$ fonksiyonları için ve

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad v(\cdot, 0) = v_0, \quad u_t(\cdot, 0) = u_1, \quad v_t(\cdot, 0) = v_1$$

ile $t \in [0, T]$ için (u, v) ikilisi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t \phi + \int_0^t \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi + \int_0^t \int_{\Omega} m_1^2 u \phi + \int_0^t \int_{\Omega} |u_t|^{p(\cdot)-1} u_t \phi &= \int_0^t \int_{\Omega} f_1 \phi, \\ \int_{\Omega} v_t \psi + \int_0^t \int_{\Omega} \nabla v \nabla \psi + \int_0^t \int_{\Omega} m_2^2 v \psi + \int_0^t \int_{\Omega} |v_t|^{r(\cdot)-1} v_t \psi &= \int_0^t \int_{\Omega} f_2 \psi \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar.

Aşağıdaki teoremi Faedo-Galerkin yöntemini kullanarak Antontsev vd. (2021b), Messaoudi vd., (2021) Messaoudi vd. (2022) deki gibi elde edilebilir.

Teorem 8.1.3 (Lokal varlık) $p(\cdot), r(\cdot), q(\cdot) \in C(\overline{\Omega})$ olmak üzere (3.1) koşulunu sağlasın ve $x \in \Omega$ için,

$$\begin{cases} p(x) \geq 0, & n = 1, 2, \\ p(x) = 0, & n = 3, \end{cases} \quad (8.5)$$

$$\begin{cases} r(x) \geq 0, & n = 1, 2, \\ 2 \leq r(x) \leq 6, & n = 3, \end{cases} \quad (8.6)$$

$$\begin{cases} q(x) \geq 2, & n = 1, 2, \\ 2 \leq q(x) \leq 6, & n = 3 \end{cases} \quad (8.7)$$

ve

$$((u_0, u_1), (v_0, v_1)) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

olsun. $T > 0$ için (8.1) probleminin

$$(u, v) \in L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega)),$$

$$u_t \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega)) \cap L^{p(\cdot)+1}(\Omega \times (0, T)),$$

$$v_t \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega)) \cap L^{r(\cdot)+1}(\Omega \times (0, T))$$

uzaylarında zayıf lokal çözümü vardır.

8.2 Çözümün Patlaması

Bu bölümde, ana sonucumuzu kanıtlamak amacıyla (8.1) için enerji fonksiyoneli şu şekilde tanımlıyoruz:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} (m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2) - \int_{\Omega} F(u, v) dx. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Lemma 8.2.1 $E(t)$ enerji fonksiyoneli artmayan bir fonksiyondur.

İspat. (8.1) in ilk denklemini u_t ile çarpıp, sonra Ω bölgesinde integrali alınırsa

$$\int_{\Omega} u_t \left(u_{tt} - \Delta u + m_1^2 u + |u_t|^{p(x)-2} u_t \right) = \int_{\Omega} u_t f_1(u, v) dx$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{\Omega} u_t u_{tt} dx}_{D_1} - \underbrace{\int_{\Omega} u_t \Delta u dx}_{D_2} + \underbrace{m_1^2 \int_{\Omega} u_t u dx}_{D_3} + \underbrace{\int_{\Omega} u_t |u_t|^{p(x)-2} u_t dx}_{D_4} \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} u_t f_1(u, v) dx}_{D_5} \end{aligned} \quad (8.9)$$

yazılabilir. Benzer şekilde (8.1) in ikinci denklemini sırasıyla v_t ile çarpıp, sonra Ω bölgesinde integrali alınsın

$$\int_{\Omega} v_t \left(v_{tt} - \Delta v + m_2^2 v + |v_t|^{r(x)-2} v_t \right) = \int_{\Omega} v_t f_2(u, v) dx$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{\Omega} v_t v_{tt} dx}_{E_1} - \underbrace{\int_{\Omega} v_t \Delta v dx}_{E_2} + \underbrace{m_2^2 \int_{\Omega} v_t v dx}_{E_3} + \underbrace{\int_{\Omega} v_t |v_t|^{r(x)-2} v_t dx}_{E_4} \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} v_t f_2(u, v) dx}_{E_5} \end{aligned} \quad (8.10)$$

yazılabilir. Şimdi her bir terimi ayrı ayrı düzenlenirse:

D_1 terimi

$$\begin{aligned} D_1 &= \int_{\Omega} u_t u_{tt} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde E_1

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v_t|^2 dx$$

dır.

D_2 terimi Green özdeşliğinde

$$\begin{aligned} D_2 &= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde E_2 terimi

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$$

olur.

D_3 terimini düzenlersek

$$\begin{aligned} D_3 &= m_1^2 \int_{\Omega} u u_t dx \\ &= \frac{m_1^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde E_3 terimi

$$E_3 = \frac{m_2^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v|^2 dx$$

olur.

D_4 terimi

$$D_4 = \int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} dx$$

dır. Benzer şekilde E_4 terimi

$$E_4 = \int_{\Omega} |v_t|^{r(x)} dx$$

olur.

D_5 terimi

$$D_5 = \int_{\Omega} u_t f_1(u, v) dx$$

elde edilir. E_5 terim

$$E_5 = \int_{\Omega} v_t f_2(u, v) dx$$

dır. Diğer yandan (8.2) fonksiyonlarını sırasıyla u_t ile v_t çarpılırsa

$$u_t f_1(u, v) = a u_t |u + v|^{2(q(\cdot)+1)} (u + v) + b u_t |u|^{q(\cdot)} u |v|^{q(\cdot)+2}$$

ve

$$v_t f_2(u, v) = a v_t |u + v|^{2(q(\cdot)+1)} (u + v) + b |u|^{q(\cdot)+2} |v|^{q(\cdot)} v$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} u_t f_1(u, v) + v_t f_2(u, v) &= a |u + v|^{2(q(\cdot)+1)+1} (u_t + v_t) + b |uv|^{q(\cdot)+1} (u_t v + u v_t) \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{a}{2(q(\cdot) + 2)} |u + v|^{2(q(\cdot)+1)+1} + \frac{b}{q(\cdot) + 2} |uv|^{q(\cdot)+2} \right] \\ &= \frac{d}{dt} F(u, v) \end{aligned}$$

olur. Düzenlenen bu ifadeler (8.9) ve (8.10)'te yazılarak taraf tarafa toplanır.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) + \frac{1}{2} (m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2) + \int_{\Omega} F(u, v) dx \right] \\ + \int_{\Omega} |u_t|^{p(x)+1} dx + \int_{\Omega} |v_t|^{r(x)+1} dx = 0 \end{aligned}$$

buradan

$$E'(t) = - \int_{\Omega} |u_t|^{p(x)+1} dx - \int_{\Omega} |v_t|^{r(x)+1} dx \leq 0 \quad (8.11)$$

elde edilir.

Lemma 8.2.2 (Messaoudi ve Talahmeh, 2022) Kabul edelim ki (8.5) sağlasın. $u, v \in H_0^1(\Omega)$ ve $2 \leq s \leq 2(q_1 + 2)$ için

$$[\varrho(u) + \varrho(v)]^{\frac{s}{2(q_1+2)}} \leq C [\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \varrho(u) + \varrho(v)], \quad (8.12)$$

$$\|u\|_{2(q_1+2)}^s \leq C [\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \|u_t\|_{2(q_1+2)}^{2(q_1+2)} + \|v_t\|_{2(q_1+2)}^{2(q_1+2)}], \quad (8.13)$$

$$\|v\|_{2(q_1+2)}^s \leq C [\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \|u_t\|_{2(q_1+2)}^{2(q_1+2)} + \|v_t\|_{2(q_1+2)}^{2(p_1+2)}], \quad (8.14)$$

$$\int_{\Omega} |u|^{p(x)+1} dx \leq c_1 \left[(\varrho(u) + \varrho(v))^{\frac{p_1+1}{2(q_1+2)}} + (\varrho(u) + \varrho(v))^{\frac{p_2+1}{2(q_1+2)}} \right], \quad (8.15)$$

$$\int_{\Omega} |u|^{r(x)+1} dx \leq c_2 \left[(\varrho(u) + \varrho(v))^{\frac{r_1+1}{2(q_1+2)}} + (\varrho(u) + \varrho(v))^{\frac{r_2+1}{2(q_1+2)}} \right] \quad (8.16)$$

eşitsizlikler yazılabilir. Burada $C > 1$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ sabitlerdir.

Teorem 8.2.3 Kabul edelim ki (3.1), (8.5), (8.6) ve (8.7) sağlasın. Bu durumda

$$2(q_1 + 1) \geq \max\{p_2 + 1, r_2 + 1\} \quad (8.17)$$

ve

$$E(0) < 0$$

koşulları altında (8.1) problemi sonlu zamanda patlar.

İspat. $H(t) := -E(t)$ olsun. $E(0) < 0$ ve (8.11) dan $H(t) \geq H(0) > 0$ dır. $H(t)$ nin tanımından ve (8.4) ten

$$\begin{aligned} H(t) &= -\frac{1}{2} [\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2] \\ &\quad -\frac{1}{2} [m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2] + \int_{\Omega} F(u, v) dx \\ &\leq \int_{\Omega} F(u, v) dx \\ &\leq c_1 [\varrho(u) + \varrho(v)]. \end{aligned} \quad (8.18)$$

dır. Daha sonra seçilecek ε yeterince küçük olacak şekilde

$$\Psi(t) = H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} (uu_t + vv_t) dx \quad (8.19)$$

tanımlansın ve

$$0 < \alpha \leq \min \left\{ \frac{q_1 + 1}{2(q_1 + 2)}, \frac{2(q_1 + 2) - (p_2 + 1)}{2m_2(q_1 + 2)}, \frac{2(p_1 + 2) - (r_2 + 1)}{2r_2(q_1 + 2)} \right\} \quad (8.20)$$

olsun.

$\Psi(t)$ yi t ye göre türevini alıp (8.1) ve (8.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= (1 - \alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon (\|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2) \\ &\quad - \varepsilon (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) - \varepsilon (m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2) \\ &\quad + 2\varepsilon \int_{\Omega} (q(x) + 2) F(u, v) dx \\ &\quad - \varepsilon \int_{\Omega} u |u_t|^{p(x)-1} u_t dx - \varepsilon \int_{\Omega} v |v_t|^{r(x)-1} v_t dx. \end{aligned} \quad (8.21)$$

elde edilir.

$H(t)$ tanımından

$$\begin{aligned} -\varepsilon q_1 (1 - \xi) H(t) &= \frac{\varepsilon q_1 (1 - \xi)}{2} (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) \\ &\quad + \frac{\varepsilon q_1 (1 - \xi)}{2} (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) \\ &\quad + \frac{\varepsilon q_1 (1 - \xi)}{2} (m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2) \\ &\quad - \varepsilon q_1 (1 - \xi) \int_{\Omega} F(u, v) dx, \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $2 < \eta < 2(q_1 + 2)$. (8.21) sağ tarafına $-\varepsilon q_1(1 - \xi)H(t)$ eklenip çıkartılırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &\geq (1 - \alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon \left(\frac{q_1(1 - \xi)}{2} + 1 \right) (\|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2) \\
&\quad + \varepsilon \left(\frac{q_1(1 - \xi)}{2} - 1 \right) (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) + \varepsilon q_1(1 - \xi)H(t) \\
&\quad + \varepsilon \left(\frac{q_1(1 - \xi)}{2} - 1 \right) [m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2] \\
&\quad + \varepsilon (2(q_1 + 2) - q_1(1 - \xi)) \int_{\Omega} F(u, v) dx \\
&\quad - \varepsilon \int_{\Omega} [u|u_t|^{p(x)-1}u_t + v|v_t|^{r(x)-1}v_t] dx
\end{aligned} \tag{8.22}$$

elde edilir. (8.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &\geq (1 - \alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon \beta [H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2 \\
&\quad + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 + \varrho(u) + \varrho(v)] \\
&\quad - \varepsilon \int_{\Omega} [u|u_t|^{p(x)-1}u_t + v|v_t|^{r(x)-1}v_t] dx
\end{aligned} \tag{8.23}$$

elde edilir. Burada

$$\beta = \min \left\{ q_1(1 - \xi), \frac{q_1(1 - \xi)}{2} + 1, \frac{q_1(1 - \xi)}{2} - 1, c_0(2(q_1 + 2) - q_1(1 - \xi)) \right\} > 0$$

dır. Şimdi de (8.23) ün son terimi Young eşitsizliğinde faydalanarak kestirimde bulunulursa

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} |u| dx &\leq \frac{1}{p_1 + 1} \int_{\Omega} \delta_1^{p(x)+1} |u|^{p(x)+1} dx \\
&\quad + \frac{p_2}{p_1 + 1} \int_{\Omega} \delta_1^{-\frac{p(x)+1}{p(x)}} |u_t|^{p(x)+1} dx
\end{aligned} \tag{8.24}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |v_t|^{r(x)} |v| dx &\leq \frac{1}{r_1 + 1} \int_{\Omega} \delta_2^{r(x)+1} |v|^{r(x)+1} dx \\
&\quad + \frac{r_2}{r_1 + 1} \int_{\Omega} \delta_2^{-\frac{r(x)+1}{r(x)}} |v_t|^{r(x)+1} dx
\end{aligned} \tag{8.25}$$

yazılabilir. Burada daha sonra belirlenecek $\delta_1, \delta_2 > 0$, t den bağımsızdır. δ_1 ve δ_2 yi

$$\delta_1^{-\frac{p(x)+1}{p(x)}} = k_1 H^{-\alpha}(t) \text{ ve } \delta_2^{-\frac{r(x)+1}{r(x)}} = k_2 H^{-\alpha}(t)$$

şekilde seçelim. Burada k_1 ve k_2 daha sonra belirlenecektir. δ_1 ve δ_2 yi sırasıyla (8.24) ve (8.25) te yazılırsa,

$$\int_{\Omega} |u_t|^{p(x)} |u| dx \leq \frac{k_1^{-p_1}}{p_1 + 1} \int_{\Omega} |u|^{p(x)+1} H^{\alpha p(x)}(t) dx + \frac{p_2 k_1}{p_1 + 1} H^{-\alpha}(t) H'(t) \quad (8.26)$$

ve

$$\int_{\Omega} |v_t|^{r(x)} |v| dx \leq \frac{k_2^{-r_1}}{r_1 + 1} \int_{\Omega} |v|^{r(x)+1} H^{\alpha r(x)}(t) dx + \frac{r_2 k_1}{r_1 + 1} H^{-\alpha}(t) H'(t) \quad (8.27)$$

elde edilir. (8.23), (8.26) ve (8.27) den

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &\geq \left[(1 - \alpha) - \varepsilon \frac{p_2 k_1}{p_1 + 1} - \varepsilon \frac{r_2 k_1}{p_1 + 1} \right] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\ &\quad + \varepsilon \beta [H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 \\ &\quad + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 + \varrho(u) + \varrho(v)] \\ &\quad - \frac{\varepsilon k_1^{-p_1}}{p_1 + 1} \int_{\Omega} |u|^{p(x)+1} H^{\alpha p(x)}(t) dx \\ &\quad - \frac{\varepsilon k_2^{-r_1}}{r_1 + 1} \int_{\Omega} |v|^{r(x)+1} H^{\alpha r(x)}(t) dx \end{aligned} \quad (8.28)$$

elde edilir. Şimdi de (8.28) eşitsizliğinin son iki terimi (8.15), (8.16) ve (8.18) den,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} |u|^{p(x)+1} H^{\alpha p(x)}(t) dx \\ &\leq C' \left[(\varrho(u) + \varrho(v))^{\frac{p_1+1}{2(q_1+2)} + \alpha p_2} + (\varrho(u) + \varrho(v))^{\frac{p_2+1}{2(q_2+2)} + \alpha p_2} \right] \end{aligned} \quad (8.29)$$

dır. Lemma 6.1.8 ile

$$s = (p_2 + 1) + 2\alpha p_2 (q_1 + 2) \leq 2(q_1 + 2),$$

ve

$$s = (p_1 + 1) + 2\alpha p_2 (q_1 + 2) \leq 2(q_1 + 2)$$

kullanılırsa (8.29) ifadesi

$$\int_{\Omega} |u|^{p(x)+1} H^{\alpha p(x)}(t) dx \leq C [\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \varrho(u) + \varrho(v)] \quad (8.30)$$

ifadesine dönüşür. Benzer şekilde

$$\int_{\Omega} |v|^{r(x)+1} H^{\alpha r(x)}(t) dx \leq C [\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \varrho(u) + \varrho(v)] \quad (8.31)$$

elde edilir. (8.30), (8.31) ve (8.28) den

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &\geq \left[(1-\alpha) - \varepsilon \frac{p_2 k_1}{p_1+1} - \varepsilon \frac{r_2 k_2}{r_1+1} \right] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\ &\quad + \varepsilon \left(\beta - \frac{k_1^{-p_1}}{p_1+1} C - \frac{k_2^{-r_2}}{r_2+1} C \right) [H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla u\|^2 \\ &\quad + \|\nabla v\|^2 + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 + \varrho(u) + \varrho(v)]\end{aligned}\quad (8.32)$$

elde edilir. k_1, k_2 yeterince büyük olacak şekilde

$$\gamma = \beta - \frac{k_1^{-p_1}}{p_1+1} C - \frac{k_2^{-r_2}}{r_2+1} C > 0$$

seçilsin. Ayrıca yeterince küçük ε için

$$(1-\alpha) - \varepsilon \frac{p_2 k_1}{p_1+1} - \varepsilon \frac{r_2 k_2}{r_1+1} \geq 0$$

ve

$$\Psi(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int_{\Omega} (u_0 u_1 + v_0 v_1) dx + \frac{\varepsilon}{2} [\|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2] > 0$$

ifadeleri kullanılırsa (8.32)

$$\begin{aligned}\Psi'(t) &\geq \gamma \varepsilon [H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \varrho(u) + \varrho(v)] \\ &\geq \gamma \varepsilon [H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla u\|^2 \\ &\quad + \|\nabla v\|^2 + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2]\end{aligned}\quad (8.33)$$

formuna dönüşür. Sonuç olarak $t \geq 0$ için

$$\Psi(t) \geq \Psi(0) > 0$$

olur.

Diğer yandan Hölder eşitsizliğinden ve $L^{2(q_1+2)}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ gömülmesinden

$$\begin{aligned}\left| \int_{\Omega} u u_t dx \right| &\leq \|u\|_2 \|u_t\|_2 \\ &\leq C \|u\|_{2(q_1+2)} \|u_t\|_2,\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da

$$\left| \int_{\Omega} u u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C \|u\|_{2(q_1+2)}^{\frac{1}{1-\alpha}} \|u_t\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

anlamına gelir. Benzer şekilde

$$\left| \int_{\Omega} vv_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C \|v\|_{2(q_1+2)}^{\frac{1}{1-\alpha}} \|v_t\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

yazılabilir. Young eşitsizliğinden ve $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$ koşulu altında

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} uu_t dx + \int_{\Omega} vv_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ & \leq C \left[\|u\|_{2(q_1+2)}^{\frac{\mu}{1-\alpha}} \|u_t\|_2^{\frac{\theta}{1-\alpha}} + \|v\|_{2(q_1+2)}^{\frac{\mu}{1-\alpha}} \|v_t\|_2^{\frac{\theta}{1-\alpha}} \right] \end{aligned} \quad (8.34)$$

dır. (8.29) ile $\frac{\mu}{1-\alpha} = \frac{2}{1-2\alpha} \leq 2(q_1+2)$ elde etmek için $\theta = 2(1-\alpha)$ şeklinde alınsın.

Bu nedenle (8.34) ifadesinden

$$\left| \int_{\Omega} uu_t dx + \int_{\Omega} vv_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C \left[\|u\|_{2(p_1+2)}^s + \|v\|_{2(p_1+2)}^{\frac{\mu}{1-\alpha}} + \|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2 \right]$$

olur. Burada

$$s = \frac{2}{1-2\alpha} \leq 2(q_1+2)$$

dır. (8.13) ve (8.14) kullanırsak $t \geq 0$ için

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} uu_t dx + \int_{\Omega} vv_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ & \leq C \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \varrho(u) + \varrho(v) \right] \end{aligned} \quad (8.35)$$

dır. Böylece, $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ eşitsizliğinden de yararlanarak

$$\begin{aligned} \Psi^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) &= \left[H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_{\Omega} uu_t + vv_t dx \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\leq 2^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[H(t) + \left| \int_{\Omega} uu_t dx + \int_{\Omega} vv_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \right] \\ &\leq C \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \varrho(u) + \varrho(v) \right] \end{aligned} \quad (8.36)$$

olur. (8.33), (8.36) ve ξ pozitif sabit olmak üzere

$$\Psi'(t) \geq \xi \Psi^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) \quad (8.37)$$

dır. (8.37) ün $(0, t)$ aralığında integrali alınırsa

$$\frac{d\Psi}{dt} \geq \xi \Psi^{\frac{1}{1-\alpha}}(t),$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{d\Psi}{\Psi^{\frac{1}{1-\alpha}}(t)} &\geq \int_0^t \xi dt, \\
\left. \frac{\Psi^{-\frac{1}{1-\alpha}+1}(t)}{-\frac{1}{1-\alpha}+1} \right|_0^t &\geq \xi t|_0^t, \\
\Psi^{-\frac{1}{1-\alpha}+1}(t) - \Psi^{-\frac{1}{1-\alpha}+1}(0) &\leq -\frac{\alpha}{1-\alpha} \xi t, \\
\Psi^{-\frac{\sigma}{1-\alpha}}(t) &\leq \Psi^{-\frac{\sigma}{1-\alpha}}(0) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \xi t, \\
\Psi^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t) &\geq \frac{1}{\Psi^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0) - \frac{\xi \alpha t}{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada çözümün sonlu bir T^* zamanında patlar ve

$$T^* \leq \frac{1-\alpha}{\xi \alpha \Psi^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)} \quad (8.38)$$

dır. Böylece ispat tamamlanmıştır.

8.3 Nümerik Sonuçlar

Bu bölüm, Teorem 8.2.3 teki sistemin çözümlerine ilişkin nümerik örneklere ayrılmıştır. Nümerik uygulama, zaman ayrıklaştırması için iki yaklaşıma dayanmaktadır; bunlar esas olarak BDF (Backward Differentiation Formula - Geriye Doğru Farklılaşma Formülü) ve Genelleştirilmiş- α (GA) yöntemleridir. Ayrıca uzay ayrıklaştırması için P1-sonlu elemanlar yöntemi uygulanmıştır. Zaman-Bağımlı çözümler için basit bir giriş COMSOL Multiphysics Referans Kılavuzunda da bulunabilir. Bu çalışmadaki tüm nümerik gösterimler COMSOL Multiphysics yazılımı ile gerçekleştirilmiştir.

8.3.1 Mesh alanı ve nümerik uygulama sistemi

Parametreleri $a = 1$, $b = 1$ olan ve başlangıç sınır koşullarının sağlandığı iki boyutlu eliptik bir alandaki

$$\Omega = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{4} + y^2 < 1 \right\}$$

bölgesini alalım. Başlangıç fonksiyonları

$$u_0(x, y) = 3 \left(1 - \frac{x^2}{4} + y^2 \right), \quad v_0(x, y) = 2 \left(1 - \frac{x^2}{4} + y^2 \right)$$

ve

$$u_1(x, y) = 0, \quad v_1(x, y) = 0$$

olsun. Üstel fonksiyonlar Teorem 8.1.3 te verilen koşulları sağlayacak şekilde $p(x, y) = 2$, $q(x, y) = 2$ ve $r(x, y) = 2$ olsun. Sonra Δt zaman adımı, n iterasyon sayısı olmak üzere zaman aralığı $t_n = n\Delta t$, $n = 1, 2, \dots, N + 1$ olacak şekilde $[0, T]$ yi N eş alt aralığa $[t_n, t_{n+1}]$ böleriz. $t = t_n$ anındaki yaklaşık çözümler $U^n(x, y)$ ve $V^n(x, y)$ olsun. $U_t^n(x, y)$ ve $U_{tt}^n(x, y)$ zamana bağlı türevler için geriye doğru fark formülü

$$U_t^n(x, y) = \frac{U^n(x, y) - U^{n-1}(x, y)}{\Delta t}$$

ve merkezi fark formülü

$$U_{tt}^n(x, y) = \frac{U^{n+1}(x, y) - 2U^n(x, y) + U^{n-1}(x, y)}{\Delta t^2}$$

kullanarak ayrıklaştırılmış sistem

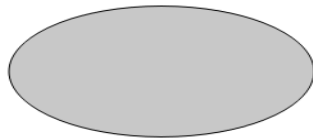
$$\begin{cases} -\Delta W^{n+1} + \mu W^{n+1} = F, & \Omega, \\ W^{n+1} = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

şeklini alır. Burada

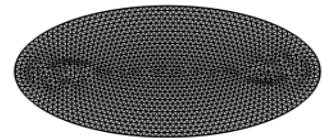
$$\begin{aligned} W^{n+1} &= [U^{n+1}, V^{n+1}]^T, \\ \Delta W^{n+1} &= [\Delta U^{n+1}, \Delta V^{n+1}]^T, \\ \mu &= \frac{1}{\Delta t^2} \end{aligned}$$

dır. Bağlı sistemi doğrusal sonlu elemanlar kullanarak aşağıdaki şekilde çözeriz:

1. Zaman adımı $\Delta t = 10^{-4}$, sonlu zamanlı patlama davranışını elde etmek için yeterince küçüktür.
2. Şekil 8.1 deki gibi Ω üçgenlemesi 3160 sayıda üçgenle 12890 serbestlik derecesinden oluşur.



(a) Ω bölgesi



(b) Ω bölgesinin üçgensel bölge

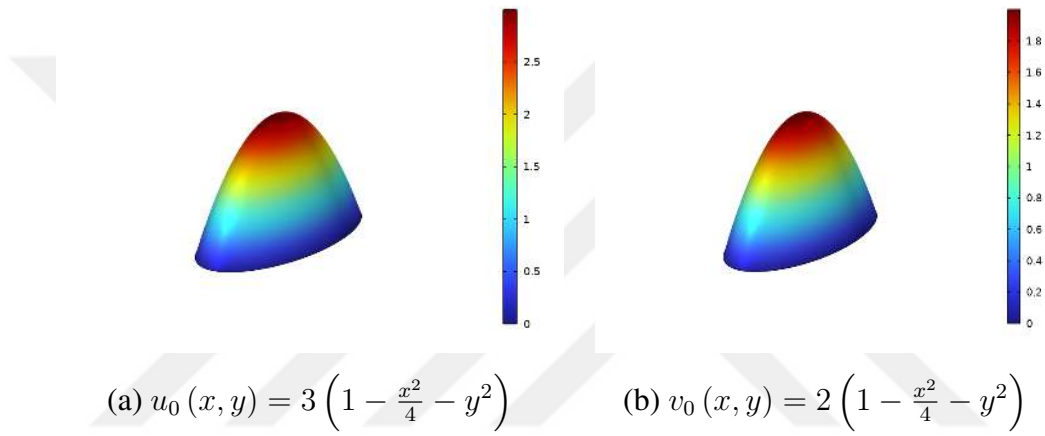
Şekil 8.1: Yüzey bölgesi

8.3.2 Geriye doğru farklılaşma formülü (BDF) ile çözümler

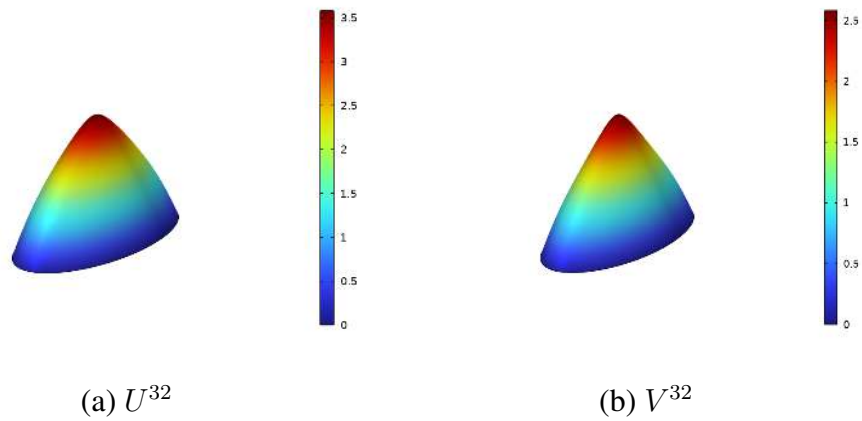
BDF yöntemi, geriye doğru farklılaşma formülleri kullanan zamana bağlı bir çözücüdür.

Bu bölümdeki nümerik yöntem, zaman içinde BDF yöntemine ve uzayda P1-sonlu elemanlar yöntemine dayanmaktadır. Nümerik testlerin uygulanması, sistemin çözümlerinin sonlu bir zamanda patladığını göstermektedir.

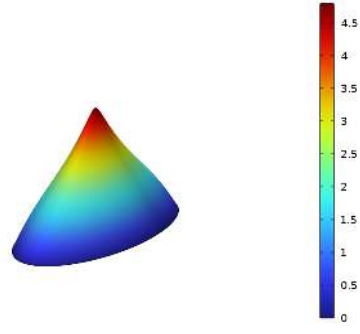
Şekil 8.2, başlangıç verileri u_0 ve v_0 gösterir. Şekil 8.3, Şekil 8.4, Şekil 8.5 ve Şekil 8.6 sırasıyla $n = 32, 46, 53$ ve 55 iterasyondaki nümerik çözümleri gösterir. Şekil 8.7 da yani $n = 56$ da (veya $t = 0.0056$ zamanında) sayısal çözümün patladığı görülebilir.



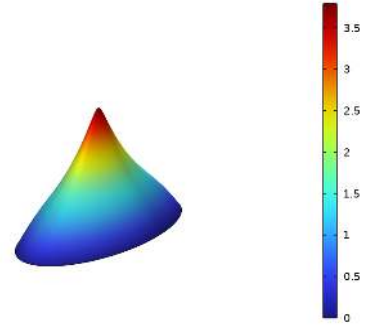
Şekil 8.2: $t = 0$ başlangıç zamanı



Şekil 8.3: $t = 0.0032$ anındaki nümerik çözümleri

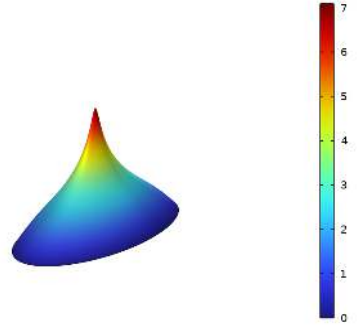


(a) U^{46}

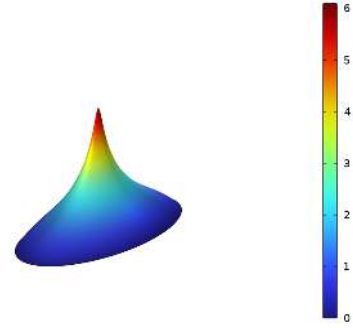


(b) V^{46}

Şekil 8.4: $t = 0.0046$ anındaki nümerik çözümleri

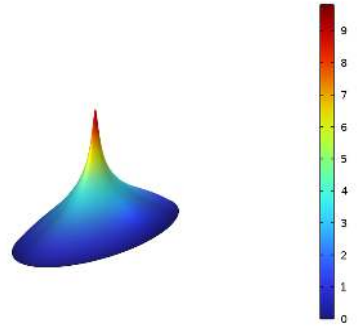


(a) U^{53}

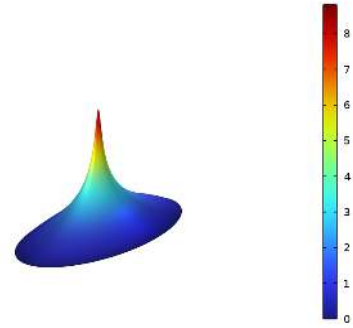


(b) V^{53}

Şekil 8.5: $t = 0.0053$ anındaki nümerik çözümleri

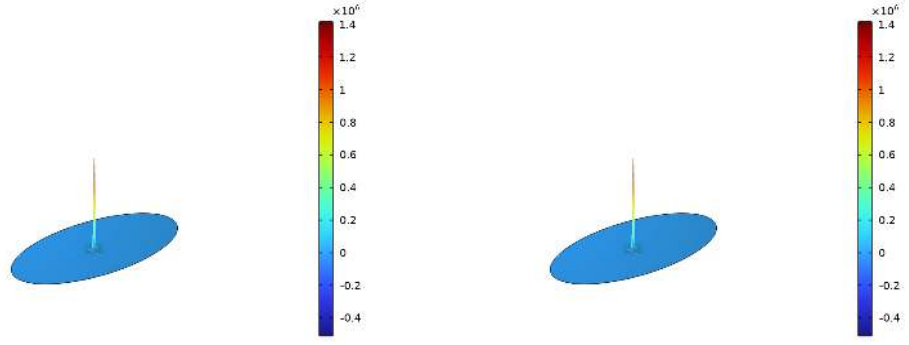


(a) U^{55}



(b) V^{55}

Şekil 8.6: $t = 0.0055$ anındaki nümerik çözümleri



(a) U^{56}

(b) V^{56}

Şekil 8.7: $t = 0.0056$ anındaki nümerik çözümü-Patlama zamanı

8.3.3 Genelleştirilmiş- α (GA) çözücü ile çözümler

Genelleştirilmiş- α yöntemi de zaman bağımlı bir çözücüdür. α parametresi, yüksek frekansların sönümlenme derecesini kontrol eden terimdir. Nümerik testleri, GA yöntemi zaman içinde ve P1-sonlu eleman yöntemini uzayda ele alarak tekrarlıyoruz. Patlama zamanı öncesi ve patlama zamanı için GA yöntemi ve BDF yöntemiyle elde edilen şekiller neredeyse aynı olduğundan, sadece BDF çözücüsü için sayısal çizimleri gösteriyoruz. Nümerik çözümün patlama zamanı GA yönteminde $t = 0.0062$ de gerçekleşirken, BDF yönteminde ise $t = 0.0056$ da gerçekleşir. Diğer bir deyişle, BDF yöntemi patlama davranışını GA yönteminden daha hızlı yakalamaktadır.

8.3.4 Sistemin enerjisi

Bu bölümde nümerik çözümler ile (8.1) sistemin enerjisi arasındaki ilişkiyi inceliyoruz. Daha özel olarak,

$$E(t) = \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) + \frac{1}{2} (m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2) - \int_{\Omega} F(u, v) dx$$

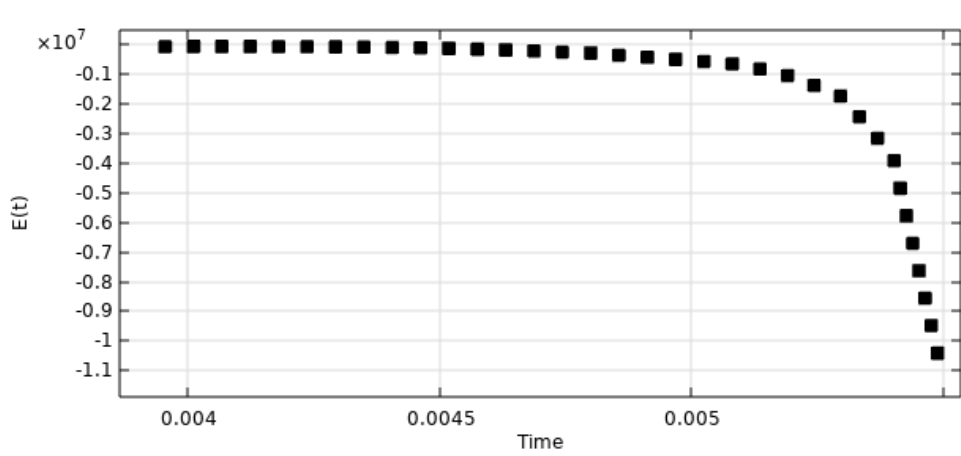
şeklinde tanımlanan enerji fonksiyonu $E(t)$ nin patlama zamanında ve patlamadan önce davranışını sayısal yaklaşımlarla gözlemliyoruz. Tablo 8.1 de nümerik çözümlerin sonsuz normları ve sistemin enerjisi, $n = 1, 32, 46, 53, 55$ iterasyon zamanlarında ve son olarak patlamanın gerçekleştiği $n = 56$ da listelenmiştir. İterasyon zamanları nümerik sonuçlara göre seçilmiştir. Başlangıç enerjisinin negatif olduğunu, yani $E(t) = -34249.9$ dur.

t_n	$\ U\ _\infty$	$\ V\ _\infty$	$E(t)$
0.0001	2.00	3.00	-34249.9
0.0032	2.58	3.58	-39458.4
0.0046	3.85	4.85	-1.5428E+5
0.0053	6.23	7.23	-1.134E+6
0.0055	18.02	19.03	-1.5428E+7
0.0056	1.4E+6	1.4E+6	-1.5428E+47

Tablo 8.1: $\|U\|_\infty$, $\|V\|_\infty$ ve $E(t)$ değerlerinin zamanla değişimi.

Patlama gerçekleşmeden önce enerjinin ilk iterasyonlarda yavaşça azaldığını; daha sonra $t = 0.0032$ zamanından sonra daha hızlı azaldığını gözlemliyoruz. Bu süreç patlama zamanı $t = 0.0056$ olana kadar devam eder.

Bu özellik, patlamadan önceki zamana ve patlama anına göre enerjinin grafiğinin gösterildiği Şekil 8.8 de de görülebilir. Patlama süresi boyunca sistemin enerjisini gözlemlemek için zaman aralığını $t = 0,0040$ ile $t = 0,0056$ arasında sınırladık. $t = 0,0050$ den sonra $t = 0,0056$ ya kadar keskin bir düşüş gözlemlendi. Yani Tablo 8.1 ve Şekil 8.8 e göre, patlama süresinden hemen önce ve patlama süresi boyunca enerjide keskin bir düşüş gözlemlendi. Başka bir deyişle, 0,0056 lık patlama süresinde bir enerji patlaması meydana geldi. Dolayısıyla, Şekil 8.3, Şekil 8.4, Şekil 8.5, Şekil 8.6 ve Şekil 8.7 da gösterilen nümerik sonuçlarla Tablo 8.1 deki sonuçlar, Teorem 6.1.9 un patlama sonucuyla uyumludur.



Şekil 8.8: $n = 0$ ile $n = 56$ arasındaki iterasyonlarda enerji

8.3.5 Teorik ve nümerik patlama zamanını karşılaştıran bir örnek

Teorem 8.2.3 ün bir sonucu olarak, çözümün sonlu bir zaman T^* da patladığını kanıtladık; burada bu ilişki için bir üst sınır

$$T^* \leq \frac{1 - \sigma}{\xi \sigma \Psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}.$$

Burada σ , (7.2.13) eşitsizliğini sağlar, ξ küçük pozitif bir sabittir ve Ψ şu şekilde tanımlanır:

$$\Psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0) = H^\alpha(0) = (-E(0))^\alpha$$

burada, $E(0)$ başlangıç enerjisidir.

Öte yandan, BDF ve GA yöntemlerine dayalı olarak çözümün belirli koşullar ve başlangıç verileri altında sırasıyla $t = 0,0056$ ve $t = 0,0062$ sonlu bir zamanda patladığını sayısal olarak gösterdik. Nümerik patlama süresinin teorik olarak da karşılandığını doğrulayabiliriz.

(8.20) ye uygun olarak $\sigma = 0.3125$ ve $\xi = 14.9$ seçilsin. Bu değerler (8.38) de yerine yazılırsa, T^* için üst sınırın 0.0056 olduğu; yani $T^* \leq 0.0056$ olduğu sonucu çıkar. Benzer şekilde, (8.20) yi sağlayacak şekilde $\xi = 13.43$ ile $\alpha = 0.3125$ alındığında, (8.20) eşitsizliği T^* için bir üst sınır olarak nümerik patlama süresi $0,0062$ ile sonuçlanır; yani $T^* \leq 0.0062$ dır. Bu nedenle BDF ve GA yöntemlerinin patlama sürelerini hem teorik hem de nümerik olarak elde ettik, bu da nümerik sonuçların Teorem 8.2.3 ün teorik sonuçlarıyla tutarlı olduğu anlamına gelir.

9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Değişken üslü Lebesgue uzayları, ilk kez Orlicz'in 1931'deki makalesinde literatüre girmiştir. Bu alandaki bir diğer büyük adım, 1990'ların başında Kováčik ve Rákosník tarafından atılmıştır. Onların çalışması, $L^{p(\cdot)}$ ve Sobolev uzaylarının temel özelliklerini ortaya koymuş ve sonraki yıllarda birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Değişken üslü uzaylarla ilgili problemler, elektro-reolojik sıvılar, sıcaklığa bağlı viskoziteli akışkanlar, gözenekli ortamlardaki filtreleme işlemleri, görüntü işleme ve termoreolojik akışkanlar gibi birçok modern fizik ve mühendislik modeliyle ilişkilidir. Bu bağlamda, değişken üslü denklemler matematik literatüründe giderek daha fazla önem kazanmaktadır.

Dördüncü bölümde,

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u_t + |u_t|^{p(x)-2} u_t = |u|^{q(x)-2} u \quad (4.1)$$

değişken üslü doğrusal olmayan Petrovsky denklemi için çözümlerin varlığı ve patlaması kanıtlandı.

Beşinci bölümde,

$$u_{tt} + \mathcal{M} \left(\left\| \mathcal{P}^{\frac{1}{2}} u \right\|^2 \right) \mathcal{P} u + |u_t|^{p(x)-2} u_t = |u|^{q(x)-2} u \ln u \quad (5.1)$$

değişken üslü logaritmik yüksek mertebeli Kirchhoff tipi denklemin çözümlerinin patlaması kanıtlandı.

Tezin altıncı bölümünde

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s) \Delta^2 u(s) ds + \mu u_t = |u|^{q(x)-2} u \quad (6.1)$$

viskoelastik denklemin pozitif başlangıç enerjisi için çözümlerinin patlaması kanıtlandı.

Tezin yedinci bölümünde

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_m u + u + \mu_1 u_t |u_t|^{p(\cdot)-2} + \mu_2 u_t(x, t - \tau) |u_t|^{p(\cdot)-2}(x, t - \tau) \\ = u |u|^{q(\cdot)-2} \ln |u|^k \end{aligned} \quad (7.1)$$

değişken üslü logaritmik kaynak terimli m -Laplacian denkleminin çözümlerinin global varlığı ve enerji azalması incelendi.

Sekizinci bölümde, :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m_1^2 u + |u_t|^{p(x)-1} u_t = f_1(u, v), \\ v_{tt} - \Delta v + m_2^2 v + |v_t|^{r(x)-1} v_t = f_2(u, v) \end{cases} \quad (8.1)$$

değişken üslü Klein-Gordon denklem sistemi için çözümlerinin patlaması kanıtlanıp nümerik sonuçları gösterildi.

Elde edilen sonuçlarımız daha farklı koşullar altında çalışılabilir. Ayrıca (4.1), (5.1) ve (6.1) problemlerinin çözümlerinin enerji azalması çalışılabilir. (7.1) probleminin patlaması ve (8.1) probleminin de enerji azalmasına çalışılabilir.



KAYNAKLAR

- Adams, R.A. ve Fournier, J.J.F. (2003). *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York.
- Al-Mahdi, A. M., Al-Gharabli, M. M., Noor, M., Audu, J. D. (2023). Stability results for a weakly dissipative viscoelastic equation with variable-exponent nonlinearity: Theory and numerics. *Mathematical and Computational Applications*, 28(1)5. <https://doi.org/10.3390/mca28010005>
- Antontsev, S. N., Ferreira, J., Pişkin, E., Cordeiro, S. M. S. (2021a). Existence and non-existence of solutions for Timoshenko-type equations with variable exponents. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (61),103341. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2021.103341>
- Antontsev, S., Ferreira, J., Pişkin, E. (2021b). Existence and blow up of solutions for a strongly damped Petrovsky equation with variable-exponent nonlinearities. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2021(2021)84, 1-18. <https://doi.org/10.58997/ejde.2021.91>
- Antontsev, S., ve Shmarev, S. (2015). *Evolution PDEs with nonstandard growth conditions*. Atlantis Studies in Differential Equations. Atlantis Press.
- Aubin, J. P. (1963). Un théorème de compacite. *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, Juin, 256:5042-5044.
- Batle, J., Ooi, C. R., Farouk, A., Alkhambashi, M. S., Abdalla, S. (2016). Global versus local quantum correlations in the Grover search algorithm. *Quantum Information Processing*, 15(2), 833-849. <https://doi.org/10.1007/s11128-015-1174-y>.
- Bialynicki-Birula, I. ve Mycielski, J. (1975) Uncertainty Relations for Information Entropy in Wave Mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, (44)129-132. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01608825>.
- Bouhoufani, O., Hamchi, I., Talahmeh, A. A. (2020). Coupled system of nonlinear hyperbolic equations with variable-exponents: Global existence and stability. *Mediterr. J. Math.*, 17, 1-15. <https://doi.org/10.1007/s00009-020-01648-7>
- Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer.
- Cazenave, T., Haraux, A. (1980) Equations d'évolution avec non linéarité logarithmique, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* 5 (2) 21-51.
- Chen, Y., Levine, S., Rao, M. (2006). Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 66(4), 1383-1406. <https://doi.org/10.1137/050624522>.
- Chung, J., ve Hulbert, G. M. (1993). A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method. *ASME. J. Appl. Mech.* 60(2): 371-375. <https://doi.org/10.1115/1.2900803>

- Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P., Růžicka, M. (2017). *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*. Springer.
- Diening, L., Růžicka, M. (2003). Calderón-Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ and problems related to fluid dynamics, *J. reine angew. Math.* 563(2003), 197-220. <https://doi.org/10.1515/crll.2003.081>.
- Dinç, Y., Pişkin, E., Tunç, P. (2023). Upper bounds for the blow up time for the Kirchhoff-type equation. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 72(2), 352-362. <https://doi.org/10.31801/cfsuasmas.1146782>.
- Kafini, M. (2024). Different aspects of blow-up property for a nonlinear wave equation. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 100879. <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2024.100879>
- Kafini M., Messaoudi S. A. (2016). A blow-up result in a nonlinear wave equation with delay, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(1) (2016) 237-247. <https://doi.org/10.1007/s00009-014-0500-4>.
- Kafini, M., Messaoudi, S.A. (2019). On the decay and global nonexistence of solutions to a damped wave equation with variable-exponent nonlinearity and delay. In *Annales Polonici Mathematici*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk(122)49-70. <https://doi.org/10.4064/ap180524-31-10>.
- Kafini, M. ve Noor, M. (2023). Delayed wave equation with logarithmic variable-exponent nonlinearity. *ERA*, 31(5), 2974-2993. doi: 10.3934/era.2023150
- Kaya, M. ve Dinlemez Kantar, Ü. (2018). *Sobolev Uzayları ve Eliptik Sınır Değer Problemlerine Giriş*, Palme Yayınevi.
- Kelley, W. ve G., Peterson, A. C. (2010). *The theory of differential equations* (2nd ed.). Springer.
- Kesavan, S. (1989). *Topics in Functional Analysis and Applications*, Wiley.
- Komornik, V. (1994). *Exact controllability and stabilization: The multiplier method. Paris: Masson-John Wiley.*
- Korpusov, M. O. (2012). Blowup of a positive-energy solution of model wave equations in nonlinear dynamics. *Theoretical and Mathematical Physics*, (171)421-434. <https://doi.org/10.1007/s11232-012-0041-6>.
- Le, N. C., Le, T. X., Nguyen, Y. V. (2023). Exponential decay and blow-up results for a viscoelastic equation with variable sources. *Applicable Analysis*, 102(3)782-799. <https://doi.org/10.1080/00036811.2021.1965581>.
- Liao, M., Li, Q. (2023). Blow-up of solutions to the Fourth-Order equation with variable-exponent nonlinear weak damping. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 20(3), 179. <https://doi.org/10.1007/s11425-021-1926-x>.
- Lions, J. L. (1969). *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires. Paris: Dunod.*

- Messaoudi, S. A., Bouhoufani, O., Ilhem, H., Alahyane, M. (2021). Existence and blow up in a system of wave equations with nonstandard nonlinearities. *Electronic Journal of Differential Equations*, (91)1-33. <https://doi.org/10.58997/ejde.2021.91>.
- Messaoudi, S. A. ve Talahmeh, A. A. (2017). A blow-up result for a nonlinear wave equation with variable-exponent nonlinearities. *Applicable Analysis*, 96(9)1509-1515. <https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1276170>.
- Messaoudi, S. A., ve Talahmeh, A. A. (2022). Blow up of negative initial-energy solutions of a system of nonlinear wave equations with variable-exponent nonlinearities. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series S*, 15(5). <https://doi.org/10.3934/dcdss.2021107>.
- Messaoudi, S. A., Talahmeh, A. A., Al-Gharabli, M. M., Alahyane, M. (2022). On the existence and stability of a nonlinear wave system with variable exponents. *Asymptotic Analysis*, 128(2), 211-238. <https://doi.org/10.3233/ASY-211704>.
- Messaoudi, S., Al-Gharabli, M., Al-Mahdi, A. (2023a). On the existence and decay of a viscoelastic system with variable-exponent nonlinearity. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series S*, 16(6). <https://doi.org/10.3934/dcdss.2022183>.
- Messaoudi, S. A., Al-Gharabli, M. M., Al-Mahdi, A. M., Al-Osta, M. A. (2023b). A coupled system of Laplacian and bi-Laplacian equations with nonlinear dampings and source terms of variable-exponents nonlinearities: existence, uniqueness, blow-up and a large-time asymptotic behavior. *AIMS Math*, 8(4), 7933-7966. <https://doi.org/10.3934/math.2023400>.
- Messaoudi, S. A., Talahmeh, A. A., Al-Smail, J. H. (2017). Nonlinear damped wave equation: Existence and blow-up. *Computers & Mathematics with Applications*, 74(12), 3024-3041. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.07.048>.
- Nicaise S., ve Pignotti C. (2006) Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks. *SIAM J. Control Optim.* 4(5)(2006)1561-1585. <https://doi.org/10.1137/060648891>.
- Ouaoua, A., ve Boughamsa, W. (2023). Well-posedness and stability results for a class of nonlinear fourth-order wave equation with variable-exponents. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 14(1), 1769-1785. <https://doi.org/10.22075/ijnaa.2022.27129.3507>
- Park, S. H. (2021). Blow-up of solutions for wave equations with strong damping and variable-exponent nonlinearity. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 58(3)633-642. <https://doi.org/10.4134/JKMS.j200202>
- Pepper, D. W. ve Heinrich, J. C. (2017). The finite element method: basic concepts and applications with MATLAB, MAPLE, and COMSOL. CRC press. <https://doi.org/10.1201/9781315395104>
- Pişkin, E. (2019). Global nonexistence of solutions for a nonlinear Klein-Gordon equation with variable exponents. *Applied Mathematics Notes*, 19, 315-323.

- Pişkin, E. (2020). Finite time blow up of solutions of the Kirchhoff-type equation with variable exponents. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 11(1), 37-45. <https://doi.org/10.22075/ijnaa.2019.16022.1841>.
- Pişkin, E. (2017). *Sobolev uzayları*. Seçkin Yayınları.
- Pişkin, E. (2022). Çözümlü Yüksek Matematik Problemleri (Analiz 1-2). Pegem Akademi Yayıncılık.
- Pişkin, E. and Okutmuşur, B. (2021). *An introduction to Sobolev spaces*. Bentham Science.
- Pişkin E. ve Yılmaz N., (2022a). Blow up of solutions for a system of strongly damped Petrovsky equations with variable exponents. *Acta Universitatis Apulensis*, (71)87-99. <https://doi.org/10.17114/j.aau.2022.71.06>.
- Pişkin E. ve Yılmaz N., (2022b). Nonexistence of global solutions for a system of Kirchhoff-type equations with variable exponents. *The Aligarh Bulletin of Mathematics*, 41(2)103-116.
- Rahmoune, A. (2022). Logarithmic wave equation involving variable-exponent nonlinearities: Well-posedness and blow-up. *WSEAS Transactions on Mathematics*, (2)825-837. <https://doi.org/10.37394/23206.2022.21.94>.
- Růžicka, M. (2000). *Electrorheological fluids: Modeling and mathematical theory*. Springer Science & Business Media.
- Segal, I. E. (1965). Nonlinear partial differential equations in quantum field theory. *Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics*, (17)210-226.
- Shahrouzi, M. (2018). On behaviour of solutions for a nonlinear viscoelastic equation with variable-exponent nonlinearities. *Computers & Mathematics with Applications*, 75(11),3946-3956. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.03.005>.
- Sobolev, S.L. (1991). *Some Applications of functional analysis in mathematical physics*, American Mathematical Society.
- Tebba, Z., Boulaaras, S., Degaichia, H., Allahem, A. (2020). Existence and blow-up of a new class of nonlinear damped wave equation. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 38(3), 2649-2660. <https://doi.org/10.3233/JIFS-179551>.
- Yılmaz, N. ve Pişkin, E. (2024a). Asymptotic behaviour for solutions of a nonlinear $p(x)$ -triharmonic hyperbolic type equation. *JMSCM*, (5)2(2024), 147-158. <https://doi.org/10.15864/jmscm.5203>.
- Yılmaz, N. ve Pişkin, E. (2024b). Global existence and decay of solutions for a delayed m -Laplacian equation with logarithmic term in variable-exponent Sobolev spaces, *Filomat*, 38(23)8157-8168. <https://doi.org/10.2298/FIL2423157Y>.
- Yılmaz, N. ve Pişkin, E. (2024c). Blow up of solutions for a logarithmic Petrovsky equation with variable exponent. *Palestine Journal of Mathematics*, 13(4)(2024)948–954.

- Yılmaz, N. ve Pişkin, E. (Baskıda). Blow up of solutions for the logarithmic higher-order Kirchhoff-type equation with variable exponent. *Journal of Nepal Mathematical Society*.
- Yılmaz, N., Gözen, S. M., Pişkin, E., Okutmustur, B. (2023b). A blow up of solutions for a system of Klein-Gordon equations with variable exponent: theoretical and numerical results. *Mathematica Applicanda*, 51(2)143-164. <https://doi.org/10.14708/ma.v51i2.7225>.
- Yılmaz, N., Pişkin, E., Boulaaras, S. (2024). Viscoelastic plate equation with variable exponents: existence and blow-up. *The Journal of Analysis*, 1-26. <https://doi.org/10.1007/s41478-024-00765-w>.
- Yılmaz, N., Pişkin, E., Çelik, E. (2023a). Well-Posedness and Blow-Up of Solutions for a Variable Exponent Nonlinear Petrovsky Equation. *Advances in Mathematical Physics*, 2023(1)8866861. <https://doi.org/10.1155/2023/8866861>.
- Yüksekkaya, H., Pişkin, E. (2022). Blow-up and decay of solutions for a delayed Timoshenko equation with variable-exponents. *Miskolc Mathematical Notes*, 23(2)1001-1022. <https://doi.org/10.18514/MMN.2022.3890>.
- Zhang, Z., Liu, Z., and Gan, X. (2013). Global existence and general decay for a nonlinear viscoelastic equation with nonlinear localized damping and velocity-dependent material density. *Applicable Analysis*, 92(10) 2021-2048. <https://doi.org/10.1080/00036811.2012.716509>.
- Zheng S., *Nonlinear evolution equations*, Chapman and Hall/CRC, Florida, 2004.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad

YILMAZ, Nebi

Web sayfası

(Research Gate, Academia, vs.)

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Dicle Üniversitesi	2019
Lisans	Dicle Üniversitesi	2005
Lise	Akçadağ Anadolu Öğretmen Lisesi	1999

İş Denevimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2005-2015	Özel Kurumlar	Öğretmen
2015-	MEB	Öğretmen

Yabancı Dil

Yayınlar

1. Pişkin, E., & Yılmaz, N. (2022). Blow up of solutions for a system of strongly damped Petrovsky equations with variable exponents. Acta Universitatis Apulensis, 71, 87-99.
2. Pişkin, E., & Yılmaz, N. (2022). Nonexistence of global solutions for a system of Kirchhoff-type equations with variable exponents. The Aligarh Bulletin of Mathematics, 41(2), 103-116.
3. Yılmaz, N., Gözen, S. M., Pişkin, E., & Okutmustur, B. (2023). A blow up of solutions for a system of Klein-Gordon equations with variable exponent: Theoretical and numerical results. Mathematica Applicanda, 51(2), 143-164.

4. Yılmaz, N., Pişkin, E., & Çelik, E. (2023). Well-Posedness and Blow-Up of Solutions for a Variable Exponent Nonlinear Petrovsky Equation. *Advances in Mathematical Physics*, 2023(1), 8866861. (SCI)
5. Yılmaz, N., Pişkin, E . (2024). Asymptotic Behaviour for Solutions of a Nonlinear $p(x)$ -Triharmonic Hyperbolic Type Equation. *JMSCM*, 2024(5)2,147-158.
6. Yılmaz, N., Pişkin, E., & Boulaaras, S. (2024). Viscoelastic plate equation with variable exponents: existence and blow-up. *The Journal of Analysis*, (2024)1-26.
7. Yılmaz, N., Pişkin, E . (2024). Global existence and decay of solutions for a delayed m -Laplacian equation with logarithmic term in variable-exponent Sobolev spaces, *Filomat* 38(23) (2024) (Baskıda)(SCI).
8. Yılmaz, N. ve Pişkin, E. (Baskıda). Blow up of solutions for the logarithmic higher-order Kirchhoff-type equation with variable exponent. *Journal of Nepal Mathematical Society*.

Özel İlgiler

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Nebi YILMAZ		
Öğrenci No	20804503		
Ana Bilim Dalı	Matematik		
Program Türü	Proje ☐	Yüksek Lisans ☐	Doktora ☐
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Prof. Dr. Erhan PİŞKİN		
(Varsa) II. Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)			
Tez Başlığı	Değişken Üslü Sobolev Uzaylarında Hiperbolik Tipten Denklemlerin Çözümlerinin Analizi		
RAPOR BİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	117		
Raporlama Tarihi	24.12.2024		
Benzerlik Oranı (%)	%13		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 117 sayfalık kısmına ilişkin, 24/12/2024 tarihinde tez danışmanım tarafından Turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 13 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç
☐Kaynaklar hariç
☐Alıntılar hariç/dâhil
☐Diğer (Açıklayınız)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Tez benzerlik oranı üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrenci : Nebi YILMAZ

Tarih: 24.12.2024

İmza:

Danışman : Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

İmza:

Tarih:

ABD Başkanı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY

İmza:

Tarih: 24.12.2024