

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN ÜSLÜ SOBOLEV UZAYLARINDA REGÜLER
FONKSİYONLARIN YOĞUNLUĞU

Yasin KAYA

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

ŞUBAT-2015

T.C
DİCLE UNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
DİYARBAKIR

Yasin KAYA tarafından yapılan “Değişken Üslü Sobolev Uzaylarında Regüler Fonksiyonların Yoğunluğu” konulu bu çalışma , jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

Ünvanı Adı Soyadı

Başkan: Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ

Üye : Prof. Dr. Şemsettin OSMANOĞLU

Üye : Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY

Üye : Yrd. Doç. Dr. F. Müge SAKAR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Zehra YÜCEDAĞ

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 27/02/2015

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../2015

Doç.Dr. Mehmet YILDIRIM

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Tecrübe ve rehberliği ile tez aşamasında bana zaman ayıran danışmanım sayın Prof. Dr. Sezai OĞRAŞ'a çok teşekkür ederim.

Değişken üslü Sobolev uzaylarında regüler fonksiyonların yoğunluğu konusunu seçmemde bana destek olan, çok yüksek bir anlayış gösteren ilk danışmanım sayın Prof. Dr. Rabil AYAZOĞLU'na (Prof. Dr. Rabil MASHIYEV) içten çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	V
KISALTMA VE SİMGELER.....	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	5
3. MATERYAL VE METOT.....	11
3.1. Ön Bilgiler.....	11
3.1.1. Ölçümler ve Örtme Teoremleri.....	17
3.2. Sobolev Uzayları.....	30
3.2.1. Sürekli Fonksiyon Uzayları.....	30
3.2.2. Lebesgue Uzayları.....	35
3.2.3. Sobolev Uzayları.....	45
3.3. Değişken Üslü Lebesgue Uzayları.....	60
3.3.1. Musielak-Orlicz Uzaylar ve Modular Uzaylar.....	67
3.3.2. Banach Fonksiyon Uzayları.....	69
3.3.3. Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü.....	70
3.4. Değişken Üslü Sobolev Uzayları.....	73
3.4.1. Poincare Eşitsizliği.....	76
3.4.2. Değişken Üslü Sobolev Uzaylarında Regüler Fonksiyonların Yoğunluğu.....	76
3.4.2.1. Yoğunlukta Temel Sonuçlar.....	76
3.4.2.2. Sürekli Üslerle Yoğunluk.....	81
3.4.2.3. Süreksiz Üslerle Yoğunluk.....	86

3.4.2.4. Sürekli Fonksiyonların Yoğunluğu.....	91
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	97
5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR.....	109
6. KAYNAKLAR.....	111
ÖZGEÇMİŞ.....	119

ÖZET

DEĞİŞKEN ÜSLÜ SOBOLEV UZAYLARINDA REGÜLER FONKSİYONLARIN YOĞUNLUĞU

DOKTORA TEZİ

Yasin KAYA

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2015

Bu çalışmanın birinci bölümünde, değişken üslü Sobolev uzaylarında düzgün fonksiyonların yoğunluğunun önemi belirtildi. Yoğun olmayı engelleyen olumsuzluklar açıklandı.

İkinci bölümde değişken üslü Lebesgue ve değişken üslü Sobolev uzaylarının tarihsel gelişimi, uygulamaları ve bu uzaylarda yapılan çalışmaların özeti ifade edildi.

Üçüncü bölümde temel fonksiyonel analiz, reel analiz ve yoğunlukla ilgili kavramlar verildi. Değişken üslü Sobolev uzaylarının klasik uzayları olan Sobolev uzayları açıklandı. Değişken üslü Lebesgue ve değişken üslü Sobolev uzaylarının tanım ve özellikleri verildi. Değişken üslü Sobolev uzayında yoğunluğa ilgili araştırmacıların yaptığı çalışmalar ispatlarıyla birlikte verildi. Konvolüsyon ve mollifier metodu açıklandı.

Çalışmanın son bölümü olan dördüncü bölümde konvolüsyon ve diğer teknikler kullanılarak $C^1(\mathbb{R}^n)$ uzayının $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olma koşulu altında $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayının da $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olduğu gösterildi. Bunun yanında, noktasal yakınsaklıktan zayıf yakınsaklığın elde edilebileceğini gösteren bir teorem ispatlanmış ve konuyla ilgili açık bir problem ortaya atılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sobolev Uzayları, Değişken Üslü Lebesgue Uzayları, Değişken Üslü Sobolev Uzayları, Regüler Fonksiyonların Yoğunluğu, Hardy--Littlewood Maksimal Operatörü, Konvolüsyon Operatörü.

ABSTRACT

DENSITY OF REGULAR FUNCTIONS IN VARIABLE EXPONENT SOBOLEV SPACES

PhD THESIS

Yasin KAYA

UNIVERSITY OF DICLE

INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2015

In the first chapter of this work, significance of density of smooth functions in variable exponent Sobolev spaces was indicated. Obstacles that cause non-density were explained

In the second chapter the historical development, applications and a summary of studies that were done by researcher on variable exponent Lebesgue and variable exponent Sobolev spaces are stated.

In the third chapter basic functional analysis, real analysis and concepts related to denseness are given. Sobolev spaces which are classical case of variable exponent Sobolev spaces are mentioned. Definitions and properties of variable exponent Lebesgue and variable exponent Sobolev spaces are given. Researcher works of density in variable exponent Sobolev spaces are given with their proofs. Convolution and mollifier method were explained

In the fourth chapter which is the last chapter of this work by using convolution and other technique with condition $C^1(\mathbb{R}^n)$ to be dense in $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ we have shown density of $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Besides, a theorem which show pointwise convergence implies weak convergence was proved and an open problem was put.

Keywords: Sobolev Spaces, Variable Exponent Lebesgue Spaces, Variable Exponent Sobolev Spaces, Density of Regular Functions, Hardy--Littlewood Maximal Operator, Convolution Operator.

KISALTMA VE SİMGELER

$C(\Omega)$	:Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$C^\infty(\Omega)$	:Düzgün Fonksiyonlar Uzayı
$L^p(\Omega)$	:Lebesgue Uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	:Sobolev Uzayı
$L^{p(x)}(\Omega)$	:Değişken Üslü Lebesgue Uzayı
$W^{m,p(x)}(\Omega)$	:Değişken Üslü Sobolev Uzayı
$f * g(x)$	: f ve g fonksiyonların konvolüsyonu
LH_0	:Lokal Log-Hölder Sürekli Fonksiyonlar
$Mf(x)$	:Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü
$\rho_{p(\cdot)}(f)$	:Modular Fonksiyoneli

$$\|f\|_{L^{p(x)}} = \inf\{\lambda > 0: \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx \leq 1\}$$

1. GİRİŞ

Fonksiyon uzayları modern analizde merkezi bir konudur. Yeni fonksiyon uzaylarının harmonik analiz, kısmi diferansiyel denklemler gibi alanlarda kullanımı gittikçe artmaktadır (Dafni ve Xiao 2004). Bunun yanında analizdeki en önemli amaçlardan biri karmaşık olan fonksiyonlara daha basit veya iyi özelliklere sahip olan fonksiyonlarla yaklaşmaktır (Sohrab 2003). Bu çalışma sözü edilen bu iki durumu içermektedir.

Bu çalışmada bir fonksiyon uzayının önemli bir özelliği ortaya konuldu. Daha açık bir ifadeyle bu tezde son zamanlarda üzerinde yoğun bir ilgiyle çalışılan değişken üslü Sobolev uzaylarında regüler fonksiyonların yoğunluğu konusu ele alındı. Değişken üslü Sobolev uzaylarının tanımını değişken üslü Lebesgue uzaylarının tanım ve özelliklerine dayandığı için bu uzaylara da oldukça yer verilmiştir. Çok sayıdaki araştırmacın yoğunluk konusundaki çalışmalarına rağmen bu konuda hala önemli ölçüde boşluklar bulunmaktadır. Başlangıçta (1986) düzgün fonksiyonların yoğunluğu varyasyonel integrallerin minimizerleri bağlamında incelenen bir sorundu. Eğer böyle bir minimizerin düzgün olmadığı ortaya çıkarsa bu durumda Lavrentiev fenomeninin oluştuğunu söyleriz. Bu durum Zhikov'un çalışmalarının özünü teşkil ediyordu. (Zhikov 1987, 1995, 1997). Karşılık gelen uzayda Lavrentiev fenomeninin düzgün fonksiyonların yoğunluğu ile bağlantılı olduğu ortaya çıktı (Zhikov 1995). Ayrıca değişken üslü Sobolev uzaylarında düzgün fonksiyonların yoğunluğu ele alınan ilk konulardandı (Edmunds ve Rakosnik 1992).

Değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarıyla yoğun bir şekilde ilgilenilmenin başlıca amacı, bunların uygulanma alanlarında çokça kullanılmasındandır.

Çok sayıda materyal, klasik Lebesgue ve Sobolev uzayları kullanarak yeteri kadar hasasiyetle modellenabilir. Elektroeolojik akışkanlar gibi, homojen olmayan bazı materyaller için bu durum pek yeterli değildir. Bunun için $p(\cdot)$ üssüsü değişkenlik gösterebilmelidir. Bu da değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının çalışmasına yol açmıştır (Mihailescu ve Radulescu 2006).

Lebesgue ve Sobolev uzaylarında düzgün fonksiyonların yoğunluğu ispatları

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

1. GİRİŞ

şeklindeki konvolüsyona,

$$1 \leq p \leq \infty \quad \text{olmak üzere}$$

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}$$

şeklindeki Young eşitsizliğine, ölçülebilir bir f fonksiyonu ve $h \in \mathbb{R}^n$ için

$$\tau_h f(x) = f(x - h)$$

olarak tanımlanan τ_h öteleme operatörünün sınırlılığına ve ayrıca Lebesgue uzayının orta sürekliliğini ifade eden

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p} = 0$$

yakınsamasına dayanmaktadır. Ancak bu önemli özellikler değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarında geçerli olamamaktadır. Örneğin, öteleme operatörünün sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $p(x)$ üs değişkeninin sabit olması gerekir.

Bunların geçersizliği yoğunluk için ciddi sorun oluşturmaktadır. Ancak $p(x)$ üs değişkeninin bazı koşulları sağladığında ve konvolüsyon

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \phi_\epsilon(y) dy$$

olarak alındığında, yani değişken üslü Lebesgue veya Sobolev uzaylarının fonksiyonlarını uygun bir mollifier ile evriştirildiğinde

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|\phi_\epsilon\|_{L^1}$$

eşitsizliğine benzer durumlar elde etmek mümkündür. Böylece yoğunluk mümkün olabilmektedir.

Yine $p(x)$ üs değişkeninin bir çeşit monotonluk koşulunu sağlaması ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \int f(y) \phi_{\epsilon_n h_n}(x - y + \epsilon_n \xi_n) dy$$

şeklindeki farklı konvolüsyon ve mollifierinin kullanılmasının da yoğunluğu göstermede yararlı olduğu görülmüştür (Edmunds ve Rakosnik 1992).

Tüm bu olumsuzluklara rağmen sınırlı değişken üsler için $C^\infty(\Omega)$ uzayının değişken üslü Lebesgue uzayında yoğunluğu gösterilebilinmiştir (Kovacık ve Rakosnik 1991). Ancak ispata doğrudan konvolüsyon kullanılamamıştır. Bu ispat için başka teknik kullanılmıştır. Ancak bu teknik değişken üslü Sobolev uzaylarında işe hiç yaramamaktadır.

Yine değişken üslü Sobolev uzaylarında regülerliği daha az olan fonksiyonların yoğunlu varsayımı altında C^∞ fonksiyonlarının yoğun olup olmayacağı araştırılan konular arasındadır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Genel olarak, Kovacic ve Rakosnik (1991) tarafından yapılan değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayları çalışması, modern ve ilk dönem çalışmaları arasındaki çizgi olarak kabul edilir (Cruz-Uribe ve Fiorenza 2013).

Değişken üslü Lebesgue uzayı ilk olarak 1931 de Orlicz tarafından ele alındı. $1 < p(x) < \infty$ koşulu altında $p(\cdot)$ üs fonksiyonları için, eğer

$$\int_0^1 |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$$

ise, bu durumda

$$\int_0^1 f(x) g(x) dx < \infty$$

integralinin yakınsak olması için g fonksiyonu üzerinde konulacak gerek ve yeter koşul, bazı $\lambda > 0$ için,

$$\int_0^1 \left(\left| \frac{g(x)}{\lambda} \right| \right)^{p'(x)} dx < \infty$$

olması gerektiği Orlicz tarafından gösterildi (Cruz-Uribe ve Fiorenza. 2013).

Orlicz' in değişken üslü Lebesgue uzayına esas katkısı sadece bu makale oldu. Orlicz dikkatini daha çok Orlicz uzayları olarak bilinen çalışmalara yöneltti. Bir sonraki değişken üslü Lebesgue uzayları gelişmesi Japon matematikçi Nakano'nun çalışmalarından oldu. Nakano, Nakano uzayları olarak da bilinen, Modular uzayları ele alıp geliştirmiştir. Bir modular uzay, bir "modular" (bir normun bir geneleştirilmesi) ile donatılmış bir topolojik vektör uzayıdır. Bir modular uzayın önemli bir örneği, bazı $\lambda > 0$ için,

$$\int_{\Omega} \Phi(x, |f(x)|/\lambda) dx < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm f fonksiyonlarından oluşan fonksiyon uzayıdır.

Yukarıdaki integralde geçen $\Phi : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu hemen hemen her $x \in \Omega$ için, $\Phi(x, \cdot)$ bir Young fonksiyonu gibi davranmaktadır. Bu uzaylara Musielak-Orlicz uzayları veya geneleştirilmiş Orlicz uzayları denir. Bu uzay bir takım fonksiyon uzaylarını özel durumlar olarak içerirler. Örneğin $\Phi(x, t) = t$ için

Orlicz uzayları, $\Phi(x, t) = t^{p(x)}$ için değişken üslü Lebesgue uzayları ve $\Phi(x, t) = t^p w(x)$ için de ağırlıklı Lebesgue uzaylarına dönüştürler. Nakano (1950, 1951) değişken üslü Lebesgue uzaylarını, modular uzayların bir özel örnekleri olarak verdi. Bu uzayların özellikleri daha da geliştirildi. 1970 lerin sonlarında Hudzik, Musielak-Orlicz uzayları üzerinde genelleştirilmiş Sobolev uzaylarını ele aldı. Hudzik'in çalışmaları son zamanlarda değişken üslü Lebesgue uzayları üzerinde yapılan çok sayıda sonuçların önceden belirtisidir.

Değişken üslü Lebesgue uzayları Sovyet literatüründe bağımsız olarak yeniden ortaya çıktı. Sovyet bilim adamları bu uzayların kendi başına önemli olduklarının farkına vararak bu uzaylara ait çalışmalara ağırlık verdiler. Bu uzaylar Tsenov (1961) tarafından tanıtıldı. Tsenov, f sürekli ve ϕ sabit dereceli bir polinom olmak üzere,

$$\int_0^1 |f(x) - \phi(x)|^{p(x)} dx$$

integralini minimize etme problemini inceledi. Sharapudinov (1979) reel doğru üzerindeki aralıklarda değişken üslü Lebesgue uzaylarının fonksiyon uzayı teorisini geliştirdi. Luxemburg normunu tanımladı. $p(\cdot)$ sınırlı olduğunda $L^{p(\cdot)}([0, 1])$ nin ayrılabilir ve dual uzayının $L^{p'(\cdot)}([0, 1])$ olduğunu gösterdi. Daha sonraki makalelerde, değişken üslü Lebesgue uzaylarının analizi üzerindeki değişik problemleri inceledi. (Sharapudinov 1983,1996) de $p(\cdot)$ üs fonksiyonunun regülerliği problemini düşünen ilk kişi oldu. Değişken üslü Lebesgue uzayları teorisinde kritik önemde olduğu görülen

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\ln(|x - y|)}, \quad |x - y| < \frac{1}{2} \quad (2.1)$$

lokal log-Hölder süreklilik koşulunu buldu. Bu uzaylar ayrıca başka Sovyet matematikçilerin de, (Kozlov. 1983) gibi, çalışmalarında görüldü. En etkili çalışma Zhikov (1982, 1983, 1986, 1991, 1994, 1995, 1997) tarafından yapılmıştır. 1986 da başlayarak, değişken üslü Lebesgue uzaylarını varyasyonel kalkülüs problemlerine uyguladı. Zhikov f Langrangian'ının; c_i pozitif reel sabitler ve $0 < p < q$ olmak üzere,

$$-c_0 + c_1 |\xi|^p \leq f(x, \xi) \leq c_0 + c_2 |\xi|^q$$

standart olmayan büyüme koşulunu sağladığında

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, \nabla u) dx$$

fonksiyonların minimize edilimi ile ilgilendi. Böyle bir Langrangian'ın özel bir örneği, $p \leq p(x) \leq q$ olmak üzere, $f(x, \xi) = |\xi|^{p(x)}$ şeklindedir. Bu fonksiyonlara karşılık gelen Euler-Lagrange denklemi

$$\Delta_{p(\cdot)} u = -\operatorname{div} \left(p(\cdot) |\nabla u|^{p(\cdot)-2} \nabla u \right) = 0$$

şeklindeki $p(\cdot)$ Laplasiyenidir.

Bir başka problem de değişken üslü Lebesgue uzaylarının çalışılmasını sağlayan güç olmuştur. 1990 ların başlarında Samko ve Ross (1993, 1995),

$$D_a^{\alpha(\cdot)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(x))} \frac{d}{dx} \int_a^x (x - t)^{-\alpha(x)} f(t) dt$$

şeklinde değişken dereceli bir Riemann-Liouville kesirli türevini ve buna karşılık gelen

$$I_a^{\alpha(\cdot)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha(x))} \int_a^x (x - t)^{\alpha(x)-1} f(t) dt$$

değişken Riesz potansiyeli verdi. Bu operatörlerin davranışlarının incelenmesi, doğal olarak, değişken üslü Lebesgue uzaylarında konvolüsyon ve potansiyel operatörlerin öne çıkmasına sebep olmuştur.

Son zamanlarda, değişik uygulamalardan dolayı değişken üslü Lebesgue uzaylarına olan ilgi artmaktadır. Bunlar arasında en önde geleni, elektrorheological akışkanların (Newtonian olmayan akışkanların esas bir sınıfı) matematiksel modellenmesidir. Bu akışkanlar bir elektrik alana maruz bırakıldığında (genellikle önemli ölçüde) kıvamlılığı değişen akışkanlardır. Bunlar sadece hızlı hareket eden hidrolik supaplar ve debriyajlar, frenler, darbe emiciler değil; tam aşındırıcı parlatmada, robotlularda ve uzay teknolojisi gibi bazı yeni alanlarda da kullanılmaktadır. Kapsamlı çalışılmış bir modelde, Du hız alanı gradiyeninin simetrik parçası ve üs elektrik alanının bir fonksiyonu olmak üzere, enerji

$$\int_{\Omega} |Du(x)|^{p(x)} dx$$

integrali ile verilmektedir. Ruzicka (2000, 2004) bu modeli verdi. Bunu Acerbi ve Mingione (2002, 2002, 2005) daha da ileri geliştirdiler. Bu problem değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayları teorisinin gelişiminde kayda değer önemde bir güdü olmuştur. Değişken üslü Lebesgue uzayları gözenekli ortamdan akış, görüntü işleme, thermorheological akışkanlar gibi başka fiziki problemlerin davranışlarının modellenmesinde de kullanılmıştır (Amaziane ve ark. 2009), (Antontsev ve Shmarev 2005), (Çekiç ve ark. 2012).

Değişken üslü Lebesgue uzayları, görüntü işleme çalışmalarına da uygulandı. Blomgren ve ark. (1997) görüntünün yeniden oluşturulmasında değişken üs kullanılarak yapılan interpolasyon tekniğinin uygun norm altında

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p(\nabla u)} dx$$

daha düzgün bir görüntü vereceğini gördüler. (Burada ∇u artarken, $p(\cdot)$ üsü ikiden bire monoton olarak azalmaktadır.). Bu yaklaşım ve ilgili fikirler, çok sayıda araştırmacı tarafından araştırılmaya devam edilmektedir (Aboulaich ve ark. 2007), (Aboulaich ve ark. 2008), (Bolt ve ark. 2009), (Chen ve ark. 2008), (Harjulehto ve ark. 2013), (Levine 2006).

Harmonik analizin teknik ve sonuçlarını, değişken üslü Lebesgue uzaylarına uygulamak için merkezi bir problem; Hardy-Littlewood maksimal operatörünün $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlılığını sağlayacak koşulun $p(\cdot)$ üstünde belirlenmesiydi. İlk ana sonucu Deining yaptı (Diening 2004). $p(\cdot)$ nin (2.1) lokal log-Hölder şartını sağlamasının ve bir büyük yuvarın dışında sabit olmasının yeterli olduğunu gösterdi. Bu sonuç daha sonra genelleştirildi. (2.1) koşulunun sağlanması ve $p(\cdot)$ nin sonsuzda log-Hölder sürekli olmasının yeterli olduğu gösterildi. Bu durumda

$$|p(x) - p_{\infty}| \leq \frac{C_{\infty}}{\ln(|e + |x||)}$$

olacak biçimde p_{∞} vardır.

Bağımsız olarak, Nekvinda (2004) $p(\cdot)$ nin daha zayıf integral azalma şartının yeterli olduğunu gösterdi. Log-Hölder koşulları noktasal koşullar için olabileceklerin en iyisidir. Fakat gerekli değildirler (Kopaliani 2008), (Nekvinda 2008), (Lerner

2010). Deining (2005) Hardy-Littlewood maksimal operatörü için denetlenmesi zor fakat önemli teoriksel sonuçlara sahip bir gerek ve yeter koşul verdi.

3. MATERYAL VE METOT

İlk bölümdeki ön bilgiler genel olarak (Folland 1999), (Hunter 2001), (DiBenedetto 2002), (Jost 2005), (Morrison 2011), (Brezis 2011), (Diening ve ark. 2011), (Duren 2012), (Pick ve ark. 2012), çalışmalarından yararlanarak hazırlanmıştır.

3.1. Ön Bilgiler

Tanım 3.1.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesi açık, $x \in \Omega$, ve $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ olsun. Eğer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - T(h)\|_m}{\|h\|_n} = 0$$

olacak şekilde bir $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir lineer dönüşümü var ise, bu durumda f ye x te differansiyellenebilirdir denir ve bu durumda $f'(x) = T$ olur.

Yukarıdaki ifade denk olarak

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun x te differansiyellenebilir ve $f'(x) = T$ olması için gerek ve yeter şart, $\epsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ve $h \rightarrow 0$ iken $\frac{\|\epsilon(h)\|_m}{\|h\|_n} \rightarrow 0$ olmak üzere

$$f(x+h) - f(x) = T(h) + \epsilon(h)$$

olmasıdır.

Çok değişkenli fonksiyonlar için ortalama değer teoremi şöyledir:

Teorem 3.1.2. $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu açık ve konveks Ω kümesi üzerinde differansiyellenebilir olsun. $a, b \in \Omega$ ve a ile b yi birleştiren doğru parçası $\gamma(t) = a + t(b-a)$ olsun. Bu durumda

$$f(b) - f(a) = \langle \nabla f(c), b-a \rangle$$

olacak biçimde $\gamma(t)$ üzerinde c vardır.

Şimdi de çarpım serileriyle ilgili iki önemli teoremi verelim.

Teorem 3.1.3. (Dirichlet Testi) $\{a_k\}$ ve $\{b_k\}$ dizileri

- i) $a_k \geq a_{k+1} > 0$
- ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$
- iii) her pozitif N tamsayısı için $\left| \sum_{k=1}^N b_k \right| \leq M$ (M sabit)

koşullarını sağlasınlar. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

serisi yakınsak olur.

Teorem 3.1.4. (Abel Testi) $\sum b_k$ yakınsak ve $\{a_k\}$ bir sınırlı, monoton dizi ise bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

serisi yakınsak olur.

Noktasal yakınsaklıktan monoton koşulu altında düzgün yakınsaklığın çıkabileceğini ifade eden Dini teoremi aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.1.5. X kompakt bir metrik uzay ve $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ şeklindeki, $\{f_n\}$ sürekli monoton fonksiyon dizisi sürekli f fonksiyonuna noktasal yakınsasın. Bu durumda f_n dizisi f ye düzgün yakınsak olur.

Bir fonksiyon serisinin düzgün yakınsayabileceğini gösteren Weierstrass M-testinin ifadesi aşağıdaki teoremdir.

Teorem 3.1.6. Bir A kümesi üzerinde tanımlı reel veya kompleks değerli bir $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi,

$$\forall n \geq 1, \forall x \in A \text{ için } |f_n(x)| \leq M_n \text{ ve}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

olsun.

Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi A kümesi üzerinde düzgün olarak yakınsar.

Tanım 3.1.7. X bir vektör uzayı olsun. $x \in X$ için değeri $\|x\|$ olarak gösterilen, negatif değerler almayan bir fonksiyon

$$\text{i) } \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$\text{ii) } \text{her } x \in X \text{ ve tüm } \lambda \text{ skalerleri için } \|\lambda x\| = \lambda \|x\|$$

$$\text{iii) } \text{her } x, y \in X \text{ için } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

özelliklerini sağlıyorsa, bu durumda bu fonksiyona X üzerinde bir normdur denir.

$x, y \in X$ için $d(x, y) = \|x - y\|$ olarak tanımlandığında her normlu uzay bir metrik uzay olur.

Tanım 3.1.8. X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı, $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ her biri X üzerinde birer norm olsunlar.

Eğer her $x \in X$ için

$$a \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b \|x\|_1$$

olacak şekilde pozitif a, b sayıları varsa, bu durumda $\|\cdot\|_1$ normu $\|\cdot\|_2$ normuna denktir denir.

Bir sonlu boyutlu uzayda, tüm normlar birbirine denk olurlar.

İki norm denk ise bu durumda $\{x_k\}$ dizisi $\|\cdot\|_1$ normunda bir Cauchy dizisi ise $\|\cdot\|_2$ normuna göre de Cauchy dizisi olur ve bunun terside doğrudur. Denk normlarla ilgili başka bir gerçek, bir norma göre tanımlanmış açık kümeler sınıfı, diğer normla tanımlanmışın aynı sınıfı olur.

Tanım 3.1.9. Bir $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach uzayı, $\mathbb{R}$ reel sayıları cismi veya $\mathbb{C}$ kompleks sayıları cismi üzerinde $\|\cdot\|_X$ normuna göre tam olan bir normlu vektör uzayıdır.

$(X_j, \|\cdot\|_{X_j})$ Banach uzaylarının $X : \prod_{j=1}^N X_j$ kartezyen çarpımı $(x_1, \dots, x_N)$ noktalarından oluşur ve $\|x\|_X = \|x\|_{X,r} := \left(\sum_{j=1}^N \|x_j\|_{X_j}^r \right)^{\frac{1}{r}}, 1 \leq r < \infty$, denk normlarından herhangi biriyle normlanır ve $r = \infty$ için bilinen uygun dönüşüm yapılıır.

Bazı durumlarda bir vektör uzayını bir norm yerine, bir quasinorm ile tanımlamak yarar sağlar. Bir quasinorm normun üçgen eşitsizliği hariç diğer tüm özelliklerini sağlar. Üçgen eşitsizliği yerine, bir $c \geq 0$ için, $\|x + y\| \leq c(\|x\| + \|y\|)$ özelliği sağlanır.

Tanım 3.1.10. X ve Y normlu vektör uzayları olsunlar. Her $a \in X$ için $\|F(a)\|_Y \leq c \|a\|_X$ olacak şekilde bir pozitif c reel sayısı varsa; bu durumda $F : X \rightarrow Y$ dönüşümüne sınırlıdır denir, üstelik F ve F^{-1} bire bir, örten, lineer ve sürekli iseler, bu durumda F dönüşümü bir izomorfizim olur.

Bir lineer dönüşüm sınırlı olması için gerek ve yeter koşul sürekli olmasıdır.

Teorem 3.1.11. (Düzgün sınırlılık prensibi) X bir Banach uzayı ve Y bir normlu vektör uzayı olsun. $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$, X ten Y ye sürekli lineer dönüşümlerin bir kümesi olmak üzere, eğer her $x \in X$ için

$$\sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha x\|_Y < \infty$$

ise bu durumda

$$\sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha\|_{X \rightarrow Y} < \infty$$

olur.

Teorem 3.1.12. (Açık dönüşüm teoremi) X, Y Banach uzayları ve $F : X \rightarrow Y$ örten, bir sürekli lineer dönüşüm olsun. Bu durumda F açık dönüşüm olur (yani U , X te açık bir küme iken $F(U)$ Y de açık olur).

X ve Y normlu uzayları Z Hausdorff uzayının alt kümeleri olsunlar. Bu durumda $X \cap Y$ kesişimi $\|z\|_{X \cap Y} = \max \{\|z\|_X, \|z\|_Y\}$ normu ile ve

$X + Y := \{x + y : x \in X, y \in Y\}$ toplamı da

$$\|z\|_{X+Y} = \inf \{\|x\|_X + \|y\|_Y : x \in X, y \in Y, z = x + y\}$$

normu ile normlu uzaylar olurlar. X ve Y Banach uzayları ise $X \cap Y$ ve $X + Y$ de birer Banach uzayları olurlar.

Tanım 3.1.13. Bir X normlu uzayının tüm sınırlı $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) fonksiyonellerine, X nin dual uzayı denir ve X' ile gösterilir. X ile X' arasındaki dualite eşleşmesi, $F \in X'$ ve $x \in X$ için, $\langle F, X \rangle_{X', X} = \langle F, x \rangle := F(x)$ olarak tanımlanır. Bu dual uzay $\|F\|_{X'} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \langle F, x \rangle$ dual normuyla normlanır. Bu da X' uzayını Banach uzayı yapar.

Şimdi de Hanh-Banach teoreminin versiyonlarını ve sonuçlarını ifade edelim:

Teorem 3.1.14. X bir Banach uzayı ve $Y \subset X$ kapalı, lineer bir alt uzay olsun. Bu halde her sınırlı, lineer $F \in Y'$ fonksiyoneli sınırlı, lineer ve

$$\|\tilde{F}\|_{X'} = \|F\|_{Y'}$$

olacak şekilde bir $\tilde{F} \in X'$ fonksiyoneline genişletilebilir.

Burada genişletme ile, her $y \in Y$ için, $\langle F, y \rangle_{Y', Y} = \langle \tilde{F}, y \rangle_{X', X}$ özelliği kastedilmektedir.

Teorem 3.1.15. X bir Banach uzayı ve $E, K; X$ in konveks, ayrık ve boştan farklı alt kümeleri olsun. Eğer E kapalı ve K kompakt ise bu durum da E ve K yı tam birbirinden ayıran bir kapalı hiperdüzlem vardır. Yani, her $x \in E, y \in K$ için, $\operatorname{Re} F(x) + \varepsilon \leq \alpha \leq \operatorname{Re} F(y) - \varepsilon$ olacak şekilde $F \in X', \alpha \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ vardır.

Sonuç 3.1.16. X bir Banach uzayı olsun. Bu durumda her $x \in X$ için

$$\|x\|_X = \sup_{\|F\|_{X'} \leq 1} |\langle F, x \rangle|$$

olur.

Tanım 3.1.17. X bir metrik uzay olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için $d(x, s) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $s \in S$ varsa bu halde $S \subset X$ kümesi, X te yoğunur denir.

Bu yoğunluk durumunu elemanların yaklaşımı terimleriyle şöyle ifade edilebilir:

Teorem 3.1.18. X bir metrik uzay olsun. $S \subset X$ kümesi, X te yoğun olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$ olacak şekilde S nin elemanlarından oluşan bir $\{s_n\}$ dizisinin var olmasıdır.

Bir metrik uzay sayılabilir yoğun bir altkümeye sahipse bu uzaya ayrılabilir denir.

(X, d) bir metrik uzay olsun. Her $x, y \in M$; $x \neq y$ için

$$d(x, y) > \delta$$

olacak biçimde bir sayılamayan $M \subset X$ kümesi ve bir $\delta > 0$ var ise bu durumda X uzayı ayrılabilir değildir.

Teorem 3.1.19. X bir metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denk olurlar.

- i) X te yoğun olan sayılabilir bir küme vardır. (X ayrılabilir bir uzaydır)
- ii) X in açık kümeleri için sayılabilir bir baz vardır. (sayılabilirliğin ikinci aksiyomu)
- iii) X in her açık örtüsü bir sayılabilir alt örtüye sahiptir. (Lindelöf özelliği)

Her metrik uzay tam olmadığı için aşağıdaki durum söz konusudur.

Tanım 3.1.20. X bir metrik uzay olsun. Eğer

i) $X, \tilde{X}$ in bir alt uzayı olan X_0 izometrik

ve

ii) $X_0, \tilde{X}$ te yoğun, yani $\overline{X_0} = \tilde{X}$

oluyorsa, o zaman $\tilde{X}$ tam metrik uzayına X in bir tamlanması adı verilir.

Teorem 3.1.21. Her X metrik uzayının bir tamlanması vardır ve X in herhangi iki tamlanması izometriktir. Yani izometri farkıyla bir uzayın tamlanması bir tektir.

Tanım 3.1.22. X bir Banach uzayı olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$$

olacak biçimde bir tek $\{c_k\}$ skaler dizisi var ise X teki bu $\{x_k\}$ dizisine Schauder bazı denir. Analizde kullanılan tüm klasik ayrılabilir Banach uzayları Schauder bazına sahiptirler. Bu gerçek Banach'ın her ayrılabilir uzayın Schauder bazına sahip olduğu zamanı yol açtı. Fakat P. Enflo 1973 te bazı ayrılabilir Banach uzaylarının hiç bir Schauder bazına sahip olmadığını gösterdi.

Bir uzayın ikinci dual uzay $X'' := (X')'$ olarak gösterilir. $\langle \iota x, F \rangle_{X'', X'} := \langle F, x \rangle_{X', X}$ olarak verilen doğal enjeksiyon

$$i : X'' \longrightarrow X$$

örten ise, o zaman X normlu uzayı yansımalıdır denir.

Tanım 3.1.23. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için, $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| > \varepsilon \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta(\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ varsa bu halde $\|\cdot\|$ normuna; normlu X uzayı üzerinde düzgünce konvektir denir.

X in orjinal normuna denk olan düzgünce konveks bir $\|\cdot\|'$ normu varsa bu durumda bir X Banach uzayına düzgünce konvektir denir.

Bu özellikler kapalı lineer alt uzaylara ve kartezyen çarpımlarına aşağıdaki biçimde aktarılabilir.

Teorem 3.1.24. X bir Banach uzayı ve Y de X in bir kapalı altkümesi ya da X^N nin bir kartezyen çarpımını gösterebilir. Bu durumda:

- i) Y bir Banach uzayıdır.
- ii) X yansımali ise, bu durumda Y yansımali.
- iii) X ayrılabilir ise, bu durumda Y ayrılabilir.
- iv) X düzgünce konveks ise, bu durumda X yansımali.
- v) X düzgünce konveks ise, bu durumda Y düzgünce konvektir.

Tanım 3.1.25. $X \subset Y$ ve her $x \in X$ için $\|x\|_Y \leq c \|x\|_X$ olacak şekilde bir c sabiti varsa, X normlu uzayı Y normlu uzayına sürekli olarak gömülür denir. Bu gömülme sembolik olarak $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir.

$X \hookrightarrow Y$ ve X teki sınırlı kümeler Y de prekompakt ise bu durumda X in Y ye gömülmesine kompakttır denir. Bu gömülme için de $X \hookrightarrow Y$ gösterimi kullanılır.

Tanım 3.1.26. Eğer $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\|_X = 0$ oluyorsa, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ dizisinin $x \in X$ (güçlü) yakınsadığı söylenir. Her $F \in X'$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = F(x)$ ise buna X uzayındaki x_k dizisinin x 'e zayıf yakınsadığı söylenir.

Her $x \in X$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ oluyorsa buna X' uzayındaki f_k dizisinin $f \in X'$ zayıf yıldızlı yakınsadığı söylenir.

Bir $X \hookrightarrow Y$ gömülmesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart X teki zayıf yakınsak dizilerin Y de güçlü yakınsak dizilere karşılık gelmesidir (eşlenmesidir).

3.1.1. Ölçümler ve Örtme Teoremleri

Bu tez $L^{p(x)}$ ve $W^{k,p(x)}$ uzaylarının yoğunluğu ile ilgili olduğundan; bu uzaylardaki elemanlar fonksiyonlar ve bu uzayların tanım ve işlemleri genellikle integrallerle ifade edildiğinden ölçüm ve integral konusunu açıklamak faydalı olacaktır.

Bir ölçüm uzayını (A, Σ, μ) ile göstereceğiz. μ, Σ üzerinde σ -sonlu ve $\mu(A) > 0$ olarak tam ölçümlü alacağız. $E \subset A$ kümesinin karakteristik fonksiyonunu χ_E olarak göstereceğiz.

Bir Lebesgue ölçülebilir $f : A \rightarrow K$ ($K, \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ gösterir) fonksiyonunun integrali standart yöntemlerle bilinen tanımı alınacaktır ve $\int_A f d\mu$ ile gösterilecektir. Çalışmalarımızda daha çok $A = \Omega, \mathbb{R}^n$ nin bir açık alt kümesi; μ, n -boyutlu Lebesgue ölçümü; Σ, Ω nin Lebesgue ölçülebilir alt kümelerinin σ -cebiri olduğu durumlarla ilgileneceğiz. Bu durumda Lebesgue integralini $\int_\Omega f dx$ ve ölçülebilir bir $E \subset \Omega$ alt kümesinin ölçümünü $|E|$ olarak gösterilecektir.

Ölçüm kavramı hacim kavramını genelleştirir. Bir A kümesi üzerindeki bir μ ölçümü, bir $E \subset A$ alt kümesine negatif olmayan bir $\mu(E)$ sayısını karşılık getirir. Bir kümenin ölçümünün sonsuz olması da mümkündür. Bazı kümelerin çok karmaşık, dağınık veya tuhaf yapısından dolayı bu kümelere bir ölçüm uygulamak mümkün olmayabilir.

Tanım 3.1.1.1. Bir A kümesi üzerindeki bir σ -cebiri

i) $\emptyset \in \Sigma$,

ii) $E \in \Sigma$ ise bu durumda $E^c = A - E \in \Sigma$,

iii) $\{E_i : i \in \mathbb{N}\}$, Σ daki bir sayılabilir kümelerin ailesi ise, bu durumda $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Sigma$;

şeklindeki A nın alt kümelerinden oluşan Σ koleksiyonudur.

Bir (A, Σ) ölçülebilir uzay bir A kümesi ve A üzerindeki Σ , σ -cebiri. Σ elemanlarına ölçülebilir kümeler denir.

$$\cap_{i=1}^{\infty} E_i = (\cup_{i=1}^{\infty} E_i^c)^c$$

olarak yazılabildiğinden Σ nın sayılabilir kesişimlere göre kapalı olduğu söylenir.

S bir A kümesinin bir keyfi alt kümelerinin koleksiyonu ise bu durumda, S yardımıyla ile üretilen $\Sigma(S)$ σ -cebiri, S yi içeren A üzerindeki en küçük σ -cebiri. Bu σ -cebiri, S yi içeren A üzerindeki tüm σ -cebirlerinin kesişimidir.

Örnek 3.1.1.2. (A, τ) bir topolojik uzay ve τ , A daki açık kümelerin koleksiyonu olsun. τ aracılığıyla A üzerinde oluşturulan σ -cebirine, A nin Borel σ -cebiri denir. Borel σ -cebirinin elemanlarına Borel kümeleri denir ve $B(A)$ ile gösterilir.

Bir A kümesi üzerindeki bir μ ölçümü, A nın bir Σ , σ -cebiri üzerinde

i) $\mu(\emptyset) = 0$;

ii) $\{E_i : i \in \mathbb{N}\}$, Σ daki bir sayılabilir ikişer ayrık kümelerin ailesi, yani $i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$, ise bu durumda

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

şartlarını sağlayan bir $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonudur. $\mu(A) < \infty$ ise ölçüm sonludur. Eğer $\mu(E_i) < \infty$ ve

$$A = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$$

olacak biçimde A nın ölçülebilir alt kümelerinden bir sayılabilir $\{E_i : i \in \mathbb{N}\}$ ailesi varsa ölçüme σ -sonlu denir.

Bir (A, Σ, μ) ölçüm uzayı; bir A kümesi, A kümesi üzerindeki bir Σ , σ -cebiri ve bir $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ ölçümden oluşur.

$\mathbb{R}^n$ nin Borel σ -cebiri, $a_i < b_i$,

$$Q = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

formundaki tüm küp koleksiyonlarından üretilir. λ Lebesgue ölçümü $B(\mathbb{R}^n)$ Borel σ -cebiri üzerinde $\lambda(Q) = \text{Vol}(Q)$ şeklindedir. Daha açık ifade ile

$$\lambda((a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)) = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_n - b_n)$$

şeklini alır.

Örneğin

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} (-i, i)^n$$

olduğundan Lebesgue ölçümü σ -sonlu olur.

Lebesgue ölçümü, Lebesgue ölçümüne göre Borel σ -cebirinin tamamlaması olan Lebesgue ölçülebilir kümelerden oluşan $L(\mathbb{R}^n)$, σ -cebirine genişletilebilir. Kolay olmadığı halde inşa yoluyla Lebesgue ölçümünün varlığı ispatlanabilir. İnşa aşağıdaki sonucu gösterir.

Teorem 3.1.1.3. Bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesinin Lebesgue ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul, her $\epsilon > 0$ için, $F \subset \Omega \subset G$ ve $\lambda(G \setminus F) < \epsilon$ olacak biçimde bir kapalı F kümesi ve bir açık G kümesinin olmasıdır. Üstelik,

$$\lambda(\Omega) = \inf \{ \lambda(U) : U \text{ açıktır ve } U \supset \Omega \}$$

$$= \sup \{ \lambda(K) : K \text{ kompaktır ve } K \subset \Omega \}$$

olur ki bu da bir Lebesgue ölçülebilir kümeye dıştan açık kümelerle ve içten kapalı kümelerle yaklaşılabilir anlamını verir.

Lebesgue ölçümü çeşitli doğal geometrik özelliklere sahiptir. Ötelemeye göre değişmezdir, yani, her $\Omega \in L(\mathbb{R}^n)$ ve $h \in \mathbb{R}^n$ için

$$\tau_h \Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : y = x + h \quad x \in \Omega\}$$

şeklinde tanımlanmak üzere $\lambda(\tau_h \Omega) = \lambda(\Omega)$ özelliğini sağlar.

$\mathbb{R}^n$ uzayı toplamaya göre değişmeli gruptur. Bir lokal kompakt grup üzerindeki bir değişmez ölçüme, Lebesgue ölçümü gibi, Haar ölçümü denir.

$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir lineer dönüşüm ve

$$T\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : y = Tx \quad x \in \Omega \text{ için}\}$$

olarak tanımlanırsa bu durumda $\lambda(T\Omega) = |\det T| \lambda(\Omega)$ olur. Buradan, Lebesgue ölçümü rotasyonel olarak değişmezdir ve $t > 0$ için $\lambda(t\Omega) = t^n \lambda(\Omega)$ özelliğine sahiptir.

Tanım 3.1.1.4. Bir ölçüm uzayı ölçümü sıfır olan bir kümenin her alt kümesi ölçülebilir ise bu ölçüm uzayına tamdır denir. (A, Σ, μ) bir ölçüm uzayı ise Σ daki bir μ ölçümüne göre Σ , σ -cebirinin $\bar{\Sigma}$ tamlanması

$$E \subset \check{A} \subset F \quad \text{ve} \quad \mu(F \setminus E) = 0$$

olacak biçimde Σ de E, F kümelerinin varlığını sağlayan A nın tüm $\check{A}$ alt kümelerinden oluşur. μ nün $\bar{\mu}$ tamlanması

$$\bar{\mu}(\check{A}) = \mu(F) = \mu(E)$$

$\bar{\Sigma}$ üzerinde olarak tanımlanır.

$(A, \bar{\Sigma}, \bar{\mu})$ tam ölçüm uzayına (A, Σ, μ) nın tamlanması denir.

$B(\mathbb{R}^n)$ Borel σ -cebiri tam değildir. Lebesgue ölçümüne göre tamlanması Lebesgue ölçülebilir kümelerin $L(\mathbb{R}^n)$ σ -cebiridir. Borel kümeleri ve Lebesgue ölçülebilir kümelerdeki Lebesgue ölçümü için aynı λ notasyonu kullanılmaya devam edilecektir.

Ölçümü sıfır olan bir küme dışında sağlanan bir özelliğe hemen hemen her yerde sağlanır denir.

Tanım 3.1.1.5. (A, Σ) ve (B, S) ölçülebilir uzaylar olsunlar. Bir ölçülebilir fonksiyon her $E \in S$ için

$$f^{-1}(E) \in \Sigma$$

özelliğini sağlayan bir $f : A \rightarrow B$ dönüşümüdür.

Genel olarak dikkatimizi bir (A, Σ, μ) ölçüm uzayı üzerinde tanımlanmış reel değerli fonksiyonlara vereceğiz. Bu durumda bir (A, Σ) ölçülebilir uzay olsun. Bir $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart her $c \in \mathbb{R}$ için $\{x \in A : f(x) < c\}$ kümesinin A ya ait olmasıdır.

Benzer olarak bir $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ kompleks değerli fonksiyonun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul $(f = g + ih)$ $g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir olmalarıdır.

Bir fonksiyon ölçülebilir ve aldığı değerler kümesi sonlu ise bu fonksiyona basit fonksiyon denir. Herhangi bir ölçülebilir fonksiyona basit fonksiyonlarla yaklaşılabılır.

Tanım 3.1.1.6. Bir (A, Σ) ölçülebilir uzayı üzerindeki bir $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$$

olacak biçimde $E_1, E_2, \dots, E_n$ ölçülebilir kümeleri ve $c_1, c_2, \dots, c_n$ reel sayıları var ise bu halde φ bir basit fonksiyon olur.

Teorem 3.1.1.7. $f : A \rightarrow [0, \infty]$ bir ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda f ye noktasal yakınsayan bir monoton artan basit fonksiyonların bir $\{\varphi_k\}$ dizisi vardır.

Bir keyfi ölçülebilir $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu, iki negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların

$$f = f_+ - f_-, \quad f_+ = \max\{f, 0\}, \quad f_- = \max\{-f, 0\}.$$

şeklindeki farkı olarak yazılabilir.

Her bir parçaya basit fonksiyonlarla yaklaşılabılır.

$$\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$$

bir (A, Σ, μ) ölçüm uzayı üzerinde bir basit fonksiyon olsun. μ ölçümüne göre φ nin integrali

$$\int \varphi d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(E_i)$$

olarak tanımlanır.

$f : A \rightarrow [0, \infty]$ bir (A, Σ, μ) ölçüm uzayı üzerinde tanımlanmış negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int \varphi d\mu : \varphi \text{ basit fonksiyon ve } \varphi \leq f \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ şeklindeyse, bu halde sağdaki integrallerden en az biri sonlu olmak şartıyla

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$$

olarak tanımlanır.

$$\int |f| d\mu = \int f_+ d\mu + \int f_- d\mu < \infty$$

oluyorsa, f nin integrallenebilirdir ve bu durum $f \in L^1$ şeklinde gösterilir.

$f = g + ih$ olmak üzere, $g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyonlar ise, bu durumda $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ kompleks değerli fonksiyon integrallenebilirdir ve

$$\int f d\mu = \int g d\mu + i \int h d\mu$$

şeklindedir.

E, A nın bir ölçülebilir alt kümesi ise

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu$$

olarak tanımlanır.

Bağlama bağlı olarak integral

$$\int f, \quad \int f d\mu, \quad \int f(x) d\mu(x), \quad \int f(x) \mu(dx)$$

olarak değişik şekilde yazılabilir.

Ayrıca λ Lebesgue ölçümüne göre $\mathbb{R}^n$ de tanımlanmış bir fonksiyonun $\int f d\lambda$ integrali

$$\int f dx \text{ veya } \int f(x) dx$$

olarak da yazılabilir.

Teorem 3.1.1.8. (Temel Örtme Teoremi) $\mathcal{F}$, bir metrik uzayda yuvarların herhangi koleksiyonu ve

$$\sup \{diam(B) : B \in \mathcal{F}\} < \infty$$

olarak alınsın. Bu durumda $\mathcal{F}$ içinde

$$\cup_{B \in \mathcal{F}} B = \cup_{B \in G} 5B$$

olacak biçimde ikişer ayrık yuvarların sayılabilir bir G alt koleksiyonu vardır.

Teorem 3.1.1.9. (Besicovitch Örtme Teoremi) A , $\mathbb{R}^n$ de sınırlı bir küme olsun. Her bir $x \in A$ için merkezi x olan bir $Q_x \subset \mathbb{R}^n$ küp (veya yuvar) verilsin. Bu durumda verilen $\{Q_x\}_{x \in A}$ kümeleri arasından bir $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dizisi (sonlu olması mümkün) aşağıdaki biçimde seçebiliriz.

- a) A kümesi bu dizi tarafından $A \subset \cup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$ şeklinde örtünebilir.
- b) $\mathbb{R}^n$ nin hiç bir noktası $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dizisinin θ_n tane kümelerinden fazlasının içinde değildir. Yani

$$\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{Q_j} \leq \theta_n.$$

olur.

- c) $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dizisi ξ_n tane ayrık kümelerin ailelerine ayrılabilir.

Teorem 3.1.1.10. (Birim Ayrılması) $\mathcal{I}\mathcal{J}$, bir kapalı $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesini örten, açık kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda

- a) her $x \in E$ için, $\sum_{f \in \mathcal{F}} f(x) = 1$
 - b) her bir $f \in \mathcal{F}$ fonksiyonu için, $\text{spt } f \subset U$ olacak şekilde $U \in \mathcal{I}\mathcal{J}$ vardır;
- ve

c) $K \subset E$ kompakt ise, sadece sonlu sayıda $f \in \mathcal{F}$ için $\text{spt } f \cap K \neq \emptyset$.

olacak biçimde $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayında ve değerleri $[0, 1]$ aralığında bulunan bir $\mathcal{F}$ küme ailesi vardır.

$\mathcal{F}$ ailesine E nin IJ açık örtüsüne bağlı bir birimin ayrılığını denir.

Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların küçük bir küme dışında sürekli olacağını karakterize eden Lusin teoremi aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.1.1.11. Bir $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilir bir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde tanımlansın. f nin A üzerinde Lebesgue ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul, herhangi bir $\epsilon > 0$ için f nin F_ϵ kısıtlaması sürekli ve $\mu(A \setminus F_\epsilon) < \epsilon$ olacak şekilde bir kapalı $F_\epsilon \subset A$ kümesinin olmasıdır.

Teorem 3.1.1.12. $A \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir ve $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu A da ölçülebilir olsun. Bu halde herhangi bir $\epsilon > 0$ için

$$\mu\{x \in A : f(x) \neq g_\epsilon(x)\} < \epsilon$$

olacak şekilde bir sürekli $g_\epsilon : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

Teorem 3.1.1.13. $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi ve f fonksiyonu A da ölçülebilir; $\mu(A) < \infty$ ve A nin hemem hemen her yerinde $f_k \rightarrow f$ yakınsaması olsun. Bu durumda her $\epsilon > 0$ için $A \setminus A_\epsilon$ da $f_k \rightarrow f$ yakınsaması düzgün olacak biçimde bir ölçülebilir $A_\epsilon \subset A$, $\mu(A_\epsilon) < \epsilon$ kümesi vardır.

Fonksiyonların düzgün sürekliliğini nicel olarak ölçmek için modülü sürekli fonksiyonlar kullanılır.

Tanım 3.1.1.14. $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ve $\omega(0) = 0$ olan ω fonksiyonu artan, sürekli ve konkav ise bu fonksiyona modülü sürekli denir.

Eğer f nin tanım kümesindeki tüm x, y ler için $|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)$ ise, bu halde reel ya da kompleks değerli f fonksiyonu ω modülü sürekliliğine sahip olur.

Tanım 3.1.1.15. (A, μ) bir ölçüm uzayı olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için bir $\mathbb{N}$ doğal sayısı var ve her $i \geq \mathbb{N}$ için

$$\mu\{x \in A : |f_i(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \leq \epsilon$$

oluyorsa, o zaman (f_i) dizisinin ölçümde f fonksiyonuna yakınsıyor denir.

$\mu(A) < \infty$ için, hemen hemen her yerde $f_i \rightarrow f$ oluyorsa bu durumda ölçümde $f_i \rightarrow f$ olur. Diğer taraftan $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_A |f_i - f| d\mu = 0$ olmasından, uygun alt diziye geçmedikçe, ölçümde yakınsaklık gerektirmez.

Teorem 3.1.1.16. (Monoton yakınsaklık) (A, Σ, μ) ; σ -sonlu, tam ölçüm uzayı; (f_k) , μ -ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi, μ -hemen hemen her yerde $f_k \nearrow f$ monoton artan yakınsaması ve $\int_A f_1 d\mu > -\infty$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu = \int_A f d\mu$$

olur.

Teorem 3.1.1.17. (Baskın yakınsaklık) (A, Σ, μ) ; σ -sonlu, tam ölçüm uzayı; (f_k) , μ -ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi, μ -hemen hemen her yerde $f_k \rightarrow f$ olsun.

Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için μ -hemen hemen her yerde $|f_k| \leq h$ olacak şekilde bir $h \in L^1(A, \mu)$ varsa, bu durumda

$$f \in L^1(A, \mu) \text{ ve}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu = \int_A f d\mu$$

olur.

Teorem 3.1.1.18. (Fatou) (A, Σ, μ) ; σ -sonlu, tam ölçüm uzayı; (f_k) , negatif olmayan μ -ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\int_A \lim_{k \rightarrow \infty} \inf f_k d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \int_A f_k d\mu$$

özellliği sağlanır.

$\mu(E) = 0$ sağlayan her $E \in \Sigma$ için $\nu(E) = 0$ oluyorsa bu durumda ν ye μ ya göre mutlak süreklidir denir. Aşağıdaki teorem bununla ilgili önemli bir durumu ortaya koymaktadır.

Teorem 3.1.1.19. (Radon-Nikodym) (A, Σ, μ) bir sonlu ölçüm uzayı ve ν (A, Σ) üzerinde bir sonlu, işaretli ölçüm olsun. ν, μ ya göre mutlak sürekli ise bu durumda tüm $E \in \Sigma$ için

$$\nu(E) = \int_E g \, d\mu$$

olacak biçimde bir tek $g \in L^1(A, \mu)$ fonksiyonu vardır.

Teorem 3.1.1.20. (Jensen Eşitsizliği) $A \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve ölçülebilir, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $\varphi \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de integrallenebilir olsun. Bu durumda

$$\varphi\left(\frac{1}{\text{vol}(A)} \int_A f(x) \, dx\right) \leq \frac{1}{\text{vol}(A)} \int_A \varphi(f(x)) \, dx$$

olur.

Tanım 3.1.1.21. $U, V \subset \mathbb{R}^n$ açık kümeler olsun. Eğer Φ ve Φ^{-1} sürekli ise bire bir ve örten $\Phi : U \rightarrow V$ dönüşümüne homeomorfizm, eğer Φ ve Φ^{-1} sürekli olarak differansiyellenebilirler ise o zaman bu dönüşüme difeomorfizm denir.

İntegral için değişken değiştirme teoremi aşağıdaki biçimde olur.

Teorem 3.1.1.22. $U, V \subset \mathbb{R}^n$ açık kümeler ve $\Phi : U \rightarrow V$ bir difeomorfizm olsun. $(f \circ \Phi) |\det D\Phi|$, U üzerinde integrallenebilir olduğunda $f : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fonksiyonu da integrallenebilir olur ve bu durumda

$$\int_{\Phi(U)} f(y) \, dy = \int_U f(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)| \, dx$$

elde edilir.

Parametreye bağlı integral için bazı önemli sonuçlar aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.1.1.23. $U \subset \mathbb{R}^n, y_0 \in U, f : \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun.

- i) her sabit $y \in U$ için $x \rightarrow f(x, y)$ integrallenebilir,
- ii) hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^m$ için $y \rightarrow f(x, y), y_0$ da sürekli,
- iii) $\mathbb{R}^m$ de hemen hemen her yerde, her $y \in U$ için,

$$|f(x, y)| \leq F(x)$$

özellikliğini sağlayan bir integrallenebilir $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fonksiyonu var olsun.

Bu durumda

$$g(y) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx$$

fonksiyonu y_0 da sürekli.

Teorem 3.1.1.24. (Parametreye göre integralin türevi) $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık, $f : \mathbb{R}^m \times I \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun.

- i) her $t \in I$ için $x \rightarrow f(x, t)$ integrallenebilir
- ii) hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^m$ için, $t \rightarrow f(x, t)$ sonludur ve I üzerinde t ye göre differansiyellenebilir,
- iii) $\mathbb{R}^m$ nin hemen hemen her yerinde, her $t \in I$ için,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq F(x)$$

özellğini sağlayan bir integrallenebilir $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fonksiyonu var olsun.

Bu halde

$$g(t) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x, t) dx$$

fonksiyonu I üzerinde differansiyellenebilirdir ve

$$g'(t) := \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

şeklindedir.

Fubini-Tonelli teoremi analizde temel bir araçtır. Genellikle $\mathbb{R}^n$ nin altkümeleri üzerindeki integrallerin çözümü için kullanılır.

Teorem 3.1.1.25. (Fubini) (X, Σ, μ) ve (Y, S, ν) iki tam ölçüm uzayları olsunlar.

$(X \times Y) \ni (x, y) \mapsto f(x, y)$, $(X \times Y)$ de integrallenebilir olsun.

Bu durumda

$X \ni x \mapsto f(x, y)$, ν -hemen hemen tüm $y \in Y$ için, X te μ -integrallenebilirdir.
 $Y \ni y \mapsto f(x, y)$, μ -hemen hemen tüm $x \in X$ için, Y de ν -integrallenebilirdir.
 Üstelik,

$$\begin{aligned}
 X &\ni x \longmapsto \int_Y f(x, y) d\nu, & X \text{ te } \mu - \text{integrallenebilir,} \\
 Y &\ni y \longmapsto \int_X f(x, y) d\mu, & Y \text{ de } \nu - \text{integrallenebilir}
 \end{aligned}
 \tag{3.1.1}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \int_{(X \times Y)} f(x, y) d(\mu \times \nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu \right) d\mu \\
 &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu \right) d\nu
 \end{aligned}
 \tag{3.1.2}$$

olur.

(Fubini Teoreminin Tonelli Versiyonu) (3.1.2) ile verilen çift katlı integral bağıntısını f nin $(\mu \times \nu)$ çarpım ölçümünde integrallenebilmesi gerektiğini şart koşuyor. f negatif olmadığı zaman; Tonelli, $(\mu \times \nu)$ σ -sonlu olma koşuluyla, integrallenebilme şartının esnetilebileceğini belirtmiştir.

Teorem 3.1.1.26. (Tonelli) (X, Σ, μ) ile (Y, S, ν) tam ve σ -sonlu ölçüm uzayları ve $f : (X \times Y) \rightarrow [0, \infty]$ ölçülebilir olsun. Bu durumda yukarıdaki ölçülebilirlik ifadeleri ve (3.1.2) deki çift-integral özelliği sağlanır. (3.1.2) deki integraller sonlu ya da sonsuz da olabilir.

Tanım 3.1.1.27. Bir $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer her $\epsilon > 0$ için, tüm ayrık, açık $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ sonlu alt aralıklar dizileri için,

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \implies \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa bu fonksiyona $[a, b]$ de mutlak süreklidir denir.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu mutlak sürekli olduğunda şöyle bir denk durum oluşur:

f' hemen hemen her yerde türevi var ve $[a, b]$ de Lebesgue integrallenebilir olur, her $x \in [a, b]$ için

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.1.28. (Urysohn lemma) A, B kapalı, ayrık kümeleri X metrik uzayının alt kümeleri olsunlar. Bu durumda her $x \in A$ için $f(x) = 0$, her $x \in B$ için $f(x) = 1$ olacak biçimde bir sürekli $f : X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu vardır.

Teorem 3.1.1.29. (Tietze Genişletme) A bir X metrik uzayında bir kapalı alt küme ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu halde her $x \in A$ için $f(x) = F(x)$ olacak şekilde bir sürekli $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Ayrıca her $x \in A$ için $|f(x)| \leq M$ ise her $x \in X$ için $|F(x)| \leq M$ olur.

Şimdi, Weierstrass tarafından gösterilen, her yerde sürekli fakat hiç bir yerde türevi olmayan fonksiyonu yazalım: $0 < a < 1$, b pozitif tek tamsayı ve $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ olmak üzere

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

olarak alalım. Bu durumda $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli fakat hiç bir yerde türevi olmayan bir fonksiyon olur.

Dikkat edilirse, böyle bir özellik türevlenebilir fonksiyonların bir sonsuz toplamının hiç bir yerde türevinin olamayabileceğini gösterir.

Weierstrass 1885 te her sürekli fonksiyona düzgün olarak polinomlarla yaklaşılabileceğini göstermesi, gerçek anlamda, yaklaşım teorisinin bir başlangıcı olarak söylenebilir (Duren 2012). Aşağıdaki teorem bu durumu ortaya koymaktadır.

Teorem 3.1.1.30. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $\epsilon > 0$ için,

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

olacak şekilde bir $p(x)$ polinomu vardır.

3.2. Sobolev Uzayları

Genel olarak Sobolev uzaylarıyla ilgili bu bölüm (Ziener 1987), (Burenkov 1998), (Gilbarg ve Trudinger 1998), (Krantz ve Parks 1999), (Adams ve Fournier 2003) ve (Leoni 2009) kaynaklarından yararlanılarak hazırlanmıştır.

3.2.1. Sürekli Fonksiyon Uzayları

$\Omega, \mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. Herhangi negatif olmayan m tamsayısı için $C^m(\Omega)$, kendisi ile birlikte, derecesi $|\alpha| \leq m$ olan, tüm $\partial^\alpha \phi$ kısmi türevlerinin de Ω üzerinde sürekli olan ϕ fonksiyonlarının oluşturduğu vektör uzayını belirtmektedir. $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ kısaltması kullanılır. $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^\infty C^m(\Omega)$ olarak tanımlanır.

$C_0(\Omega)$ alt uzayı $C(\Omega)$ deki, $C_0^\infty(\Omega)$ alt uzayı da $C^\infty(\Omega)$ uzayındaki Ω üzerinde kompakt desteğe sahip tüm fonksiyonlardan oluşur.

(**Sınırlı, sürekli fonksiyon uzayları**) Ω açık olduğundan $C^m(\Omega)$ deki fonksiyonlar Ω üzerinde sınırlı olmak zorunda değildirler. $C_B^m(\Omega)$ uzayı $\phi \in C^m(\Omega)$ fonksiyonlarından, $0 \leq |\alpha| \leq m$ için, $\partial^\alpha \phi$ nin Ω üzerinde sınırlı olanlarından oluşur ve

$$\|\phi\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

olarak verilen norm ile Banach uzayı olur.

(**Sınırlı, düzgün sürekli fonksiyon uzayları**) $\phi \in C(\Omega)$ fonksiyonu Ω üzerinde sınırlı ve düzgün sürekli ise bu durumda Ω bölgesinin bir tek olarak sınırlı, sürekli $\overline{\Omega}$ kapanışı genişletmesine sahiptir. $C^m(\overline{\Omega})$ vektör uzayı tüm $\phi \in C^m(\Omega)$ fonksiyonlarından, $0 \leq |\alpha| \leq m$ için, $\partial^\alpha \phi$ nin Ω üzerinde sınırlı ve düzgün sürekli olanlarından oluşur ve $C^m(\overline{\Omega})$, $C_B^m(\Omega)$ nin kapalı bir alt uzayı olduğundan

$$\|\phi\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

şeklindeki aynı norm ile bir Banach uzayı olur.

(**Hölder sürekli fonksiyon uzayları**) $0 < \lambda \leq 1$ ise $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ uzayı $C^m(\overline{\Omega})$ uzayının alt uzayı olmak üzere, $0 \leq |\alpha| \leq m$ için, $\partial^\alpha \phi$ nin Ω üzerinde λ üslü Hölder şartını sağlayan ϕ fonksiyonlarından oluşur. Yani, $x, y \in \Omega$ için

$$|\partial^\alpha \phi(x) - \partial^\alpha \phi(y)| \leq K |x - y|^\lambda$$

olacak şekilde bir K sabiti vardır ve $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ uzayı

$$\|\phi\|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})} = \|\phi\|_{C^m(\overline{\Omega})} + \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \neq y, x, y \in \Omega} \frac{|\partial^\alpha \phi(x) - \partial^\alpha \phi(y)|}{|x - y|^\lambda}$$

normu ile Banach uzayı olur.

$E \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu her $x, y \in E$ için

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq c |x - y|$$

olacak biçimde bir c reel sayısı varsa f ye Lipschitz sürekli denir.

Teorem 3.2.1.1. (Kirszbraun) $E \subset \mathbb{R}^n$ ve $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu Lipschitz sürekli olsun. Bu durumda $\psi|_E = \phi$ ve yine aynı c sabiti için bir Lipschitz sürekli $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ genişleme fonksiyonu vardır.

Teorem 3.2.1.2. (Rademacher) Her bir Lipschitz sürekli $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu hemen hemen her yerde differansiyellenebilir.

$0 < \nu < \lambda \leq 1$ için

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \subsetneq C^{m,\nu}(\overline{\Omega}) \subsetneq C^m(\overline{\Omega})$$

kapsamı yazılabilir.

Lipschitz süreklilik her yerde differansiyellenebilmeyi gerektirmediğinden, $C^{m,1}(\overline{\Omega}) \not\subseteq C^{m+1}(\overline{\Omega})$ olacağı açıktır. Genelde $C^{m+1}(\overline{\Omega}) \not\subseteq C^{m,1}(\overline{\Omega})$ durumu söz konusudur. Ancak kapsama bir çok Ω bölgeleri için mümkün olabilir.

Teorem 3.2.1.3. (Ascoli-Arzela) $\Omega, \mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa, bu halde $C^m(\overline{\Omega})$ nin bir alt kümesi olan K , $C^m(\overline{\Omega})$ de prekompakt olur.

i) her $\phi \in K$ ve $x \in \Omega$ için $|\phi(x)| \leq M$ olacak biçimde bir M sabiti vardır.

ii) her $\epsilon > 0$ için, eğer $\phi \in K$, $x, y \in \Omega$ ve $|x - y| < \delta$ ise bu durumda $|\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon$ olacak biçimde $\delta > 0$ vardır.

Yukarıdaki değişik sürekli fonksiyon uzayları ile ilgili olarak aşağıdaki gömülmeler vardır:

Teorem 3.2.1.4. m negatif olmayan bir tamsayı ve $0 < \nu < \lambda \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}), \quad (3.2.1)$$

$$C^{m,\nu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}), \quad (3.2.2)$$

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\nu}(\overline{\Omega}) \quad (3.2.3)$$

yazılabilir.

Eğer Ω sınırlı ise (3.2.2), (3.2.3) gömülmeleri kompakt olur. Eğer Ω konveks ise daha ileri olarak

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,1}(\overline{\Omega}), \quad (3.2.4)$$

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}), \quad (3.2.5)$$

gömülmeleri sözkonusudur.

Eğer Ω konveks ve sınırlı ise (3.2.1) kompakt, ve eğer $\lambda < 1$ ise (3.2.5) de de öyle olur.

Şimdi de Schwartz distribüsyon teorisiyle ilgili bazı temel durumları gösterelim.

(Test Fonksiyonları) $\Omega, \mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayında olan bir $\{\phi_k\}$ dizisinin $D(\Omega)$ uzayında $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonuna yakınsak olması için

i) her k için $\text{spt}(\phi_k - \phi) \subset K$ olacak biçimde $K \Subset \Omega$ vardır

ve

ii) her bir α çoklu indisi için K üzerinde düzgün olarak $\lim_{k \rightarrow \infty} \partial^\alpha \phi_k(x) = \partial^\alpha \phi(x)$ koşullarını sağlaması gerekir.

$C_0^\infty(\Omega)$ vektör uzayı üzerinde bir lokal konveks topoloji vardır. Burada bir F lineer fonksiyonelinin sürekli olması için gerek ve yeter koşul $D(\Omega)$ uzayında $\phi_k \rightarrow \phi$ olduğunda, $\mathbb{C}$ de $F(\phi_k) \rightarrow F(\phi)$ olmasıdır. Bunun ile topolojilendiğinde, $C_0^\infty(\Omega)$ bir topolojik vektör uzayı olur, $D(\Omega)$ olarak adlandırılır, elemanlarına test fonksiyonları denir. $D(\Omega)$ bir normlu uzay değildir.

(**Schwartz distribüsyonları**) $D(\Omega)$ uzayının dual uzayı olan $D(\Omega)'$ uzayına Ω üzerindeki distribüsyon (Schwartz) uzayı denir. $D(\Omega)'$, $D(\Omega)$ nin dual uzayı olarak zayıf yıldızlı topoloji verir, bu topoloji ile bir lokal konveks topolojik vektör uzayıdır. $D(\Omega)'$ da vektör uzayı ve yakınsaklık işlemlerinin özeti aşağıdaki gibidir. Eğer $S, T, T_k \in D(\Omega)'$, $c \in \mathbb{C}$ ise bu durumda $\phi \in D(\Omega)$ için

$$\begin{aligned}(S + T)(\phi) &= S(\phi) + T(\phi) \\ (cT)(\phi) &= cT(\phi)\end{aligned}$$

ve $D(\Omega)'$ uzayında $T_k \rightarrow T \iff \forall \phi \in D(\Omega)$ için $\mathbb{C}$ de $T_k(\phi) \rightarrow T(\phi)$ olur.

(**Lokal İntegrallenebilir Fonksiyonlar**) Ω üzerinde hemen hemen her yerde tanımlanmış bir f fonksiyonu, her $U \Subset \Omega$ (U nun kapanışı Ω nın içindedir) açık kümesi için,

$$\int_U |f(x)| dx < \infty$$

özellikli sağlıyorsa f fonksiyonuna Ω da lokal integrallenebilirdir denir ve bu durum $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ile gösterilir. Her bir $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ karşılık

$$T_f(\phi) = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx \quad \phi \in D(\Omega) \quad (3.2.6)$$

olarak tanımlanan bir $T_f \in D(\Omega)'$ distribüsyon vardır. T_f bu tanımla $D(\Omega)$ de bir sürekli lineer fonksiyonel olur.

Her $T \in D(\Omega)'$ distribüsyon, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ için, (3.2.6) de tanımlanan biçimiyle T_f formunda değildir. $0 \in \Omega$ ise her $\phi \in D(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} \delta(x) \phi(x) dx = \phi(0)$$

olacak biçimde $\delta \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ yoktur.

$D(\Omega)$ de

$$\delta(\phi) = \phi(0)$$

olarak tanımlanan δ lineer fonksiyoneli sürekli ve böylece Ω kümesinde bir dis-

tribüsyon olur. Buna bir Dirac distribüsyon adı verilir.

(Distribüsyonların Türevleri) $f \in C^1(\Omega)$ ve $\phi \in D(\Omega)$ olsun. ϕ , Ω nın bazı kompakt alt kümeleri dışında sıfır olduğundan, kısmi integrasyon yöntemiyle x_j değişkeninde

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \right) \phi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x) \right) dx$$

elde edilir. Benzer şekilde, $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ ise $|\alpha|$ kere kısmi integrasyon yöntemi ile

$$\int_{\Omega} (\partial^{\alpha} f(x)) \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) \partial^{\alpha} \phi(x) dx$$

bulunur. Bu bir $T \in D(\Omega)'$ distribüsyonunun $\partial^{\alpha} T$ türevi tanımının

$$(\partial^{\alpha} T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^{\alpha} \phi) \quad (3.2.7)$$

şeklinde verilebileceğini gösterir.

$\phi \in D(\Omega)$ iken $\partial^{\alpha} \phi \in D(\Omega)$ olduğundan $\partial^{\alpha} T$, $D(\Omega)$ üzerinde bir lineer fonksiyonel olur. Sürekliliğini gösterelim, böylece Ω üzerinde distribüsyon olacaktır. $D(\Omega)$ de $\phi_k \rightarrow \phi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda bazı $K \subseteq \Omega$ için

$$\text{supp}(\partial^{\alpha}(\phi_k - \phi)) \subset \text{supp}(\phi_k - \phi) \subset K$$

olur. Ayrıca her bir β çoklu indisi için $k \rightarrow \infty$ iken

$$\partial^{\beta}(\partial^{\alpha}(\phi_k - \phi)) = \partial^{\alpha+\beta}(\phi_k - \phi)$$

K da düzgün olarak sıfıra yakınsar. Buradan $D(\Omega)$ da $\partial^{\alpha} \phi_k \rightarrow \partial^{\alpha} \phi$ olur. $T \in D(\Omega)'$ olduğundan, $\mathbb{C}$ de,

$$\partial^{\alpha} T(\phi_k) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^{\alpha} \phi_k) \rightarrow (-1)^{|\alpha|} T(\partial^{\alpha} \phi) = \partial^{\alpha} T(\phi)$$

çıkar. Böylece $\partial^{\alpha} T \in D(\Omega)'$ olur.

$D(\Omega)'$ deki her distribüsyonun (3.2.7) deki anlamı ile $D(\Omega)'$ de tüm mertebelerde türeve sahip olduğu gösterildi. Ayrıca $D(\Omega)'$ dan $D(\Omega)'$ ya olan ∂^{α} dönüşümü sürekli. $D(\Omega)'$ de $T_k \rightarrow T$ ve $\phi \in D(\Omega)$ ise bu durumda

$$\partial^\alpha T_k(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T_k(\partial^\alpha \phi) \rightarrow (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \phi) = \partial^\alpha T(\phi)$$

olur.

Sobolev uzaylarının tanımını yapmak için zayıf türev kavramına ihtiyaç vardır. Bunun için başka bir fonksiyonun zayıf türevi olan bir fonksiyon kavramını verelim. $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ olsun. $D(\Omega)'$ da $T_{g_\alpha} = \partial^\alpha T_f$ olacak biçimde bir $g_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ fonksiyonu var olabilir ya da var olmayabilir de. Eğer böyle bir g_α varsa, ölçümü sıfır olan küme farkıyla bir tektir ve buna f nin zayıf ya da distribüsyon kısmi türevi denir, ve bu $\partial^\alpha f$ olarak gösterilir. Böylece zayıf anlamda $\partial^\alpha f = g_\alpha$, $g_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ şartıyla, her $\phi \in D(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} f(x) \partial^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha(x) \phi(x) dx$$

özellliği sağlanır.

Eğer f klasik anlamda sürekli kısmi $\partial^\alpha f$ türevine sahip olacak kadar düzgün ise bu durumda $\partial^\alpha f$, f nin zayıf türevi de olur. Doğal olarak, $\partial^\alpha f$ türevi zayıf anlamda var olduğu halde klasik anlamda var olmayabilir.

3.2.2. Lebesgue Uzayları

L^p uzayları fonksiyonel analizde önemli bir Banach uzayları sınıfını oluşturur.

($L^p(\Omega)$ **Uzayı**) Ω , $\mathbb{R}^n$ de bir bölge ve $p > 0$ bir reel sayı olsun. $L^p(\Omega)$ ile

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan Ω üzerinde tanımlı tüm ölçülebilir f fonksiyon sınıfı gösterilir.

Aynı şekilde $L^\infty(\Omega)$ uzayı da

$$\text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty$$

koşulunu sağlayan Ω üzerinde tanımlı tüm ölçülebilir f fonksiyonlar sınıfını verir.

$1 \leq p < \infty$ ve $a, b \geq 0$ olmak üzere

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1} (a^p + b^p)$$

eşitsizliği yardımıyla $L^p(\Omega)$ uzayının bir vektör uzayı olduğu gösterilebilir.

Bu uzaydaki normlar

$1 \leq p < \infty$ için

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|f\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

olarak tanımlanırlar. Bu şekilde tanımlanan normlarla $L^p(\Omega)$ ve $L^{\infty}(\Omega)$ uzayları birer Banach uzayları olurlar.

Teorem 3.2.2.1. (Hölder Eşitsizliği) $1 \leq p \leq \infty$ ve p'

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

olarak tanımlanan eşlenik üs olsun. $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ ise bu durumda $fg \in L^1(\Omega)$ ve

$$\int_{\Omega} |f(x) g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

olur.

Daha genel olarak $p > 0, q > 0$ ve $r > 0$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ sağlansın. Bu halde eğer $f \in L^p(\Omega)$ ve $g \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $fg \in L^r(\Omega)$ ve $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ olur.

Daha genel olarak; $1 \leq j \leq N$, $f_j \in L^{p_j}(\Omega)$ olmak üzere $f = \prod_{j=1}^N f_j$, $p_j > 0$ olsun. Eğer $\sum_{j=1}^N \frac{1}{p_j} = \frac{1}{q}$ ise bu durumda $f \in L^q(\Omega)$ ve $\|f\|_q \leq \prod_{j=1}^N \|f_j\|_{p_j}$ olur.

Teorem 3.2.2.2. (Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq p \leq \infty$ ise bu durumda

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.2.2.3. (İntegraller için Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$, $f, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de ölçülebilir, hemen hemen tüm $y \in \mathbb{R}^n$ için $f(., y) \in L^p(\mathbb{R}^m)$, ve $y \rightarrow \|f(., y)\|_{p, \mathbb{R}^m}$

fonksiyonu $L^1(\mathbb{R}^m)$ ait olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$ fonksiyonu $L^p(\mathbb{R}^m)$ ait olur ve

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy$$

yani,

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot, y) dy \right\|_{p, \mathbb{R}^m} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot, y)\|_{p, \mathbb{R}^m} dy$$

olur.

Teorem 3.2.2.4. (İnterpolasyon Eşitsizliği) $1 \leq p < q < r$, $0 < \theta < 1$ için

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r}$$

özelliğini sağlasın. Eğer $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ ise bu durumda $f \in L^q(\Omega)$ ve

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_r^{1-\theta}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.2.2.5. (L^p Uzayları için Gömülme Teoremi) $\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx < \infty$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olduğu varsayalım. Eğer $f \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $f \in L^p(\Omega)$ olur ve

$$\|f\|_p \leq (\text{vol}(\Omega))^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|f\|_q$$

özelliği sağlanır. Bunun sonucu olarak da

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi elde edilir.

$f \in L^p(\Omega)$ ise bu durumda

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_{\infty}$$

olur.

Son olarak, $1 \leq p < \infty$ için $f \in L^p(\Omega)$ ise ve her p için

$$\|f\|_p \leq K$$

olacak biçimde bir K sabiti var ise bu durumda $f \in L^\infty(\Omega)$ ve

$$\|f\|_\infty \leq K$$

eşitsizliği de sağlanır.

Bir sonuç olarak herhangi bir Ω bölgesi ve $1 \leq p \leq \infty$ için

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$$

olur.

Teorem 3.2.2.6. $1 \leq p < \infty$ ise $C_0(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ uzayında yoğundur.

Aynı şekilde L^p de, $1 \leq p \leq \infty$ için $L^p(\Omega)$ daki basit fonksiyonlar $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olur. $1 \leq p < \infty$ ise $L^p(\Omega)$ ayrılabilir olmasına rağmen $L^\infty(\Omega)$ ayrılabilir bir uzay değildir.

Şimdi de konvolüsyon ve Young teoremi için önce konvolüsyonu verelim.

f ve g ölçülebilir fonksiyonlar, her $x \in \mathbb{R}^n$ için konvolüsyon

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

olarak tanımlanır. Burada integralin var olması gerekir. Örneğin $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ ise Hölder eşitsizliğinden konvolüsyon integrali mutlak yakınsak ve tüm x değerleri için $|f * g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$ olur. Ayrıca bu şartlarda $f * g$ düzgün sürekli olur.

Teorem 3.2.2.7. (Konvolüsyon için Young Eşitsizliği) $1 \leq p, q, r \leq \infty$ için

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ özelliği sağlansın. Eğer $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

olur.

Mollifierler ve düzgün (smooth) fonksiyonlarla yaklaşım metodunu gösterelim.

$\phi, C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait; negatif olmayan, reel değerli bir fonksiyon ve

i) $|x| \geq 1$ ise $\phi(x) = 0$,

ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$

özelliklerini sağlasın.

Bu koşuları sağlayan fonksiyonlardan biri

$$\phi(x) = \begin{cases} k \exp[-1/(1-|x|^2)], & |x| < 1 \text{ ise} \\ 0, & |x| \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

($k > 0$ almarak yukarıdaki ii) koşulunu sağlayacak biçimde seçilir.) şeklindedir.

Buradan $\epsilon > 0$ ise, $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \phi(x/\epsilon)$ olarak tanımlanan fonksiyonlar $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olur. Negatif değerler almazlar ve

i) $|x| \geq \epsilon$ ise $\phi_\epsilon(x) = 0$,

ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x) dx = 1$

özelliklerine sahip birer fonksiyon olurlar.

Buradan $\phi_\epsilon(x)$ fonksiyonları bir mollifier olarak adlandırılır ve

$$\phi_\epsilon * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x-y) f(y) dy \quad (3.2.8)$$

konvolüsyonu (3.2.8) nin sağ tarafını anlamlı yapan f fonksiyonları için tanımlanır.

Buna f nin bir mollifikasyonu veya düzgünleştirilmesi (regularization) denir. Aşağıdaki teorem mollifikasyonun bazı özelliklerini ortaya koyuyor.

Teorem 3.2.2.8. f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de tanımlı ve Ω nin dışında sıfır olsun.

i) $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $\phi_\epsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ olur.

ve

ii) $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ ve $\text{spt}(f) \Subset \Omega$ ise bu durumda

$$\epsilon < \text{dist}(\text{spt}(f), \text{bdry}(\Omega))$$

koşuluyla $\phi_\epsilon * f \in C_0^\infty(\Omega)$ olur.

iii) $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ ise bu durumda $\phi_\epsilon * f \in L^p(\Omega)$ olur ve

$$\|\phi_\epsilon * f\|_p \leq \|f\|_p, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \|\phi_\epsilon * f - f\|_p = 0$$

sağlanır.

iv) $f \in C(\Omega)$ ve $G \Subset \Omega$ ise bu durumda G üzerinde düzgün olarak $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \phi_\epsilon * f(x) = f(x)$ olur.

v) $f \in C(\overline{\Omega})$ ise bu durumda Ω üzerinde düzgün olarak $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \phi_\epsilon * f(x) = f(x)$

olur.

Sonuç 3.2.2.9. $1 \leq p < \infty$ ise $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı, $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olur.

Şimdi de $L^p(\Omega)$ uzayında prekompakt kümeleri karakterize eden özellikleri inceleyelim.

$f, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin hemen hemen her yerinde tanımlanmış bir fonksiyon ise f fonksiyonunun Ω dışındaki sıfır genişletmesi

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \text{ ise} \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n - \Omega \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 3.2.2.10. $1 \leq p < \infty$ olsun. Sınırlı bir $K \subset L^p(\Omega)$ kümesinin $L^p(\Omega)$ uzayında prekompakt olması için gerek ve yeter koşul, her $\epsilon > 0$ için; her $f \in K$ ve $h \in \mathbb{R}^n, |h| < \delta$ için,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)|^p dx &< \epsilon^p \\ \int_{\Omega - \overline{G}} |f(x)|^p dx &< \epsilon^p \end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ ve bir $G \Subset \Omega$ alt kümesinin var olmasıdır.

Teorem 3.2.2.11. $1 \leq p < \infty$, $K \subset L^p(\Omega)$ ve Ω nın alt bölgelerinden oluşan bir $\{\Omega_j\}$ dizisi,

- i) her bir j için $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$,
- ii) K daki Ω_j ye kısıtlanmış fonksiyonlar kümesi $L^p(\Omega)$ de prekompaktır,
- iii) her $\epsilon > 0$ için; her $f \in K$ için

$$\int_{\Omega - \Omega_j} |f(x)|^p dx < \epsilon$$

olacak biçimde j vardır,

koşullarını sağlasın.

Bu durumda K , $L^p(\Omega)$ de prekompakttır.

Teorem 3.2.2.12. $1 < p < \infty$ için $L^p(\Omega)$ uzayı düzgün konvektir.

$L^p(\Omega)$ nin normlu dualini açıklayarak verelim.

(Lineer Fonksiyoneller) $1 \leq p \leq \infty$ ve p' , p nin üs eşleneği olsun. Her bir $g \in L^{p'}(\Omega)$,

$$L_g(f) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx, \quad f \in L^p(\Omega)$$

bağıntısıyla $L^p(\Omega)$ de bir lineer L_g fonksiyoneli tanımlar.

Hölder Eşitsizliğinden $|L_g(f)| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$ olur, buradan $L_g \in [L^p(\Omega)]'$ olur ve

$$\|L_g\|_{[L^p(\Omega)]'} \leq \|g\|_{p'}$$

olur. Eşitlik yukarıda sağlanmalıdır. $1 < p \leq \infty$ ise; $g(x) \neq 0$ ise $f(x) = |g(x)|^{p'-2} \overline{g(x)}$ ve diğer durumlarda $f(x) = 0$ olsun. Bu durumda $f \in L^p(\Omega)$ ve $L_g(f) = \|f\|_p \|g\|_{p'}$ olur.

Şimdi de $p = 1$ olduğunu varsayalım, buradan $p' = \infty$ olur. $\|g\|_{p'} = 0$ ise, $f(x) = 0$ olsun. Diğer durumda $0 < \epsilon < \|g\|_{\infty}$ ve A ; $0 < \mu(A) < \infty$, A da $|g(x)| > \|g\|_{\infty} - \epsilon$ olacak biçimde Ω nin bir ölçülebilir alt kümesi olsun. A da $f(x) = \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|}$ ve diğer yerlerde $f(x) = 0$ olsun. Bu durumda $f \in L^1(\Omega)$ ve $L_g(f) \geq \|f\|_1 (\|g\|_{\infty} - \epsilon)$ olur. Böylece

$$\|L_g\|_{[L^p(\Omega)]'} = \|g\|_{p'}$$

gösterilmiş olur. Böylece $g \rightarrow L_g$ dönüşümünü yapan operatör, $L^{p'}(\Omega)$ den $[L^p(\Omega)]'$ nin bir alt uzayına, bir izometrik izomorfizmdir.

Doğal olarak şöyle bir soru akla gelir: $g \in L^{p'}(\Omega)$ için, $L^p(\Omega)$ üzerindeki her sürekli lineer fonksiyonel L_g formunda midir?

Teorem 3.2.2.13. ($L^p(\Omega)$ için Riesz Gösterim Teoremi) $1 \leq p < \infty$ ve $L \in [L^p(\Omega)]'$ olsun. Bu durumda her $f \in L^p(\Omega)$ için

$$L(f) = L_g(f) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx \quad (3.2.9)$$

olacak biçimde $g \in L^{p'}(\Omega)$ vardır. Ayrıca $\|g\|_{p'} = \|L_g\|_{[L^p(\Omega)]'}$ olur. Böylece $[L^p(\Omega)]' \cong L^{p'}(\Omega)$; $[L^p(\Omega)]'$, $L^{p'}(\Omega)$ ya izometrik olarak izomorftir..

$L^\infty(\Omega)$ duali $L^1(\Omega)$ uzayından daha geniştir. Yukarıdaki (3.2.9) 'a benzer olarak gösterilemez.

Böylece $1 \leq p < \infty$ için $L^p(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsaklık, yani $f_k \rightharpoonup f$ olması için,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k(x) g(x) dx = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx, \quad \text{her } g \in L^{p'}(\Omega) \text{ için}$$

özelliğini sağlamasıdır.

Teorem 3.2.2.14. $L^p(\Omega)$ uzayının yansılmalı olması için gerek ve yeter koşul $1 < p < \infty$ olmasıdır.

Şimdi de Zayıf L^p nin tanımı ve L^p ile olan ilgisini ortaya koyalım.

Tanım 3.2.2.15. f , X üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve $0 < p < \infty$ ise, Zayıf L^p uzayı

$\lambda_f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$, $\lambda_f(a) = \mu(\{x : |f(x)| > a\})$ olmak üzere,

$$[f]_p = \left(\sup_{a>0} a^p \lambda_f(a) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm f fonksiyonları kümesidir. Bu durumda $[f]_p$ bir norm oluşturmaz; $[cf]_p = |c| [f]_p$ sağladığı halde üçgen eşitsizliğini sağlamaz.

L^p ile Zayıf L^p uzayları arasındaki ilişki

$$L^p \subset \text{Zayıf } L^p \text{ ve } [f]_p \leq \|f\|_p$$

şeklindedir. Örneğin $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığı üzerinde ve Lebesgue ölçümüne göre Zayıf L^p uzayında olmasına karşın, L^p uzayında değildir.

L^p uzaylarının interpolasyonu için önce aşağıdaki durumu inceliyelim.

$1 \leq p < q < r \leq \infty$ ise bu durumda $(L^p \cap L^r) \subset L^q \subset (L^p + L^r)$ olur. Doğal olarak L^p ve L^r de sınırlı olan $L^p + L^r$ üzerindeki bir T dönüşümün L^q uzayında da sınırlı olup olmadığı sorulabilir. Bu soru ile ilgili iki temel teorem Riesz-Thorin ve Marcinkiewicz interpolasyon teoremleridir.

Operatörlerin interpolate edilmesi matematiğin bir çok alanlarında görülür. Özellikle kısmi diferansiyel denklemlerde, harmonik analizde, operatör teorisinde yaklaşım (approximation) teorisinde çok kullanılır. Ünlü uygulamaları arasında Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve Hausdorff-Young eşitsizliği vardır.

Teorem 3.2.2.16. (Riesz-Thorin İnterpolasyon Teoremi) (X, M, μ) , (Y, N, ν) ölçüm uzayları $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$ olsun. Eğer $q_0 = q_1 = \infty$ ise ν de semifinite olsun. p_t ve q_t , $0 < t < 1$ için

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

şeklinde tanımlansın. $T, f \in L^{p_0}(\mu)$ için $\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}$ ve $f \in L^{p_1}(\mu)$ için $\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}$ olacak şekilde $T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \rightarrow L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$ bir lineer dönüşüm ise, bu durumda $0 < t < 1$, $f \in L^{p_t}(\mu)$ için $\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}$ olur (Folland 1999).

Tanım 3.2.2.17. $S, (X, M, \mu)$ üzerindeki ölçülebilir fonksiyonlardan oluşan bir lineer uzay ve T, S den (Y, N, ν) üzerindeki tüm ölçülebilir fonksiyon uzayına bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü her $f, g \in S$, $c > 0$ için

$$|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg| \text{ ve } |T(cf)| = |c| |Tf|$$

özellikliğini sağlıyorsa o zaman T dönüşümüne bir sublineer (altlineer) dönüşüm adı verilir.

$L^p(\mu) \subset S$, $(1 \leq p, q \leq \infty)$ için $T : L^p(\mu) \rightarrow L^q(\nu)$ bir sublineer dönüşüm ve her $f \in L^p(\mu)$ için $\|Tf\|_q \leq c \|f\|_p$ olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı varsa T ye güçlü tip (p, q) denir.

$(1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty)$, $L^p(\mu) \subset S$, $T : L^p(\mu) \rightarrow \text{zayıf } L^q(\nu)$ ve her $f \in L^p(\mu)$ için $[TF]_q \leq C\|f\|_p$ olacak biçimde bir $c > 0$ sayısı varsa T sublineer dönüşümüne zayıf tip (p, q) denir.

Son olarak T güçlü tip (p, ∞) olması için gerek ve yeter şart T zayıf tip (p, ∞) olmasıdır.

Teorem 3.2.2.18. (Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi) (X, M, μ) , (Y, N, ν) ölçüm uzayları; $p_0 \leq q_0$, $p_1 \leq q_1$, $q_0 \neq q_1$ olacak biçimde $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$ aralığının elemanları ve $0 < t < 1$ için

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

olsunlar. $T, L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ den Y üzerinde zayıf tip (p_0, q_0) ve zayıf tip (p_1, q_1) olan ölçülebilir fonksiyonlar uzayına bir sublineer dönüşüm ise bu durumda T güçlü tip (p, q) olur. Daha açık bir ifadeyle, $j = 0, 1$ için, $[Tf]_{q_j} \leq c_j \|f\|_{p_j}$ ise bu durumda $\|Tf\|_q \leq B_p \|f\|_p$ olur (Folland 1999).

Şimdi iki teoremi aşağıdaki sonucta karşılaştıralım.

Sonuç 3.2.2.19. Marcinkiewicz teoremi, Riesz- Thorin teoreminden farklı olarak q_j ve p_j üzerine bazı kısıtlamalar bırakıyor. İlginç olarak uygulamalar bu koşulları sağlıyor. Marcinkiewicz hipotezleri daha zayıftır: T dönüşümünün sublineer olmasına izin verilebiliyor ve T uc noktalarda zayıf tip olması yeterlidir. Sonuçta iki teoremden de $T : L^p(\mu) + L^q(\nu)$ operatörü sınırlıdır. Fakat Riesz-Thorin teoremi T operatör normu için daha iyi kestirim veriyor. Sonuç olarak biri diğerini kapsamıyor.

Hardy-Littlewood $Mf(x)$ maksimal operatörü $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için,

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(r, x))} \int_{B(r, x)} |f(y)| dy$$

şeklinde tanımlanır. Sublineer operatördür ve her $f \in L^\infty$ için $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ sağlanır. Ayrıca M maksimal operatörü zayıf tip $(1, 1)$ dir. Bu durumda Marcinkiewicz interpolasyon teoreminden eğer $1 < p < \infty$ ve $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ise bu halde

$$\|Mf\|_p \leq c \frac{p}{p-1} \|f\|_p$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır.

3.2.3. Sobolev Uzayları

Sobolev normları, $1 \leq p < \infty$ için,

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.2.10)$$

ve $p = \infty$ için,

$$\|f\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_\infty \quad (3.2.11)$$

olarak tanımlanır.

m herhangi bir pozitif tamsayı, $1 \leq p \leq \infty$ için $\|f\|_{m,p}$ üzerinde norm olduğu aşağıdaki üç vektör uzayını göz önüne alalım:

- i) $H^{m,p}(\Omega) \equiv \left\{ f \in C^m(\Omega) : \|f\|_{m,p} < \infty \right\}$ nin $\|\cdot\|_{m,p}$ normuna göre tamlanması,
- ii) $W^{m,p}(\Omega) \equiv \{f \in L^p(\Omega) : 0 \leq |\alpha| \leq m \text{ için } \partial^\alpha f \in L^p(\Omega)\}$. Burada $\partial^\alpha f$ zayıf kısmi türevidir.

- iii) $W_0^{m,p}(\Omega) \equiv C_0^\infty(\Omega)$ nin $W^{m,p}(\Omega)$ uzayındaki kapanışıdır.

Uygun (3.2.10) veya (3.2.11) normları ile normlanan bu uzaylara Ω üzerinde Sobolev uzayları denir. Açıkça $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ olur. Yine $1 \leq p < \infty$ için $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ da yoğun olduğundan $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ olduğu açıktır. Herhangi bir m pozitif tamsayı için,

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmeleri açıkça görülür.

$W^{m,p}(\Omega)$ bir Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzaylarının bir kaç önemli özellikleri Ω bölgesinin bir ayrık kopyalarının (örneklerinin) birleşimi üzerinde $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı bir $L^p(\Omega)$ uzayının bir kapalı alt uzayı olarak düşünmekle elde edilebilir.

$n \geq 1$ ve $m \geq 0$ tamsayılar verilsin; $N = N(n, m)$, $|\alpha| \leq m$ olacak biçimde, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ çoklu indislerin sayısı olsun. Her bir α çoklu indisi için Ω_α , $\mathbb{R}^n$ nin

farklı kopyasının (örneklerinin) içindeki Ω kopyası (örneği) olsun. Böylece N tane Ω_α bölgeleri ikiye ayrılır. $\Omega^{(m)}$ bu N tane bölgelerin birleşimi, yani $\Omega^{(m)} = \cup_{|\alpha| \leq m} \Omega_\alpha$ olsun. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında bir u fonksiyonu verilsin; U , Ω_α üzerinde $\partial^\alpha u$ ile çakışan $\Omega^{(m)}$ üzerindeki fonksiyon olsun. $P : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega^{(m)})$, $P(u) = U$ dönüşümü bir izometri olur. $W^{m,p}(\Omega)$ tam olduğundan, P izometrisinin W görüntü kümesi $L^p(\Omega^{(m)})$ uzayının bir kapalı altuzayı olur. Buradan $1 \leq p < \infty$ ise W ayrılabilir, $1 < p < \infty$ ise düzgün konveks ve yansılabilir olur. Bundan dolayı aynı sonuç $W^{m,p}(\Omega) = P^{-1}(W)$ için sağlanmalıdır.

Teorem 3.2.3.1. $1 \leq p < \infty$ ise $W^{m,p}(\Omega)$ ayrılabilir; $1 < p < \infty$ ise düzgün konveks ve yansılabilir. $L^2(\Omega)$ uzayındaki iç çarpım

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

olarak tanımlanır. Özelde

$$(f, g)_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (\partial^\alpha f, \partial^\alpha g)$$

iç çarpımıyla $W^{2,p}(\Omega)$ ayrılabilir bir Hilbert uzayı olur.

Şimdi de dualite ve $W^{-m,p'}(\Omega)$ uzaylarını inceleyelim

Bu bölümde Ω , m , p , N sayısı, $L^p(\Omega^{(m)})$ ve W uzayları daha önce yukarıda tanımlanan P operatörü sabit alınacaktır. Ayrıca, aşağıdaki eşitliğin sağ tarafını anlamlı yapmak koşuluyla, her hangi f, g fonksiyonları için

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx$$

olarak tanımlanacaktır. Verilmiş p için p'

$$p' = \begin{cases} \infty, & p = 1 \text{ ise} \\ \frac{p}{p-1}, & 1 < p < \infty \text{ ise} \\ 1, & p = \infty \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

($L^p(\Omega^{(m)})$ nin Duali) $1 \leq p < \infty$ için, her bir $L \in (L^p(\Omega^{(m)}))'$ ye, her $f \in L^p(\Omega^{(m)})$ için

$$L(f) = \int_{\Omega^{(m)}} f(x) g(x) dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega_\alpha} f_\alpha(x) g_\alpha(x) dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle f_\alpha, g_\alpha \rangle$$

olacak biçimde bir tek $g \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$ karşılığı vardır. Burada f_α ve g_α , Ω_α ya göre sırasıyla, f, g nin kısıtlamalarıdır. Üstelik,

$$\|L\|_{(L^p(\Omega^{(m)}))'} = \|g\|_{L^{p'}(\Omega^{(m)})}$$

olur. Böylece $(L^p(\Omega^{(m)}))' \equiv L^{p'}(\Omega^{(m)})$ olur. Bunun sağlanması değişik bir bölge üzerinde tanımlı olmasına rağmen $L^p(\Omega^{(m)})$ nin bir L^p uzayı olmasındandır.

Teorem 3.2.3.2. $(W^{m,p}(\Omega))$ nın Duali $1 \leq p < \infty$ olsun. Her $L \in (W^{m,p}(\Omega))'$ için, g nin Ω ya kısıtlanması g_α ise, bu halde tüm $f \in W^{m,p}(\Omega)$ için

$$L(f) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha f, g_\alpha \rangle \quad (3.2.12)$$

olacak biçimde $g \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$ elemanları vardır. Bunun yanında

$$\|L\|_{(W^{m,p}(\Omega))'} = \inf \|g\|_{L^{p'}(\Omega^{(m)})} = \min \|g\|_{L^{p'}(\Omega^{(m)})} \quad (3.2.13)$$

olur. İnfimum, (3.2.12) sağlayan her $f \in W^{m,p}(\Omega)$ için, her $g \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$ kümesi üzerinde alınmaktadır.

$1 < p < \infty$ ise (3.2.12) ve (3.2.13) sağlayan eleman bir tektir.

$1 \leq p < \infty$ ise $(W^{m,p}(\Omega))'$ nın her L elemanı bir $T \in D'(\Omega)$ distribüsyonunun $W^{m,p}(\Omega)$ genişlemesidir. Bu distribüsyonun nasıl bir form aldığı görülmek istenirse: L , bazı $g \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$ için, (3.2.12) ile verildiğini varsayalım; T ve $T_{g_\alpha} \in D(\Omega)$ üzerinde

$$T = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha T_{g_\alpha}, \quad (3.2.14)$$

$$T_{g_\alpha}(\phi) = \langle \phi, g_\alpha \rangle \quad 0 \leq |\alpha| \leq m$$

olarak tanımlansın.

Her $\phi \in D(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ için $T(\phi) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} T_{g_\alpha}(\partial^\alpha \phi) = L(\phi)$ elde edilir. Böylece L açıkça T nin bir genişlemesi olur. Ayrıca, (3.2.13)

$$\|L\|_{(W^{m,p}(\Omega))'} = \min \left\{ \|g\|_{L^{p'}(\Omega^{(m)})} : L, \text{ (3.2.14) ile } T \text{ yi genişletir.} \right\}$$

olur.

Bu durum, $L \in (W_0^{m,p}(\Omega))'$ için de sağlanır. Çünkü böyle bir fonksiyonel $W^{m,p}(\Omega)$ uzayına norm korunarak genişlemeye sahiptir.

$1 \leq p' \leq \infty$; T , bazı $g \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$ için, (3.2.14) formuna sahip $D'(\Omega)$ nin herhangi bir elemanı olsun. Bu durumda $T, W^{m,p}(\Omega)$ ya sürekli genişlemeye sahip (tek olmaması muhtemel) olur. Ancak $T, W_0^{m,p}(\Omega)$ ya bir tek sürekli genişlemeye sahip olur. Bunu görmek için: $f \in W_0^{m,p}(\Omega)$ için, $\{\phi_n\} \subset W_0^{m,p}(\Omega)$ normunda f ye yakınsayan $C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$ da bir dizi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |T(\phi_k) - T(\phi_n)| &\leq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |T_{g_\alpha}(\partial^\alpha \phi_k - \partial^\alpha \phi_n)| \\ &\leq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha(\phi_k - \phi_n)\|_p \|g_\alpha\|_{p'} \\ &\leq \|(\phi_k - \phi_n)\|_{m,p} \|g\|_{L^{p'}(\Omega^{(m)})} \rightarrow 0 \quad k, n \rightarrow \infty \text{ için} \end{aligned}$$

elde edilir ki buradan $\{T(\phi_n)\}$, $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisi olur. Böylece $L(f)$ ile gösterilebilecek bir limite yakınsar. $\{\psi_n\} \subset D(\Omega)$ ve $\|\psi_n - f\|_{m,p} \rightarrow 0$ de olsa bu durumda, $n \rightarrow \infty$ iken, $T(\phi_n) - T(\psi_n)$ olur. Bu L fonksiyoneli lineerdir ve $(W_0^{m,p}(\Omega))'$ ya aittir. $f = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n$ yukarıdaki gibi ise, bu durumda

$$|L(f)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |T(\phi_n)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|_{m,p} \|g\|_{L^{p'}(\Omega^{(m)})} = \|f\|_{m,p} \|g\|_{L^{p'}(\Omega^{(m)})}$$

olur.

Buradan aşağıdaki teorem çıkar.

Teorem 3.2.3.3. ($W_0^{m,p}(\Omega)$ nin Normlu Duali) Eğer $1 \leq p < \infty$; p', p ye eşlenik üs, $m \geq 1$ ise $(W_0^{m,p}(\Omega))'$ dual uzayı $T \in D'(\Omega)$ distribüsyonlarından

(3.2.14) sağlayan ve

$$\|T\| = \min \left\{ \|g\|_{L^{p'}(\Omega^{(m)})} : g, \text{ (3.2.14) sağlar} \right\}$$

normuna sahip $W^{-m,p'}(\Omega)$ Banach uzayına izometrik olarak izomorfiktir.

Bu uzayın tamlığı izometrik izomorfizmin bir sonucudur.

Ayrıca $1 < p < \infty$ ise $W^{-m,p'}(\Omega)$ ayrılabilir ve yansımalıdır.

$W_0^{m,p}(\Omega); W^{m,p}(\Omega)$ nın bir öz alt kümesi olduğunda, $W^{m,p}(\Omega)$ üzerindeki sürekli lineer fonksiyoneller onların $C_0(\Omega)$ uzayına kısıtlanmasıyla tam olarak elde edilmeliler. Böylece (3.2.14) ile verilen T distribüsyonları ile belirlenemezler.

($L^{p'}(\Omega)$ üzerindeki $-m, p'$ normu) $1 < p < \infty$ ise $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayının dualini karakterize etmenin başka yolu vardır. Her $g \in L^{p'}(\Omega)$ elemanı, $L_g(f) = \langle f, g \rangle$ aracılığıyla, $(W_0^{m,p}(\Omega))'$ nın bir L_g elemanını belirler. Gerçekten

$$|L_g(f)| = |\langle f, g \rangle| \leq \|g\|_{p'} \|f\|_p \leq \|g\|_{p'} \|f\|_{m,p}$$

olarak yazılabilir.

$g \in L^{p'}(\Omega)$ uzayının $(-m, p')$ normunu, L_g dönüşümünün normu olarak tanımlarız. Daha açıkça

$$\|g\|_{-m,p} = \|L_g\|_{(W_0^{m,p}(\Omega))'} = \sup_{f \in W_0^{m,p}(\Omega), \|f\|_{m,p} \leq 1} |\langle f, g \rangle|$$

şeklinde dir.

$\|g\|_{-m,p} \leq \|g\|_{p'}$ olur, herhangi $f \in W_0^{m,p}(\Omega)$ ve $g \in L^{p'}(\Omega)$ için

$$|\langle f, g \rangle| = \|f\|_{m,p} \left| \left\langle \frac{f}{\|f\|_{m,p}}, g \right\rangle \right| \leq \|f\|_{m,p} \|g\|_{-m,p} \quad (3.2.15)$$

elde edilir. Bu da Hölder eşitsizliğinin bir genelleştirilmesidir.

$(W_0^{m,p}(\Omega))'$ nın bir alt kümesi $V = \{L_g : g \in L^{p'}(\Omega)\}$ olsun. V nin $(W_0^{m,p}(\Omega))'$ da yoğun olduğu gösterelim. Bunu yapmak için $F \in (W_0^{m,p}(\Omega))''$ ise, her $L_g \in V$ için, $F(L_g) = 0$ sağladığında bu durumda $(W_0^{m,p}(\Omega))'$ da $F = 0$ olduğunu göstermek

yeterli olacaktır. Fakat $W_0^{m,p}(\Omega)$ yansımali olduğundan, her $g \in L^{p'}(\Omega)$ için $\langle f, g \rangle = L_g(f) = F(L_g) = 0$ olacak biçimde $F \in (W_0^{m,p}(\Omega))''$ karşılık $f \in W_0^{m,p}(\Omega)$ vardır. Öte yandan f, Ω bölgesinin hemen hemen her yerde sıfır olmalıdır. Böylece $W_0^{m,p}(\Omega)$ da $f = 0$ ve $(W_0^{m,p}(\Omega))''$ da $F = 0$ olur.

$H^{-m,p'}(\Omega), \|\cdot\|_{-m,p'}$ normuna göre $L^{p'}(\Omega)$ nin tamlanışını gösterebiliriz. Bu durumda

$$H^{-m,p'}(\Omega) \equiv (W_0^{m,p}(\Omega))' \equiv W^{-m,p'}(\Omega)$$

olur.

Özelde, her $g \in H^{-m,p'}(\Omega)$ karşılık; her $\phi \in D(\Omega)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_{-m,p'} = 0$ sağlayan her $\{g_n\} \subset L^{p'}(\Omega)$ dizisi için, $T_g(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \phi, g_n \rangle$

olacak biçimde bir $T_g \in W^{-m,p'}(\Omega)$ distribüsyonu vardır. Tersine, herhangi $T \in W^{-m,p'}(\Omega)$ bazı g ler için $T = T_g$ sağlar. Ayrıca (3.2.15) ten $|T_g(\phi)| \leq \|\phi\|_{m,p} \|g\|_{-m,p'}$ olur.

Yukarıdakine benzer bir düşünce, $1 < p < \infty$ için, $(W^{m,p}(\Omega))'$ dual uzayını

$$\|g\|_{-m,p'}^* = \sup_{f \in W^{m,p}(\Omega), \|f\|_{m,p} \leq 1} |\langle f, g \rangle|$$

normuna göre $L^{p'}(\Omega)$ nin tamlanması olarak karakterize edilebileceğini gösterir.

Şimdi de Ω bölgesi üzerindeki düzgün fonksiyonlarla yaklaşıma bakalım.

Teorem 3.2.3.4. $1 \leq p < \infty$ ise bu durumda

$$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$$

olur.

Örnek 3.2.3.5. Teorem 3.2.3.4. $p = \infty$ değerine genişletilemez. Gerçekten $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$, $f(x) = |x|$ ise bu durumda $x \neq 0$ için $f'(x) = \frac{x}{|x|}$, böylece $f \in W^{1,\infty}(\Omega)$ olur. Ancak $f \notin H^{1,\infty}(\Omega)$ olur. $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ ise $\|\phi' - f'\| < \epsilon$ olacak biçimde bir $\phi \in C^1(\Omega)$ fonksiyonu bulunamaz.

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki düzgün fonksiyonlarla yaklaşımı inceliyelim.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayının bir elemanının her zaman Ω üzerindeki düzgün fonksiyonlarla yaklaşılabileceği daha önceden verilmişti. Şimdi, kendisi ve tüm mertebeleri sınırlı türevlere sahip veya en azından, tüm mertebeleri az m yide içerene kadar olanların tümü ile yaklaşım yapılabilir mi, durumuna bakalım. Yani, herhangi $k \geq m$ değerleri için, $C^k(\overline{\Omega})$ uzayının $W^{m,p}(\Omega)$ da yoğun olup olmayacağına bakalım.

Örnek 3.2.3.6. $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1, 0 < y < 1\}$ olsun. Bu durumda Ω üzerinde

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{ ise} \\ 0, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu $W^{1,p}(\Omega)$ uzayına ait olur. Bununla birlikte, $\epsilon > 0$ yeteri kadar küçük ise $\|f - \phi\|_{1,p,\Omega} < \epsilon$ olacak biçimde $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$ yoktur. Bunu görmek için, böyle bir ϕ var olduğunu varsayalım. $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}$

ve

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

ise bu durumda $\overline{\Omega} = L \cup R$ olur. $\|\phi\|_{1,L} \leq \|\phi\|_{p,L} < \epsilon$ elde edilir. Benzer biçimde $\|1 - \phi\|_{1,R} < \epsilon$ olur, buradan $\|\phi\|_{1,R} > 1 - \epsilon$ elde edilir. Eğer

$$\Phi(x) = \int_0^1 \phi(x, y) dy$$

ise bu durumda $\Phi(a) < \epsilon$ ve $\Phi(b) > 1 - \epsilon$ olacak biçimde, $-1 \leq a < 0$ ve $0 < b \leq 1$, olan a, b sayıları vardır. $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ ise, bu durumda

$$1 - 2\epsilon < \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \phi'(x) dx \leq \int_{\overline{\Omega}} |\partial_x \phi(x, y)| dx dy$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p'}} \|\partial_x \phi\|_{p,\Omega} < 2^{\frac{1}{p'}} \epsilon$$

olur. Böylece $1 < \epsilon \left(2 + 2^{\frac{1}{p'}}\right)$ durumu küçük ϵ için mümkün olmaz.

Bu örnekteki bölge ile ilgili zorluk kenarının iki tarafındaki parçalarına da uzanmasıdır. Yani, $x = 0, 0 \leq y \leq 1$ doğru parçasına uzanmasıdır. Şimdi $1 \leq p < \infty$ koşuluyla, yukarıdaki durumun önlenmesi ve herhangi k, m için $C^k(\overline{\Omega})$ nın $W^{m,p}(\Omega)$ de yoğunluğunun garantili olmasını sağlayan bir koşulu bir Ω bölgesi üzerinde formüle

edilecektir.

(Doğru Parçası Koşulu) Her $x \in \text{bdry}\Omega$ bir U_x komşuluğuna ve sıfır olmayan y_x vektörüne sahip ve $z \in \overline{\Omega} \cap U_x$ iken bu durumda, $0 < t < 1$ için, $z + ty_x \in \Omega$ oluyorsa bu Ω bölgesinin doğru parçası koşulunu sağladığı söylenir.

Teorem 3.2.3.7. $1 \leq p < \infty$ için Ω doğru parçası koşulunu sağlarsa, bu durumda $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayındaki fonksiyonların Ω ya kısıtlanmış olanların kümesi $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında yoğun olur.

Sonuç 3.2.3.8. $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ olur.

$C_0^\infty(\Omega)$ uzayındaki fonksiyonlarla yaklaşıma bakalım.

Yukarıdaki sonuç 3.2.3.8. şöyle bir soruyu akla getiriyor: Hangi Ω bölgeleri için $W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$ olur. Yani, ne zaman $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında yoğun olur. Bu soruya kısmi bir cevap $W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$ ye ait distribüsyonların doğasının terimleriyle formüle edilebilir. Bunun için bu kısım boyunca $1 < p < \infty$ şeklinde alınacaktır.

$((m, p') - \text{Kutupsal kümeler})$ $F, \mathbb{R}^n$ nin bir kapalı alt kümesi olsun. Bir $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ distributionu, her $\phi \in D(\mathbb{R}^n - F)$ için, $T(\phi) = 0$ oluyorsa F ($\text{spt}(T) \subset F$) de desteğe sahiptir denir. F de desteğe sahip $T \in W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$ distributionu sadece $T = 0$ distribution ise F kapalı kümesinin $(m, p') - \text{polar}$ olduğu söylenir. F pozitif ölçüme sahip ise $(m, p') - \text{polar}$ olamaz. Çünkü F nin pozitif ölçümlü herhangi kompakt alt kümesinin karakteristik fonksiyonu $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ ye ait olur, buradan $W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$ nin de olur.

Teorem 3.2.3.9. $m \geq 1$ olsun. Bu halde

- i) $W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$ ise bu durumda Ω^c $(m, p') - \text{kutupsal}$ dır.
- ii) Ω^c hem $(1, p) - \text{kutupsal}$ ve hem de $(m, p') - \text{kutupsal}$ ise bu durumda $W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$ olur.

Teorem 3.2.3.10. $m \geq 1$ ve $p \geq 2$ olsun. Bu durumda $W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$ olması için gerek ve yeter şart Ω^c $(m, p') - \text{kutupsal}$ olmasıdır.

Şimdi de koordinant dönüşümlerini verelim.

$\Omega, G \subset \mathbb{R}^n$ ve $\Phi : \Omega \rightarrow G$ dönüşümü bire-bir ve örten ve $\Psi = \Phi^{-1}$ tersine sahip olsun.

$$y = \Phi(x) \text{ ve } x = \Psi(y)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \phi_1(x_1, \dots, x_n), & x_1 &= \psi_1(y_1, \dots, y_n) \\ y_2 &= \phi_2(x_1, \dots, x_n), & x_2 &= \psi_2(y_1, \dots, y_n) \\ &\cdot & & \\ &\cdot & & \\ &\cdot & & \\ y_n &= \phi_n(x_1, \dots, x_n), & x_n &= \psi_n(y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

formunda yazıldığında, $\phi_1, \dots, \phi_n \in C^m(\overline{\Omega})$ ve $\psi_1, \dots, \psi_n \in \psi C^m(\overline{G})$ olur. Bu halde Φ dönüşümüne m - düzgün denir.

f, Ω üzerinde ölçülebilir ise, G üzerinde bir ölçülebilir Af fonksiyonu

$$Af(y) = f(\Psi(y)) \quad (3.2.16)$$

olarak tanımlayalım

$\Phi, 1$ - düzgün varsayıldığında, her $x \in \Omega$ için,

$$c \leq |\det \Phi'(x)| \leq C$$

olacak biçimde $0 < c < C$ sabitleri vardır. Burada $\Phi', \partial(y_1, \dots, y_n) / \partial(y_1, \dots, y_n)$ jakobyen matrisini göstermektedir. Düzgün fonksiyonlar L^p uzaylarında yoğun olduğundan (3.2.16) ile tanımlanan A operatörü $L^p(\Omega)$ uzayını sınırlı olarak $L^p(G)$ dönüştürür ve sınırlı bir terse sahip olur. $1 \leq p < \infty$ için,

$$c^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p,\Omega} = \|Af\|_{p,G} = C^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p,\Omega}$$

özelligi sağlanır.

Benzer bir durum Sobolev uzayları içinde vardır.

Teorem 3.2.3.11. $m \geq 1$; Φ , m – düzgün olsun. $Af(y) = f(\Psi(y))$ olarak tanımlanan A operatörü $W^{m,p}(\Omega)$ uzayını sınırlı olarak $W^{m,p}(G)$ uzayına dönüştürür ve sınırlı bir terse sahip olur.

Sobolev gömülme teoremini vermeden önce aşağıdaki koniyi verelim.

$v, \mathbb{R}^n$ de sıfırdan farklı bir vektör ve her $x \neq 0$ için $\angle(x, v)$, x ve v yer vektörleri arasındaki açı olsun. Verilen böyle $v, \rho > 0$, ve $0 < \kappa \leq \pi$

koşulunu sağlayan κ için

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = 0 \text{ veya } 0 < |x| \leq \rho, \angle(x, v) \leq \frac{\kappa}{2} \right\}$$

kümesine, köşesi orjinde olan ρ yükseklikli, v yönlü, κ açıklıklı sonlu koni denir. Dikkat edilirse $x + C = \{x + y : y \in C\}$ köşesi x te olan bir sonlu koni olur.

Eğer her bir $x \in \Omega$, C konisine eş ve Ω içinde yer alan bir C_x sonlu konisinin köşesi olacak biçimde bir C konisi varsa bu halde Ω bölgesinin koni şartını sağladığı söylenir. Buradan C_x , C den paralel ötelemelerle elde edilmek zorunda değildir. Basit katı(rigid) hareketlerle elde edilmesi yetiyor.

Aşağıdaki koşulları sağlayan pozitif δ ve M sayıları, $\text{bdry}\Omega$ için bir lokal sonlu açık $\{U_j\}$ örtü, her bir j için $(n-1)$ değişkenli bir reel değerli f_j fonksiyonu varsa Ω nın güçlü lokal Lipschitz şartını sağladığını söyleriz.

i) Bir sonlu R için U_j kümelerinin her $R+1$ koleksiyonu boş kesişime sahiptir.

ii) $|x - y| < \delta$ olacak biçimde her $x, y \in \Omega_\delta$ nokta çifti için

$$x, y \in V_j \equiv \{x \in U_j : \text{dist}(x, \text{bdry}U_j) > \delta\}$$

olacak biçimde j vardır. $(\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \text{bdry}\Omega) < \delta\})$.

iii) Her f_j fonksiyonu M sabitiyle bir Lipschitz şartını sağlar: yani, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ ve $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ de ise bu durumda

$$|f(\xi) - f(\rho)| \leq M |\xi - \rho|$$

olur.

iv) Bir kartezyen kordinat sistemi için $(\zeta_{j,1}, \dots, \zeta_{j,n})$, U_j dedir. $\Omega \cap U_j$

$$\zeta_{j,n} < f_j(\zeta_{j,1}, \dots, \zeta_{j,n-1})$$

eşitsizliği ile temsil edilir.

Ω sınırlı ise, yukarıdaki karmaşık koşullar Ω bölgesinin bir lokal Lipschitz sınırına sahip olma basit koşuluna indirgenir. Yani, Ω sınırının her bir x noktası bir U_x komşuluğuna sahip bunun $\text{bdry}\Omega$ ile kesişimi bir Lipschitz sürekli fonksiyonun grafiğidir.

Teorem 3.2.3.12. (Sobolev Gömülme Teoremi) Ω , $\mathbb{R}^n$ de bir bölge $1 \leq k \leq n$ için; Ω_k , Ω nın $\mathbb{R}^n$ deki k boyutlu bir düzlemin kesişmesi ve $j \geq 0$, $m \geq 1$, $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu halde aşağıdaki kısımlar ve durumlar söz konusudur.

I. Kısım Ω bölgesi koni koşulunu sağlasın.

A Durumu $mp > n$ ya da $m = n$ ve $p = 1$ ise, bu durumda

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega) \quad (3.2.17)$$

olur,

Ayrıca, $1 \leq k \leq n$ ise bu durumda $p \leq q \leq \infty$ için,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k) \quad (3.2.18)$$

olur, ve özelde, $p \leq q \leq \infty$ için,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

özelliği sağlanır.

B Durumu $1 \leq k \leq n$ ve $mp = n$ ise bu durumda $p \leq q \leq \infty$ için,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k) \quad (3.2.19)$$

ve özelde, $p \leq q \leq \infty$ için,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

olur.

C Durumu $mp < n$ ise, $n - mp < k \leq n$ ya da $p = 1$ ve $n - m \leq k \leq n$ özelliklerinde biri sağlanırsa bu durumda, $p \leq q \leq p^* = kp/(n - mp)$ için,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k) \quad (3.2.20)$$

olur.

Özelde, $p \leq q \leq p^* = kp/(n - mp)$ için,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad (3.2.21)$$

olur.

II. Kısım Ω nın güçlü lokal Lipschitz koşullunu sağlasın. Bu durumda (3.2.17) gömülmesinin $C_B^j(\Omega)$ hedef uzayı daha küçük olan $C^j(\overline{\Omega})$ uzayı ile yer değiştirilebilir ve bu gömülme daha ileri olarak

$mp > n > (m - 1)p$ ise bu durumda, $0 < \lambda \leq m - (n/p)$ için,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}) \quad (3.2.22)$$

ve $n = (m - 1)p$ ise bu durumda, $0 < \lambda < 1$ için,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}) \quad (3.2.23)$$

şeklinde hasaslaştırılabilir.

Ayrıca, $n = m - 1$ ve $p = 1$ ise, bu durumda $\lambda = 1$ için de (3.2.23) sağlanır.

III. Kısım W -uzayı W_0 uzayı ile yer değiştirilirse, keyfi Ω bölgeleri için, **A** ve **B** kısımlarındaki tüm gömülmeler geçerli olur.

Şimdi de Sobolev eşitsizliği için bazı ön bilgileri açıklayalım.

$1 \leq p < \infty$, j tam sayı $0 \leq j \leq m$, için $W^{m,p}(\Omega)$ da $|\cdot|_{j,p}$ fonksiyoneli

$$|\cdot|_{j,p} = |\cdot|_{j,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=j} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

olarak tanımlayalım.

Açık olarak $|f|_{0,p} = \|f\|_{0,p} = \|f\|_p$, $L^p(\Omega)$ daki norm ve

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{j=0}^m |f|_{j,p}^p \right)^{1/p}$$

olur.

$j \geq 1$ ise $|\cdot|_{j,p}$ bir seminorm olur. $|\cdot|_{m,p}$; daha sonra açıklanacak bazı koşullar altında (Ω bölgesinin sınırlı olması gibi) $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayında bir normdur ve $\|f\|_{m,p}$ normuna da denktir.

$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ Sobolev gömülme teoremi, m, p, n bağlı bazı sonlu q değerleri ve her $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için,

$$\|\phi\|_q \leq K \|\phi\|_{m,p}$$

eşitsizliğinin var olduğunu söyler.

$\|\cdot\|_{m,p}$ yerine $|\cdot|_{m,p}$ alındığında bu eşitsizliğin sağlayıp sağlamadığı önemlidir. Yani, her $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^q dx \leq K^q \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^{\alpha} \phi(x)|^p dx \right)^{q/p} ?$$

olacak biçimde $K < \infty$ ve $q \geq 1$ sabitleri var mıdır? sorusu önem taşır. Öyle olsaydı, verilmiş $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için, eşitsizlik tüm $\phi_t = \phi(tx)$, $0 < t < \infty$ için de sağlanmalıdır. Çünkü bu fonksiyonlar da $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına aittir. $|\alpha| = m$ ise, $\|\phi_t\|_q = t^{-n/q} \|\phi\|_q$ ve $\|\partial^{\alpha} \phi_t\|_p = t^{m-(n/p)} \|\partial^{\alpha} \phi\|_p$ olacağından

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^q dx \leq K^q t^{n+mq-(nq/p)} \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^{\alpha} \phi(x)|^p dx \right)^{q/p}$$

elde edilmelidir. Bu, sağdaki t nin üsü sıfır olmadıkça, tüm $t > 0$ değerleri için mümkün değildir. Yani, $q = p^* = np/(n - mp)$ olmadıkça bu eşitsizlik sağlanmaz.

Teorem 3.2.3.13. (Sobolev Eşitsizliği) $mp < n$ olduğunda, her $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için,

$$\|\phi\|_{q, \mathbb{R}^n} \leq K \|\phi\|_{m, p, \mathbb{R}^n}$$

olacak biçimde K sabitinin var olması için gerek ve yeter şart $q = p^* = np/(n - mp)$ olmasıdır.

Genişletme ile neyi kast ettiğimizi önce açıklayalım ondan sonra ilgili teoremleri ifade edelim.

$\Omega, \mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. Verilmiş m ve p için, $E : W^{m, p}(\Omega) \rightarrow W^{m, p}(\mathbb{R}^n)$ lineer operatörü, eğer her $u \in W^{m, p}(\Omega)$ için

$$i) \Omega \text{ bölgesinin h.h.h. } Eu(x) = u(x)$$

ve

$$ii) \|Eu\|_{m, p, \mathbb{R}^n} \leq K \|u\|_{m, p, \Omega}$$

sağlayacak şekilde bir $K = K(m, p)$ sabiti varsa, buna E lineer operatörünün Ω bölgesi için bir basit (m, p) genişletme operatörü adı verilir.

Eğer $E; \Omega$ nın hemen hemen her yerinde tanımlanmış fonksiyonları $\mathbb{R}^n$ de hemen hemen her yerde tanımlanmış fonksiyonlara dönüştürüyorsa ve yine, $1 \leq p < \infty$ her bir p için; $0 \leq k \leq m$, her k için, E nin $W^{m, p}(\Omega)$ ya kısıtlanması Ω için bir basit (k, p) genişletme operatörü oluyorsa E ye Ω için bir güçlü m - genişletme operatörü denir.

Son olarak her m için, $E; \Omega$ için bir güçlü m - genişletme operatörü ise E ye Ω için bir tam genişletme operatörü denir. Böyle bir tam genişletme operatörü zorunlu olarak $C^m(\overline{\Omega})$ deki fonksiyonları genişleterek $C^m(\mathbb{R}^n)$ uzayı içine düşürür.

Ω için bir basit (m, p) genişletme operatörünün varlığı bile $W^{m, p}(\mathbb{R}^n)$ nin sahip olduğu bir çok özelliğin $W^{m, p}(\Omega)$ ya da geçeceğini garanti eder. Örneğin bir $W^{m, p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ gömülmesinin sağladığı bilinirse,

$$\|u\|_{q,\mathbb{R}^n} \leq K_1 \|u\|_{m,p,\mathbb{R}^n}$$

olacağından, $\partial^\alpha (Eu)(x) = \sum_{|\gamma| \leq |\alpha|} E_{\alpha\gamma} \partial^\gamma u(x) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömülmesi de sağlanmalıdır. Kabul edelimki $u \in W^{m,p}(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$\|u\|_{0,q,\Omega} \leq \|Eu\|_{0,q,\mathbb{R}^n} \leq K_1 \|Eu\|_{m,p,\mathbb{R}^n} \leq K_1 K \|u\|_{m,p,\Omega}$$

olur.

Teorem 3.2.3.14. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de düzgün C^m regüler koşulunu sağlayan bir sınırlı bölge olsun. Bu durumda Ω için bir güçlü m -genişletme operatörü E vardır. Ayrıca $\alpha, \gamma; |\gamma| \leq |\alpha| \leq |m|$ olan çoklu indisler ise, bu halde $u \in W^{|\alpha|,p}(\Omega)$ ise

$$\partial^\alpha (Eu)(x) = \sum_{|\gamma| \leq |\alpha|} E_{\alpha\gamma} \partial^\gamma u(x)$$

olacak biçimde $1 \leq j \leq m - |\alpha|, 1 \leq p < \infty$ için içine bir sürekli $E_{\alpha\gamma} : W^{j,p}(\Omega) \rightarrow W^{j,p}(\mathbb{R}^n)$ operatörü vardır.

Teorem 3.2.3.15. Ω doğru parçası koşulu özelliğini sağlasın. Bu durumda Ω üzerindeki bir u fonksiyonunun $W_0^{m,p}(\Omega)$ ait olması için gerek ve yeter koşul, u nun sıfır genişletmesi olan $\tilde{u}$ nun $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ ait olmasıdır.

$(n-1)$ boyutlu iki paralel düzlem arasında kalan $\mathbb{R}^n$ deki bir bölge sonlu genişlikli bir bölge olur.

Teorem 3.2.3.16. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesi sonlu genişlikli ise bu durumda her $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ için Poincare eşitsizliği olarak bilinen

$$\|\phi\|_{0,p,\Omega} \leq K \|\phi\|_{1,p,\Omega}$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca Ω bölgesi sonlu genişlikli ise $|\cdot|_{m,p,\Omega}, W_0^{m,p}(\Omega)$ da bir norm olur. Bu norm standart $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ normuna da denk olur.

3.3. Değişken Üslü Lebesgue Uzayları

Bu bölüm boyunca Ω bölgesi $\mathbb{R}^n$ nin Lebesgue ölçülebilir bir alt kümesi olarak alınacaktır.

$P(\Omega), p(\cdot) : \Omega \rightarrow [1, \infty]$ şeklindeki tüm ölçülebilir fonksiyonları gösterebiliriz. Bu durumda $P(\Omega)$ elemanlarına üs fonksiyonu adı verilir.

$p(\cdot) \in P(\Omega)$ ve $E \subset \Omega$ için,

$$p_- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in E} p(x), \quad p_+ = \operatorname{ess\,sup}_{x \in E} p(x)$$

olarak tanımlanır.

Ω bölgesinin üç standart alt kümesi

$$\begin{aligned} \Omega_\infty^{p(\cdot)} &= \{x \in \Omega : p(x) = \infty\} \\ \Omega_1^{p(\cdot)} &= \{x \in \Omega : p(x) = 1\} \\ \Omega_*^{p(\cdot)} &= \{x \in \Omega : 1 < p(x) < \infty\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

$p(\cdot)$ için, $p'(\cdot)$ eşlenik üs fonksiyonu, $x \in \Omega$ için,

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.3.1. $\Omega, r(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ verilsin. Her $x, y \in \Omega, |x - y| < \frac{1}{2}$ için

$$|r(x) - r(y)| \leq \frac{C_0}{-\ln(|x - y|)}$$

olacak biçimde bir C_0 sabiti varsa $r(\cdot)$ fonksiyonuna lokal log-Hölder süreklidir denir ve bu durum $r(\cdot) \in LH_0(\Omega)$ ile gösterilir.

Her $x \in \Omega$ için,

$$|r(x) - r_\infty| \leq \frac{C_\infty}{\ln(e + |x|)}$$

olacak biçimde C_∞, r_∞ sabitleri varsa, bu halde $r(\cdot)$ fonksiyonuna sonsuzda log-Hölder süreklidir denir ve bu $r(\cdot) \in LH_\infty(\Omega)$ şeklinde gösterilir.

$r(\cdot)$ fonksiyonu lokal ve sonsuzda log-Hölder sürekli ise bu durum $r(\cdot) \in LH(\Omega)$ ile gösterilir (Diening ve ark. 2011), (Cruz-Uribe ve Fiorenza 2013).

Teorem 3.3.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $p(\cdot) \in P(\Omega)$, $p(\cdot) \in LH(\Omega)$ olarak verilsin. Bu durumda

i) $\tilde{p} \in LH$

ii) $x \in \Omega$ için $\tilde{p}(x) = p(x)$

iii) $\tilde{p}_- = p_-$, $\tilde{p}_+ = p_+$

olacak biçimde bir $\tilde{p}(x) \in P(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu vardır (Cruz-Uribe ve Fiorenza 2013).

Tanım 3.3.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $p(\cdot) \in P(\Omega)$ ve Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonu verildiğinde, $p(\cdot)$ karşılık gelen modular fonksiyoneli

$$\rho_{p(\cdot), \Omega}(f) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \|f\|_{L^\infty(\Omega_\infty)}$$

şeklinde tanımlanır. Belirsizliğin olmadığı durumlarda kısaca bu fonksiyonel $\rho_{p(\cdot)}(f)$ veya $\rho(f)$ şeklinde yazılır.

Modular fonksiyonelin temel özellikleri aşağıdaki özellikleri sağlar.

Teorem 3.3.4.

i) Her f için, $\rho(f) \geq 0$, $\rho(|f|) = \rho(f)$

ii) $\rho(f) = 0 \iff$ h.h.h. $x \in \Omega$ için $f(x) = 0$

iii) $\rho(f) < \infty$ ise bu durumda h.h.h. $x \in \Omega$ için $f(x) < \infty$

iv) ρ konvektir. Yani $\alpha, \beta \geq 0$; $\alpha + \beta = 1$ iken

$$\rho(\alpha f + \beta g) \leq \alpha \rho(f) + \beta \rho(g)$$

olur.

v) ρ sırayı korur. Yani h.h.h $|f(x)| \geq |g(x)|$ ise, bu halde $\rho(f) \geq \rho(g)$ olur.

vi) ρ süreklilik özelliğine sahiptir. Başka bir deyişle, bazı $\Lambda > 0$ için $\rho(f/\Lambda) < \infty$ ise bu durumda $\lambda \rightarrow \rho(f/\lambda)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli ve azalandır. Ayrıca, $\lambda \rightarrow \infty$ için $\rho(f/\lambda) \rightarrow 0$ olur (Kovacik ve Rákosník 1991), (Fan ve Zhao 2001), (Diening ve ark. 2011), (Cruz-Uribe ve Fiorenza 2013).

Modular fonksiyoneli üçgen eşitsizliğini sağlamaz. Yani $\rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g)$ özelliği her zaman geçerli olmaz. Ancak bazen yararlı olan şöyle bir durum vardır. $1 \leq p < \infty$, $a, b \geq 0$ için $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ olur. H.h.h. $x \in \Omega \setminus \Omega_\infty$ için,

$$|f(x) + g(x)|^{p(x)} \leq 2^{p(x)-1} (|f(x)|^{p(x)} + |g(x)|^{p(x)})$$

olur. $p_+ < \infty$ olması durumunda

$$\rho(f+g) \leq 2^{p_+-1} (\rho(f) + \rho(g))$$

şeklindeki modular üçgen eşitsizliği sağlanır.

Tanım 3.3.5. Ω ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı, en az bir $\lambda > 0$ için $\rho(f/\lambda) < \infty$ koşulunu sağlayan tüm Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonları kümesidir.

$$f \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \iff \rho(f) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \|f\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$$

durumu $p_- = \infty$ ya da $p_+(\Omega \setminus \Omega_\infty) < \infty$ olmasına denktir (Kovacik ve Rákosník 1991).

Bu uzayda, Luxemburg normu olarak bilinen, norm

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot), \Omega}(f/\lambda) \leq 1\}$$

olarak verilir. Ω bölgesi üzerinde belirsizlik olmadığında genellikle $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ yerine $\|f\|_{p(\cdot)}$ yazılır. $p(\cdot) = p$ sabit olduğunda bu norm klasik Lebesgue normu ile çakışır (Kovacik ve Rákosník 1991).

Teorem 3.3.6. Ω ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$ ve $|\Omega_\infty| = 0$ olsun. Eğer $\|f\|_{p(\cdot)} > 1$ ise bu durumda

$$\rho(f)^{1/p_+} \leq \|f\|_{p(\cdot)} \leq \rho(f)^{1/p_-}$$

olur. $0 < \|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ olması durumunda

$$\rho(f)^{1/p_-} \leq \|f\|_{p(\cdot)} \leq \rho(f)^{1/p_+}$$

olur (Fan ve Zhao 2001).

Teorem 3.3.7. Ω ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. Eğer $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ ise bu durumda $fg \in L^1(\Omega)$ ve

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq k \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)}$$

şeklinde Hölder eşitsizliği sağlanır (Kovacik ve Rákosník 1991).

Daha genel olarak,

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)}$$

sağlandığında, $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$, $g \in L^{r(\cdot)}(\Omega)$ ise $fg \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olur ve

$$\|fg\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{q(\cdot)} \|g\|_{r(\cdot)}$$

olacak biçimde bir K sabiti vardır.

Tanım 3.3.8. Ω ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$ ve bir ölçülebilir f fonksiyonu için

$$\|f\|'_{p(\cdot)} = \sup \int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx$$

olarak tanımlansın. Burada supremum tüm $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ ve $\|g\|_{p'(\cdot)} \leq 1$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar üzerinde alınmaktadır.

$M^{p(\cdot)}(\Omega)$, $\|f\|'_{p(\cdot)} < \infty$ koşulunu sağlayan tüm ölçülebilir fonksiyonlar kümesini gösterebilir. $M^{p(\cdot)}(\Omega)$ kümesi, $\|\cdot\|'_{p(\cdot)}$ normuna göre bir normlu vektör uzayı olur.

$f \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \iff f \in M^{p(\cdot)}(\Omega)$ önemli durumu var olur. Yani bu iki uzay aynı olur.

$$k_1 \|f\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|'_{p(\cdot)} \leq k_2 \|f\|_{p(\cdot)}$$

bağıntısıyla bu uzayların normları birbirine denk olur (Cruz-Urbe ve Fiorenza 2013).

Teorem 3.3.9. Ω ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$ ve $f : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ h.h.h. $y \in \Omega$ için $f(\cdot, y) \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olacak biçimde bir ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left\| \int_{\Omega} f(\cdot, y) dy \right\|_{p(\cdot)} \leq c \int_{\Omega} \|f(\cdot, y)\|_{p(\cdot)} dy$$

olur (Cruz-Urbe ve Fiorenza 2013).

Teorem 3.3.10. Ω bölgesi ve $p(\cdot), q(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. Bu durumda $L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$, her $f \in L^{q(\cdot)}(\Omega)$ için $\|f\|_{p(\cdot)} \leq K \|f\|_{q(\cdot)}$ olacak biçimde bir $K > 1$ var olması için gerek ve yeter koşul:

i) h.h.h. $x \in \Omega$ için $p(x) \leq q(x)$

ve

ii) $D = \{x \in \Omega : p(x) < q(x)\}, \frac{1}{p(x)} = \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)}$ olmak üzere,

$$\int_D \lambda^{-r(x)} dx < \infty$$

olacak biçimde $\lambda > 1$ vardır (Diening ve ark. 2011), (Cruz-Urbe ve Fiorenza 2013).

Sonuç 3.3.11. Ω ve $p(\cdot), q(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. $|\Omega \setminus \Omega_{\infty}^{p(\cdot)}| < \infty$ olsun. Bu durumda $L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olması için gerek ve yeter koşul h.h.h. $p(x) \leq q(x)$ olmasıdır. Ayrıca bu durumda

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq (1 + |\Omega \setminus \Omega_{\infty}^{p(\cdot)}|) \|f\|_{q(\cdot)}$$

özellliği sağlanır.

Şimdi de uygulamada faydalı bir gömülmeyi de verelim. $1 \leq p < q < \infty$

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) + L^{q(\cdot)}(\Omega) = \{f = g + h : g \in L^{p(\cdot)}(\Omega), h \in L^{q(\cdot)}(\Omega)\}$$

olarak tanımlanan bu uzay

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)+L^{q(\cdot)}(\Omega)} = \inf_{f=g+h} \left\{ \|g\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} + \|h\|_{L^{q(\cdot)}(\Omega)} \right\}$$

normuyla bir Banach uzayı olur (Cruz-Urbe ve Fiorenza 2013).

Teorem 3.3.12. Ω ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. Bu durumda

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_+}(\Omega) + L^{p_-}(\Omega)$$

ve

$$\|f\|_{L^{p_+}(\Omega)+L^{p_-}(\Omega)} \leq 2 \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır (Cruz-Urbe ve Fiorenza 2013).

$\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve bazı $\beta > 0$ için, $k \rightarrow \infty$ iken $\rho(\beta(f - f_k)) \rightarrow 0$ oluyorsa, buna modular yakınsaklık denir. Her $\beta > 0$ için, $k \rightarrow \infty$ iken $\rho(\beta(f - f_k)) \rightarrow 0$ oluyorsa bu yakınsaklık norm yakınsaklığa denk olur. Buradan da anlaşıldığı gibi norm yakınsaklığı modular yakınsaklığı gerektirir. Norm yakınsaklığının modular yakınsaklığına denk olması için gerek ve yeter koşul $p_- = \infty$ ya da $p_+(\Omega \setminus \Omega_\infty) < \infty$ olmasıdır.

Şimdi monoton yakınsaklık teoremi olarak bilinen teoremi ifade edelim.

Teorem 3.3.13. Ω bölgesi ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$ olarak alınsın. $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ negatif olmayan fonksiyonların bir dizisi olsun ve h.h.h. f_k dizisi noktasal olarak bir f fonksiyonuna artarak yakınsasın. Bu durumda $\|f_k\|_{p(\cdot)} \rightarrow \|f\|_{p(\cdot)}$ olur (Cruz-Urbe ve Fiorenza 2013).

Teorem 3.3.14. Ω ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$ ve $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ dizisi h.h.h. noktasal olarak bir f fonksiyonuna yakınsasın. Eğer

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{p(\cdot)} < \infty$$

ise, bu durumda $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{p(\cdot)}$$

olur (Cruz-Urbe ve Fiorenza 2013).

Teorem 3.3.15. Ω bölgesi ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. $p_+ < \infty$ olsun. Eğer $\{f_k\}$ dizisi h.h.h.noktasal olarak $f_k \rightarrow f$ ve h.h.h. $|f_k(x)| \leq g(x)$ olacak biçimde $g(x) \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ varsa bu durumda $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $k \rightarrow \infty$ iken $\|f_k - f\|_{p(\cdot)} \rightarrow 0$ olur (Cruz-Urbe ve Fiorenza 2013).

Teorem 3.3.16. Ω bölgesi ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. $\{f_k\} \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ dizisi f fonksiyonuna normda yakınsıyorsa, bu durumda f fonksiyonuna ölçümde de yakınsar. (Cruz-Urbe ve Fiorenza 2013).

Teorem 3.3.17. Ω ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. Bu halde $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır (Kovacik ve Rákosník 1991).

Teorem 3.3.18. Ω açık kümesi ve sınırlı $p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. Bu durumda $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun olur (Kovacik ve Rákosník 1991).

Teorem 3.3.19. Ω ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı ayrılabilir olması için gerek ve yeter koşul, $p_+ < \infty$ olmasıdır (Kovacik ve Rákosník 1991), (Diening ve ark. 2011).

Ölçülebilir bir g fonksiyonu verildiğinde $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde Φ_g fonksiyoneli

$$\Phi_g(f) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx$$

şeklinde tanımlansın. Φ_g fonksiyonelinin $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında bir sürekli lineer fonksiyoneli olması için gerek ve yeter koşul $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ olmasıdır.

Teorem 3.3.20. Ω bölgesi ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. Bu halde aşağıdaki iki durum birbirine denk olur.

i) $p_+ < \infty$ dir.

ve

ii) $g \rightarrow \Phi_g$ dönüşümü bir izomorfizimdir. Yani $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ için Φ_g fonksiyoneli sürekli ve lineerdir. Tersine, verilmiş sürekli lineer $\Phi \in (L^{p(\cdot)}(\Omega))'$ fonksiyoneli için $\Phi = \Phi_g$ olacak biçimde bir tek $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ vardır (Kovacik ve Rákosník 1991), (Cruz-Urbe ve Fiorenza 2013).

Sonuç 3.3.21. Ω ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ yansımali olması için gerek ve yeter koşul $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ olmasıdır.

Lebesgue türev teoreminin değişken üslü uzayda da sağlanıp sağlanmadığına bakmadan önce klasik durumu hatırlatalım.

Klasik durumda $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda h.h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y) dy = f(x)$$

olur. Böyle noktalara f fonksiyonunun Lebesgue noktaları denir. Bu limit merkezi x olan küpler için de sağlanır. $f \in L^{p(\cdot)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda f lokal olarak integrallenebilir olacağından buradan Lebesgue türev teoremi böyle f fonksiyonu için de sağlanır.

Bununla birlikte, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p < \infty$ ise h.h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|^p dy = 0$$

şeklinde daha güçlü bir sonuç sağlanır.

Bunun benzeri, değişken üslü Lebesgue uzaylarında da doğrudur.

Teorem 3.3.22. $p(\cdot) \in P(\mathbb{R}^n)$, $|\mathbb{R}^n|_\infty = 0$ olacak biçimde ve $f \in L^{p(\cdot)}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda h.h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |\alpha(f(y) - f(x))|^{p(y)} dy = 0$$

olacak biçimde bir $\alpha > 0$ vardır (Harjulehto ve Hästö 2004).

$p_+ < \infty$ ise bu durumda $\alpha = 1$ alınabilir.

3.3.1. Musielak-Orlicz Uzaylar ve Modular Uzaylar

Değişken üslü Lebesgue uzayları; klasik ve ağırlıklı Lebesgue uzayları ve Orlicz uzaylarını da özel durumlar olarak içeren daha geniş fonksiyon uzaylarının belirli örnekleridir. Ω verilmiş bir küme, $\Phi : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, \infty]$; her bir $x \in \Omega$ için, $\Phi(x, \cdot)$

fonksiyonu azalmayan, sürekli, sonlu olduğu kümede konveks olacak şekilde alınsın. $\Phi(x, 0) = 0$, $t > 0$ ise $\Phi(x, t) > 0$ ve $t \rightarrow \infty$ iken $\Phi(x, t) \rightarrow \infty$ olduğu varsayılınsın. Bunun yanında her bir $t > 0$ için $\Phi(., t)$ bir ölçülebilir fonksiyon olduğu varsayılınsın.

$L^{\Phi(\cdot)}(\Omega)$ Musielak-Orlicz uzayı, bazı $\lambda > 0$ için

$$\rho_{\Phi(\cdot)}(f) = \int_{\Omega} \Phi(x, |f(x)|/\lambda) dx < +\infty \quad (3.3.1)$$

koşulunu sağlayan tüm f fonksiyonların kümesi olarak tanımlanır

$L^{\Phi(\cdot)}(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{L^{\Phi(\cdot)}(\Omega)} = \inf = \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \Phi(x, |f(x)|/\lambda) dx \leq 1 \right\}$$

normuyla bir Banach fonksiyon uzayı olur. Bu norma Luxemburg normu denir. Ψ tamamlayıcı fonksiyon olarak bilinen ve kendisi de bir Musielak-Orlicz uzayını üreten fonksiyonu da tanımlamak mümkündür.

Musielak-Orlicz uzaylarının kendileri, modular uzaylar olarak bilinen soyut Banach uzaylarının bir özel durumudur.

Bir reel vektör uzayı olan bir X kümesi verilsin. Bir konveks modular, $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$,

- i) $\rho(x) = 0 \iff x = 0$
- ii) her $x \in X$ için $\rho(-x) = \rho(x)$
- iii) ρ konvekstir.
- iv) $\lambda \rightarrow \rho(\lambda x)$ dönüşümü sol süreklidir.

koşullarını sağlayan bir fonksiyondur.

X_{ρ} bazı $\lambda > 0$ için, $\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) < \infty$ koşulunu sağlayan tüm $x \in X$ kümesi olarak alırsak, bu

$$\|x\|_{X_{\rho}} = \inf = \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

normuyla bir normlu vektör uzayı olur.

(3.3.1) ile tanımlanan ρ_{Φ} fonksiyonu bu mantığa göre bir konveks modulardır ve $L^{\Phi(\cdot)}$ bir modular uzaydır. Özel halde $p(\cdot) \in P(\Omega)$ ise bu durumda $\rho_{p(\cdot)}$ bir kon-

veks modular olur. Klasik Banach fonksiyon uzaylarının bir kısmı Musielak-Orlicz uzaylar veya modular uzaylar olarak da görülebilir. $1 \leq p < \infty$, $\Phi(x, t) = t^p$ alınırsa $L^p(\Omega)$ klasik Lebesgue uzayı elde edilir. w bir pozitif, lokal olarak integrallenebilen fonksiyon olmak üzere, $\Phi(x, t) = t^p w(x)$ alınırsa $L^p(\Omega, w)$ ağırlıklı Lebesgue uzayı elde edilir. $\Phi(x, t) = \Phi(t)$ için Orlicz uzayları elde edilir. Örneğin $\Phi(t) = t^p \ln(e + t)^a$ alınırsa, bu durumda L^Φ , $L^p(\ln L)^a$ Zygmund uzayı elde edilir (Bennett ve Sharpley 1988), (Cruz-Uribe ve Fiorenza 2013).

Moduların tanımındaki (i) koşulu yerine

ia) $\rho(0) = 0$

ib) tüm $\lambda > 0$ için $\rho(\lambda x) = 0$ ise bu durumda $x = 0$ dir,

koşulları bırakarak moduların tanımını zayıflatabiliriz.

Bu durumda böyle ρ fonksiyona semi-modular denir. Modular uzaylar teorisi hemen bu ortama genişletilebilir. Örneğin, $\Phi(x, t) = \infty \chi_{(1, \infty)}(t)$ alınırsa bu durumda (3.3.1) bir semi-modular tanımlar ve $L^\infty(\Omega)$ elde edilir. Bu yaklaşım değişken üslü Lebesgue uzaylarının çok zarif bir tanımını elde etmek için genişletilebilir.

$p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin, $t^\infty = \infty \chi_{(1, \infty)}(t)$ uylasımla

$$\tilde{\rho}_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\tilde{\rho}_{p(\cdot)}$ bir semi-modulardır. Ancak bu semi-modular $\rho_{p(\cdot)}$ ye denk değildir. Buna rağmen $\|\cdot\|_{X_{\tilde{p}}}$ normu $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ normuna denk olur.

Tüm değişken üslü Lebesgue uzayları teorisi bu perspektiften geliştirilebilir (Cruz-Uribe ve Fiorenza 2013).

3.3.2. Banach Fonksiyon Uzayları

Değişken üslü Lebesgue uzaylarına bir başka soyut yaklaşım, Banach fonksiyon uzaylarıdır. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve tüm Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların kümesi M ile gösterilsin. Bir $\|\cdot\|_X : M \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü verilsin. $(X, \|\cdot\|_X)$ çifti tüm $f, g \in M$ için

i) $\|f\|_X = \| |f| \|_X$ ve $\|f\|_X = 0 \iff f \equiv 0$,

ii) $\|f + g\|_X \leq \|f\|_X + \|g\|_X$,

iii) her $a \in \mathbb{R}$ için $\|af\|_X = |a| \|f\|_X$,

iv) $X, \|\cdot\|_X$ normuna göre bir tam normlu vektör uzayıdır,

v) h.h.h. $|f| \leq |g|$ ise bu durumda $\|f\|_X \leq \|g\|_X$ dir,

vi) $\{f_n\} \subset M$; h.h.h. $|f_n|, |f|$ ye artacak biçimde bir dizi ise, bu durumda $\|f_n\|_X, \|f\|_X$ normuna artar,

vii) $E \subset \Omega$ ölçülebilir bir küme ve $|E| < \infty$ ise bu durumda $\|\chi_E\|_X < \infty$ olur,

viii) $|E| < \infty$ ise $\int_E |f(x)| dx \leq C_E \|f\|_X$ dir. (C_E ; X, E bağlı fakat f ye bağlı değildir),

koşullarını sağlarsa bu durumda

$$X = \{f \in M : \|f\|_X < \infty\}$$

kümesine bir Banach fonksiyon uzayıdır denir (Cruz-Uribe ve Fiorenza 2013).

Bu durumda $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ bir Banach fonksiyon uzayı olur. Bu durum ilk önce Edmunds ve ark. (1999) tarafından görüldü.

3.3.3. Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü

Tanım 3.3.3.1. Bir $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu verildiğinde f fonksiyonunun Hardy-Littlewood maksimal operatörü, herhangi $x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$Mf(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy$$

olarak tanımlanır. Burada supremum kenarları koordinat eksenlerine paralel olan ve x içeren tüm $Q \subset \mathbb{R}^n$ küpleri üzerinde alınmaktadır. Maksimal operatörün birbirine denk ve sıklıkla bir biri yerine kullanılan bir kaç değişik varyasyonu vardır. Örneğin supremum merkezi x olan küpler üzerinde alınabilir. Buna merkezli maksimal operatörü denir ve M^c ile gösterilir. Başka bir durum, supremum x içeren tüm tüm yuvarlar üzerinde alınabilir veya supremum merkezi x olan yuvarlar üzerinde alınabilir (Diening ve ark. 2011), (Cruz-Uribe ve Fiorenza 2013).

p nin sabit olması durumunda maksimal operatörünün sınırlılığı aşağıdaki teoremden verilmiştir

Teorem 3.3.3.2. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ ve her $t > 0$ için,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}| \leq \frac{C_1}{t^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx$$

olur.

Ayrıca $1 < p \leq \infty$ ise bu durumda

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

özelliği sağlanır.

Değişken üslü durum için aşağıdaki teorem söz konusu olur.

Teorem 3.3.3.3. Bir Ω kümesi ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. Eğer $\frac{1}{p(\cdot)} \in LH(\Omega)$ ise bu durumda

$$\|t\chi_{\{x: Mf(x) > t\}}\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

olur. Ek olarak $p_- > 1$ ise, bu halde

$$\|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır (Diening ve ark. 2011), (Cruz-Uribe ve Fiorenza 2013).

Teorem 3.3.3.4. $p(\cdot) \in P(\mathbb{R}^n)$ verilsin. $p_- = 1$ ise, bu durumda maksimal operatörü, $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı olmaz (Diening ve ark. 2011), (Cruz-Uribe ve Fiorenza 2013).

Modular eşitsizlik durumlarına geldiğimizde; $p_+ < \infty$ için,

$$\int_{\{x: Mf(x) > t\}} t^{p(x)} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} dx \quad (3.3.2)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^{p(x)} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} dx \quad (3.3.3)$$

şeklindeki modular eşitsizliklerin değişken üslü Lebesgue uzaylarında sağlanmayacağı ifade eden teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.3.3.5. $p(\cdot) \in P(\mathbb{R}^n)$, $p_+ < \infty$ olsun. Bu durumda (3.3.2) ve (3.3.3) modular eşitsizliklerin sağlanması için gerek ve yeter koşul h.h.h. $p(x) = p_0$ olacak biçimde bir p_0 sabitinin var olmasıdır (Diening ve ark. 2011), (Cruz-Urbe ve Fiorenza 2013).

Şimdi de maksimal operatörünün $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlılığı için bir gerek ve yeter koşulunu verelim. Verilmiş bir $p(\cdot)$ için kontrol edilmesi kolay olmayan ama teorik sonuçları itibariyle önemli olan bu teorem için önce bazı tanımları vermek yerinde olur.

Tanım 3.3.3.6. $\Theta = \{Q\}$ ikişer ikişer ayrık küplerin bir koleksiyonu olsun. f verilmiş lokal olarak integrallenebilen bir fonksiyon için, A_Θ operatörünü

$$A_\Theta f(x) = \sum_j A_{Q_j} f(x) = \sum_j \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(y) dy \chi_{Q_j}(x)$$

şeklinde tanımlansın.

Tanım 3.3.3.7. Bir $p(\cdot) \in P(\mathbb{R}^n)$ verilsin. Verilmiş herhangi Θ ayrık küplerin kümesi ve herhangi $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için $\|A_\Theta f\|_{p(\cdot)} \leq C_A \|f\|_{p(\cdot)}$ olacak biçimde bir C_A sabiti varsa bu durumda $p(\cdot) \in A$ olur.

Teorem 3.3.3.8. $p(\cdot) \in P(\mathbb{R}^n)$, $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ olsun. Bu durumda maksimal operatörünün $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $p(\cdot) \in A$ olmasıdır (Diening ve ark. 2011), (Cruz-Urbe ve Fiorenza 2013).

$L^{p(\cdot)}$ uzayında birime yaklaşımaya yakından bakalım.

Teorem 3.3.3.9. $p(\cdot) \in P(\Omega)$ ve $p_+ < \infty$ ise bu durumda basit fonksiyonlar $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun olur (Cruz-Urbe ve Fiorenza 2013).

Teorem 3.3.3.10. $p(\cdot) \in P(\Omega)$ ve $p_+ < \infty$ ise bu durumda $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun olur (Kovacic ve Rákosník 1991).

Tanım 3.3.3.11. Bir $\phi \geq 0$ ve $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu radyal olarak azalan ve radyal olarak simetrik ise o zaman ϕ fonksiyonu çan şekillidir denir.

$$\Phi(x) = \sup_{y \notin B(0,|x|)} |\phi(y)|$$

fonksiyonuna ϕ nin en küçük çan biçimli majorantı adı verilir.

$$\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \text{ olarak tanımlamıştık.}$$

Teorem 3.3.3.12. $p(\cdot) \in A$ veya $p(\cdot) \in LH(\mathbb{R}^n)$ ve $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olsun. ϕ nin en küçük çan biçimli majorantı olan $\Phi(x)$ fonksiyonunun integrallenebildiğini varsayalım. Bu durumda her $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|f * \phi_\epsilon\|_{p(\cdot)} \leq c \|\Phi\|_1 \|f\|_{p(\cdot)}$$

olur. Üstelik her $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için,

$$|f * \phi_\epsilon| \leq 2 \|\Phi\|_1 Mf$$

olur (Cruz-Urbe ve Fiorenza 2007), (Diening ve ark. 2011).

Teorem 3.3.3.13. $p(\cdot) \in A$ ve $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olsun. ϕ fonksiyonunun en küçük çan biçimli majorantı olan $\Phi(x)$ fonksiyonunun integrallenebildiğini ve $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1$ kabul edelim. Bu durumda $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ için h.h.h., $\epsilon \rightarrow 0$ için, $f * \phi_\epsilon \rightarrow f$ olur. Bunun yanında $p_+ < \infty$ ise, bu durumda $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında $f * \phi_\epsilon \rightarrow f$ olur (Cruz-Urbe ve Fiorenza 2007).

3.4. Değişken Üslü Sobolev Uzayları

Çalışmalarımızda kısalık için, çoğu zaman, değişken üslü Sobolev uzayı fonksiyonları yerine, Sobolev fonksiyonları deyimi kullanılacaktır.

Tanım 3.4.1. $m \in \mathbb{N}_0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. $|\alpha| \leq m$ için $\partial^\alpha u$ zayıf kısmi türevleri var $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayına ait ise $u \in L^{p(\cdot)}\Omega$ fonksiyonu $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayına ait olur. $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında bir semi-modular

$$\rho_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)}(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \rho_{p(\cdot),\Omega}(\partial^\alpha u)$$

şeklinde olur. Buradan norm

$$\|u\|_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)} \left(\frac{u}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $m \in \mathbb{N}$ için $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayına değişken üslü Sobolev uzayı denir. Yukarıdaki tanımda $W^{0,p(\cdot)}(\Omega) = L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olacağı açıktır.

Belli Ω kümesinde $\|u\|_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)}$ yerine $\|u\|_{m,p(\cdot)}$ ve $\rho_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)}(u)$ yerine $\rho_{m,p(\cdot)}(u)$ kısıtılması kullanılabilir.

$W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında, sırasıyla

$$\sum_{k=0}^m \rho_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}(|\nabla^k u|) \quad \text{ve} \quad \sum_{k=0}^m \|\nabla^k u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

birer semi-modular ve birer norm olurlar. Bunlar sırasıyla değişken üslü Sobolev semi-modularına ve değişken üslü Sobolev normuna denk olur. $\|\nabla^k u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ yerine kısaca $\|\nabla^k u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ yazılabilir.

Bir $\mathcal{O}$ ailesinin ölçülebilir $U \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri, $N \in \mathbb{N}$ için, $\mathbb{R}^n$ uzayının hemen hemen her yerinde

$$\sum_{U \in \mathcal{O}} \chi_U \leq N$$

oluyorsa bu aileye lokal N – *sonlu* denir.

Teorem 3.4.2. Ω nın bir $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$, 1 – *sonlu* parçalamış verilsin. Bu durumda her $u \in W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|u\|_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega_i)}$$

olur (Diening ve ark. 2011).

Teorem 3.4.3. $p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. Bu durumda $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır. $p(\cdot)$ sınırlı ise ayrılabilir ve $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ ise yansımali ve düzgün konveks olur (Diening ve ark. 2011).

$u_k \rightharpoonup u$ olduğunda $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \rightarrow u$ oluyorsa bir normlu X uzayına, Banach-Saks özelliğine sahiptir denir.

Teorem 3.4.4. $p(\cdot) \in P(\Omega)$ ve $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ olarak verilsin. Bu durumda $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ değişken üslü Sobolev uzayı Banach-Saks özelliğine sahip olur (Diening ve ark. 2011).

Teorem 3.4.5. $p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. $u, v \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ ise bu durumda $\max\{u, v\}$ ve $\min\{u, v\}$, $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında olurlar.

$$\nabla \max(u, v)(x) = \begin{cases} \nabla u(x), & \text{h.h.h. } x \in \{u \geq v\} \text{ için} \\ \nabla v(x), & \text{h.h.h. } x \in \{v \geq u\} \text{ için} \end{cases}$$

ve

$$\nabla \min(u, v)(x) = \begin{cases} \nabla u(x), & \text{h.h.h. } x \in \{u \leq v\} \text{ için} \\ \nabla v(x), & \text{h.h.h. } x \in \{v \leq u\} \text{ için} \end{cases}$$

biçiminde olur. Özel olarak; $|u|$, $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayına ait olur ve Ω bölgesinin hemen hemen her yerinde $|\nabla |u|| = |\nabla u|$ olur (Diening ve ark. 2011).

Tanım 3.4.6. $p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. Sınır değerleri sıfır olan değişken üslü Sobolev uzayı $W_0^{m,p(\cdot)}(\Omega)$, $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının kompakt desteğe sahip fonksiyonlar kümesinin kapanışdır. Daha açık olarak $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında

$$\{u \in W^{m,p(\cdot)}(\Omega) : \text{bir kompakt } K \subset \Omega \text{ için } u = u\chi_K\}$$

kümesinin kapanışdır.

$C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $H_0^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ ile gösterilecektir.

Teorem 3.4.7. $p(\cdot) \in P(\Omega)$ verilsin. Bu halde $W_0^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır. $p(\cdot)$ sınırlı ise $W_0^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı ayrılabilir olur ve $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ ise yansımali ve düzgün konveks olur (Diening ve ark. 2011).

Teorem 3.4.8. $p(\cdot) \in P(\Omega)$ ve $u \in W_0^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ olsun. Bu durumda u , $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ ya sıfır olarak genişletildiğinde, $W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olur (Diening ve ark. 2011).

3.4.1. Poincare Eşitsizliği

Teorem 3.4.1.1. $p(\cdot) \in LH(\Omega)$ verilsin. Bu durumda

i) Her $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı için

$$\|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq c \text{diam}(\Omega) \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikteki c sabiti; n boyutuna, $p(\cdot)$ log-Hölder üstüne bağlıdır.

ii) Ω bir sınırlı bir α -John bölgesi ise bu halde $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\|u - \langle u \rangle_\Omega\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq c \text{diam}(\Omega) \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanır (Diening ve ark. 2011), (Cruz-Uribe ve Fiorenza 2013). c sabiti; n boyutuna, α , $p(\cdot)$ log-Hölder üstüne bağlıdır. α -John bölgesi tanımı için (Diening ve ark. 2011) bakılabilir.

3.4.2. Değişken Üslü Sobolev Uzaylarında Regüler Fonksiyonların Yoğunluğu

Daha önce araştırmacılar tarafından yoğunluk ile ilgili yapılan çalışmaları (Diening ve ark. 2011) kitabından yararlanılarak ispatlarıyla birlikte vereceğiz. Bu ispatların yazılmasının bir amacı da klasik yöntemlerin yetersizliğinden kaynaklanan sorunun nasıl aşıldığının açıkça görülmesi içindir.

3.4.2.1. Yoğunlukta Temel Sonuçlar

Lemma 3.4.2.1.1. $p(\cdot) \in P(\Omega)$ sınırlı ise, bu durumda sınırlı Sobolev fonksiyonları $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun olur (Diening ve ark. 2011).

İspat: $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ olsun. $u_m \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ kesimini $m > 0$ için

$$u_m(x) = \max \{ \min \{ u(x), m \}, -m \}$$

olarak tanımlansın.

$$\int_{\Omega} |g|^{p(x)} dx < \infty$$

integrali için, $m \rightarrow \infty$ iken, $\left| \left\{ x \in \Omega : |g(x)|^{p(x)} \geq m \right\} \right| \rightarrow 0$ elde edilir. $|u(x)| \geq 1$ ise bu durumda $|u(x)| \leq |u(x)|^{p(x)}$ olur. Böylece tüm $m \geq 1$ için $\{x \in \Omega : |u(x)| \geq m\} \subset \{x \in \Omega : |u(x)|^{p(\cdot)} \geq m\}$ olur. Buradan $m \rightarrow \infty$ için

$$\rho_{1,p(\cdot)}(u - u_m) \leq \int_{\{x \in \Omega : |u(x)| \geq m\}} \left(|u|^{p(x)} + |\nabla u|^{p(x)} \right) dx \rightarrow 0$$

olur. $p(\cdot)$ sınırlı olduğundan $\|u - u_m\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)} \rightarrow 0$ olur.

Teorem 3.4.2.1.2. $p(\cdot) \in P(\mathbb{R}^n)$ sınırlı ise bu durumda kompakt desteği $\mathbb{R}^n$ de olan Sobolev fonksiyonları, $W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olur (Diening ve ark. 2011).

İspat $t \geq 1$ olmak üzere, $B_t = B(0, t)$ gösterebiliriz. $\psi_r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ kesim fonksiyonu B_r de $\psi_r = 1$, $\mathbb{R}^n \setminus B_{r+1}$ de $\psi_r = 0$, $0 \leq \psi_r \leq 1$ ve $|\nabla^k \psi_r| \leq c$, $k = 0, 1, \dots, m$ olsun. $W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ de, $r \rightarrow \infty$ için, $u\psi_r \rightarrow u$ olduğunu gösterelim.

Öncelikle

$$\|u\psi_r - u\|_{W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus B_{r+1})} + \|u\psi_r - u\|_{W^{m,p(\cdot)}(B_{r+1} \setminus B_r)}$$

olarak yazılabilir.

İntegralin mutlak sürekliliğinden $r \rightarrow \infty$ için

$$\rho_{W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus B_{r+1})}(u) \rightarrow 0$$

olur. $p_+ < \infty$ olduğundan $r \rightarrow \infty$ için $\|u\|_{W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus B_{r+1})} \rightarrow 0$ olur. $k = 0, 1, \dots, m$ için, yukarıdaki eşitsizlikteki ikinci terimin üstesinden gelmek için,

$$|\nabla^k u - \nabla^k(u\psi_r)| \leq (1 - \psi_r)|u| + \sum_{j=1}^k |\nabla^j \psi_r| |\nabla^{k-j} u| \leq c \sum_{j=0}^k |\nabla^j u|$$

durumu var olur. Bu, integralin mutlak sürekliliği, $p_+ < \infty$; $r \rightarrow \infty$ için,

$$\rho_{W^{m,p(\cdot)}(B_{r+1} \setminus B_r)}(u) \leq c \rho_{W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus B_r)}(u) \rightarrow 0$$

verir. $p_+ < \infty$ olduğundan, $r \rightarrow \infty$ için $\|u\psi_r - u\|_{W^{m,p(\cdot)}(B_{r+1} \setminus B_r)} \rightarrow 0$ çıkar.

Sonuç 3.4.2.1.3. $p(\cdot) \in P(\mathbb{R}^n)$ sınırlı ise, bu durumda $W_0^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ olur (Diening ve ark. 2011).

Sonuç 3.4.2.1.4. $p(\cdot) \in P(\mathbb{R}^n)$ sınırlı ise bu durumda kompakt desteği $\mathbb{R}^n$ de olan sınırlı Sobolev fonksiyonları $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olur (Diening ve ark. 2011).

Şimdi de $p(\cdot)$ sınırsız olduğunda kompakt destekli fonksiyonların $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olmadığı ile ilgili örneğe bakalım.

Örnek 3.4.2.1.5. $p(x) = \max\{|x|, 1\}$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için $u(x) = \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{p(x)} dx = 2 \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x dx + 1 < \infty$$

olduğu için $u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R})$ olur. g , kompakt desteği $(-a, a)$ aralığında olan bir fonksiyon olsun. $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ için,

$$\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{u-g}{\lambda}\right) \geq \int_a^{\infty} \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^x dx = \infty$$

olur. Buradan $\|u - g\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})} \geq \frac{1}{2}$ çıkar. Yani yoğunluk elde edilmez (Cruz-Urbe ve Fiorenza 2007), (Diening ve ark. 2011).

Şimdi de konvolüsyonun sınırlılığına dayanarak düzgün (smooth) fonksiyonların yoğunluğunun ispatlarını kısaca verelim.

Teorem 3.4.2.1.6. $p(\cdot) \in P$ sınırlı bir üs olsun. $p(\cdot) \in A$ veya $p(\cdot) \in LH$ ise bu durumda $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayı $W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olur (Samko 200), (Diening ve ark. 2011).

İspat $u \in W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ve keyfi $\epsilon > 0$ alalım. Teorem 3.4.2.1.2. den u nun $\mathbb{R}^n$ de kompakt desteğe sahip olduğunu varsayabiliriz. ϕ_ϵ standart mollifier olsun. Böylece $u * \phi_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ elemanı ve $k = 1, 2, \dots, m$ için

$$\nabla^k (u * \phi_\epsilon) - \nabla^k u = (\nabla^k u) * \phi_\epsilon - \nabla^k u$$

olur.

Teorem 3.3.3.13. ten $\epsilon \rightarrow 0$ için $\|u * \phi_\epsilon - u\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ elde edilir; $k = 1, 2, \dots, m$ için, $\epsilon \rightarrow 0$ iken

$$\|\nabla^k (u * \phi_\epsilon) - \nabla^k u\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|\nabla^k u * \phi_\epsilon - \nabla^k u\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$$

olarak yazılabilir.

Buradan "iyi" bölgeler için de düzgün fonksiyonların yoğunluğu elde edilebilir. Lipschitz sınırlı bölgeler genişleme bölgeleridir.

Teorem 3.4.2.1.7. Ω bir genişleme bölgesi olsun. $p(\cdot) \in LH$ ve $1 \leq p_- \leq p_+ < \infty$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $C^\infty(\overline{\Omega})$ uzayı $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun olur (Diening ve ark. 2011).

İspat Teorem 3.3.2. den $p(\cdot)$ fonksiyonunu tüm $\mathbb{R}^n$ ye genişletelim. $u \in W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ olarak alalım. Ω bir genişleme bölgesi olduğundan $\|\tilde{u}\|_{W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)}$ koşulunu sağlayan $\tilde{u} \in W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ vardır. Teorem 3.4.2.1.6. dan dolayı $W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında $\tilde{u}_\epsilon \rightarrow \tilde{u}$ koşulunu sağlayan $\tilde{u}_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vardır. $u_\epsilon = \tilde{u}_\epsilon|_\Omega$ alalım. Bu durumda

$$\|u - u_\epsilon\|_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)} \leq \|\tilde{u} - \tilde{u}_\epsilon\|_{W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$$

olur. Böylece $u_\epsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$ olması gereken yaklaşan fonksiyonlar olur.

Keyfi açık kümeler için de düzgün fonksiyonların yoğunluğu gösterilebilir.

Teorem 3.4.2.1.8. $p(\cdot) \in P(\Omega)$ sınırlı bir üs olsun. $p(\cdot) \in A$ veya $p(\cdot) \in LH$ ise bu durumda $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$, $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun olur (Diening ve ark. 2011).

İspat $u \in W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ olsun. $\epsilon > 0$, $\Omega_0 = \emptyset$ ve $k = 1, 2, \dots$ belirli $x_0 \in \Omega$ için

$$\Omega_k = \left\{ x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k} \right\} \cap B(x_0, k)$$

olarak tanımlansın.

$k = 1, 2, \dots$ için

$$U_k = \Omega_{k+1} \setminus \overline{\Omega}_{k-1}$$

olarak yazalım.

(ξ_k) , (U_k) örtüsüne karşılık gelen bir birimin parçalanışı olsun. Yani $\xi_k \in C_0^\infty(U_k)$ ve her bir $x \in \Omega$ için $\sum_{k=1}^\infty \xi_k(x) = 1$ şeklindedir.

ϕ_δ bir standart mollifier ve her k için

$$\text{spt}((\xi_k u) * \phi_{\delta_k}) \subset U_k$$

olacak biçimde δ_k vardır. Teorem 3.3.3.13., gerektiğinde daha küçük δ_k seçilerek,

$$\|(\xi_k u) - (\xi_k u) * \phi_{\delta_k}\|_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)} \leq \epsilon 2^{-k}$$

elde edilir.

$$u_\epsilon = \sum_{k=1}^\infty (\xi_k u) * \phi_{\delta_k}$$

olarak tanımlayalım. Her bir $x \in \Omega$ noktası yukarıdaki toplamda sadece sonlu sayıda terimleri sıfırdan farklı olacak şekilde bir komşuluğa sahiptir. Böylece $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$ olur. Üstelik,

$$\|u - u_\epsilon\|_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^\infty \|(\xi_k u) - (\xi_k u) * \phi_{\delta_k}\|_{W^{m,p(\cdot)}(\Omega)} \leq \epsilon$$

olduğundan bu bir yaklaşma dizisi olur.

Başka bir sonuç da şöyledir. Reel sayıların açık aralıklarında sınırlı üstün değişimine koşul bırakmaksızın düzgün fonksiyonların yoğun olduğu Harjulehto ve Hästö (2003) tarafından gösterilmiştir.

3.4.2.2. Sürekli Üslerle Yoğunluk

Zhikov, log-Hölder sürekliliğin düzgün fonksiyonların yoğunluğu için bir gerekli süreklilik modülü olmadığını, gerçekte daha zayıf bir modül yeterli olacağını gösterdi. Yoğunluk için en uygun süreklilik modülü bilinmemektedir.

Lemma 3.4.2.2.1. $p(\cdot) \in P(\Omega)$ sınırlı bir üs olsun. $W^{1,\infty}(\Omega)$ uzayı $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun ise, bu durumda düzgün Sobolev fonksiyonları da yoğun olur.

İspat Varsayımdan, her bir Lipschitz fonksiyonunun düzgün fonksiyonlarla yaklaşılabileceğini göstermek yeterlidir. $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ bir K -Lipschitz fonksiyonu olsun. Lemma 3.4.2.1.1. ve sonuç 3.4.2.1.4. belirtildiği gibi, u sınırlıdır ve $\mathbb{R}^n$ de sınırlı desteğe sahiptir. McShane genişlemesinden, u yu $\mathbb{R}^n$ ye bir sınırlı K -Lipschitz fonksiyonu olarak genişletebiliriz ve uygun bir kesim (cut off) fonksiyonunu kullanarak, $\text{spt } u$ da bir olan, genişlemenin $\mathbb{R}^n$ de bir kompakt desteğe sahip olduğunu varsayabiliriz. Şimdi u_ϵ , u nun bir standart mollifikasyonu olsun. Açıkça h.h.h $u_\epsilon \rightarrow u$ ve $\nabla u_\epsilon \rightarrow \nabla u$ olur. $u_\epsilon \in L^\infty(\Omega)$; $|\nabla u_\epsilon|$, K ile sınırlı ve bir sınırlı küme dışında sıfır olan tüm fonksiyonlar u nun desteği tarafından belirlenir olduğundan iddia baskın yakınsaklık teoreminden çıkar.

Teorem 3.4.2.2.2. $p(\cdot) \in P(\mathbb{R}^n)$, $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ için,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{-1+\frac{n}{p_-}\omega(t)} dt = \infty$$

koşulunu sağlayan bir ω süreklilik modülüne sahip olsun. Bu durumda düzgün kompakt destekli fonksiyonlar $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ Sobolev uzayında yoğun olurlar (Zhikov 2004), (Diening ve ark. 2011).

İspata geçmeden önce teoremdaki koşulu kısaca inceleyelim.

$p(\cdot)$ nin log-Hölder sürekli olduğunu varsayalım. Bu durumda $\omega(t) = \frac{c}{\ln(e+\frac{1}{t})}$ alabiliriz. Önceki teoremdaki integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{-1+\frac{n}{p_-}\omega(t)} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{-1+\frac{c}{\ln(e+\frac{1}{t})}} dt \geq \int_0^{\frac{1}{2}} t^{-1} e^{-c} dt = \infty$$

olur. Böylece koşul sağlanır. Üstelik, daha zayıf süreklilik modülü de sağlanır. Örneğin

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) \frac{\ln(1/t)}{\ln \ln(1/t)} = c$$

olan ω şartını sağlaması için gerek ve yeter koşul $0 < c < \frac{p_-}{n}$ olmasıdır.

Şimdi ispata geçelim.

İspat Teorem 3.4.2.1.2. den kompakt destekli Sobolev fonksiyonların yoğun olduğunu biliyoruz. Böylece desteği $B(0, R)$ yuvarında olan $u \in W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarını incelemek yeterlidir. Buradan $u \in W^{1,p_-}(\mathbb{R}^n)$ olur ve müteakip hesaplamalar sağlanır. $f = |u| + |\nabla u|$ olarak tanımlansın. Genelilikten fazla bir şey kaybetmeden $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 20^{-n} / (2 + 2|B(0, R)|)$ olduğunu varsayabiliriz. (Bölme ile uygun sabit olur).

Maksimal fonksiyonun seviye kümelerini ifade edelim: $\lambda > 0$ için,

$$E(\lambda, Mf) = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) \geq \lambda\}$$

olarak tanımlanır. $F_\lambda = \mathbb{R}^n \setminus E(\lambda, Mf)$ ile gösterelim. (Evans ve Gariepy 1992) den u , F_λ da $c\lambda$ -Lipschitz olur (Burada c sabiti sadece boyuta bağlı olur). McShane genişlemesinden F_λ kümesinde u ile uyuşan, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir $c\lambda$ -Lipschitz u_λ fonksiyonu elde edilir. F_λ da h.h.h. $\nabla u = \nabla u_\lambda$ olur ve böylece

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u - \nabla u_\lambda|^{p(x)} dx &= \int_{E(\lambda, Mf)} |\nabla u - \nabla u_\lambda|^{p(x)} dx \\ &\leq c \int_{E(\lambda, Mf)} |\nabla u|^{p(x)} dx + c \int_{E(\lambda, Mf)} \lambda^{p(x)} dx \end{aligned}$$

$|\nabla u| \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ ve $|E(\lambda, Mf)| \rightarrow 0$ olduğundan, $\lambda \rightarrow \infty$ için ilk integral sıfıra gider. Geriye ikinci terimi kontrol etmek kaldı. Bunu

$$\Theta(\lambda_i) = \int_{E(\lambda_i, Mf)} \lambda_i^{p(x)} dx \rightarrow 0 \quad (3.4.1)$$

olacak biçimde sonsuza giden bir (λ_i) dizisinin var olduğuyla yapılacaktır. Önceki eşitsizlik $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında $\nabla u_{\lambda_i} \rightarrow \nabla u$ olmayı gerektirir. $p(\cdot)$ düzgün sürekli ve $B(0, 2R)$ dışında fonksiyonlar sıfır olduğundan, $B(0, 2R)$ de Poincare eşitsizliği (Diening ve ark. 2011, Teorem 8.2.18.) $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında $u_{\lambda_i} \rightarrow u$ olmayı gerektirir. Böylece u_{λ_i} bir Lipschitz yaklaşma dizisi olur. İddia Lemma 3.4.2.2.1. den çıkar.

$$\int_2^\infty \theta(\lambda) d\lambda = \infty \quad \text{ve} \quad \int_2^\infty \theta(\lambda) \Theta(\lambda) d\lambda < \infty$$

olacak biçimde negatif olmayan bir sürekli θ fonksiyonun var olduğunu gösterilecektir. $\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \Theta(\lambda) > 0$ ise, bu durumda $\Theta(\lambda) > c > 0$ olur. Böylece bu mümkün değildir. Buradan $\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \Theta(\lambda) = 0$ olur. Böylece (3.4.1) sağlayan uygun (λ_i) dizisinin varlığını gösterir.

Temel örtme teoreminden $r_i < \frac{1}{10}$, $B_i(x_i, r_i)$ yuvarları vardır ve $\{5B_i\}$, $E(\lambda, Mf)$ örtecek şeklindedir. Her bir i için

$$\int_{B_i} f dx > \lambda |B_i|$$

olur. B_i , bir kısmı $f < \frac{\lambda}{2}$ de diğer kısmı da $E(\frac{\lambda}{2}, f)$ içinde olacak biçimde ayırabiliriz. Böylece

$$\lambda |B_i| < \int_{B_i \cap E(\frac{\lambda}{2}, f)} f dx + \frac{\lambda}{2} |B_i|$$

ifadesi bulunur. Dikkat edilirse şu anda f nin seviye kümelerini kullanıyoruz, Mf nin değil. Bundan

$$\frac{\lambda}{2} \leq \frac{1}{|B_i|} \int_{B_i \cap E(\frac{\lambda}{2}, f)} f dx$$

sonucuna varırız. Bu kestrimi p_- için Hölder eşitsizliğiyle birleştirilirse

$$\frac{\lambda}{2} < \left(\frac{1}{|B_i|} \int_{B_i} f^{p_-} dx \right)^{\frac{1}{p_-}} \leq |B_i|^{-\frac{1}{p_-}} 20^{-n} \quad (3.4.2)$$

sonucuna varılır. İkinci eşitsizlikte $\|f\|_{p_-} \leq 2(1 + |B(0, R)|) \|f\|_{p(\cdot)} \leq 20^{-n}$ kullanıldı. $p_i = p_{+5B_i}$ olarak tanımlansin. $\lambda \geq 1$ için

$$\Theta(\lambda) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{5B_i} \lambda^{p(x)} dx \leq 5^n \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{p_i} |B_i| \leq c \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i \cap E(\frac{\lambda}{2}, f)} \lambda^{p_i-1} f(x) dx$$

elde edilir. $p(\cdot)$, ω süreklilik modülüne sahip olduğu için $x \in 5B_i$ için $\lambda^{p_i} \leq c\lambda^{p(x)+\omega(5r_i)}$ elde edilir. Bu önceki kestrimde kullanıldığında

$$\Theta(\lambda) \leq c \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{\omega(5r_i)} \int_{B_i \cap E(\frac{\lambda}{2}, f)} \lambda^{p(x)-1} f(x) dx$$

durumu elde edilir. (5.2.2) den $5r_i < \lambda^{-\frac{p_-}{n}}$ olarak hesaplanır; Bu durumda $\omega(5r_i) \leq \omega\left(\lambda^{-\frac{p_-}{n}}\right)$ olduğu görülür.

Böylece önceki kestirim

$$\begin{aligned} \Theta(\lambda) &\leq c \lambda^{\omega\left(\lambda^{-\frac{p_-}{n}}\right)} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i \cap E(\frac{\lambda}{2}, f)} \lambda^{p(x)-1} f(x) dx \\ &\leq c \frac{1}{\theta(\lambda)} \int_{E(\frac{\lambda}{2}, f)} \lambda^{p(x)-2} f(x) dx \end{aligned}$$

olur. (Burada $\theta(\lambda) = \lambda^{-1-\omega\left(\lambda^{-\frac{p_-}{n}}\right)}$ olarak tanımlandı.) Bu eşitsizliği $\theta(\lambda)$ ile çarpıp ve $[2, \infty)$ aralığında λ göre integrallenirse

$$\int_2^{\infty} \theta(\lambda) \Theta(\lambda) d\lambda \leq c \int_2^{\infty} \int_{E(\frac{\lambda}{2}, f)} \lambda^{p(x)-2} f(x) dx d\lambda$$

durumu çıkar. Burada da

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \theta(\lambda) \Theta(\lambda) d\lambda &\leq c \int_2^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{p(x)-2} f(x) \chi_{E(\frac{\lambda}{2}, f)}(x) dx d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_2^{\infty} \lambda^{p(x)-2} f(x) \chi_{E(\frac{\lambda}{2}, f)}(x) d\lambda dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{p(x)-1}}{p(x)-1} \left(f(x)^{p(x)} - f(x) \right) \chi_{\{f \geq 1\}}(x) dx \end{aligned}$$

olarak devam edilir. $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ ve f sınırlı desteğe sahip olduğundan, yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafının sonlu olduğu sonucuna varılır.

Teoremde; $t = \lambda^{-\frac{p_-}{n}}$ değişken değişimi, $\int \theta d\lambda = \infty$ koşulunun

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{-1+\frac{n}{p_-}\omega(t)} dt = \infty$$

varsayımına denk olduğunu gösterir. Böylece ispatı yapan uygun bir θ fonksiyonu bulunmuş olur.

Bir sonraki sonuçta, değişken üslü Sobolev uzaylarındaki her fonksiyona düzgün fonksiyonlarla yaklaşılamayacağını verilecektir.

Bir dilim ile, bazı $z \in \mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1)$ için, $\{x \in B(0, 1) : \langle x, z \rangle > |x|\}$ şeklindeki bir küme kast edilecektir.

Teorem 3.4.2.2.3. $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ ve A_1, A_2, A_3, A_4 saat yönünde sıralanmış dört ayrık dilim ve $p(\cdot) \in P(\Omega)$

$$\int_{A_1 \cup A_3} |x|^{-p'(x)} dx < \infty \quad \text{ve} \quad \int_{A_2 \cup A_4} |x|^{-p(x)} dx < \infty$$

sağlayacak şekilde alınsın.. Bu durumda düzgün fonksiyonlar $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında yoğun olmazlar (Diening ve ark. 2011).

İspat (r, θ) kutupsal koordinatları kullanılacak, $A_i(R) = A_i \cap B(0, R)$ gösterecektir. $\Theta_i, \{(r, \theta) : r \in (0, 1), \theta \in \Theta_i\} = A_i$ şeklindeki θ - değerlerinin bir aralığını gösterir. $u \in C^\infty(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$u(R, \theta) = \int_0^R \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) dr + u(0)$$

olur. Bir önceki denklemin Θ_1 üzerinde θ göre integrali ve ikinci adımda Young eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_{\Theta_i} |u(R, \theta) - u(0)| d\theta &\leq \int_{A_1(R)} |\nabla u| r^{-1} dr \\ &\leq \int_{A_1(R)} |\nabla u|^{p(x)} dr + \int_{A_1(R)} r^{-p'(x)} dr \end{aligned}$$

durumu elde edilir. Varsayım ile $|\nabla u|^{p(x)}, r^{-p'(x)} \in L^1$ olur.

Böylece

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{|\Theta_1|} \int_{\Theta_1} |u(R, \theta)| d\theta = u(0)$$

olduğu görülür. Yaylar üzerindeki ortalama $u(0)$ 'a gittiğinden; aynısı dilim üzerindeki ortalama için de sağlanır, buradan

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{|A_1(R)|} \int_{A_1(R)} |u(x)| dx = u(0)$$

olur.

Aynı düşünce $A_3(R)$ için de uygulanırsa, böylece

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{|A_1(R)|} \int_{A_1(R)} |u(x)| dx = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{|A_3(R)|} \int_{A_3(R)} |u(x)| dx$$

çıkar. Son iddia düzgün fonksiyonlarla yaklaşılabilen Sobolev fonksiyonları için de sağlanır.

$u(r, \theta) = \Psi(\theta)$ fonksiyonunu düşünelim. Burada $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, A_1 de 0, A_3 te 1 olan 2π -periyodlu ve türevinin desteği $A_2 \cup A_4$ içinde bulunan bir fonksiyondur. Bu durumda $|\nabla u| \leq cr^{-1} \chi_{A_2 \cup A_4}$ (c , r ye bağlı değil) olur ve teoremin varsayımı $|\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)$ olmasını gerektirir. u fonksiyonu sınırlıdır, buradan $W^{1,p(x)}(\Omega)$ içinde olur. Öte yandan, bu fonksiyon için

$$0 = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{|\Theta_1|} \int_{\Theta_1} |u(R, \theta)| d\theta \neq \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{|\Theta_3|} \int_{\Theta_3} |u(R, \theta)| d\theta = 1$$

olur. Böylece yukarıda teoremden verildiği gibi, u ya düzgün fonksiyonlarla yaklaşılamaz.

Örnek 3.4.2.2.4. $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ ve $i = 1, 2, 3, 4$ için A_i , $B(0, 1)$ deki kuadrantları gösterebilirsin. Üs; A_1 ve A_3 te $p_1(x) > 2$ ve A_2 ve A_4 te $p_2(x) < 2$ olarak tanımlansın. Bu durumda önceki teoremin varsayımları sağlanır. Bu, yoğun olmamanın ilk örneğidir. Zhikov (2004) tarafından yapıldı.

3.4.2.3. Süreksiz Üslerle Yoğunluk

Lemma 3.4.2.3.1. $B' = B(0, 7/6)$, $B = B(0, 1)$, $\hat{e}$ bir birim vektör ve $p \in P(B')$ sınırlı olsun. y

$$\cup_{0 < t \leq r} B(x + t\hat{e}, ht)$$

konisinde bulunduğu zaman her $x \in B$ için

$$p(y) - p(x) \geq -\frac{K}{\ln(e + 1/|x - y|)}$$

olacak biçimde $K \geq 0$, $r \in (0, 1/12)$ ve $h \in (0, 1)$ nin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $u \in W^{1,p(x)}(B')$ için, $W^{1,p(x)}(B)$ uzayında $u_i \rightarrow u$ olacak şekilde $C^\infty(B) \cap W^{1,p(x)}(B)$ içinde bir (u_i) dizisi vardır (Edmunds ve Rakosnik 1992), (Diening ve ark. 2011).

İspat $\psi \in C_0^\infty(B)$ negatif olmayan ve $\int_B \psi dx = 1$ koşulunu sağlayacak biçimde olsun. İntegrallenebilir $u : B' \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\delta \in (0, r)$ için

$$R_\delta u(x) = \int_B u(x + \delta(hz + \widehat{e})) \psi(z) dz$$

olarak tanımlansın. Bu halde $R_\delta u$, B bölgesinde düzgün olur.

Öncelikle $u \in L^{p(x)}(B')$ için $\|R_\delta u - u\|_{p(\cdot)} \rightarrow 0$ olduğunu gösterelim. $p(\cdot)$ sınırlı olduğundan $\rho_{p(\cdot)}(R_\delta u - u) \rightarrow 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. ψ fonksiyonunun sınırlı olduğu göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} \rho_{p(\cdot)}(R_\delta u - u) &= \int_B \left| \int_B (u(x + \delta(hz + \widehat{e})) - u(x)) \psi(z) dz \right|^{p(x)} dx \\ &\leq c \int_B \left(\int_B |u(x + \delta(hz + \widehat{e})) - u(x)| dz \right)^{p(x)} dx =: cI \end{aligned}$$

kestirimi yapılabilir.

$B^\delta = B(x + \delta\widehat{e}, h\delta)$ ve $q = \min\{p_{-B^\delta}, p_{-B}\}$ olmak üzere. Sabit q için Hölder eşitsizliği ve yeteri kadar küçük δ (düzgün olarak) için $\int_{B^\delta} |u(x) - u(y)|^q dy \leq 1$ özelliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} I &= \int_B \left(c \frac{1}{|B^\delta|} \int_{B^\delta} |u(y) - u(x)| dy \right)^{p(x)} dx \\ &\leq c \int_B \left(\frac{1}{|B^\delta|} \int_{B^\delta} |u(y) - u(x)|^q dy \right)^{p(x)/q} dx \\ &\leq c \int_B (h\delta)^{-np(x)/q} \left(\int_{B^\delta} |u(y) - u(x)|^q dy \right)^{p(x)/q} dx \\ &\leq c \int_B (h\delta)^{-n(p(x)-q)/q} \frac{1}{|B^\delta|} \int_{B^\delta} |u(y) - u(x)|^q dy dx \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Varsayımla birlikte

$$q \geq p_{-B^\delta} \geq p(x) - \frac{K}{\ln(e+1/|x-y|)} \geq p(x) - \frac{K}{\ln(e+1/\delta)}$$

elde edilir.

Böylece $\delta^{q-p(x)}$ teriminin, δ ve x ten bağımsız olarak, bir sabit tarafından sınırlı olur. Yukarıdaki lemmada $p(\cdot)$ üzerinde varsayım olmasa bile, $h^{q-p(x)} \leq h^{q-p_+} \leq c(h)$ olur. Bunu kullanarak, önceki kestirime devam edildiğinde:

$$\begin{aligned} & \int_B \left(\int_B |u(x + \delta(hz + \widehat{e})) - u(x)| dz \right)^{p(x)} dx \\ & \leq c \int_B \frac{1}{|B^\delta|} \int_{B^\delta} |u(y) - u(x)|^q dy dx \\ & = c \int_B \int_B |u(x + \delta(hz + \widehat{e})) - u(x)|^q dx dz \end{aligned}$$

olur.

Şimdi, Edmunds-Rakosnik tarafından yapılan ispat gibi devam edelim. $\epsilon > 0$ verilsin. $1 + |u(x)|^{p(x)}$ integrallenebilir bir fonksiyon olduğundan, $|V| < \tau$ li her $V \subset B$ için

$$\int_V 1 + |u(x)|^{p(x)} dx < \frac{\epsilon}{2}$$

olacak biçimde $\tau > 0$ seçilebilir. Belli bir $z \in B$ için; $|V| < \tau$ için (V nin ötelenmesi de $|V + \delta(hz + \widehat{e})| < \tau$ sağladığı için),

$$\int_V 2 + |u(x + \delta(hz + \widehat{e}))|^{p(x+\delta(hz+\widehat{e}))} + |u(x)|^{p(x)} dx < \epsilon$$

olmasını gerektirir. u ölçülebilir olduğundan Luzin teoreminden $|U| < \frac{\tau}{2}$ ve u , $B(7/6) \setminus U$ de sürekli olacak şekilde açık bir küme $U \subset B(7/6)$ vardır. δ yeteri kadar küçük seçilerek, $|x - y| < \delta$ özelliğini sağlayan tüm $x, y \in \overline{B} \setminus U$ lar için $|u(y) - u(x)| < \epsilon$ elde edilir. $z \in B$ için; U_z ile, $x \in U$ veya $x + \delta(hz + \widehat{e}) \in U$ olan $x \in B$ noktaları kümesini gösterebiliriz. Her z için $|U_z| < \tau$ olup,

$$\begin{aligned}
& \int_B \int_B |u(x + \delta(hz + \widehat{e})) - u(x)|^q dx dz \\
& \leq \int_B \int_B \epsilon^{p-B} dx dz + \int_B \int_{U_z} |u(x + \delta(hz + \widehat{e})) - u(x)|^q dx dz \\
& \leq c \int_B \int_B \max\{\epsilon, \epsilon^{p+}\} dx dz + \int_B \int_{U_z} |u(x + \delta(hz + \widehat{e})) - u(x)|^{p-B^\delta} + |u(x)|^{p-B^\delta} dx dz \\
& \leq c \max\{\epsilon, \epsilon^{p+}\} + \int_B \int_{U_z} 2 + |u(x + \delta(hz + \widehat{e})) - u(x)|^{p(x+\delta(hz+\widehat{e}))} + |u(x)|^p dx dz \\
& \leq c \max\{\epsilon, \epsilon^{p+}\} + \int_B \epsilon dz
\end{aligned}$$

bulunur. Burada üçüncü eşitsizlik için

$$|u(x)|^{p-B^\delta} \leq 1 + |u(x)|^p$$

özellili kullanıldı ve benzeri $|u(x + \delta(hz + \widehat{e})) - u(x)|^{p-B}$ için de yapıldı. Böylece ϵ ile sıfıra giden bir üst sınır elde edildi. Lemmanın ispatını tamamlamak için, Sobolev uzayındaki bir u fonksiyonu için $\|R_\delta u - u\|_{1,p(\cdot)} \rightarrow 0$ olduğu gösterilmelidir. $\nabla[R_\delta u] = R_\delta[\nabla u]$ olduğundan; $L^{p(\cdot)}$ sonuçlarını ayrı ayrı u ve $|\nabla u|$ uygulayarak elde edilir.

Teorem 3.4.2.3.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Her bir $x \in \Omega$ için, z

$$C(y) = \cup_{0 < t \leq r_x} B(y + t\xi_x, h_x t)$$

konisinde iken her bir $y \in B(x, r_x)$ noktası için

$$p(z) - p(y) \geq -\frac{K_x}{\ln(e + 1/|y - z|)}$$

olacak şekilde dört

$$r_x \in \left(0, \frac{1}{2} \min\{1, d(x, \partial\Omega)\}\right)$$

$$h_x \in (0, 1), \quad \xi_x \in S(0, 1) \quad \text{ve} \quad K_x \in [0, \infty)$$

niceliklerinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun olur (Edmunds ve Rakosnik 1992), (Diening ve ark. 2011).

İspat $x \in \Omega$ için $B_x = B(x, r_x/10)$ olsun. Temel örtme teoreminden $\cup_{i=1}^\infty 5B'_i = \Omega$ olacak şekilde ayrık $B'_i = B_{x_i}$ den oluşan sayılabilir bir alt aile vardır. $B_i = 6B'_i$ ve $B_i^* = 7B'_i$ olarak tanımlansın. Dikkat edilirse

$$\cup_{i=1}^\infty B_i = \cup_{i=1}^\infty \overline{B_i^*} = \Omega$$

durumu hala sağlanır. (B'_i yuvarların ayrıklığından) her hangi bir $x \in \Omega$ noktası noktası en fazla N tane B_i^* yuvarlarında yer aldığı görülür. Böylece ψ_i ler desteği B_i lerde ve $|\nabla \psi_i|$, $L_i \geq 1$ ile sınırlı olacak şekilde düzgün ψ_i fonksiyonlarının bir birimin parçalanışı vardır.

$u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ ve $\epsilon > 0$ verilsin. Lemma 3.4.2.3.1. den

$$\|u - v_i\|_{W^{1,p(\cdot)}(B_i)} < 2^{-i} \epsilon / L_i$$

olacak biçimde $v_i \in W^{1,p(\cdot)}(B_i) \cap C^\infty(B_i)$ seçilebilir. $v = \sum_{i=1}^\infty \psi_i v_i$ olarak tanımlansın. Herhangi bir komşulukta ψ_i lerin en fazla sonlu tanesi sıfırdan farklı olduğundan v fonksiyonu düzgün olur.

$$\begin{aligned} \|u - v_i\|_{W^{1,p(\cdot)}(B_i)} &\leq \sum_{i=1}^\infty \|\psi_i(u - v_i)\|_{W^{1,p(\cdot)}(B_i)} \\ &\leq \sum_{i=1}^\infty (1 + L_i) \|u - v_i\|_{W^{1,p(\cdot)}(B_i)} \leq 2\epsilon \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Eğer $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü her $x, y \in A$ için

$$\frac{1}{L} |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$$

oluyorsa buna L - bilipschitz dendiğini biliyoruz.

Önerme 3.4.2.3.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ L - bilipschitz olsun. $p(\cdot) \in P(\Omega)$; $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun olacak şekilde sınırlı bir üs olsun.

$q(x) = p \circ f^{-1}(x)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $C^\infty(f(\Omega)) \cap W^{1,q(\cdot)}(f(\Omega))$, $W^{1,q(\cdot)}(f(\Omega))$ uzayında yoğun olur (Diening ve ark. 2011).

İspat Bu değişken değişimi ile yapılır. $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ olsun ve $v = u \circ f^{-1}$ olarak tanımlansın.

$$\begin{aligned} \rho_{1,q(\cdot)}(v) &= \int_Q |v(y)|^{q(y)} + |\nabla v(y)|^{q(y)} dy \\ &\leq \int_\Omega \left(|u(x)|^{p(x)} + |L\nabla u(x)|^{p(x)} \right) |J_f(x)| dx \leq L^{n+p+} \rho_{1,q(\cdot)}(u) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\psi_i \rightarrow u$, $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında düzgün fonksiyonların bir yaklaşma dizisi ise; bu durumda $\psi_i \circ f^{-1}$, $W^{1,p(\cdot)}(f(\Omega))$ da v fonksiyonunun lokal lipschitz fonksiyonlarının bir yaklaşma dizisi olduğu ortaya çıkar. Böylece iddia lemma 3.4.2.2.1. den çıkar.

3.4.2.4. Sürekli Fonksiyonların Yoğunluğu

Lemma 3.4.2.4.1. $Q = (0,1)^n$ ve $p(\cdot) \in P(Q)$ sınırlı ve $p(\cdot)$ nın sadece n. koordinata bağlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $C(Q) \cap W^{1,p(\cdot)}(Q)$, $W^{1,p(\cdot)}(Q)$ uzayında yoğun olur (Hastö 2007), (Diening ve ark. 2011).

İspat Bu ispata dx , $dm_{n-1}(x)$ ve $dm_1(x)$ integralin n -, $(n-1)$ ve 1 -boyutlu Lebesgue ölçümü için kullanılacaktır. $x \in \mathbb{R}^n$ ninci koordinatı x_n ile gösterilecek; $B = B(0,1) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ ile $x_n = 0$ düzleminde olan $(n-1)$ - boyutlu birim yuvarı gösterecektir.

$u \in W^{1,p(\cdot)}(Q)$; öncelikle u nun Q da kompakt desteğe sahip olduğunu varsayalım. Sadece; ϵ nun, u nun desteği ile ∂Q arasındaki mesafeden daha küçük olma durumu incelenecektir. $\phi : B \rightarrow [0, \infty)$, $\mathbb{R}^{n-1}$ de standart bir mollifier olsun. $(n-1)$ -boyutlu konvolüsyon

$$u_\epsilon(x) = \int_B u(x + \epsilon y) \phi(y) dm_{n-1}(y)$$

olarak tanımlansın. u_ϵ , x_n - eksenine dik düzlemde sürekli (hatta düzgün). x_n koordinatlarında farklı olan iki noktayı alalım. u nun koordinant eksenlerine paralel hemen hemen her doğrusunda mutlak sürekli olduğunu kullanarak,

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(x) - u_\epsilon(x + \delta e_n)| &= \left| \int_B [u(x + \epsilon y) - u(x + \delta e_n + \epsilon y)] \phi(y) dm_{n-1}(y) \right| \\ &\leq c \int_B |u(x + \epsilon y) - u(x + \delta e_n + \epsilon y)| dm_{n-1}(y) \\ &\leq c \int_B \int_0^\delta |\nabla u(x + \epsilon y + te_n)| dm_1(t) dm_{n-1}(y) \\ &= c \int_{B \times [0, \delta/\epsilon]} |\nabla u(x + \epsilon z)| dz \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$|\nabla u| \in L^1(Q)$ olduğundan, $\delta \rightarrow 0$ iken son integral sıfıra gider. Bundan dolayı u_ϵ , e_n yönünde düzgün sürekli olur. Böylece Q nun tümünde de olur.

Geriye $W^{1,p(\cdot)}(Q)$ da $u_\epsilon \rightarrow u$ olduğunu göstermek kaldı. Q bölgesinin $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = t\}$ hiperdüzleminin arakesiti Q_t ile gösterilsin. $p(\cdot)$, Q_t de sabit olduğundan (buna p_t diyelim); sabit Lebesgue uzayındaki kaydırma operatörünün sürekliliğinden, $u \in L^{p_t}(Q_t, m_{n-1})$ olan t değerleri için, $z \rightarrow 0$ olduğunda

$$\int_{Q_t} |u(x + z) - u(x)|^{p_t} dm_{n-1}(x) =: F_z(t) \rightarrow 0$$

çıkar. Açıkça

$$F_{\epsilon y}(t) \leq \int_{Q_t} |u(x + \epsilon y)|^{p_t} + |u(x)|^{p_t} dm_{n-1}(x) = 2 \int_{Q_t} |u(x)|^{p_t} dm_{n-1}(x) =: G(t)$$

olur. Böylece $\int_{\mathbb{R}} F_{\epsilon y}(t) dt \leq 2\rho_{p(\cdot)}(u) < \infty$ elde edilir. Bundan dolayı hemen hemen her $t \in \mathbb{R}$ için $u \in L^{p_t}(Q_t, m_{n-1})$ ve $F_{\epsilon y}$ integrallenebilir bir G üst sınıra sahip olur. Böylece Fubini teoreminden

$$\begin{aligned}
\int_Q |u_\epsilon(x) - u(x)|^{p(x)} dx &\leq c \int_Q \frac{1}{|\epsilon B|} \int_{\epsilon B} |u(x+z) - u(x)|^{p(x)} dm_{n-1}(z) dx \\
&= \frac{1}{|\epsilon B|} \int_{\epsilon B} \int_{\mathbb{R}} F_z(x) dt dm_{n-1}(z)
\end{aligned}$$

bulunur.

$F_z \rightarrow 0$ ve $F_z \leq G \in L^1(\mathbb{R})$ olduğundan, Lebesgue yakınsaklık teoreminden, $|z| \rightarrow 0$, iç integral sıfıra gider. Buradan $L^{p(\cdot)}(Q)$ uzayında $u_\epsilon \rightarrow u$ olur.

Gradyen için yakınsama sonucu benzerdir. Bu durumda

$$\nabla u_\epsilon(x) = \int_B [\nabla u(x + \epsilon y)] \phi(y) dm_{n-1}(y)$$

özdeşliği vardır. Bundan dolayı önceki düşünce ∇u ya uygulanır ve böylece $\|\nabla(u_\epsilon - u)\|_{p(\cdot)} \rightarrow 0$ olur.

Böylece $u_\epsilon \in W^{1,p(\cdot)}(Q)$ kompakt destekli u fonksiyonuna yaklaştığını gösterir.

$u \in W^{1,p(\cdot)}(Q)$ kompakt destekli olmayan genel bir fonksiyon olsun. Q_i merkezi orjinde kenar uzunluğu $2 - 2^{1-i}$ olan küp olsun. $A_2 = Q_2$ ve daha büyük i için $A_i = Q_i \setminus Q_{i-2}$ olarak tanımlansın. Bu durumda ϕ_i nin kompakt desteği A_i de olacak biçimde Lipschitz ϕ_i fonksiyonlarından oluşan bir birimin parçalanışı bulunabilir. $L_i \geq 1$, ϕ_i nin Lipschitz sabiti olsun. $\phi_i u$ fonksiyonu Q da kompakt desteğe sahip olur. Böylece önceki düşünceyle beraber $\|\phi_i u - v_i\|_{1,p(\cdot)} \leq 2^{-i}\epsilon/L_i$ olacak şekilde desteği A_i de olan $v_i \in Q$ var olduğunu gösterir. Bu durumda $v = \sum_{i=2}^{\infty} v_i$ sürekli olur ve

$$\|u - v\|_{1,p(\cdot)} \leq \sum_{i=2}^{\infty} \|\phi_i u - v_i\|_{1,p(\cdot)} \leq \sum_{i=2}^{\infty} (1 + L_i) 2^{-i}\epsilon/L_i \leq 2\epsilon$$

olarak yazılabilir.

Hemen belirtelim $p_- > 1$ ise bu durumda u_ϵ sürekliliği hakkında daha fazla şey söylenebilir. Önceki ispata

$$|u_\epsilon(x) - u_\epsilon(x + \delta e_n)| \leq c \int_{B \times [0, \delta/\epsilon]} |\nabla u(x + \epsilon y)| dy$$

kestirimi elde edilmişti.

$|\nabla u| \in L^{p^-}(\Omega)$ olduğundan, Hölder eşitsizliği ile beraber

$$\begin{aligned} & |u_\epsilon(x) - u_\epsilon(x + \delta e_n)| \\ & \leq c \left| B \times \left[0, \frac{\delta}{\epsilon}\right] \right|^{1 - \frac{1}{p^-}} \left(\int_{B \times [0, \delta/\epsilon]} |\nabla u(x + \epsilon y)|^{p^-} dy \right)^{\frac{1}{p^-}} \leq c \left(\frac{\delta}{\epsilon} \right)^{1 - \frac{1}{p^-}} \end{aligned}$$

olur. Böylece u_ϵ , Q nun kompakt alt kümelerinde $\left(1 - \frac{1}{p^-}\right)$ – Hölder sürekli olur.

Önerme 3.4.2.3.3. den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4.2.4.2. $Q = (0, 1)^n$ ve $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$, L – bilipschitz olsun. $q(\cdot) \in P(Q)$ sadece n . koordinata bağlı sınırlı bir değişken üs ve $p = q \circ f^{-1}$ olarak tanımlansın. Bu durumda, $C(f(Q)) \cap W^{1,p(\cdot)}(f(Q))$, $W^{1,p(\cdot)}(f(Q))$ uzayında yoğun olur (Hastö 2007), (Diening ve ark. 2011).

Eğer bir üs tam lokal ekstremuma sahip ise önceki sonucun varsayımını asla sağlamaz. Bunun için farklı bir modele ihtiyaç vardır.

Lemma 3.4.2.4.3. Sınırlı $p(\cdot) \in P(B(0, R))$ üssün sadece $|x|$ bağlı olduğunu varsayalım. Bu durumda $C(B(0, R)) \cap W^{1,p(\cdot)}(B(0, R))$, $W^{1,p(\cdot)}(B(0, R))$ de yoğun olur (Hastö 2007), (Diening ve ark. 2011).

İspatın esası önceki lemma ile aynıdır.

Önerme 3.4.2.3.3. aşağıdakini verir.

Sonuç 3.4.2.4.4. $B = B(0, R)$ de, $f : B \rightarrow \mathbb{R}^n$, L – bilipschitz olsun. $q(\cdot) \in P(B)$ sadece $|x|$ bağlı sınırlı bir üs ve $p = q \circ f^{-1}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $C(f(B)) \cap W^{1,p(\cdot)}(f(B))$, $W^{1,p(\cdot)}(f(B))$ de yoğun olur (Hastö 2007), (Diening ve ark. 2011).

Teorem 3.4.2.4.5. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık bir bölge olsun. i indisi sayıları için, $\psi_i(x) > 0$ sağlayanların lokal sınırlı olduğu; ψ_i bilipschitz fonksiyonlarının bir birimin parçalanışına bağlı olarak (Ω_i) ler, Ω nın bir açık örtüsü olsun. Ayrıca her i için Ω_i kümesi

sonuç 3.4.2.4.2. veya 3.4.2.4.4. koşullarını sağladığını varsayalım. Bu durumda $C(\Omega) \cap W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun olur (Hastö 2007), (Diening ve ark. 2011).

İspat ψ_i nin bilipschitz sabitini L_i ile gösterilsin. $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Sonuç 3.4.2.4.2. veya 3.4.2.4.4. ten, $C(\Omega_i) \cap W^{1,p(\cdot)}(\Omega_i)$ nin $W^{1,p(\cdot)}(\Omega_i)$ uzayında yoğun olduğuna varılır. Bundan $\|u - v_i\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega_i)} \leq \epsilon 2^{-i} / L_i$ olacak biçimde $v_i \in C(\Omega_i) \cap W^{1,p(\cdot)}(\Omega_i)$ seçilebilir. Bu durumda $v = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i v_i$ süreklidir ve

$$\|u - v\|_{p(\cdot)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i(u - v_i)\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega_i)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} (1 + L_i) \|u - v_i\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega_i)} \leq \epsilon$$

olur. Bu da iddiayı ispatlar.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

3. bölümün 3.4.2. kesiminde araştırmacıların regüler fonksiyonların yoğunluğu ile ilgili yaptığı çalışmaları (Deining ve ark. 2011) kaynağından yararlanarak ispatlarıyla verdik. Şimdi araştırmacıların yaptığı çalışmaların kısa bir özetini ortaya koyup, sonra kendi çalışmalarımızın ifade ve ispatlarını vereceğiz.

Değişken üslü uzaylarda çok önemli olduğu görülen log -Hölder süreklilik koşulunun Tanım 3.3.1. de yaptığımızı hatırlatalım.

$C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun olduğu değişken üslü uzaylarda gösterilen ilk temel özellikler arasındaydı (Kovacık ve Rakosnik 1991). Fakat bu ispat doğrudan konvolüsyona dayanmadığı için doğrudan değişken üslü Sobolev uzaylarında yoğunluk problemine bir katkı yapmamıştır.

Düzgün fonksiyonların değişken üslü Sobolev uzaylarında her zaman yoğun olmadığını aşağıdaki örnekle görebiliriz.

$\Omega = \{x = (x_1, x_2) : |x| < 1\}$ olsun.

$$p(x) = \begin{cases} \alpha, & x_1 x_2 > 0 \text{ için} \\ \beta, & x_1 x_2 < 0 \text{ için} \end{cases}$$

ise, bu durumda $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun değildir. $1 < \alpha < 2 < \beta$ ise bu durum Zhikov örneği olarak bilinir (Zhikov 1997), (Zhikov 2004), (Diening ve ark. 2011). Burada dikkat edilirse $p(\cdot)$ üs fonksiyonu sürekli alınmamıştır.

C^∞ uzayındaki fonksiyonların $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğunluğu için ilk yeterli koşulu, $p(\cdot)$ üzerinde kısaca monotonluk şartı diyebileceğimiz bir koşul bırakarak, Edmunds ve Rakosnik (1992) verdi. Şimdi bu sonucu ifade etmeden önce köşesi orjinde olan V konisini

$$V = V_{\xi,h} = \cup_{0 < t \leq 1} B(t\xi, th), \quad 0 < h < |\xi|.$$

olarak göz önüne alalım.

Ω açık bir küme, $p(\cdot) \in P(\Omega)$ sınırlı bir üs olsun. Ayrıca $p(\cdot)$ üssü şu koşulu da sağlasın. Her bir $x \in \Omega$ için $r = r(x) \in (0, 1]$, $h = h(x) \in (0, \infty)$ sayıları ve $\xi = \xi(x) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vektörü,

$$h < |\xi| \leq 1, \quad B(x, r) + V(x) \subset \Omega$$

ve

$$\text{h.h.h. } x \in \Omega, y \in V(x) = V_{\xi(x), h(x)} \text{ için } p(x) \leq p(x+y)$$

sağlayacak biçimde var olsunlar.

Bu durumda $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$, $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun olur.

Örnek olarak, $\Omega \subset \mathbb{R}$ açık alt kümelerinde sınırlı monoton $p(\cdot)$ üs için C^∞ fonksiyonlarının $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun olacağı ortaya çıkar.

Samko (2000) lokal log-Hölder ve $1 \leq p(x) \leq p_+ < \infty$ koşulu altında $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayının $W^{m,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olduğunu göstermiştir.

$\mathbb{R}^n$ deki bölgelerde $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayları için benzer bir sonuç (Fan ve Zhao 2001) çalışmasında verildi. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de sınırlı açık bir küme; üs, lokal log-Hölder ve $1 \leq p(x) \leq p_+ < \infty$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $C_0^\infty(\Omega) \cap W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$, $W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun olur.

Ayrıca Deining (2004) maksimal operatörünün sınırlılığından faydalananarak şu sonucu elde etti: $\Omega, \mathbb{R}^n$ de Lipschitz sınıma sahip sınırlı bir bölge olsun. $p(\cdot)$, maksimal operatörünün $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlı olacak şekilde ise, bu durumda $C^\infty(\overline{\Omega})$, $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun olur.

Samko (2000) yukarıdaki sonucu elde ederken konvolüsyon operatörünün $L^{p(\cdot)}$ uzayında, ϵ göre, düzgün sınırlı olduğunu göstererek yaptı. Bu durumu biraz açıklayalım. Ω sınırlı bir bölge; K desteği $B(0, R)$ yuvarında olan ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$K_\epsilon u = \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\Omega} K\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) u(y) dy$$

olsun. Bunun yanında $\Omega_R = \{x : \text{dist}(x, \Omega) \leq R\}$ olarak tanımlansın. $p(\cdot)$ üssün Ω_R de tanımlandığını varsayalım ve $(\Omega_R)_1 = \{x \in \Omega_R : p(x) = 1\}$ olsun.

$$Q = \begin{cases} \sup_{x \in \Omega_R} \frac{p(x)}{p(x)-1}, & |(\Omega_R)_1| = 0 \text{ ise} \\ \infty, & |(\Omega_R)_1| > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda Samko (2000) aşağıdaki sonucu elde etti.

$K(x) \in L^Q B(0, R)$, $x \in \Omega_R$ için $1 \leq p(x) \leq p_+ < \infty$, ve $p(x)$, Ω_R de lokal log-Hölder koşulunu sağlasın. Bu durumda c, ϵ bağlı olmadan

$$\|K_\epsilon u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_R)} \leq \|u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

olur. Eğer $\int_{B(0,R)} K(y) dy = 1$ ise bu durumda $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|K_\epsilon u - u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega_R)} = 0$$

elde edilir.

C^∞ fonksiyonlarının değişken üslü Sobolev uzaylarında yoğun olamayabileceği Zhikov (1997) tarafından gösterildikten sonra düzgünlüğü daha az olan fonksiyonların değişken üslü Sobolev uzaylarında yoğunluklarını araştırmak daha çok önemli oldu. Bu yöndeki önemli çalışmalardan biri Hastö (2007) tarafından yapıldı. 3. bölümde sürekli fonksiyonların değişken üslü Sobolev uzaylarında yoğun olması için yeterli koşullar verilmiştir. Bizim çalışmamız da daha çok bu makaleden doğan sorulardan biri ile ilgilidir. Bu sorulardan biri şöyledir:

$C(\Omega)$ veya $C^\alpha(\Omega)$ uzayının $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun olduğunu varsayalım. Bu durumda düzgün fonksiyonlar $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında yoğun olur mu?

Biz de benzer bir şekilde $C^1(\mathbb{R}^n)$ uzayı $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun ise bu durumda düzgün fonksiyonlar $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olur mu? Sorusunu araştırdık. Sonucumuz aşağıdaki teoremdedir.

Teorem 4.1. $p(\cdot) \in P(\mathbb{R}^n)$ sınırlı bir üs ve $C^1(\mathbb{R}^n)$ uzayı $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında

yoğun ise bu durumda $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayı da $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olur (Kaya 2014).

İspat Önce $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ normuna göre $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ uzayının $C^1(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olduğunu gösterelim. $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ verilsin. $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ orjinin bir komşuluğunda 1 ve $0 \leq \eta \leq 1$ biçiminde kompakt destekli bir fonksiyon olsun. $R > 0$ için, $u_R(x) = u(x) \eta\left(\frac{x}{R}\right)$ olarak tanımlayalım. Buradan $u_R \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ olur. $p(\cdot)$ sınırlı olduğundan, $R \rightarrow \infty$ iken $\|u_R - u\|_{p(\cdot)} \rightarrow 0$ yerine

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_R - u|^{p(x)} dx \rightarrow 0$$

göstermek yeterli olur.

Lebesgue baskın yakınsaklık teoremindan

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_R - u|^{p(x)} dx \rightarrow 0$$

olduğu görülür. Yani $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında, $R \rightarrow \infty$ için, $u_R \rightarrow u$ olur. Çarpım kuralından:

$$\nabla u_R(x) = (\nabla u)(x) \eta\left(\frac{x}{R}\right) + \frac{1}{R} u(x) (\nabla \eta)\left(\frac{x}{R}\right)$$

çıkar.

$$\begin{aligned} \|(\nabla u_R)(x) - (\nabla u)(x)\|_{p(\cdot)} &= \left\| (\nabla u)(x) \eta\left(\frac{x}{R}\right) + \frac{1}{R} u(x) (\nabla \eta)\left(\frac{x}{R}\right) - (\nabla u)(x) \right\|_{p(\cdot)} \\ &\leq \left\| (\nabla u)(x) \eta\left(\frac{x}{R}\right) - (\nabla u)(x) \right\|_{p(\cdot)} \\ &\quad + \frac{1}{R} \left\| u(x) (\nabla \eta)\left(\frac{x}{R}\right) \right\|_{p(\cdot)} \end{aligned}$$

olur. $R \rightarrow \infty$ için, yine $p(\cdot)$ sınırlı olduğundan, ilk terimdeki norm yerine modular kullanıldığında Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden bu terimin sıfıra gittiği görülür. İkinci terimin sıfıra gittiği açıktır.

Şimdi de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayının $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olduğunu gösterelim.

$u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ kompakt desteğe sahip olduğundan $\text{spt } u = K$ olarak gösterelim.

$$K_{\delta(\epsilon)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, K) \leq \delta(\epsilon)\}$$

olarak tanımlayalım. $\delta(\epsilon)$ daha sonra belirleyeceğiz. İleride $0 < \delta(\epsilon) < 1$ olarak alacağız. Bu koşul altında ∇u ve u , $K_{\delta(\epsilon)}$ üzerinde düzgün sürekli fonksiyonlar olurlar.

$0 < \epsilon < 1$ seçelim,

$$|u(x-y) - u(x)| < \epsilon \text{ iken } |y| < \delta_1(\epsilon)$$

olur. $\delta_1(\epsilon) < \epsilon$ seçilebilir.

$$|\nabla u(x-y) - \nabla u(x)| < \epsilon \text{ iken } |y| < \delta_2(\epsilon)$$

olur. $\delta_2(\epsilon) < \epsilon$ seçilebilir.

$$\delta(\epsilon) = \min\{\delta_1(\epsilon), \delta_2(\epsilon)\}$$

olsun. Böylece $\delta(\epsilon)$ bulmuş olduk.

Uygun ϕ ve $\delta(\epsilon)$ den standart bir mollifier oluşturulabilir, şimdi yakınsamaya geçebiliriz.

$$\|u * \phi_{\delta(\epsilon)} - u\|_{W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \|u * \phi_{\delta(\epsilon)} - u\|_{p(\cdot)} + \|\nabla u * \phi_{\delta(\epsilon)} - \nabla u\|_{p(\cdot)}$$

olarak yazılabilir. $p(\cdot)$ sınırlı üs olduğundan, yakınsamayı yukarıdaki norm yerine modulları kullanarak gösterelim.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{B(0, \delta(\epsilon))} |u(x-y) - u(x)| \phi_{\delta(\epsilon)}(y) dy \right|^{p(x)} dx \\ & \leq \epsilon^{p^-} |K_{\delta(\epsilon)}| \end{aligned}$$

olur. İkinci parçaya geçelim.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{B(0, \delta(\epsilon))} |\nabla u(x-y) - \nabla u(x)| \phi_{\delta(\epsilon)}(y) dy \right|^{p(x)} dx \\ & \leq \epsilon^{p_-} |K_{\delta(\epsilon)}| \end{aligned}$$

elde edilir. $|K_{\delta(\epsilon)}| < \infty$ olduğundan yakınsamanın gerçekleştiği görülür.

Böylece $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ uzayı $C^1(\mathbb{R}^n)$ uzayında; $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayı da $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olduğu gösterilmiş olur. Teoremden varsayılan, elde edilen yoğunluklar ve normun üçgen eşitsizliği kullanılarak rahatlıkla $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayında $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olduğu görülür.

Zayıf yakınsaklığın değişken üslü Sobolev uzaylarında Lipschitz kesim (truncation) yöntemindeki yoğunluk durumlarında yararlı olduğu bilinmektedir. Bu ve diğer nedenlerle elde ettiğimiz bir başka sonuç aşağıdaki teoremden verilmiştir. Bu sonuç klasik sabit üs için bilinen durumu değişken üslüye genelleştirmektedir.

Teorem 4.2. (X, M, μ) bir σ -sonlu ölçüm uzayı $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ olarak verilsin. $u_n, L^{p(\cdot)}(X, M, \mu)$ uzayında bir dizi ve $u \in L^{p(\cdot)}(X, M, \mu)$ olsun. Ayrıca u_n

i) X' h.h.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$

ii) $\rho(u_n) \leq K, K > 0$

koşullarını olsun.

Bu durumda u_n fonksiyon dizisi u fonksiyonuna $L^{p(\cdot)}(X, M, \mu)$ uzayında zayıf yakınsar (Kaya 2015).

İspat

$$p_* = \begin{cases} p_-, & \|u\|_{p(\cdot)} > 1 \text{ ise} \\ p_+, & \|u\|_{p(\cdot)} < 1 \text{ ise} \\ 1, & \|u\|_{p(\cdot)} = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Buradan

$$\|u\|_{p(\cdot)} \leq (\rho(u))^{\frac{1}{p_*}} \quad (4.1)$$

elde edilir.

Şimdi de, her $v \in L^{p'(\cdot)}(X, M, \mu)$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X u_n(x) v(x) d\mu = \int_X u(x) v(x) d\mu \quad (4.2)$$

olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için Fatou teoreminden

$$\begin{aligned} \int_X |u(x)|^{p(x)} d\mu &= \int_X |\liminf u_n(x)|^{p(x)} d\mu \\ &\leq \liminf \int_X |u_n(x)|^{p(x)} d\mu \leq K \end{aligned}$$

olduğundan

$$\int_X |u(x)|^{p(x)} d\mu \leq K$$

çıkar. Herhangi $A \in M$ için,

$$\begin{aligned} \int_A |u_n(x) - u(x)|^{p(x)} d\mu &\leq \int_X |u_n(x) - u(x)|^{p(x)} d\mu \\ &\leq 2^{p_+} \left(\int_X |u_n(x)|^{p(x)} d\mu + \int_X |u(x)|^{p(x)} d\mu \right) \\ &\leq 2^{p_++1} K < \infty \end{aligned}$$

olduğu görülür.

$v \in L^{p'}(X, M, \mu)$ ve $0 < \epsilon \leq 1$ olarak verilsin. $\int_X |v(x)|^{p'(x)} d\mu < \infty$ olduğundan, integralin mutlak yakınsaklığından $\mu(E) < \delta$, $E \in M$ için,

$$\int_E |v(x)|^{p'(x)} d\mu < \epsilon$$

yazılabilir.

(X, M, μ) bir σ -sonlu ölçüm uzayı olduğundan $\mu(F_k) < \infty$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k = \cup_{k \in \mathbb{N}} F_k = X$ olacak biçimde M de artan bir (F_k) dizisi vardır. Monoton yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{F_k} |v(x)|^{p'(x)} d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \chi_{F_k} |v(x)|^{p'(x)} d\mu = \int_X |v(x)|^{p'(x)} d\mu < \infty$$

elde edilir.

Böylece yeteri kadar $k_0 \in \mathbb{N}$ büyük seçildiğinde

$$\int_X |v(x)|^{p'(x)} d\mu - \int_{F_{k_0}} |v(x)|^{p'(x)} d\mu < \epsilon$$

yazılabilir.

$F = F_{k_0}$ olsun. Bu durumda $\mu(F) < \infty$ ve

$$\int_{F^c} |v(x)|^{p'(x)} d\mu < \epsilon$$

olur.

X' te h.h.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ olduğundan, F' te de h.h.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ olur. Diğer taraftan $\mu(F) < \infty$ olduğundan Egoroff teoreminden G de düzgün olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ yakınsayacak ve $G \subset F$, $\mu(F \setminus G) < \delta$ olacak biçimde $G \in M$ vardır.

$\int_X |v(x)|^{p'(x)} d\mu = 0$ ise bu durumda h.h.h. $v = 0$ olur, (6, 2) sağlanır.

$\int_X |v(x)|^{p'(x)} d\mu > 0$ durumuna göre inceleyelim. G de düzgün olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ olduğundan $n \geq N$ ve her $x \in G$ için

$$|u_n(x) - u(x)| < \epsilon$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $n \geq N$ için

$$\int_G |u_n(x) - u(x)|^{p(x)} d\mu < \epsilon^{p^-} \mu(G)$$

elde edilir. Şimdi $F \setminus G$, G , F^c kümeleri ayrıktır ve bileşimleri X 'e eşit olur. Böylece $n \geq N$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \int_X u_n(x) v(x) d\mu - \int_X u(x) v(x) d\mu \right| \\
& \leq \int_X |u_n(x) - u(x)| |v(x)| d\mu \\
& = \int_{F \setminus G} |u_n(x) - u(x)| |v(x)| d\mu + \int_G |u_n(x) - u(x)| |v(x)| d\mu \\
& \quad + \int_{F^c} |u_n(x) - u(x)| |v(x)| d\mu
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son üç integrali Hölder eşitsizliğinden ve (4.1) özelliğinden kestirelim.

Yukarıdaki üç integralin ilki için,

$$\begin{aligned}
& \int_{F \setminus G} |u_n(x) - u(x)| |v(x)| d\mu \\
& \leq C \|u_n(x) - u(x)\|_{p(\cdot)} \|v(x)\|_{p'(\cdot)} \\
& \leq C (2^{p_+ + 1} K)^{\frac{1}{p_*}} \epsilon^{\frac{1}{p'_*}}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

olur.

İkinci integral için

$$\begin{aligned}
& \int_G |u_n(x) - u(x)| |v(x)| d\mu \\
& \leq C \|u_n(x) - u(x)\|_{p(\cdot)} \|v(x)\|_{p'(\cdot)} \\
& \leq C \left(\int_G |u_n(x) - u(x)|^{p(x)} d\mu \right)^{\frac{1}{p_*}} \|v(x)\|_{p'(\cdot)} \\
& \leq C (\epsilon^{p_-} \mu(G))^{\frac{1}{p_*}} \|v(x)\|_{p'(\cdot)}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

olur.

Son olarak üçüncü integral için

$$\begin{aligned}
& \int_{F^c} |u_n(x) - u(x)| |v(x)| d\mu \\
& \leq C \|u_n(x) - u(x)\|_{p(\cdot)} \|v(x)\|_{p'(\cdot)} \\
& \leq C \left(\int_{F^c} |u_n(x) - u(x)|^{p(x)} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}} \|v(x)\|_{p'(\cdot)} \\
& \leq C (2^{p_++1} K)^{\frac{1}{p^*}} \epsilon^{\frac{1}{p'_{I^*}}}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

çıkar.

Böylece bu üç integral için yapılan kestirimler toplandığında ve $n \geq N$ alındığında

$$\begin{aligned}
& \left| \int_X u_n(x) v(x) d\mu - \int_X u(x) v(x) d\mu \right| \\
& < C (2^{p_++1} K)^{\frac{1}{p^*}} \epsilon^{\frac{1}{p'_{I^*}}} + C (\epsilon^{p_-} \mu(G))^{\frac{1}{p^*}} \|v(x)\|_{p'(\cdot)} + C (2^{p_++1} K)^{\frac{1}{p^*}} \epsilon^{\frac{1}{p'_{I^*}}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bilindiği gibi eğer

$$\|u * \phi_\epsilon\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \|u\|_{L^{p(\cdot)}}$$

konvoltüsyon eşitsizliğinin varlığı bir $p(x)$ sınıfı için gösterilebilirse düzgün fonksiyonların yoğunluğunu değişken üslü Sobolev uzaylarında da gösterilebilir. Bu yönde önemli bir adım Samko (2000) tarafından atılmıştır. Ancak Samko

$$\int_{\Omega} |K_\epsilon u(x)|^{p(x)} dx$$

modularından yararlanarak bunu log-Hölder koşulunu kullanarak yapmıştır. Bilindiği gibi değişken üslü Lebesgue uzaylarında Luxemburg normuna denk başka bir norm

$$\|f(x)\|_{L^{p(x)}} = \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \int f(x) g(x) dx$$

olarak tanımlanır. Şimdi yukarıdaki bu norm için

$$\|u * \phi_\epsilon\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \|u\|_{L^{p(\cdot)}}$$

eşitsizliğinin elde edilip elde edilemeyeceğine bakalım.

Önce p sabit alalım. Bu durumda Fubini teoremi yardımıyla

$$\begin{aligned} \|u * \phi_\epsilon\|_{L^{p(\cdot)}} &= \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(0,\epsilon)} u(x-y) \phi_\epsilon(y) dy g(x) dx \\ &= \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \int_{B(0,\epsilon)} \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) g(x) dx \phi_\epsilon(y) dy \\ &\leq \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \int_{B(0,\epsilon)} \|u\|_{L^{p(\cdot)}} \phi_\epsilon(y) dy \\ &= \|u\|_{L^{p(\cdot)}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ispata çok önemli kritik bir nokta

$$\|g(x)\|_{p'} = \|g(x-y)\|_{p'}$$

olmasının sağlanmasıdır. Bilindiği gibi p değişken olduğunda bu her bir g fonksiyonu için bu durum sağlanmaz. Bu nedenle aşağıdaki açık soruyu ortaya atıyoruz.

Açık Soru 4.3. $p(\cdot) \in P(\mathbb{R}^n)$ sınırlı bir üs olsun. Bu durumda

$$\|f(x)\|_{L^{p(x)}} = \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) dx$$

normunu kullanarak değişken bir $p(x)$ sınıfı için

$$\|u * \phi_\epsilon\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \|u\|_{L^{p(\cdot)}}$$

eşitsizliğin ispatını doğrudan elde etmek mümkün müdür?

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

(Hastö 2007) de belirtildiği gibi, değişken üslü Sobolev uzaylarında düzgün fonksiyonların yoğunluğu için gerek ve yeter koşul oldukça zordur. Değişik araştırmacılar bu konuya katkı yapmasına rağmen hala önemli boşluklar vardır. Bizim bu çalışmalarımızdan biri, $C^1(\mathbb{R}^n)$ uzayının $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olma koşulu altında $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayının da $W^{1,p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğun olduğunun gösterilmesidir. İleride $C^1(\mathbb{R}^n)$ koşulu yerine $C(\mathbb{R}^n)$ koşulunu alarak değişken üslü Sobolev uzayında yoğunluk göstermeye çalışmak oldukça mantıklı olacaktır. Değişken üslü Lebesgue uzayı orta sürekli olmadığından yoğunluk için yeni yöntem ve tekniklerin bulunması gerekebilir. Ayrıca

$$\sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \int f(x) g(x) dx$$

normu altında da çalışma yapmak faydalı olabilir. İlk önce klasik uzaylar için bu norm ile yeni yoğunluk yollarını araştırmanın gerektiği açıktır.

Yine

$$\int f(x-y) \phi_\epsilon(y) dy$$

konvolüsyonunu modifiye etmeye çalışmakta faydalı olabilir, örneğin ϵ' ları eşit almak yerine farklı almak gibi veya f yerine f ye yakınsayabilen ϵ' na bağlı bir dizi olmak gibi.. Bunun üzerinde de çalıştık sabit p için istenen durumun sağladığını elde ettik ancak yöntemimizi $p(x)$ uygulamaya kalkıştığımızda bunun çalışmadığını gördük.

Bunun yanında noktasal yakınsaklıktan zayıf yakınsaklığın elde edilebileceğini gösteren bir teorem ispatlanmıştır.

6. KAYNAKLAR

- Aboulaich, R., Boujena S., El Guarmah E. 2007. Sur un mod'ele non-lin'eaire pour le d'ebruitage de l'image. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 345(8):425–429.
- Aboulaich, R., Meskine, D., Souissi, A. 2008. New diffusion models in image processing. Comput. Math. Appl., 56(4):874–882.
- Acerbi, E., Mingione, G. 2002. Regularity results for electrorheological fluids: the stationary case. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 334(9):817–822.
- Acerbi, E., Mingione, G. 2002. Regularity results for stationary electro-rheological fluids. Arch. Ration. Mech. Anal., 164(3):213–259.
- Acerbi, E., Mingione, G. 2005. Gradient estimates for the $p(x)$ –Laplacean system. J. Reine Angew. Math., 584:117–148, 2005.
- Adams, R. A., Fournier, J. J. F. 2003. Sobolev Spaces. Academic Press. New York.
- Amaziane, B., Pankratov, L., Piatnitski, A. 2009. Nonlinear flow through double porosity media in variable exponent Sobolev spaces. Nonlinear Anal. Real World Appl., 10(4):2521–2530.
- Antontsev, S. N., Shmarev, S. I. 2005. A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions. Nonlinear Anal., 60(3):515–545, 2005.
- Bennett, C., Sharpley, R. 1988. Interpolation of Operators, volume 129 of Pure and Applied Mathematics. Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.
- Blomgren, P., Chan, T., Mulet, P., Wong, C. K. 1997. Total variation image restoration: numerical methods and extensions. In Proceedings

of the 1997 IEEE International Conference on Image Processing, volume III, pages 384–387, 1997.

Bolt, E. M., Chartrand, R., Esedoğlu, S., Schultz, P. Vixie, K. R. 2009. Graduated adaptive image denoising: local compromise between total variation and isotropic diffusion. *Adv. Comput. Math.*, 31(1–3):61–85.

Brezis, H. 2011. *Functional analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations*. Springer.

Burenkov, V. I. 1998. *Sobolev Spaces on Domains*. Vieweg+Teubner Verlag.

Chen, Y., Guo, W., Zeng, Q., Liu, Y. 2008. A nonstandard smoothing in reconstruction of apparent diffusion coefficient profiles from diffusion weighted images. *Inverse Probl. Imaging*, 2(2):205–224.

Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A. 2007. Approximate identities in variable L^p spaces. *Math. Nachr.*, 280: 256–270.

Cruz-Uribe, DV., Fiorenza, A. 2013. *Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis*. Birkhäuser.

Çekiç, B., Kalinin, A.V., Mashiyev, R. A., Avcı, M. 2012. $l^{p(x)}(\omega)$ - estimates for vector fields and some applications to magnetostatics problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 389(2):838–851.

Dafni, G., Xiao, J. 2004. Some new tent spaces and duality theorems for fractional Carleson measures and $Q_\alpha(\mathbb{R}^n)$. *J. Funct. Anal.* 208: 377–422.

DiBenedetto, E. 2002. *Real Analysis*. Birkhäuser.

Diening, L. 2004. Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$. *Math. Inequal. Appl.* 7(2):245–253.

Diening, L. 2005. Maximal function on Musielak-Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces. *Bull. Sci. Math.*, 129(8):657–700.

Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P., Růžička, M. 2011. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 2017, Springer-Verlag, Heidelberg.

Duren, P. 2012. *Invitation to Classical Analysis*. American Mathematical Society

Edgar, G. 2010. *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Springer.

Edmunds, D. E., Rakosnik, J. 1992. Density of smooth functions in $W^{k,p(x)}(\Omega)$, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A* 437. 229,236.

Edmunds, D. E., Lang, J., Nekvinda A. 1999. On $L^{p(x)}$ norms. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 455(1981):219–225.

Evans, L., Gariepy, R. 1992. *Measure theory and fine properties of functions*. *Studies in Advanced Mathematics*. CRC Press, Boca Raton, FL.

Fan, X. L., Zhao, D. 2001. On the Spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. *J. Math. Anal. Appl.* 263:424–446.

Folland, G.B. 1999. *Real Analysis*. Wiley.

Gilbarg, D., Trudinger, N.S. 1998. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, Berlin.

Harjulehto, P., Hästö, P. 2003. An overview of variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces D. Herron (Ed.), *Future Trends in Geometric Function Theory*, RNC Workshop, Jyväskylä. 85–93.

Harjulehto, P., Hästö, P. 2004. Lebesgue points in variable exponent spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 29. 295–306.

Harjulehto, P., Hastö P., Latvala V., Toivanen O. 2013. Critical variable exponent functionals in image restoration. Appl. Math. Let., Volume 26:56-60.

Hastö, P. 2007. On the density of smooth functions in variable exponent Sobolev space. Rev. Mat. Iberoamericana, 23:215–237.

Hunter, C.K. 2001. Applied Analysis.Wspc.

Jost, J. 2005. Postmodern Analysis.Springer.

Jones, F. 2000. Lebesgue Integration On Euclidean Space.Jones & Bartlett Learning.

Kaya, Y. 2014. Density of $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^n)$ with assumption density of $C^1(\mathbb{R}^n)$. Int. J. Appl. Math. vol.27.No.6:519-523.

Kaya, Y. 2015. A weakly convergence result on $L^{p(x)}$ spaces.Mathematical and Computational Applications. Yayına kabul edildi

Kopaliani, T. 2008. On the Muckenchaup condition in variable Lebesgue spaces. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 148:29–33.

Kovacik, O., Rákosník, J. 1991. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$. Czechoslovak Math. J. 41(116): 592–618.

Kozlov, S. M. 1983. Duality of a type of functionals. Funktsional. Anal. i Prilozhen., 17(3):9–14.

Krantz, S.G., Parks, H.R. 1999. The Geometry of Domains in Space. Birkhäuser.

Leoni, G. 2009. A First Course in Sobolev Spaces (Graduate Studies in Mathematics).American Mathematical Society.

Lerner, A. K. 2010. On some questions related to the maximal operator on variable L^p spaces.Trans. Amer. Math. Soc., 362(8):4229–4242.

Levine, S. 2006. An adaptive variational model for image decomposition. In A. Rangarajan et al., editor, *Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*, volume 3757 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 382–397. Springer-Verlag, Berlin.

Mihailescu, M., Radulescu, V. 2006. A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 462: 2625-2641.

Morrison, T.J. 2011. *Functional Analysis: An Introduction to Banach Space Theory*. Wiley-Interscience.

Nakano, H. 1951. *Topology and Linear Topological Spaces*. Maruzen Co. Ltd., Tokyo.

Nakano, H. 1950. *Modulared Semi-Ordered Linear Spaces*. Maruzen Co. Ltd., Tokyo.

Nekvinda, A. 2004. Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$. *Math. Inequal. Appl.* 7(2):255–265.

Nekvinda, A. 2008. Maximal operator on variable Lebesgue spaces for almost monotone radial exponent. *J. Math. Anal. Appl.*, 337(2):1345–1365, 2008.

Pick, L., Kufner, A., John, O., Fucik, S. 2012. *Function Spaces*. Walter de Gruyter & Co.

Ross, B., Samko, S. 1995. Fractional integration operator of variable order in the Hölder spaces $H^{\lambda(x)}$. *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 18(4):777–788.

Ruzicka, M. 2000. *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*, volume 1748 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin.

Ruzicka, M. 2004. Modeling, mathematical and numerical analysis of electrorheological fluids. Appl. Math., 49(6):565–609.

Samko, S. 2000. Denseness of $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in the generalized Sobolev spaces $W^{m,p(x)}(\mathbb{R}^n)$ –In: Direct and Inverse Problems of Mathematical Physics (Newark, DE, 1997), Int. Soc. Anal. Appl. Comput. 5, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht. 333{342.

Samko, S., Ross, B. 1993. Integration and differentiation to a variable fractional order. Integral Transform. Spec. Funct., 1(4):277–300.

Sharapudinov, I. I. 1979. The topology of the space $L^{p(t)}([0, 1])$ Mat. Zametki, 26(4): 613–632,655.

Sohrab, H.H. 2003. Basic Real Analysis. Birkhauser.

Tsenov, I. V. 1961. Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L^s . Uch. Zap. Dagestan. Gos. Univ., 7:25–37.

Zhikov, V. V. 1982. Problems of convergence, duality, and averaging for a class of functionals of the calculus of variations. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 528.

Zhikov, V. V. 1983. Questions of convergence, duality and averaging for functionals of the calculus of variations. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 47(5):961–998.

Zhikov, V. V. 1986. Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 50(4):675–710, 877.

Zhikov, V. V. 1991. The Lavrent'ev effect and averaging of nonlinear variational problems. Differentsial'nye Uravneniya, 27(1):42–50, 180.

Zhikov, V. V. 1994. On the homogenization of nonlinear variational problems in perforated domains. Russian J. Math. Phys., 2(3):393–408.

Zhikov, V. V. 1995. On Lavrentiev's phenomenon. Russian J. Math. Phys., 3(2):249–269.

Zhikov, V. V. 1997. Meyer-type estimates for solving the nonlinear Stokes system. Differ. Uravn., 33(1):107–114, 143.

Zhikov, V. V. 1997. On some variational problems. Russian J. Math. Phys., 5(1):105–116 (1998).

Zhikov, V. V. 2004. On the density of smooth functions in Sobolev-Orlicz spaces. Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI), 310(Kraev. Zadachi Mat. Fiz. i Smezh. Vopr. Teor. Funkts. 35 [34]):67–81, 226.

Ziemer, W. P. 1987. Weakly Differentiable Functions. Springer-Verlag, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Diyarbakır doğumluyum. İlk ve orta eğitimimi Diyarbakır'da gördüm. Anadolu öğretmen lisesini kazanarak liseyi Malatya'da bitirdim. 2005 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi OFMAE bölümü Matematik Anabilim dalında lisans öğrenimimi, 2008 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansımı tamamladım. Yüksek lisans tezimde "Hardy-Steklov Operatörü" konusunu çalıştım. Şu anda Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi OFMAE bölümü Matematik Anabilim dalında araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.