

**T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DEĞİŞKEN ÜSTLÜ LOKAL MORREY LORENTZ
UZAYLARINDA MAKSİMAL VE RİESZ POTANSİYEL
OPERATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI**

Dursun ALTAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Haziran 2015

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda engin bilgi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren, hoşgörü ve sabrıyla her zaman beni destekleyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Bilal ÇEKİÇ'e,

Tezimi hazırlarken beni sürekli destekleyen ve hep yanımda olan eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
KISALTMA VE SİMGELER.....	V
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1. Normlu Uzak.....	3
2.2. Lebesgue Ölçümü ve Ölçülebilir Fonksiyonlar	7
2.3. Lebesgue Uzayları.....	9
2.4. Hardy ve Hardy-Littlewood Maksimal Operatörleri	11
2.5. Riesz potansiyel ve Singüler Operatörleri.....	13
2.6. Lorentz Uzayları.....	14
2.7. Morrey Uzayları.....	18
2.8. Lorentz-Morrey Uzayları.....	19
2.9. Modüler Uzaylar ve Orlicz Uzayları.....	20
3. MATERYAL VE METOT.....	23
3.1. Değişken Üstlü Lebesgue Uzayları.....	23
3.2. Değişken Üstlü Lorentz Uzayları	30
3.3. Değişken Üstlü Morrey Uzayları	33
4. BULGULAR.....	39
4.1. Değişken Üstlü Lokal Lorentz-Morrey Uzayları.....	39
4.2. Kuvvet Tipli Ağırlıklı Değişken Üstlü Lokal Lorentz-Morrey Uzayları	40
4.3. Hardy-Littlewood Maksimal ve Riesz potansiyel Operatörlerinin Sınırlılığı	41
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	47
6. KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ.....	53

ÖZET

DEĞİŞKEN ÜSTLÜ LOKAL LORENTZ MORREY UZAYLARINDA MAKSİMAL VE
RIESZ POTANSİYEL OPERATÖRÜN SINIRLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dursun ALTAN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2015

Bu çalışmada, $\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^\gamma(\cdot)}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)$ kuvvet tipli ağırlıklı değişken üstlü lokal Morrey Lorentz uzayları tanımlanmış ve bu uzaylarda $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ ve $\gamma(\cdot)$ fonksiyonlarının orijinde ve sonsuzda log-Hölder sürekli olması durumunda Hardy-Littlewood maksimal, kesirli maksimal, Riesz potansiyel ve Hilbert operatörlerinin sınırlılığı ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Değişken üstlü Lebesgue uzayları, Ağırlıklı değişken üstlü lokal Morrey Lorentz uzayları, Hardy operatörü, Hardy-Littlewood maksimal operatörü, kesirli maksimal operatör, Riesz potansiyel operatörü, Hilbert operatörü

ABSTRACT

BOUNDEDNESS OF MAXIMAL OPERATOR AND POTENTIAL OPERATOR IN THE VARIABLE EXPONENT LOCAL MORREY LORENTZ SPACES

M. Sc. THESIS

Dursun ALTAN

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE

2015

In this study, power type weighted local Morrey Lorentz spaces with variable exponent $L_{0,loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)$ are introduced and the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal, fractional maximal, Riesz potential and Hilbert operators are proved in the case of the log Hölder continuity of $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ and $\gamma(\cdot)$ functions both at the origin and at the infinity.

Key Words : Variable exponent Lebesgue spaces, weighted variable exponent local Morrey Lorentz spaces, Hardy operator, Hardy-Littlewood maximal operator, fractional maximal operator, Riesz potential operator, Hilbert operator

KISALTMA VE SİMGELER

$\mathbb{R}^n$	: n – boyutlu öklid uzayı
Ω	: $\mathbb{R}^n$ nin bir alt bölgesi
$ \Omega $	: Ω bölgesinin Lebesgue ölçümü
$\mathcal{M}(\Omega)$	: Ω bölgesinde ölçülebilir fonksiyonlar sınıfı
$L^p(\Omega)$	: Lebesgue uzayı
L^1_{loc}	: Lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
w	: Ağırlık fonksiyonu
$L^p_w(\Omega)$	: Ağırlıklı Lebesgue uzayı
$B(x, r)$	: x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\tilde{B}(x, r)$	: $B(x, r) \cap \Omega$
χ_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$L^{p(\cdot)}(\Omega)$	: Değişken üstlü Lebesgue uzayı
$L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$	: Değişken üstlü Morrey uzayı
$L^{p(\cdot), q(\cdot)}(\Omega)$	: Değişken üstlü Lorentz uzayı
$L^{p(\cdot), q(\cdot), \lambda}(\Omega)$	: Değişken üstlü Lorentz-Morrey uzayı
$L^{p(\cdot), q(\cdot), \lambda}_{0, loc; \cdot ^{\gamma(\cdot)}}(\Omega)$	: Kuvvet tipli ağırlıklı değişken üstlü lokal Lorentz-Morrey uzayı
$\mathbb{H}$	: Hilbert operatörü
M	: Hardy-Littlewood maksimal operatör
$M^\sharp$	: Sharp maksimal operatör
H	: Hardy operatörü
$\mathcal{H}$	: Hardy operatörünün eşleniği
M_α	: Kesirli maksimal operatör
I_α	: Riesz potansiyel operatör

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında Lebesgue, Morrey, Lorentz, Lorentz Morrey uzayları tanıtılmış ve bu uzaylarda Hardy, Hardy-Littlewood maksimal, Riesz potansiyel ve Hilbert operatörlerin sınırlılıkları ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Tezin orjinal bölümünde ise kuvvet tipli ağırlıklı değişken üstlü lokal Morrey Lorentz uzaylarında bu klasik operatörlerin sınırlılıkları ispatlanmıştır.

Değişken üstlü Lebesgue uzayları literatürde ilk defa, Orlicz (1931) tarafından, yazılan makalede görülmüştür. Orlicz uzayları ise u , Ω bölgesinde ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere enaz bir $\lambda > 0$ ve koşulları bilinen bir φ fonksiyonu için

$$I(\lambda u) = \int_{\Omega} \varphi(\lambda |u(x)|) dx < \infty$$

olacak şekildeki fonksiyonlardan oluşan uzaya denir. Ek olarak eğer I fonksiyonu bazı koşulları sağlarsa böyle uzaylara da modüler uzay denir. Bu uzaylar ilk defa sistematik olarak Nakano (1950,1951) tarafından çalışılmış ve değişken üstlü Lebesgue uzayını daha genel uzayların bir örneği olarak göz önüne almıştır. Daha sonra, Musielak (1983) tarafından modüler uzaylar incelenmiştir. Eğer yukarıdaki φ fonksiyonu x değişkenine de bağlı ise bu durumda genelleştirilmiş Orlicz uzayları veya Musielak Orlicz uzayları adı verilen daha genel uzaylar elde edilir.

Değişken üstlü Lebesgue uzaylarının araştırılmasında bir sonraki adım 90 lı yılların başlarında Kováčik ve Rákosník (1991) tarafından atılmıştır. Bu makalede $\mathbb{R}^n$ de değişken üstlü Lebesgue uzaylarının bir çok temel özelliği ortaya konmuştur.

Diening (2002, 2004),

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\log|x-y|}, \quad |x-y| \leq \frac{1}{2} \quad (1.1.1)$$

koşulunu sağlayan ve yeterince büyük yuvarın dışında sabit olan p fonksiyonları için Hardy-Littlewood maximal operatörün değişken üstlü Lebesgue uzayında sınırlılığını ispatlanmasıyla teori büyük bir canlılık kazanmıştır.

Bu sonuç Cruz-Urbe ve ark. (2003) tarafından genelleştirilerek, (1.1.1) koşulu ve $p(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} p(x)$ limiti var olmak üzere

$$|p(x) - p(\infty)| \leq \frac{C}{\log(e+|x|)}, \quad x \in \Omega \quad (1.1.2)$$

koşulu altında Hardy-Littlewood maximal operatörünün değişken üstlü Lebesgue uzayında sınırlılığını ispatlamıştır.

Maksimal operatörün (1.1.1) ve (1.1.2) koşullarının süreklilik modülü anlamında değişken üstlü Lebesgue uzayında sınırlılığı için gerekli olduğu (Pick ve Růžička 2001) ve (Cruz-Urbe ve ark. 2003) çalışmalarında gösterilmiştir.

Singüler ve kesirli operatörlerin maksimal operatör ile ilişkisinden dolayı bu operatörler ile ilgilenirken (1.1.1) ve (1.1.2) koşulları kalıtsaldır.

Hardy tipli operatörlerin değişken üstlü Lebesgue uzayında sınırlılığı ise Diening ve Samko (2007), p fonksiyonu $[0, \infty)$ da ölçülebilir olmak üzere (1.1.2) ve

$$|p(x) - p(0)| \leq \frac{C}{-\log x}, \quad 0 < x < \frac{1}{2} \quad (1.1.3)$$

koşulu altında ispatlayarak (Harjulehto ve ark. 2005), (Kokilashvili ve Samko 2004) ve (Mashiyev ve ark. 2006, 2007) çalışmalarını genelleştirmiştir.

$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları, Morrey (1938) tarafından eliptik kısmi diferansiyel denklemler ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkarılmıştır. Daha sonra Navier-Stokes ve Schrödinger denklemleri, süreksiz katsayılı eliptik problemler ve potansiyel teorisine önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır.

$L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ değişken üstlü Morrey uzayları ile ilgili ilk çalışmalar ise Almeida ve ark. (2008), ve Fan (2010), tarafından yapılmıştır. Almeida ve ark. (2008), değişken üstlü Morrey uzaylarında sınırlı bölgeler için (1.1.1) koşulu altında Hardy-Littlewood maximal ve Riesz potansiyel operatörlerin sınırlılığını ispatlamıştır. (Guliyev ve Samko 2013) çalışmasında ise (1.1.1) ve (1.1.2) koşulları altında sınırsız kümelerde Hardy-Littlewood maximal, Riesz potansiyel ve singüler operatörün sınırlılığı ispatlanmıştır.

Değişken üstlü Morrey tipli uzaylarda ağırlıklı Hardy tipli eşitsizlikler (Lukkassen ve ark. 2013) çalışmasında ele alınmıştır.

Matematik analizin önemli konularından biri ve L^p uzaylarının genelleştirilmesi olan $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz uzayları ise literatürde ilk defa Lorentz (1950, 1951) tarafından ortaya atılmıştır. Ephremidze ve ark. (2008) ise değişken üstlü Lorentz uzaylarını tanımlayarak Diening ve Samko (2007) tarafından elde edilen Hardy tipli eşitsizlikten yararlanarak (1.1.2) ve (1.1.3) koşulları altında Hardy-Littlewood maksimal ve Riesz potansiyel operatörün sınırlılığını göstermişlerdir.

$L^{p,q;\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz-Morrey uzayları ilk defa Mingione (2010) tarafından tanımlanmıştır. Aykol ve ark. (2013) ise bu çalışmadan hareketle lokal Morrey-Lorentz uzaylarını tanımlayarak Hardy-Littlewood maksimal operatörün sınırlılığını araştırmışlardır.

Bu çalışmada ise kuvvet tipli ağırlıklı değişken üstlü lokal Morrey Lorentz $\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)$ uzayları tanımlanacak ve (Lukkassen ve ark. 2013) çalışmasında elde edilen Hardy tipli eşitsizlik yardımıyla (1.1.2) ve (1.1.3) koşulları altında Hardy-Littlewood maksimal, Riesz potansiyel ve Hilbert operatörlerin sınırlılıkları gösterilecektir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tez çalışmamıza temel oluşturacak tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Norm ve Normlu Uzay

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{K}$ reel ya da kompleks sayı cismi olmak üzere $X \times X$ kümesinden X içine $(x, y) \rightarrow x + y$ toplama işlemi ve $\mathbb{K} \times X$ kümesinden X içine de $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ skalerle çarpma işlemi verilsin. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa

- i) $\forall x, y, z \in X$ için $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- ii) $\forall x \in X$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ birim elemanı vardır.
- iii) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır.
- iv) $\forall x, y \in X$ için $x + y = y + x$.
- v) $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ için $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
- vi) $\forall x \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ için $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.
- vii) $\forall x \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ için $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.
- viii) $1x = x$.

X kümesine $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı veya bir lineer uzay adı verilir.

Tanım 2.1.2. X , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, X de tanımlı negatif olmayan ve $x \in X$ deki değeri $\|x\|$ ile gösterilen fonksiyon, her $x, y \in X$ ve her $\lambda \in \mathbb{K}$ için

- (i) $\|x\| = 0$ ise $x = \theta$
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (mutlak homojenlik)
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X vektör uzayı üzerinde bir **norm** denir.

$\|\cdot\|$ normuna sahip X vektör uzayına **normlu vektör uzayı** denir ve $(X, \|\cdot\|)$ ile gösterilir.

Normun X vektör uzayında olduğu belirtilmesi gerekiyorsa $\|\cdot\|$ gösterimi yerine $\|\cdot\|_X$ gösterimi kullanılır.

Eğer (iii) eşitsizliği yerine her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$ olacak şekilde $C > 1$ sayısı varsa bu durumda $\|\cdot\|$ fonksiyonuna bir **quasi norm** ve bu normla birlikte X vektör uzayına **quasi normlu uzay** denir.

$\|\cdot\|$ fonksiyonu sadece (ii) ve (iii) koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona bir **yarı norm** ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir **yarı normlu uzay** denir.

Tanım 2.1.3. (x_n) , $(X, \|\cdot\|)$ normlu vektör uzayında bir dizi olsun.

a) $x \in X$ olmak üzere her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq N$ için

$$\|x_n - x\| < \epsilon$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına **yakınsar** (ya da (x_n) dizisi yakınsaktır) denir. Bu durum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ veya } x_n \rightarrow x$$

ile gösterilir.

b) Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m \geq N$ için

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon$$

olacak biçimde $N \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine bir **Cauchy dizisi** denir.

Tanım 2.1.4. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu vektör uzayı olsun. Eğer X içindeki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam normlu uzay veya **Banach uzay** adı verilir.

Tanım 2.1.5. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu vektör uzayı olsun. Herhangi $x_0 \in X$ ve herhangi $r > 0$ sayısı için

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \|x_0 - x\|_X < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı **açık yuvar**,

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : \|x_0 - x\|_X \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı **kapalı yuvar** adı verilir.

$A \subset X$ ve $x_0 \in A$ için $B(x_0, r) \subset A$ olacak biçimde $r > 0$ varsa A ya **açık küme** adı verilir.

Tanım 2.1.6. Ω , $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge ve $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı bir fonksiyon olarak verilsin. Eğer, herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı için $|x - x_0| < \delta$ ve $x \in \Omega$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ olacak şekilde $\delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna $x_0 \in \Omega$ noktasında **süreklidir** denir.

Tanım 2.1.7. $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu bir uzay ve X in bir E altkümesi verilsin. Eğer, her bir $x \in X$, E içindeki bir (x_n) dizisinin limiti ise E kümesi X uzayında **yoğundur** denir.

Tanım 2.1.8. $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayının sayılabilir yoğun bir altkümesi varsa $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayına **ayrılabilir uzay** denir.

Tanım 2.1.9. $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$, X vektör uzayı üzerinde tanımlı farklı iki norm olsun. Her $x \in X$ için

$$\frac{1}{C} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti varsa $\|\cdot\|_1$ ile $\|\cdot\|_2$ normlarına **denk normlar** denir.

Tanım 2.1.10. X ve Y aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzay ve $D(T)$, X in bir altkümesi olsun. $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ dönüşümü $D(T)$ nin her bir elemanını Y nin yalnız bir elemanına götürüyorsa, T ye $D(T)$ den Y ye bir **operatör** adı verilir ve $D(T)$ ye T operatörünün **tanım kümesi** denir.

$$R(T) = \{y \in Y : y = Tx, x \in D(T)\}$$

kümesine T operatörünün **değer(görüntü) kümesi** denir.

Tanım 2.1.11. X ve Y aynı $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki vektör uzay ve $D(T) \subset X$, X in bir alt uzayı olmak üzere $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer T operatörü, her $x, y \in D(T)$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

koşulunu sağlıyorsa bu operatöre **lineer operatör** denir.

Tanım 2.1.12. X ve Y iki normlu uzay olmak üzere $T : X \rightarrow Y$ operatörü ve $x_0 \in D(T)$ elemanı verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\|x - x_0\|_X < \delta$ ve $x \in D(T)$ iken

$$\|Tx - Tx_0\|_Y < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T operatörü x_0 noktasında **süreklidir** denir. Eğer T , $D(T)$ 'nin her noktasında sürekli ise T 'ye $D(T)$ üzerinde **süreklidir** denir.

Tanım 2.1.13. X ve Y normlu uzay, $D(T) \subset X$ ve $T : X \rightarrow Y$ lineer operatörü verilsin. $E \subset X$ alt kümesi sınırlı iken $T(E)$, Y 'de sınırlı ise T operatörüne **sınırlı lineer operatör** denir.

Bir başka ifadeyle, her $x \in X$ için

$$\|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X \quad (2.1.1)$$

olacak şekilde pozitif bir c reel sayısı varsa T 'ye sınırlı lineer operatör denir. Bununla birlikte, (2.1.1) eşitsizliğini sağlayan c 'lerin infimumuna T operatörünün **normu** denir ve bu norm

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0, x \in X} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.1.14. X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul T nin sınırlı olmasıdır. (Kreyszig 1989)

Tanım 2.1.15. X ve Y iki normlu uzay olmak üzere, eğer her $x \in X$ için

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X$$

özellikliğini sağlayan, X uzayını Y uzayı üzerine dönüştüren bire-bir lineer bir T operatörü varsa X ve Y normlu uzaylarına **izometrik olarak izomorfizma** ve T operatörüne de X ve Y normlu uzayları arasında **izometrik izomorfizma** denir.

Bu özelliğe sahip uzaylar aynı uzaylar olarak kabul edilir ve bu durum $X \cong Y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.16. X ve Y normlu iki uzay olsun. Eğer,

i) X, Y nin bir alt uzayı

ii) Her $x \in X$ için X den Y ye $Ix = x$ ile tanımlanan birim operatör sürekli ise X normlu uzayı Y normlu uzayına **gömülür** denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir. I birim operatörü lineer olduğundan ii) koşulu

$$\|Ix\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad x \in X$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabitinin varlığına denktir.

Tanım 2.1.17. $X, \mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ dönüşümüne **fonksiyonel** denir. Bir f fonksiyoneline,

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2); \quad x_1, x_2 \in X \text{ ve } \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

koşulu altında bir lineer fonksiyonel adı verilir.

Tanım 2.1.18. $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayı üzerinde tanımlı bütün lineer ve sürekli fonksiyonellerden oluşan uzaya X normlu uzayının **dual uzayı** denir ve X' ile gösterilir. Bu uzay $f, g \in X', x \in X$ ve $c \in \mathbb{K}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ ve } (cf)(x) = cf(x),$$

şeklinde tanımlanan noktasal toplam ve çarpım altında bir vektör uzayıdır. Bu uzayda bir $f \in X'$ elemanının normu

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X}$$

şeklinde tanımlanır. X' vektör uzayı $\|\cdot\|_{X'}$ normu ile bir Banach uzay olur.

Tanım 2.1.20. Bir X vektör uzayının X' duali de normlu vektör uzayı olduğundan, bu uzayın da duali tanımlanabilir. Bu durumda $(X')' = X''$ lineer vektör uzayına X in **ikinci duali** denir.

Tanım 2.1.21. X bir normlu vektör uzayı olsun. Herhangi bir $x \in X$ için

$$F_x(f) = f(x), \quad f \in X'$$

ile tanımlı $F_x : X' \rightarrow \mathbb{K}$ dönüşümünü tanımlayalım. Her $x \in X$ için bir tek sınırlı lineer fonksiyonel karşılık geleceğinden, bu halde

$$\begin{aligned} J_X : X &\longrightarrow X'' \\ x &\longmapsto F_x \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir. Bu dönüşüme **kanonik dönüşüm** adı verilir. Eğer kanonik dönüşüm üzerine ise, bu durumda X uzayına yansılmalı uzay adı verilir. X yansılmalı uzay ise $X \cong X''$ olur.

2.2. Lebesgue Ölçümü ve Ölçülebilir Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1. Σ , $\mathbb{R}^n$ 'nin altkümelerinin bir sınıfı olmak üzere,

- i) $\mathbb{R}^n \in \Sigma$,
- ii) $A \in \Sigma$ ise $A^c \in \Sigma$ (A^c , A 'nın tümleyen kümesi),
- iii) Eğer $i = 1, 2, \dots$, için $A_i \in \Sigma$ ise, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$

koşulları sağlanıyorsa, Σ sınıfına bir **σ -cebiri** adı verilir.

Tanım 2.2.2. Σ sınıfı üzerinde tanımlanan $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu, Σ sınıfındaki ayırık kümelerin bir $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ topluluğunun sayılabilir her birleşimi için

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \quad \forall A_i \cap A_k = \emptyset, i \neq k$$

eşitliğini sağlıyorsa, μ fonksiyonuna Σ sınıfı üzerinde bir **ölçüm** denir.

Tanım 2.2.3. $\mathbb{R}^n$ 'nin altkümelerinin aşağıda verilen özelliklere sahip σ -cebiri olan bir Σ sınıfının ve bu Σ sınıfı üzerinde bir μ ölçümünün varlığı kolaylıkla gösterilebilir;

- i) $\mathbb{R}^n$ 'deki her açık küme Σ 'ya aittir,
- ii) Eğer $A \subset B$, $B \in \Sigma$ ve $\mu(B) = 0$ ise, $A \in \Sigma$ ve $\mu(A) = 0$ dir,
- iii) $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ ise, $A \in \Sigma$ ve $\mu(A) = \prod_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$,
- iv) $x \in \mathbb{R}^n$ ve $A \in \Sigma$ iken

$$x + A = \{x + y : y \in A \in \Sigma\} \quad \text{ve} \quad \mu(x + A) = \mu(A)$$

olur, yani μ ölçümü öteleme altında değişmezdir.

Bu özelliklere sahip bir Σ sınıfının elemanlarına $\mathbb{R}^n$ 'nin Lebesgue ölçülebilir altkümeleri, μ ölçüm fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ 'de **Lebesgue ölçümü** ve $A \in \Sigma$ için $\mu(A)$ gösterimine ise A kümesinin **ölçümü** denir. Bu tez çalışmasında, bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinin Lebesgue ölçümü $|\Omega|$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.4. Eğer $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ ve $|B| = 0$ ise, $A - B$ kümesinin her noktasında sağlanan bir özellik A kümesinde hemen hemen her yerde geçerli bir özellik olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.5. E ölçülebilir bir küme olmak üzere, $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ şeklinde tanımlanan bir f fonksiyonu verilsin. Eğer her $a \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in E : f(x) \geq a\}$$

kümesi ölçülebilir ise, f fonksiyonuna **ölçülebilir fonksiyon** denir. Bu tez çalışmasında $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere Ω daki bütün reel değerli ölçülebilir fonksiyonların kümesini $\mathcal{M}(\Omega)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.2.6. $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } x \in A \\ 0, & \text{eğer } x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.7. Eğer f fonksiyonu ölçülebilir ve reel değerli ise, bu durumda f fonksiyonunu her ikisinde ölçülebilir ve negatif olmayan $f^+ = \max(f, 0)$ ve $f^- = -\min(f, 0)$ fonksiyonları cinsinden $f = f^+ - f^-$ şeklinde yazabiliriz. $\int_{\Omega} f^+(x)dx$ ve $\int_{\Omega} f^-(x)dx$ integrallerinden en az biri sonlu olmak üzere

$$\int_{\Omega} f(x)dx = \int_{\Omega} f^+(x)dx - \int_{\Omega} f^-(x)dx$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer her iki integral sonlu ise, f fonksiyonuna Ω bölgesinde **Lebesgue integrallenebilir** denir ve Ω bölgesindeki integrallenebilir fonksiyonların sınıfı $L^1(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.8. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de açık bir küme ve $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her kompakt (Kapalı ve Sınırlı) $K \subset \Omega$ altkümesi üzerinde

$$\int_K |f| dx < \infty$$

ise f fonksiyonuna **lokal integrallenebilirdir** denir ve lokal integrallenebilir fonksiyonların kümesi $L^1_{loc}(\Omega)$ ile gösterilir.

2.3. Lebesgue Uzayları ($L^p(\Omega)$)

Tanım 2.3.1. Ω , $\mathbb{R}^n$ nin ölçülebilir bir altkümesi, $|\Omega| > 0$ ve $p \in (0, \infty)$ olsun. Ω kümesinde tanımlı

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \quad (2.3.1)$$

olacak şekilde ölçülebilir f fonksiyonlarının sınıfını $L^p(\Omega)$ ile gösterelim. Ω kümesinde hemen hemen her yerde eşit fonksiyonları $L^p(\Omega)$ uzayında eşit kabul edelim. $L^p(\Omega)$ uzayının elemanları (2.3.1) şartını sağlayan ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıflarıdır. Kolaylık için, bu farkı ihmal edeceğiz ve eğer f fonksiyonu (2.3.1) şartını sağlarsa $f \in L^p(\Omega)$ ve Ω bölgesinde hemen hemen her yerde $f(x) = 0$ ise $L^p(\Omega)$ uzayında $f = 0$ yazacağız. Eğer $f \in L^p(\Omega)$ ve $c \in \mathbb{K}$ ise $cf \in L^p(\Omega)$ olduğu açıktır ve $f, g \in L^p(\Omega)$ için

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

olduğundan $f + g \in L^p(\Omega)$ dır ve bu yüzden $L^p(\Omega)$ uzayı bir vektör uzayıdır.

Teorem 2.3.2. $L^p(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{p,\Omega} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

dönüşümüyle birlikte $0 < p < 1$ için bir quasi Banach uzay, $1 \leq p < \infty$ için ise bir Banach uzay olur. (Luboš 2013)

Tanım 2.3.3. Ω bölgesinde ölçülebilir bir f fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|f(x)| \leq C$ olacak şekilde bir C sabiti varsa f fonksiyonuna **hemen hemen sınırlıdır** denir. Böyle C sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|f|$ nın Ω bölgesindeki **esas supremumu** denir ve $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.4. Ω bölgesinde tanımlı hemen hemen sınırlı ölçülebilir f fonksiyonlarıyla tanımlanan uzay $L^\infty(\Omega)$ ile gösterilir. $L^\infty(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.3.5. $1 < p < \infty$ iken $1 < p' < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olacak şekilde $p' = \frac{p}{p-1}$ sayısına p nin **eşleniği** denir.

Teorem 2.3.6. $1 < p < \infty$ ve $T \in [L^p(\Omega)]'$ olsun. Bu durumda $u \in L^p(\Omega)$ için

$$T(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

olacak şekilde bir $v \in L^{p'}(\Omega)$ vardır. Üstelik

$$\|v\|_{L^{p'}} = \|T\|_{[L^p(\Omega)]'}$$

olur ki buradan da $L^{p'}(\Omega) \cong [L^p(\Omega)]'$ özelliği çıkar. (Kreyszig 1989)

Teorem 2.3.7. (Hölder Eşitsizliği) $1 < p < \infty$ iken $1 < p' < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olacak şekilde $p' = \frac{p}{p-1}$ sayısını p nin **eşleniği** olarak tanımlayalım. $f \in L^p(\Omega)$ ve $g \in L^{p'}(\Omega)$ olsun. Bu durumda $fg \in L^1(\Omega)$ dır ve

$$\left| \int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} = \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

eşitsizliği geçerlidir. (Adams 2003).

Tanım 2.3.8. w fonksiyonu hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $w(x) \geq 0$ olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir olsun. Bu durumda w fonksiyonuna bir **ağırlık fonksiyonu** denir. Özel olarak, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ için

$$d(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$$

ve α reel bir sayı olmak üzere

$$w(x) = (d(x))^\alpha$$

ağırlık fonksiyonuna **kuvvet tipli ağırlık fonksiyonu** denir.

Tanım 2.3.9. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de açık bir bölge ve w ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\int_{\Omega} |wu|^p dx < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir fonksiyonların kümesine **ağırlıklı Lebesgue uzayı** denir ve $L_w^p(\Omega)$ ile gösterilir. $L_w^p(\Omega)$ uzayı,

$$\|u\|_{p,w} = \left(\int_{\Omega} |wu|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

normu altında bir Banach uzayıdır.

2.4. Hardy ve Hardy-Littlewood Maksimal Operatörleri

Tanım 2.4.1. $f \in \mathcal{M}(a, b)$ olmak üzere

$$Hf(x) := \int_a^x f(t) dt$$

şeklindeki operatöre **Hardy operatörü**,

$$\mathcal{H}f(x) := \int_x^b f(t) dt$$

şeklindeki operatöre ise **Hardy operatörünün eşleniği** ve $f \geq 0$ olmak üzere

$$Hf(x) := \frac{1}{x} \int_a^x f(t) dt$$

şeklindeki operatöre ise **ortalama Hardy operatörü** denir.

φ, ψ negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere

$$H^\varphi f(x) := \varphi(x) \int_a^x \psi(t) f(t) dt, \quad \mathcal{H}^\varphi f(x) := \varphi(x) \int_x^b \psi(t) f(t) dt$$

Hardy operatörlerinin modifiye edilmiş hali olan **ağırlıklı Hardy operatörleri** denir. $\mathbb{R}^1$ ya da $\mathbb{R}_+^1$ da **genelleştirilmiş ağırlıklı Hardy operatörleri** ise

$$H_v^\varphi f(x) := x^{v-1} \varphi(x) \int_0^x \frac{f(t)}{\varphi(t)} dt, \quad \mathcal{H}_v^\varphi f(x) := x^v \varphi(x) \int_x^\infty \frac{f(t)}{\varphi(t)t} dt, \quad x > 0$$

şeklindedir.

$f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ ve $\alpha, \beta, v \in \mathbb{R}$ olsun. $0 < \ell \leq \infty$ ve $x > 0$ olmak üzere, genelleştirilmiş ağırlıklı Hardy operatörlerinin özel hali

$$H_v^\alpha f(x) = x^{\alpha+v-1} \int_0^x \frac{f(t)}{t^\alpha} dt, \quad \mathcal{H}_v^\beta f(x) = x^{\beta+v} \int_x^\ell \frac{f(t)}{t^{\beta+1}} dt, \quad x > 0$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 2.4.2. $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$ ve $\alpha, \beta, v \in \mathbb{R}$ olsun. $0 < \ell \leq \infty$ ve $1 \leq p \leq q < \infty$ olmak üzere

$$\|H_v^\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}_+^1)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+^1)}$$

ve

$$\|\mathcal{H}_v^\beta f\|_{L^q(\mathbb{R}_+^1)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+^1)}$$

eşitsizliklerinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$0 \leq v < \frac{1}{p} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - v$$

ve

$$\alpha < \frac{1}{p'} \quad \text{ve} \quad \beta > -\frac{1}{p}$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır (Kufner ve Persson 2003).

Tanım 2.4.3. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [-\infty, \infty]$ ve $f \in L_{loc}^1$ olmak üzere

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

biçiminde tanımlı $Mf : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty]$ operatörüne f in **Hardy–Littlewood maksimal operatörü** adı verilir. Ayrıca $0 \leq \alpha < n$ olmak üzere

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{r^\alpha}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

biçiminde tanımlı operatöre f in **kesirli maksimal operatörü** denir. $\tilde{B}(x, r) := B(x, r) \cap \Omega$ ve

$$f_{\tilde{B}(x, r)} = \frac{1}{|\tilde{B}(x, r)|} \int_{\tilde{B}(x, r)} |f(z)| dz$$

olarak verilsin.

$$M^\sharp f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{\tilde{B}(x, r)} |f(y) - f_{\tilde{B}(x, r)}| dy$$

biçiminde tanımlı operatöre ise f in **Sharp maksimal operatörü** denir ve $M^\sharp$ ile gösterilir.

Teorem 2.4.4. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 < p \leq \infty$ ise

$$\|Mf\|_p \leq C \|f\|_p$$

dir (C sabiti p ve n sayılarına bağlıdır) (Stein 1970).

2.5. Riesz Potansiyel ve Singüler Operatörleri

Tanım 2.5.1. f ve g fonksiyonları $\mathbb{R}^n$ de tanımlı ve birebir olsun. Bu durumda $f * g$ fonksiyonu,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy$$

şeklinde tanımlanır ve buna f ile g nin **konvolüsyonu** denir.

Tanım 2.5.2. K çekirdek fonksiyonu olmak üzere her $\lambda > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için $K(\lambda x) = \lambda^\alpha K(x)$ ise K çekirdeğine α . dereceden homojendir denir.

Tanım 2.5.3. K çekirdeği $-\alpha$. dereceden homojen ve $f * K$ konvolüsyonu,

$$(f * K)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K(x - y) dy \quad (2.5.1)$$

olmak üzere $f \rightarrow f * K$ dönüşümünü göz önüne alalım. f fonksiyonu ile $|x|^{\alpha-n}$ Riesz çekirdek fonksiyonunun konvolüsyonuna **Riesz potansiyeli**, $|x|^{-n}$ çekirdeği ile konvolüsyonuna ise **singüler integral** denir. Riesz potansiyelinin çekirdeği olan $K(x) = |x|^{\alpha-n}$ fonksiyonunu koordinat başlangıcında zayıf tekilliğe sahiptir. Singüler integraller potansiyelden farklı olarak tekillik noktalarında integrallenemezler. Sonuç olarak (2.5.1) konvolüsyon operatörünün çekirdeğinin integrallenemeyen tekilliği varsa singüler integral, zayıf (integrallenebilen) tekilliği varsa potansiyel adı verilir.

Buradan konvolüsyon olarak bir fonksiyonun Riesz potansiyeli

$$I_\alpha f(x) = I_\alpha * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy$$

şeklinde singüler integral operatörü ise

$$\mathbb{T}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{A(x - y)}{|x - y|^n} dy$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.5.4. $K(x) = \frac{1}{\pi x}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\mathbb{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{1}{x-y} f(y) dy$$

şeklinde tanımlı singüler integral operatörünün $n = 1$ deki özel haline $\mathbb{H}$ **Hilbert operatörü** denir.

Teorem 2.5.5. $0 < \alpha < n, 1 \leq p < q < \infty$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. Eğer $p > 1$ ise

$$\|I_\alpha f\|_q \leq A_{p,q} \|f\|_p$$

eşitsizliği gerçekleşir (Stein 1970).

Teorem 2.5.6. $1 < p < \infty$ ise $\mathbb{H}$ Hilbert operatörü $L^p(\mathbb{R})$ de sınırlıdır (Elias 1993).

2.6. Lorentz Uzayları

Tanım 2.6.1. $u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$u_*(\alpha) = |(\{x : |u(x)| > \alpha\})|$$

şeklinde tanımlanan

$$u_* : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$$

fonksiyonuna u fonksiyonunun **dağılım fonksiyonu** denir.

Teorem 2.6.2. Dağılım fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- i) $u_*(\alpha)$ azalan ve sağdan süreklidir.
- ii) $|u(x)| \leq |v(x)|$ ise $u_*(\alpha) \leq v_*(\alpha)$ dır.
- iii) Hemen hemen her x için $|u(x)| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} |u_k(x)|$ ise bu durumda herhangi $\alpha \geq 0$ için $u_*(\alpha) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (u_k)_*(\alpha)$ dır.
- iv) $|u(x)| \leq |v(x)| + |h(x)|$ ise herhangi $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ için $u_*(\alpha_1 + \alpha_2) \leq v_*(\alpha_1) + h_*(\alpha_2)$ dir.
- v) Herhangi $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ için $(uv)_*(\alpha_1 \alpha_2) \leq u_*(\alpha_1) + v_*(\alpha_2)$ dir.
- vi) Herhangi $p \in (0, \infty)$ ve $\alpha > 0$ için $u_*(\alpha) \leq \alpha^{-p} \int_{\{x: |u(x)| > \alpha\}} |u(x)|^p dx$ eşitsizliği sağlanır.
- vii) $u \in L^p, p \in [1, \infty)$ ise $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^p u_*(\alpha) = 0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^p u_*(\alpha)$ dır.
- viii) $\int_0^\infty \alpha^{p-1} u_*(\alpha) d\alpha < \infty$ ve $p \in [1, \infty)$ ise bu durumda $\alpha \rightarrow +\infty$ ve $\alpha \rightarrow 0$ iken $\alpha^p u_*(\alpha) \rightarrow 0$ dır. (Hao 2012)

Teorem 2.6.3. $u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\|u\|_p = \left(p \int_0^\infty \alpha^{p-1} u_*(\alpha) d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} ; 1 \leq p < \infty$$

ve

$$\|u\|_\infty = \inf \{ \alpha : u_*(\alpha) = 0 \}$$

yazılabilir. (Hao 2012)

Tanım 2.6.4. $u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\inf \emptyset = \infty$ kabulü altında

$$u^*(t) = \inf \{ t : \alpha \geq 0 : u_*(\alpha) \leq t \}$$

şeklinde tanımlı $u^* : [0, \infty) \mapsto [0, \infty]$ fonksiyonuna u **fonksiyonunun azalan yeniden düzenlemesi** denir.

Teorem 2.6.5. u^* fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- i) $u^*(t), [0, \infty)$ da negatif olmayan ve artmayan bir fonksiyondur.
- ii) $u^*(t), [0, \infty)$ da sağdan süreklidir.
- iii) $k \in \mathbb{C}$ için $(ku)^* = |k| u^*$.
- iv) Hemen hemen her yerde $|u| \leq |v|$ ise $u^* \leq v^*$ olur.
- v) $(u+v)^*(t_1+t_2) \leq (u)^*(t_1) + (v)^*(t_2)$.
- vi) $(uv)^*(t_1+t_2) \leq (u)^*(t_1) (v)^*(t_2)$.
- vii) Hemen hemen her yerde $|u| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} |u_k|$ ise $u^* \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} u_k^*$ olur.
- viii) Hemen hemen her yerde $|u_k| \uparrow |u|$ ise $u_k^* \uparrow u^*$ dır.
- ix) $u_*(\alpha) < \infty$ olduğunda $u^*(u_*(\alpha)) \leq \alpha$ olur.
- x) $u_*(t) < \infty$ ise $u_*(u^*(t)) = |\{ |u| > u^*(t) \}| \leq t \leq |\{ |u| \geq u^*(t) \}|$ dir.
- xi) $u^*(t) > \alpha \iff u_*(\alpha) > t$.
- xii) u ve u^* eş ölçülebilirdir. Yani herhangi $\alpha \geq 0$ için $(u^*)_*(\alpha) = u_*(\alpha)$ dır.
- xiii) $1 \leq p < \infty$ için $(|u|^p)^*(t) = (u^*(t))^p$ dir.
- xiv) $1 \leq p < \infty$ için $\|u^*\|_p = \|u\|_p$ dir.
- xv) $\|u\|_\infty = u^*(0)$ dır. (Hao 2012)

Tanım 2.6.6. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve $\Psi \in \mathcal{M}(\Omega)$ olsun.

$$\Lambda^{p,\Psi}(\Omega) := \left\{ u \in \mathcal{M}(\Omega) : \|u\|_{\Lambda^{p,\Psi}} := \left(\int_0^{|\Omega|} u^*(t)^p \Psi(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|\Psi u^*\|_{L^p(0,|\Omega|)} \right\} < \infty$$

olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonlardan meydana gelen uzaya $\Lambda^{p,\Psi}(\Omega)$ **klasik Lorentz uzayı** adı verilir.

Tanım 2.6.7. $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ ve $0 < p, q \leq \infty$ olsun. u^* yardımıyla

$$\|u\|_{L^{p,q}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_0^{|\Omega|} \left(t^{\frac{1}{p}} u^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} u^*(t), & q = \infty \end{cases}$$

dönüşümünü tanımlayalım.

$\|u\|_{L^{p,q}(\Omega)} < \infty$ olacak şekildeki tüm ölçülebilir fonksiyonların kümesine p ve q indisli $L^{p,q}(\Omega)$ **Lorentz uzayı** adı verilir. Ayrıca $u \in \mathcal{M}(\Omega)$, $0 < p \leq \infty$ ve $0 < q \leq \infty$ olmak üzere

$$\|u\|_{L^{p,q}(\Omega)} = \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} u^*(t) \right\|_{L^q(0,|\Omega|)} < \infty$$

olduğu açıktır.

Klasik Lorentz uzaylarında özel olarak $0 < p, q \leq \infty$ ve $\Psi(t) = t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ alırsak, $\Lambda^{p,\Psi}(\Omega)$ klasik Lorentz uzayları $L^{p,q}(\Omega)$ Lorentz uzaylarına denk olur. Yani $\Lambda^{p,t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}(\Omega) = L^{p,q}(\Omega)$ olur. $L^{p,q}(\Omega)$ uzayı $\|\cdot\|_{L^{p,q}(\Omega)}$ ile birlikte quasi-normlu uzay ve quasi-Banach uzayıdır.

Teorem 2.6.8. $1 \leq p \leq \infty$ ise $L^{p,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ dir. $1 \leq p \leq \infty$ ve $1 \leq q < r \leq \infty$ olsun. Bu durumda

$$\|u\|_{L^{p,r}(\Omega)} \leq C_{p,q,r} \|u\|_{L^{p,q}(\Omega)}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $C_{p,q,r} = (q/p)^{1/q-1/r}$ sabiti vardır. Yani $L^{p,q}(\Omega) \hookrightarrow L^{p,r}(\Omega)$ dir. $1 \leq q \leq p$ ya da $p = q = \infty$ olması halinde $\|u\|_{L^{p,q}(\Omega)}$ bir norm belirtir (Hunt 1966, Grafakos 2004).

Tanım 2.6.9. $u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$u^{**} = \frac{1}{t} \int_0^t u^*(s) ds, \quad (t > 0)$$

şartını sağlayan u^{**} fonksiyonuna u^* **fonksiyonunun maksimal fonksiyonu** denir.

Teorem 2.6.10. $u, v, u_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ ($n = 1, 2, \dots$) olsun. Bu durumda u^{**} fonksiyonu, $(0, \infty)$ da negatif olmayan, azalan ve sürekli bir fonksiyondur ve u^{**} fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i) $u^{**} \equiv 0 \iff$ hemen hemen her yerde $u = 0$
- ii) $u^* \leq u^{**}$ dir.
- iii) Hemen hemen her yerde $|v| \leq |u| \implies v^{**} \leq u^{**}$ olur.
- iv) $(au)^{**} = |a| u^{**}$
- v) $|u_n| \uparrow |u| \implies u_n^{**} \uparrow u^{**}$ olur.
- vi) Her $t > 0$ için $(u + v)^{**}(t) \leq u^{**}(t) + v^{**}(t)$ dir.

Lemma 2.6.11. $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ olmak üzere $(Mf)^*(t) \leq Cf^{**}(t)$ eşitsizliği geçerlidir. (Bennett ve Sharpley 1988).

Tanım 2.6.12. $u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 < p, q \leq \infty$ olmak üzere $\|\cdot\|_{p,q}^*$ fonksiyoneli

$$\|u\|_{L^{p,q}}^* = \|u\|_{L^{p,q}(0,\infty)}^* = \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} u^{**}(t) \right\|_{L^q(0,\infty)}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.6.13. $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ ya da $p = q = \infty$ ise $\|\cdot\|_{p,q}^*$ fonksiyoneli $L^{p,q}(\Omega)$ üzerinde bir norm belirtir. $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ ise $1 \leq r < p$ için

$$\|u\|_{L^{p,q}} \leq \|u\|_{L^{p,q}}^* \leq \left(\frac{p}{p-r} \right)^{1/r} \|u\|_{L^{p,q}}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Hunt 1966).

Tanım 2.6.14. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve $0 < p, q \leq \infty$ olsun. $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ağırlık fonksiyonu $h.h.h.$ pozitif ve lokal integrallenebilir olmak üzere

$$\|u\|_{L_w^{p,q}(\Omega)} = \left\| w(t) t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} u^*(t) \right\|_{L^q(0,|\Omega|)} < \infty$$

olacak şekilde Ω daki ölçülebilir u fonksiyonlarından meydana gelen uzaya $L_w^{p,q}(\Omega)$ **ağırlıklı Lorentz uzayı** denir.

Teorem 2.6.15. $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ olsun. M maksimal operatörü $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır (Aykol ve ark. 2013).

Teorem 2.6.16. $1 < p, q < \infty$ olsun. $w \in A_p(\mathbb{R})$ ise $\mathbb{H}$ Hilbert operatörü $L_w^{p,q}(\mathbb{R})$ uzayında sınırlıdır (Kokilashvili ve Krbec 1991).

2.7. Morrey Uzayları($L^{p,\lambda}(\Omega)$)

Tanım 2.7.1. Ω , $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olsun. $x_0 \in \Omega$, $1 \leq p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < n$ olmak üzere

$$\|f\|_{p,\lambda} := \sup_{r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p,\tilde{B}(x_0,r)} < \infty$$

koşulunu sağlayan $L^p(\Omega)$ daki f fonksiyonlarının lineer uzayına **lokal Morrey uzayı** denir ve bu uzay $L_{loc}^{p,\lambda}(\Omega)$ ile gösterilir. .

Tanım 2.7.2. Ω , $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olsun. $1 \leq p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < n$ olmak üzere

$$\|f\|_{p,\lambda} := \sup_{x \in \Omega, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p,\tilde{B}(x,r)} < \infty \quad (2.7.1)$$

koşulunu sağlayan $L^p(\Omega)$ daki f fonksiyonlarının lineer uzayına **Morrey uzayı** denir ve bu uzay $L^{p,\lambda}(\Omega)$ ile gösterilir ve $\|f\|_{p,\lambda}$ normu ile bir Banach uzayıdır. Ayrıca $L^{p,\lambda}(\Omega) \subset L_{loc}^{p,\lambda}(\Omega)$ olduğu açıktır.

Teorem 2.7.3. Ω , $\mathbb{R}^n$ nin sınırlı açık bir alt bölgesi olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

- 1) $\lambda = 0 \implies L^{p,0}(\Omega) \cong L^p(\Omega)$,
- 2) $\lambda = n \implies L^{p,n}(\Omega) \cong L^\infty(\Omega)$,
- 3) $\lambda > n \implies L^{p,\lambda}(\Omega) = \{0\}$.
- 4) $0 < \lambda \leq n \implies L^{p,\lambda}(\Omega)$ ayrılabilir değildir.

Tanım 2.7.4. Ω , $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olsun. $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda < n$ ve w ağırlık fonksiyonu olsun. $L_w^{p,\lambda}(\Omega)$ **ağırlıklı Morrey uzayı**

$$\|f\|_{p,\lambda;w} := \sup_{x \in \Omega, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|wf\|_{p,\tilde{B}(x,r)} < \infty$$

olacak şekilde $f \in L^p(\Omega)$ fonksiyonlarının lineer uzayı olarak tanımlanır. $L_w^{p,\lambda}(\Omega)$ uzayı $\|\cdot\|_{p,\lambda;w}$ normu ile ağırlıklı Morrey uzayı adı verilen bir Banach uzayıdır. Bu uzayda özel olarak $w = 1$ alırsak $L_w^{p,\lambda}(\Omega) = L^{p,\lambda}(\Omega)$ olur.

Teorem 2.7.5. $0 < \lambda < 1$, $0 < \alpha < 1 - \lambda$ ve $1 \leq p < (1 - \lambda)/\alpha$ olsun. $1/q = 1/p - \alpha/(1 - \lambda)$ olduğunda $H_v^\alpha f$ ve $\mathcal{H}_v^\beta f$ Hardy operatörleri $L^{p,\lambda}(\mathbb{R})$ ya da $L_{loc}^{p,\lambda}(\mathbb{R})$ den $L^{q,\lambda}(\mathbb{R})$ ye sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $v < 1/p' + \lambda/p$ ($v > (\lambda - 1)/p$) olmasıdır (Samko 2012).

Teorem 2.7.6. $1 < p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < n$ ise Hardy-littlewood maksimal operatörü Morrey uzayında sınırlıdır yani $\|Mf\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$ olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı vardır.(Chiarenza ve Frasca 1987).

Teorem 2.7.7. $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n$ ve $w = |\cdot|^\gamma$ kuvvet tipli ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\|Mf\|_{L_w^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_w^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $\frac{\lambda-n}{p} \leq \gamma < \frac{\lambda}{p} + \frac{n}{p'}$ olmasıdır (Tanaka 2014).

Teorem 2.7.8. $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \lambda < n - \alpha p$ olsun. $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ olmak üzere her $f \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ için

$$\|I_\alpha f\|_{q,\mu} \leq C \|f\|_{p,\lambda}$$

eşitsizliği geçerlidir ($C > 0$ sabiti f den bağımsızdır) (Peetre 1966).

Teorem 2.7.9. $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$, $0 < x < \ell \leq \infty$ olmak üzere $\mathbb{H}$ Hilbert operatörü $L^{p,\lambda}([0, \ell])$ de sınırlıdır (Peetre 1996).

Teorem 2.7.10. $0 < \ell \leq \infty$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$ olmak üzere

$$\mathbb{T}_\alpha f(x) = \frac{x^\alpha}{\pi} \int_0^\ell \frac{f(t) dt}{t^\alpha (t-x)}$$

ağırlıklı singüler operatörünün $L^{p,\lambda}([0, \ell])$ de sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\lambda-1}{p} < \alpha < \frac{1}{p'} + \frac{\lambda}{p}$ olmasıdır (Samko 2009).

2.8. Lorentz Morrey Uzayları ($L^{p,q;\lambda}(\Omega)$)

Tanım 2.8.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < p, q \leq \infty$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $L_{loc}^{p,q;\lambda}(\Omega)$ **lokal Morrey-Lorentz uzayları**

$$\|u\|_{L_{loc}^{p,q;\lambda}} = \sup_{t>0} t^{-\frac{\lambda}{q}} \left\| s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} u^*(s) \right\|_{L^q(0,t)}$$

quasi normu sonlu olacak şekilde $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ fonksiyonlarından meydana gelir.

Teorem 2.8.2.

- i) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve Ω daki sıfıra özdeş fonksiyonların kümesi Θ olmak üzere $\lambda < 0$ ya da $\lambda > 1$ ise $L_{loc}^{p,q;\lambda}(\Omega) = \Theta$ dir.
- ii) $L_{loc}^{p,q;0}(\Omega) = L^{p,q}(\Omega)$ dir.
- iii) $p = q$ ise $L_{loc}^{p,q;\lambda}(\Omega) = L_{loc}^{p;\lambda}(\Omega)$ dir. (Aykol ve ark. 2013).

Teorem 2.8.3. $0 < \lambda \leq 1$, $1 \leq q \leq \infty$, $\frac{q}{q+\lambda} < p < \infty$ ya da $\lambda = 0$, $1 \leq q \leq \infty$, $1 < p < \infty$ olsun. M maksimal operatörü $L_{loc}^{p,q;\lambda}(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır (Aykol ve ark. 2013).

Teorem 2.8.4. $1 \leq p < \infty$, $0 < \lambda \leq 1$ olsun. M maksimal operatörü $L_{loc}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır (Aykol ve ark. 2013).

Tanım 2.8.5. $L^{p,q;\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz-Morrey uzayları ilk defa Mingione tarafından tanımlanmıştır. Buna göre, $1 \leq p < \infty$, $0 < q < \infty$ ve $0 \leq \lambda \leq n$ olmak üzere $L^{p,q;\lambda}(\mathbb{R}^n)$ **Lorentz-Morrey uzayları**

$$\|f\|_{L^{p,q;\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} t^{-\frac{\lambda}{p}} \|\chi_{B(x,t)} f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ deki ölçülebilir f fonksiyonlarından oluşur. Ragusa (2012) ise $L^{p,q;\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz-Morrey uzaylarını $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ ve $0 \leq \lambda < n$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p,q;\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} t^{-\frac{\lambda}{q}} \|\chi_{B(x,t)} f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ deki ölçülebilir f fonksiyonların sınıfı olarak tanımlamıştır. Bu iki uzay arasında uygun koşullar altında

$$L^{p,q;\lambda}(\mathbb{R}^n) = L^{p,q;\lambda \frac{q}{p}}(\mathbb{R}^n)$$

ilişkisi mevcuttur.

2.9. Modüler Uzaylar ve Orlicz Uzayları

Tanım 2.9.1. X bir reel vektör uzayı olmak üzere, $I : X \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyoneli her $x, y \in X$ için

i) $I(x) = 0 \iff x = 0$,

ii) $I(x) = I(-x)$,

iii) $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ için $I(\alpha x + \beta y) \leq I(x) + I(y)$

özelliklerini sağlıyorsa, I fonksiyoneline X üzerinde bir **modüler** denir. Eğer (iii) özelliği yerine $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ için

$$I(\alpha x + \beta y) \leq \alpha I(x) + \beta I(y)$$

özellik sağlanırsa, I fonksiyoneline X üzerinde bir **konveks modüler** denir.

Tanım 2.9.2. X bir reel vektör uzayı ve I fonksiyoneli X üzerinde bir modüler ise

$$X_I = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda x) = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya **modüler uzay** denir. X_I uzayı X vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır.

Tanım 2.9.3. X bir reel vektör uzayı ve I fonksiyoneli X üzerinde bir konveks modüler ise, bu durumda I fonksiyoneli X_I üzerinde **Lüxemburg normu** adı verilen

$$\|u\|_I = \inf \{ \lambda > 0 : I(u/\lambda) \leq 1 \}$$

biçiminde bir norm tanımlar.

Tanım 2.9.4. $\Omega, \mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir bir bölge olmak üzere, $\varphi : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

1. Her $t \in \Omega$ için $\varphi(t, u)$ azalmayan sürekli bir fonksiyon,
2. $\varphi(t, 0) = 0$, $u > 0$ için $\varphi(t, u) > 0$ ve $\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(t, u) = \infty$,
3. Her $u \geq 0$ için $\varphi(t, u)$ ölçülebilir fonksiyon

özelliklerine sahipse φ fonksiyonuna Φ sınıfına aittir denir.

Tanım 2.9.5. X bir reel vektör uzayı ve φ fonksiyonu Φ sınıfına aitse, her $x \in X$ için $\varphi(t, |x(t)|)$ fonksiyonu ölçülebilir olur ve

$$I(x) = \int_{\Omega} \varphi(t, |x(t)|) dt \quad (2.9.1)$$

ifadesi X 'de bir modüler tanımlar. Bununla birlikte, $\varphi(t, u)$ fonksiyonu her $t \in \Omega$ için u 'nun bir konveks fonksiyonu ise, (2.9.1) ifadesi X 'de bir konveks modüler olur. Buna göre, elde edilen

$$X_I = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \varphi(t, \lambda |x(t)|) dt = 0 \right\}$$

modüler uzayına **genelleştirilmiş Orlicz uzayı veya Orlicz-Musielak uzayı** denir ve L^φ ile gösterilir. Ayrıca,

$$L_0^\varphi = \left\{ x \in X : \int_{\Omega} \varphi(t, |x(t)|) dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan L_0^φ kümesine, **genelleştirilmiş Orlicz sınıfı** denir. L_0^φ, L^φ uzayının bir konveks alt uzayı, L^φ uzayı ise X 'in L_0^φ uzayını kapsayan en küçük alt vektör uzayıdır. Bununla birlikte, eğer $\varphi(t, u) = \varphi(u)$ ise (φ, t 'den bağımsız ise) L^φ ve L_0^φ uzaylarına sırasıyla **Orlicz uzayı ve Orlicz sınıfı** denir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Değişken Üstlü Lebesgue Uzayları

Tanım 3.1.1. Ω , $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir bir küme, $|\Omega| > 0$ ve $p \in \mathcal{M}(\Omega)$ olsun.

$$\vartheta(x, s) = s^{p(x)}, \quad \forall x \in \Omega, s \geq 0$$

şeklinde tanımlanan $\vartheta(x, \cdot) : \Omega \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

i) $\forall x \in \Omega$ için $\vartheta(x, \cdot) : \Omega \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ azalmayan sürekli bir fonksiyon,

ii) $\vartheta(x, 0) = 0$, $s > 0$ için $\vartheta(x, 0) > 0$ ve $\lim_{s \rightarrow \infty} \vartheta(x, s) = \infty$,

iii) Her $s \geq 0$ için $\vartheta(\cdot, s) \in \mathcal{M}(\Omega)$ özelliklerine sahip olduğundan Φ sınıfına aittir. Ayrıca, $\vartheta(x, s)$ fonksiyonu her $x \in \Omega$ için s nin bir konveks fonksiyonu olduğu açıktır. Bu nedenle $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ fonksiyonu için

$$I_{p(\cdot)}(u) = \int_{\Omega} \vartheta(x, |u|) dx = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx$$

şeklinde tanımlanan $I_{p(\cdot)} : \mathcal{M}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu

i) $I_{p(\cdot)}(u) = 0 \iff u = 0$

ii) $I_{p(\cdot)}(u) = I_{p(\cdot)}(-u)$

iii) $I_{p(\cdot)}(\alpha u + \beta v) \leq \alpha I_{p(\cdot)}(u) + \beta I_{p(\cdot)}(v)$, $\forall u, v \in \mathcal{M}(\Omega)$, $\forall \alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$

özelliklerini sağladığından, $\mathcal{M}(\Omega)$ kümesi üzerinde bir **konveks** modülerdir.

Böylece $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ modüler uzayı

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{M}(\Omega) : \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I_{p(\cdot)}(\lambda u) = 0 \right\}$$

Musileak-Orlicz uzayının özel bir çeşididir ve $\mathcal{M}(\Omega)$ kümesinin lineer alt uzayıdır.

$\vartheta(x, s)$ fonksiyonun özelliklerinden, $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının en az bir $\lambda > 0$ için $I_{p(\cdot)}(\lambda u) < \infty$ olacak şekilde tüm $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ fonksiyonlarının kümesi olduğu açıktır. Yani,

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{M}(\Omega) : \exists \lambda > 0, I_{p(\cdot)}(\lambda u) < \infty \}$$

yazılabilir.

$L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının bir konveks alt uzayı olan $L_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı

$$L_0^{p(\cdot)}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{M}(\Omega) : I_{p(\cdot)}(u) < \infty \},$$

Genelleştirilmiş Orlicz sınıfının bir türüdür ve

$$L_1^{p(\cdot)}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{M}(\Omega) : \forall \lambda > 0, I_{p(\cdot)}(\lambda u) < \infty \}$$

uzayıda $\mathcal{M}(\Omega)$ nın $L_0^{p(\cdot)}(\Omega)$ kümesinde kapsanan en büyük alt vektör uzayıdır.

Bu uzaylar için genel olarak

$$L_1^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L_0^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$$

yazılabilir.

Ω , $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olsun. $p(\cdot) : \Omega \longrightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$1 \leq p^- := \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x) \leq p^+ := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x) < \infty \quad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlayalım. Aksi belirtilmedikçe $1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$ olarak kabul edilecek ve bu durumu

$$L_+^\infty(\Omega) = \left\{ g \in L^\infty(\Omega) : \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} g(x) \geq 1 \right\}$$

olmak üzere $p \in L_+^\infty(\Omega)$ ile ifade edeceğiz.

Teorem 3.1.2. $L_1^{p(\cdot)}(\Omega) = L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olması için gerek ve yeter koşul $p \in L_+^\infty(\Omega)$ olmasıdır (Fan ve Zhao 2001).

Böylece $p \in L_+^\infty(\Omega)$ ise

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = L_0^{p(\cdot)}(\Omega) = L_1^{p(\cdot)}(\Omega)$$

yazılabilir.

Tanım 3.1.3. Ω , $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge ve $p \in L_+^\infty(\Omega)$ olsun. Bu durumda

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{M}(\Omega) : \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya **değişken üstlü Lebesgue Uzayı** denir.

p nin sabit ($p(x) = p$) olması durumunda değişken üstlü Lebesgue uzayı klasik Lebesgue uzayına dönüşür.

$p \in L_+^\infty(\Omega)$ olması durumunda modüler fonksiyon ek olarak aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- i) $I_{p(\cdot)}(u + v) \leq 2^{p^+} (I_{p(\cdot)}(u) + I_{p(\cdot)}(v))$
- ii) $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ için eğer $\lambda > 1$ ise

$$I_{p(\cdot)}(u) \leq \lambda I_{p(\cdot)}(u) \leq \lambda^{p^-} I_{p(\cdot)}(u) \leq I_{p(\cdot)}(\lambda u) \leq \lambda^{p^+} I_{p(\cdot)}(u)$$

ve eğer $0 < \lambda < 1$ ise

$$\lambda^{p^+} I_{p(\cdot)}(u) \leq I_{p(\cdot)}(\lambda u) \leq \lambda^{p^-} I_{p(\cdot)}(u) \leq \lambda I_{p(\cdot)}(u) \leq I_{p(\cdot)}(u)$$

elde edilir.

iii) Eğer hemen hemen her $x \in \Omega$ için $|u(x)| \leq |v(x)|$ ve $I_{p(\cdot)}(u) < \infty$ ise bu durumda $I_{p(\cdot)}(u) < I_{p(\cdot)}(v)$ ve $|u| \neq |v|$ için kesin eşitsizlik vardır.

iv) Verilen bir $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \setminus \{0\}$ için, $I_{p(\cdot)}(\lambda u)$ fonksiyonu λ ya göre sürekli, konveks çift fonksiyondur ve $\lambda \in [0, \infty)$ için artandır.

$I_{p(\cdot)}(u)$ modülü konveks olduğundan dolayı $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde

$$\|u\|_{p(\cdot), \Omega} = \|u\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : I_{p(\cdot)} \left(\frac{u}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}$$

Lüksemburg normu tanımlanabilir. Bu norm altında $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Ayrıca, $u, v \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve h.h.h. $|u(x)| \leq |v(x)|$ ise $\|u\|_{p(\cdot)} \leq \|v\|_{p(\cdot)}$ yazılabilir.

Teorem 3.1.4. $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \setminus \{0\}$ olsun. Bu durumda, $\|u\|_{p(\cdot)} = a$ olması için gerek ve yeter koşul $I_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{a}\right) = 1$ olmasıdır. [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Teorem 3.1.5. Eğer $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $I_{p(\cdot)} : L^{p(\cdot)}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ ise, bu durumda

$$i) \|u\|_{p(\cdot)} < 1 (= 1; > 1) \Leftrightarrow I_{p(\cdot)}(u) < 1 (= 1; > 1)$$

$$ii) \text{ Eğer } \|u\|_{p(\cdot)} > 1 \text{ ise, } \|u\|_{p(\cdot)}^{p^-} \leq I_{p(\cdot)}(u) \leq \|u\|_{p(\cdot)}^{p^+}$$

$$iii) \text{ Eğer } \|u\|_{p(\cdot)} < 1 \text{ ise, } \|u\|_{p(\cdot)}^{p^+} \leq I_{p(\cdot)}(u) \leq \|u\|_{p(\cdot)}^{p^-}$$

olur [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991), (Samko 1998)].

Teorem 3.1.6. Eğer $p^+ < \infty$ ise, o zaman $(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(\cdot)})$ uzayı ayrılabilir. [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Teorem 3.1.7. Eğer $p^- > 1$ ve $p^+ < \infty$ ise, o zaman $(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(\cdot)})$ uzayı düzgün konveks ve dolayısıyla yansılmalı bir uzay olur (Fan ve Zhao 2001).

$p \in L_+^\infty(\Omega)$ fonksiyonun eşleniği ise p' ile gösterilip $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ dir.

Teorem 3.1.8. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının dual uzayı $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ uzayıdır. Yani,

i) Her $v \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\phi(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \forall u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \quad (3.1.2)$$

şeklinde tanımlanan ϕ fonksiyoneli $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde sürekli lineer bir fonksiyoneldir.

ii) $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde (3.1.2) şeklinde tanımlı her sürekli lineer fonksiyonel için tek bir $v \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ vardır [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Bu teoremden $p^- > 1$ ise $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının yansılmalı olduğu sonucu elde edilir.

Teorem 3.1.9.(Hölder Eşitsizliği)

$L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ uzayı $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının dual uzayı ve $\frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{p'(\cdot)} = 1$ olmak üzere her $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $v \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} |u v| dx \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p^-)'} \right) \|u\|_{p(\cdot)} \|v\|_{p'(\cdot)} \leq 2 \|u\|_{p(\cdot)} \|v\|_{p'(\cdot)} \quad (3.1.3)$$

ifadesi yazılabilir (Kováčik ve Rákosník 1991).

Teorem 3.1.10. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, $0 < |\Omega| < \infty$ ve $p(\cdot), q(\cdot) \in L_+^\infty(\Omega)$ olsun. Bu durumda $L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$ gömmesinin var olması için gerek ve yeter koşul h.h.h. $x \in \Omega$ için $p(x) \leq q(x)$ olmasıdır. Ayrıca,

$$\|u\|_{p(\cdot)} \leq C(1 + |\Omega|) \|u\|_{q(\cdot)}$$

eşitsizliği yazılabilir [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Klasik Lebesgue uzaylarının en önemli özelliklerinden biri elemanlarının orta sürekliliğidir. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının klasik Lebesgue uzayından farklı olduğu bu noktayı göstereyim.

Tanım 3.1.11. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $f_h(x) = f(x + h)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olmak üzere, $|h| < \delta$ ve $h \in \mathbb{R}^n$ için $I_p(f_h - f) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ fonksiyonuna $p(\cdot)$ -**orta sürekli** adı verilir.

Örnek 3.1.12. $\Omega = (-1, 1)$ ve $1 \leq r < s < \infty$ olarak alınsın. Bu durumda p ve f fonksiyonlarını

$$p(x) = \begin{cases} r ; & x \in [0, 1) \\ s ; & x \in (-1, 0) \end{cases} \quad \text{ve} \quad f(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{s}} ; & x \in [0, 1) \\ 0 ; & x \in (-1, 0) \end{cases}$$

şeklinde seçersek, $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olur. Fakat $h \in (0, 1)$ için $I_p(\frac{f_h}{\lambda}) \geq \lambda^{-1} \int_{-h}^0 (x + h)^{-1} dx = \infty$ olduğundan $f_h \notin L^{p(\cdot)}(\Omega)$ elde edilir (Kováčik ve Rákosník 1991).

Teorem 3.1.13. p fonksiyonu $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sabit olmasın. Bu durumda $(\tau_h f)(x) = f(x - h)$ öteleme operatörü $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında süreksiz olacak şekilde $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vardır. Üstelik $\tau_h f \notin L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olacak şekilde $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ vardır (Diening 2004).

Teorem 3.1.14. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de sınırlı ölçülebilir bir bölge olsun. Ω bölgesinde tanımlı p ve r fonksiyonları için $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ve $1 < r^- \leq r^+ < \infty$ özellikleri sağlansın. Bu durumda $* : (f, g) \longrightarrow f * g$ konvolüsyonu $L^{p(\cdot)}(\Omega) \times L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{r(\cdot)}(\Omega)$ dönüşümü olarak sürekli olması için gerek ve yeter koşul $p^- > r^+$ olmasıdır (Diening 2004).

Öteleme operatörünün genelde süreksiz olması $u \in L^1(\Omega)$ ile f fonksiyonunun konvolüsyonunun genelde süreksiz olduğunu verir. Daha açıkçası genel olarak değişken üstlü Lebesgue uzaylarında Young teoremi beklenen sonucu vermez. Yani, genel olarak

$$\|v * u\|_{p(\cdot)} \not\leq \|u\|_1 \|v\|_{p(\cdot)}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.15. Eğer her $x, y \in \Omega$ için

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{L}{-\ln|x - y|}, \quad |x - y| \leq \frac{1}{2} \quad (3.1.4)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $L > 0$ sayısı varsa, p fonksiyonuna log-Hölder sürekli ve (3.1.4) koşuluna log-Hölder süreklilik koşulu adı verilir.

Bundan sonraki çalışmamızda, Ω bölgesinde $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder sürekli p fonksiyonlarını kümesini $\mathbb{P}^{\log}(\Omega)$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.1.16. Ω sınırlı bir bölge ve $p \in \mathbb{P}^{\log}(\Omega)$ olsun. Bu durumda M maximal operatörü $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır (Diening 2002).

Tanım 3.1.17. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de açık bir bölge ve $p : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu sürekli olsun. Eğer her $x, y \in \Omega$ için p fonksiyonu log-Hölder sürekli ve her $x \in \Omega$ için

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{C}{\log(e + |x|)}$$

olacak şekilde $\lim_{|x| \rightarrow \infty} p(x) = p_\infty \in [1, \infty)$ ve $C > 0$ sabitleri varsa p fonksiyonuna **global log-Hölder sürekli** adı verilir.

Teorem 3.1.18 $\Omega, \mathbb{R}^n$ de açık bir bölge ve $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde global log-Hölder sürekli olsun. Bu durumda Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır. (Cruz-Uribe ve ark. 2003)

Teorem 3.1.19. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olsun. $0 < \alpha < n$ olmak üzere p fonksiyonu $1 < p^- \leq p^+ < \frac{n}{\alpha}$ olacak şekilde global log-Hölder sürekli ve $x \in \Omega$ için

$$\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\alpha}{n}$$

özelliliği ile $q : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda I_α Riesz operatörü $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayından $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır. (Capone ve ark. 2004).

Teorem 3.1.20. p fonksiyonu $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde global log-Hölder sürekli bir fonksiyon olsun. $\mathbb{H}$ Hilbert operatörü $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ de sınırlıdır (Cruz-Uribe ve ark. 2005).

Teorem 3.1.21. $0 \leq \ell \leq \infty$ olsun. $p \in L^\infty([0, \ell])$ fonksiyonu $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde

$$p(0) = \lim_{t \rightarrow 0} p(t) \text{ ve } p(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t), \quad (3.1.5)$$

limitlerine sahip olsun ve

$$|t| \leq \frac{1}{2} \text{ için } |p(t) - p(0)| \leq \frac{C}{\ln|t|} \text{ ve } |p(t) - p(\infty)| \leq \frac{C}{\ln(e + |t|)} \quad (3.1.6)$$

şartlarını sağlasın. $\alpha, \beta, v \in L^\infty([0, \ell])$ fonksiyonları (3.1.5) ve (3.1.6) şartlarını sağlasın ve

$$0 \leq v(0) < \frac{1}{p(0)} \text{ ve } 0 \leq v(\infty) < \frac{1}{p(\infty)}$$

olsun. Ayrıca $q \in L^\infty([0, \ell])$ fonksiyonu $1 < q^- \leq q^+ < \infty$ olacak şekilde (3.1.5) ve (3.1.6) şartlarını sağlasın ve

$$\frac{1}{q(0)} = \frac{1}{p(0)} - v(0) \text{ ve } \frac{1}{q(\infty)} = \frac{1}{p(\infty)} - v(\infty)$$

olsun. Bu durumda

$$\left\| H_{v(\cdot)}^{\alpha(\cdot)} f(x) \right\|_{L^{q(\cdot)}([0, \ell])} \leq C \|f\|_{L^{p(\cdot)}([0, \ell])}$$

$$\left\| \mathcal{H}_{v(\cdot)}^{\beta(\cdot)} f(x) \right\|_{L^{q(\cdot)}([0, \ell])} \leq C \|f\|_{L^{p(\cdot)}([0, \ell])}$$

Hardy tipli eşitsizliklerinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\alpha(0) < \frac{1}{p'(0)}, \quad \alpha(\infty) < \frac{1}{p'(\infty)}$$

ve

$$\beta(0) > -\frac{1}{p(0)}, \quad \beta(\infty) > -\frac{1}{p(\infty)}$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır (Diening ve Samko 2007).

Tanım 3.1.22 $L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı, hemen hemen her yerde $w(x) \geq 0$ olmak üzere $wf \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olacak şekilde $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ fonksiyonların sınıfı olarak tanımlanır. $L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{L_w^{p(\cdot)}(\Omega)} := \|f\|_{p(\cdot), w} = \inf \left\{ \eta > 0 : \int_{\Omega} \left| \frac{w(x)f(x)}{\eta} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

normu altında bir Banach uzayıdır. $w(x) \equiv 1$ ise $L_w^{p(\cdot)}(\Omega) = L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olduğu açıktır.

Bu uzayda tanımlanan modüler fonksiyon w bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$I_{p(\cdot),w}(f) = \int_{\Omega} |w(x)f(x)|^{p(x)} dx$$

şeklinde tanımlıdır.

Lemma 3.1.23. Eğer $f \in L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ ise bu durumda,

$$i) f \neq 0 \text{ için } \|f\|_{p(\cdot),w} = \eta \iff I_{p(\cdot),w}\left(\frac{f}{\eta}\right) = 1$$

$$ii) \text{ Eğer } \|f\|_{p(\cdot),w} > 1 \text{ ise}$$

$$\|f\|_{p(\cdot),w}^{p^-} \leq I_{p(\cdot),w}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot),w}^{p^+} \quad (3.1.7)$$

$$iii) \text{ Eğer } \|f\|_{p(\cdot),w} < 1 \text{ ise}$$

$$\|f\|_{p(\cdot),w}^{p^+} \leq I_{p(\cdot),w}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot),w}^{p^-} \quad (3.1.8)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Lemma 3.1.24. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, $|\Omega| < \infty$ ve $p(\cdot), q(\cdot) \in L_+^\infty(\Omega)$ olsun. Bu durumda w bir ağırlık fonksiyonu h.h.h. $x \in \Omega$ için $p(x) \leq q(x)$ olmak üzere eğer $u \in L_w^{q(\cdot)}(\Omega)$ ise o halde $u \in L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ olur ve

$$\|u\|_{p(\cdot),w} \leq (1 + |\Omega|) \|u\|_{q(\cdot),w}$$

eşitsizliği yazılabilir. Dolayısıyla $L_w^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ gömmesi geçerlidir.

Teorem 3.1.25. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de sınırlı açık bir bölge, p fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın. Bu durumda $x_0 \in \Omega$ olmak üzere M^β operatörünün $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{-n}{p(x_0)} < \beta < \frac{n}{p'(x_0)} \quad (3.1.9)$$

dir (Kokilashvili ve Samko 2004).

Tanım 3.1.26. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de sınırlı açık bir bölge olsun. Bu durumda ağırlıklı Riesz potansiyel operatörü $I_{\alpha(\cdot)}^\beta f$

$$I_{\alpha(x)}^\beta f(x) = |x - x_0|^\beta \int_{\Omega} \frac{f(y)}{|y - x_0|^\beta |x - y|^{n-\alpha(x)}} dy, \quad x_0 \in \overline{\Omega},$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\beta = 0$ olarak alınırsa, $I_{\alpha(x)}^0 f(x) = I_{\alpha(x)} f(x)$ eşitliği yazılabilir.

Teorem 3.1.27. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de sınırlı açık bir bölge olsun. p fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın ve $\inf_{x \in \Omega} \alpha(x) > 0$ olsun. Eğer

$$\frac{-n}{p(x_0)} < \beta < \frac{n}{p'(x_0)} \quad (3.1.10)$$

ise bu durumda $I_{\alpha(\cdot)}^\beta$ operatörü $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır (Kokilashvili ve Samko 2004).

Teorem 3.1.28. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de sınırlı açık bir bölge, p fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın, $\inf_{x \in \Omega} \alpha(x) > 0$ ve $\sup_{x \in \Omega} \alpha(x)p(x) < n$ olsun. Bu durumda $I_{\alpha(\cdot)}$ operatörü, $\frac{1}{r(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n}$ olmak üzere $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ dan $L^{r(\cdot)}(\Omega)$ ya sınırlıdır (Kokilashvili ve Samko 2004).

Teorem 3.1.29. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, p fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^m |x - a_k|^{\beta_k}, \quad a_k \in \Omega$$

olmak üzere

$$-\frac{1}{p(a_k)} < \beta_k < \frac{1}{q(a_k)}, \quad k = 1, \dots, m$$

eşitsizliği geçerli ise $L^{p(\cdot)}(\Omega, \rho)$ uzayında $\mathbb{H}$ Hilbert operatörü sınırlıdır (Kokilashvili ve Samko 2003).

3.2. Değişken Üstlü Lorentz Uzayları

Tanım 3.2.1. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de sınırlı açık bir bölge, $\ell = |\Omega|$ olmak üzere $p \in \mathcal{M}([0, \ell])$ fonksiyonu $1 < p^- \leq p(t) \leq p^+ < \infty$ koşulunu sağlasın. $\Lambda^{p(\cdot)}(\Omega)$ değişken üstlü klasik Lorentz uzayı

$$\|f\|_{\Lambda^{p(\cdot)}(\Omega)} := \|f^*\|_{L^{p(\cdot)}[0, \ell]} < \infty$$

olacak şekilde Ω bölgesindeki ölçülebilir fonksiyonlardan oluşur. $f^*(t) \leq f^{**}(t)$ olduğundan

$$\|f\|_{\Lambda^{p(\cdot)}(\Omega)} := \|f^{**}\|_{L^{p(\cdot)}[0, \ell]} < \infty$$

olduğu açıktır.

Aynı koşullar altında w ağırlık fonksiyonu $[0, \ell]$ de tanımlı olmak üzere $\Lambda_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ ağırlıklı değişken üstlü klasik Lorentz uzayı

$$\|f\|_{\Lambda_w^{p(\cdot)}(\Omega)} := \|wf^*\|_{L^{p(\cdot)}[0, \ell]} < \infty$$

olacak şekilde Ω bölgesindeki ölçülebilir fonksiyonlardan oluşur. $f^*(t) \leq f^{**}(t)$ olduğundan

$$\|f\|_{\Lambda_w^{p(\cdot)}(\Omega)} := \|wf^{**}\|_{L^{p(\cdot)}[0, \ell]} < \infty$$

olduğu açıktır.

Teorem 3.2.2. $a < \infty$ için $p : [0, a] \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$, $p(0) > 1$ ve herhangi $x_0 \in (0, a)$ için $p_{(0, x_0)}^+ = p(0)$ olacak şekilde

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (p(x) - p(0)) \log \frac{1}{x} < \infty$$

şartını sağlayan sınırlı ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $w = |\cdot|^\beta$ ve $0 \leq \beta < 1 - \frac{1}{p(0)}$ olduğunda M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $\Lambda_w^{p(\cdot)}([0, a])$ ağırlıklı değişken üstlü klasik Lorentz uzayında sınırlıdır (İsrafilov ve ark. 2006).

Teorem 3.2.3. p fonksiyonu Teorem 3.2.2 deki özellikleri sağlayan $t = 0$ da sürekli bir fonksiyon olsun. $\mathbb{H}$ Hilbert operatörü $\Lambda^{p(\cdot)}([0, a])$ değişken üstlü klasik Lorentz uzayında sınırlıdır (İsrafilov ve ark. 2006).

Teorem 3.2.4. p fonksiyonu Teorem 3.2.2 deki özellikleri sağlayan $t = 0$ da sürekli bir fonksiyon olsun. I_α Riesz operatörü $\Lambda^{p(\cdot)}([0, a])$ değişken üstlü klasik Lorentz uzayından $\Lambda^{p(\cdot)}([0, a])$ değişken üstlü klasik Lorentz uzayına sınırlıdır (İsrafilov ve ark. 2006).

Tanım 3.2.5. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve $\ell = |\Omega|$ olmak üzere $L^{p(\cdot)}([0, \ell])$ de Banach fonksiyon uzayı olan değişken üstlü Lorentz uzayını tanımlayabiliriz. $p, q \in \mathcal{M}([0, \ell])$ olsun. $0 < p^- \leq p^+ < \infty$, $1 \leq q^- \leq q^+ < \infty$ ve $t^{\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{q(t)}} u^*(t) \in L^{q(\cdot)}([0, \ell])$ olmak üzere $L^{p(\cdot), q(\cdot)}(\Omega)$ değişken üstlü Lorentz uzayı

$$\mathcal{J}_{p, q}(u) := \int_0^\ell t^{\frac{q(t)}{p(t)} - 1} |u^*(t)|^{q(t)} dt < \infty \quad (3.2.1)$$

olacak şekilde $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ fonksiyonlarından meydana gelir. Eğer $p, q \in \mathcal{M}([0, \ell])$ fonksiyonları 3.1.5 ve 3.1.6 şartları sağlar ve $0 < p^- \leq p^+ < \infty$, $1 < q^- \leq q^+ < \infty$ olursa (3.2.1) deki eşitsizlik $\ell = \infty$ için

$$\int_0^1 t^{\frac{q(0)}{p(0)} - 1} |f^*(t)|^{q(t)} dt + \int_1^\infty t^{\frac{q(\infty)}{p(\infty)} - 1} |f^*(t)|^{q(t)} dt < \infty, \quad (3.2.2)$$

eşitsizliğine eşittir, $\ell < \infty$ için ise sadece $\int_0^\ell t^{\frac{q(0)}{p(0)} - 1} |f^*(t)|^{q(t)} dt$ terimi geçerlidir.

$L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$ uzayında

$$\|u\|_{L^{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \mathcal{J}_{p,q} \left(\frac{u}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} = \left\| t^{\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{q(t)}} u^*(t) \right\|_{L^{q(t)}([0,\ell])}$$

normları tanımlıdır.

Tanım 3.2.6. $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ ve w ağırlık fonksiyonu $[0, \ell]$ de tanımlı olmak üzere $L_w^{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$ ağırlıklı değişken üstlü Lorentz uzayı

$$\|u\|_{L_w^{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)} = \left\| w(t) t^{\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{q(t)}} u^*(t) \right\|_{L^{q(t)}(0,|\Omega|)} < \infty$$

olacak şekilde u fonksiyonlarından meydana gelir.

Teorem 3.2.7. $p, q \in \mathcal{M}([0, \ell])$ fonksiyonları (3.1.5) ve (3.1.6) şartlarını ve $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, $p(0) > 1, p(\infty) > 1$ ve $1 < q^- \leq q^+ < \infty$ eşitsizliklerini sağlasın. $\gamma \in L^\infty([0, \ell])$ fonksiyonu (3.1.5) ve (3.1.6) şartları sağlamak üzere

$$\gamma(0) < \frac{1}{p'(0)} \text{ ve } \gamma(\infty) > \frac{1}{p'(\infty)} \text{ (İkincisi } |\Omega| = \infty \text{ olduğunda geçerlidir.)} \quad (3.2.3)$$

ise $w(t) = t^{\gamma(t)}$ ağırlık fonksiyonu ile birlikte $L_w^{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$ da maksimal operatör sınırlıdır (Ephremidze ve ark. 2008).

Teorem 3.2.8. Teorem 3.2.7 deki koşullar altında $\mathbb{H}$ Hilbert operatörü $L_w^{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır (Ephremidze ve ark. 2008).

Teorem 3.2.9. $p, q \in \mathcal{M}([0, \ell])$ fonksiyonları (3.1.5) ve (3.1.6) şartlarını ve $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, $p(0) > 1, p(\infty) > 1$ ve $1 < q^- \leq q^+ < \infty$ eşitsizliklerini sağlasın ve $0 < \alpha < n$, $p^+ < \frac{n}{\alpha}$ olsun.

$$\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{p(0)} < \gamma(0) < \frac{1}{p'(0)} \text{ ve } \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{p(\infty)} < \gamma(\infty) < \frac{1}{p'(\infty)} \quad (3.2.4)$$

ise I^α operatörü, $\frac{1}{p_\alpha(t)} = \frac{1}{p(t)} - \frac{\alpha}{n}$ olduğunda Teorem 3.2.7 deki $w(t) = t^{\gamma(t)}$ ağırlık fonksiyonu ile birlikte $L_w^{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$ uzayından $L_w^{p_\alpha(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır (Sonsuzluk durumu $|\Omega| = \infty$ olduğunda geçerlidir.) (Ephremidze ve ark. 2008).

Teorem 3.2.10. Teorem (3.2.9) un koşulları altında M^α operatörü, $L_w^{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$ uzayından $L_w^{p_\alpha(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır (Ephremidze ve ark. 2008).

3.3. Değişken Üstlü Morrey Uzayları

Tanım 3.3.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, $x_0 \in \Omega$, $p \in L_+^\infty(\Omega)$ ve $0 \leq \lambda < n$ olsun. Değişken üstlü lokal Morrey uzayı $\mathcal{L}_{x_0;loc}^{p(\cdot),\lambda}(\Omega)$,

$$I_{p(\cdot),\lambda;x_0}(f) := \sup_{r>0} r^{-\lambda} \int_{\tilde{B}(x_0,r)} |f(y)|^{p(y)} dy < \infty$$

özelliğine sahip $f \in L^1(\Omega)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır. $\mathcal{L}_{x_0;loc}^{p(\cdot),\lambda}(\Omega)$ değişken üstlü lokal Morrey uzayında

$$p_*(r) = \begin{cases} p(0) & r \leq 1 \text{ ise} \\ p(\infty) & r > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{x_0;loc}^{p(\cdot),\lambda}(\Omega)} = \sup_{r>0} h^{-\frac{\lambda}{p_*(r)}} \left\| f \chi_{\tilde{B}(0,r)} \right\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$$

normu tanımlıdır. Özel olarak $x_0 = 0$, $0 < \ell \leq \infty$, $I = (0, \ell)$ ve $x \in I$ olsun.

$$p(0) = \lim_{x \rightarrow 0} p(x)$$

ve x e bağlı olmayan $A_0 = A(p) > 0$ için

$$0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ için } |p(x) - p(0)| \leq \frac{A_0}{-\ln x}$$

şartlarını sağlayan $p \in L^\infty(I)$ fonksiyonlarının sınıfını $P_0^{\log}(I) = P_0^{\log}$ ile, $\ell = \infty$ için

$$p(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} p(x)$$

ve

$$|p(x) - p(\infty)| \leq \frac{A_\infty}{\ln(e + |x|)}$$

şartlarını sağlayan $p \in P_0^{\log}$ fonksiyonlarının sınıfını ise $P_{0,\infty}^{\log}(I) = P_{0,\infty}^{\log}$ tanımlayalım. $\tilde{I}(0, h) = (0, h) \cap I$, $0 \leq \lambda < 1$ olmak üzere $\mathcal{L}_{0;loc}^{p(\cdot),\lambda}(I)$ **değişken üstlü lokal Morrey uzayları**

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc}^{p(\cdot),\lambda}(I)} = \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{p_*(h)}} \left\| f \chi_{\tilde{I}(0,h)} \right\|_{L^{p(\cdot)}(I)}$$

normu sonlu olacak şekilde $f \in \mathcal{M}(I)$ fonksiyonlarından oluşur.

Teorem 3.3.2. $0 \leq \lambda < 1$, $1 < p_- \leq p_+ < \infty$, $\alpha, \beta, v, p, r \in P_{0,\infty}^{\log}$ olsun öyle ki $0 \leq v(0) < \frac{1-\lambda}{p(0)}$, $0 \leq v(\infty) < \frac{1-\lambda}{p(\infty)}$ ve

$$\frac{1}{r(0)} = \frac{1}{p(0)} - \frac{v(0)}{1-\lambda}, \quad \frac{1}{r(\infty)} = \frac{1}{p(\infty)} - \frac{v(\infty)}{1-\lambda} \quad (3.3.1)$$

olsun.

$$\left\| t^{\alpha(t)+v(t)-1} \int_0^t \frac{f(s)}{s^{\alpha(s)}} ds \right\|_{L_{0;loc}^{r(\cdot),\lambda}(I)} \leq C \|f\|_{L_{0;loc}^{p(\cdot),\lambda}(I)} \quad (3.3.2)$$

$$\left\| t^{\beta(t)+v(t)} \int_t^l \frac{f(s)}{s^{\beta(s)+1}} ds \right\|_{L_{0;loc}^{r(\cdot),\lambda}(I)} \leq C \|f\|_{L_{0;loc}^{p(\cdot),\lambda}(I)}$$

Hardy eşitsizliklerinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\alpha(0) < \frac{1}{p'(0)} + \frac{\lambda}{p(0)}, \quad \alpha(\infty) < \frac{1}{p'(\infty)} + \frac{\lambda}{p(\infty)} \quad (3.3.3)$$

ve

$$\beta(0) > \frac{\lambda-1}{p(0)}, \quad \beta(\infty) > \frac{\lambda-1}{p(\infty)} \quad (3.3.4)$$

eşitsizliklerinin ayrı ayrı sağlanmasıdır. (Lukkassen ve ark. 2013).

Tanım 3.3.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, $p \in L_+^\infty(\Omega)$ ve $\lambda : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere $\lambda \in \mathcal{M}(\Omega)$ olsun. Değişken üstlü Morrey uzayı $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$,

$$I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f) := \sup_{x \in \Omega, r > 0} r^{-\lambda(x)} \int_{\tilde{B}(x,r)} |f(y)|^{p(y)} dy < \infty$$

özelliğine sahip $f \in L^1(\Omega)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır.

$\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ normu $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde tanımlanan norm olmak üzere $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında

$$\|f\|_1 = \inf \left\{ \eta > 0 : I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \left(\frac{f}{\eta} \right) \leq 1 \right\}$$

ya da

$$\|f\|_2 = \sup_{x \in \Omega, r > 0} \left\| r^{-\frac{\lambda(x)}{p(\cdot)}} f \chi_{\tilde{B}(x,r)} \right\|_{p(\cdot)}$$

şeklinde normlar tanımlanabilir.

Lemma 3.3.4. $\forall f \in L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\|f\|_i \leq 1 \text{ ise } \|f\|_i^{p^+} \leq I_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(f) \leq \|f\|_i^{p^-} \quad (3.3.5)$$

$$\|f\|_i \geq 1 \text{ ise } \|f\|_i^{p^-} \leq I_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(f) \leq \|f\|_i^{p^+} \quad (3.3.6)$$

eşitsizlikleri $i = 1, 2$ için geçerlidir (Almeida ve ark. 2008).

Lemma 3.3.5. $\forall f \in L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\|f\|_1 = \|f\|_2$$

eşitliği geçerlidir (Almeida ve ark. 2008).

Normların çakışmasından dolayı

$$\|f\|_{p(\cdot), \lambda(\cdot)} := \|f\|_1 = \|f\|_2$$

yazılabilir.

Lemma 3.3.6. Ω sınırlı açık bir bölge ve λ fonksiyonu log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın. Bu durumda $|x - y| \leq r$ olacak şekilde her $x, y \in \Omega$ için

$$\frac{1}{C} r^{-\lambda(y)} \leq r^{-\lambda(x)} \leq C r^{-\lambda(y)},$$

eşitsizliği geçerlidir. $C = e^{A_\lambda}$ sabiti x, y ve r ye bağlı değildir (Almeida ve ark. 2008).

Lemma 3.3.7. Ω sınırlı bir bölge ve λ fonksiyonu log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$\|f\|_3 = \sup_{x \in \Omega, r > 0} \left\| r^{-\frac{\lambda(\cdot)}{p(\cdot)}} f \chi_{\tilde{B}(x, r)} \right\|_{p(\cdot)}$$

fonksiyoneli $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında bir denk norm tanımlar. (Almeida ve ark. 2008).

Eğer $p(x) \equiv p$ ve $\lambda(x) \equiv \lambda$ şeklinde sabit olarak alınırsa $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega) = L^{p, \lambda}(\Omega)$ eşitliği yazılabilir.

Teorem 3.3.8. $\Omega, \mathbb{R}^n$ nin sınırlı açık bir alt bölgesi, $p : \overline{\Omega} \longrightarrow [1, \infty)$ ve $\lambda : \overline{\Omega} \longrightarrow [0, \infty)$, $\overline{\Omega}$ üzerinde log-Hölder sürekli olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlar geçerlidir.

- 1) $\lambda \equiv 0$ ise $L^{p(\cdot), 0}(\Omega) \cong L^{p(\cdot)}(\Omega)$
- 2) $\lambda \equiv n$ ise $L^{p(\cdot), n}(\Omega) \cong L^\infty(\Omega)$
- 3) $\lambda^- > n$ ise $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega) \equiv \{0\}$ (Fan 2010).

Lemma 3.3.9. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, $0 \leq \lambda(x) \leq n$ ve $0 \leq \mu(x) \leq n$ olsun. Eğer $p(\cdot)$ ve $q(\cdot)$ fonksiyonları log-Hölder sürekli, $p(x) \leq q(x)$ ve

$$\frac{n - \lambda(x)}{p(x)} \geq \frac{n - \mu(x)}{q(x)}$$

ise bu durumda

$$L^{q(\cdot), \mu(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$$

gömmesi geçerlidir (Almeida ve ark. 2008).

Teorem 3.3.10. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olsun. Eğer $p \in \mathbb{P}^{\log}$ ve $0 \leq \lambda(x) \leq \lambda^+ < n$ ise M maximal operatörü $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır (Almeida ve ark. 2008).

Sonuç 3.3.11. Teorem 3.3.10 un koşulları altında $M^\sharp$ sharp maximal operatörü $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır.

Teorem 3.3.12. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge, $p \in \mathbb{P}^{\log}$ ve $0 \leq \lambda(x) \leq \lambda^+ < n$ olsun. Eğer α fonksiyonu log-Hölder sürekli ve

$$\inf_{x \in \Omega} \alpha(x) > 0, \sup_{x \in \Omega} [\lambda(x) + \alpha(x)p(x)] < n \quad (3.3.7)$$

ise

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n - \lambda(x)}$$

olmak üzere $I_{\alpha(\cdot)}$ operatörü $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayından $L^{q(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır (Almeida ve ark. 2008).

Sonuç 3.3.13. Teorem 3.3.12 nin koşulları altında $M_{\alpha(\cdot)}$ kesirli maximal operatörü $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayından $L^{q(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır (Almeida ve ark. 2008).

Teorem 3.3.14. Ω sınırlı bir bölge, $p \in \mathbb{P}^{\log}$ olsun. Ayrıca α ve λ fonksiyonları log-Hölder sürekli ve (3.3.7) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $I_{\alpha(\cdot)}$ operatörü, $q(\cdot)$ fonksiyonu log-Hölder sürekli ve

$$1 \leq q(x) \leq \frac{p(x) [n - \lambda(x)]}{n - [\lambda(x) + \alpha(x)p(x)]}$$

koşulunu sağlamak üzere ve $\mu(\cdot)$ fonksiyonu

$$\frac{n - \mu(x)}{q(x)} = \frac{n - \lambda(x)}{p(x)} - \alpha(x)$$

şeklinde tanımlanmak üzere $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ den $L^{q(\cdot), \mu(\cdot)}(\Omega)$ ya sınırlıdır.

Özel olarak,

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n}$$

ve

$$\mu(x) = \frac{n\lambda(x)}{n - \alpha(x)p(x)}$$

olarak alınabilir (Almeida ve ark. 2008).

Sonuç 3.3.15. Teorem 3.3.14 ün koşulları altında $M_{\alpha(\cdot)}$ kesirli maximal operatörü $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayından $L^{q(\cdot),\mu(\cdot)}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır (Almeida ve ark. 2008).

Teorem 3.3.16. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı açık bir bölge, $p \in \mathbb{P}^{\log}$ ve $0 \leq \lambda(x) < 1$ olsun. $\mathbb{T}$ singüler operatörü $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayından $L^{q(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır (Guliyev ve ark. 2010).

Tanım 3.3.17. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge, w bir ağırlık fonksiyonu, $p \in L_+^\infty(\Omega)$ ve $\lambda : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere $\lambda \in \mathcal{M}(\Omega)$ olsun. Ağırlıklı değişken üstlü Morrey uzayı $L_w^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$,

$$I_{p(\cdot),\lambda(\cdot);w(\cdot)}(f) := \sup_{x \in \Omega, r > 0} r^{-\lambda(x)} \int_{\tilde{B}(x,r)} |w(y)f(y)|^{p(y)} dy < \infty$$

olacak şekilde $f \in L^1(\Omega)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır.

$\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ normu $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde tanımlanan norm olmak üzere $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında

$$\|f\|_1 = \inf \left\{ \eta > 0 : I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)} \left(\frac{wf}{\eta} \right) \leq 1 \right\}$$

ya da

$$\|f\|_2 = \sup_{x \in \Omega, r > 0} \left\| r^{-\frac{\lambda(x)}{p(\cdot)}} wf \chi_{\tilde{B}(x,r)} \right\|_{p(\cdot)}$$

şeklinde normlar tanımlanabilir. $w(x) \equiv 1$ ise $L_w^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega) = L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ olduğu açıktır. Ayrıca $\lambda \equiv 0$ ise $L_w^{p(\cdot),0}(\Omega) = L_w^{p(\cdot)}(\Omega)$ dir.

Lemma 3.3.21. Ω sınırlı bir bölge, w bir ağırlık fonksiyonu ve $0 \leq \lambda(x) \leq n$, $0 \leq \mu(x) \leq n$ olsun. Eğer $p(\cdot)$ ve $q(\cdot)$ log-Hölder sürekli, $p(x) \leq q(x)$ ve $\frac{n-\lambda(x)}{p(x)} \geq \frac{n-\mu(x)}{q(x)}$ ise bu durumda

$$L_w^{q(\cdot),\mu(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L_w^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$$

gömmesi geçerlidir. (Enver 2012).

Teorem 3.3.22. $\Omega, \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) de sınırlı açık bir bölge ve $x_0 \in \Omega$ olsun. p, λ fonksiyonları sırasıyla $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ ve $0 \leq \lambda(x) \leq \lambda^+ < n$ olacak şekilde log-Hölder koşulunu sağlasın. Eğer $\frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)} < \beta < \frac{n}{p'(x_0)}$ ise bu durumda

$$M^\beta f(x) = |x - x_0|^\beta \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r) \cap \Omega} \frac{|f(y)|}{|y - x_0|^\beta} dy, \quad (3.3.10)$$

operatörü $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır. (Enver 2012).

Sonuç 3.3.23. Teorem 3.3.22 nin koşulları altında $M^\sharp$ sharp maximal operatörü $L_w^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır.

Teorem 3.3.24. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı açık bir bölge ve $x_0 \in \overline{\Omega}$ olarak alınsın. p, λ fonksiyonları sırasıyla $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ ve $0 \leq \lambda(x) \leq \lambda^+ < n$ olacak şekilde log-Hölder sürekli, $x \in \Omega$ ve $\inf_{x \in \Omega} \alpha(x) > 0$ olsun. Eğer $\frac{\lambda(x_0)-n}{p(x_0)} < \beta < \frac{n}{p'(x_0)}$ ise bu durumda $I_{\alpha(x)}^\beta f(x) = |x - x_0|^\beta \int_{\Omega} \frac{f(y)}{|y - x_0|^\beta |x - y|^{n-\alpha(x)}} dy$ operatörü $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır. (Enver 2012).

4. BULGULAR

Bu bölümde değişken üstlü lokal Morrey-Lorentz uzayları ve kuvvet tipli ağırlıklı değişken üstlü lokal Morrey-Lorentz uzayları tanımlanacaktır. Bu uzaylarda Hardy-Littlewood maksimal, Hilbert ve Riesz potansiyel operatörlerinin sınırlılığı için yeter koşullar elde edilecektir.

4.1. Değişken Üstlü Lokal Morrey-Lorentz Uzayları

$0 < \ell \leq \infty$ olmak üzere $I = (0, \ell)$ olsun. p ve q fonksiyonları $0 < p^- \leq p^+ < \infty$, $1 \leq q^- \leq q^+ < \infty$ olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonlar ve $0 \leq \lambda < 1$ olsun.

$$q(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} q(x)$$

ve $\ell = \infty$ için

$$q(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} q(x)$$

limitlerinin var olduğunu kabul edelim.

$$q_*(h) = \begin{cases} q(0) & ; h \leq 1 \\ q(\infty) & ; h > 1 \end{cases}$$

olmak üzere $\mathcal{L}_{0;loc}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)$ **değişken üstlü lokal Morrey-Lorentz uzayı**

$$\mathcal{J}_{p,q,\lambda}(f) := \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q_*(h)}} \int_0^h t^{\frac{q(t)}{p(t)}-1} |f^*(t)|^{q(t)} dt < \infty$$

olacak şekilde I aralığındaki integrallenebilir f fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlayalım.

$\mathcal{L}_{0;loc}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)$ uzayında

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)} & : = \inf \left\{ \eta > 0 : \mathcal{J}_{p,q,\lambda} \left(\frac{f}{\eta} \right) \leq 1 \right\} \\ & : = \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q_*(h)}} \left\| t^{\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{q(t)}} f^* \right\|_{L^{q(t)}(0,h)} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

olacak şekilde normları tanımlanabilir. $I = (0, \ell) \subset \mathbb{R}_+$ ve $\ell < \infty$ için $I(0, h) = I \cap (0, h)$ olmak üzere

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)} = \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q(0)}} \left\| t^{\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{q(t)}} f^* \right\|_{L^{q(t)}(I(0,h))}$$

yazılabilir.

$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$ olmak üzere $\mathcal{L}_{0;loc}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)$ uzayında

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)}^1 = \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q^*(h)}} \left\| t^{\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{q(t)}} f^{**} \right\|_{L^{q(t)}(0,h)}, \quad (4.1.2)$$

normunu tanımlayabiliriz. $f^*(t) \leq f^{**}(t)$ olduğundan

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)}^1$$

eşitsizliği hemen yazılabilir. Aşağıdaki teorem (4.1.1) ve (4.1.2) ile tanımlanan normların denkleğini karakterize eder.

Teorem 4.1.1. $0 < \lambda < 1$, $0 < p^- \leq p^+ < \infty$, $1 \leq q^- \leq q^+ < \infty$ olmak üzere $p, q \in P_{0,\infty}^{\log}(I)$ olsun. Eğer $p(0) > \frac{q(0)}{q(0)+\lambda}$ ve $p(\infty) > \frac{q(\infty)}{q(\infty)+\lambda}$ ise $C > 0$ sabiti f den bağımsız olmak üzere

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)}^1 \leq C \|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teorem 3.3.2 den, $t = 0$ ve $t = \infty$ da $\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{q(t)}$ nin değeri aynı noktalarda $\frac{1}{q'(t)} + \frac{\lambda}{q(t)}$ nin değerinden daha küçük ise yani

$$p(0) > \frac{q(0)}{q(0) + \lambda} \text{ ve } p(\infty) > \frac{q(\infty)}{q(\infty) + \lambda} \quad (4.1.3)$$

ise eşitsizlik sağlanır. ■

$\lambda = 0$ ise $1 < q^- \leq q^+ < \infty$ olmak üzere $p(0) > 1$ ve $p(\infty) > 1$ elde edilir.

Teorem 4.1.1 ile uygun olarak $0 < \lambda < 1$, $0 < p^- \leq p^+ < \infty$, $1 \leq q^- \leq q^+ < \infty$ ve $p, q \in P_{0,\infty}^{\log}(I)$ olmak üzere (4.1.3) koşulu altında $\mathcal{L}_{0;loc}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)$ değişken üstlü lokal Morrey-Lorentz uzayını göz önüne alacağız.

4.2. Kuvvet Tipli Ağırlıklı Değişken Üstlü Lokal Morrey-Lorentz Uzayları

Tanım 4.2.1. w ağırlık fonksiyonu ile birlikte $\mathcal{L}_{0;loc;w}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)$ ağırlıklı değişken üstlü lokal Morrey-Lorentz uzayı

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc;w}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)} = \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q^*(h)}} \left\| w(t) t^{\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{q(t)}} f^* \right\|_{L^{q(\cdot)}(0,h)} < \infty \quad (4.2.1)$$

olacak şekilde $\mathcal{M}(I)$ daki fonksiyonların alt kümesi olarak tanımlanır. Ayrıca

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc;w}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)}^1 = \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q^*(h)}} \left\| w(t) t^{\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{q(t)}} f^{**} \right\|_{L^{q(\cdot)}(0,h)} < \infty \quad (4.2.2)$$

olur.

$\gamma \in P_{0,\infty}^{\log}(I)$ olsun yani $\gamma(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \gamma(t)$ ve $\ell = \infty$ için $\gamma(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t)$ limitlerine sahip I da ölçülebilir sınırlı bir γ fonksiyonu

$$|\gamma(t) - \gamma(0)| \leq \frac{C}{\ln \frac{1}{t}}, \quad 0 < t < \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad |\gamma(t) - \gamma(\infty)| \leq \frac{C}{\ln(e+t)} \quad (4.2.3)$$

eşitsizliklerini sağlasın. $w(t) = t^{\gamma(t)}$ kuvvet tipli ağırlık fonksiyonu için

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)} = \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q^*(h)}} \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p(t)}-\frac{1}{q(t)}} f^* \right\|_{L^{q(\cdot)}(0,h)}$$

normunu ve notasyonunu kullanacağız.

Lemma 4.2.2. $0 < \lambda < 1$, $0 < p^- \leq p^+ < \infty$, $1 \leq q^- \leq q^+ < \infty$ ve $p, q \in P_{0,\infty}^{\log}(I)$ olmak üzere (4.1.3) koşulu sağlansın. $\gamma \in P_{0,\infty}^{\log}(I)$ olmak üzere

$$\gamma(0) < \frac{1}{p'(0)} + \frac{\lambda}{q(0)} \quad \text{ve} \quad \gamma(\infty) < \frac{1}{p'(\infty)} + \frac{\lambda}{q(\infty)}$$

olsun. Bu durumda f fonksiyonuna bağlı olmayan $C > 0$ sabiti için

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)}^1 \leq C \|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Eşitsizliğin sol tarafı $f^*(t) \leq f^{**}(t)$ eşitsizliğinden dolayı açıktır, sağ tarafı ise Teorem 3.3.2 den bulunur. ■

4.3. Hardy-Littlewood Maksimal ve Riesz Potansiyel Operatörlerinin Sınırlılığı

Teorem 4.3.1. $0 < \lambda < 1$, $0 < p^- \leq p^+ < \infty$, $1 \leq q^- \leq q^+ < \infty$ ve $p, q \in P_{0,\infty}^{\log}(I)$ olmak üzere (4.1.3) koşulu sağlansın. $\gamma \in P_{0,\infty}^{\log}(I)$ olmak üzere

$$\gamma(0) < \frac{1}{p'(0)} + \frac{\lambda}{q(0)} \quad (4.3.1)$$

ve

$$\gamma(\infty) < \frac{1}{p'(\infty)} + \frac{\lambda}{q(\infty)} \quad (4.3.2)$$

ise bu durumda maksimal operatör $\mathcal{L}_{0;loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p(\cdot),q(\cdot),\lambda}(I)$ uzayında sınırlıdır.

İspat. Lemma 2.6.11 den

$$(Mf)^*(t) \leq C f^{**}(t) \quad (4.3.3)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu biliniyor.

Bu nedenle

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{\mathcal{L}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}_{0,loc;|\cdot|^\gamma}(I)} &= \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q_*(h)}} \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p(t)}-\frac{1}{q(t)}} (Mf)^*(t) \right\|_{L^{q(t)}(0,h)} \\ &\leq C \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q_*(h)}} \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p(t)}-\frac{1}{q(t)}} f^{**}(t) \right\|_{L^{q(t)}(0,h)} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{\mathcal{L}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}_{0,loc;|\cdot|^\gamma}(I)} &= C \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q_*(h)}} \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p(t)}-\frac{1}{q(t)}-1} \int_0^t f^*(s) ds \right\|_{L^{q(t)}(0,h)} \\ &\leq C \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p(t)}-\frac{1}{q(t)}-1} \int_0^t f^*(s) ds \right\|_{L^{q(t),\lambda}_{0,loc}(I)} \end{aligned}$$

yazılabilir. (4.3.1) ve (4.3.2) koşulları altında Teorem 3.3.2 den

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{\mathcal{L}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}_{0,loc;|\cdot|^\gamma}(I)} &\leq C \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p(t)}-\frac{1}{q(t)}} f^*(t) \right\|_{L^{q(t),\lambda}_{0,loc}(I)} \\ &= C \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q_*(h)}} \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p(t)}-\frac{1}{q(t)}} f^*(t) \right\|_{L^{q(t)}(0,h)} \\ &= C \|f\|_{\mathcal{L}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}_{0,loc;\gamma}(I)} \end{aligned}$$

yazabiliriz ve böylece ispat tamamlanır. ■

$I(x, h) = (x - h, x + h) \cap I$ aralığında f nin ortalama değeri

$$f_{I(x,h)} = \frac{1}{|I(x,h)|} \int_{I(x,h)} f(t) dt$$

olmak üzere sharp maksimal fonksiyonu

$$M^\sharp f(x) := \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{I(x,h)} |f(t) - f_{I(x,h)}| dt$$

şeklinde tanımlıdır. M maksimal operatörün sınırlılığından ve

$$M^\sharp f(x) \leq 2Mf(x), \quad x \in I,$$

noktasal eşitsizliğinden aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 4.3.2. Teorem 4.3.1 deki koşullar altında $M^\sharp$ sharp maksimal operatörü $\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^\gamma(\cdot)}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)$ de sınırlıdır.

Teorem 4.3.3. $0 < \lambda < 1$, $0 < p^- \leq p^+ < \infty$, $1 \leq q^- \leq q^+ < \infty$ ve $p, q \in P_{0,\infty}^{\log}(I)$ olmak üzere (4.1.3) koşulu sağlansın. $\gamma \in P_{0,\infty}^{\log}(I)$ olmak üzere (4.3.1) ve (4.3.2) koşulları altında Hilbert operatörü $\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^\gamma(\cdot)}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)$ uzayında sınırlıdır.

İspat: $\mathbb{H}$ operatörü

$$(\mathbb{H}f)^*(t) \leq C \left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds + \int_t^l \frac{f^*(s)}{s} ds \right)$$

eşitsizliğini sağladığından

$$\begin{aligned} \|\mathbb{H}f\|_{\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^\gamma(\cdot)}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)} &= \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q_*(h)}} \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p(t)}-\frac{1}{q(t)}} (\mathbb{H}f)^*(t) \right\|_{L^{q(t)}(0,h)} \\ &\leq C \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q_*(h)}} \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p(t)}-\frac{1}{q(t)}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds + \int_t^l \frac{f^*(s)}{s} ds \right) \right\|_{L^{q(t)}(0,h)} \end{aligned}$$

yazılabilir. (4.3.1) ve (4.3.2) koşulları altında Teorem 3.3.2 den

$$\|\mathbb{H}f\|_{\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^\gamma(\cdot)}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)} \leq C \|f\|_{\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^\gamma(\cdot)}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)}$$

elde edilir. Bu ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.3.4. $\ell = |I|$ olsun. $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda < 1$, $0 < p^- \leq p^+ < \infty$, $1 \leq q^- \leq q^+ < \infty$ ve $p, q, \gamma \in P_{0,\infty}^{\log}(I)$ olmak üzere (4.1.3) koşulu sağlansın. $t \in [0, \ell]$ için $p^+ < \frac{1}{\alpha}$ ve $\frac{1}{p_\alpha(t)} = \frac{1}{p(t)} - \alpha$ olmak üzere

$$\alpha + \frac{\lambda}{q(0)} - \frac{1}{p(0)} < \gamma(0) < \frac{1}{p'(0)} + \frac{\lambda}{q(0)} \quad (4.3.4)$$

ve

$$\alpha + \frac{\lambda}{q(\infty)} - \frac{1}{p(\infty)} < \gamma(\infty) < \frac{1}{p'(\infty)} + \frac{\lambda}{q(\infty)}, \quad (4.3.5)$$

ise I^α operatörü $\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^\gamma(\cdot)}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)$ uzayından $\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^\gamma(\cdot)}^{p_\alpha(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. Kuvvet tipli ağırlıklı değişken üstlü local Morrey Lorentz uzayının normunun tanımından

$$\|I^\alpha f\|_{\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^\gamma(\cdot)}^{p_\alpha(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)} = \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q_*(h)}} \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p_\alpha(t)}-\frac{1}{q(t)}} (I^\alpha f)^*(t) \right\|_{L^{q(t)}(0,h)}$$

ve

$$(I^\alpha f)^*(t) \leq c \left(t^{-1+\alpha} \int_0^t f^*(s) ds + \int_t^l f^*(s) s^{-1+\alpha} ds \right) \quad (4.3.6)$$

olduğunu biliyoruz.

$$Q(t) = \gamma(t) + \frac{1}{p(t)} - \frac{1}{q(t)}, \quad \varphi(t) = t^{Q(t)} f^*(t) \in L_{0;loc}^{q(\cdot),\lambda}(I)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \|I^\alpha f\|_{\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^\gamma(\cdot)}^{p_\alpha(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)} &= \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q_*(h)}} \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p(t)}-\frac{1}{q(t)}} (I^\alpha f)^*(t) \right\|_{L^{q(t)}(0,h)} \\ &\leq C \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p(t)}-\frac{1}{q(t)}-\alpha} \left[t^{-1+\alpha} \int_0^t f^*(s) ds + \int_t^l f^*(s) s^{-1+\alpha} ds \right] \right\|_{L_{0;loc}^{q(t),\lambda}(I)} \\ &= C \left\| t^{Q(t)-1} \int_0^t \frac{\varphi(s)}{s^{Q(s)}} ds + t^{Q(t)-\alpha} \int_t^l \frac{\varphi(s)}{s^{Q(s)-\alpha+1}} ds \right\|_{L_{0;loc}^{q(t),\lambda}(I)} \\ &\leq C \left\| t^{Q(t)-1} \int_0^t \frac{\varphi(s)}{s^{Q(s)}} ds \right\|_{L_{0;loc}^{q(t),\lambda}(I)} + C \left\| t^{Q(t)-\alpha} \int_t^l \frac{\varphi(s)}{s^{Q(s)-\alpha+1}} ds \right\|_{L_{0;loc}^{q(t),\lambda}(I)} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece Teorem 3.3.2 den (4.3.4) ve (4.3.5) koşulları altında

$$\begin{aligned} \|I^\alpha f\|_{\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^\gamma(\cdot)}^{p_\alpha(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)} &\leq C \|\varphi\|_{L^{q(\cdot),\lambda}(I)} \\ &= C \sup_{h>0} r^{-\frac{\lambda}{q_*(h)}} \|\varphi\|_{L^{q(\cdot)}(0,h)} \\ &= C \sup_{h>0} r^{-\frac{\lambda}{q_*(h)}} \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p(t)}-\frac{1}{q(t)}} f^*(t) \right\|_{L^{q(\cdot)}(0,h)} \\ &= C \|f\|_{\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^\gamma(\cdot)}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar. ■

Kesirli maksimal fonksiyon ile Riesz operatörü arasındaki

$$M^\alpha f(x) \leq c I^\alpha (|f|)(x), \quad x \in I,$$

noktasal eşitsizlikten ve Teorem 4.3.4 den aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 4.3.5. Teorem 4.3.4 ün koşulları altında M^α fraksiyonel maksimal operatörü $\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^\gamma(\cdot)}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)$ uzayından $\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^\gamma(\cdot)}^{p_\alpha(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)$ uzayına sınırlıdır.

Teorem 4.3.6. $\ell = |I|$ olsun. $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda < 1$, $0 < p^- \leq p^+ < \infty$, $1 \leq q^- \leq q^+ < \infty$ ve $p, q, \gamma \in P_{0,\infty}^{\log}(I)$ olmak üzere (4.1.3) koşulu sağlansın. $t \in [0, \ell]$ için $\max\{p^+, q^+\} < \frac{1-\lambda}{\alpha}$ olmak üzere $\frac{1}{p_\alpha(t)} = \frac{1}{p(t)} - \frac{\alpha}{1-\lambda}$ ve $\frac{1}{q_\alpha(t)} = \frac{1}{q(t)} - \frac{\alpha}{1-\lambda}$ olsun. (4.3.4) ve (4.3.4) koşulları altında I^α operatörü $\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)$ uzayından $\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p_\alpha(\cdot),q_\alpha(\cdot);\lambda}(I)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. $f \in \mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)$ olsun. Kuvvet tipli ağırlıklı değişken üstlü local Morrey Lorentz uzayının normunun tanımından

$$\|I^\alpha f\|_{\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p_\alpha(\cdot),q_\alpha(\cdot);\lambda}(I)} = \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q_\alpha(h)}} \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p_\alpha(t)}-\frac{1}{q_\alpha(t)}} (I^\alpha f)^*(t) \right\|_{L^{q_\alpha(\cdot),\lambda}_{0,h}}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p(t)}-\frac{1}{q(t)}-1+\alpha} \int_0^t f^*(s) ds \right\|_{L^{q_\alpha(\cdot),\lambda}_{0,loc}(I)}, \\ I_2 &= \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p(t)}-\frac{1}{q(t)}} \int_t^\ell f^*(s) s^{-1+\alpha} ds \right\|_{L^{q_\alpha(\cdot),\lambda}_{0,loc}(I)} \end{aligned}$$

olmak üzere (4.3.6) eşitsizliğinden

$$\|I^\alpha f\|_{\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p_\alpha(\cdot),q_\alpha(\cdot);\lambda}(I)} \leq C(I_1 + I_2),$$

yazabiliriz.

$Q(t) = \gamma(t) + \frac{1}{p(t)} - \frac{1}{q(t)}$ ve $\varphi(t) = t^{Q(t)} f^*(t)$ olmak üzere

$$I_1 = \left\| t^{Q(t)-1+\alpha} \int_0^t \frac{\varphi(s)}{s^{Q(s)}} ds \right\|_{L^{q_\alpha(\cdot),\lambda}_{0,loc}(I)}$$

olduğundan $\gamma(0) < \frac{1}{p'(0)} + \frac{\lambda}{q(0)}$ ve $\gamma(\infty) < \frac{1}{p'(\infty)} + \frac{\lambda}{q(\infty)}$ ise bu durumda Teorem 3.3.2 den

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \|\varphi\|_{L^{q_\alpha(\cdot),\lambda}_{0,loc}(I)} \\ &\leq C \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p(t)}-\frac{1}{q(t)}} f^*(t) \right\|_{L^{q(\cdot),\lambda}_{0,loc}(I)} \\ &= C \|f\|_{\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\beta(t) = \gamma(t) + \frac{1}{p(t)} - \frac{1}{q(t)} - \alpha$ ve $\varphi(t) = t^{\beta(t)+\alpha} f^*(t)$ olmak üzere

$$I_2 = \left\| t^{\beta(t)+\alpha} \int_t^\ell \frac{\varphi(s)}{s^{\beta(s)+1}} ds \right\|_{L_{0;loc}^{q_\alpha(\cdot),\lambda}(I)}$$

olduğundan $\alpha + \frac{\lambda}{q(0)} - \frac{1}{p(0)} < \gamma(0)$ ve $\alpha + \frac{\lambda}{q(\infty)} - \frac{1}{p(\infty)} < \gamma(\infty)$ ise

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \|\varphi\|_{L_{0;loc}^{q(\cdot),\lambda}(I)} \\ &\leq C \left\| t^{\gamma(t)+\frac{1}{p(t)}-\frac{1}{q(t)}} f^*(t) \right\|_{L_{0;loc}^{q(\cdot),\lambda}(I)} \\ &= \|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu Teorem 4.3.6 in ispatını tamamlar. ■

Sonuç 4.3.7. Teorem 4.3.6 nın koşulları altında M^α kesirli maksimal operatör $\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)$ uzayından $\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p_\alpha(\cdot),q_\alpha(\cdot);\lambda}(I)$ uzayına sınırlıdır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bulgular bölümünde, yeni bir fonksiyon uzayı olarak değişken üstlü local Morrey Lorentz uzayları $\mathcal{L}_{0;loc}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)$ ve kuvvet tipli ağırlıklı versiyonu $L_{0,loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p_\alpha(\cdot),q_\alpha(\cdot);\lambda}(I)$ tanımlanmıştır. Ayrıca $I \subseteq \mathbb{R}^+$ olmak üzere Hardy-Littlewood maksimal, Hilbert ve Riesz potansiyel operatörün sınırlığı gösterilmiştir.

$\lambda = 0$ olması durumunda $\mathcal{L}_{0,loc;|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(I)$ uzayı Lasha ve ark. tarafından tanımlanan kuvvetli tipli değişken üstlü Lorentz uzayı $\mathcal{L}_{|\cdot|^{\gamma(\cdot)}}^{p(\cdot),q(\cdot)}(I)$ ile çakışır. Ayrıca p, q sabit ve $\gamma(x) \equiv 0$ olması durumunda Aykol ve ark. tarafından tanımlanan local Morrey Lorentz uzayları $\mathcal{L}_{0,loc}^{p,q;\lambda}(I)$ elde edilir.

Hardy-Littlewood maksimal operatörün sınırlılığı için elde edilen yeter koşul Tanaka tarafından kuvvet tipli ağırlıklı Morrey uzaylarında gerek ve yeter koşul olarak ispatlanmıştır.

$\Omega, \mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olması durumunda değişken üstlü local Morrey Lorentz uzayı aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$p : (0, |\Omega|) \rightarrow (0, \infty)$ ve $q : (0, |\Omega|) \rightarrow (1, \infty)$ şeklinde ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $0 \leq \lambda < 1$ olmak üzere değişken üstlü local Morrey Lorentz uzayı $\mathcal{L}_{0,loc}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(\Omega)$,

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(\Omega)} = \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q^*(h)}} \left\| t^{\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{q(t)}} f^*(t) \right\|_{L^{q(\cdot)}(0,h)} < \infty$$

olacak şekilde $\mathcal{M}(\Omega)$ daki fonksiyonların alt kümesi olarak tanımlanır. f^{**} fonksiyonunun tanımından hareketle

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{0;loc}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(\Omega)}^1 = \sup_{h>0} h^{-\frac{\lambda}{q^*(h)}} \left\| t^{\frac{1}{p(t)} - \frac{1}{q(t)}} f^{**}(t) \right\|_{L^{q(\cdot)}(0,h)} < \infty$$

normu tanımlanabilir. (4.1.3) koşulu altında tanımlanan bu iki norm denktir.

Böylece bulgular kısmında elde edilen Teorem ve sonuçlar $\mathcal{L}_{0,loc}^{p(\cdot),q(\cdot);\lambda}(\Omega)$ uzayın da elde edilebilir.

6. KAYNAKLAR

- Adams, R. A. Hedberg, L. I. 1996. Function spaces and Potential Theory. Springer-Verlag, Berlin.
- Adams, R. A. 2003. Fournier J. J. Sobolev Space. Academic Pres, New York.
- Almeida, A., Hasanov, J., Samko, S. 2008. Maximal and Potential operators in variable exponent Morrey Spaces. Georgian Mathematical Journal, 15 (2): 195-208.
- Aykol, C., Guliyev, V. S., Serbetci, A. 2013. Boundedness of the maximal operator in the local Morrey-Lorentz spaces. J. Inequal. Appl., 2013 (346): 1-11.
- Bennett, C., Sharpley, R. 1988. Interpolation of Operators. Academic Press, Boston.
- Capone, C., Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A. 2007. The fractional maximal operator on variable L^p spaces. Rev. Mat. Iberoamericana, 23 (3): 743-770.
- Chiarenza F. ve Frasca M. 1987. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function. Rend. Math., 7 (3-4): 273-279.
- Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A., Neugebauer, C. J. 2003. The maximal function on variable L^p spaces. Ann. Acad. Sci Fenn. Math, 28 (1): 223-238.
- Diening, L. 2004. Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$. Math. Inequal. Appl., 7 (2): 245-254.
- Diening, L. 2004. Riesz potential and Sobolev imbeddings of generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$. Math. Nachr., 263 (1): 31-43.
- Diening, L. 2005. Maximal function on Orlicz-Musielak spaces and generalized Lebesgue spaces. Bull. Sci. Math., 129 (8): 657-700.
- Diening, L. and Samko S. 2007. Hardy inequality in variable exponent Lebesgue spaces. Fract. Calc. Appl. Anal., 10(1):1-18.
- Edmunds, D. E., Kokilashvili, V., Meskhi, A. 2004. A trace inequality for generalized potentials in Lebesgue spaces with variable exponents. J. Funct. Spaces Appl., 2 (1): 55-69.
- Ephremidze, L., Kokilashvili, V., Samko, S. 2008. Fractional and singular operators in variable exponent Lorentz spaces. Fract. Calc. Appl. Anal., 11 (4): 407-420.
- Fan, X. L., Zhao, D. 2001. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl, 424-446.

Fan, X. L. 2010. Variable exponent Morrey and Campanato spaces. *Nonlinear Anal.*, 72 (11): 4148-4161.

Guliyev, V. S. 2009. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in generalized Morrey spaces. *J. Inequal. Appl.*, 48 (1): 1-20.

Guliyev, V. S. and Samko, S. G., 2013. Maximal, potential and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces on unbounded sets. *Journal of Mathematical Sciences*, 193 (2): 228-248.

Harjulehto, P., Hästö, P., Koskenoja, M. 2005. Hardy's inequality in variable exponent Sobolev space. *Georgian Math. J.*, 12(3):431-442.

Hao, C. 2012 . Introduction to Harmonic Analysis. University of Chinese Academy of Sciences. Lecture Notes.

Hunt, R. 1966. On $L(p, q)$ spaces. *Enseing. Mat.* 12, 249-276.

Israfilov, D. M., Kokilashvili V., Tuzkaya N. P. 2006. *IBSU Scientific Journal*, 1, issue 1, 171-178 .

Kokilashvili, V., Krbec, M. 1991. *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*. World Scientific Publishing Co., Singapore.

Kokilashvili, V., Samko, S. 2002. Maximal and Fractional Operators in Weighted $L^{p(x)}$ Spaces. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 129, 145-149.

Kokilashvili, V., Samko, S. 2003. Singular integrals in Weighted Lebesgue spaces with variable exponent. *Georgian Math. J.*, 10 (1): 145-156.

Kokilashvili, V., Samko, S. 2004. Maximal and fractional operators in Weighted $L^{p(x)}$ spaces. *Mat. Iberoamericana*, 20 (2): 493-515.

Kokilashvili, V., Meskhi, A. 2008. Maximal and singular integrals in Morrey spaces with variable exponent. *Armenian J. Math.*, 1 (1): 18-28.

Kováčik, O., Rákosník, J. 1991. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$. *Czechoslovak Math. J.*, 41 (4): 592-618.

Kreyszig, E. 1989. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, New York.

Kufner A., Persson L. E., 2003. *Weighted Inequalities of Hardy Type*. World Scientific Publishing Co., Singapore.

- Lorentz, G. G. 1950. Some new function spaces. *Ann Math.*, 51 (2): 37-55.
- Lorentz, G. G. 1951. On the theory of spaces Λ . *Pac. J. Math.*, 1 (1): 411-429.
- Luboš, P., Alois K., Oldřich J., Svatopluk F. 2013. *Function Spaces*. Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston.
- Lukkasen D., Persson L. E., Samko S. and Wall P. 2013. Weighted Hardy-Type Inequalities in Variable Exponent Morrey-Type Spaces. *Journal of Function Spaces*. Article ID 716029, 11 pages.
- Mashiyev R. A., Çekiç B., Oğraş S. 2006. On Hardy's inequality in $L^{p(x)}(0, \infty)$. *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 7(3): Article 106, 5pp.
- Mashiyev R. A., Çekiç B., Mamedov F., Oğraş S. 2007. Hardy's inequality in power-type weighted $L^{p(\cdot)}(0, \infty)$ spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 334(1): 289-298.
- Mingione, G. 2010. Gradient estimates below the duality exponent. *Math. Ann.*, 346 (1): 571-627
- Musielak, J. 1983. *Orlicz Spaces and Modular Spaces*. Springer Verlag, Berlin.
- Nakano H. 1950. *Modulared Semi -ordered Linear Spaces*. Maruzen Co. Ltd. Tokyo.
- Nakano, H. 1951. *Topology and Topological Linear Spaces*. Maruzen Co. Ltd, Tokyo.
- Orlicz, W. 1931. Über konjugierte Exponentenfolgen. *Studia Math.*, 3 (1): 200-212.
- Persson, L. E., Samko, N. 2011. Weighted Hardy and potential operators in the generalized Morrey spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 377 (1): 792-806.
- Peetre, J. 1966. On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 72 (1): 295-304.
- Ragusa, M. A. 2012. Embeddings for Morrey-Lorentz spaces. *J. Optim.*, 154 (2): 491-499.
- Samko, S. 1998. Convolution type operators in $L^{p(x)}$. *Integr. Transform. Spec. Funct.*, 7 (1-2): 123-144.
- Samko, S. 2003. Hardy-Littlewood-Stein inequality in the Lebesgue spaces with variable exponent. *Fract. Calc. Appl.*, 6 (4): 421-440.
- Samko, S. 2003. Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 6 (4): 355-362.

Samko, N. 2009. Weighted Hardy and singular operators in Morrey spaces. J. Math. Anal. Appl., 350 (1): 56-72.

Samko, N. 2012. Weighted Hardy and potential operators in Morrey spaces. Journal of Function Spaces and Applications, 2012 (1): 1-21.

Stein, E.M. 1970. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton, N.J., Princeton University Press.

Stein, E.M. 1993. Harmonic Analysis: : Real-variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integral,. Princeton, N.J., Princeton University Press.

Tanaka, H. 2014. Two-weight norm inequalities on Morrey spaces. arXiv preprint arXiv:1404.2692.

Ülgül E. 2012. Yüksek Lisans Tezi, Değişken Üstlü Morrey Uzaylarında Ağırlıklı Hardy-Littlewood Maksimal ve Riesz Potansiyel Operatörlerinin Sınırlılığı. Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara. 61.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Konya’da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Konya’da, liseyi Niğde Anadolu Öğretmen Lisesi’nde tamamladım. 2006 yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü bitirdim. 2012 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladım. Evliyim ve M.E.B. de Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktayım.