

**DEĞİŞKEN ÜSLÜ SOBOLEV UZAYLARINDA PARABOLİK
TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ**

GÜLİSTAN BUTAKIN

MART 2025

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DEĞİŞKEN ÜSLÜ SOBOLEV UZAYLARINDA PARABOLİK
TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ**

GÜLİSTAN BUTAKIN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
DOKTORA TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

MART 2025

DIYARBAKIR

DEĞİŞKEN ÜSLÜ SOBOLEV UZAYLARINDA PARABOLİK TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ

Gülistan BUTAKIN tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, Fen Bilimleri Enstitüsü

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Danışman, Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Sınav Jürisi:

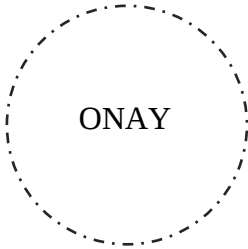
Prof. Dr. Osman Raşit IŞIK (*)
Matematik Bölümü, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN (**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY
Matematik Bölümü, Kafkas Üniversitesi

Prof. Dr. Zehra YÜCEDAĞ
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Işık Yeşim ERDAMAR
Fizik Bölümü, Dicle Üniversitesi



Savunma Tarihi: 20/03/ 2025

(*) Jüri Başkanı.

(**) Tez Danışmanı.



Canım Aileme...

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Gülistan BUTAKIN

İmza:

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında ve tamamlanmasında katkı ve desteklerinden dolayı birçok kişiye minnettarım. Öncelikle, tez danışmanım Prof. Dr. Erhan PİŞKİN'e, çalışmam süresince bana yol gösterdiği, bilgi ve deneyimlerini paylaştığı, sabrı ve anlayışı için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında yanımda olan, beni destekleyen ve motive eden canım eşim Ulvi Yusuf BUTAKIN'a ve sevgili çocuklarım Beyza ile Ömer Asaf'a yürekten teşekkür ediyorum. Onların varlığı ve sevgisi, bu zorlu süreçte en büyük güç kaynağım oldu.

Ayrıca, bana her zaman inanan, destek olan ve sevgileriyle dualarını hiç eksik etmeyen canım annelerime ve babalarımın gönülden teşekkür ediyorum. Onların manevi desteği ve fedakarlıkları olmasaydı, bu süreci tamamlamak çok daha zor olurdu.

Bu çalışma, yalnızca benim çabamın değil, bana inanan ve destek olan herkesin emeğinin bir ürünü. Destekleriyle bu süreci benim için daha anlamlı ve değerli kılan tüm sevdiklerime sonsuz teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	viii
ÖZET.....	ix
ABSTRACT.....	x
1. GİRİŞ	1
1.1 Isı Denkleminin Elde Edilişi	4
1.2 Değişken Üslü Sobolev Uzayların Tarihçesi.....	5
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	7
2.1 Kirchhoff Terimli Denklem.....	10
2.2 Biharmonik Terimli Denklem	10
2.3 Logaritmik Terimli Denklem	11
2.4 Viskoelastik Terimli Denklem	11
3. ÖN BİLGİLER.....	12
3.1 Yakınsaklık.....	12
3.2 Lebesgue Uzayı	14
3.3 Sobolev Uzayı	15
3.4 Bazı Temel Eşitlik, Eşitsizlik ve Teoremler.....	16
3.5 Değişken Üslü Uzaylar.....	18
3.6 Çözümlerin Varlığı ile İlgili Bazı Lemmalar	23
3.7 Çözümlerin Azalması ile İlgili Lemma	26
3.8 Çözümlerin Patlaması ile İlgili Lemma.....	27
4. DEĞİŞKEN ÜSLÜ $m(x)$ -BİHARMONİK DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE PATLAMASI	28
4.1 Zamana Bağlı Türev İçermeyen Problem.....	29
4.2 Evolüsyon Problem	40

5. DEĞİŞKEN ÜSLÜ PARABOLİK TİPTEN KİRCHHOFF DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE AZALMASI.....	55
5.1 Çözümlerin Global Varlığı.....	55
5.2 Çözümlerin Azalması	62
6. DEĞİŞKEN ÜSLÜ DOĞRUSAL OLMAYAN LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ BİR PARABOLİK DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI VE PATLAMASI.....	67
6.1 Giriş	68
6.2 Global Varlık ve Patlama	69
7. LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ VİSKOELASTİK $m(x)$ -BİHARMONİK DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE PATLAMASI.....	81
7.1 Giriş	82
7.2 Zayıf Çözümler.....	83
7.3 Patlama Zamanı İçin Üst Sınır	90
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	94
KAYNAKLAR	95
ÖZGEÇMİŞ	100

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
$\mathbb{R}^N$	N -Boyutlu Öklid Uzayı
Ω	$\mathbb{R}^N$ de Sınırlı Bir Bölge
$\partial\Omega$	Ω Bölgesinin Sınırı
$C(\Omega)$	Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$L^{p(x)}(\Omega)$	Değişken Üslü Lebesgue Uzayı
$W^{m,p(x)}(\Omega)$	Değişken Üslü Sobolev Uzayı
∇	Nabla Operatörü (Gradyent)
Δ	Laplace Operatörü
$H^m(\Omega)$	Hilbert Uzayı

ÖZET

DEĞİŞKEN ÜSLÜ SOBOLEV UZAYLARINDA PARABOLİK TİPTEN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ

BUTAKIN, Gülistan

Doktora, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

Mart 2025, 111 sayfa

Bu tez, değişken üslü Sobolev uzaylarında parabolik tipli denklemlerin çözümlerinin analizi üzerine odaklanmaktadır. Değişken üslü kısmi diferansiyel denklemler, sabit üslü diferansiyel denklemlere kıyasla fiziksel olayların modellenmesinde daha gelişmiş bir yaklaşım sunar. Bu nedenle, değişken üsse sahip parabolik denklemleri matematiksel olarak modellemeye yönelik son zamanlarda önemli bir ilgi ortaya çıkmıştır. Örneğin, elektro-reolojik sıvıların davranışını modellemek, bir elektrik alanına karşı sıvının viskozitesinin nasıl tepki verdiğini anlamaya yardımcı olur. Benzer şekilde, sıcaklığa bağlı viskoziteye sahip sıvıların modellenmesi, bilim ve mühendislik uygulamaları için oldukça önemlidir. Gözenekli ortamda filtrasyon süreçlerini incelemek, yeraltı suyu hareketini, kirlilik taşınımını ve petrokimyasal üretim süreçlerini anlamaya katkıda bulunur. Değişken üsse sahip denklemler, görüntü işleme alanında da önemli bir etki yaratmış olup, daha verimli görüntü iyileştirme tekniklerini mümkün kılmıştır. Evolüsyon denklemler, bir sistemin zaman içinde nasıl değiştiğini tanımlar ve fizik, biyoloji, kimya ve ekonomi gibi çeşitli bilimsel disiplinlerde yaygın olarak kullanılır. Tezin ilk bölümünde, değişken üslü parabolik tipten evolüsyon denklemlerinin tarihsel gelişimi ve uygulamalı bilimlerdeki önemi ele alınmıştır. İkinci bölümde, değişken üslü Sobolev uzaylarında parabolik denklemler üzerine yapılan önceki çalışmaların literatür taraması sunulmuştur. Üçüncü bölümde, tez boyunca kullanılacak temel tanımlar, lemmalar, teoremler ve eşitsizlikler verilmiştir. Dördüncü bölümde, değişken üslü $m(x)$ -biharmonik denklemlerin çözümlerinin varlığı ve patlaması ele alınmıştır. Beşinci bölümde ise, değişken üslü parabolik tipten Kirchhoff denkleminin çözümlerinin varlığı ve azalması incelenmiştir. Altıncı bölümde, değişken üslü doğrusal olmayan logaritmik kaynak terimli bir parabolik denklemin çözümlerinin varlığı ve patlaması gösterilmiştir. Son olarak yedinci bölümde, logaritmik kaynak terimli viskoelastik $m(x)$ -biharmonik denklemlerin çözümlerinin varlığı ve patlaması ele alınmıştır. Sonuç bölümünde ise, yapılan analizlerin genel bir değerlendirmesi yapılarak, elde edilen bulguların literatüre katkıları ve gelecekteki araştırmalar için potansiyel çalışma alanları tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Değişken üs, Değişken üslü Sobolev uzayı, Değişken üslü Lebesgue uzayı, Kirchhoff tipli denklem, Parabolik tipli denklem, Global varlık, Enerji azalması, Patlama, Viskoelastik terim, Logaritmik kaynak terim.

ABSTRACT

ANALYSIS OF SOLUTIONS FOR PARABOLIC TYPE EQUATIONS IN VARIABLE EXPONENT SOBOLEV SPACES

BUTAKIN, Gülistan

PhD in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN

March 2025, 111 pages

This thesis focuses on the analysis of solutions equations of parabolic type in Sobolev spaces with variable exponents. Partial differential equations with variable exponents offer a more advanced approach to modelling physical phenomena compared to equations with fixed exponents. For this reason, there has recently been considerable interest in mathematically modelling parabolic equations with variable exponents. For example, modelling the behavior of electro-rheological fluids helps to understand how the viscosity of the fluid responds to an electric field. Similarly, modelling liquids with temperature-dependent viscosity is very important for science and engineering applications. Studying filtration processes in porous media contributes to understanding groundwater movement, pollution transport and petrochemical production processes. Variable exponent equations have also had a significant impact on image processing, enabling more efficient image enhancement techniques. Evolution equations describe how a system changes over time and are widely used in various scientific disciplines such as physics, biology, chemistry and economics. In the first part of the thesis, the historical development of the evolution equations of parabolic type with variable exponent and their importance in applied sciences are discussed. In the second chapter, a literature review of previous works on parabolic equations in Sobolev spaces with variable exponents is presented. In the third chapter, the basic definitions, lemmas, theorems and inequalities that will be used throughout the thesis are detailed. In the fourth chapter, existence and blow-up of solutions of $m(x)$ -biharmonic equations with variable exponent are discussed. In the fifth section, existence and decay of solutions of Kirchhoff equations of parabolic type with variable exponent are analyzed. In the sixth section, existence and blow-up of solutions of a parabolic equation with a nonlinear logarithmic source term with variable exponent are shown. Finally, in the seventh section, the existence and blow-up of solutions of viscoelastic $m(x)$ -biharmonic equations with a logarithmic source term are discussed. In the conclusion, an overview of the analyses is given and the contributions of the findings to the literature and potential areas for future research are discussed.

Keywords: Variable exponent, Sobolev space with variable exponent, Lebesgue space with variable exponent, Kirchhoff type equation, Parabolic equation, Global existence, Energy decay, Blow-up, Viscoelastic term, Logarithmic source term.

1. GİRİŞ

Matematiğin kökeni, insanın evreni ve çevresini nicel özellikleriyle anlama yeteneğinde yatmaktadır. Bu yetenek, tarih boyunca insanlara günlük ihtiyaçlarını karşılamada ve problemlerini çözmede rehberlik etmiştir. Matematiğin günlük yaşamdan doğan ilk örnekleri, Mezopotamya’da karşımıza çıkmaktadır. Matematik, bilimlerin evrensel dilidir. Sayılar, semboller ve formüller yardımıyla fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik gibi alanların temelini oluşturur (Baki, 2014).

Diferansiyel denklemler, 17. yüzyılda, Gottfried Wilhelm Leibniz, Bernoulli kardeşlerin (Johann ve Jakob) ve Isaac Newton’un öncülük ettiği araştırmalar sayesinde matematik alanında önem kazanmıştır. Diferansiyel denklemler, bahsi geçen bilim insanlarının analizlerinde geliştirdikleri yenilikçi yaklaşımların bir ürünü olarak ortaya çıkmıştır. Ayrıca, gök cisimlerinin hareketlerinin incelenmesi ve bir nesnenin sürtünme olmaksızın P noktasından Q noktasına en kısa sürede ulaşacağı brakistokron eğrisi gibi mekanik problemlerin çözümünde de kullanılmıştır. Günlük yaşamda gözlemlenen temel süreçlerin çoğu, büyük ölçüde diferansiyel denklemler temelinde açıklanabilir. Son üç yüzyıldır, diferansiyel denklemler, çeşitli bilimsel alanlardaki problemleri tanımlamak ve çözmek için temel araçlardan biri olmuştur. Bu denklemlerin çözümlerini belirlemek amacıyla, analizin modern yöntemlerinden yararlanılmasından nümerik yaklaşımların geliştirilmesine kadar geniş bir yelpazede çalışmalar yapılmıştır. Matematikçiler, bu kapsamda yoğun bir şekilde çalışarak hem teorik hem de uygulamalı birçok teknik geliştirmiştir. Diferansiyel denklemlerle ilgili problemler, matematikte yeni alanların doğmasına zemin hazırlamıştır. Ayrıca, cebir, geometri, topoloji ve analiz gibi farklı disiplinlerdeki ilerlemeler, diferansiyel denklemlere yönelik yeni perspektifler kazandırarak matematiğin ilerlemesine katkı sağlamıştır (Kelley ve Peterson, 2010).

Bir fonksiyon ile onun sonlu mertebeden türevlerini içeren denklemler, diferansiyel denklemler olarak adlandırılır. Eğer denklemde yalnızca bir bağımlı değişkenin, tek bir bağımsız değişkene göre türevleri bulunuyorsa, bu tür denklemler adi diferansiyel denklem olarak isimlendirilir. Kısmi diferansiyel denklemler, bir bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkene bağlı türevlerini içeren denklemlerdir (Pişkin, 2016). Uygulamalı bilimlerde, çoğunlukla bir diferansiyel denklemin genel çözümünden ziyade, belirli ek koşulları karşılayan çözümlerin bulunması amaçlanır. Eğer bu ek koşullar

bağımlı değişken ve türevleri için yalnızca tek bir noktada tanımlanmışsa bu tür problemler başlangıç-değer problemi olarak adlandırılır. Ancak, ek koşullar en az iki farklı noktada tanımlanmışsa, bu durum sınır-değer problemi olarak ifade edilir. Sınır değer problemleri sınırda verilen fonksiyonun durumuna göre ayrıca sınıflandırılır. Eğer denklemin sınırda aldığı değer verilmişse Dirichlet sınır koşulu, sınırda fonksiyonun türevinin aldığı değer verilmiş ise Neumann sınır koşulu, bunların toplamı olarak verilmiş ise karışık (mixed) sınır koşulu ve bölgenin bir kısmında fonksiyonun aldığı değerler diğer bir kısmında ise fonksiyonun türevinin aldığı değer verilmiş ise Robin sınır koşulu olur. Bir kısmi türevli denklemin genel çözümü, denklemi sağlayan ve mertebesi kadar sürekli türevlenebilir olan, içerisinde keyfi fonksiyonlar barındıran fonksiyonlar kümesi olarak tanımlanır. Denklemi sağlayan fakat keyfi sabit, fonksiyon ve parametre içermeyen çözümlere özel çözüm denir.

Bir problemin iyi konulmuş (well posed) problem olarak kabul edilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir:

- En az bir çözümünün mevcut olması (varlık),
- Bu çözümün tek olması (teklik),
- Çözümün, problemdeki başlangıç ve sınır koşullarına sürekli olarak bağlı olması yani başlangıç verilerinde olan küçük değişiklik çözümde de küçük değişiklik meydana getirmesi (kararlılık).

Eğer bu şartlardan bir tanesi bile sağlanmıyorsa kötü konulmuş (ill posed) problem denir. Bu şartlara Hadamard şartları denir (Pişkin, 2018).

Kısmi diferansiyel denklemlerde bağımsız değişkenlerden biri zaman (t) olan denklemlere evölüsyon denklemler denir. Evölüsyon denklemler zamanla değişen fiziksel sistemleri modellemek için kullanılan diferansiyel denklemler sınıfıdır. Bu tür denklemler, bir başlangıç koşulundan hareketle sistemin zaman içindeki davranışını belirler. Bu denklemler, matematiğin yanı sıra fizik, mekanik ve malzeme bilimi gibi diğer disiplinlerde de büyük önem taşır. Doğrusal olmayan evölüsyon denklemlerinin teorik çalışmalardaki zorluğu ve karmaşıklığı matematikçilerin dikkatini çekmiştir. Teorik çalışmalarda sorulan ilk soru, başlangıç verilerine sahip evölüsyon denklemin lokal bir çözümünün olup olmadığıdır. 1960 lardan itibaren çözümlerin global varlığına dikkat çekilmiştir. Yani zaman içerisinde lokal bir çözüm, global çözüme genişletilmiştir

(Zheng, 2007).

Evolüsyon denklemleri farklı türlerde sınıflandırılabilir: parabolik ve hiperbolik denklemler. Örneğin, parabolik denklemler ısı yayılımı gibi süreçleri, hiperbolik denklemler dalga hareketleri gibi olayları modellemek için kullanılır.

Parabolik denklemler, çeşitli fen ve mühendislik uygulamalarında önemli bir rol oynar.

Bazı temel kullanım alanları şunlardır:

1) Isı Transferi: Katı maddeler içinde sıcaklığın zamanla nasıl dağıldığını analiz etmek için kullanılır.

2) Madde Yayılımı: Gazların, sıvıların veya kimyasal bileşenlerin farklı ortamlar içinde nasıl yayıldığını modellemek amacıyla uygulanır.

3) Finansal Modelleme: Finansal varlıkların gelecekteki değerlerini tahmin etmek için kullanılır. Bu tür modeller, belirsizlik ve rastgele değişimler içeren piyasa koşullarını analiz ederek opsiyon fiyatlarının hesaplanmasına katkı sağlar

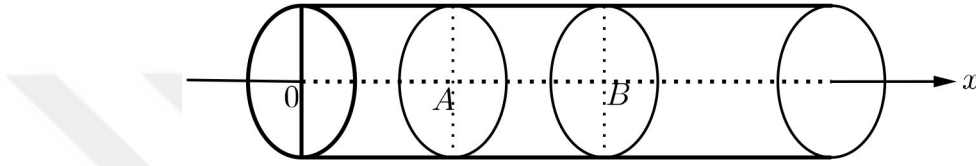
4) Görüntü İşleme: Dijital görsellerin kalitesini artırmak amacıyla çeşitli matematiksel teknikler kullanılır.

Parabolik denklemler, fizikteki birçok olgu, reaksiyon-difüzyon, nüfus dinamiği süreçleri ve ısı transferi ile ilgili problemlere yol açar (Jiang vd., 2004).

1.1 Isı Denkleminin Elde Edilişi

Uçları sabit sıcaklıkta tutulan L uzunluğundaki bir tel çubukta ısıнын yayılması problemini ele alalım. Bu çubuğun başlangıç noktası $x = 0$ ve bitiş noktası $x = L$ olacak şekilde x eksenini boyunca verilsin ve çubuğun herhangi bir t anında x noktasındaki sıcaklığı $z = z(x, t)$ olsun. Ayrıca çubuğun yanal yüzeyi ısı geçirmeyecek şekilde yalıtılmış olsun. Yani sıcaklık x eksenini yönünde hareket etsin.

Bu çubuğun $A(x, 0)$ ve $B(x + \Delta x, 0)$ noktaları arasındaki kesitini alalım. Bu durumda t anında A noktasındaki sıcaklık $z(x, t)$, B noktasındaki sıcaklık $z(x + \Delta x, t)$ olur.



Aşağıdaki fiziksel prensipleri hatırlatalım:

i) Birim zamanda birim alandan geçen ısı akımı

$$q = -k \frac{\partial z}{\partial x}$$

dir. Burada k orantı sabiti materyalin termal geçirgenliğidir. Burada termal geçirgenlik noktadan noktaya göre değişebilir. Yani $k = k(x)$ değişken veya sabit (k) olabilir. $\frac{\partial z}{\partial x}$ ise sıcaklığın gradyentidir.

ii) c materyalin öz ısısı olmak üzere, m kütleli bir nesnenin sıcaklığını Δz kadar arttırmak için gerekli ısı miktarı

$$cm\Delta z$$

dir.

iii) Isı akımı, yüksek sıcaklıktan düşük sıcaklığa doğru ilerler (Pişkin, 2021).

1.2 Değişken Üslü Sobolev Uzayların Tarihçesi

Değişken üslü Lebesgue uzaylar ($L^{p(x)}(\Omega)$) literatürde ilk kez Orlicz tarafından 1931 de çalışıldı. Değişken üslü uzaylarının araştırılmasındaki büyük adım, 1990 ların başında, Kováčik ve Rákosník (1991) tarafından yapılan çalışmadır.

Değişken üslü Lebesgue uzayları, klasik Lebesgue uzaylarıyla pek çok ortak özellik taşımakla birlikte, bazı önemli özellikler bakımından farklılıklar gösterir. Örneğin, ötelemelerin değişmemesi ve ötelemelerin sürekliliği gibi özellikler, sabit üslü L^p uzayında sağlanırken değişken üslü $L^{p(\cdot)}$ uzaylarında bu özellikler sağlanmaz (Kováčik ve Rákosník, 1991; Samko, 1998). Buna ek olarak, (Diening, 2004) çalışmasında, sınırlı bölge üzerinde tanımlı $L^{p(\cdot)}$ uzayında maksimal operatörün sınırlı olduğu gösterilmiştir. Bu çalışmanın ardından, bu tür uzaylara olan ilgi artmış ve bugüne kadar birçok farklı konuda yayınlar yapılmıştır. 1800 lü yıllarda, bilim dünyasında önemli sorunlardan biri olan Laplace denklemleri ve eliptik diferansiyel denklemler için sınır-değer problemleri üzerine yapılan çalışmalar, Sobolev'in 1938 yılında geliştirdiği teoriyle çözüme kavuşturulmuş ve Sobolev uzayı tanımlanmıştır (Sobolev, 1938).

Son yıllarda, değişken üslü fonksiyon uzayları teorisi, akışkanlar dinamiği, varyasyonel hesap, elastik mekanik ve bazı özel diferansiyel denklemlerle ilgili problemler üzerinde yoğunlaşmıştır. Elektroeolojik sıvılar, uygulanan elektrik alanla birlikte katılaşabilen, bu alan kaldırıldığında ise kısa sürede tekrar sıvı duruma dönebilen ve bu dönüşümü defalarca gerçekleştirebilen özel akışkanlardır (Yılmaz, 2003).

Elektroeolojik akışkanlar(EA) üzerine yapılan ilk önemli çalışmalar, Winslow'nun 1949 yılında gerçekleştirdiği araştırmalarda yer almaktadır. Růžička ise 2000 yılında, değişken büyüme oranlı katsayıları içeren doğrusal olmayan sistemlerle ilgili matematiksel model üzerinde çalışmıştır. EA, robot bilimi ve uzay teknolojilerinde kullanılmakta olup, deneysel araştırmalar NASA laboratuvarlarında gerçekleştirilmektedir. EA nın kumaşlara uygulanması, kumaşların dayanıklılığını hızla artırma özelliğiyle günümüzde daha hafif kurşun geçirmez yeleklerin üretimi için umut vaat etmektedir.

Sabit üsle karşılaştırıldığında, değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayları teorisi, zorluklar içermesine rağmen pek çok avantaj sunmaktadır. Örneğin, EA lar belirli bir manyetik alana maruz kaldığında, bu akışkanların parçacıkları hareket ederken

belirli oranlarda kütle kaybederler. Sabit bir p kuvveti varsayıldığında, farklı noktalar arasındaki kütle kaybının eşit olduğunu kabul etmek gerekir. Ancak bu durumda farklı kütle kayıpları hesaba katılamaz, bu da fiziksel, mekanik ve mühendislikle ilgili EA problemlerinin güvenilirliğini etkileyebilir. Bu sorunu çözmek için, p nin sabit olmasındansa, $p(x)$ gibi ölçülebilir bir pozitif reel fonksiyon kullanılarak farklı kütle kayıplarının hesaplanması mümkün hale gelir. Sonuç olarak, EA dan kaynaklanan standart olmayan büyüme koşullarına sahip doğrusal olmayan eliptik denklemler, ancak değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarında etkili bir şekilde ele alınabilir (Ünal, 2019).

Doğrusal olmayan değişken üslü denklemler son zamanlarda hiperbolik, parabolik ve eliptik denklemlerin incelenmesine büyük önem verilmiştir. Bu, standart olmayan büyüme koşullarına sahip denklemler olarak adlandırılır (Messaoudi ve Talahmeh, 2017).

Değişken üs içeren problemler, fen ve mühendislik gibi birçok alanda ortaya çıkmaktadır. Örneğin; elastite teorisi, gözenekli ortamlarda akış, elektroeolojik akışkanlar ve görüntü işlemede görülür (Chen vd., 2006; Diening vd., 2011; Růžička, 2000; Pişkin, 2025).

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezin orijinal kısmını dört, beş, altı ve yedinci bölümler oluşturmaktadır. Tezin esas amacı:

Dördüncü bölümde yer alan

$$z_t - \Delta z + \Delta_{m(x)}^2 z + \Delta^2 z = |z|^{p(x)-2} z \quad (2.1)$$

değişken üslü $m(x)$ -biharmonik parabolik denkleminin çözümlerinin global varlığını ve patlamasını (Butakın ve Pişkin, 2024a), beşinci bölümde yer alan

$$\left(1 + |z|^{p(x)-2}\right) z_t - M(\|\nabla z\|^2) \Delta z + \Delta^2 z = |z|^{q(x)-2} z \quad (2.2)$$

Kirchhoff tipli parabolik denklemin çözümlerinin global varlığını ve enerji azalmasını (Pişkin ve Butakın, 2023a), altıncı bölümde yer alan

$$z_t + \Delta_{m(x)}^2 z + \Delta^2 z_t = |z|^{p(x)-2} z \ln |z| \quad (2.3)$$

değişken üslü doğrusal olmayan logaritmik kaynak terimli $m(x)$ -biharmonik parabolik denkleminin çözümlerinin global varlığını ve patlamasını (Butakın, Pişkin ve Çelik, 2024) ve yedinci bölümde yer alan

$$z_t + \Delta^2 z + \Delta_{m(x)}^2 z - \int_0^t g(t-k) \Delta^2 z dk = |z|^{p-2} z \ln |z| \quad (2.4)$$

doğrusal olmayan logaritmik kaynak terimli viskoelastik denkleminin çözümlerinin varlığını ve patlamasını (Butakın ve Pişkin, 2024b) çalışmaktır.

Şimdi değişken üslü parabolik denklemler ile ilgili daha önce yapılmış çalışmaları verelim:

Wu vd., 2013 yılında değişken üslü parabolik tipten

$$z_t - \Delta z = z^{q(x)}$$

denkleminin çözümlerin patlamasını çalıştılar. Daha sonra birçok yazar, aynı problemin farklı koşullar altındaki çözümlerinin patlamasını elde ettiler (Baghaei vd., 2014; Khelghati ve Baghaei, 2015; Wang ve He, 2013).

Han 2018 yılında dördüncü mertebeden parabolik tipten

$$z_t + \Delta^2 z - \nabla f(\nabla z) = h(x, t, z)$$

denkleminin çözümlerinin global varlığını ve patlamasını çalışmıştır.

Qu vd., 2018 yılında dördüncü mertebeden parabolik tipten

$$z_t + \Delta^2 z = z^{p(x)}$$

denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Zhu vd., 2020 yılında değişken üslü

$$z_t - \Delta_{p(x)} z - \Delta z_t = |z|^{m(x)-2} z$$

denklemin çözümlerinin global varlık ve patlama sonuçları elde ettiler.

Chuong vd., 2022 yılında değişken üslü Cahn-Hilliard

$$z_t - \Delta_{p(x)} z + \Delta^2 z = |z|^{q(x)-2} z$$

denkleminin çözümlerinin global varlığını, patlamasını ve kararlılığını incelemişlerdir.

Khalidi vd., 2022 yılında değişken üslü Kirchhoff tipli

$$z_t + |z|^{m(x)-2} z_t - M(\|\nabla z\|^2) \Delta z = |z|^{r(x)-2} z$$

denklemin çözümlerinin global varlığı ve kararlılığı üzerine çalışmışlardır.

Liu ve Li 2023 yılında değişken üslü $p(x)$ -Laplasyan

$$z_t - \Delta z_t - \operatorname{div}(|\nabla z|^{p(x)-2} \nabla z) + \Delta^2 z = |z|^{q(x)-1} z$$

denkleminin çözümlerinin patlaması ve global varlığını çalıştılar.

Di vd., 2023 yılında değişken üslü $p(x)$ -Laplasyan

$$z_t + \omega |z|^{m(x)-2} z_t - \Delta_{p(x)} z - \Delta z_t = b |z|^{r(x)-2} z$$

denkleminin çözümlerinin sonlu zamanda patlamasını ve üstel büyümesini çalıştılar.

Pan vd., 2023 yılında değişken üslü logaritmik kaynak terimli $p(x)$ -Laplasyan

$$z_t - \operatorname{div}(|\nabla z|^{p(x)-2} \nabla z) - \Delta z_t = |z|^{q(x)-2} z \ln |z|$$

denkleminin global varlık ve patlamasını çalıştılar.

Pişkin ve Butakın 2023 yılında değişken üslü $p(x)$ -biharmonik parabolik tipten

$$z_t + \Delta_{p(x)}^2 z + \Delta^2 z_t = |z|^{q(x)-2} z$$

denkleminin çözümlerinin patlamasını çalıştılar.

Chuong vd., 2024 yılında değişken üslü $p(x)$ -Laplasyan

$$z_t - \Delta_{p(x)} z - \Delta z_t = |z|^{q(x)-2} z$$

denkleminin azalması ve patlamasını çalıştılar daha sonra global çözümünün asimptotik davranışını da elde ettiler.

Butakın ve Pişkin 2024 yılında değişken üslü dördüncü mertebeden

$$z_t - \Delta z + \Delta^2 z + \Delta^2 z_t = z^{q(x)}$$

denkleminin çözümlerinin sonlu zamanda patlamasını çalıştılar. Daha sonra patlama zamanı için bir üst sınır elde ettiler.

Butakın ve Pişkin 2025 yılında değişken üslü $q(x)$ -triharmonik parabolik tipten

$$\left(1 + a |z|^{p(x)-2}\right) z_t - \Delta_{q(x)}^3 z = b |z|^{r(x)-2} z$$

denkleminin çözümlerin patlamasını çalıştılar. Daha sonra aynı problemin üstel büyümesini elde ettiler.

Butakın ve Pişkin 2025 yılında değişken üslü $m(x)$ -biharmonik parabolik tipten

$$z_t + \Delta^2 z + \Delta_{m(x)}^2 z = |z|^{p(x)-2} z \ln |z|$$

denkleminin çözümlerinin varlığını ve patlamasını çalıştılar.

Butakın ve Pişkin 2025 yılında değişken üslü m -biharmonik parabolik tipten

$$z_t + \Delta^2 z - \int_0^t k(t-s) \Delta_m^2 z(x, s) ds = |z|^{p(x)-2} z$$

denkleminin çözümlerinin varlığını ve patlamasını çalıştılar.

2.1 Kirchhoff Terimli Denklem

Kirchhoff modeli, mekanik, elastik teori ve matematiksel fiziğin farklı alanlarındaki pek çok uygulamada önemli bir yere sahiptir (Ames, 1965). Bu model, gerilime maruz kalmış bir ipin enine salınımlarını, lokal veya lokal olmayan bükülme sertliğini göz önünde bulundurarak tanımlamak için sıklıkla incelenmiştir. Bu bağlamda, Kirchhoff modeli üzerine yapılan araştırmalar geniş bir literatüre sahiptir (Woinowsky ve Krieger, 1950).

Kirchhoff Denkleminin Geliştirilmesi: 1883 te Gustav Robert Kirchhoff, D'Alembert'in dalga denklemini genelleştirerek salınımların neden olduğu değişimleri de dikkate alan bir yaklaşım ortaya koymuştur. Özellikle elastik gerilime sahip bir ipin salınımlarını betimlemek için tasarladığı bu denklem, kısmi diferansiyel denklemler sınıfına girer ve genel formu aşağıdaki gibidir:

$$z_{tt} - \left\{ \frac{p_0}{\rho h} + \frac{E}{2L\rho} \int_0^L |z_x|^2 dx \right\} z_{xx} = 0.$$

Burada $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$ dır. Bu durumda $z = z(x, t)$ dikey yer değiştirmeyi, ρ kütle yoğunluğunu, h kesit alanını, E Young modülünü, L uzunluğu ve p_0 başlangıçtaki eksensel gerilimi ifade eder.

Doğrusal damping ve dış kuvvet içeren model ise şu şekilde verilmiştir:

$$\rho h z_{tt} + \delta z_t - \left\{ p_0 + \frac{Eh}{2L} \int_0^L |z_x|^2 dx \right\} z_{xx} = f$$

burada δ direnç modülü, f ise dış kuvveti göstermektedir.

2.2 Biharmonik Terimli Denklem

m -biharmonik içeren diferansiyel denklemler fiziğin birçok dalında ortaya çıkmaktadır. Örneğin; pseudoplastik Newtonyen olmayan akışkanlar teorisi, faz dönüşümü, araç veya yaya geçişi sırasında köprülerde meydana gelen titreşim dalgaları gibi alanlarda kullanılır (Lazer ve McKenna, 1990; Nachman ve Callegari, 1980; Ortiz vd., 1999).

2.3 Logaritmik Kaynak Terimli Denklem

Logaritmik terime sahip denklemler üzerine yapılan çalışmalar, literatürde önemli bir yer tutmaktadır. Bu çalışmalar, (Bialynicki-Birula ve Mycielski, 1975) nın kuantum teorisi bağlamında mikro ölçekten makro ölçeğe geçişi açıklamaya yönelik yaklaşımlarıyla başlamıştır. Bu bağlamda, logaritmik terim içeren doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin atom fiziğine uygulanabilirliği gündeme getirilmiştir. Logaritmik terime sahip bu tür doğrusal olmayan Schrödinger denklemlerinin, Gauss fonksiyon formunda soliton benzeri kararlı çözümler üretebildiği gösterilmiştir.

Bu bulgular, logaritmik kaynak terimine sahip denklemlerin optik, süpersimetrik alan teorileri, kuantum mekaniği ve nükleer fizik gibi fiziksel disiplinlerde geniş bir uygulama alanı bulmasına yol açmıştır (Bialynicki-Birula ve Mycielski, 1975; Cazenave ve Haraux, 1980; Görka, 2009).

2.4 Viskoelastik Terimli Denklem

Viskoelastik terim içeren denklemler tamamen elastik bir malzeme, mekanik enerjiyi dağılmadan depolama kapasitesine sahiptir. Tam elastik bir malzemenin zıttı, viskoz bir malzemedir. Viskoz malzemelerle ilgili önemli olan unsur, kuvvet kaldırıldığında eski şekline dönmezler. Bu iki teorenin kapsamı dışında kalan malzemeler, onları deforme etmek için yapılan çalışmaların tamamı olmasa da bir kısmının geri kazanılabileceği malzemeler olacaktır. Bu tür malzemeler, mekanik enerjiyi depolama ve dağıtma kapasitesine sahiptir. Bunlar viskoelastik malzemelerdir. Viskoelastik malzemelerin dinamik özellikleri, doğa bilimlerindeki birçok uygulamada ortaya çıktıkları için büyük öneme sahiptirler. Son yıllarda, pek çok araştırmacı, uzun bir süredir bu maddelere dikkat çekmiş ve çok ilerleme kaydetmişlerdir (Guo vd., 2015).

Basit bir örnek

$$z_{tt} - \Delta z - \int_0^t h(t-s)\Delta z(s) ds = 0$$

viskoelastik denklemdir. Denklemdaki çekirdek (memory) fonksiyonu, herhangi bir t anındaki gerilimin, malzemenin 0 dan t ye kadar, maruz kaldığı gerinimlerin geçmişine bağlı olduğunu ifade eder.

3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, temel fonksiyonel analiz kavramlarını ifade edeceğiz. Daha sonra, değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayları ve bunlarla ilişkili önemli eşitsizlikler, teoremler verilecektir. Son olarak çözümlerin varlığı, çözümlerin azalması ve çözümlerin patlaması ile ilgili lemmaya değineceğiz (Adams ve Fournier, 2003; Brezis, 2011; Pişkin, 2013; Pişkin, 2017; Pişkin, 2018; Fan ve Zhao, 2001; Diening vd., 2011; Kesavan, 1989; Evans, 1998).

3.1 Yakınsaklık

Tanım 3.1.1 Bir (a_n) dizisi, $(P, \|\cdot\|)$ normlu bir uzayda tanımlı olsun. Her $\varepsilon > 0$ da $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ bulunabiliyor ve tüm $\forall n, m \geq N_\varepsilon$ durumunda

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon$$

sağlanıyorsa, bu diziye Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.1.2 Bir (a_n) dizisi, $(P, \|\cdot\|)$ normlu bir uzayda tanımlı olsun. Eğer bir $a \in P$ elemanı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - a\| = 0$$

şartı sağlanıyorsa, bu diziye yakınsak dizi denir. Bu durum, $a_n \rightarrow a$ biçiminde ifade edilir.

Tanım 3.1.3 Bir normlu uzay P ele alınsın. Eğer P içindeki her Cauchy dizisi, P nin bir elemanına yakınsıyorsa, bu tür uzaylara tam uzay denir. Ayrıca, bir normlu uzay $(P, \|\cdot\|)$ tam bir uzay olduğunda Banach uzay adı da verilir.

Tanım 3.1.4 P vektör uzayıdır. Bu uzay üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ olmak üzere iki farklı norm bulunsun. Eğer $K > 0$ ve $L > 0$ olmak üzere pozitif sabitler ve her $a \in P$ için

$$K \|a\|_1 \leq \|a\|_2 \leq L \|a\|_1$$

eşitsizliği geçerliyse, bu iki norma denk normlar denir.

Tanım 3.1.5 İç çarpım uzayında, eğer her Cauchy dizisi bu uzayın bir elemanına yakınsıyorsa, bu tür uzaylar Hilbert uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.6 P normlu uzaydır. P uzayındaki tüm sınırlı lineer fonksiyonların kümesi, P nin dual uzayı olarak adlandırılır. Bu uzay P' veya P^* ile gösterilir ve

$$\|f\|_{P'} = \sup_{a \in P, a \neq 0} \frac{|f(a)|}{\|a\|_P} < \infty$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.1.7 Bir P normlu uzayında (a_n) dizisi verilsin. Eğer $a \in P$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - a\|_P = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa (a_n) dizisine güçlü yakınsak dizi adı verilir. Bu yakınsama $a_n \rightarrow a$ ifade edilir.

Tanım 3.1.8 Bir P normlu uzayında (a_n) dizisi verilsin. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \rightarrow f(a), \quad \forall f \in P'$$

eşitliği sağlanıyorsa ve $a \in P$ ise, bu diziye zayıf yakınsak dizi denir. Bu tür bir yakınsama, $a_n \rightharpoonup a$ ya da $a_n \xrightarrow{z} a$ dır.

Tanım 3.1.9

(a) P normlu uzayında (f_n) dizisi sınırlı lineer fonksiyonlardan oluşsun. Eğer $f \in P'$ için

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, (f_n) dizisine güçlü yakınsak dizi denir ve bu durum $f_n \rightarrow f$ ile ifade edilir.

(b) Her $a \in P$ için

$$f_n(a) \rightarrow f(a)$$

şartını sağlayan bir $f \in P'$ varsa, bu diziye zayıf* yakınsak dizi denir ve bu durum $f_n \xrightarrow{z^*} f$ olarak gösterilir.

3.2 Lebesgue uzayı ($L^p(\Omega)$)

Tanım 3.2.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bir bölge olsun ve $1 \leq p < \infty$ durumu göz önüne alalım. Eğer Ω üzerinde tanımlı bir ölçülebilir z fonksiyonu

$$\int_{\Omega} |z(x)|^p dx < \infty$$

şartını sağlıyorsa, bu tür fonksiyonların kümesi $L^p(\Omega)$ uzayını oluşturur. Bu uzay bir vektör uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ için, $L^p(\Omega)$ uzayında tanımlı norm, şu şekilde ifade edilir:

$$\|z\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |z(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bu norm altında $L^p(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Örnek. $\Omega = (0, 1)$ ve $z(x) = x^2$ ise $\|z\|_{L^2(\Omega)} = ?$

Çözüm.

$$\begin{aligned} \|z\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |z(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_0^1 |x^2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right). \end{aligned}$$

Örnek. $\Omega = (2, 4)$ ve $z(x) = 2^x$ ise $\|z\|_{L^1(\Omega)} = ?$

Çözüm.

$$\begin{aligned} \|z\|_{L^1(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |z(x)| dx \right) \\ &= \left(\int_2^4 |2^x| dx \right) \\ &= \left(\frac{12}{\ln 2} \right). \end{aligned}$$

Örnek. $\Omega = (1, 3)$ ve $z(x) = 2^{x^2}$ ise $\|z\|_{L^1(\Omega)} = ?$

Tanım 3.2.2 A ve B normlu uzayları ele alalım. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa

1) A uzayının tüm elemanları B uzayında da yer alıyorsa ($A \subset B$) ve

2) A uzayındaki her $z \in A$ için, z bağımsız bir c sabitiyle şu eşitsizliği sağlıyorsa:

$$\|z\|_B \leq c \|z\|_A$$

o zaman A uzayı B uzayına gömülür ve $A \hookrightarrow B$ ile gösterilir.

3.3 Sobolev Uzayı ($W^{m,p}(\Omega)$)

Tanım 3.3.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, m pozitif tam sayı ise $1 \leq p \leq \infty$ için

$$W^{m,p}(\Omega) = \{z \in L^p(\Omega) : D^\alpha z \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

bu şekilde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı adı verilir.

$1 \leq p < \infty$ durumunda norm,

$$\|z\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha z\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ durumunda ise norm,

$$\|z\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha z\|_{L^\infty(\Omega)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu normlarla birlikte $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Ayrıca, herhangi bir m pozitif tam sayısı için aşağıdaki gömülmeler geçerlidir:

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Örnek. $\Omega = (0, 2)$ olsun.

$$z(x) = x^2$$

fonksiyonu için $\|z\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ normunu hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned} \|z\|_{W^{1,2}(\Omega)} &= \left(\int_0^2 |x^2|^2 + \int_0^2 |2x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{16\sqrt{15}}{15}. \end{aligned}$$

3.4 Bazı Temel Eşitlik, Eşitsizlik ve Teoremler

Lemma 3.4.1 Eğer $z \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $p \geq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, $zv \in L^1(\Omega)$ olur ve şu eşitsizlikler geçerlidir:

$$\|zv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|z\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir.

Lemma 3.4.2 $\varepsilon > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartları altında, şu eşitsizlikler geçerlidir:

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

veya

$$|ab| \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

bu eşitsizliğe Young eşitsizliği denir.

Lemma 3.4.3 $0 < \lambda < 1$ ve $1 \leq q \leq p \leq s$ için $\frac{1}{p} = \frac{\lambda}{q} + \frac{1-\lambda}{s}$ olmak üzere $z \in L^q(\Omega) \cap L^s(\Omega)$ ise $z \in L^p(\Omega)$ uzayının elamanı olur ve bu da

$$\|z\|_{L^p(\Omega)} \leq \|z\|_{L^q(\Omega)}^\lambda \|z\|_{L^s(\Omega)}^{1-\lambda}$$

şeklinde sağlanabilir ve bu eşitsizliğe İnterpolasyon eşitsizliği denir.

Lemma 3.4.4 Eğer $a, b \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ ise, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2$$

bu eşitsizliğe Cauchy eşitsizliği denir.

Lemma 3.4.5

1) Eğer $\xi(t)$, $0 \leq t \leq T$ ve $C_1, C_2 \geq 0$ sabitleriyle

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds + C_2$$

negatif olmayan ve $[0, T]$ aralığında toplanabilir olan, integral eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu bağlamda

$$\xi(t) \leq C_2 (1 + C_1 t e^{C_1 t}).$$

2) Bir diğerk durumda

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds$$

için $\xi(t) = 0$ olur. Bu eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği denir.

Lemma 3.4.6 Eğer $z \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ise, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\int_{\Omega} v \Delta z dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial z}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla v \nabla z dx.$$

n , dışa doğru yönelmiş bir birim vektördür ve, $\frac{\partial z}{\partial n}$ ifadesi n ile ∇z nin skaler çarpımı olarak tanımlanır. Bu eşitsizliğe Green özdeşliği denir.

Lemma 3.4.7 (Irkıl, 2021) Eğer v bir pozitif tam sayı ve $\forall \alpha \in [1, \infty)$ için

$$\alpha^q \ln \alpha \leq (ev)^{-1} \alpha^{q+v}$$

dir.

İspat: Her $z \in \mathbb{R}$ için

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$1 + z \leq e^z$$

olur. Bu durumda $z = v \ln \alpha - 1$ dönüşümü eşitsizlikte yerine koyarak

$$\ln \alpha \leq \alpha^v (ev)^{-1}$$

bulunur.

Lemma 3.4.7 e göre $\alpha \in [1, \infty)$ için

$$\alpha^q \ln \alpha \leq (ev)^{-1} \alpha^{q+v}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.8 (X, d) metrik uzayı tam ise, T bir daralma dönüşümü olup ve T fonksiyonunun yalnızca bir sabit noktası bulunur. Bu ifadeye Banach sabit nokta teoremi denir.

Lemma 3.4.9 Boş olmayan kısmi sıralı bir küme içinde yer alan her zincirin, Bir küme üzerinde üst sınır mevcutsa, o kısmi sıralı küme en az bir maksimal eleman içerir. Bu ifadeye Zorn lemması denir.

Teorem 3.4.10 $N \geq 2$, $1 \leq p < N$ ve $q = \frac{Np}{N-p} \left(\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \right)$ olsun. Bu durumda

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$$

dır ve $\forall z \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ için

$$\|z\|_q \leq c \|\nabla z\|_p$$

öyle bir sabit $c = c(N, p) > 0$ bulunur. Bu eşitsizliğe Sobolev Gagliardo-Nirenberg eşitsizliği denir.

3.5 Değişken Üslü Uzaylar Temel kavramlar

Tanım 3.5.1 $q(\cdot)$ üs fonksiyonunun eşleneği $q'(\cdot)$ şeklinde gösterilir. $x \in \Omega$ olmak üzere

$$\frac{1}{q(x)} + \frac{1}{q'(x)} = 1$$

dır. Ayrıca

$$(q'(x))^+ = (q^-)' ,$$

$$(q'(x))^- = (q^+)'$$

yazılabilir.

Tanım 3.5.2 $\Omega \subset \mathbb{R}$, kümesi üzerinde tanımlı $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall x, y \in \Omega$ ve $|x - y| < \frac{1}{2}$ koşulu altında, eğer aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa

$$|r(x) - r(y)| \leq \frac{c_0}{-\ln|x - y|}$$

eğer $r(\cdot)$ fonksiyonuna ilişkin bir c_0 sabiti mevcutsa, bu fonksiyon lokal log-Hölder sürekliliğine sahiptir ver $(\cdot) \in LH_0(\Omega)$ ile gösterilir.

Eğer $\forall x \in \Omega$ için

$$|r(x) - r_\infty| \leq \frac{c_\infty}{-\ln|x - y|}$$

eğer $r(\cdot)$ fonksiyonuna ilişkin c_∞ ve r_∞ sabitleri mevcutsa, bu fonksiyon sonsuzda log-Hölder sürekliliğine sahiptir ve $r(\cdot) \in LH_\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

eğer $r(\cdot)$ fonksiyonu hem lokal log-Hölder sürekliliğine hem de sonsuzda log-Hölder sürekliliğine sahipse, $r(\cdot) \in LH(\Omega)$ ile belirtilir.

Tanım 3.5.3 (Değişken Üslü Lebesgue Uzayı) $\Omega, \mathbb{R}^N$ de $|\Omega| > 0$ olacak şekilde bir bölge olsun. Bu durumda

$$\rho_{p(\cdot)}(z) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |z(x)|^{p(x)} dx + \text{ess sup}_{x \in \Omega_\infty} |z(x)|$$

veya $p^+ < \infty$ ise ($|\Omega_\infty| = 0$ olacağından)

$$\rho_{p(\cdot)}(z) = \int_{\Omega} |z(x)|^{p(x)} dx < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir $z(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa değişken üslü Lebesgue uzayı olarak adlandırılır ve $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ veya $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ şeklinde gösterilir. Burada $\rho_{p(\cdot)}(z)$ (veya $\rho(z)$) modüler fonksiyoneli olarak adlandırılır.

Örnek. $\Omega = (0, 2)$ $p(x) = \frac{1}{x}$ ve $z(x) = 3^{x^2}$ için $z \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Verilen Ω bölgesinde $p(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu sınırlı olduğundan $|\Omega_\infty| = 0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)}(z) &= \int_{\Omega} |z(x)|^{p(x)} dx \\ &= \int_0^2 \left| 3^{x^2} \right|^{\frac{1}{x}} dx \\ &= \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_0^2 \\ &= \frac{8}{\ln 3} < \infty \end{aligned}$$

olduğundan $z \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ dır.

Örnek. $\Omega = (1, 4)$ $p(x) = \frac{1}{x}$ ve $z(x) = \sin x^x$ için $z \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olduğunu gösteriniz.

Tanım 3.5.4 ($L^{p(\cdot)}$ Uzayının Normu) $p^+ < \infty$ ise değişken üslü Lebesgue uzayında norm

$$\begin{aligned} \|z\|_{p(\cdot)} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{z}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left| \frac{z(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu norma Luxemburg normu denir. Burada $p(\cdot) = p$ (sabit) olursa klasik Lebesgue uzayındaki norm elde edilir.

Lemma 3.5.5 (Poincaré eşitsizliği) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de sınırlı bir bölge ve $p(\cdot) \in LH(\Omega)$ olsun. Bu durumda her $z \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\|z\|_{p(\cdot)} \leq r \|\nabla z\|_{p(\cdot)}$$

sağlanır, burada $r = r(N, p(\cdot), |\Omega|) > 0$ dır.

Tanım 3.5.6 ($L^{p(\cdot)}$ Uzayında Gömülme) $\Omega, \mathbb{R}^N$ sınırlı bölge, $0 < |\Omega| < \infty$ ve $p(\cdot), q(\cdot) \in L_+^\infty(\Omega)^1$ dır.

$$L^{q(\cdot)} \hookrightarrow L^{p(\cdot)}$$

fonksiyonun gömülmesi için gerekli ve yeterli koşul, her $x \in \Omega$ için $p(\cdot) \geq q(\cdot)$ geçerlidir. Bu durumda

$$\|z\|_{p(\cdot)} \leq c(1 + |\Omega|) \|z\|_{q(\cdot)}$$

olacak şekilde $c > 0$ sayısı vardır.

Tanım 3.5.7 (Değişken Üslü Sobolev Uzayı) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, m pozitif herhangi bir tamsayı olmak üzere ve $p(\cdot), [1, \infty]$ için

$$W^{m,p(\cdot)}(\Omega) = \{z \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : D^\alpha z \in L^{p(\cdot)}(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

uzayı Sobolev uzayı olarak adlandırılır. Bu uzayın normu

$$\|z\|_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)} = \|z\|_{m,p(\cdot)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha z\|_{p(\cdot)}$$

ile gösterilir ve normu ile bir Banach uzayıdır. Ayrıca $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ dır. Açıkça görülür ki

$$W_0^{m,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$$

dır.

Lemma 3.5.8 (Aubin-Lions lemması) X, V, Y Banach uzayları olsun. X, V ye kompakt bir gömülme ve V, Y ye sürekli bir gömülme sağlasın; ayrıca $1 \leq r \leq \infty$ ve $p = 1$ veya $r = \infty$ ise $p > 1$ şartları sağlansın.

ve $K, L^r(0, T; X)$ de sınırlı bir küme

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial t} : z \in K \right\}$$

o halde $L^p(0, T; Y)$ de sınırlı ise, K kümesi $L^r(0, T; V)$ uzayında kompakttır (Aubin, 1963; Lions, 1969).

Aubin-Lions Lemması

$L^r(0, T; V)$ uzayındaki bir fonksiyon dizisinin kompaktlığını belirlemek için Aubin-Lions lemması kullanılır. Özellikle sonlu boyutlu uzaylarda yapılan evolüsyon denklemlerde, Cauchy-Lipschitz ya da Carathéodory varlık teoremleri ile çözümler elde edilir. Bu çözüm dizileri, sonlu boyutlu alt uzaylarla ilgili yakınsama içerir. Ardından, $L^p(0, T; X)$ uzayındaki sınırlılık ve başlangıç koşullarının uygulanmasıyla, zamana göre türevlerin $L^r(0, T; Y)$ uzayında sınırlı olduğu görülür. Bu tür kompaktlık, yakınsaklık ve çözüm dizilerinin belirlenmesinde gereklidir. Sonuç olarak, bu yaklaşım evolüsyon denklemlerin çözümünün varlığını gösterir (Dubinskiĭ, 1965).



3.6 Çözümlerin Varlığı ile İlgili Bazı Lemmalar

Lemma 3.6.1 (Faedo-Galerkin Metodu) Faedo-Galerkin metodu, diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığını ispatlamak için yaygın olarak kullanılan önemli bir tekniktir. Bu yöntemde, çözümün yaklaşık bir formunu oluşturmak için sonlu boyutlu bir alt uzay dizisi kullanılır.

Tanım Öncelikle, H ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve V , yoğun bir alt uzayı olsun. V nin sonlu boyutlu alt uzayları V_n olmak üzere şu koşullar sağlanır:

1. $V_n \subset V$, V_n sonlu boyutludur.
2. $n \rightarrow \infty$ iken $V_n \rightarrow V$ dir.

Bu durumda, $\forall z \in V$ için bir $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ dizisi bulunabilir:

$n \rightarrow \infty$ iken $z_n \rightarrow z$ olur. Böylece, V_n uzayı, n . mertebeden bir Galerkin yaklaşımı olarak adlandırılır.

Faedo-Galerkin Metodunun Adımları:

Ayrılabilir bir V Hilbert uzayında tanımlı bir fonksiyon uzayında, bir P probleminin çözümlerinin varlığını bulmak isteyelim. Bu P probleminin tek bir çözümü z olsun.

V nin bir V_n Galerkin yaklaşımını seçtikten sonra, sonlu boyutlu (V_n) uzayında, tek bir (z_n) çözümüne sahip yaklaşık bir P_n problemini tanımlamamız gerekir. Daha sonra aşağıdaki adımları uygulayız:

Adım 1 (Yaklaşık problem tanımı): P_n probleminin çözümü z_n olsun.

Adım 2 (Çözümün sınırlılığı): z_n nin düzgün sınırlı olduğunu göstermek için z_n üzerinde kestirimler oluştururuz.

Adım 3 (Zayıf yakınsaklık): z_n nin düzgün sınırlı olmasından dolayı, 2. adımdaki kestirimleri içeren uzayın zayıf topolojisinde, bir limite sahip, $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ dizisinin bir $\{z'_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ alt dizisini seçmek mümkündür.

Elde edilen limit z olsun.

Adım 4 (Asıl problemin çözümü): P probleminin çözümünün z olduğunu gösteririz.

Adım 5 (Güçlü yakınsaklık): Böylece, güçlü yakınsaklık sonuçlarını elde ederiz. Yaklaşım sürecinin oluşturulmasının esas amacı, bir çözümün varlığının elde edilmesini sağlamaktır, bu süreç $z_n(x, t)$ ya, $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$ için

$$z_n(x, t) = \sum_{i=1}^n r_i(t) w_i$$

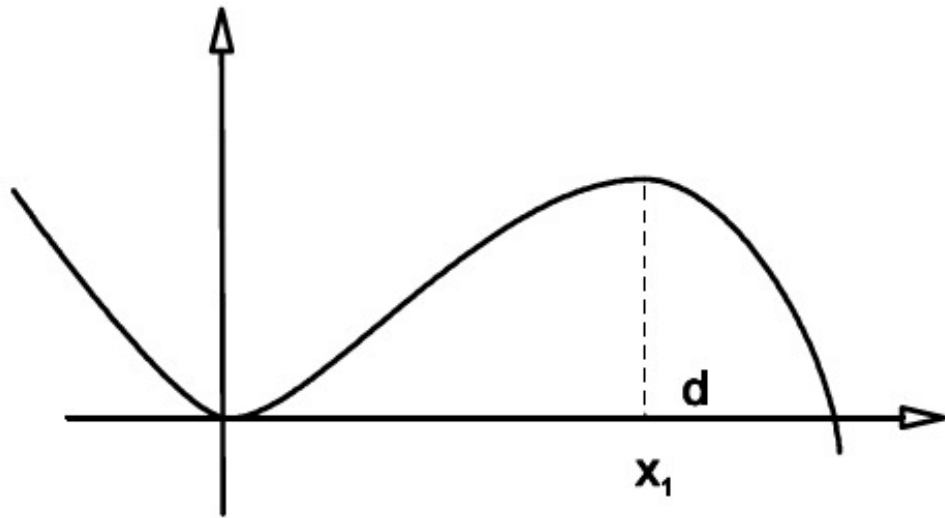
olacak şekilde w_i tabanlarının fonksiyonlarının lineer bir kombinasyonu olarak yaklaştırmaya tekabül eder.

Diğer bir ifadeyle, başlangıçta yaklaşık bir problem tanımlanır ve adi diferansiyel denklemler teorisine dayanarak, sistemin çözümünün varlığı garanti altına alınır. Eğer sistemin doğrusal olmayan terimleri yeterince düzgünse Zorn Lemması yardımıyla bu sistemin çözümü, bir $[0, t_m)$ aralığında genişletilebilir. Ardından, belirli tahminler yapılarak çözümün $t > 0$ için geçerli olacak şekilde $[0, t_m)$ dışına genişletilmesi mümkündür (Lions, 1969).

Lemma 3.6.2 (Potansiyel Kuyu Metodu) Genel olarak bu metot denklem çözümlerinin varlığının ispatında kullanılan önemli bir metottur. Potansiyel kuyu metodu, Sattinger tarafından (1968) deki çalışmasında

$$z_{tt} - \Delta z + f(x, z) = 0 \quad (3.6.2)$$

denkleminde ele alınmıştır. Buradaki amaç, problemin global çözümlerinin varlığını ispatlamaktır. Sattinger, (3.6.2) denkleminin, doğrusal olmayan $f(x, z)$ fonksiyonuna bazı ek koşullar ekleyerek global zayıf çözümün varlığını elde etmiştir. Potansiyel kuyu metodu, denklemlerin enerji integralleri üzerine kurulu bazı analizlere dayanmaktadır. Fonksiyonun davranışı incelendiğinde, $x = 0$ konumunda lokal minimum ve $x = x_1$ konumunda ise lokal maksimum noktası içerdiği anlaşılmaktadır.



Potansiyel kuyu, aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$W = \{x : V(x) < d, x < x_1\}.$$

Bu küme, orijini de içeren bir bölgeyi ifade eder ve sistemin toplam enerjisinin bu sınırları aşmamasını sağlar. Burada d , $\mathbb{R}^N$ içinde düzgün sınırlandırılmış bir bölgeyi temsil eder. Şimdi $J(z)$ fonksiyonelinin minimum noktasını baz alarak bir potansiyel kuyu tanımlayalım. Tüm $z \in H_0^1(\Omega)$ için tanımlı olan bir fonksiyonel $J(z)$ ele alınsın. Fonksiyonelin $z = 0$ noktasında minimum değerini aldığı varsayılırsa, $J(\lambda z)$ fonksiyonu, orijin civarındaki küçük ve pozitif λ değerleri için artan özellik gösterir. Bu artışın sona erip fonksiyonun azalmaya başladığı ilk pozitif değer $\lambda_1 > 0$ olarak tanımlansın. Bu durumda potansiyel kuyunun derinliği, aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$d = \inf_{z \in H_0^1(\Omega)} J(\lambda_1 z).$$

Bu değer, $z_0 = 0$ bulunduğu bölgenin dışındaki en küçük enerji düzeyini temsil eder. Doğal olarak $d \in [0, \infty]$ aralığındadır. Eğer $d > 0$ koşulu sağlanıyorsa, bu durumda potansiyel kuyu W kümesi şu şekilde tanımlanabilir:

$$W = \{z : z \in H_0^1(\Omega), 0 \leq J(\lambda z) < d, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Bu tanım altında $z \in W$ olacak şekilde her bir $J(z) < d$ dır. Ayrıca $[0, 1]$ aralığındaki her λ için λz biçimindeki noktalar da bu enerji düzeyinin altındadır. Böylece, bu yaklaşımla sistemin global çözümlerinin varlığı garanti altına alınabilir.

3.7 Çözümlerin Azalması ile İlgili Lemma

Lemma 3.7.1 (Komornik eşitsizliği) $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ artan olmayan bir fonksiyon olsun. $t \geq 0$ ve sabit $c > 0$ sayısı

$$\int_t^\infty g(\gamma) d\gamma \leq cg(t)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda

$$g(t) \leq g(0) e^{1-\frac{t}{c}}$$

geçerlidir. Ayrıca, $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ artan olmayan bir fonksiyon, $\alpha > 0$ ve $c > 0$ sabit sayıları, her $t \geq 0$ için

$$\int_t^\infty g^{\alpha+1}(\gamma) d\gamma \leq cg^\alpha(0) g(t)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda, her $\forall t \geq c$ için

$$g(t) \leq g(0) \left(\frac{c + \alpha t}{c + \alpha c} \right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

geçerlidir (Komornik, 1994).

3.8 Çözümlerin Patlaması ile İlgili Lemma

Konkavlık metodu

Levine (1974) tarafından elde edilen bu metodun temel düşüncesi problemin lokal varlık koşulu altında problemi temsil eden pozitif bir $k(t)$ fonksiyonu için $\phi(t) = k^{-\beta}(t)$ konkav fonksiyonunu inşa etmektir.

Lemma 3.8.1 (Konkavlık metodu) $k(t)$ iki kez türevlenebilen ve $t > 0, \varepsilon > 0$ için

$$k''(t) k(t) - (1 + \varepsilon) (k'(t))^2 \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer $k(0) > 0$ ve $k'(0) > 0$ ise bu durumda $0 < T \leq \frac{k(0)}{\varepsilon k'(0)}$ zamanı vardır ki

$$\lim_{t \rightarrow T^-} k(t) = \infty$$

olur (Levine, 1974).

4. DEĞİŞKEN ÜSLÜ $m(x)$ -BİHARMONİK DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE PATLAMASI

Bu bölümde, $m(x)$ -biharmonik terim içeren parabolik

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + \Delta^2 z + \Delta_{m(x)}^2 z = |z|^{p(x)-2} z, & Q = \Omega \times (0, T), \\ z(x, t) = \frac{\partial}{\partial \nu} z(x, t) = 0, & \partial Q = \partial \Omega \times [0, T], \\ z(x, 0) = z_0(x), & \Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

denklemini inceleyeceğiz (Butakın ve Pişkin, 2024a). $\Delta_{m(x)}^2 z$ terimi $m(x)$ -biharmonik olarak adlandırılan dördüncü mertebeden bir operatördür ve aşağıdaki şekilde

$$\Delta_{m(x)}^2 z = \Delta \left(|\Delta z|^{m(x)-2} \Delta z \right)$$

tanımlanır. Burada $\Omega, \mathbb{R}^N$ içinde düzgün sınırlara sahip bir bölgeyi temsil eder ve $\partial \Omega$ bu bölgenin sınırını ifade eder. Ayrıca, ν $\partial \Omega$ üzerindeki birim dış normal vektördür. $m(\cdot)$ ve $p(\cdot), \bar{\Omega}$ üzerinde ölçülebilir fonksiyonlardır. Burada çözümlerinin global varlığını ve patlamasını inceleyeceğiz.

$$2 \leq m^- \leq m(x) \leq m^+ < \begin{cases} \infty, & N \leq 4, \\ \frac{2N}{N-4}, & N > 4 \end{cases} \quad (4.2)$$

ve

$$\max \{2, m^+\} < p^- \leq p^+ < \begin{cases} \infty, & N \leq 4, \\ \frac{2N}{N-4}, & N > 4 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} m^- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} m(x), & m^+ = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} m(x), \\ p^- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x), & p^+ = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x) \end{cases}$$

dır.

4.1 Zamana Bağlı Türev İçermeyen Problem

Bu kısımda, (4.1) probleminin durağan çözümlerini inceleyeceğiz:

$$\begin{cases} \Delta^2 z - \Delta z + \Delta_{m(x)}^2 z = |z|^{p(x)-2} z, & \Omega, \\ z(x) = \frac{\partial}{\partial \nu} z(x) = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.4)$$

$m(x)$ ve $p(x)$, (4.2)-(4.3) ifadelerindeki koşulları sağlasın. Enerji fonksiyoneli $E(z)$ ve Nehari fonksiyoneli $I(z)$,

$$E(z) = \frac{1}{2} \|\nabla z\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\Delta z\|_2^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |\Delta z|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |z|^{p(x)} dx$$

ve

$$I(z) = \|\nabla z\|_2^2 + \|\Delta z\|_2^2 + \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır. $E(z)$ ve $I(z)$, $H_0^2(\Omega)$ uzayında tanımlanmış fonksiyonellerdir.

Ayrıca, $p(x)$ ve $m(x)$ tanımından dolayı

$$\begin{aligned} E(z) &\geq \frac{1}{2} \|\nabla z\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\Delta z\|_2^2 + \frac{1}{m^+} \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx - \frac{1}{p^-} \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-} \right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-} \right) \|\Delta z\|_2^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{m^+} - \frac{1}{p^-} \right) \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx + \frac{1}{p^-} I(z) \end{aligned} \quad (4.5)$$

ve

$$\begin{aligned} E(z) &\leq \frac{1}{2} \|\nabla z\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\Delta z\|_2^2 + \frac{1}{m^-} \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx - \frac{1}{p^+} \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^+} \right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^+} \right) \|\Delta z\|_2^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{m^-} - \frac{1}{p^+} \right) \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx + \frac{1}{p^+} I(z) \end{aligned} \quad (4.6)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Dolayısıyla gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} E(z) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-} \right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-} \right) \|\Delta z\|_2^2 + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{m(x)} - \frac{1}{p^-} \right) |\Delta z|^{m(x)} dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p(x)} \right) |z|^{p(x)} dx + \frac{1}{p^-} I(z) \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. Burada $z \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}$ olduğundan $\lambda > 0$ ise $\lambda \mapsto j(\lambda) := E(\lambda z)$ olur.

Yani

$$j(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} \|\nabla z\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2} \|\Delta z\|_2^2 + \int_{\Omega} \frac{\lambda^{m(x)}}{m(x)} |\Delta z|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{\lambda^{p(x)}}{p(x)} |z|^{p(x)} dx$$

dır.

Lemma 4.1.1 (4.2)-(4.3) sağlansın ve $z \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}$ olsun. Burada $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} j(\lambda) = 0$ ve $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} j(\lambda) = -\infty$ dır. Ayrıca $\lambda_* = \lambda_*(z) > 0$ dır ve $\lambda = \lambda_*$ noktasında $j(\lambda)$ maksimum değerini alır. Buradan $I(\lambda_* z) = 0$ eşitliği sağlanır. Sonuç olarak $I(z)$ değerine bağlı olarak aşağıdaki koşullar sağlanır:

- i. $0 < \lambda_* < 1$ ise $I(z) < 0$,
- ii. $\lambda_* = 1$ ise $I(z) = 0$,
- iii. $\lambda_* > 1$ ise $I(z) > 0$ dır.

İspat: $j(\lambda)$ nın tanımından

$$j(\lambda) \geq \frac{\lambda^2}{2} \|\nabla z\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2} \|\Delta z\|_2^2 + \min \left\{ \lambda^{m^-}, \lambda^{m^+} \right\} \int_{\Omega} \frac{\lambda^{m(x)}}{m(x)} |\Delta z|^{m(x)} dx \\ - \max \left\{ \lambda^{m^-}, \lambda^{m^+} \right\} \int_{\Omega} \frac{\lambda^{p(x)}}{p(x)} |z|^{p(x)} dx$$

ve

$$j(\lambda) \leq \frac{\lambda^2}{2} \|\nabla z\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2} \|\Delta z\|_2^2 + \max \left\{ \lambda^{m^-}, \lambda^{m^+} \right\} \int_{\Omega} \frac{\lambda^{m(x)}}{m(x)} |\Delta z|^{m(x)} dx \\ - \min \left\{ \lambda^{m^-}, \lambda^{m^+} \right\} \int_{\Omega} \frac{\lambda^{p(x)}}{p(x)} |z|^{p(x)} dx$$

yazılabilir. Dolayısıyla $p^- > \max \{2, m^+\}$ ve $\int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |z|^{p(x)} dx > 0$ dır ve yukarıdaki koşullar, $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} j(\lambda) = 0$ ve $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} j(\lambda) = -\infty$ olur. Ayrıca, yeterince küçük $\lambda > 0$ için $j(\lambda) > 0$ dır. Dolayısıyla, $\lambda_* > 0$ olacak şekilde $j(\lambda_*) = \sup_{\lambda > 0} j(\lambda)$ (yani $j(\lambda)$ fonksiyonunun pozitif λ değerleri için en büyük değerine ulaştığı bir maksimum nokta) vardır. Fermat teoreminden $j'(\lambda_*) = 0$ olur. Bu sonuç, $I(\lambda_* z) = 0$ eşitliğini sağlar. Sonuç olarak i), ii), iii) ifadeleri ispatlanır. $I(z)$ fonksiyonelinin tanımından

$$\begin{aligned}
0 &= I(\lambda_* z) \\
&= \lambda_*^2 \|\nabla z\|_2^2 + \lambda_*^2 \|\Delta z\|_2^2 + \int_{\Omega} \lambda_*^{m(x)} |\Delta z|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} \lambda_*^{p(x)} |z|^{p(x)} dx \\
&= \left(\lambda_*^2 - \lambda_*^{p^-} \right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(\lambda_*^2 - \lambda_*^{p^-} \right) \|\Delta z\|_2^2 + \int_{\Omega} \left(\lambda_*^2 - \lambda_*^{p^-} \right) |\Delta z|^{m(x)} dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \left(\lambda_*^2 - \lambda_*^{p^-} \right) |z|^{p(x)} dx + \lambda_*^{p^-} I(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\lambda_*^{p^-} I(z) &= \left(\lambda_*^{p^-} - \lambda_*^2 \right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(\lambda_*^{p^-} - \lambda_*^2 \right) \|\Delta z\|_2^2 \\
&\quad + \int_{\Omega} \left(\lambda_*^{p^-} - \lambda_*^2 \right) |\Delta z|^{m(x)} dx + \int_{\Omega} \left(\lambda_*^{p^-} - \lambda_*^2 \right) |z|^{p(x)} dx
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak ispat tamamlanır.

Nehari manifoldu

$$\mathcal{N} = \{z \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\} : I(z) = 0\}$$

dır. Lemma 4.1.1, $\mathcal{N}$ nin boş küme olmadığını ifade eder. Enerji fonksiyoneli $E(z)$ nin $\mathcal{N}$ üzerindeki infimum değeri d ,

$$d = \inf_{z \in \mathcal{N}} E(z) \quad (4.8)$$

şekilde tanımlanır. Sonraki lemma, ana sonucumuzda önemli bir rol oynayan düşük başlangıç enerjisini (low initial energy) içermektedir.

Lemma 4.1.2 (4.2)-(4.3) koşulları sağlansın ve $z \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}$ olsun. O halde

$$E(z) - \frac{1}{p^-} I(z) \geq \frac{d}{\max \left\{ \lambda_*^2, \lambda_*^{m^-}, \lambda_*^{p^+} \right\}}$$

dır. Burada λ_* , Lemma 4.1.1 de tanımlanmış olan maksimum noktadır.

İspat: Her $z \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}$ için, Lemma 4.1.1 e göre $\lambda_* \in (0, \infty)$ olacak biçimde bir λ_* vardır ve bu λ_* için $I(\lambda_* z) = 0$ eşitliği sağlanır. d nin tanımından ve (4.7)

denkleminde z nin yerine $\lambda_* z$ konularak şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
d &\leq E(\lambda_* z) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \lambda_*^2 \|\nabla z\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \lambda_*^2 \|\Delta z\|_2^2 \\
&\quad + \int_{\Omega} \lambda_*^{m(x)} \left(\frac{1}{m(x)} - \frac{1}{p^-}\right) |\Delta z|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} \lambda_*^{p(x)} \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p(x)}\right) |z|^{p(x)} dx \\
&\leq \max \left\{ \lambda_*^2, \lambda_*^{m^-}, \lambda_*^{p^+} \right\} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \|\Delta z\|_2^2 \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{m(x)} - \frac{1}{p^-}\right) |\Delta z|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p(x)}\right) |z|^{p(x)} dx \right] \\
&= \max \left\{ \lambda_*^2, \lambda_*^{m^-}, \lambda_*^{p^+} \right\} \left[E(z) - \frac{1}{p^-} I(z) \right].
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmıştır.

Daha önceki iki lemmanın sonuçlarına dayanarak, d nin pozitif olduğunu ve $z \in \mathcal{N}$ üzerinde elde edilebildiğini gösteren yeni bir lemmanın ispatı yapılacaktır.

Lemma 4.1.3 (4.2)-(4.3) sağlansın. O halde

i) $d = \inf_{z \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}} \sup_{\lambda > 0} E(\lambda z),$

ii) d pozitifdir ve

iii) $z^* \in \mathcal{N}$ vardır ve z^*, Ω da hemen hemen her yerde $z^*(x) \geq 0$ şartını sağlar. Ayrıca z^* için, $E(z^*) = d$ eşitliği sağlanır.

İspat: Lemma 4.1.1 e göre herhangi bir $z \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}$ için

$$\sup_{\lambda > 0} E(\lambda z) = E(\lambda_* z) \quad (4.9)$$

burada λ_* , Lemma 4.1.1 de elde edilen bir parametredir. Ayrıca $\lambda_* z \in \mathcal{N}$ olduğundan $E(\lambda_* z)$ değeri $\mathcal{N}$ üzerindeki en küçük değeri sağlayan $E(z)$ nin infimumu d ye eşittir. Aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$E(\lambda_* z) \geq \inf_{z \in \mathcal{N}} E(z) = d. \quad (4.10)$$

(4.9) ve (4.10) dan,

$$\inf_{z \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}} \sup_{\lambda > 0} E(\lambda z) \geq d \quad (4.11)$$

olur. Ayrıca, herhangi bir $z \in \mathcal{N}$ için $\lambda_* = 1$ dir ve Lemma 4.1.1 den

$$\sup_{\lambda > 0} E(\lambda z) = E(z) \quad (4.12)$$

olduğu görülür. (4.11) ve (4.12) den i) sağlanır.

Şimdi, ii) ifadesinde d nin pozitif bir sayı olduğunu göstermek için, belirli fonksiyonel eşitsizlikler ve normlar kullanılır. $p(x)$ in (4.3) de koşulunu sağladığı ve $H_0^2(\Omega)$ nin $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayına sürekli olarak gömülmesi yapılır. Yani

$$S_{p(\cdot)} = \sup_{z \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|z\|_{p(x)}}{\|\Delta z\|_2}$$

eşitliği ile gösterilir. Burada $S_{p(\cdot)}$ gömülme sabitidir. Herhangi bir $z \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}$ için $I(z) \leq 0$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|\Delta z\|_2^2 &\leq \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx \\ &\leq \max \left\{ \|z\|_{p(\cdot)}^{p^-}, \|z\|_{p(\cdot)}^{p^+} \right\} \\ &\leq \max \left\{ S_{p(\cdot)}^{p^-} \|\Delta z\|_2^{p^-}, S_{p(\cdot)}^{p^+} \|\Delta z\|_2^{p^+} \right\} \end{aligned}$$

olur. Sıradaki adım $p^- > 2$ ve $\|\Delta z\|_2 > 0$ olduğunu göstermektir. Buradan

$$\|\Delta z\|_2 \geq \delta_1 \quad (4.13)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\delta_1 = \min \left\{ S_{p(\cdot)}^{\frac{p^-}{2-p^-}}, S_{p(\cdot)}^{\frac{p^+}{2-p^+}} \right\}$$

dır. Sabit $z \in \mathcal{N}$ için, $z \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}$ ve $I(z) = 0$ dir. (4.5) ve (4.13) ifadelerinden

$$\begin{aligned} E(z) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-} \right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-} \right) \|\Delta z\|_2^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{m^+} - \frac{1}{p^-} \right) \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx + \frac{1}{p^-} I(z) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-} \right) (\|\nabla z\|_2^2 + \|\Delta z\|_2^2) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-} \right) \|\Delta z\|_2^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-} \right) \delta_1^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

elde edilir. O halde d nin tanımından

$$d \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-} \right) \delta_1^2 > 0$$

olduğu görülür. Sonuç olarak, iii) ü yani enerji fonksiyonelinin minimum değerini sağlayan z^* fonksiyonunun varlığını gösteriyoruz. z^* , $\mathcal{N}$ üzerinde yer aldığından ve $E(z^*) = d$ olduğu için d yi sağlayan kritik bir çözümün mevcut olduğu ortaya konacaktır. Şimdi (4.8) e göre $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{N}$ şeklinde bir dizi olsun ve $\{z_n\}$ dizisi, $E(z)$ yi minimize eden bir dizidir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} E(z_n) = d$ olduğundan, bu dizinin limit noktası z^* bulunmaktadır. Ayrıca hemen hemen her yerde Ω da $\forall n \in \mathbb{N}^*$ için $z_n(x) \geq 0$ olduğu varsayılır. Dolayısıyla $|z_n| \in \mathcal{N}$ ve $E(|z_n|) = E(z_n)$ olduğu açıktır. z_n fonksiyonları, $H_0^2(\Omega)$ uzayında sınırlıdır ve yansılmalı (refleksif) özelliği gösterir.

$\lim_{n \rightarrow \infty} E(z_n) = d$ ve (4.13) ifadesi kullanılırsa, $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$ gömülmesi kompakttır. (4.2) ve (4.3) ifadelerinin bir alt dizisi vardır ve $\{z_n\}$ olarak ifade edeceğiz.

Öyle bir $z^* \in H_0^2(\Omega)$ vardır ki:

$$\begin{aligned} z_n &\rightharpoonup z^*, H_0^1(\Omega) \text{ uzayında zayıf yakınsaktır,} \\ z_n &\rightharpoonup z^*, H_0^2(\Omega) \text{ uzayında zayıf yakınsaktır,} \\ z_n &\rightharpoonup z^*, W_0^{2,m(\cdot)}(\Omega) \text{ uzayında güçlü yakınsaktır,} \\ z_n &\rightharpoonup z^*, L^{p(\cdot)}(\Omega) \text{ uzayında güçlü yakınsaktır,} \\ z_n(x) &\rightarrow z^*(x), \Omega \text{ hemen hemen her yerde.} \end{aligned}$$

O halde Ω da neredeyse her yerde $z^*(x) \geq 0$ elde edilir ve

$$\|\nabla z^*\|_2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\nabla z_n\|_2,$$

$$\|\Delta z^*\|_2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\Delta z_n\|_2,$$

$$\int_{\Omega} |\Delta z^*|^{m(x)} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\Delta z_n|^{m(x)} dx,$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{m(x)} - \frac{1}{p^-} \right) |\Delta z^*|^{m(x)} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{m(x)} - \frac{1}{p^-} \right) |\Delta z_n|^{m(x)} dx,$$

$$\int_{\Omega} |z^*|^{p(x)} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |z_n|^{p(x)} dx,$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p(x)} \right) |z^*|^{p(x)} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p(x)} \right) |z_n|^{p(x)} dx$$

elde edilir. Burada z yerine z_n yazılırsa (4.7) ifadesi ve $z_n \in \mathcal{N}$ den

$$\begin{aligned}
d &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf E(z_n) \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-} \right) \|\nabla z^*\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-} \right) \|\Delta z^*\|_2^2 \\
&\quad + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{m(x)} - \frac{1}{p^-} \right) |\Delta z^*|^{m(x)} dx + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p(x)} \right) |z^*|^{p(x)} dx \\
&= E(z^*) - \frac{1}{p^-} I(z^*)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

dır. Varsayalım ki $I(z^*) < 0$ olsun. Lemma 4.1.1 ve Lemma 4.1.2 den $\lambda_* \in (0, 1)$ vardır. Dolayısıyla

$$E(z^*) - \frac{1}{p^-} I(z^*) \geq \frac{d}{\max \{ \lambda_*^2, \lambda_*^{m^-}, \lambda_*^{p^+} \}} > d$$

elde edilir. Bu (4.15) ile çelişir, $z_n \in \mathcal{N}$ olduğu için

$$I(z^*) \geq 0 \tag{4.16}$$

dır. Yani $I(z_n) = 0$ elde edilir, buradan

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf I(z_n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left(\|\nabla z_n\|_2^2 + \|\Delta z_n\|_2^2 + \int_{\Omega} |\Delta z_n|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} |z_n|^{p(x)} dx \right) \\
&\geq \|\nabla z^*\|_2^2 + \|\Delta z^*\|_2^2 + \int_{\Omega} |\Delta z^*|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} |z^*|^{p(x)} dx \\
&= I(z^*)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla (4.16) ifadesinden $I(z^*) = 0$ olduğunu çıkarabiliriz. Şimdi $z^* \in \mathcal{N}$ olduğunu gösterelim. Bunun için $z^* \neq 0$ olduğunu göstermeliyiz. O halde $z_n \in \mathcal{N}$ ve (4.12) ifadesinden

$$\int_{\Omega} |z_n|^{p(x)} dx = \|\nabla z_n\|_2^2 + \|\Delta z_n\|_2^2 + \int_{\Omega} |\Delta z_n|^{m(x)} dx \geq \delta_1^2$$

elde edilir. Buradan

$$\int_{\Omega} |z^*|^{p(x)} dx \geq \delta_1^2 > 0$$

olduğu görülür. Ayrıca $z^* \neq 0$ olur, çünkü z_n dizisinin normları sıfırdan büyük olup, limitte de sıfırdan büyük olacaktır. Yani $E(z^*) \geq d$ dir. Sonuç olarak (4.15) de kullanılarak, $z^* \in \mathcal{N}$ olup $E(z^*) = d$ ve $I(z^*) = 0$ olduğu bulunur. Dolayısıyla d yi sağlayan bir z^* fonksiyonu vardır ve bu fonksiyon, Nehari manifoldu üzerinde yer alır ve minimum enerji seviyesini sağlar. İspat tamamlanmıştır.

Sonraki adımda, Sattinger'in çalışmasına benzer şekilde, kararlı küme $\mathcal{W}$, kararsız küme $\mathcal{U}$ olarak tanımlanır (Sattinger, 1968).

$$\mathcal{W} = \{z \in H_0^2(\Omega) : E(z) < d, I(z) > 0\} \cup \{0\},$$

$$\mathcal{U} = \{z \in H_0^2(\Omega) : E(z) < d, I(z) < 0\}$$

olsun. Ayrıca

$$\mathcal{N}_- = \{z \in H_0^2(\Omega) : I(z) < 0\}, \quad \mathcal{N}_+ = \{z \in H_0^2(\Omega) : I(z) > 0\}$$

verilir. Burada E^k ,

$$E^k = \{z \in H_0^2(\Omega) : E(z) < k\}$$

olsun. Ayrıca $\forall k > d$ için

$$\mathcal{N}_k := \mathcal{N} \cap E^k \neq \emptyset$$

dır. Dolayısıyla

$$\lambda_k = \inf \{\|z\|_2 : z \in \mathcal{N}_k\} \text{ ve } \Lambda_k = \sup \{\|z\|_2 : z \in \mathcal{N}_k\} \quad (4.17)$$

dir. Burada $k \mapsto \lambda_k$ artmayan ve $k \mapsto \Lambda_k$ azalmayan olduğu açıktır. Aşağıdaki lemma λ_k ve Λ_k nin sonlu pozitif değerler olduğunu gösterir bu da Teorem 4.2.7 nin önemini gösterir.

Lemma 4.1.4 (4.2)-(4.3) koşulları sağlansın. Bu durumda $k > d$ için, (4.17) de tanımlanan $0 < \lambda_k \leq \Lambda_k < \infty$ aralığında, λ_k ve Λ_k koşullarını sağlar.

İspat: İlk olarak $\Lambda_k < \infty$ olduğunu göstermekle başlayalım. Herhangi bir $k > d$ ve $z \in \mathcal{N}_k$ için, $E(z) < k$ ve $I(z) = 0$ olur. (4.5) e göre ve $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ gömülmesi

kullanılırsa

$$\begin{aligned}
k > E(z) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \|\Delta z\|_2^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{m^+} - \frac{1}{p^-}\right) \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx + \frac{1}{p^-} I(z) \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \|\Delta z\|_2^2 \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) S_2^{-2} \|z\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edilir. Daha sonra

$$\|z\|_2 \leq S_2 \sqrt{\frac{2kp^-}{p^- - 2}}$$

dır. Burada $S_2 > 0$ olacak şekilde

$$S_2 = \sup_{z \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|z\|_2}{\|\Delta z\|_2} \tag{4.19}$$

optimal gömülme sabitidir. Dolayısıyla

$$\Lambda_k \leq S_2 \sqrt{\frac{2kp^-}{p^- - 2}} < \infty$$

ile gösterilebilir. İkinci olarak $\lambda_k > 0$ olduğunu göstermek için Gagliardo-Nirenberg eşitsizliğine göre yalnızca Ω , N , p^- ve p^+ ya sadece bağlı olan pozitif bir sabit A_0 sabiti bulunmaktadır, öyle ki:

$$\begin{aligned}
\|z\|_{p^-}^{p^-} &\leq A_0 \|\Delta z\|_2^{\theta^- p^-} \|z\|_2^{(1-\theta^-)p^-}, \\
\|z\|_{p^+}^{p^+} &\leq A_0 \|\Delta z\|_2^{\theta^+ p^+} \|z\|_2^{(1-\theta^+)p^+}
\end{aligned}$$

dır. Burada (4.3) ifadesinden $\theta^\pm = \frac{N(p^\pm - 2)}{4p^\pm} \in (0, 1)$ dir. Daha sonra $z \in \mathcal{N}_k$ ve $\mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\|\Delta z\|_2^2 &\leq \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx \\
&\leq \int_{\Omega} (|z|^{p^-} + |z|^{p^+}) dx \\
&\leq 2 \max \left\{ \|z\|_{p^-}^{p^-}, \|z\|_{p^+}^{p^+} \right\} \\
&\leq 2A_0 \max \left\{ \|\Delta z\|_2^{\theta^- p^-} \|z\|_2^{(1-\theta^-)p^-}, \|\Delta z\|_2^{\theta^+ p^+} \|z\|_2^{(1-\theta^+)p^+} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\|\Delta z\|_2 > 0$ ve $\theta^\pm < 1$ dan

$$\|z\|_2 \geq \min \left\{ (2A_0)^{\frac{1}{(\theta^- - 1)p^-}} \|\Delta z\|_2^{\frac{2-\theta^- p^-}{(1-\theta^-)p^-}}, (2A_0)^{\frac{1}{(\theta^+ - 1)p^+}} \|\Delta z\|_2^{\frac{2-\theta^+ p^+}{(1-\theta^+)p^+}} \right\} \quad (4.20)$$

dır. Ayrıca (4.13) ve (4.18) ifadelerinden $\forall z \in \mathcal{N}_k$ için,

$$\delta_1 \leq \|\Delta z\|_2 \leq \sqrt{\frac{2kp^-}{p^- - 2}} = \delta_2$$

dır. (4.20) ifadesinden

$$\|z\|_2 \geq \min \left\{ \begin{array}{l} (2A_0)^{\frac{1}{(\theta^- - 1)p^-}} \min \left\{ \delta_1^{\frac{2-\theta^- p^-}{(1-\theta^-)p^-}}, \delta_2^{\frac{2-\theta^- p^-}{(1-\theta^-)p^-}} \right\}, \\ (2A_0)^{\frac{1}{(\theta^+ - 1)p^+}} \min \left\{ \delta_1^{\frac{2-\theta^+ p^+}{(1-\theta^+)p^+}}, \delta_2^{\frac{2-\theta^+ p^+}{(1-\theta^+)p^+}} \right\} \end{array} \right\} > 0$$

elde edilir. Bu nedenle, λ_k tanımına göre $\lambda_k > 0$ dır. Buna göre ispat tamamlanır.

Son olarak, yüksek başlangıç enerjisi (high initial energy) durumunda ana sonuçların ispatları için gerekli olan aşağıdaki lemmayı göstereceğiz.

Lemma 4.1.5 (4.2)-(4.3) koşulları sağlansın, o halde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

- i) $\text{dist}(0, \mathcal{N}) > 0$ ve $\text{dist}(0, \mathcal{N}_-) > 0$ ve
- ii) Herhangi bir $k > 0$ için $\mathcal{N}_+ \cap E^k$ kümesi, $H_0^2(\Omega)$ içinde sınırlıdır.

İspat:

- i) $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{N}_-$ kümelerindeki herhangi bir z için (4.13) den

$$\text{dist}(0, \mathcal{N}) = \inf_{z \in \mathcal{N}} \|\Delta z\|_2 \geq \delta_1 > 0,$$

$$\text{dist}(0, \mathcal{N}_-) = \inf_{z \in \mathcal{N}_-} \|\Delta z\|_2 \geq \delta_1 > 0$$

elde ederiz. Burada $\delta_1 > 0$ sabit bir alt sınırdır. Dolayısıyla $\text{dist}(0, \mathcal{N}) > 0$ ve $\text{dist}(0, \mathcal{N}_-) > 0$ olduğunu kanıtlar.

- ii) nin ispatına devam edelim. Herhangi bir $z \in \mathcal{N}_+ \cap E^k$ için $E(z) < k$ ve $I(z) > 0$ olduğunu biliyoruz. (4.5) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} k > E(z) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-} \right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-} \right) \|\Delta z\|_2^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{m^+} - \frac{1}{p^-} \right) \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx + \frac{1}{p^-} I(z) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-} \right) \|\Delta z\|_2^2 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\|\Delta z\|_2 < \sqrt{\frac{2kp^-}{p^- - 2}}$$

dır ve ispatı tamamlanır.



4.2 Evolüsyon Problem

Bu kısımda (4.1) denkleminin çözümünün tanımını açık bir şekilde verelim.

Tanım 4.2.1 $\Omega \times [0, T)$ alanında tanımlanan bir $z(t)$ fonksiyonunu ele alalım, burada $T > 0$ dir. Eğer $z(t)$ şu koşulları sağlıyorsa $\Omega \times [0, T)$ alanında denklem (4.1) için bir zayıf çözümdür.

1. $z(t) \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$ de $z(t)$, $[0, T)$ aralığında $H_0^2(\Omega)$ uzayında bir fonksiyondur. $H_0^2(\Omega)$ ikinci türevleri alınabilen ve belirli sınır koşullarını sağlayan fonksiyonları içeren bir Sobolev uzayıdır.
2. $z_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ de, z_t zaman türevini temsil eder ve bu türev t için $L^2(\Omega)$ normuna sahiptir.
3. $z(t)$ nin başlangıç koşulu $z(0) = z_0$ olup, burada $z(0) = z_0 \in H_0^2(\Omega)$ dır. Başlangıç koşulu Ω üzerinde $t = 0$ zamanındaki homojen Dirichlet sınır koşullarını temsil eder. Burada $\forall t \in (0, T)$ için

$$\langle z_t, v \rangle + \langle \nabla z, \nabla v \rangle + \langle \Delta z, \Delta v \rangle + \left\langle |\Delta z|^{m(x)-2} \Delta z, \Delta v \right\rangle = \left\langle |z|^{p(x)-2} z, v \right\rangle \quad (4.21)$$

dır. Herhangi bir $v \in H_0^2(\Omega)$ için sağlanır. Dolayısıyla $[0, T)$ aralığında enerji fonksiyonu olan $E(z)$ aşağıdaki şekilde

$$\int_0^t \|z'(s)\|_2^2 ds + E(z) = E(z_0) \quad (4.22)$$

enerji korunumu özelliğini sağlar. Bu enerji korunumu, zayıf çözümün fiziksel geçerliliğini ve problemin kararlılığını doğrular.

Tanım 4.2.2 $z(t)$, (4.1) probleminin bir zayıf çözüm olsun. $z(t)$ nin maksimum varlık zamanını $T_{\max}$ ı aşağıdaki şekilde tanımlarız:

- i) Eğer $z(t)$, $0 \leq t < \infty$ aralığında ise o halde $T_{\max} = \infty$ dır.
- ii) Eğer $t_0 > 0$ ve $z(t)$, $0 \leq t < t_0$ aralığında mevcut ise, ancak $t = t_0$ anında çözüm artık mevcut değilse, o zaman $T_{\max} = t_0$ dır.

Lemma 4.2.3 (4.2)-(4.3) koşulları ve $E(z_0) < d$ koşulu altında, sağlansın. Bu durumda

- i) Eğer $I(z_0) < 0$ ise, o zaman $\forall t \in [0, T_{\max})$ için $I(z) < 0$ dır,
- ii) Eğer $I(z_0) \geq 0$ ise, o zaman $\forall t \in [0, T_{\max})$ için $I(z) \geq 0$ dır.

İspat: $t \in [0, T_{\max})$ aralığındaki her t için $z(t) \notin \mathcal{N}$ dir. Çünkü $E(z) \leq E(z_0) < d$ eşitsizliği sağlanmaktadır.

i) Aksini varsayalım: Kabul edelim ki $t_0 \in (0, T_{\max})$ olacak şekilde bir t_0 vardır ve $I(z(t)) < 0$, $t \in [0, t_0]$ için $I(z(t_0)) = 0$ olsun, o zaman (4.13) kullanılarak $\forall t \in [0, t_0]$ için $\|\Delta z(t)\|_2 \geq \delta_1$ elde ederiz. $t \rightarrow t_0$ için $\|\Delta z(t_0)\|_2 \geq \delta_1$ elde edilir. Bu da $z(t_0) \neq 0$ sonucunu verir. Bu nedenle $z(t_0) \in \mathcal{N}$ olur. Böylece bir çelişkiye ulaşılır.

ii) Aksini varsayalım: $t_1 \in (0, T_{\max})$ olacak şekilde bir t_1 olduğunu varsayalım. Bu durum ve $I(z_0) \geq 0$, $t_2 \in [0, t_1]$ olacak şekilde bir t_2 varlığını ve $I(z(t_2)) = 0$ olduğunu ima eder. Bu $z(t_2) = 0$ sonucunu verir. Çünkü $z(t_2) \notin \mathcal{N}$ dır. Bundan dolayı $t \in [t_2, T_{\max})$ aralığı için $z(t) = 0$ olur. Böylece $z(t_1) = 0$ elde edilir. Bu durum $I(z(t_1)) < 0$ ile çelişir. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

S , (4.1) denkleminin durağan (statik) çözümlerini içeren bir kümedir.

$$S = \{ \phi \in H_0^2(\Omega) : \phi, (4.1) \text{ denkleminin durağan bir çözümüdür.} \}$$

ve başlangıç verisi $z_0 \in W_0^{2,m(\cdot)}(\Omega)$ ye karşılık gelen ω -limit kümesi şu şekilde tanımlanır:

$$\omega(z_0) = \{ \omega \in H_0^2(\Omega) : \exists \{t_n\} \text{ ve } t_n \rightarrow \infty \text{ öyleki } z(t_n) \rightarrow \omega \}.$$

Burada $\omega(z_0)$, $z(t_n)$ nin zamanla ($t_n \rightarrow \infty$) durağan çözüm ω ye yaklaştığını ifade eder. $z(t)$, başlangıç verisi $z_0 \in H_0^2(\Omega)$ ye karşılık gelen (4.1) denkleminin bir çözümü olsun. Bu çözüm, maksimum tanımlı olduğu zaman aralığı $[0, T_{\max})$ da incelenir.

Daha sonra aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$\begin{aligned} G &= \{ z_0 \in H_0^2(\Omega) : z(t) \text{ global olarak var olur, yani } T_{\max} = \infty \}, \\ G_0 &= \{ z_0 \in G : t \rightarrow \infty \text{ olduğunda } z(t), H_0^2(\Omega) \text{ içinde } z(t) \rightarrow 0 \text{ olur} \}, \\ B &= \{ z_0 \in H_0^2(\Omega) : z(t) \text{ sonlu bir zamanda (yani } T_{\max} < \infty) \text{ patlar} \}. \end{aligned}$$

Ana sonuçlar aşağıda belirtilmiştir.

Teorem 4.2.4 (4.2)-(4.3) şartları sağlansın. Eğer $E(z_0) < d$ ve $I(z_0) \geq 0$ ise maksimum varlık zamanı $T_{\max} = \infty$ olur. Ayrıca $z(t)$ çözümü aşağıdaki azalma kestirimlerini sağlar:

$$\|z(t)\|_2 \leq \|z_0\|_2 e^{-\alpha t},$$

$$\|\Delta z(t)\|_2 \leq \sqrt{\frac{2q^-}{q^- - 2} (E(z_0) + \|z_0\|_2^2) e^{-\beta t}},$$

$$\sqrt{E(z) + \|z(t)\|_2^2} \leq \sqrt{(E(z_0) + \|z_0\|_2^2) e^{-\beta t}}.$$

Burada α ve β pozitif sabitlerdir.

Teorem 4.2.5 (4.2)-(4.3) ifadeleri sağlansın.

i) Eğer $z_0 \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}$ ve $E(z_0) \leq 0$ ise, o zaman $T_{\max} < \infty$ olur. Ayrıca, maksimum varlık zamanı için bir üst sınır elde edilir:

$$T_{\max} \leq C_{\max} \left\{ \|z_0\|_2^{2-p^-}, \|z_0\|_2^{2-p^+} \right\}$$

burada

$$C = \frac{p^- \max \left\{ S_{p(\cdot),2}^{p^-}, S_{p(\cdot),2}^{p^+} \right\}}{(p^- - 2) (p^- - \max \{2, m^+\})} > 0 \quad (4.23)$$

dır ve $S_{p(\cdot),2}, L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ gömülmesi için en iyi sabittir. Özellikle $p^- > 2$ olduğunda

$$S_{p(\cdot),2} = \sup_{z \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|z\|_2}{\|z\|_{p(\cdot)}} \quad (4.24)$$

dır.

ii) Eğer $0 < E(z_0) < d$ ve $I(z_0) < 0$ ise, o zaman $T_{\max} < \infty$ olur.

Teorem 4.2.6 (4.2)-(4.3) ifadeleri sağlansın ve $z(t)$, (4.1) denkleminin bir global çözümü olsun. O halde, $n \rightarrow \infty$ için $t_n \rightarrow \infty$ olacak şekilde bir $\{t_n\}$ dizisi vardır ve $\phi \in S$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta z(t_n) - \Delta \phi\|_2 = 0$$

dır.

Teorem 4.2.7 (4.2)-(4.3) ifadeleri sağlansın ve $E(z_0) > d$ olsun. Eğer $z_0 \in \mathcal{N}_+$ ve $\|z_0\|_2 \leq \lambda_{E(z_0)}$ ise, o zaman $z_0 \in G_0$ olur. Eğer $z_0 \in \mathcal{N}_-$ ve $\|z_0\|_2 \leq \Lambda_{E(z_0)}$ ise, o zaman $z_0 \in B$ dır.

Teorem 4.2.8 (4.2)-(4.3) ifadeleri sağlansın ve başlangıç verisi $z_0 \in H_0^2(\Omega)$ şu koşulları sağlasın: $E(z_0) > d$ ve

$$\|z_0\|_2^2 \geq \frac{2p^- S_2^2}{p^- - 2} E(z_0) \quad (4.25)$$

o zaman $z_0 \in \mathcal{N}_- \cap B$ olur. Burada S_2 , (4.19) denkleminde tanımlanan sabittir.

Teorem 4.2.4 ün ispatı: $z = z(x, t)$, başlangıç verisi z_0 olan (4.1) denkleminin $[0, T_{\max})$ aralığındaki bir çözümü olsun. Öncelikle, $z(t)$ nin $H_0^2(\Omega)$ uzayında düzgün sınırlı olduğunu göstereceğiz. Süreklilik prensibinden $T_{\max} = \infty$ olur. Ayrıca, $E(z_0) < d$ ve $I(z_0) \geq 0$ olduğundan, Lemma 4.2.3 e göre $I(z) \geq 0$ dır. Daha sonra $E(z)$ nin artmayan özelliği ve (4.5) i kullanarak

$$\begin{aligned}
E(z_0) &\geq E(z) \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \|\Delta z\|_2^2 + \frac{1}{p^-} I(z) \\
&\quad + \left(\frac{1}{m^+} - \frac{1}{p^-}\right) \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx - \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{p^-}\right) \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \|\Delta z\|_2^2 \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \|\Delta z\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilir. Buradan

$$\|\Delta z\|_2^2 \leq \sqrt{\frac{2p^- E(z_0)}{p^- - 2}}$$

dır.

Şimdi, $z(t)$ nin azalma kestirimlerini gösteriyoruz. İki durumu ele alalım:

1. Durum: Eğer $t_0 \geq 0$ için $z(t_0) = 0$ olursa $t \geq t_0$ için $z(t) = 0$ olur ve ispat tamamlanır.

2. Durum: $t \geq 0$ için $z(t) \neq 0$ dır. O halde $I(z) \geq 0$ olduğundan, Lemma 4.1.1 e göre

$\lambda_* \geq 1$ için $I(\lambda_* z) = 0$ olacak biçimde bir λ_* vardır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\lambda_*^{p^-} I(z) &= \lambda_*^{p^-} I(z) - I(\lambda_* z) \\
&= \left(\lambda_*^{p^-} - \lambda_*^2 \right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(\lambda_*^{p^-} - \lambda_*^2 \right) \|\Delta z\|_2^2 \\
&\quad + \int_{\Omega} \left(\lambda_*^{p^-} - \lambda_*^{m(x)} \right) |\Delta z|^{m(x)} dx + \int_{\Omega} \left(\lambda_*^{p(x)} - \lambda_*^p \right) |z|^{p(x)} dx \\
&\geq \left(\lambda_*^{p^-} - \lambda_*^2 \right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(\lambda_*^{p^-} - \lambda_*^2 \right) \|\Delta z\|_2^2 \\
&\quad + \int_{\Omega} \left(\lambda_*^{p^-} - \lambda_*^{m(x)} \right) |\Delta z|^{m(x)} dx
\end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki eşitsizlik $\lambda_*^{p^-}$ ile bölünürse

$$\begin{aligned}
I(z) &\geq \left(1 - \lambda_*^{2-p^-} \right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(1 - \lambda_*^{2-p^-} \right) \|\Delta z\|_2^2 \\
&\quad + \left(1 - \lambda_*^{m^+-p^-} \right) \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx
\end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir. Daha sonra, λ_* değeri için kestirimde bulunalım. Lemma 4.1.2 uygulanır ve

$\lambda_* \geq 1$ dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
E(z(t)) - \frac{1}{q^-} I(z(t)) &\geq \frac{d}{\max \left\{ \lambda_*^2, \lambda_*^{m^-}, \lambda_*^{p^+} \right\}} \\
&= \frac{d}{\lambda_*^{p^+}}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

olur. Böylece, $E(z)$ nin artmayan özelliği ve $I(z) \geq 0$ kullanılırsa

$$E(z) - \frac{1}{p^-} I(z) \leq E(z_0)$$

elde edilir. Burada (4.28) den

$$\lambda_* \geq \left(\frac{d}{E(z_0)} \right)^{1/p^+} > 1 \tag{4.29}$$

dır. (4.27) ve (4.29) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
I(z) &\geq \left(1 - \left(\frac{d}{E(z_0)} \right)^{\frac{2-p^-}{p^+}} \right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(1 - \left(\frac{d}{E(z_0)} \right)^{\frac{2-p^-}{p^+}} \right) \|\Delta z\|_2^2 \\
&\quad + \left(1 - \left(\frac{d}{E(z_0)} \right)^{\frac{m^+-p^-}{p^+}} \right) \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx
\end{aligned}$$

ortaya çıkar. Dolayısıyla

$$I(z) \geq C_1 \|\nabla z\|_2^2, I(z) \geq C_2 \|\Delta z\|_2^2 \text{ ve } I(z) \geq C_3 \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \quad (4.30)$$

elde edilir. Daha sonra

$$C_1 = 1 - \left(\frac{d}{E(z_0)} \right)^{\frac{2-p^-}{p^+}}, C_2 = 1 - \left(\frac{d}{E(z_0)} \right)^{\frac{2-p^-}{p^+}} \text{ ve } C_3 = 1 - \left(\frac{d}{E(z_0)} \right)^{\frac{m^+-p^-}{p^+}}$$

dır. Son olarak $\|z\|_2$ nin üstel azaldığını gösterelim. (4.21) denkleminde $v = z$ alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|z\|_2^2 &= -2 \left(\|\nabla z\|_2^2 + \|\Delta z\|_2^2 + \int_{\Omega} |\Delta z|^{p(x)} dx - \int_{\Omega} |z|^{q(x)} dx \right) \\ &= -2I(z) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade ve (4.30) kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|z\|_2^2 &\leq -2 (C_1 \|\nabla z\|_2^2 + C_2 \|\Delta z\|_2^2) \\ &\leq -2C_2 \|\Delta z\|_2^2 \\ &\leq -2C_2 \|\Delta z\|_2^2 \\ &\leq -2C_2 S_2^{-2} \|z\|_2^2 \end{aligned}$$

olduğu görülür. S_2 , (4.19) ifadesinde verilen sabittir. Yani

$$\|z\|_2 \leq \|z_0\|_2 e^{-\alpha t}$$

dır. Ayrıca $\alpha = C_2 S_2^{-2} > 0$ olduğu görülür.

Benzer şekilde, $E(z)$ nin ve $\|\Delta z\|_2$ nin üstel azaldığını göstermek için (4.6) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned} E(z) &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^+} \right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^+} \right) \|\Delta z\|_2^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{m^-} - \frac{1}{p^+} \right) \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx + \frac{1}{p^+} I(z) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (4.30) den

$$E(z) \leq C_4 I(z) \quad (4.31)$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^+} \right) + \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^+} \right) \\ &\quad + \frac{1}{C_3} \left(\frac{1}{m^-} - \frac{1}{p^+} \right) + \frac{1}{p^+} \\ &> 0 \end{aligned}$$

dır. Şimdi $\forall t \geq 0$ için $L(t)$ yardımcı fonksiyonelimizi tanımlayalım:

$$L(t) = E(z) + \|z\|_2^2 \quad (4.32)$$

dır. Böylece (4.26) ve (4.32) den

$$L(t) \leq E(z) + S_2^{-2} \|z\|_2^2 \leq C_5 E(z) \quad (4.33)$$

elde edilir. Burada $C_5 = 1 + \frac{2p^-}{p^- - 2} S_2^2 > 0$ ve S_2 (4.19) de verilen sabittir. Böylece (4.31), (4.32) ve (4.33) den

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) &= -\|z'\|_2^2 - 2I(z) \leq -\frac{2}{C_4} E(z) \\ &\leq -\frac{2}{C_4 C_5} L(t) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$L(t) \leq L(0) e^{-2\beta t}$$

dır. Burada $\beta = \frac{1}{C_4 C_5} > 0$ dır. Yukarıdaki eşitsizlik yeniden düzenlenirse

$$E(z) + \|z\|_2^2 \leq (E(z_0) + \|z_0\|_2^2) e^{-2\beta t} \quad (4.34)$$

ispatlanmış olur.

Teorem 4.2.5 in ispatı: Aşağıdaki iki farklı durumu ele alıp ve bu durumları farklı yöntemlerle inceleyelim:

1. Durum: $z_0 \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}$ için $E(z_0) \leq 0$ olsun. Burada $\forall t \in [0, T_{\max})$ için

$$f(t) = \|z\|_2^2$$

olsun. $E(z)$ ve $I(z)$ nin tanımından

$$\begin{aligned}
E(z) &\geq \frac{1}{2} \|\nabla z\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\Delta z\|_2^2 \\
&\quad + \frac{1}{m^+} \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx - \frac{1}{p^-} \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx \\
&\geq \frac{1}{\max\{2, m^+\}} \left(\|\nabla z\|_2^2 + \|\Delta z\|_2^2 + \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right) \\
&\quad - \frac{1}{p^-} \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx \\
&= \left(\frac{1}{\max\{2, m^+\}} - \frac{1}{p^-} \right) \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx + \frac{1}{\max\{2, m^+\}} I(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliği dikkate alarak ve $E(z) \leq E(z_0) \leq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
f'(t) &= -2I(z) \\
&\geq -2 \max\{2, m^+\} J(z) + 2 \left(1 - \frac{\max\{2, m^+\}}{p^-} \right) \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx \\
&\geq 2 \left(1 - \frac{\max\{2, m^+\}}{p^-} \right) \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx
\end{aligned} \tag{4.35}$$

sonucuna ulaşılır. Elde edilen $p^- > \max\{2, m^+\}$ eşitsizliği, $f'(t) \geq 0$ olur. Dolayısıyla $\forall t \in [0, T_{\max})$ için

$$f(t) \geq f(0) = \|z_0\|_2^2 > 0 \tag{4.36}$$

dır. O halde (4.36) dan $\int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx$ için aşağıdaki şekilde kestirimde bulunabiliriz:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx &\geq \min \left\{ \|z\|_{p(\cdot)}^{p^-}, \|z\|_{p(\cdot)}^{p^+} \right\} \\
&\geq \min \left\{ S_{p(\cdot),2}^{-p^-} \|z\|_2^{p^-}, S_{p(\cdot),2}^{-p^+} \|z\|_2^{p^+} \right\} \\
&\geq \min \left\{ S_{p(\cdot),2}^{-p^-}, S_{p(\cdot),2}^{-p^+} \right\} \min \left\{ \|z\|_2^{p^-}, \|z\|_2^{p^+} \right\} \\
&= \min \left\{ S_{p(\cdot),2}^{-p^-}, S_{p(\cdot),2}^{-p^+} \right\} \min \left\{ 1, f^{\frac{p^+-p^-}{2}}(t) \right\} f^{\frac{p^-}{2}}(t) \\
&\geq \min \left\{ S_{p(\cdot),2}^{-p^-}, S_{p(\cdot),2}^{-p^+} \right\} \min \left\{ 1, \|z_0\|_2^{p^+-p^-} \right\} f^{\frac{p^-}{2}}(t),
\end{aligned} \tag{4.37}$$

dır. Burada $S_{p(\cdot),2}$, (4.24) de tanımlanmıştır. (4.35) ve (4.37) den

$$f'(t) \geq C_0 f^{\frac{p^-}{2}}(t) \tag{4.38}$$

dır. Dolayısıyla

$$C_0 = 2 \left(1 - \frac{\max \{2, p^+\}}{p^-} \right) \min \left\{ S_{p(\cdot), 2}^{-p^-}, S_{p(\cdot), 2}^{-p^+} \right\} \min \left\{ 1, \|z_0\|_2^{p^+ - p^-} \right\} > 0$$

olur. $f(t) > 0$ olduğundan, yukarıdaki eşitsizlik $f^{\frac{p^-}{2}}(t)$ ye bölünürse (4.38) eşitsizliği

$$f'(t) f^{-p^-/2}(t) \geq C_0$$

şeklinde olur. $\forall t \in [0, T_{\max})$ için yukarıdaki eşitsizliğin $[0, t]$ aralığında integrali alınırsa

$$f^{1-\frac{p^-}{2}}(t) \leq f^{1-\frac{p^-}{2}}(0) - \left(\frac{p^-}{2} - 1 \right) C_0 t$$

olduğu görülür. Bu eşitsizlikten ve $f^{1-\frac{p^-}{2}}(t) > 0$ koşulundan

$$t < \frac{2}{(p^- - 2) C_0} \|z_0\|_2^{2-p^-}$$

elde edilir. Bu da

$$\begin{aligned} T_{\max} &\leq \frac{2}{(p^- - 2) C_0} \|z_0\|_2^{2-p^-} \\ &= C \max \left\{ \|z_0\|_2^{2-p^-}, \|z_0\|_2^{2-p^+} \right\} \end{aligned}$$

olur. Burada C , (4.23) denkleminde verilen sabittir.

2. Durum: $0 < E(z_0) < d$ ve $I(z_0) < 0$ dır. $T_{\max} = \infty$ olduğunu kabul edip çelişki elde edeceğiz. $I(z_0) < 0$ olduğundan, Lemma 4.2.3 e göre $I(z(t)) < 0$ olur. Lemma 4.1.1 ve Lemma 4.1.2 kullanılarak $\lambda_* \in (0, 1)$ olacak şekilde

$$E(z) - \frac{1}{p^-} I(z) \geq \frac{d}{\max \left\{ \lambda_*^2, \lambda_*^{m^-}, \lambda_*^{p^+} \right\}} > d$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|z\|_2^2 &= -2I(z) > 2p^- (d - E(z)) \\ &\geq 2p^- (d - E(z_0)) \end{aligned}$$

dır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= \|z_0\|_2^2 + \int_0^t \frac{d}{ds} \|z(s)\|_2^2 ds \\ &\geq \|z_0\|_2^2 + 2p^- (d - E(z_0)) t \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle, $E(z_0) < d$ olduğundan $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z\|_2^2 = \infty$ elde ederiz. $t_0 > 0$ için yeterince büyük t_0 seçilir ve

$$\|z(t_0)\|_2^2 > \frac{p^-}{(p^- - 2)} \|z_0\|_2^2$$

olduğu görülür. Şimdi, aşağıdaki şekilde T yi tanımlayalım:

$$T = \frac{\int_0^{t_0} \|z(s)\|_2^2 ds}{\left(\frac{p^-}{2} - 1\right) \left(\|z(t_0)\|_2^2 - \frac{p^-}{(p^- - 2)} \|z_0\|_2^2\right)} + t_0 \geq t_0 > 0. \quad (4.39)$$

Burada T pozitif bir değerdir. Şimdi yardımcı bir fonksiyon tanımlayalım. $F : [0, T] \rightarrow (0, \infty)$ yardımcı fonksiyonumuz

$$F(t) = \int_0^t \|z(s)\|_2^2 ds + (T - t) \|z_0\|_2^2 \quad (4.40)$$

şeklinde tanımlanır. Daha sonra $F(t)$ fonksiyonunun türevlerini hesaplayalım:

$$F'(t) = \|z\|_2^2 - \|z_0\|_2^2 = 2 \int_0^t \langle z'(s), z(s) \rangle ds$$

ve

$$\begin{aligned} F''(t) &= 2 \langle z'(t), z(t) \rangle = -2I(z(t)) \\ &> 2p^-(d - E(z(t))) \\ &= 2p^-(d - E(z_0)) + 2p^- \int_0^t \|z'(s)\|_2^2 ds \\ &\geq 2p^- \int_0^t \|z'(s)\|_2^2 ds \end{aligned} \quad (4.41)$$

olduğu görülür. (4.40) ve (4.41) denklemlerinden

$$F(t) F''(t) \geq 2p^- \int_0^t \|z'(s)\|_2^2 ds \int_0^t \|z(s)\|_2^2 ds \quad (4.42)$$

elde edilir. Ayrıca, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_0^t \|z'(s)\|_2^2 ds \int_0^t \|z(s)\|_2^2 ds &\geq \left(\int_0^t \langle z'(s), z(s) \rangle ds \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (F(t))^2 \end{aligned} \quad (4.43)$$

dır. $\forall t \in [0, T]$ için (4.42) ve (4.43) den

$$F(t) F''(t) \geq \frac{p^-}{2} \left(F'(t) \right)^2 \quad (4.44)$$

olur. Şimdi $G(t) = F^{1-\frac{p^-}{2}}(t)$ olacak şekilde bir fonksiyon tanımlayalım:

$$G'(t) = \left(1 - \frac{p^-}{2} \right) \frac{F'(t)}{F^{\frac{p^-}{2}}(t)},$$

$$G''(t) = \left(1 - \frac{p^-}{2} \right) \frac{F(t) F''(t) - \frac{p^-}{2} (F'(t))^2}{F^{1+\frac{p^-}{2}}(t)}$$

dır. Sonuç olarak, (4.44) denklemini kullanarak tüm $t \in [0, T]$ için $G''(t) \leq 0$ ve $G(t)$ konkavdır. Dolayısıyla

$$G(t) \leq G(t_0) + G'(t_0)(t - t_0)$$

elde edilir. Burada t yerine T yi koyarsak ve (4.39) ifadesini dikkate alırsak

$$G(T) \leq G(t_0) + G'(t_0)(T - t_0)$$

$$= F^{-\frac{p^-}{2}}(t_0) \left[F(t_0) - \left(\frac{p^-}{2} - 1 \right) (T - t_0) F'(t_0) \right] = 0$$

olur. Bu durum $G(T) > 0$ çelişkisiyle sonuçlanır. Böylece $T_{\max} = \infty$ kabulü yanlıştır. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.6 nın ispatı: $z = z(t)$, (4.1) denkleminin global bir zayıf çözümü olduğunu varsayalım. Teorem 4.2.4 nın (i) kısmına göre $\forall t \geq 0$ için $E(z) \geq 0$ olduğunu göstermek için bu nedenle

$$\int_0^t \|z'\|_2^2 ds = E(z_0) - E(z) \leq E(z_0),$$

$t \rightarrow \infty$ için

$$\int_0^\infty \|z'\|_2^2 ds \leq E(z_0) < \infty$$

elde edilir. Sonuç olarak $t_n \rightarrow \infty$ olacak şekilde bir $\{t_n\}$ dizisinin varlığını ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z'(t_n)\|_2 = 0 \quad (4.45)$$

olduğunu ifade eder. Bu, aynı zamanda her $n \in \mathbb{N}$ için $\|z'(t_n)\|_2 \leq A$ olacak şekilde bir sabit A için geçerli demektir. Şimdi $I(z(t))$ nin tanımını hatırlayarak

$$|I(z(t_n))| = |\langle z'(t_n), z(t_n) \rangle| \quad (4.46)$$

$$\leq \|z'(t_n)\|_2 \|z(t_n)\|_2 \quad (4.47)$$

$$\leq \|z'(t_n)\|_2 S_2 \|\Delta z(t_n)\|_2 \quad (4.48)$$

$$\leq AS_2 \|\Delta z(t_n)\|_2 \quad (4.49)$$

olur. Denklem (4.19) de verilen S_2 sabitini kullanılır. $E(z)$ nin artmayan bir özellik olduğundan ve z yi $z(t_n)$ de (4.5) ye koyarak

$$\begin{aligned} E(z_0) &\geq E(z(t_n)) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \|\nabla z(t_n)\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \|\Delta z(t_n)\|_2^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{m^+} - \frac{1}{p^-}\right) \int_{\Omega} |\Delta z(t_n)|^{m(x)} dx + \frac{1}{p^-} I(z(t_n)) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \|\Delta z(t_n)\|_2^2 - \frac{AS_2}{p^-} \|\Delta z(t_n)\|_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\|\Delta z(t_n)\|_2$ nin üstten sınırlılığı

$$\|\Delta z(t_n)\|_2 \leq \frac{AS_2 + \sqrt{A_2^2 S_2^2 + 2p^-(p^- - 2)E(z_0)}}{p^- - 2} \quad (4.50)$$

şeklindedir. Yukarıdaki eşitsizlik $\{z(t_n)\}$ dizisinin $H_0^2(\Omega)$ uzayında sınırlı olduğunu gösterir. $H_0^2(\Omega)$ nin bir refleksif (yansılmalı) uzay olduğundan, $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$ gömülme işlemi kompakt olduğundan $\{z(t_n)\}$ dizisinin bir alt dizisi $\{z(t_n)\}$ ve $\phi \in H_0^2(\Omega)$ olacak şekilde aşağıdaki sonuçlara ulaşırız:

$$z(t_n) \rightharpoonup \phi, \quad H_0^1(\Omega) \text{ uzayında zayıf yakınsak}, \quad (4.51)$$

$$z(t_n) \rightharpoonup \phi, \quad H_0^2(\Omega) \text{ uzayında zayıf yakınsak}, \quad (4.52)$$

$$z(t_n) \rightarrow \phi, \quad W_0^{2,m(\cdot)}(\Omega) \text{ uzayında güçlü yakınsak}, \quad (4.53)$$

$$z(t_n) \rightarrow \phi, \quad L^{p(\cdot)}(\Omega) \text{ uzayında güçlü yakınsaktır}. \quad (4.54)$$

Herhangi bir $v \in H_0^2(\Omega)$ için denklem (4.1) de z yerine $z(t_n)$ yerleştirilir. Denklem

(4.1) i v ile çarpılıp kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\left| \begin{aligned} &\langle \nabla z(t_n), \nabla v \rangle + \langle \Delta z(t_n), \Delta v \rangle + \left\langle |\Delta z(t_n)|^{m(x)-2} \Delta z(t_n), \Delta v \right\rangle \\ &\quad - \left\langle |z(t_n)|^{p(x)-2} z(t_n), v \right\rangle \end{aligned} \right|$$

$$= |\langle z'(t_n), v \rangle| \leq \|z'(t_n)\|_2 \|v\|_2$$

elde edilir. (4.45) den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\begin{aligned} &\langle \nabla z(t_n), \nabla v \rangle + \left\langle |\Delta z(t_n)|^{m(x)-2} \Delta z(t_n), \Delta v \right\rangle \\ &\quad + \langle \Delta z(t_n), \Delta v \rangle - \left\langle |z(t_n)|^{p(x)-2} z(t_n), v \right\rangle \end{aligned} \right) = 0$$

olduğu görülür. (4.51)-(4.54) den

$$\phi \in S \tag{4.55}$$

sağlar. Ayrıca, (4.45), (4.48) ve (4.50) e göre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(z(t_n)) = 0$$

olur. Bu ifade, (4.53), (4.54) ve (4.55) ile birlikte

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} (\|\nabla z(t_n)\|_2 + \|\Delta z(t_n)\|_2) \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\Delta z(t_n)|^{m(x)} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |z(t_n)|^{p(x)} dx \\ &= - \int_{\Omega} |\Delta \phi|^{m(x)} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\phi|^{p(x)} dx \\ &= \|\Delta \phi\|_2 \end{aligned} \tag{4.56}$$

elde edilir. $H_0^2(\Omega)$ nin düzgün konveks olduğundan (4.52) ve (4.56) den

$$z(t_n) \rightarrow \phi, \quad H_0^2(\Omega) \text{ uzayında güçlü}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.7 nin ispatı: Burada $z_0 \in \mathcal{N}_+$ ve $\|z_0\|_2 \leq \lambda_{E(z_0)}$ olsun. Öncelikle $z \in \mathcal{N}_+$ ifadesinin $t \in [0, T_{\max})$ için geçerli olduğunu göstereceğiz. Aksini varsayalım: $t_0 > 0$

olacak şekilde $z \in \mathcal{N}_+$ ve $t \in [0, t_0)$ için ancak $z(t_0) \in \mathcal{N}$ dir. Bu durumda $t \in [0, t_0)$ için

$$0 < |I(z)| = |\langle z', z \rangle| \leq \|z'\|_2 \|z\|_2$$

olur. O halde $\|z'\|_2 > 0$ sonucunu verir. Buradan ve (4.22) den $E(z(t_0)) < E(z_0)$ olduğu görülür. Yani $z(t_0) \in E^{E(z_0)}$ ve $\|z(t_0)\|_2 \geq \lambda_{E(z_0)}$ ifadesini sağlar. Diğer taraftan, $t \in [0, t_0)$ için

$$\frac{d}{dt} \|z\|_2^2 = -2I(z) < 0$$

elde edilir, buradan $\|z(t_0)\|_2 < \|z_0\|_2 \leq \lambda_{E(z_0)}$ olduğu görülür. Bu çelişkiyi göz önünde bulundurarak $z(t) \in \mathcal{N}_+$ ifadesi $t \in [0, T_{\max})$ için geçerli olur. Böylece $z(t) \in \mathcal{N}_+ \cap E^{E(z_0)}$ ifadesi $t \in [0, T_{\max})$ için doğrudur, çünkü $E(z)$ nin artmayan özelliğini kullanırız. Ayrıca, Lemma 4.1.5 in ii) maddesine göre, $z(t)$ $t \in [0, T_{\max})$ için $H_0^2(\Omega)$ de sınırlı kalır. Sonuç olarak $T_{\max} = \infty$ olur. Yani $z_0 \in G_0$ olur. Herhangi bir $w \in \omega(z_0)$ için

$$\|w\|_2 < \lambda_{E(z_0)} \text{ ve } E(w) < E(z_0)$$

elde edilir. Bu $\omega(z_0) \cap \mathcal{N} = \emptyset$ olduğu, $\lambda_{E(z_0)}$ nin tanımından görülür. Böylece $\omega(z_0) = \{0\}$ olur, yani $z_0 \in G_0$ sonucuna varırız.

Şimdi $z_0 \in \mathcal{N}_-$ ve $\|z_0\|_2 \geq \Lambda_{E(z_0)}$ olduğunu varsayalım. Yukarıdaki benzer argümanlarla $z(t) \in \mathcal{N}_-$ ifadesinin $t \in [0, T_{\max})$ için geçerli olduğu sonucu elde edilir. Aksini varsayarsak $T_{\max} = \infty$ ve her $w \in \omega(z_0)$ için

$$\|w\|_2 > \Lambda_{E(z_0)} \text{ ve } E(w) < E(z_0)$$

olur. Bu $\omega(z_0) \cap \mathcal{N} = \emptyset$ olduğu $\Lambda_{E(z_0)}$ nin tanımından görülür. Ancak $\text{dist}(0, \mathcal{N}_-) > 0$ olduğundan $0 \notin \omega(z_0)$ elde edilir. Böylece $\omega(z_0) = \emptyset$ dir ve $T_{\max} = \infty$ ile çelişir. Bu nedenle $z_0 \in B$ dir. İspat tamamlanmıştır.

Teorem 4.2.8 in ispatı: $z \in H_0^2(\Omega) \setminus \{0\}$ olsun. Burada (4.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
E(z) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \|\nabla z\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \|\Delta z\|_2^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{m^+} - \frac{1}{p^-}\right) \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx + \frac{1}{p^-} I(z) \\
&> \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) \|\Delta z\|_2^2 + \frac{1}{p^-} I(z) \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) S_2^{-2} \|z\|_2^2 + \frac{1}{p^-} I(z)
\end{aligned} \tag{4.57}$$

olur. S_2 , (4.19) de tanımlanan sabittir. Şimdi z yerine z_0 koyarak ve (4.25) i kullanarak

$$\begin{aligned}
E(z_0) &> \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p^-}\right) S_2^{-2} \|z_0\|_2^2 + \frac{1}{p^-} I(z_0) \\
&\geq E(z_0) + \frac{1}{p^-} I(z_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $I(z_0) < 0$ olduğu görülür. Buradan

$$z_0 \in \mathcal{N}_- \tag{4.58}$$

dır. Herhangi bir $z \in \mathcal{N}_{E(z_0)}$ için $I(z) = 0$ ve $E(z) < E(z_0)$ olduğundan (4.57) denklemini kullanılırsa

$$\|z\|_2^2 \leq \frac{2p^- S_2^2}{p^- - 2} E(z_0)$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.25) ile birlikte $\|z\|_2 \leq \|z_0\|_2$ anlamına gelir. $z \in \mathcal{N}_{E(z_0)}$ üzerinde supremum alınır

$$\Lambda_{E(z_0)} \leq \|z_0\|_2 \tag{4.59}$$

elde edilir. Sonuç olarak Teorem 4.2.7 den, (4.58) ve (4.59) den, $z_0 \in \mathcal{N}_- \cap B$ olduğu görülür. İspat tamamlanmıştır.

5. DEĞİŞKEN ÜSLÜ PARABOLİK TİPTEN KIRCHHOFF DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI VE AZALMASI

Bu bölümde, değişken üslü parabolik tipli Kirchhoff

$$\begin{cases} \left(1 + |z|^{p(x)-2}\right) z_t + \Delta^2 z - M(\|\nabla z\|^2) \Delta z = |z|^{q(x)-2} z & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ z(x, t) = \frac{\partial z}{\partial \nu}(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega \times (0, T), \\ z(x, 0) = z_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

başlangıç değer problemi ele alınmıştır (Pişkin ve Butakın, 2023a). Burada $\Omega, \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) in düzgün bir $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölgesidir: $\gamma \geq 1$ için

$$M(s) = 1 + s^\gamma$$

dır. Ayrıca $p(\cdot)$ ve $q(\cdot)$ değişken üsleri Ω üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan ölçülebilir fonksiyonlardır.

$$\begin{cases} 2 \leq p_1 \leq p(x) \leq p_2 \leq p^*, \\ 2 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2 \leq q^* \end{cases}$$

burada

$$\begin{cases} p_1 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x), & p_2 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x), \\ q_1 = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} q(x), & q_2 = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} q(x) \end{cases}$$

ve

$$p^*, q^* = \begin{cases} \infty, & N \leq 4, \\ \frac{2N}{N-4}, & N > 4 \end{cases} \quad (5.2)$$

dır. Ayrıca $p(\cdot)$ ve $q(\cdot)$ nun log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın. Yani

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{A}{\log|x - y|}$$

dır. Burada her $x, y \in \Omega$ için, $|x - y| < \delta$ ve $A > 0, 0 < \delta < 1$ dır.

5.1 Çözümlerin Global varlığı

Bu kısımda, global varlık sonucunu ispatlayacağız. Şimdi, bazı fonksiyonelleri tanımlayalım:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \|\Delta z\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla z\|_2^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |z|^{q(x)} dx \end{aligned} \quad (5.3)$$

ve

$$I(t) = \|\Delta z\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} - \int_{\Omega} |z|^{q(x)} dx \quad (5.4)$$

elde edilir.

Lemma 5.1.1 (Diening vd., 2011). Eğer $p : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ ve (5.2) yi sağlayan ölçülebilir bir fonksiyon ise, o zaman gömme $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}$ süreklidir ve kompakt bir gömme özelliğine sahiptir.

Lemma 5.1.2 (Komornik, 1994). $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ artan olmayan bir fonksiyon olsun ve $\alpha > 0$, $c > 0$ sabitlerdir. Öyle ki $\forall t \in \mathbb{R}^+$ için

$$\int_0^\infty \varphi^{\alpha+1}(s) ds \leq c \varphi^\alpha(0) \varphi(s)$$

şartı sağlasın. Bu durumda $\forall t \leq c$ için aşağıdaki eşitsizlik

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) \left(\frac{c + \alpha t}{c + \alpha c} \right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

olur.

Lemma 5.1.3 (5.2) ifadesi sağlansın. Bu durumda

$$E'(t) = -\|z_t\|_2^2 - \int_{\Omega} |z|^{p(x)-2} |z_t|^2 dx \leq 0 \quad (5.5)$$

ve

$$E(t) \leq E(0)$$

dır.

İspat: (5.1) denklemini z_t ile çarpıp Ω üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\Delta z\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla z\|_2^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |z|^{q(x)} dx \right) \\ &= -\|z_t\|_2^2 - \int_{\Omega} |z|^{p(x)-2} |z_t|^2 dx \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$E'(t) = -\|z_t\|_2^2 - \int_{\Omega} |z|^{p(x)-2} |z_t|^2 dx \leq 0$$

dır. (5.5) denklemi $(0, T)$ aralığında integrali alınırsa

$$E(t) \leq E(0)$$

olur.

Lemma 5.1.4 (5.2) ifadesi sağlansın. Ayrıca $q_1 > 2(\gamma + 1)$, $I(0) > 0$ ve

$$\beta_1 + \beta_2 < 1 \tag{5.6}$$

olsun. Burada

$$\beta_1 = \max \left\{ \alpha c_*^{q_1} \left(\frac{2q_1}{q_1-2} E(0) \right)^{(q_1-2)/2}, \alpha c_*^{q_2} \left(\frac{mq_1}{q_1-m} E(0) \right)^{(q_2-2)/2} \right\},$$

$$\beta_2 = \max \left\{ (1-\alpha) c_*^{q_1} \left(\frac{2(\gamma+1)q_1}{q_1-2(\gamma+1)} E(0) \right)^{(q_1-2(\gamma+1))/(2(\gamma+1))}, (1-\alpha) c_*^{q_2} \left(\frac{2(\gamma+1)q_1}{q_1-2(\gamma+1)} E(0) \right)^{(q_2-2(\gamma+1))/(2(\gamma+1))} \right\},$$

$0 < \alpha < 1$ ve c_* , $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ da gömülme sabitidir. Bu durumda $\forall t \in [0, T]$ için $I(t) > 0$.

İspat: $I(0) > 0$ olduğundan, öyle bir T_* zamanı vardır ki $t \in [0, T_*]$ için

$$I(t) \geq 0 \tag{5.7}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \|\Delta z\|_2^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\nabla z\|_2^2 - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |z|^{q(x)} dx \\ &\geq \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{2} \|\nabla z\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\Delta z\|_2^2 \\ &\quad - \frac{1}{q_1} \left(\|\Delta z\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} - I(t) \right) \\ &\geq \frac{q_1-2}{2q_1} (\|\Delta z\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^2) \\ &\quad + \frac{1}{q_1} I(t) + \frac{q_1-2(\gamma+1)}{2(\gamma+1)q_1} \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} \end{aligned}$$

yazılabilir. $I(t) \geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{q_1 - 2}{2q_1} (\|\Delta z\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^2) + \frac{q_1 - 2(\gamma + 1)}{2(\gamma + 1)q_1} \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} \\ & \leq E(t) \end{aligned} \quad (5.8)$$

eşitsizliği elde edilir. $E(t)$ fonksiyonelinin tanımından

$$\begin{aligned} \|\Delta z\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^2 & \leq \frac{2q_1}{q_1 - 2} E(t) \\ & \leq \frac{2q_1}{q_1 - 2} E(0) \end{aligned} \quad (5.9)$$

ve

$$\begin{aligned} \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} & \leq \frac{2(\gamma + 1)q_1}{q_1 - 2(\gamma + 1)} E(t) \\ & \leq \frac{2(\gamma + 1)q_1}{q_1 - 2(\gamma + 1)} E(0) \end{aligned} \quad (5.10)$$

elde edilir. Diğer yandan, Lemma 5.1.3 den

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |z|^{q(x)} dx & \leq \max \left\{ \|z\|_{q(\cdot)}^{q_1}, \|z\|_{q(\cdot)}^{q_2} \right\} \\ & = \alpha \max \left\{ \|z\|_{q(\cdot)}^{q_1}, \|z\|_{q(\cdot)}^{q_2} \right\} \\ & \quad + (1 - \alpha) \max \left\{ \|z\|_{q(\cdot)}^{q_1}, \|z\|_{q(\cdot)}^{q_2} \right\} \end{aligned}$$

olduğu görülür. $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q(\cdot)}(\Omega)$ gömülmesinden

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |z|^{q(x)} dx & \leq \alpha \max \{ c_*^{q_1} \|\Delta z\|_2^{q_1}, c_*^{q_2} \|\Delta z\|_2^{q_2} \} \\ & \quad + (1 - \alpha) \max \{ c_*^{q_1} \|\nabla z\|_2^{q_1}, c_*^{q_2} \|\nabla z\|_2^{q_2} \} \\ & \leq \alpha \max \{ c_*^{q_1} \|\Delta z\|_2^{q_1-2}, c_*^{q_2} \|\Delta z\|_2^{q_2-2} \} \|\Delta z\|_2^2 \\ & \quad + (1 - \alpha) \max \left\{ c_*^{q_1} \|\nabla z\|_2^{q_1-2(\gamma+1)}, c_*^{q_2} \|\nabla z\|_2^{q_2-2(\gamma+1)} \right\} \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} \\ & \leq \alpha \max \{ c_*^{q_1} \|\Delta z\|_2^{q_1-2}, c_*^{q_2} \|\Delta z\|_2^{q_2-2} \} (\|\Delta z\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^2) \\ & \quad + (1 - \alpha) \max \left\{ c_*^{q_1} \|\nabla z\|_2^{q_1-2(\gamma+1)}, c_*^{q_2} \|\nabla z\|_2^{q_2-2(\gamma+1)} \right\} \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} \end{aligned}$$

elde edilir. (5.9) ve (5.10) ifadelerinden

$$\int_{\Omega} |z|^{q(x)} dx \leq \beta_1 (\|\Delta z\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^2) + \beta_2 \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} \quad (5.11)$$

eşitsizliği elde edilir. $\beta_1 + \beta_2 < 1$ olduğundan, o zaman

$$\int_{\Omega} |z|^{q(x)} dx < \|\Delta z\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} \quad (5.12)$$

dır. Son olarak, (5.7) şartını göz önünde bulundurarak, $I(t)$ değeri $t \in [0, T_*]$ için aralığında sıfırdan büyük

$$I(t) > 0$$

olduğu görülür. Yukarıdaki işlemleri tekrarlayarak, T_* ifadesini T ye genişletebiliriz. Böylece, ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.1.5 (Zayıf çözümün varlığı). (5.2) ifadesi sağlansın. Verilen $z_0 \in L^2(\Omega)$ için, problem (5.1) in bir zayıf lokal çözümü vardır ve bu çözüm

$$z \in L^\infty((0, T), H_0^2(\Omega)), \quad z_t \in L^2((0, T), L^2(\Omega))$$

dır.

İspat: Faedo-Galerkin yaklaşım yöntemi kullanılacaktır. $\{v_l\}_{l=1}^\infty$, $H_0^2(\Omega)$ de bir baz olup $L^2(\Omega)$ de tam bir ortonormal sistem oluşturur. Bu bazdan türetilen

$$V_k = \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

alt uzayını ele alıyoruz. İlk k vektörün normalleştirilmesiyle $\|v_l\| = 1$ elde edilir. Herhangi bir k tam sayısı için yaklaşık çözümü şu şekilde tanımlıyoruz:

$$z_k(t) = \sum_{l=1}^k z_{lk}(t) v_l$$

burada z_k aşağıdaki problem için

$$\begin{aligned} & (z'_k(t), v_l) + (\Delta^2 z_k(t), v_l) + \left(|z_k(t)|^{p(x)-2} z'_k(t), v_l \right) \\ & - \left(M \left(\int_{\Omega} |\nabla z_k(t)|^2 dx \right) \Delta z_k(t), v_l \right) \\ & = \left(|z_k(t)|^{q(x)-2} z_k(t), v_l \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

çözümlerdir. $l = 1, 2, \dots, k$ ve başlangıç koşulu $L^2(\Omega)$ da

$$z_k(0) = z_{0k} = \sum_{l=1}^k (z_k(0), v_l) v_l \rightarrow z_0 \quad (5.14)$$

dır. Bu sistem (5.13) ve (5.14) adi diferansiyel denklemler için Picard ardışık yöntemi ile çözülebilir. Bu nedenle, $[0, T_*)$ aralığında bir çözüm vardır ve aşağıdaki önsel tahminleri kullanarak bu çözümü herhangi bir $T > 0$ için $[0, T]$ aralığına genişletebiliriz. (5.13) denklemini, $z'_{lk}(t)$ ile çarpıp l yi 1 ile k arasında toplarsak

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\Delta z_k(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla z_k(t)\|_2^2 - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |z_k(t)|^{q(x)} dx \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla z_k(t)\|_2^{2(\gamma+1)} \right) \\ &= - \|z_{t,k}(t)\|_2^2 - \int_{\Omega} |z_k(t)|^{p(x)-2} |z_{t,k}(t)|^2 dx \end{aligned} \quad (5.15)$$

elde edilir. Böylece

$$E'(z_k(t)) = - \|z_{t,k}(t)\|_2^2 - \int_{\Omega} |z_k(t)|^{p(x)-2} |z_{t,k}(t)|^2 dx \leq 0$$

sonucuna ulaşılır. (5.15) i $(0, T)$ üzerinde integral alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\Delta z_k(t)\|_2^2 - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |z_k(t)|^{q(x)} dx + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla z_k(t)\|_2^{2(\gamma+1)} \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} |z_k(s)|^{p(x)-2} |z_{t,k}(s)|^2 dx ds + \int_0^t \|z_{t,k}(s)\|_2^2 ds + \frac{1}{2} \|\nabla z_k(t)\|_2^2 \\ & \leq E(0) \end{aligned} \quad (5.16)$$

eşitsizliği elde edilir. Daha sonra, (5.12) den, (5.16) daki eşitsizlik

$$\begin{aligned} & \frac{q_1 - 2}{2q_1} \sup_{t \in (0, T)} \|\Delta z_k(t)\|_2^2 + \frac{q_1 - 2}{2q_1} \sup_{t \in (0, T)} \|\nabla z_k(t)\|_2^2 \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} |z_k(s)|^{p(x)-2} |z_{t,k}(s)|^2 dx ds + \int_0^t \|z_{t,k}(s)\|_2^2 ds \\ & + \frac{q_1 - 2(\gamma+1)}{2(\gamma+1)q_1} \sup_{t \in (0, T)} \|\nabla z_k(t)\|_2^{2(\gamma+1)} \\ & \leq E(0) \end{aligned} \quad (5.17)$$

olur. (5.17) den

$$\begin{cases} \{z_k\} \text{ dizisi, } L^\infty([0, T], H_0^2(\Omega)) \text{ uzayında düzgün sınırlı,} \\ \{z'_k\} \text{ dizisi } L^2([0, T], L^2(\Omega)) \text{ uzayında düzgün sınırlı} \end{cases} \quad (5.18)$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Ayrıca, Lemma 5.1.1 ve (5.18) den

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ |z_k|^{q(x)-2} z_k \right\} \text{ dizisi, } L^\infty([0, T], L^2(\Omega)) \text{ uzayında düzgün sınırlı,} \\ \left\{ |z_k|^{p(x)-2} z'_k \right\} \text{ dizisi, } L^\infty([0, T], L^2(\Omega)) \text{ uzayında düzgün sınırlı} \end{array} \right. \quad (5.19)$$

olduğu görülür. (5.18) ve (5.19) dan $\{z_k\}$ kümesinden bir alt dizi ve bir z fonksiyonu olduğu sonucuna varılır. Bu alt dizi şu yakınsaklıkları sağlar:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_k \rightharpoonup z, L^\infty([0, T], H_0^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf}^* \text{ yakınsaktır,} \\ z'_k \rightharpoonup z', L^2([0, T], L^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf}^* \text{ yakınsaktır,} \\ |z_k|^{q(x)-2} z_k \rightharpoonup |z|^{q(x)-2} z, L^\infty([0, T], L^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf}^* \text{ yakınsaktır,} \\ |z_k|^{p(x)-2} z'_k \rightharpoonup |z|^{p(x)-2} z', L^\infty([0, T], L^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf}^* \text{ yakınsaktır.} \end{array} \right. \quad (5.20)$$

Bu sonuçları kullanarak, Aubin-Lions kompaktlık lemması (Lions, 1969) ve (5.20) den

$$z_k \rightharpoonup z, C([0, T], H_0^2(\Omega)) \text{ uzayında güçlü yakınsaktır}$$

sonucunu elde edilir. Dolayısıyla her $\Omega \times [0, T]$ için

$$z_k \rightharpoonup z \quad (5.21)$$

dır. (5.20) ve (5.21) den

$$\left\{ \begin{array}{l} |z_k|^{q(x)-2} z_k \rightharpoonup |z|^{q(x)-2} z, L^\infty([0, T], L^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf yakınsak,} \\ |z_k|^{p(x)-2} z'_k \rightharpoonup |z|^{p(x)-2} z', L^\infty([0, T], L^2(\Omega)) \text{ uzayında zayıf yakınsak} \end{array} \right. \quad (5.22)$$

olduğu elde edilir. Burada $k \rightarrow \infty$ için (5.13) dan $l = 1, 2, \dots, k$ ile

$$\begin{aligned} & (z'(t), v_l) - \left(M \left(\int_{\Omega} |\nabla z(t)|^2 dx \right) \Delta z(t), v_l \right) \\ & + (\Delta^2 z(t), v_l) + \left(|z(t)|^{p(x)-2} z'_k(t), v_l \right), \\ & = \left(|z(t)|^{q(x)-2} z(t), v_l \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $\{v_l\}_{l=1}^\infty$ kümesinin, $H_0^2(\Omega)$ uzayının bir bazı olması nedeniyle z nin (5.1) denklemini sağladığını sonucuna varılır. Ayrıca, (5.20) ve (Zheng, 2004) deki Lemma 3.1.7 ile $B = L^2(\Omega)$ seçilerek

$$z_k(0) \rightharpoonup z(0), L^2(\Omega) \text{ uzayında zayıf yakınsaktır} \quad (5.24)$$

ifadesi elde edilir. (5.14) ve (5.24) den $z(0) = z_0$ olur. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Teorem 5.1.6 Lemma 5.1.3 sağlansın. O halde (5.1) denkleminin çözümü globaldir.

İspat: Burada

$$\begin{aligned} E(z(t)) &= \frac{1}{2} \|\Delta z\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla z\|_2^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |z|^{q(x)} dx, \\ &\geq \frac{q_1-2}{2q_1} \|\Delta z\|_2^2 + \frac{q_1-2}{2q_1} \|\nabla z\|_2^2 + \frac{q_1-2(\gamma+1)}{2(\gamma+1)q_1} \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\|\Delta z\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} \leq CE(t) \quad (5.25)$$

dır. Lemma 5.1.3 göz önünde alınır

$$\|\Delta z\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^{2(\gamma+1)} \leq CE(0)$$

elde edilir.

5.2 Çözümlerin Azalması

Bu kısımda, çözümlerin azalmasını ispatlıyoruz. İlk olarak, aşağıdaki lemmayı vereceğiz.

Teorem 5.2.1 Lemma 5.1.3 sağlansın. Bu durumda $c > 0$ için

$$\int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx \leq cE(t)$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx &= \max \left\{ \|z\|_{p(\cdot)}^{p_1}, \|z\|_{p(\cdot)}^{p_2} \right\}, \\ &\leq \max \left\{ c_*^{p_1} \|\Delta z\|_2^{p_1}, c_*^{p_2} \|\Delta z\|_2^{p_2} \right\}, \\ &\leq \max \left\{ c_*^{p_1} \|\Delta z\|_2^{p_1-2}, c_*^{p_2} \|\Delta z\|_2^{p_2-2} \right\} \|\Delta z\|_2^2 \end{aligned}$$

olduğundan, (5.9) eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx \leq cE(t) \quad (5.26)$$

sonucu elde edilir.

Teorem 5.2.2 Lemma 5.1.3 sağlansın. Her $t \geq c$ için olsun. Bu durumda $c > 0$ için

$$E(t) \leq E(0) \left(\frac{c+rt}{c+rc} \right)^{-1/r}$$

dır.

İspat: (5.1) denklemini $z(t) E^q(t)$ ($q > 0$) ile çarpıp $\Omega \times (S, T)$ üzerinde integralini aldığımızda

$$\begin{aligned} & \int_S^T \int_{\Omega} E^q(t) \left[z \Delta^2 z + z z_t - z \left(M \left(\int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx \right) \Delta z + z z_t |z|^{p(x)-2} \right) \right] dx dt \\ &= \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} |z|^{q(x)} dx dt \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \int_S^T \int_{\Omega} E^q(t) \left(|\Delta z|^2 + z z_t + |\nabla z|^2 + \|\nabla z\|_2^{2\gamma} |\nabla z|^2 + z z_t |z|^{p(x)-2} \right) dx dt \\ &= \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} |z|^{q(x)} dx dt \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} (\beta_1 (|\Delta z|^2 + |\nabla z|^2) + \beta_2 \|\nabla z\|_2^{2\gamma} |\nabla z|^2) dx dt$$

dır. Ekleme çıkarma yapılarak ve (5.11) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& (1 - \beta_1) \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} (|\Delta z|^2) dx dt \\
& + (1 - \beta_1) \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx dt \\
& + (1 - \beta_2) \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} (\|\nabla z\|_2^{2\gamma} |\nabla z|^2) dx dt \\
& + \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} (zz_t) dx dt \\
& + \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} (zz_t |z|^{p(x)-2}) dx dt \\
& = - \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} \left(\beta_1 |\Delta z|^2 + \beta_1 |\nabla z|^2 + \beta_2 \|\nabla z\|_2^{2\gamma} |\nabla z|^2 \right. \\
& \quad \left. - |z|^{q(x)} \right) dx dt \\
& \leq 0
\end{aligned} \tag{5.27}$$

elde edilir. Buradan açıktır ki

$$\begin{aligned}
& \xi \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\Delta z|^2 + \frac{1}{2} |\nabla z|^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2(\gamma+1)} \|\nabla z\|_2^{2\gamma} |\nabla z|^2 - \frac{|z(t)|^{q(x)}}{q(x)} \right) dx dt \\
& \leq (1 - \beta_1) \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} |\Delta z|^2 dx dt \\
& \quad + (1 - \beta_1) \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx dt \\
& \quad + (1 - \beta_2) \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} \|\nabla z\|_2^{2\gamma} |\nabla z|^2 dx dt
\end{aligned} \tag{5.28}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\xi = \min \{ (1 - \beta_1), (1 - \beta_2) \}$$

dır. $E(t)$ tanımını ve (5.27), (5.28) kullanılarak

$$\begin{aligned} \xi \int_S^T E^{q+1}(t) dt &\leq - \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} z z_t dx dt \\ &\quad - \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} z z_t |z|^{p(x)-2} dx dt \end{aligned} \quad (5.29)$$

elde edilir. İlk terim için Young eşitsizliğini kullanılırsa ve burada $A, B \geq 0, \varepsilon > 0$ olduğundan

$$AB \leq \frac{\varepsilon}{\eta_1} A^{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2 \varepsilon^{\eta_2/\eta_1}} B^{\eta_2} \text{ ve } \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} = 1$$

dır. Buradan

$$- \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} z z_t dx dt \leq \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} (\varepsilon c |z|^2 + c_{\varepsilon} |z_t|^2) dx dt \quad (5.30)$$

olduğu görülür. Tekrar Young eşitsizliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned} &- \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} z z_t |z|^{p(x)-2} dx dt \\ &= - \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} |z|^{(p(x)-2)/2} z_t |z|^{(p(x)-2)/2} z dx dt \\ &\leq \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} (\varepsilon c |z|^{p(x)} + c_{\varepsilon} |z_t|^{p(x)-2} z_t^2) dx dt. \end{aligned} \quad (5.31)$$

elde edilir. (5.29), (5.30) ve (5.31) deki eşitsizlikten

$$\begin{aligned} \xi \int_S^T E^{q+1}(t) dt &\leq \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} (\varepsilon c |z|^2 + c_{\varepsilon} |z_t|^2) dx dt \\ &\quad + \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} (\varepsilon c |z|^{p(x)} + c_{\varepsilon} |z_t|^{p(x)-2} z_t^2) dx dt \\ &\leq \varepsilon c \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} (|z|^2 + |z|^{p(x)}) dx dt \\ &\quad + c_{\varepsilon} \int_S^T E^q(t) \int_{\Omega} (|z_t|^2 + |z|^{p(x)-2} z_t^2) dx dt \end{aligned} \quad (5.32)$$

dır. $E'(t)$ nin tanımı, (5.25) ifadesi ve Teorem 5.2.1 kullanılırsa

$$\xi \int_S^T E^{q+1}(t) dt \leq \varepsilon c \int_S^T E^{q+1}(t) dt + c_\varepsilon \int_S^T E^q(t) (-E'(t)) dt \quad (5.33)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \xi \int_S^T E^{q+1}(t) dt &\leq \varepsilon c \int_S^T E^{q+1}(t) dt + c_\varepsilon (E^{q+1}(s) - E^{q+1}(T)) \\ &\leq \varepsilon c \int_S^T E^{q+1}(t) dt + c_\varepsilon E^q(0) E(s) \end{aligned} \quad (5.34)$$

dır. Dolayısıyla burada ε yi $\xi > \varepsilon c$ olacak şekilde yeterince küçük seçersek

$$\int_S^T E^{q+1}(t) dt \leq c E^q(0) E(s)$$

sonucuna ulaşılır. Burada $T \rightarrow \infty$ alınırsa

$$\int_S^\infty E^{q+1}(t) dt \leq c E^q(0) E(s)$$

elde edilir. Böylece, Komornik lemması ile çözümlerin azalması ispatlanmış olur.

6. DEĞİŞKEN ÜSLÜ DOĞRUSAL OLMAYAN LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ BİR PARABOLİK DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI VE PATLAMASI

Bu bölümde, değişken üslü logaritmik kaynak terimli parabolik

$$\begin{cases} z_t + \Delta_{m(x)}^2 z + \Delta^2 z_t = |z|^{p(x)-2} z \ln |z|, & x \in \Omega, t > 0, \\ z(x, t) = \frac{\partial z}{\partial \nu}(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ z(x, 0) = z_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (6.1)$$

başlangıç sınır değer problemi ele alınmıştır (Butakın ve Pişkin, 2024b). Burada $\Omega, \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) in düzgün bir $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölgesidir ve $z_0(x) \geq 0$ dır. $\Delta_{m(x)}^2 z$ terimi $m(x)$ -biharmonik olarak adlandırılır ve

$$\Delta_{m(x)}^2 z = \Delta(|\Delta z|^{m(x)-2} \Delta z)$$

şeklinde tanımlanır.

(A1) $p(\cdot)$ ve $m(\cdot)$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlayan ölçülebilir fonksiyonlardır:

$$2 \leq m^- \leq m(x) \leq m^+ < p^- \leq p(x) \leq p^+ < p^{-*}(x) \quad (6.2)$$

burada

$$m^- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} m(x), \quad m^+ = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} m(x),$$

$$p^- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x), \quad p^+ = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x)$$

ve

$$p^{-*}(x) = \begin{cases} \frac{Nm^-}{N-m^-}, & m^- < N, \\ +\infty, & m^- \geq N, \end{cases} \quad (6.3)$$

dır.

(A2) $\forall \mathfrak{x}, \xi \in \Omega$ için $|\mathfrak{x} - \xi| < \delta, \gamma > 0$ ve $0 < \delta < 1$ olduğunda

$$|m(\mathfrak{x}) - m(\xi)| + |p(\mathfrak{x}) - p(\xi)| \leq -\frac{\gamma}{\ln |\mathfrak{x} - \xi|}$$

dır. Değişken üslü ifadenin tanımından

$$\begin{aligned} \min \left\{ \|z\|_{p(\cdot), \Omega}^{p^-}, \|z\|_{p(\cdot), \Omega}^{p^+} \right\} &\leq \int_{\Omega} |z(x)|^{p(x)} dx \\ &\leq \max \left\{ \|z\|_{p(\cdot), \Omega}^{p^-}, \|z\|_{p(\cdot), \Omega}^{p^+} \right\} \end{aligned} \quad (6.4)$$

yazılabilir.

6.1 Giriş

Bu kısımda teoremimizin ispatı için kullanılacak bazı lemmalar ifade edilecektir.

Lemma 6.1.1 (Pan vd., 2023) Ω , $\mathbb{R}^N$ de sınırlı bir bölgede olsun. $p(\cdot)$ fonksiyonu, (A1) ve (A2) koşullarını sağlasın. O halde her $\beta > 0$ için

$$\begin{aligned} \min \left\{ \|z\|_{p(\cdot)+\beta, \Omega}^{p^-+\beta}, \|z\|_{p(\cdot)+\beta, \Omega}^{p^++\beta} \right\} &\leq \int_{\Omega} |z(x)|^{p(x)+\beta} dx \\ &\leq \max \left\{ \|z\|_{p(\cdot)+\beta, \Omega}^{p^-+\beta}, \|z\|_{p(\cdot)+\beta, \Omega}^{p^++\beta} \right\} \end{aligned} \quad (6.5)$$

dır.

İspat. Burada $g(x) = p(x) + \beta$ olsun. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|z\|_{g(\cdot), \Omega}^{g^-} &= \|z\|_{p(\cdot)+\beta, \Omega}^{p^-+\beta}, \\ \|z\|_{g(\cdot), \Omega}^{g^+} &= \|z\|_{p(\cdot)+\beta, \Omega}^{p^++\beta} \end{aligned} \quad (6.6)$$

olur. (6.4) göz önünde bulundurulduğunda

$$\begin{aligned} \min \left\{ \|z\|_{g(\cdot), \Omega}^{g^-}, \|z\|_{g(\cdot), \Omega}^{g^+} \right\} &\leq \int_{\Omega} |z(x)|^{p(x)+\beta} dx \\ &\leq \max \left\{ \|z\|_{g(\cdot), \Omega}^{g^-}, \|z\|_{g(\cdot), \Omega}^{g^+} \right\} \end{aligned} \quad (6.7)$$

olduğu açıkça görülür. (6.6) yi (6.7) de yerine koyarak (6.5) ifadesi elde edilir.

Lemma 6.1.2 (Diening vd., 2011; Fan ve Zhao, 2001). Ω , $\mathbb{R}^N$ de sınırlı bir bölge olsun. $m(\cdot)$ fonksiyonu, (A1) ve (A2) koşullarını sağlasın. O halde $\forall z \in W_0^{2, m(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\|z\|_{m(\cdot)} \leq C \|\Delta z\|_{m(\cdot)} \quad (6.8)$$

dır. Burada C ifadesi, $m(\cdot)$ ve Ω ya bağlı olan pozitif bir sabittir ve en iyi gömme sabitidir. Özellikle, $W_0^{2, m(\cdot)}(\Omega)$ uzayı için eşdeğer norm

$$\|z\|_{W_0^{2, m(\cdot)}(\Omega)} \cong \|\Delta z\|_{m(\cdot)}$$

dır.

Lemma 6.1.3 (Diening vd., 2011; Fan ve Zhao, 2001). Eğer $m(\cdot) \in C(\overline{\Omega})$ ve $p(\cdot) : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Burada

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} (m^*(x) - p(x)) > 0$$

ve

$$m^*(x) = \begin{cases} \frac{Nm(x)}{\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} (N - m(x))}, & m(x) < N, \\ +\infty, & m(x) \geq N \end{cases} \quad (6.9)$$

dır. Dolayısıyla $W_0^{2,m(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$ gömülmesi sürekli ve kompaktır.

6.2 Global varlık ve patlama

Bu kısımda, zayıf çözümlerin global varlığını ve patlamasını inceleyeceğiz. Burada

$$\int_{\Omega} \left(z_t v + \Delta z \Delta v + |\Delta z|^{m(x)-2} \Delta z \Delta v \right) dx = \int_{\Omega} |z|^{p(x)-2} z \ln |z| v dx \quad (6.10)$$

dır. Sonuç olarak, herhangi bir $z \in W_0^{2,m(x)}(\Omega)$ için $J(z)$ fonksiyoneli ve $I(z)$ Nehari fonksiyoneli

$$\begin{aligned} J(z) &= \int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |\Delta z|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |z|^{p(x)} \ln |z| dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{1}{p^2(x)} |z|^{p(x)} dx, \end{aligned} \quad (6.11)$$

ve

$$I(z) = \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} |z|^{p(x)} \ln |z| dx$$

dır. Ayrıca enerji fonksiyoneli

$$E(t) = \int_{\Omega} \frac{1}{m(x)} |\Delta z|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |z|^{p(x)} \ln |z| dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p^2(x)} |z|^{p(x)} dx \quad (6.12)$$

dır. $\mathcal{N} = \{z \in W_0^{2,m(x)}(\Omega) \setminus \{0\} \mid I(z) = 0\}$ olmak üzere

$$d = \inf_{z \in \mathcal{N}} J(z) \quad (6.13)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_+ &= \left\{ z \in W_0^{2,m(x)}(\Omega) \setminus \{0\} \mid I(z) > 0 \right\}, \\ \mathcal{N}_- &= \left\{ z \in W_0^{2,m(x)}(\Omega) \setminus \{0\} \mid I(z) < 0 \right\}\end{aligned}\quad (6.14)$$

ile gösterilir. Aşağıda, (6.1) in zayıf çözümlerini ele almak amacıyla bazı kümeler ve fonksiyoneller tanımlıyoruz: $\forall \omega > d$ için

$$\begin{aligned}J^\omega &= \left\{ z \in W_0^{2,m(x)}(\Omega) \setminus \{0\} \mid J(z) \leq \omega \right\}, \\ \mathcal{N}^\omega &= \mathcal{N} \cap J^\omega = \{ z \in \mathcal{N} \mid J(z) \leq \omega \},\end{aligned}\quad (6.15)$$

dır. Ayrıca, $\omega > d$ için

$$\lambda_\omega = \inf \left\{ \|z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \mid z \in \mathcal{N}^\omega \right\}$$

ve

$$\Gamma_\omega = \sup \left\{ \|z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \mid z \in \mathcal{N}^\omega \right\}$$

şeklinde tanımlarız. Açıkça görülüyor ki $\lambda_\omega(\Gamma_\omega)$, ω ya göre artmayan bir fonksiyondur.

Lemma 6.2.1 z , (6.1) probleminin zayıf bir çözümü olsun. $E(t)$ enerji fonksiyoneli artmayandır:

$$E(t) = E(0) - \int_0^t \int_\Omega z_t^2 dx d\tau - \int_0^t \int_\Omega |\Delta z_t|^2 dx d\tau. \quad (6.16)$$

İspat: (6.1) problemini z_t ile çarpılıp ve Ω üzerinde integrali alınırsa,

$$\int_\Omega z_t z_t dx + \int_\Omega z_t \Delta^2 z_t dx + \int_\Omega z_t \Delta_{m(x)}^2 z dx = \int_\Omega z_t |z|^{p(x)-2} z \ln |z| dx$$

olur. Green özdeşliğinden

$$\begin{aligned}& \int_\Omega z_t^2 dx + \int_\Omega \Delta z_t \Delta z_t dx + \int_\Omega \Delta \left(|\Delta z|^{m(x)-2} \Delta z \right) z_t dx \\ &= \int_\Omega |z|^{p(x)-1} z_t \ln |z| dx\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} z_t^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta z_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{1}{m(x)} \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{p(x)} \int_{\Omega} |z|^{p(x)} \ln |z| dx - \frac{1}{p^2(x)} \int_{\Omega} |z|^{p(x)} \right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{dE(t)}{dt} + \int_{\Omega} z_t^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta z_t|^2 dx = 0$$

elde edilir. Son eşitsizliğin $(0, t)$ aralığı üzerinde integrali alınırsa

$$E(t) = E(0) - \int_0^t \int_{\Omega} z_t^2 dx d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta z_t|^2 dx d\tau$$

olur.

Lemma 6.2.2 Potansiyel kuyunun d derinliği pozitiftir.

İspat: $z \in \mathcal{N}$ için, Lemma 6.1.1 - Lemma 6.1.3 ten her $\beta > 0$ için, $0 \leq s^{-\beta} \ln s \leq 1/e\beta$, $s \in [1, +\infty)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx &= \int_{\Omega} |z|^{p(x)} \ln |z| dx \\ &= \int_{\Omega_2} |z|^{p(x)} \ln |z| dx + \int_{\Omega_1} |z|^{p(x)} \ln |z| dx \\ &\leq \int_{\Omega_2} |z|^{p(x)} \ln |z| dx \\ &\leq \frac{1}{e\beta} \int_{\Omega_2} |z|^{p(x)+\beta} dx \\ &\leq \frac{1}{e\beta} \int_{\Omega} |z|^{p(x)+\beta} dx \\ &\leq \frac{1}{e\beta} \max \left\{ \|z\|_{p(x)+\beta}^{p^++\beta}, \|z\|_{p(x)+\beta}^{p^-+\beta} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \leq \frac{1}{e\beta} \max \left\{ \begin{array}{l} C_1^{p^++\beta} \max \left\{ \begin{array}{l} \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{(p^++\beta)/m^+}, \\ \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{(p^++\beta)/m^-} \end{array} \right\} \\ C_1^{p^-+\beta} \max \left\{ \begin{array}{l} \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{(p^-+\beta)/m^+}, \\ \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{(p^-+\beta)/m^-} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (6.17)$$

dır. Burada $C_1 = \max \{C, 1\}$ ve $C > 0$ en iyi gömülme sabitidir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ z \mid z \in W_0^{2,m(x)}(\Omega), 0 < z < 1 \right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ z \mid z \in W_0^{2,m(x)}(\Omega), z \geq 1 \right\} \end{aligned} \quad (6.18)$$

dır. Böylece (6.17) den

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx &\geq \min \left\{ \begin{array}{l} (e\beta)^{m^-/(p^-+\beta-m^-)} C_1^{(m^-(p^++\beta))/(m^-(p^-+\beta))}, \\ (e\beta)^{m^+/(p^-+\beta-m^+)} C_1^{(m^+(p^-+\beta))/(m^+-(p^-+\beta))} \end{array} \right\} \\ &= (e\beta)^{m^+/(p^-+\beta-m^+)} C_1^{(m^+(p^-+\beta))/(m^+-(p^-+\beta))} \\ &> 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

elde ederiz. $J(z)$, $I(z)$ ve (6.19) tanımlarından

$$\begin{aligned} J(z) &\geq \frac{1}{m^+} \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx - \frac{1}{p^-} \int_{\Omega} |z|^{p(x)} \ln |z| dx + \frac{1}{p^{+2}} \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx \\ &= \frac{1}{p^-} \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} |z|^{p(x)} \ln |z| dx \right) \\ &\quad + \frac{1}{p^{+2}} \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx + \left(\frac{1}{m^+} - \frac{1}{p^-} \right) \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \\ &= \frac{1}{p^{+2}} \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx + \frac{1}{p^-} I(z) + \frac{p^- - m^+}{m^+ p^-} \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \\ &\geq \frac{p^- - m^+}{m^+ p^-} \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \end{aligned} \quad (6.20)$$

olduğu görülür. Bu nedenle (6.19), (6.20) ve d nin tanımından

$$\begin{aligned} d &\geq \frac{p^- - m^+}{m^+ p^-} (e\beta)^{m^+/(p^-+\beta-m^+)} C_1^{(m^+(p^-+\beta))/(m^+-(p^-+\beta))} \\ &> 0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

elde edilir.

Lemma 6.2.3 Herhangi bir $\omega > d$ için λ_ω ve Γ_ω ,

$$0 < \lambda_\omega \leq \Gamma_\omega < +\infty$$

aralığında koşulları sağlar.

İspat: Burada aşağıdaki eliptik denklemi göz önünde bulunduralım:

$$\begin{cases} \Delta^2 k = \gamma k, & \Omega, \\ \Delta k = k = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.22)$$

Poincare eşitsizliğinden $\|\Delta z\|_2^2 \geq \gamma_1 \|z\|_2^2$ dir. Burada γ_1 , (6.22) probleminin özdeğerini temsil eder. Buradan

$$\begin{aligned} \|\Delta z\|_2^2 &= \frac{\gamma_1}{1 + \gamma_1} \|\Delta z\|_2^2 + \frac{1}{1 + \gamma_1} \|\Delta z\|_2^2 \\ &\geq \frac{\gamma_1}{1 + \gamma_1} \|z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

elde edilir. Aksine $m(x) \geq 2$ olduğunda, $L^{m(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ sürekli gömülmesi gerçekleşir. Dolayısıyla

$$\|\Delta z\|_2^2 \leq (1 + |\Omega|)^2 \|\Delta z\|_{m(x)}^2 \quad (6.24)$$

dır. (6.23) ve (6.24) ı kullanarak

$$\|z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1 + \gamma_1}{\gamma_1} (1 + |\Omega|)^2 \max \left\{ \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{2/m^+}, \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{2/m^-} \right\} \quad (6.25)$$

olur. Her $z \in \mathcal{N}^\omega$ için (6.15) ve (6.20) kullanılırsa

$$\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \leq \omega \frac{m^+ p^-}{p^- - m^+} \quad (6.26)$$

elde edilir. (6.25) ve (6.26) dan

$$\|z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1 + \gamma_1}{\gamma_1} (1 + |\Omega|)^2 \max \left\{ \left(\omega \frac{m^+ p^-}{p^- - m^+} \right)^{2/m^+}, \left(\omega \frac{m^+ p^-}{p^- - m^+} \right)^{2/m^-} \right\} \quad (6.27)$$

olur. Yani $\Gamma_\omega < +\infty$ dur. Her $z \in \mathcal{N}^\omega$ için $W_0^{2,m(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ Sobolev gömülmesi gerçekleşir. $I(z)$ ve d nin tanımlarından

$$\begin{aligned} d &= \inf_{z \in \mathcal{N}} J(z) \leq J(z) \\ &\leq \frac{1}{m^-} \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx - \frac{1}{p^+} \int_{\Omega} |z|^{p(x)} \ln |z| dx \\ &\quad + \frac{1}{p^{-2}} \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{p^+} \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx - \int_{\Omega} |z|^{p(x)} \ln |z| dx \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{m^-} - \frac{1}{p^+} \right) \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx + \frac{1}{p^{-2}} \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx \\ &= \frac{1}{p^+} I(z) + \frac{p^+ - m^-}{m^- p^+} \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx + \frac{1}{p^{-2}} \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx \\ &\leq \frac{p^+ - m^-}{m^- p^+} \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx + \frac{1}{p^{-2}} \max \left\{ \|z\|_{p(x)}^{p^+}, \|z\|_{p(x)}^{p^-} \right\} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{p^+ - m^-}{m^- p^+} \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \\ &\quad + \frac{1}{p^{-2}} \max \left\{ C_2^{p^+} \max \left\{ \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{p^+/m^+}, \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{p^+/m^-} \right\}, \right. \\ &\quad \left. C_2^{p^-} \max \left\{ \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{p^-/m^+}, \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{p^-/m^-} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (6.28)$$

dır. Burada $C_2 = \max \{C^*, 1\}$, $C^* > 0$ en iyi gömülme sabitidir. Burada $\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx$ için iki durum vardır.

1.Durum $\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx > 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
d &\leq \frac{1}{p^{-2}} \left(C_2^{p^+} + C_2^{p^-} \right) \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{p^+/m^-} \\
&\quad + \frac{p^+ - m^-}{m^- p^+} \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{p^+/m^-} \\
&= \left[\frac{p^+ - m^-}{m^- p^+} + \frac{1}{p^{-2}} \left(C_2^{p^+} + C_2^{p^-} \right) \right] \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{p^+/m^-}
\end{aligned} \tag{6.29}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \geq \left[\frac{p^+ - m^-}{m^- p^+} + \frac{1}{p^{-2}} \left(C_2^{p^+} + C_2^{p^-} \right) \right]^{-m^-/p^+} d^{m^-/p^+} \tag{6.30}$$

dır.

2.Durum $0 < \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx < 1$ olduğu göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
d &\leq \frac{1}{p^{-2}} \left(C_2^{p^+} + C_2^{p^-} \right) \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx + \frac{p^+ - m^-}{m^- p^+} \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \\
&= \left[\frac{p^+ - m^-}{m^- p^+} + \frac{1}{p^{-2}} \left(C_2^{p^+} + C_2^{p^-} \right) \right] \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx
\end{aligned} \tag{6.31}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \geq \left[\frac{p^+ - m^-}{m^- p^+} + \frac{1}{p^{-2}} \left(C_2^{p^+} + C_2^{p^-} \right) \right]^{-1} d \tag{6.32}$$

dır. Buradan

$$r = \min \left\{ \left[\frac{p^+ - m^-}{m^- p^+} + \frac{1}{p^{-2}} \left(C_2^{p^+} + C_2^{p^-} \right) \right]^{-m^-/p^+} d^{m^-/p^+}, \left[\frac{p^+ - m^-}{m^- p^+} + \frac{1}{p^{-2}} \left(C_2^{p^+} + C_2^{p^-} \right) \right]^{-1} d \right\} \tag{6.33}$$

olur. (6.31) ve (6.32) den

$$\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \geq r \tag{6.34}$$

elde edilir. $L^{p^+ + \beta}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x) + \beta}$ gömülmesi ve Gagliardo-Nirenberg eşitsizliği için

$$\begin{aligned}
\|z\|_{p(x) + \beta} &\leq (1 + |\Omega|) \|z\|_{p^+ + \beta} \\
&\leq C_3 \|\Delta z\|_{m(x)}^{\phi} \|z\|_2^{1-\phi} \\
&\leq C_3 \|\Delta z\|_{m(x)}^{\phi} \|z\|_{H_0^2(\Omega)}^{1-\phi}
\end{aligned} \tag{6.35}$$

dır. Burada (6.2) den $\phi = (1/2 - 1/(p^+ + \beta))(1/N - 1/m^- + 1/2)^{-1} \in (0, 1)$ olduğu görülür. Ayrıca, $z \in \mathcal{N}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx &= \int_{\Omega} |z|^{p(x)} \ln |z| dx \\
&= \int_{\Omega_1} |z|^{p(x)} \ln |z| dx + \int_{\Omega_2} |z|^{p(x)} \ln |z| dx \\
&\leq \int_{\Omega_2} |z|^{p(x)} \ln |z| dx \leq \frac{1}{e\beta} \int_{\Omega_2} |z|^{p(x)+\beta} dx \\
&\leq \frac{1}{e\beta} \int_{\Omega} |z|^{p(x)+\beta} dx = \frac{1}{e\beta} \|z\|_{p(x)+\beta}^{p(x)+\beta}
\end{aligned} \tag{6.36}$$

elde edilir. Buradan

$$\|z\|_{p(x)+\beta} \geq \min \left\{ \left(e\beta \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{1/p^++\beta}, \left(e\beta \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{1/p^-+\beta} \right\} \tag{6.37}$$

dır. Daha sonra, (6.35) ve (6.37) den

$$\|z\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \geq \min \left\{ \left[\frac{\alpha^+}{C_3} \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{(1/p^++\beta)-(\phi/m^-)} \right]^{2/(1-\phi)}, \left[\frac{\alpha^-}{C_3} \left(\int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \right)^{(1/p^-+\beta)-(\phi/m^+)} \right]^{2/(1-\phi)} \right\} \tag{6.38}$$

olduğu görülür. Burada $\alpha^+ = (e\beta)^{1/(p^++\beta)}$, $\alpha^- = (e\beta)^{1/(p^-+\beta)}$ dır. Yukarıda belirtilen eşitsizliğin sağ tarafının (6.26) ve (6.34) ile gösterildiği gibi $1/(p^+ + \beta) - (\phi/m^-)$ ve $1/(p^- + \beta) - (\phi/m^+)$ değerlerinin sınırlı olduğu açıktır. Dolayısıyla $\lambda_{\omega} > 0$ dır.

Gerçekten de ω ya bağlı olmayan bir λ_{ω} alt sınırı elde edebiliriz.

Önerme 6.2.4 Eğer $2 \leq m^- \leq m(x) \leq m^+ < p^- \leq p(x) \leq p^+ < 2^*(m^-)$ ise, o zaman herhangi bir $\omega > d$ için $\lambda_{\omega} \geq R > 0$, burada edelim, burada

$$2^*(m^-) = \begin{cases} \frac{Nm^-}{N-4}, & 4 < N, \\ +\infty, & 4 \geq N \end{cases} \tag{6.39}$$

dır. R sayısı (6.44) de verilmiştir.

İspat: Aşağıda, bu kısmın ispatını iki durum halinde ele alacağız.

1.Durum Eğer $2 < p^- \leq p(x) \leq p^+ \leq 2N/(N-4)$ ise, Sobolev gömülmesi $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)+\beta}(\Omega)$ şeklinde gerçekleşir. (Guo ve Gao, 2016) ve (6.5) den açıkça görülür. Burada

$$\begin{aligned}
r &\leq \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \\
&= \int_{\Omega} |z|^{p(x)} \ln |z| dx \\
&= \int_{\Omega_2} |z|^{p(x)} \ln |z| dx + \int_{\Omega_1} |z|^{p(x)} \ln |z| dx \\
&\leq \int_{\Omega_2} |z|^{p(x)} \ln |z| dx \\
&\leq \frac{1}{e\beta} \int_{\Omega_2} |z|^{p(x)+\beta} dx \leq \frac{1}{e\beta} \int_{\Omega} |z|^{p(x)+\beta} dx \\
&\leq \frac{1}{e\beta} \max \left\{ \|z\|_{p(x)+\beta}^{p^++\beta}, \|z\|_{p(x)+\beta}^{p^-+\beta} \right\} \\
&\leq \frac{1}{e\beta} \max \left\{ \overline{C}^{p^++\beta} \|z\|_{H_0^2(\Omega)}^{p^++\beta}, \overline{C}^{p^-+\beta} \|z\|_{H_0^2(\Omega)}^{p^-+\beta} \right\}
\end{aligned} \tag{6.40}$$

dır. Bu, şu sonuca yol açar:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\omega} &\geq \frac{1}{\overline{C}^2} \min \left\{ \alpha^{+2} r^{2/(p^++\beta)}, \alpha^{-2} r^{2/(p^-+\beta)} \right\} \\
&> 0
\end{aligned} \tag{6.41}$$

burada $\overline{C}$, $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)+\beta}(\Omega)$ için en iyi gömülme sabitidir.

2.Durum Eğer $2N/(N-4) < p^- \leq p(x) \leq p^+ \leq Nm^-(N-4)$ ise, Gagliardo-Nirenberg eşitsizliği ve $L^{p^++\beta}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)+\beta}(\Omega)$ gömülmesi, pozitif bir C_4 sabitinin var olduğunu gösterir. Burada

$$\begin{aligned}
\|z\|_{p(x)+\beta} &\leq (|\Omega| + 1) \|z\|_{p^++\beta} \\
&\leq C_4 \|\Delta z\|_{m(x)}^{\phi} \|z\|_{2^*}^{1-\phi} \\
&\leq C_4 \|\Delta z\|_{m(x)}^{\phi} \|z\|_{H_0^2(\Omega)}^{1-\phi}
\end{aligned} \tag{6.42}$$

dır. Dolayısıyla $1/(p^++\beta) = (\phi/m^{-*}) + ((1-\phi)/2^*)$, $m^{-*} = Nm^-(N-m^-)$, $2^* = N/(N-4)$ dır. Basit bir hesaplama ile

$$\phi(p^++\beta)/m^- = (p^++\beta - (2^*)m^{-*}) / ((m^{-*} - 2)m^-) < 1$$

elde edilir. Lemma 6.2.3 deki aynı yöntemi kullanılırsa

$$\lambda_\omega \geq \min \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\alpha^+}{C_4} r^{1/(p^++\beta)} - (\phi/m^-) \right]^{2/(1-\phi)}, \\ \left[\frac{\alpha^-}{C_4} r^{1/(p^-+\beta)} - (\phi/m^+) \right]^{2/(1-\phi)} \end{array} \right\},$$

$$>0 \quad (6.43)$$

elde edilir. (6.41) ve (6.43) kullanılırsa $\lambda_\omega \geq R$ olur, burada R şu şekilde tanımlanır:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{C^{2/2}} \min \left\{ \alpha^{+2} r^{2/(p^++\beta)}, \alpha^{-2} r^{2/(p^-+\beta)} \right\}, 2 < p^+ \leq \frac{2N}{N-4}, \\ \frac{1}{C_4^{2/(1-\phi)}} \min \left\{ \begin{array}{l} \left[\alpha^+ r^{(m^--(p^++\beta)\phi)/((p^++\beta)/m^-)} \right]^{2/(1-\phi)}, \\ \left[\alpha^- r^{(m^+-(p^-+\beta)\phi)/((p^-+\beta)/m^+)} \right]^{2/(1-\phi)} \end{array} \right\}, \\ \frac{2N}{N-4} < p^+ < \frac{Nm^-}{N-4} \end{array} \right\}, \quad (6.44)$$

dır.

Teorem 6.2.5 $d < J(z_0) = E(0) \leq \beta$ ve $\beta \in (d, +\infty)$ olduğunu varsayalım.

Aşağıdaki durumlar geçerlidir:

- (i) Eğer $z_0 \in \mathcal{N}_+$ ve $\|z_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq \lambda_{J(z_0)}$ olduğunda (6.1) probleminin zayıf çözümü z , global olarak vardır ve $t \rightarrow +\infty$ için $z(t) \rightarrow 0$ olur.
- (ii) Eğer $z_0 \in \mathcal{N}_-$ ve $\|z_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq \Gamma_{J(z_0)}$ olduğunda (6.1) problemin zayıf çözümü z , sonlu zamanda patlar.

İspat: $T(z_0)$, (6.1) problemi için zayıf çözümlerin maksimum varlık zamanını ifade etsin. $T(z_0) = \infty$ ise global çözüm vardır, $\eta(z_0) = \bigcap_{t \geq 0} \{z(r) : r \geq t\}$ ile z_0 nin η -limitini kümesini belirtelim.

- (i) Eğer $z_0 \in \mathcal{N}_+$ ve $\|z_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq \lambda_{J(z_0)}$ ise $t \in [0, T(z_0))$ için $z \in \mathcal{N}_+$ olsun. Aksi halde, bir $t_0 \in (0, T(z_0))$ olacak şekilde $t \in [0, t_0)$ için $z \in \mathcal{N}_+$ ve $z(t_0) \in \mathcal{N}$ olur. (6.10) da $v = z$ alındığında

$$\frac{d}{dt} \|z_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 = -2I(z) \quad (6.45)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (6.45) ten $\Omega \times (0, t_0)$ için $\int_0^t \|z_\tau\|_{H_0^2(\Omega)}^2 d\tau \neq 0$ olduğu sonucu çıkar. Ayrıca, (6.16) dan

$$J(z(t_0)) = E(t_0) < J(z_0)$$

dır. Yani $z(t_0) \in J^{J(z_0)}$ olur. Bu nedenle $z(t_0) \in \mathcal{N}^{J(z_0)}$ dır. $\lambda_{J(z_0)}$ ın tanımından

$$\|z(t_0)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \geq \lambda_{J(z_0)} \quad (6.46)$$

elde edilir. $t \in [0, t_0)$ için $I(z) > 0$ olduğu göz önüne alındığında (6.45) e göre

$$\|z(t_0)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 < \|z_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq \lambda_{J(z_0)}$$

dır. Bu da (6.46) ile çelişir. Bu nedenle, $t \in [0, T(z_0))$ için $z \in \mathcal{N}_+$ olur. Ayrıca $t \in [0, T(z_0))$ için $z(t) \in J^{J(z_0)} \cap \mathcal{N}_+$ olur. Ayrıca, (6.20) den

$$\begin{aligned} J(z_0) &\geq J(z) \\ &\geq \frac{1}{p^-} I(z) + \frac{1}{p^{+2}} \int_{\Omega} |z|^{p(x)} dx + \frac{p^- + m^+}{m^+ p^-} \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \\ &> \frac{p^- + m^+}{m^+ p^-} \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \end{aligned} \quad (6.47)$$

olduğu görülür. Bu da $\|z\|_{W_0^{2,m(x)}(\Omega)}$ ın sınırlı ve $T(z_0) = +\infty$ olduğunu gösterir. Herhangi bir $\eta \in \eta(z_0)$ için, (6.45) ve (6.16) dan sırasıyla şu elde edilir: $\|\eta\|_{H_0^2(\Omega)}^2 < \|z_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq \lambda_{J(z_0)}$ ve $J(\eta) \leq J(z_0)$ ikinci eşitsizlik $\eta \in J^{J(z_0)}$ yi ifade eder. $\lambda_{J(z_0)}$ ın tanımı ve ilk eşitsizlik göz önüne alındığında, $\eta \notin \mathcal{N}^{J(z_0)}$ ve dolayısıyla $\eta \notin \mathcal{N}$ dır. Bu $\eta(z_0) \cap \mathcal{N} = \emptyset$ anlamına gelir ve dolayısıyla $\eta(z_0) = \{0\}$ elde edilir. Bu nedenle, (6.1) probleminin zayıf çözümü global olarak mevcuttur ve $t \rightarrow +\infty$ için $z(t) \rightarrow 0$ olur.

(ii) Eğer $z_0 \in \mathcal{N}_-$ ve $\|z_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \geq \Gamma_{J(z_0)}$ ise, $t \in [0, T(z_0))$ için $z \in \mathcal{N}_-$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksi olarak, $t^0 \in (0, T(z_0))$ olacak şekilde $t \in [0, t^0)$ için $z \in \mathcal{N}_-$ ve $z(t^0) \in \mathcal{N}$ varsayalım. (i) duruma benzer şekilde $J(z(t^0)) < J(z_0)$, yani $z(t^0) \in J^{J(z_0)}$ anlamına gelir. Dolayısıyla, $z(t^0) \in \mathcal{N}^{J(z_0)}$ dır. $\Gamma_{J(z_0)}$ nın tanımından

$$\|z(t^0)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \geq \Gamma_{J(z_0)} \quad (6.48)$$

elde edilir. Burada $I(z(t)) < 0$ olduğunu dikkate alarak $t \in [0, t^0)$ için (6.45) ten $\|z(t^0)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 > \|z_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \geq \Gamma_{J(z_0)}$ sonucu çıkar, ki bu da (6.48) ile çelişir. Bu nedenle $t \in [0, T(z_0))$ için $z \in \mathcal{N}_-$ olur. Ayrıca $t \in [0, T(z_0))$ için $z(t) \in J^{J(z_0)} \cap \mathcal{N}_-$ elde edilir ve $T(z_0) = \infty$ olur. O zaman herhangi bir $\phi \in \phi(z_0)$ için $\|\phi\|_{H_0^2(\Omega)}^2 > \|z_0\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \geq \Gamma_{J(z_0)}$ ve $J(\phi) \leq J(z_0)$ dır. (6.45) ve (6.16) sırasıyla kullanılırsa $\phi \in J^{J(z_0)}$ olur. $\Gamma_{J(z_0)}$ ın tanımı ve ilk eşitsizlik göz önüne alındığında, $\phi \notin \mathcal{N}^{J(z_0)}$ ve $\phi \notin \mathcal{N}$ dır. Bu

$\phi(z_0) \cap \mathcal{N} = \emptyset$ anlamına gelir ve $\phi(z_0) = \{0\}$ elde edilir. Buradan $d = \text{dist}(0, \mathcal{N}_-) = \inf_{z \in \mathcal{N}_-} \|z\|_{W_0^{2,m(x)}(\Omega)} > 0$ ve (6.19) ile çelişir. Bu nedenle $\phi(z_0) = \emptyset$ ve $T(z_0) < \infty$ dır. Yani (6.1) probleminin zayıf çözümü z sonlu zamanda patlar.

Önerme 6.2.6 Eğer $J(z_0)$ aşağıdaki koşulu sağlıyorsa

$$d < J(z_0) < (p^- - m/mp^-) \left[\frac{1 + \gamma_1}{\gamma_1} (1 + |\Omega|)^2 \right]^{-m/2} \|z\|_{H_0^2(\Omega)}^m$$

o zaman $z_0 \in \mathcal{N}_-$ ve (6.1) probleminin zayıf çözümü z sonlu zamanda patlar.

Teorem 6.2.7 Her $R > d$ için $J(z_R) = R$ koşulunu sağlayan ve problem (6.1) in zayıf çözümünün sonlu zamanda patladığı bir başlangıç değeri $z_R \in \mathcal{N}_-$ vardır.

İspat: $R > d$ ve $\Omega_3, \Omega_4, \Omega$ nın ayrık iki açık alt bölgesidir. Ayrıca, $v \in W_0^{2,m}(\Omega_3)$ sıfırdan farklı keyfi bir fonksiyon olsun. Teorem 6.2.5 nin (ii) eşitsizliğini hatırlarsak, $\psi > 0$ yeterince büyük seçildiğinde,

$$J(\psi v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\psi^m}{m} |\Delta v|^m + \frac{\psi^{p(x)}}{p^2(x)} |v|^{p(x)} - \frac{\psi^{p(x)}}{p(x)} |v|^{p(x)} \ln |\psi v| \right) dx \leq 0$$

ve

$$R < \frac{p^- - m}{mp^-} \left[\frac{1 + \gamma_1}{\gamma_1} (1 + |\Omega|)^2 \right]^{-m/2} \|\psi v\|_{H_0^2(\Omega)}^m \quad (6.49)$$

dır. Bu koşulu sağlayan bir $\psi > 0$ seçelim ve $\mu \in W_0^{2,m}(\Omega_4)$ fonksiyonu alalım; $R = J(\mu) + J(\eta v)$. Şimdi, v ve μ fonksiyonlarını sırasıyla $\Omega \setminus \Omega_3$ ve $\Omega \setminus \Omega_4$ te 0 olacak şekilde genişletiyoruz. Daha sonra, $z_R = \eta v + \mu$ olarak tanımlayalım. O zaman, $R = J(\eta v + \mu) = J(z_R)$ dır ve buradan

$$\begin{aligned} & \frac{p^- - m}{mp^-} \left[\frac{1 + \gamma_1}{\gamma_1} (1 + |\Omega|)^2 \right]^{-m/2} \|z_R\|_{H_0^2(\Omega)}^m \\ & \geq \frac{p^- - m}{mp^-} \left[\frac{1 + \gamma_1}{\gamma_1} (1 + |\Omega|)^2 \right]^{-m/2} \|\eta v\|_{H_0^2(\Omega)}^m \\ & > J(z_R) \end{aligned} \quad (6.50)$$

elde edilir. Önerme 6.2.6 a göre, $z_R \in \mathcal{N}_-$ ve (6.1) probleminin zayıf çözümü z sonlu zamanda patlar.

7. LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ VİSKOELASTİK $m(x)$ – BİHARMONİK DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE PATLAMASI

Bu bölümde, logaritmik kaynak ve viskoelastik terimli $m(x)$ -biharmonik

$$\begin{cases} z_t + \Delta^2 z + \Delta_{m(x)}^2 z - \int_0^t g(t-s) \Delta^2 z ds = |z|^{p-2} z \ln |z|, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ z(x, t) = \frac{\partial z}{\partial \nu}(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega \times (0, T), \\ z(x, 0) = z_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (7.1)$$

başlangıç sınır değer problemi ele alınmıştır (Pişkin ve Butakın, 2024c). $\Omega, \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahiptir. Değişken üs $m(\cdot)$, Ω içinde tanımlanan ölçülebilir fonksiyon olsun. $\Delta_{m(x)}^2 z$ terimi $m(x)$ -biharmonik operatör olarak adlandırılır ve

$$\Delta_{m(x)}^2 z = \Delta \left(|\Delta z|^{m(x)-2} \Delta z \right)$$

şekilde gösterilir. Ayrıca $m(x)$, $\bar{\Omega}$ üzerinde sürekli ve ölçülebilir bir fonksiyondur. Burada

$$m_- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} m(x), \quad m_+ = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} m(x)$$

dır.

Aşağıdaki varsayımları göz önünde bulunduruyoruz:

$$A_1) \quad 2 < m_- \leq m(x) \leq m_+ < p < m^* = \frac{Nm(x)}{N-m(x)}, \text{ burada } m^* \text{ Lemma 7.1.3 te}$$

verilmiştir.

$$A_2) \quad g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ aşağıdaki koşulları sağlayan sınırlı } C^2 \text{ bir fonksiyondur: } g(s) \geq 0,$$

$$g'(s) \leq 0, \quad 1 - \int_0^t g(s) ds = l > 0.$$

$$A_3) \quad E(0) > 0 \text{ dır.}$$

Şimdiye kadar, parabolik tipli diferansiyel denklemler hakkında pek çok sonuç elde edilmiştir. Bu bölümdeki temel amacımız, $(\int_0^t g(t-s) \Delta^2 z ds)$ viskoelastik ve $(\Delta_{m(x)}^2 z)$ $m(x)$ -biharmonik terimli, hem de problemi literatürde farklı kılan $(|z|^{p-2} z \ln |z|)$ logaritmik kaynak terimli olarak ele almaktır.

7.1 Giriş

Bu kısım teoremimizin ispatı için kullanılacak lemmalardan oluşmaktadır.

Lemma 7.1.1 (Diening vd., 2011). $L^{m(\cdot)}$ uzayı, Luxembourg normu ile birlikte

$$\|z\|_{m(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \rho_{m(x)} \left(\frac{z}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlandığında bir Banach uzayıdır. Burada

$$1 \leq m_- := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} m(x) \leq m(x) \leq m_+ := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} m(x) < \infty$$

ve

$$\min \left\{ \|z\|_{m(\cdot)}^{m_-}, \|z\|_{m(\cdot)}^{m_+} \right\} \leq \varrho_{m(\cdot)}(z) \leq \max \left\{ \|z\|_{m(\cdot)}^{m_-}, \|z\|_{m(\cdot)}^{m_+} \right\} \quad (7.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 7.1.2 (Diening vd., 2011) Değişken üs $m(x)$ ve sabit üs p , Ω üzerinde her men her yerde $m(x) \leq p$ koşulunu sağladığında, $L^p \hookrightarrow L^{m(\cdot)}$ gömülmesi sürekli ve kompaktır.

Lemma 7.1.3 (Diening vd., 2011) Varsayalım ki $p : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ eşitsizliğini sağlayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun ve değişken üsler $m(x) \in C(\overline{\Omega})$, $p : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ dır. Burada sürekli kompakt bir Sobolev gömülmesi vardır yani $W_0^{1,m(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ dır. Böylece

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} (m^*(x) - p) > 0$$

ve

$$m^*(x) = \begin{cases} \frac{Nm(x)}{N-m(x)}, & m(x) < N, \\ \infty, & m(x) \geq N \end{cases}$$

dır.

Sonraki hesaplamalarda kullanılacak olan bir fonksiyonel tanımlıyoruz:

$$\begin{aligned} J(t) = & \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta z\|_2^2 - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |z|^p \ln |z| dx + \frac{1}{p^2} \|z\|_p^p \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t g(t-s) \|\Delta z(x, s) - \Delta z(x, t)\|_2^2 ds + \int_{\Omega} \frac{|\Delta z|^{m(x)}}{m(x)} dx \end{aligned} \quad (7.3)$$

dır.

7.2 Zayıf Çözümler

Bu kısımda, Faedo Galerkin yaklaşım yöntemi kullanılarak (7.1) probleminin zayıf çözümlerinin varlığı gösterilecektir.

Tanım 7.2.1 (7.1) probleminin $z(x, t)$ zayıf çözümü için

$$z(x, t) \in L^2(0, T; W_0^{2,m(x)}(\Omega) \cap L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^2(\Omega)) \\ \cap C(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$z_t(x, t) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

dır. Ayrıca $\forall \theta \in C^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega))$ için aşağıdaki denklem

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega z_t \theta dx dt + \int_0^T \int_\Omega \Delta z \Delta \theta dx dt + \int_0^T \int_\Omega |\Delta z|^{m(x)-2} \Delta z \Delta \theta dx dt \\ & - \int_0^T \int_0^t g(t-s) \int_\Omega \Delta z(x, s) \Delta \theta dx ds dt \\ & = \int_0^T \int_\Omega |z|^{p-2} z \ln |z| \theta dx dt \end{aligned} \quad (7.4)$$

sağlanır. Burada maksimum varlık aralığı $[0, T]$ dir.

Teorem 7.2.2 Varsayalım ki $z_0 \in W_0^{2,m(x)}(\Omega) \cap L^p(\Omega) \setminus \{0\}$ olsun. Bu durumda $z(x, t)$ fonksiyonu Tanım 7.2.1 in bir zayıf çözümüdür.

İspat: Yaklaşık bir çözüm elde etmek için Faedo-Galerkin yönteminden yararlanacağız. $\{\theta_i\}_{i=1}^\infty, L^2(\Omega)$ uzayında ortonormal bir dizi olup $H_0^2(\Omega)$ ayrık altuzayının ortogonal bir tabanı olarak kabul edilsin. $\{\theta_i\}_{i=1}^\infty, -\Delta$ nın $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ özdeğerlerine karşılık gelen bir özfonksiyon dizisidir. (7.1) probleminin sonlu boyutlu yaklaşım çözümleri

$$z_n(x, t) = \sum_{i=1}^n a_{ni}(t) \theta_i(x) \quad (7.5)$$

eşitliği ile gösterilir. Öyle ki

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} z'_n \theta_i dx + \int_{\Omega} \Delta z_n \Delta \theta_i dx + \int_{\Omega} |\Delta z_n|^{m(x)-2} \Delta z_n \Delta \theta_i dx \\
& - \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta z_n(x, s) \Delta \theta_i dx ds \\
& = \int_{\Omega} |z_n|^{p-2} z_n \ln |z_n| \theta_i dx
\end{aligned} \tag{7.6}$$

ve $W_0^{2,m(x)}(\Omega) \cap L^p(\Omega) \setminus \{0\}$ için

$$z_n(x, 0) = \sum_{i=1}^n a_{ni}(0) \theta_i(x) \rightarrow z_0(x) \tag{7.7}$$

dır. Şimdi, $\{a_{ni}\}_{i=1}^n$ katsayılarını elde etmeliyiz. Dolayısıyla $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$\begin{aligned}
a'_{nk}(t) &= - \int_{\Omega} \Delta z_n \Delta \theta_k dx + \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta z_n(x, s) \Delta \theta_k dx ds \\
& - \int_{\Omega} |\Delta z_n|^{m(x)-2} \Delta z_n \Delta \theta_k dx + \int_{\Omega} |z_n|^{p-2} z_n \ln |z_n| \theta_k dx
\end{aligned} \tag{7.8}$$

dır. Adi diferansiyel denklemlerden, (7.8) probleminin çözümünün varlığını sağlar, burada maksimum çözüm aralığı $[0, T]$ dır. (7.6) denklemini $a'_{ni}(t)$ ile çarpıp toplam aldığımızda ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{\Omega} |z'_n|^2 dx + \int_{\Omega} \Delta z_n \Delta \theta'_n dx + \int_{\Omega} |\Delta z_n|^{m(x)-2} \Delta z_n \Delta \theta'_n dx \right. \\
& \quad \left. - \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta z_n(x, s) \Delta \theta'_n dx ds \right] \\
& = \int_{\Omega} |z_n|^{p-2} z_n \ln |z_n| \theta'_n dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} g(t) \|\Delta z_n\|_2^2 + \int_{\Omega} |z'_n|^2 dx \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-s) \|\Delta z_n(x, s) - \Delta z_n(x, t)\|_2^2 ds \\
& = - \frac{d}{dt} J(z_n(t))
\end{aligned} \tag{7.9}$$

eşitliği elde edilir. Burada $J(t)$, (7.3) de tanımlanan fonksiyoneldir. (A_2) hipotezinden

$$J'(z_n(t)) = - \left[\frac{1}{2} g(t) \|\Delta z_n\|_2^2 - \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-s) \|\Delta z_n(x, s) - \Delta z_n(x, t)\|_2^2 ds + \int_{\Omega} |z'_n|^2 dx \right] \leq 0 \quad (7.10)$$

olacak şekilde bir üst sınırı bulunur. Bu da $J(z_n)$ nin artmadığını ortaya çıkarır. Sonuç olarak, $J(z_n(t)) \leq J(z_n(0)) \forall t \in [0, T)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için sağlar. Daha sonra (7.6) yı $a_{ni}(t)$ ile çarpıp toplam aldığımızda

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} z'_n z_n dx - \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta z_n(x, s) \Delta z_n(x, t) dx ds \\ & + \int_{\Omega} |\Delta z_n|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta z_n|^{m(x)} dx \\ & = \int_{\Omega} |z_n|^p \ln |z_n| dx \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Dolayısıyla gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |z_n|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta z_n|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta z_n|^{m(x)} dx ds \right] \\ & = \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta z_n(x, s) \Delta z_n(x, t) dx ds + \int_{\Omega} |z_n|^p \ln |z_n| dx \end{aligned} \quad (7.11)$$

dır. Buradan

$$H_n(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |z_n|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta z_n|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta z_n|^{m(x)} dx ds \quad (7.12)$$

olsun. Böylece

$$\frac{d}{dt} H_n(t) = \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta z_n(x, s) \Delta z_n(x, t) dx ds + \int_{\Omega} |z_n|^p \ln |z_n| dx \quad (7.13)$$

dır. İşlemlerimize devam etmek için Young eşitsizliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta z_n(x, s) \Delta z_n(x, t) dx ds \\
&= \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta z_n(x, t) (\Delta z_n(x, s) - \Delta z_n(x, t)) dx ds \\
&\quad + \int_0^t g(t-s) \|\Delta z_n\|_2^2 ds \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^t g(t-s) \|\Delta z_n(x, s) - \Delta z_n(x, t)\|_2^2 ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t g(t-s) \|\Delta z_n\|_2^2 ds + \int_0^t g(t-s) \|\Delta z_n\|_2^2 ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta z_n(x, s) \Delta z_n(x, t) dx ds \\
&\leq \frac{3}{2} \int_0^t g(t-s) \|\Delta z_n\|_2^2 ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t g(t-s) \|\Delta z_n(x, s) - \Delta z_n(x, t)\|_2^2 ds
\end{aligned} \tag{7.14}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (A_2) hipotezi ve (7.10) denkleminde

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} H_n(t) &\leq J(z_n(t)) - \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta z_n\|_2^2 \\
&\quad - \int_{\Omega} \frac{|\Delta z_n|^{m(x)}}{m(x)} dx - \frac{1}{p^2} \|z_n\|_p^p + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |z_n|^p \ln |z_n| dx \\
&\quad + \frac{3}{2} \int_0^t g(t-s) \|\Delta z_n\|_2^2 ds + \int_{\Omega} |z_n|^p \ln |z_n| dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani buradan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} H_n(t) &\leq J(z_n(t)) - \frac{1}{2} \|\Delta z_n\|_2^2 + 2 \int_0^t g(s) ds \|\Delta z_n\|_2^2 - \frac{1}{p^2} \|z_n\|_p^p \\
&\quad + \left(1 + \frac{1}{p} \right) \int_{\Omega} |z_n|^p \ln |z_n| dx - \int_{\Omega} \frac{|\Delta z_n|^{m(x)}}{m(x)} dx
\end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak

$$\frac{d}{dt} H_n(t) \leq \left(1 + \frac{1}{p}\right) \int_{\Omega} |z_n|^p \ln |z_n| dx + 2(1-l) \|\Delta z_n\|_2^2 + J(z_n(0)) \quad (7.15)$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |z_n|^p \ln |z_n| dx &\leq \int_{\{x \in \Omega: |z_n| \geq 1\}} |z_n|^p \ln |z_n| dx \\ &\leq (ev)^{-1} \cdot \int_{\{x \in \Omega: |z_n| \geq 1\}} |z_n|^{p+v} dx \\ &\leq (ev)^{-1} \cdot \|z_n\|_{p+v}^{p+v} \end{aligned} \quad (7.16)$$

dır. Burada $0 < v < p^* - p$, $p^* = \frac{Np}{N-p}$ dır. (Brezis, 2011) de gösterilen Gagliardo-Nirenberg interpolasyon eşitsizliği kullanılırsa

$$\|z_n\|_{p+v}^{p+v} \leq C \|\Delta z_n\|_m^{\beta(p+v)} \|z_n\|_2^{(1-\beta)(p+v)} \quad (7.17)$$

olduğu görülür. Burada $\beta = \frac{Nm(p+v-2)}{(p+v)(Nm-2N+2m)}$ dır. Young eşitsizliği kullanılırsa

$$\|z_n\|_{p+v}^{p+v} \leq \varepsilon \|\Delta z_n\|_m^m + C(\varepsilon) \|z_n\|_2^{\frac{m_-(1-\beta)(p+v)}{p_--\beta(p+v)}}. \quad (7.18)$$

elde edilir. Sonuç olarak, (7.15) denkleminde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_n(t) &\leq J(z_n(0)) + \left(1 + \frac{1}{p}\right) (ev)^{-1} \left[\varepsilon \|\Delta z_n\|_m^m + C(\varepsilon) \|z_n\|_2^{\frac{m_-(1-\beta)(p+v)}{p_--\beta(p+v)}} \right] \\ &\quad + 2(1-l) \|\Delta z_n\|_2^2. \end{aligned} \quad (7.19)$$

olduğu görülür. $\psi = \frac{m_-(1-\beta)(p+v)}{2(m-\beta)(p+v)} > 1$ olarak tanımlayalım ve

$$\min \left\{ \|\Delta z_n\|_{m(x)}^{m_-}, \|\Delta z_n\|_{m(x)}^{m_+} \right\} = \|\Delta z_n\|_{m(x)}^{m_-}$$

olduğunu varsayalım, o zaman (7.2) den

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_n(t) &\leq \left[C(\varepsilon) \|z_n\|_2^{2\psi} + \varepsilon \int_{\Omega} |\Delta z_n|^{m(x)} dx \right] \left(1 + \frac{1}{p}\right) (ev)^{-1} \\ &\quad + 2(1-l) \|\Delta z_n\|_2^2 + J(z_n(0)) \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliğin integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
H_n(t) \leq & H_n(0) + \left(1 + \frac{1}{p}\right) (ev)^{-1} 2C(\varepsilon) \int_0^t \frac{1}{2} \|z_n\|_2^{2\psi} ds \\
& + J(z_n(0))t + 2(1-l) \int_0^t \|\Delta z_n\|_2^2 ds \\
& + \left(1 + \frac{1}{p}\right) (ev)^{-1} \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta z_n|^{m(x)} dx ds
\end{aligned} \tag{7.20}$$

dır. $t \in [0, T]$ aralığında t ye bağlı olan $H_n(0) + J(z_n(0))t = c_1$ sabitini tanımlıyoruz.

Şimdi $l \geq \frac{3}{4}$ ve $\varepsilon = \frac{evp}{2(p+1)}$ değerlerini seçtikten sonra

$$\begin{aligned}
H_n(t) \leq & \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta z_n|^{m(x)} dx ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|\Delta z_n\|_2^2 ds \\
& + c_1(t) + c_2 \int_0^t \frac{1}{2} \|z_n\|_2^{2\psi} ds \\
\leq & c_1(t) + \frac{1}{2} H_n(t) + c_2 \int_0^t H_n^\psi ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $c_2 = 2C(\varepsilon) \left(1 + \frac{1}{p}\right) (ev)^{-1}$ dır. Sonuç olarak

$$H_n(t) \leq c_1(t) + c_2 \int_0^t H_n^\psi ds \tag{7.21}$$

olur. Gronwall-Bellman-Bihari tipi eşitsizliği uyguladığımızda

$$\begin{aligned}
H_n(t) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |z_n|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta z_n|^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta z_n|^{m(x)} dx ds \\
\leq & C_T
\end{aligned} \tag{7.22}$$

elde edilir. Burada C_T, T ye bağlıdır. $\min \left\{ \|\Delta z_n\|_{m(x)}^{m_-}, \|\Delta z_n\|_{m(x)}^{m_+} \right\} = \|\Delta z_n\|_{m(x)}^{m_-}$, (A_1) ile birlikte $\|\Delta z_n\|_{m(x)}^2 \leq \|\Delta z_n\|_{m(x)}^{m_-}$ eşitsizliğini verir. Şimdi, (7.2) denkleminde

$$\int_0^T \|\Delta z_n\|_{m(x)}^2 ds \leq \int_0^T \|\Delta z_n\|_{m(x)}^{m_-} ds \leq \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta z_n|^{m(x)} dx ds \leq C_T \tag{7.23}$$

olduğu görülür. (7.23) denklemi göz önüne alındığında Sobolev gömülmesi uygulanırsa

$$\int_0^T \|z_n\|_m^2 dx \leq C \int_0^T \|\Delta z_n\|_{m(x)}^2 dz \leq C_T \quad (7.24)$$

elde edilir. $J(t)$ nin sürekliliği bir sabit C yi sağlar ve $W_0^{2,m(x)}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ içinde $z_n(x, 0) \rightarrow z_0(x)$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$J(z_n(x, 0)) \leq C \quad (7.25)$$

olur. Ek olarak, (7.9) denklemden

$$\int_{\Omega} |z_{nt}|^2 dx \leq -\frac{d}{dt} J(z_n)$$

dır. 0 dan t ye integrali alındığında

$$\int_0^t \|z'_n(s)\|_2^2 ds + J(z_n) \leq J(z_n(x, 0)) \leq C \quad (7.26)$$

elde edilir. Standart kompaktlıktan (7.22), (7.23), (7.24) ve (7.26) den

$$\begin{aligned} z_n &\rightarrow z, \quad L^2(0, T; W_0^{2,m(x)}(\Omega) \cap L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^2(\Omega)) && \text{uzayında zayıf yakınsak,} \\ z'_n &\rightarrow z', \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)) && \text{uzayında zayıf yakınsak,} \\ |\Delta z_n|^{m(x)-2} \Delta z_n &\rightarrow \xi, \quad L^2(0, T; L^{m'(x)}(\Omega)) && \text{uzayında zayıf yakınsak} \end{aligned} \quad (7.27)$$

tır. Şimdi, Aubin-Lions lemması kullanılırsa

$$z_n \rightarrow z, \quad C(0, T; L^2(\Omega)) \text{ uzayında yakınsaktır.} \quad (7.28)$$

$|k|^{m(x)-2} k$ operatörünün monotonluğu, Minty-Browder koşulu ile birlikte $\xi = |\Delta z|^{m(x)-2} \Delta z$ sonucunu verir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

7.3 Patlama Zamanı İçin Üst Sınır

Bu kısımda, (7.1) denkleminin çözümlerinin patlama süresi için bir üst sınır elde edeceğiz.

Teorem 7.3.1 (7.1) denkleminde tanımlandığı gibi bir zayıf çözüm $z(x, t)$ vardır. Ayrıca, $(A_1) - (A_3)$ koşulları sağlansın. O zaman

$$T^* \leq \frac{(1 + \gamma) \left(1 + \frac{1}{\phi}\right) \|z_0\|_2^2}{2\mu\gamma E(0)} \quad (7.29)$$

$z(x, t)$ çözümü T^* sonlu zamanında patlar. Burada ϕ, γ ve μ pozitif sabitlerdir.

İspat: (7.1) denklemini z_t ile çarpıp Ω üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} z_t^2 dx &= - \int_{\Omega} \Delta z \Delta z_t dx - \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)-2} \Delta z \Delta z_t dx + \int_{\Omega} |z|^{p-2} z \ln |z| z_t dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) \Delta^2 z(x, s) z_t(x, t) ds dx \end{aligned}$$

olur. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} z_t^2 dx &- \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-s) \|\Delta z(x, s) - \Delta z(x, t)\|_2^2 ds + \frac{1}{2} g(t) \|\Delta z\|_2^2 \\ &= \frac{d}{dt} \left[\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \|\Delta z\|_2^2 - \frac{1}{2} \int_0^t g(t-s) \|\Delta z(x, s) - \Delta z(x, t)\|_2^2 ds \\ &- \int_{\Omega} \frac{|\Delta z|^{m(x)}}{m(x)} dx + \int_0^t g(s) ds \|\Delta z\|_2^2 - \frac{1}{p^2} \|z\|_p^p + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |z|^p \ln |z| dx \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, bir fonksiyonel $E(t)$ tanımlayalım:

$$\begin{aligned} E(t) &= - \frac{1}{2} \int_0^t g(t-s) \|\Delta z(x, s) - \Delta z(x, t)\|_2^2 ds - \frac{1}{p^2} \|z\|_p^p \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{|\Delta z|^{m(x)}}{m(x)} dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |z|^p \ln |z| dx - \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t g(s) ds\right) \|\Delta z\|_2^2 \quad (7.30) \end{aligned}$$

dır. Böylece (A_2) yi kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \int_{\Omega} z_t^2 dx + \frac{1}{2} g(t) \|\Delta z\|_2^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t g'(t-s) \|\Delta z(x, s) - \Delta z(x, t)\|_2^2 ds \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (7.31)$$

elde edilir. Yardımcı fonksiyoneli tanımlayacak olursak

$$\psi(t) = \int_0^t \int_{\Omega} z^2(x, s) dx ds + A \quad (7.32)$$

dır. Daha sonra türevi alınır

$$\psi'(t) = 2 \int_{\Omega} \int_0^t z(x, s) z_t(x, s) ds dx + \int_{\Omega} z_0^2(x) dx \quad (7.33)$$

bulunur. Tekrar türevi alınır

$$\begin{aligned} \psi''(t) &= 2 \int_{\Omega} z z_t dx \\ &= 2 \int_{\Omega} z(x, t) \left[-\Delta^2 z - \Delta \left(|\Delta z|^{m(x)-2} \Delta z \right) + \int_0^t g(t-s) \Delta^2 z(x, s) ds \right. \\ &\quad \left. + |z|^{p-2} z \ln |z| \right] dx \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \psi''(t) &= -2 \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx - 2 \|\Delta z\|_2^2 + 2 \int_{\Omega} |z|^p \ln |z| dx \\ &\quad + 2 \int_0^t g(t-s) \|\Delta z\|_2^2 ds \\ &\quad + 2 \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta z(x, t) (\Delta z(x, s) - \Delta z(x, t)) dx ds \end{aligned}$$

dır.

Ardından μ sabiti seçelim öyle ki $m_+ < \mu < p$ ve $\mu(\mu - 2) > \frac{1-l}{l}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\psi''(t) = & 2\mu E(t) + \mu \int_0^t g(t-s) \|\Delta z(x, s) - \Delta z(x, t)\|_2^2 ds \\
& + 2\mu \int_{\Omega} \frac{|\Delta z|^{m(x)}}{m(x)} dx - 2 \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \\
& + \mu \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|\Delta z\|_2^2 - \frac{2\mu}{p} \int_{\Omega} |z|^p \ln |z| dx \\
& + \frac{2\mu}{p^2} \|z\|_p^p + 2 \int_{\Omega} |z|^p \ln |z| dx \\
& - 2 \left(1 - \int_0^t g(t-s) ds \right) \|\Delta z\|_2^2 \\
& + 2 \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta z(x, t) (\Delta z(x, s) - \Delta z(x, t)) dx ds
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Öyle ki

$$\begin{aligned}
\psi''(t) \geq & \mu \int_{\Omega} g(t-s) \|\Delta z(x, s) - \Delta z(x, t)\|_2^2 dx ds + 2\mu E(t) \\
& + \frac{2\mu}{p^2} \|z\|_p^p + (\mu - 2) \left(1 - \int_0^t g(t-s) ds \right) \|\Delta z\|_2^2 \\
& + \left(\frac{2\mu}{p} - 2 \right) \int_{\Omega} |z|^p \ln |z| dx + \left(\frac{2\mu}{m_+} - 2 \right) \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \\
& + \int_0^t g(t-s) \int_{\Omega} \Delta z(x, t) (\Delta z(x, s) - \Delta z(x, t)) dx ds
\end{aligned}$$

dır. (A_2) ve $|z| \geq 1$ koşulları altında

$$\begin{aligned}
\psi''(t) \geq & \left[(\mu - 2)l + \frac{(1-l)}{\mu} \right] \|\Delta z\|_2^2 + \left(\frac{2\mu}{m_+} - 2 \right) \int_{\Omega} |\Delta z|^{m(x)} dx \\
& + 2\mu J(t) + \frac{2\mu}{p^2} \|z\|_p^p + 2 \left(1 - \frac{\mu}{p} \right) \int_{\Omega} |z|^p \ln |z| dx
\end{aligned}$$

$$\geq 2\mu E(t) \tag{7.34}$$

elde edilir. (7.31) eşitsizliğinden

$$E(t) \geq E(0) + \int_0^t \int_{\Omega} z_t^2(x, s) dx ds \tag{7.35}$$

olur. $\phi > 0$ olduğundan

$$(\psi'(t))^2 \leq 4(1+\phi) \left[\int_{\Omega} \int_0^t z(x,s) z_t(x,s) ds dx \right]^2 + \left(1 + \frac{1}{\phi}\right) \left[\int_{\Omega} z_0^2(x) dx \right]^2$$

dır. Hölder eşitsizliğinden

$$\psi'^2 \leq 4(1+\phi) \left(\int_0^t \int_{\Omega} z^2(x,s) dx ds \right) \left(\int_0^t \int_{\Omega} z_t^2(x,s) dx ds \right) + \left(1 + \frac{1}{\phi}\right) \left[\int_{\Omega} z_0^2(x) dx \right]^2$$

elde edilir. $\phi > 0$ olduğunda $\gamma = \phi = \sqrt{\frac{\mu}{2}} - 1 > 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \psi''(t) \psi(t) - (1+\gamma) (\psi'(t))^2 \\ & \geq - (1+\gamma) \left(1 + \frac{1}{\phi}\right) \left[\int_{\Omega} z_0^2(x) dx \right]^2 \\ & \quad + 2\mu AE(0) \end{aligned} \tag{7.36}$$

dır. $E(0) > 0$ ve (7.35) denkleminde, (7.36) denklemindeki $A > 0$ ı yeterince büyük olacak şekilde seçilirse

$$\psi''(t) \psi(t) - (1+\gamma) (\psi'(t))^2 \geq 0 \tag{7.37}$$

olduğu görülür. Buradan, Levine'nin (Levine, 1973) konkavlık yöntemini kullanarak z çözümünün T^* sonlu zamanında patlamasını

$$A = \frac{(1+\gamma) \left(1 + \frac{1}{\phi}\right) \left[\int_{\Omega} z_0^2(x) dx \right]^2}{2\mu E(0)}$$

elde edilir. T^* için üst sınır

$$0 < T^* \leq \frac{(1+\gamma) \left(1 + \frac{1}{\phi}\right) \|z_0\|_2^2}{2\mu\gamma E(0)} \tag{7.38}$$

dır.

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında yapılan çalışmalar, ele alınan denklemlerin güncelliğini ve literatürde hala birçok açık problemin bulunduğunu ortaya koymaktadır. Bu tespitten hareketle, tezin dördüncü, beşinci, altıncı ve yedinci bölümlerinde parabolik tipten dört farklı problem incelenmiş ve bu problemlerin çözümlerinin bazı davranışları ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde, $m(x)$ -biharmonik terim içeren değişken üslü parabolik denklemin çözümleri incelenmiştir. Çözümlerin global varlığı ve patlama davranışı gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, Kirchhoff tipli parabolik denklemin çözümlerin global varlığı ve azalması gösterilmiştir.

Altıncı bölümde, doğrusal olmayan logaritmik kaynak terimi içeren değişken üslü parabolik denklemin çözümlerin global varlığı ve patlama davranışı ispatlanmıştır.

Yedinci bölümde, viskoelastik ve doğrusal olmayan logaritmik kaynak terimi içeren değişken üslü parabolik denklemin çözümlerin lokal varlığı ve patlama davranışı gösterilmiştir.

Bu tezde, değişken üslü parabolik denklemler incelenmiştir. Ele alınan problemler, $m(x)$ -biharmonik terim, Kirchhoff terimi, logaritmik kaynak terimi, viskoelastik terim kullanılarak oluşturulmuştur. Bu terimlerin farklı kombinasyonlarıyla yeni problem türleri türetmek mümkündür. Çalışmada elde edilen teoremler, farklı koşullar altında veya alternatif metotlar kullanılarak ispatlanabilir. Ayrıca, bu denklemler çeşitli matematiksel özellikler açısından analiz edilebilir ve belirli özel durumları için nümerik simülasyonlar gerçekleştirilebilir. Bu tezde incelenen problemler sınırlı bölgeler için ele alınmış olup, ilerleyen çalışmalarda sınırsız bölgeler üzerinde farklı sınır koşulları dikkate alınarak yeni araştırmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Adam, R. A. and Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev Spaces*, New York: Elsevier.
- Ames, J. P. (1965). *Nonlinear partial differential equations in engineering*, Academic Press, 511, New York.
- Aubin, J. P. (1963). Un théoreme de compacité. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 256(24), 5042-5044. doi: 10.4236/amaç.2021.117026.
- Baghaei, K., Ghaemi, B. and Hesaaraki M. (2014). Lower Bounds for the blow-up time in a semilinear parabolic problem involving a variable source. *Appl. Math. Lett.*, 27 (2014), 49-52. <http://doi.org/10.1016/j.aml.2013.07.012>.
- Baki, A. (2014). *Matematik Tarihi Ve Felsefesi*, Pegem Akademi.
- Bialynicki-Birula, I. and Mycielski, J. (1975). Wave equations with logarithmic nonlinearities. *Bulletin L'Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques*, 23 (4): 461-466. [http://doi.org/10.1016/0003-4916\(76\)90057-9](http://doi.org/10.1016/0003-4916(76)90057-9).
- Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and Partial differential equations*, New York: Springer.
- Butakın, G. and Pişkin, E. (2024a). Existence and Blow up of Solutions for $m(x)$ -Biharmonic equation with Variable Exponent Sources, *Filomat*, 38(22), 7871--7893. <http://doi.org/10.2298/FIL2422871B>.
- Butakın, G., Pişkin, E., and Çelik, E. (2024). Blowup and Global Solutions of a Fourth-Order Parabolic Equation With Variable Exponent Logarithmic Nonlinearity. *Journal of Function Spaces*, 2024(1), 2847533. <http://doi.org/10.1155/jofs/2847533>.
- Butakın, G. and Pişkin, E. (2024b). Existence and Blow up of Solutions of a Viscoelastic $m(x)$ -Biharmonic Equation with Logarithmic Source Term, *Miskolc Mathematical Notes*, 25(2) (2024), 629--643. <http://doi.org/10.18514/MMN.2024.4843>.
- Butakın, G. and Pişkin, E. (2024c). Blow up of solutions for a fourth-order reaction-diffusion equation in variable-exponent Sobolev spaces. *Filomat*, 38(23), 8225--8242. <https://doi.org/10.2298/FIL2423225B>.
- Butakın, G. and Pişkin, E. (2025a). The Parabolic Equation with $q(x)$ -Triharmonic Equation: Blow up and Growth. *Bol. Soc. Paran. Mat.*, (baskıda).
- Butakın, G. and Pişkin, E. (2025b). Qualitative analysis of solutions for a parabolic $m(x)$ -biharmonic equation with logarithmic nonlinearity. *Filomat*, 39 (5), 1657-1671. <https://doi.org/10.2298/FIL2505657B>.
- Butakın, G. and Pişkin, E. (2025c). Existence and blow up of solutions for a m -biharmonic viscoelastic equation with variable exponents. *Filomat*, 39 (7), 2331-2346. <https://doi.org/10.2298/FIL2507331B>.

- Cazena, H. and Haraux, K. (1980). Equations d'évolution avec non linéarité logarithmique. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2 (1), 21–51.
- Chen, Y., Levine, S. and Rao, M. (2006). Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM journal on Applied Mathematics*, 66 (4), 1383–1406. <https://doi.org/10.1137/050624522>.
- Chuong, Q. V., Nhan, L. C. and Truong, L. X. (2022). Existence and Nonexistence of Global solution to the Cahn-Hilliard Equation with variable exponent sources. *Electron. J. Differ. Equ.*, 46, 1-22. <https://doi.org/10.58997/ejde.2022.46>.
- Chuong, Q. V., Nhan, L. C. and Truong, L. X. (2024). Blow-up and decay for a pseudo-parabolic equation with nonstandard growth conditions. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 28(3), 1–21. <http://doi.org/10.11650/tjm/231203>.
- Di, H., Qian, P. and Peng, G. (2023). Blow up and exponential growth for a pseudo-parabolic equation with $p(x)$ -Laplacian and variable exponents. *Applied Mathematics Letters*, 138, 108517. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2022.108517>.
- Diening, H., (2004). Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}(\Omega)$. *Math. Inequal. Appl.* 7(2), 245-253. <http://doi.org/10.7153/mia-07-27>.
- Diening, H., Harjulehto, P., Hasto, G. and Ruzicka, G. (2011). *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents: Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Heidelberg. <http://doi.org/10.1007/978-3-642-18363-8>.
- Dubinski, Y. A. (1965). Weak convergence for nonlinear elliptic and parabolic equations. *Matematicheskii Sbornik*, 109 (4), 609–642. doi: 10.1070/rm1968v023n01abeh001233.
- Evans, L. C. (1998). *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19 (2).
- Fan, Y. and Zhao, P. (2001). On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 263, 424-446. <http://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7617>.
- Gorka, P. (2009). Logarithmic Klein-Gordon equation, *Acta Physica Polonica B*, 40(1), 59–66.
- Guo, B., Wu, X. and Gao, W. (2016). Blow-up of solutions for a semilinear parabolic equation involving variable source and positive initial energy. *Applied Mathematics Letters*, 26(5), 539–543. <http://doi.org/10.1016/j.aml.2012.12.017>.
- Guo, B. and Gao, W. J. (2016). Finite-time blow-up and extinction rates of solutions to an initial Neumann problem involving the $p(x)$ – Laplace operator and a non-local term. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 36(2), 715–730. <http://dx.doi.org/10.3934/dcds.2016.36.715>.

- Han, Y. (2018). A class of fourth-order parabolic equation with arbitrary initial energy. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 43, 451–466. <http://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.03.009>
- Han, Y., Cao, C. and Sun, P. (2019). A p-Laplace equation with logarithmic nonlinearity at high initial energy level. *Acta Applicandae Mathematicae*, 164, 155-164. <https://doi.org/10.1007/s10440-018-00230-4>.
- Harjulehto, Y. and Hasto, P. (2003). An overview of variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces. *Future trends in geometric function theory*, 92. RNC Workshop, Jyväskylä.
- Irkıl, N. (2021). *Logaritmik Kaynak Terimli Dalga Denklemlerin Çözümlerinin Davranışı* (Doktora Tezi). Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır.
- Jiang, Y., Zheng, P. and Song, P. (2004). Blow up analysis for a nonlinear diffusion equation with nonlinear boundary conditions. *Appl. Math. Lett.*, 17, 193-199. [https://doi.org/10.1016/S0893-9659\(04\)90032-8](https://doi.org/10.1016/S0893-9659(04)90032-8).
- Kelley, W. G. and Peterson, A. C. (2010). *The theory of differential equations*. Springer-Verlag, 423, New York.
- Kesavan, Y. (1989). *Topics in functional analysis and applications*. Wiley-Blackwell.
- Khaldi, Y., Ouaoa, P. and Maouni, P. (2022). Global existence and stability of solution for a nonlinear Kirchhoff type reaction-diffusion equation with variable exponents. *Math. Bohem.*, 147, 471-484. <http://doi.org/10.21136/MB.2021.0122-20>.
- Khelghati, A. and Baghaei, K. (2015). Blow-up in a semilinear parabolic problem with variable source under positive initial energy. *Applicable Analysis*, 94(9), 1888–1896. <http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2014.956733>
- Kirchhoff, G. (1883). *Vorlesungen über Mechanik*, Teubner, Leipzig.
- Komornik, V. (1994). *Exact Controllability and Stabilization: The Multiplier Method*, Wiley.
- Levine, P. (1973). Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 51(5), 371–386. <https://doi.org/10.1007/BF00263041>.
- Lions, J. L. (1969). *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris.
- Liu, P. and Li, C. (2023). Note on a higher order pseudo-parabolic equation with variable exponents. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46(16), 16840–16856. <https://doi.org/10.1002/mma.9477>.
- Messaoudi, S. A. and Talahmeh, A. A. (2017). Blow up in solutions of a quasilinear wave equation with variable-exponent nonlinearities. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40(18), 6976-6986. <https://doi.org/10.1002/mma.4505>.

- Nachman, A. and Callegari, A. J. (1980). A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids, SIAM J. Appl. Math., 38(2), 275-281. <http://doi.org/10.1137/0138024>.
- Ortiz, M., Repetto E. and Si, A. H. (1999). A continuum model of kinetic roughening and coarsening in thin films, J. Mech. Phys. Solids. 47, 697-730. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(98\)00102-1](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(98)00102-1).
- Pan, Y., Gao, P. and Meng, P. (2023). Properties of Weak Solutions for a Pseudoparabolic Equation with Logarithmic Nonlinearity of Variable Exponents. Journal of Mathematics, 164, 155-164. <https://doi.org/10.1155/2023/7441168>.
- Pişkin, E. (2013). *Doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerin çözümlerinin azalması ve patlaması*. (Doktora Tezi). Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır.
- Pişkin, E. (2016). *Diferansiyel Denklemler*, Seçkin Yayıncılık, Ankara
- Pişkin, E. (2017). *Sobolev Uzayları*, Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- Pişkin, E. (2018). *Kısmi Türevli Denklemler*, Seçkin Yayıncılık.
- Pişkin, E. (2021). *Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Patlaması*. Pegem Akademi Yayıncılık, 204, Ankara.
- Pişkin, E. and Butakın, G. (2023a). Existence and Decay of solutions for a parabolic-type Kirchhoff equation with variable exponents. Journal of Mathematical Sciences and Modelling, 6 (1), 32-41. <https://doi.org/10.33187/jmsm.1238633>.
- Pişkin, E. and Butakın, G. (2023b). Blow-up phenomena for a $p(x)$ -biharmonic heat equation with variable exponent. Mathematica Moravica, 27(2), 25-32. <http://doi.org/10.5937/MatMor2302025P>.
- Qu, C., Zhou, W. and Liang, B. (2018). Asymptotic behavior for a fourth-order parabolic equation modeling thin film growth. Appl. Math. Lett., 78, 141-146. <http://doi.org/10.1016/j.aml.2017.11.015>.
- Růžička, M. (2000). *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*. Lecture Notes in Math., 1748, Springer, 2000.
- Samko, N. (1998). Convolution and potential type operators in the space. Integral Transforms and Special Functions 7(3-4), 261-284. <https://doi.org/10.1080/10652469808819204>.
- Sattinger, N. (1968). Stability of nonlinear hyperbolic equations. Arch. Rational Mech. Anal., 28, 226-244.
- Sobolev, S. L. (1938). On a theorem of functional analysis. Mat. Sb. 46: 471-497 (Russian), English Translation: Amer. Math. Soc. Translations 2(34), 39-68.
- Ünal, C. (2019). *Ağırlıklı Değişken Üslü Sobolev Uzayları Ve Bazı Uygulamaları* (Doktora Tezi). Sinop Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sinop.

- Wang, H. and He, Y. (2013). On blow-up of solutions for a semilinear parabolic equation involving variable source and positive initial energy. Appl. Math. Lett., 26, 1008-1012. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.05.001>.
- Winslow, W. M. (1949). Induced fibrillation of suspensions. J. Appl. Physics 20, 1137-1140. <https://doi.org/10.1063/1.1698285>.
- Woinowsky, E. and Krieger, G. (1950). The effect of an axial force on the vibration of hinged bars. ASME Journal of Applied Mechanics, 17, 35–36.
- Wu, X., Guo, B. and Gao, W. (2013). Blow-up of solutions for a semilinear parabolic equation involving variable source and positive initial energy. Applied Mathematics Letters, 26(5), 539–543. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.12.017>.
- Yılmaz, H. (2003). *Bazı Kopolimerlerin Elektroeolojik Özelliklerinin İncelenmesi Ve Endüstriyel Uygulanabilirliğinin Araştırılması* (Doktora Tezi). Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Zheng, N. (2004). *Nonlinear Evolution Equations*. Chapman Hall/CRC.
- Zhu, X., Guo, B. and Liao, M. (2020). Global existence and blow-up of weak solutions for a pseudo-parabolic equation with high initial energy. Applied Mathematics Letters, 104, 106270. <http://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106270>.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad	BUTAKIN, Gülistan
Web sayfası (Research Gate, Academia, vs.)	

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Dicle Üniversitesi	2020
Lisans	Dicle Üniversitesi	2017
Lise	Karataş Lisesi	2012

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2019-	Milli Eğitim Bakanlığı	Öğretmen

Yayınlar

1. Pişkin, E., Butakın, G. (2023). Blow-up phenomena for a $p(x)$ -biharmonic heat equation with variable exponent. *Mathematica Moravica*, 27(2), 25-32 (ESCI).
2. Pişkin, E., Butakın, G. (2023). Existence and Decay of solutions for a parabolic-type Kirchhoff equation with variable exponents. *Journal of Mathematical Sciences and Modelling*, 6 (1), 32-41.
3. Butakın, G., Pişkin, E. (2024). Existence and Blow up of Solutions for $m(x)$ -Biharmonic equation with Variable Exponent Sources. *Filomat*, 38(22), 7871--7893 (SCI).
4. Butakın, G., Pişkin, E. (2024). Existence and Blow up of Solutions of a Viscoelastic $m(x)$ -Biharmonic Equation with Logarithmic Source Term. *Miskolc Mathematical Notes*, 25(2), 629--643 (SCI).
5. Butakın, G., Pişkin, E. (2024). Blow up of solutions for a fourth-order reaction-diffusion equation in variable-exponent Sobolev spaces. *Filomat*, 38(23), 8225--8242 (SCI).
6. Butakın, G., Pişkin, E., & Çelik, E. (2024). Blowup and Global Solutions of a Fourth-Order Parabolic Equation With Variable Exponent Logarithmic Nonlinearity. *Journal of Function Spaces*, 2024(1), 2847533 (SCI).
7. Butakın, G., Pişkin, E. (2025). The Parabolic Equation with $q(x)$ - Triharmonic Equation: Blow up and Growth. *Bol. Soc. Paran. Mat.*, (baskıda) (ESCI).
8. Butakın, G., Pişkin, E. (2025). Qualitative analysis of solutions for a parabolic $m(x)$ -biharmonic equation with logarithmic nonlinearity. *Filomat*, 39 (5), 1657--1671 (SCI).
9. Butakın, G., Pişkin, E. (2025). Existence and blow up of solutions for a m -biharmonic viscoelastic equation with variable exponents. *Filomat*, 39 (7), 2331--2346 (SCI).

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Gülistan BUTAKIN		
Öğrenci No	20804504		
Ana Bilim Dalı	Matematik		
Program Türü	Proje ☐	Yüksek Lisans ☐	Doktora ☒
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Prof. Dr. Erhan PİŞKİN		
(Varsa) II. Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)			
Tez Başlığı	Değişken Üslü Sobolev Uzaylarında Parabolik Tipten Denklemlerin Çözümlerinin Analizi		
RAPOR BİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	111		
Raporlama Tarihi	07/04/2025		
Benzerlik Oranı (%)	%15		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 111 sayfalık kısmına ilişkin, 07/04/2025 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 15 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☒Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç
☒Kaynaklar hariç
☐Alıntılar hariç/dâhil
☐Diğer (Açıklayınız)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Benzerlik oranım üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrenci: Gülistan BUTAKIN

Tarih: 11/04/2025

İmza:

Danışman: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN Tarih: 11/04/2025	İmza:
Ana Bilim Dalı Başkanı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY Tarih: 11/04/2025	İmza: