

**T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DEĞİŞKEN ÜSTLÜ MORREY UZAYLARINDA BİR TARAFLI
OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI**

Ayşegül ÇELİK ALABALIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DIYARBAKIR

Haziran 2015

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın başlangıcından bitimine dek ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile örnek aldığım ve tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı minnettar olduğum değerli hocam **Doç. Dr. Bilal ÇEKİÇ'e**,

Her türlü desteği ve yardımı esirgemeyen annem, babam ve sevgili eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
KISALTMA VE SİMGELER.....	V
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1. Normlu Uzak.....	3
2.2. Lebesgue Ölçümü ve Ölçülebilir Fonksiyonlar	7
2.3. Lebesgue Uzayları.....	8
2.4. Hardy-Littlewood Maksimal ve Riesz Potansiyel Operatörleri	10
2.5. Bir Taraflı Operatörler.....	12
2.6. Morrey Uzayları.....	14
3. MATERYAL VE METOT.....	17
3.1. Değişken Üstlü Lebesgue Uzayları.....	17
3.2. Değişken Üstlü Lebesgue Uzaylarında Hardy Littlewood Maksimal ve Riesz Potansiyel Operatörlerinin Sınırlılığı	21
3.3. Değişken Üstlü Lebesgue Uzaylarında Bir Taraflı Maksimal ve Potansiyel Operatörlerin Sınırlılığı.....	22
3.4. Değişken Üstlü Morrey Uzayları ve Hardy Littlewood Maksimal ve Riesz Potansiyel Operatörlerinin Sınırlılığı	27
4. BULGULAR.....	31
4.1. Bir Taraflı Morrey Uzayları.....	31
4.2. Bir Taraflı Maksimal Operatörlerin Morrey Uzayında Sınırlılığı.....	36
4.3. Bir Taraflı Potansiyel Operatörlerin Morrey Uzayında Sınırlılığı.....	39
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	45
6. KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ.....	49

ÖZET

DEĞİŞKEN ÜSTLÜ MORREY UZAYLARINDA BİR TARAFLI OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşegül ÇELİK ALABALIK

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2015

Bu tez çalışmasında bir taraflı değişken üstlü Morrey uzayları tanımlanmış ve bir taraflı operatörlerin değişken üstlü Morrey uzaylarındaki sınırlılıkları incelenmiştir. Tezin dördüncü bölümünde bir taraflı Maksimal operatörler, bir taraflı kesirli Maksimal operatörler ile Weyl ve Riemann-Liouville operatörleri olarak bilinen bir taraflı Riesz potansiyel operatörlerinin değişken üstlü Morrey uzaylarında sınırlılıkları ayrı ayrı ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Değişken üstlü Lebesgue uzayları, değişken üstlü Morrey uzayları, Hardy-Littlewood maksimal operatörü, kesirli maksimal operatör, Riesz potansiyel operatörü, bir taraflı maksimal operatörler ve bir taraflı Riesz potansiyel operatörleri, Weyl operatörü ve Riemann Liouville operatörü

ABSTRACT

THE BOUNDEDNESS OF THE ONE SIDED OPERATORS IN VARIABLE EXPONENT MORREY SPACES

MASTER THESIS

Ayşegül ÇELİK ALABALIK

UNIVERSITY OF DİCLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2015

In this thesis the one sided variable exponent Morrey spaces are defined and the boundednesses of the one sided operators are researched. In the fourth part of the thesis, the boundednesses of the one sided maximal operators, one sided fractional Maximal operators and the one sided Riesz potential operators which are known as Weyl and the Riemann-Liouville operators are proved one by one in the variable exponent Morrey spaces.

Anahtar Kelimeler : Variable exponent Lebesgue Spaces, Variable exponent Morrey spaces, Hardy-Littlewood Maximal Operator, Fractional Maximal operator, Riesz Potential operator, One sided Maximal operators, one sided Riesz potential operators, Weyl operator and Riemann-Liouville operator.

KISALTMA VE SİMGELER

$\mathbb{R}^n$	: n – boyutlu öklid uzayı
Ω	: $\mathbb{R}^n$ ’nin bir alt bölgesi
$ \Omega $	: Ω bölgesinin Lebesgue ölçümü
$\mathcal{M}(\Omega)$	: Ω bölgesinde ölçülebilir fonksiyonlar sınıfı
$\text{Çap}(\Omega)$	: Ω bölgesinin çapı
$L^p(\Omega)$	: Lebesgue uzayı
L^1_{loc}	: Lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
$L^{p(\cdot)}(\Omega)$	: Değişken üstlü Lebesgue uzayı
$L^\infty(\Omega)$	: Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı fonksiyonların uzayı
$B(x, r)$	: x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$(B(x, r))^c$	: x merkezli r yarıçaplı açık yuvarın tümleyeni
$\tilde{B}(x, r)$	: $B(x, r) \cap \Omega$
χ_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$L^{p,\lambda}(\Omega)$	: Morrey uzayı
$L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$	: Değişken üstlü Morrey uzayı
$L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}_-(\Omega)$	: Bir taraflı değişken üstlü Morrey uzayı
$L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}_+(\Omega)$	: Bir taraflı değişken üstlü Morrey uzayı
M	: Hardy-Littlewood maksimal operatör
M^+	: Bir taraflı Maksimal operatör
M^-	: Bir taraflı Maksimal operatör
M_α	: Kesirli Maksimal operatör
M^-_α	: Bir taraflı kesirli Maksimal operatör
M^+_α	: Bir taraflı kesirli Maksimal operatör
I_α	: Riesz potansiyel operatör
R_α	: Riemann-Liouville operatörü
W_α	: Weyl operatörü

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında bir taraflı değişken üstlü Morrey uzayları tanıtılmakta ve bir taraflı operatörlerin değişken üstlü Morrey uzaylarında sınırlılıkları araştırılmaktadır.

Değişken üstlü Lebesgue uzayları ilk olarak, Orlicz (1931) tarafından yazılan makalede görülmüştür. Bu uzayların araştırılmasında bir sonraki adım Kováčik ve Rákosník (1991) tarafından atılmıştır.

Harmonik analizin önemli araçlarından olan maksimal operatör ve potansiyel tipli operatörlerin sınırlılığı bir çok araştırmacı tarafından hem değişken üstlü Lebesgue hem de değişken üstlü Morrey uzayında araştırılmıştır.

Klasik Lebesgue uzayında Hardy-Littlewood Maksimal operatörünün sınırlılığı Stein (1970) tarafından, değişken üstlü Lebesgue uzayında ise Diening (2002, 2004) tarafından Dini-Lipschitz (log-Hölder süreklilik) koşulu altında ispatlanmıştır.

Kesirli Maksimal operatörün sınırlılığı, değişken üstlü Lebesgue uzayında Capone ve ark. (2007) tarafından Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılığına dayandırılarak ispatlanmış, değişken üstlü Lebesgue uzayında ise Almeida ve ark. (2008) tarafından kanıtlanmıştır.

$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları, Morrey (1938) tarafından eliptik kısmi diferansiyel denklemler ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkmıştır. Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılığı klasik Morrey uzayında Chiarenza ve Frasca (1987) tarafından, değişken üstlü Morrey uzayında sınırlılığını ise Almeida ve ark (2008) tarafından kanıtlamışlardır. Riesz potansiyel operatörünün sınırlılığını klasik Morrey uzayında Adams (1975), değişken üstlü Morrey uzayında ise Almeida ve ark. (2008) ispatlamışlardır.

Bir taraflı operatörlerin sınırlılığı ile ilgili ilk çalışmalar ise Sawyer tarafından yapılmıştır. Daha sonra K. Anderson ve E. Sawyer (1988), Martin Reyes (1993), S. Ombrosi ve L. De Rosa (2003), Edmunds ve ark. (2008) ve Nekvinda (2010) bir taraflı operatörlerin sınırlılıkları ile ilgili çalışmalar yayınlamışlardır.

Edmunds, Kokilashvili ve Meskhi (2008), değişken üstlü Lebesgue uzaylarında bir taraflı Hardy Littlewood maksimal operatörler M^+ ve M^- ile bir taraflı potansiyel operatörler Riemann-Liouville R_α ve Weyl W_α operatörlerinin sınırlılıklarını kanıtlamışlardır.

S. Shi ve Z. Fu (2013) bir taraflı ağırlıklı Morrey uzaylarında bir taraflı maksimal ve bir taraflı potansiyel operatörlerin sınırlılığını çalışmışlardır. Bu çalışmanın dışında Morrey uzaylarında bir taraflı operatörlerin sınırlılığına dair bir çalışma bulunmamaktadır.

Bu tez çalışmasında bir taraflı Maksimal operatörler M_+ ve M_- ile bir taraflı potansiyel operatörler Weyl W_α ve Riemann-Liouville R_α operatörlerinin Morrey uzayındaki sınırlılıkları incelenmiştir. Bu operatörlerin Morrey uzayındaki sınırlılık-

larının incelenebilmesi için sözü geçen operatörlerin Lebesgue ve Morrey uzaylarındaki tanımları ve sınırlılıkları ile ilgili teoremler incelenmiş ve tezin oluşmasında yardımcı olabilecek tanım ve teoremlere ön bölümlerde yer verilmiştir. Değişken üstlü Morrey uzaylarında bir taraflı operatörlerin incelenebilmesi için bir taraflı Morrey uzaylarını incelemek doğaldır. Bu nedenle tez çalışmasının bulgular kısmında öncelikle bir taraflı Morrey uzayları tanımlanmıştır. Ardından bir taraflı Maksimal operatörler M_+ ve M_- nin sınırlılığı ispatlanarak bu iki operatörün sınırlılığından Maksimal operatörün sınırlılığı elde edilmiştir. Ayrıca bir taraflı potansiyel operatörler Weyl W_α ve Rieman-Liouville R_α operatörlerinin sınırlılıkları ispatlanmış ve W_α ve R_α nin sınırlılığından Riesz potansiyel operatörünün sınırlılığı elde edilmiştir. Son olarak bir taraflı kesirli Maksimal operatörler M_α^+ ve M_α^- nin sınırlılığı R_α ve W_α nin sınırlılığına dayandırılarak gösterilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremler hakkında bilgi verilecek ve daha sonra çalışmamız ile ilgili uzaylar tanımlanacaktır.

2.1. Normlu Uzay

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$, reel ya da kompleks sayılar cismi olsun.

$$\begin{aligned} + : X \times X &\rightarrow X & \cdot : \mathbb{F} \times X &\rightarrow X \\ (x, y) &\rightarrow x + y, & (\alpha, x) &\rightarrow \alpha x, \end{aligned}$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Eğer,

A) X , $+$ işlemine göre değişmeli bir grup,

$$G_1) \text{ Her } x, y \in X \text{ için } x + y \in X$$

$$G_2) \text{ Her } x, y, z \in X \text{ için } x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$G_3) \text{ Her } x \in X \text{ için } x + \theta = \theta + x = x \text{ olacak şekilde } \theta \in X \text{ vardır}$$

$$G_4) \text{ Her } x \in X \text{ için } x + (-x) = (-x) + x = \theta \text{ olacak şekilde } -x \in X \text{ vardır}$$

$$G_5) \text{ Her } x, y \in X \text{ için } x + y = y + x$$

B) Her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ olmak üzere

$$E_1) \alpha x \in X$$

$$E_2) \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$E_3) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$E_4) (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

$$E_5) 1x = x$$

şartları sağlıyorsa X kümesine yukarıda tanımlanan işlemler ile birlikte $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı (veya lineer uzayı) denir.

Tanım 2.1.2. Bir X vektör uzayında $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için

$$i) \|x\| = 0 \iff x = \theta$$

$$ii) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$iii) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

özelliklerini sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir **norm** ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de **normlu uzay** denir. Bundan sonra bir $x \in X$ elemanın normu $\|x\|$ şeklinde ve X uzayında tanımlanan norm $\|\cdot\|_X$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 2.1.3. X bir normlu uzay, $x \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ pozitif bir sayı olmak üzere;

$B(x, r) = \{y \in X : \|x - y\|_X < r\}$ kümesi, x merkezli r yarıçaplı bir **açık yuvar**,

$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : \|x - y\|_X \leq r\}$ kümesi, x merkezli r yarıçaplı bir **kapalı yuvar**

olarak tanımlanır. $A \subset X$ olmak üzere, her $x \in A$ için $B(x, r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa A 'ya **açık küme** denir.

Tanım 2.1.4. (x_n) , $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_0\|_X < \varepsilon$ olacak şekilde n_ε doğal sayısı varsa (x_n) dizisi x_0 noktasına **yakınsaktır** denir. Diğer bir deyişle $n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x_0\|_X \rightarrow 0$ oluyorsa (x_n) dizisi $x_0 \in X$ noktasına **yakınsaktır** denir.

Tanım 2.1.5. (x_n) , $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$ olacak şekilde n_ε doğal sayısı varsa (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir.

Tanım 2.1.6. Bir $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya **Banach uzayı** adı verilir.

Tanım 2.1.7. Ω , $\mathbb{R}^n$ de açık bir bölge ve $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı bir fonksiyon olarak verilsin. Eğer, herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $x, x_0 \in \Omega$ elemanları için $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa u fonksiyonuna $x = x_0$ noktasında **süreklidir** denir.

Tanım 2.1.8. $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu bir uzay ve X in bir E ($E \subset X$) altkümesi verilsin. Eğer, her bir $x \in X$, E deki elemanlardan oluşan bir (x_n) dizisinin limiti ise E kümesi X uzayında **yoğundur** denir.

Tanım 2.1.9. $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayının sayılabilir yoğun bir altkümesi varsa $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayına **ayrılabilir uzay** denir.

Tanım 2.1.10. $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$, X vektör uzayı üzerinde tanımlı farklı iki norm olsun. Her $x \in X$ için

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$$

olacak şekilde $C_1 > 0$ ve $C_2 > 0$ sabitleri varsa bu iki norma **denk normlar** denir.

Tanım 2.1.11. X ve Y aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzay ve $D(T)$, X in bir altkümesi olsun. $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ dönüşümü $D(T)$ nin her bir elemanını Y nin yalnız bir elemanına götürüyorsa, T ye $D(T)$ den Y ye bir **operatör** adı verilir ve $D(T)$ ye T operatörünün **tanım kümesi** denir.

$$R(T) = \{y \in Y : y = Tx, x \in D(T)\}$$

kümesine T operatörünün **değer(görüntü) kümesi** denir.

Tanım 2.1.12. X ve Y aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzay ve $D(T) \subset X$, X in bir alt uzayı olmak üzere $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer T operatörü, her $x, y \in D(T)$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

koşulunu sağlıyorsa bu operatöre **lineer operatör** denir.

Tanım 2.1.13. X ve Y iki normlu uzay olmak üzere; $T : X \rightarrow Y$ operatörü, $(x_n) \subset X$ dizisi ve $x \in X$ elemanı verilsin. n 'nin yeterince büyük değerlerinde ($n \rightarrow \infty$ iken)

$$\|x_n - x\|_X \rightarrow 0 \text{ iken } \|Tx_n - Tx\|_Y \rightarrow 0$$

oluyorsa T operatörü x noktasında **süreklidir** denir. Eğer T , X 'deki her noktada sürekli ise T 'ye **sürekli operatör** denir.

Tanım 2.1.14. X ve Y normlu uzay, $D(T) \subset X$ ve $T : X \rightarrow Y$ lineer operatörü verilsin. $A \subset X$ alt kümesi sınırlı iken $T(A)$, Y 'de sınırlı ise T operatörüne **sınırlı operatör** denir. Bir başka ifadeyle, her $x \in X$ için

$$\|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X \quad (2.1.1)$$

olacak şekilde pozitif bir c reel sayısı varsa T 'ye sınırlı lineer operatör denir. Bununla birlikte, (2.1.1) eşitsizliğini sağlayan c 'lerin infimumuna T operatörünün **normu** denir ve bu norm

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0, x \in X} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.1.15. X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul T nin sınırlı olmasıdır.

Tanım 2.1.16. X ve Y iki normlu uzay olmak üzere, eğer her $x \in X$ için

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X$$

özellikliğini sağlayan, X uzayını Y uzayı üzerine dönüştüren bire-bir lineer bir T operatörü varsa X ve Y normlu uzaylarına **izometrik olarak izomorfizma** ve T operatörüne de X ve Y normlu uzayları arasında **izometrik izomorfizma** denir.

X ve Y normlu uzayları için böyle bir ilişki $X \cong Y$ ile gösterilir. Bu özelliğe sahip uzaylara yapısal benzerlikleri nedeniyle aynı gözle bakılabilir.

Tanım 2.1.17. X ve Y normlu iki uzay olsun. Eğer,

i) X, Y nin bir alt uzayı

ii) Her $x \in X$ için X den Y ye $Ix = x$ ile tanımlanan birim operatör sürekli ise X normlu uzayı Y normlu uzayına **gömülür** denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir. I birim operatörü lineer olduğundan ii) koşulu

$$\|Ix\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad x \in X$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabitinin varlığına denktir.

Tanım 2.1.18. Bir X vektör uzayında tanımlı skaler değerli fonksiyona **fonksiyonel** denir. Bir f fonksiyoneline,

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2); \quad x_1, x_2 \in X \text{ ve } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

koşulu altında bir lineer dönüşüm adı verilir.

Tanım 2.1.19. $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayı üzerinde tanımlı bütün lineer ve sürekli fonksiyonellerden oluşan uzaya X normlu uzayının **dual uzayı** denir ve X' ile gösterilir. Bu uzay $u, v \in X', x \in X$ ve $c \in \mathbb{C}$

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x) \text{ ve } (cu)(x) = cu(x),$$

şeklinde tanımlanan noktasal toplam ve çarpım altında bir vektör uzayıdır. Bu uzayda bir $u \in X'$ elemanının normu

$$\|u\|_{X'} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|u(x)|}{\|x\|_X}$$

şeklinde tanımlanır. X' uzayı $\|\cdot\|_{X'}$ normu ile bir Banach uzay olur.

Tanım 2.1.20. Bir X vektör uzayının X' duali de normlu vektör uzayı olduğundan, bu uzayın da duali tanımlanabilir. Bu durumda $(X')' = X''$ lineer vektör uzayına X in **ikinci duali** denir.

Sabit bir $x \in X$ için X' uzayında

$$g_x(f) = f(x) \quad (f \in X' \text{ değişken})$$

şeklinde bir g_x fonksiyoneli tanımlayalım. Her $x \in X$ için bir tek sınırlı lineer fonksiyonel karşılık geleceğinden, bu halde

$$\begin{aligned} C : X &\longrightarrow X'' \\ x &\longmapsto g_x \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir. Bu dönüşüme **kanonik dönüşüm** adı verilir. Eğer kanonik dönüşüm üzerine ise, bu durumda X uzayına yansılmalı uzay adı verilir. X yansılmalı uzay ise $X \cong X''$ olur.

Teorem 2.1.21. Yansılmalı bir $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach uzayının her alt uzayı da yansılmalıdır.

Teorem 2.1.22. $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu bir uzay olsun. X uzayının yansılmalı olması için gerek ve yeter koşul X' uzayının yansılmalı olmasıdır. Eğer X uzayı ayrılabilir ise, X' uzayıda ayrılabilir. Bu durumda, X ayrılabilir ve yansılmalı bir uzay ise X' de ayrılabilir ve yansılmalı bir uzay olur.

2.2. Lebesgue Ölçümü ve Ölçülebilir Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1. Σ , $\mathbb{R}^n$ 'nin altkümelerinin bir sınıfı olmak üzere,

- i) $\mathbb{R}^n \in \Sigma$,
- ii) $A \in \Sigma$ ise $A^c \in \Sigma$ (A^c , A 'nın tümleyen kümesi),
- iii) Eğer $i = 1, 2, \dots$, için $A_i \in \Sigma$ ise, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$

koşulları sağlanıyorsa, Σ sınıfına bir **σ -cebiri** adı verilir.

Tanım 2.2.2. Σ sınıfı üzerinde tanımlanan $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu, Σ sınıfındaki ayırık kümelerin bir $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ topluluğunun sayılabilir her birleşimi için

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \quad \forall A_i \cap A_k = \emptyset, i \neq k$$

eşitliğini sağlıyorsa, μ fonksiyonuna Σ sınıfı üzerinde bir **ölçüm** denir.

Tanım 2.2.3. $\mathbb{R}^n$ 'nin altkümelerinin aşağıda verilen özelliklere sahip σ -cebiri olan bir Σ sınıfının ve bu Σ sınıfı üzerinde bir μ ölçümünün varlığı kolaylıkla gösterilebilir;

- i) $\mathbb{R}^n$ 'deki her açık küme Σ 'ya aittir,
- ii) Eğer $A \subset B$, $B \in \Sigma$ ve $\mu(B) = 0$ ise, $A \in \Sigma$ ve $\mu(A) = 0$ dir,
- iii) $A = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ ise, $A \in \Sigma$ ve $\mu(A) = \prod_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$,
- iv) $x \in \mathbb{R}^n$ ve $A \in \Sigma$ iken

$$x + A = \{x + y : y \in A \in \Sigma\} \quad \text{ve} \quad \mu(x + A) = \mu(A)$$

olur, yani μ ölçümü öteleme altında değişmezdir.

Bu özelliklere sahip bir Σ sınıfının elemanlarına $\mathbb{R}^n$ 'nin Lebesgue ölçülebilir altkümeleri, μ ölçüm fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ 'de **Lebesgue ölçümü** ve $A \in \Sigma$ için $\mu(A)$ gösterimine ise A kümesinin **ölçümü** denir. Bu tez çalışmasında, bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinin Lebesgue ölçümü $|\Omega|$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.4. Eğer $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ ve $|B| = 0$ ise, $A - B$ kümesinin her noktasında sağlanan bir özellik A kümesinde hemen hemen her yerde geçerli bir özellik olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.5. A ölçülebilir bir küme olmak üzere, $f : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ şeklinde tanımlanan bir f fonksiyonu verilsin. Eğer her $a \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in A : f(x) > a\}$$

kümesi ölçülebilir ise, f fonksiyonuna **ölçülebilir fonksiyon** denir.

Tanım 2.2.6. $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } x \in A \\ 0, & \text{eğer } x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.7. Eğer f fonksiyonu ölçülebilir ve reel değerli ise, bu durumda f fonksiyonunu her ikisinde ölçülebilir ve negatif olmayan $f^+ = \max(f, 0)$ ve $f^- = -\min(f, 0)$ fonksiyonları cinsinden $f = f^+ - f^-$ şeklinde yazabiliriz. $\int_{\Omega} f^+(x)dx$ ve $\int_{\Omega} f^-(x)dx$ integrallerinden en az biri sonlu olmak üzere

$$\int_{\Omega} f(x)dx = \int_{\Omega} f^+(x)dx - \int_{\Omega} f^-(x)dx$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer her iki integral sonlu ise, f fonksiyonuna Ω bölgesinde **Lebesgue integrallenebilir** denir ve Ω bölgesindeki integrallenebilir fonksiyonların sınıfı $L^1(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.8. f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her kompakt (Kapalı ve Sınırlı) K kümesi üzerinde

$$\int_K |f| d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna **lokal integrallenebilirdir** denir ve

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \int_K |f| d\mu < \infty; K \subset \Omega, K \text{ kompakt} \right\}$$

ile gösterilir.

2.3. Lebesgue Uzayları ($L^p(\Omega)$)

$\Omega, \mathbb{R}^n$ nin ölçülebilir bir altkütmesi, $|\Omega| > 0$ ve $\mathcal{M}(\Omega)$, Ω da tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere,

$$L^p(\Omega) := \left\{ u \in \mathcal{M}(\Omega) : \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\} \quad (2.3.1)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon sınıfını gözönüne alalım. Ω bölgesinde hemen hemen her yerde eşit fonksiyonları $L^p(\Omega)$ uzayında eşit kabul edelim. $L^p(\Omega)$ uzayının elemanları (2.3.1) ifadesini sağlayan ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıflarıdır. Bu farkı göz ardı ederek, eğer u fonksiyonu (2.3.1) özelliğine sahipse $u \in L^p(\Omega)$ ve Ω bölgesinde hemen hemen her yerde $u(x) = 0$ ise $L^p(\Omega)$ uzayında $u = 0$ yazacağız.

Eğer $u \in L^p(\Omega)$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $cu \in L^p(\Omega)$ olduğu açıktır ve eğer $u, v \in L^p(\Omega)$ ise

$$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|)^p \leq 2^p (|u(x)|^p + |v(x)|^p)$$

olduğu için $u + v \in L^p(\Omega)$ yazılabilir. Böylece $L^p(\Omega)$ bir vektör uzayı olur.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere, bu uzay

$$\|u\|_{p,\Omega} = \|u\|_p = \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.3.1. Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa u fonksiyonuna **hemen hemen sınırlıdır** denir. Böyle K sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|u|$ nın Ω bölgesindeki **esas(essential)supremumu** denir ve $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$ ile gösterilir.

Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarıyla tanımlanan uzay $L^\infty(\Omega)$ ile gösterilir. $L^\infty(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.3.2. $1 < p < \infty$ iken $1 < p' < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olacak şekilde $p' = \frac{p}{p-1}$ sayısına p nin **eşleniği** denir.

Teorem 2.3.3. $1 < p < \infty$ ve $T \in [L^p(\Omega)]'$ olsun. Bu durumda $u \in L^p(\Omega)$ için

$$T(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

olacak şekilde bir $v \in L^{p'}(\Omega)$ vardır. Üstelik

$$\|v\|_{L^{p'}} = \|T\|_{[L^p(\Omega)]'}$$

olur ki buradan da $L^{p'}(\Omega) \cong [L^p(\Omega)]'$ özelliği çıkar.

Teorem 2.3.4.(Hölder Eşitsizliği)

Eğer, $1 < p < \infty$ ve $u \in L^p(\Omega), v \in L^{p'}(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L^1(\Omega)$ olur ve

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}$$

eşitsizliği sağlanır (Adams 2003).

Teorem 2.3.5. $|\Omega| = \int_{\Omega} dx < \infty$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^q(\Omega)$ ise bu halde $u \in L^p(\Omega)$ olur ve

$$\|u\|_p \leq |\Omega|^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q$$

eşitsizliği yazılabilir. Dolayısıyla

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

gömmesi geçerlidir (Adams 2003).

Teorem 2.3.6. Eğer $1 \leq p < \infty$ ise $L^p(\Omega)$ uzayı ayrılabilir (Adams 2003).

Teorem 2.3.7. Eğer $1 < p < \infty$ ise $L^p(\Omega)$ uzayı düzgün konveks ve yansımalıdır (Adams 2003).

2.4. Maksimal ve Riesz Operatörleri

Maksimal operatör ve Riesz potansiyeli harmonik analizin önemli konuları arasındadır. Özellikle kısmi türevli denklemler teorisi ve matematiksel fizikte birçok uygulamaları vardır.

Tanım 2.4.1. (Maksimal operatör)

$\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir bir f fonksiyonunun $B(x, r) = \{y : |x - y| < r\}$ açık yuvarı üzerinde ortalama değeri

$$M_r f(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

şeklinde gösterilir.

Lokal integrallenebilir bir $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ fonksiyonunun Hardy Littlewood maksimal fonksiyonu, $Mf : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy \\ &= \sup_{r>0} M_r f(x) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan M operatörü alt lineerdir, yani, $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$M(a f + b g) \leq |a| Mf + |b| Mg$$

eşitsizliği yazılabilir.

Maksimal fonksiyon M , $\mathbb{R}^n$ nin standart kümelerinde $n = 1$ için Hardy-Littlewood tarafından tanımlanmış ve Weiner tarafından n -boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında genişletilmiştir.

Maksimal fonksiyonu küpler yardımıyla tanımlarsak; $0 \leq \alpha < n$ ve $Q(x, r)$, $\mathbb{R}^n$ de kenarları eksenlere paralel x merkezli ve r yarıçaplı küpleri belirtmek üzere ,

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{1-\alpha/n}} \int_Q f(y) dy$$

olarak yazılır.

$0 \leq \alpha < n$ olsun. Lokal integrallenebilir bir $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ fonksiyonunun kesirli maksimal fonksiyonu

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{r^\alpha}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

olarak tanımlanır. Kesirli maksimal fonksiyon kısmi diferansiyel denklemlerde ve potansiyel teoride birçok uygulamalara sahiptir. Özel olarak $\alpha = 0$ alınırsa Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu elde edilir.

Teorem 2.4.2. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı f fonksiyonu için $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ ise Mf maksimal fonksiyonu hemen hemen her yerde sonludur.

(i) $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise her $\lambda > 0$ için

$$|\{x : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{3^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx,$$

eşitsizliği geçerlidir.

(ii) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise $Mf \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|Mf\|_p \leq C \|f\|_p$$

olacak şekilde p ve n sayılarına bağlı bir C sabiti vardır. (Stein 1970).

Tanım 2.4.3. (Riesz potansiyel Operatorü)

Her iki çarpan fonksiyondan lokal olarak daha iyi davranan bir fonksiyon üretmek için, her birinin düzensizliğini kaldıran iki fonksiyonun noktasal olmayan çarpımını oluşturmak genellikle kullanışlıdır. Bunlardan biri

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy \quad (2.4.1)$$

integrali var olmak üzere (2.4.1) şeklinde tanımlanan f ve g fonksiyonlarının $f * g$ **konvolüsyonudur**.

f fonksiyonunun bir K çekirdeği ile konvolüsyonu

$$f * K(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)K(x-y)dy$$

şeklinde dir. Konvolüsyon operatörünün çekirdeğinin integrallenemeyen tekilliği varsa **singüler integral**, zayıf(integrallenebilen) tekilliği varsa **potansiyel** adı verilir.

$0 < \alpha < n$ olmak üzere $I_\alpha f(x) = |x|^{\alpha-n}$ çekirdek fonksiyonuna **Riesz çekirdek fonksiyonu** adı verilir. Bu fonksiyonun kordinat başlangıcında zayıf tekilliği vardır. Böylece bir fonksiyonun **Riesz potansiyeli** konvolüsyon olarak

$$I_\alpha f(x) = I_\alpha * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.4.4. $0 < \alpha < n, 1 \leq p < q < \infty$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. Eğer $p > 1$ ise

$$\|I_\alpha f\|_q \leq C(p, q) \|f\|_p$$

eşitsizliği gerçekleşir (Stein 1970).

2.5. Bir Taraflı Operatörler

Tanım 2.5.1. $I, \mathbb{R}$ de açık bir aralık olsun. $x \in I$ olmak üzere $I(x, h), I_-(x, h)$ ve $I_+(x, h)$ alt aralıkları

$$I(x, h) = (x - h, x + h) \cap I$$

$$I_-(x, h) = (x - h, x) \cap I, \quad I_+(x, h) = (x, x + h) \cap I$$

şeklinde tanımlayalım.

I de tanımlı lokal integrallenebilir bir f fonksiyonu için Maksimal operatör ve bir taraflı Maksimal operatörler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Mf(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{I(x,h)} |f(t)| dt,$$

$$M_-f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{I_-(x,h)} |f(t)| dt,$$

$$M_+f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{I_+(x,h)} |f(t)| dt.$$

Hardy Littlewood tarafından tanımlanan Maksimal operatör $\mathbb{R}^+$ üzerindeki fonksiyonlar için $0 < h < x$ olmak üzere M^- ye karşılık gelir. M , M_- ve M_+ operatörleri alt lineer operatörlerdir ve aralarında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

$$\frac{1}{2} (M_- f + M_+ f) \leq M f \leq M_- f + M_+ f$$

Bir taraflı kesirli Maksimal operatörler M_α^+ ve M_α^- , $0 < \alpha < 1$ ve $x \in I$ olmak üzere

$$\begin{aligned} M_\alpha^+(f)(x) &= \sup_{h>0} h^{\alpha-1} \int_{I_+(x,h)} |f(t)| dt, \\ M_\alpha^-(f)(x) &= \sup_{h>0} h^{\alpha-1} \int_{I_-(x,h)} |f(t)| dt, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.5.2. $0 \leq \alpha < 1$ ve $1 < p < 1/\alpha$ olmak üzere öyle bir A_p sabiti mevcuttur ki her ölçülebilir f fonksiyonu ve her w ağırlık fonksiyonu için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M_\alpha^+(f)(x)^p w(x) dx \leq A_p \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| M_\alpha^- w(x) dx \quad (2.5.1)$$

ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M_\alpha^-(f)(x)^p w(x) dx \leq A_p \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| M_\alpha^+ w(x) dx \quad (2.5.2)$$

eşitsizlikleri sağlanır. (De Rosa 2006)

Tanım 2.5.3. $I = [0, b)$ ve $0 < b \leq \infty$ iken bir taraflı potansiyel operatörler Riemann Liouville R_α ve Weyl operatörü W_α , $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R_\alpha f(x) &= \int_0^x f(t) (x-t)^{\alpha-1} dt, & 0 < x < b \\ W_\alpha f(x) &= \int_x^b f(t) (t-x)^{\alpha-1} dt, & 0 < x < b \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Riemann Liouville ve Weyl operatörünün tanımından

$$I_\alpha f(x) = R_\alpha f(x) + W_\alpha f(x)$$

eşitliği geçerlidir.

2.6. Morrey Uzayları

Morrey Uzayları ($L^{p,\lambda}(\Omega)$), Morrey tarafından 1938 yılında eliptik kısmi diferansiyel denklemler ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkarılmıştır. Daha sonra Navier-Stokes ve Schrödinger denklemleri, süreksiz katsayılı eliptik problemler ve potansiyel teori ile ilgili önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır. Bu kesimde önce, $0 \leq \lambda \leq n$ olmak üzere, $L^{p,\lambda}(\Omega)$ Morrey uzayı tanımlanacak, bu uzay üzerinde tanımlanan norm ve λ nın durumlarına göre $L^{p,\lambda}(\Omega)$ uzayının yapısı hakkında bazı sonuçlara yer verilmiştir. Daha sonra Hardy-littlewood maksimal ve Riesz operatörlerinin hangi koşullar altında sınırlı olduğu verilmiştir.

Tanım 2.6.1 $\Omega, \mathbb{R}^n$ de açık bir bölge, $1 \leq p < \infty$ ve $0 \leq \lambda$ olsun. $L^{p,\lambda}(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = \|f\|_{p,\lambda} := \sup_{x \in \Omega, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p, \tilde{B}(x,r)} \leq C < \infty \quad (2.6.1)$$

olacak şekilde $f \in L^p(\Omega)$ fonksiyonların lineer uzayı olarak tanımlanır. Burada C sabiti sadece f ye bağlıdır ve $B(x, r)$ merkezi x ve yarıçapı r olan açık yuvarı belirtmektedir. Böyle tanımlanan $\|f\|_{p,\lambda}$, $L^{p,\lambda}(\Omega)$ uzayında bir yarı normdur (f sabit olduğunda kesin olarak $\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = 0$ dır.)

$L^{p,\lambda}(\Omega)$ uzayı $\|f\|_{p,\lambda}$ normu ile Morrey uzayı adı verilen bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.6.2. $\Omega, \mathbb{R}^n$ nin açık bir alt bölgesi ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

- 1) $\lambda = 0$ ise $L^{p,0}(\Omega) \cong L^p(\Omega)$,
- 2) $\lambda = n$ ise $L^{p,n}(\Omega) \cong L^\infty(\Omega)$,
- 3) $\lambda > n$ ise $L^{p,\lambda}(\Omega) = \{0\}$.
- 4) $0 < \lambda \leq n$ ise $L^{p,\lambda}(\Omega)$ uzayı ayrılabilir uzay değildir.

Teorem 2.6.3. $\Omega, \mathbb{R}^n$ nin sınırlı açık bir alt bölgesi, $0 \leq \lambda \leq n$ ve $0 \leq \mu \leq n$ olsun. Eğer $p \leq q$ ve $\frac{n-\lambda}{p} \geq \frac{n-\mu}{q}$ ise bu durumda

$$L^{q,\mu}(\Omega) \hookrightarrow L^{p,\lambda}(\Omega)$$

şeklinde gömmesi geçerlidir.

Ω bölgesi sınırsız olduğu zaman yukarıdaki gömme geçerli değildir.

Teorem 2.6.4. $1 < p < \infty$ ve $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda Hardy-littlewood maksimal operatörü $L^{p,\lambda}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır. Yani

$$\|Mf\|_{p,\lambda} \leq C \|f\|_{p,\lambda}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır (Chiarenza ve Frasca 1987).

Teorem 2.6.5. $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \lambda < n - \alpha p$ olarak alınsın. $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ olsun. Bu durumda her $f \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ için

$$\|I_\alpha f\|_{q,\mu} \leq C \|f\|_{p,\lambda}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $C > 0$ sabiti vardır (Peetre 1966).

Teorem 2.6.6. $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \lambda < n - \alpha p$ ve $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n-\lambda}$ olarak alınsın. Bu durumda her $f \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ için

$$\|I_\alpha f\|_{q,\lambda} \leq C \|f\|_{p,\lambda}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $C > 0$ sabiti vardır (Adams 1975).

3. MATERYAL ve METOD

3.1. Değişken Üstlü Lebesgue Uzayları($L^{p(\cdot)}(\Omega)$)

Ω , $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir bir küme $|\Omega| > 0$ ve $\mathcal{M}(\Omega)$ kümesi Ω bölgesinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. $\mathcal{M}(\Omega)$ kümesinde h.h.h.y. eşit fonksiyonları bir eleman olarak göz önüne alalım. p fonksiyonunu çalışmamız boyunca ölçülebilir bir fonksiyon yani $p \in \mathcal{M}(\Omega)$ olarak kabul edeceğiz.

$$\varphi(x, s) = s^{p(x)} \quad , \quad \forall x \in \Omega, s \geq 0$$

şeklinde tanımlanan $\varphi : \Omega \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

- i) $\forall x \in \Omega$ için $\varphi(x, \cdot) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ azalmayan sürekli bir fonksiyon,
- ii) $\varphi(x, 0) = 0$ ve $s > 0$ için $\varphi(x, s) > 0$ ve $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(x, s) = \infty$,
- iii) Her $s \geq 0$ için $\vartheta(\cdot, s) \in \mathcal{M}(\Omega)$

özelliklerine sahip olduğundan φ fonksiyonu Φ sınıfına aittir. Ayrıca $\varphi(x, s)$ fonksiyonunun $\forall x \in \Omega$ için s nin bir konveks fonksiyonu olduğu açıktır. Bu nedenle $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\rho(u) = \rho_{p(x)}(u) = \int_{\Omega} \varphi(x, |u|) dx = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx$$

şeklinde tanımlanan $\rho : \mathcal{M}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu

- i) $\rho(u) = 0 \iff u = 0$
- ii) $\rho(u) = \rho(-u)$
- iii) $\rho(\alpha u + \beta v) \leq \alpha \rho(u) + \beta \rho(v)$, $\forall u, v \in E$, $\forall \alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$

özelliklerini sağladığından $\mathcal{M}(\Omega)$ kümesi üzerinde bir **konveks** modüllerdir. Böylece $\mathcal{M}(\Omega)_\rho = L^{p(x)}(\Omega)$ modüler uzayı

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{M}(\Omega) : \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \rho(\lambda u) = 0 \right\}$$

genelleştirilmiş Orlicz uzayının özel bir çeşididir ve $\mathcal{M}(\Omega)$ kümesinin lineer alt uzayıdır.

$\varphi(x, s)$ fonksiyonun özelliklerinden, $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının en az bir $\lambda > 0$ için $\rho(\lambda u) < \infty$ olacak şekilde tüm $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ fonksiyonlarının kümesi olduğu açıktır. Yani,

$$L^{p(x)}(\Omega) = \{u \in \mathcal{M}(\Omega) : \exists \lambda > 0, \rho(\lambda u) < \infty\}$$

yazılabilir.

$L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının bir konveks alt uzayı olan $L_0^{p(x)}(\Omega)$

$$L_0^{p(x)}(\Omega) = \{u \in \mathcal{M}(\Omega) : \rho(u) < \infty\}$$

genelleştirilmiş Orlicz uzayının bir türüdür ve

$$L_1^{p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in \mathcal{M}(\Omega) : \forall \lambda > 0, \rho(\lambda u) < \infty\}$$

uzayı da $\mathcal{M}(\Omega)$ nın $L_0^{p(x)}(\Omega)$ kümesinde kapsanan en büyük alt vektör uzayıdır. Bu uzaylar için genel olarak

$$L_1^{p(x)}(\Omega) \subset L_0^{p(x)}(\Omega) \subset L^{p(x)}(\Omega)$$

yazılabilir.

$\Omega, \mathbb{R}^n$ de açık bir bölge ve $E \subset \Omega$ olsun. $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty)$ ölçülebilir fonksiyonu için

$$p_E^- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in E} p(x) \quad \text{ve} \quad p_E^+ = \operatorname{ess\,sup}_{x \in E} p(x)$$

gösterimlerini ve ayrıca $p^- = p_\Omega^-$ ve $p^+ = p_\Omega^+$ kısaltmalarını kullanacağız. Bundan sonra aksi söylenmedikçe

$$1 \leq p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty \quad (3.1.1)$$

kabul edeceğiz ve bu durumu

$$L_+^\infty(\Omega) = \left\{ u \in L^\infty(\Omega) : \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} u \geq 1 \right\}$$

olmak üzere, $p \in L_+^\infty(\Omega)$ ile ifade edeceğiz.

Teorem 3.1.1. $L_1^{p(x)}(\Omega) = L^{p(x)}(\Omega)$ olması için gerek ve yeter koşul $p \in L_+^\infty(\Omega)$ olmasıdır. (Fan ve Zhao 2001)

Böylece $p \in L_+^\infty(\Omega)$ ise

$$L^{p(x)}(\Omega) = L_0^{p(x)}(\Omega) = L_1^{p(x)}(\Omega) = E\rho$$

yazılabilir ve $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayını **değişken üstlü Lebesgue uzayı**, $p(\cdot)$ fonksiyonunu sınırlı üst olarak adlandıracaktır. p nin sabit olması durumunda değişken üstlü Lebesgue uzayı ile klasik Lebesgue uzayı çıkarır. $p \in L_+^\infty(\Omega)$ olması durumunda modüler fonksiyon ek olarak aşağıdaki özelliklere sahip olur.

- i) $\rho(u + v) \leq 2^{p^+} (\rho(u) + \rho(v))$
- ii) $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ için eğer $\lambda > 1$ ise

$$\rho(u) \leq \lambda \rho(u) \leq \lambda^{p^-} \rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^+} \rho(u)$$

ve eğer $0 < \lambda < 1$ ise

$$\lambda^{p^+} \rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^-} \rho(u) \leq \lambda \rho(u) \leq \rho(u)$$

elde edilir.

iii) Eğer hemen hemen her $x \in \Omega$ için $|u(x)| \leq |v(x)|$ ve $\rho(u) < \infty$ ise bu durumda $\rho(u) < \rho(v)$ ve $|u| \neq |v|$ için kesin eşitsizlik vardır.

iv) Verilen bir $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ için, $\rho(\lambda u)$ fonksiyonu λ ya göre sürekli, konveks çift fonksiyondur ve $\lambda \in [0, \infty)$ için artandır.

ρ modülleri konveks olduğundan dolayı $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde

$$\|u\|_{p(x), \Omega} = \|u\|_{p(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

Lüksemburg normu tanımlanabilir. Bu norm altında $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır. Eğer $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve h.h.h. $|u(x)| \leq |v(x)|$ ise $\|u\|_{p(x)} \leq \|v\|_{p(x)}$ yazılabilir. $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ olmak üzere $\|f\|_{p(x)} \leq C_1$ olması için gerek ve yeter koşul $\rho(f) < C_2$ olmasıdır. $\frac{C_1}{C_2}$ değeri alttan ve üstten p fonksiyonuna bağlı bir sabitle sınırlıdır.

Modüler fonksiyonun (iv) özelliğinden ve normun tanımından aşağıdaki teorem kolayca elde edilebilir.

Teorem 3.1.2. $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \setminus \{0\}$ olsun. Bu durumda, $\|u\|_{p(\cdot)} = a$ olması için gerek ve yeter koşul $\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1$ olmasıdır. [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Teorem 3.1.3. Eğer $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $\rho : L^{p(\cdot)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ise, bu durumda

- i) $\|u\|_{p(\cdot)} < 1 (= 1; > 1) \Leftrightarrow \rho(u) < 1 (= 1; > 1)$
- ii) Eğer $\|u\|_{p(\cdot)} > 1$ ise, $\|u\|_{p(\cdot)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(\cdot)}^{p^+}$
- iii) Eğer $\|u\|_{p(\cdot)} < 1$ ise, $\|u\|_{p(\cdot)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(\cdot)}^{p^-}$

olur [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991), (Samko 1998)].

Teorem 3.1.4. Eğer $p^+ < \infty$ ise, o zaman $(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(\cdot)})$ uzayı ayrılabiliridir [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Teorem 3.1.5. Eğer $p^- > 1$ ve $p^+ < \infty$ ise, o zaman $(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(\cdot)})$ uzayı düzgün konveks ve dolayısıyla yansılmalı bir uzay olur (Fan ve Zhao 2001).

Teorem 3.1.6. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının dual uzayı $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ uzayıdır. Yani,

- i) Her $v \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\phi(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \forall u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \quad (3.1.2)$$

şeklinde tanımlanan ϕ fonksiyoneli $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde sürekli lineer bir fonksiyoneldir.

ii) $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde (3.1.2) şeklinde tanımlı her sürekli lineer fonksiyonel için tek bir $v \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ vardır [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Bu teoremden $p^- > 1$ ise $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının yansılmalı olduğu sonucu elde edilir.

Teorem 3.1.7.(Hölder Eşitsizliği)

$L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ uzayı $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının dual uzayı ve $\frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{p'(\cdot)} = 1$ olmak üzere her $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ve $v \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} |u v| dx \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p^-)'} \right) \|u\|_{p(\cdot)} \|v\|_{p'(\cdot)} \leq 2 \|u\|_{p(\cdot)} \|v\|_{p'(\cdot)} \quad (3.1.3)$$

ifadesi yazılabilir (Kováčik ve Rákosník 1991).

Lemma 3.1.8. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir sınırlı bir küme ve $p : \overline{\Omega} \longrightarrow [1, +\infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\|1\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq \max \left\{ |\Omega|^{\frac{1}{p^+}}, |\Omega|^{\frac{1}{p^-}} \right\}$$

eşitsizliği yazılabilir. Ek olarak eğer, p^+ ve p^- fonksiyonları $\overline{\Omega}$ üzerinde elde edilirse bu durumda

$$\|1\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p(x_*)}} \quad (3.1.4)$$

olacak şekilde $x_* \in \overline{\Omega}$ noktası vardır (Fan 2008).

Teorem 3.1.9. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, $0 < |\Omega| < \infty$ ve $p(\cdot), q(\cdot) \in L_+^\infty(\Omega)$ olsun. Bu durumda $L^{q(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\Omega)$ gömmesinin var olması için gerek ve yeter koşul h.h.h. $x \in \Omega$ için $p(\cdot) \leq q(\cdot)$ olmasıdır. Ayrıca,

$$\|u\|_{p(\cdot)} \leq C(1 + |\Omega|) \|u\|_{q(\cdot)}$$

eşitsizliği yazılabilir [(Fan ve Zhao 2001), (Kováčik ve Rákosník 1991)].

Klasik Lebesgue uzaylarının en önemli özelliklerinden biri elemanlarının orta sürekliliğidir. $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayının klasik Lebesgue uzayından farklı olduğu bu noktayı gösterebiliriz.

Tanım 3.1.10. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $f_h(x) = f(x+h)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olmak üzere, $|h| < \delta$ ve $h \in \mathbb{R}^n$ için $I_p(f_h - f) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ fonksiyonuna $p(\cdot)$ -**orta sürekli** adı verilir.

Örnek 3.1.11. $\Omega = (-1, 1)$ ve $1 \leq r < s < \infty$ olarak alınsın. Bu durumda p ve f fonksiyonlarını

$$p(x) = \begin{cases} r ; & x \in [0, 1) \\ s ; & x \in (-1, 0) \end{cases} \quad \text{ve} \quad f(x) = \begin{cases} x^{\frac{-1}{s}} ; & x \in [0, 1) \\ 0 ; & x \in (-1, 0) \end{cases}$$

şeklinde seçersek, $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olur.

Fakat $h \in (0, 1)$ için

$$I_p\left(\frac{f_h}{\lambda}\right) \geq \lambda^{-1} \int_{-h}^0 (x+h)^{-1} dx = \infty$$

olduğundan $f_h \notin L^{p(\cdot)}(\Omega)$ elde edilir (Kovacik ve Rakosnik 1991).

Teorem 3.1.12. p fonksiyonu $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sabit olmasın. Bu durumda $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$ öteleme operatörü $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında süreksiz olacak şekilde $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vardır. Üstelik $\tau_h f \notin L^{p(\cdot)}(\Omega)$ olacak şekilde $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ vardır (Diening 2004).

Teorem 3.1.13. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de sınırlı ölçülebilir bir bölge olsun. Ω bölgesinde tanımlı p ve r fonksiyonları için $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ve $1 < r^- \leq r^+ < \infty$ özellikleri sağlansın. Bu durumda $*$: $(f, g) \longrightarrow f * g$ konvolüsyonu $L^{p(\cdot)}(\Omega) \times L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{r(\cdot)}(\Omega)$ dönüşümü olarak sürekli olması için gerek ve yeter koşul $p^- > r^+$ olmasıdır (Diening 2004).

Öteleme operatörünün genelde süreksiz olması $u \in L^1(\Omega)$ ile f fonksiyonun konvolüsyonunun genelde süreksiz olduğunu verir. Daha açıkçası genel olarak değişken üstlü Lebesgue uzaylarında Young teoremi beklenen sonucu vermez. Yani, genel olarak

$$\|v * u\|_{p(\cdot)} \not\leq \|u\|_1 \|v\|_{p(\cdot)}$$

şeklindedir.

3.2. Değişken Üslü lebesgue Uzaylarında Hardy-Littlewood Maksimal ve Riesz Potansiyel Operatörlerinin Sınırlılığı

L.Pick ve Ruzicka genel p fonksiyonu için $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında maximal operatörün sınırlılığı için ters bir örnek sundular. p fonksiyonu çok hızlı bir artış noktası olan x_0 a sahip ise, yani $x \longrightarrow x_0$ için $-|p(x) - p(x_0)| \log |x - x_0| \longrightarrow \infty$ oluyorsa bu durumda maximal operatör $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sürekli olmaz.

Tanım 3.2.1 Eğer her $x, y \in \Omega$ için

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{L}{-\ln |x - y|}, \quad |x - y| \leq \frac{1}{2} \quad (3.2.1)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $L > 0$ sayısı varsa, p fonksiyonuna log-Hölder sürekli ve (3.2.1) koşuluna log-Hölder süreklilik koşulu adı verilir.

Lemma 3.2.2. Ω sınırlı bir bölge olsun. $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ve p fonksiyonu log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın. Bu durumda $C > 0$ olmak üzere her $f \in L^{p(\cdot)}$ için $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ olacak şekilde

$$(Mf(x))^{\frac{p(x)}{p^-}} \leq C \left[M \left(|f(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{p^-}} \right) (x) + 1 \right]$$

eşitsizliği geçerlidir (Diening 2002).

Teorem 3.2.3. Ω sınırlı bir bölge olsun. $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ve p fonksiyonu log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın. Bu durumda M maximal operatörü $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır (Diening 2002).

Tanım 3.2.4. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de açık bir bölge ve $p : \Omega \longrightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu sürekli olsun. Eğer her $x, y \in \Omega$ için p fonksiyonu log-Hölder sürekli ve her x için

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{C}{\log(e + |x|)}$$

olacak şekilde $\lim_{|x| \rightarrow \infty} p(x) = p_\infty \in [1, \infty)$ ve $C > 0$ sabitleri varsa p fonksiyonuna **global log-Hölder sürekli** adı verilir.

Teorem 3.2.5. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olsun. $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ve p fonksiyonu global log-Hölder sürekli olsun. Bu durumda Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır. (Cruz-Uribe ve ark. 2003, 2004).

Teorem 3.2.6. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olsun. $0 < \alpha < n$ olmak üzere p fonksiyonu $1 < p^- \leq p^+ < \frac{n}{\alpha}$ olacak şekilde global log-Hölder sürekli ve $x \in \Omega$ için

$$\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{\alpha}{n}$$

özelliliği ile $q : \Omega \longrightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda I_α Riesz operatörü $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayından $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ uzayına sınırlı olur (Capone ve ark. 2004).

3.3. Değişken Üstlü Lebesgue Uzaylarında Bir Taraflı Maksimal ve Potansiyel Operatörlerin Sınırlılığı

Klasik Lebesgue uzayında $1 < p \leq \infty$ için Hardy-Littlewood maksimal operatörün sınırlılığınan M_- ve M_+ operatörlerinin sınırlılığı elde edilir. Daha açık olarak, $I, \mathbb{R}$ de açık bir aralık olmak üzere $f \in L_p(I)$, $1 < p < \infty$ ise $M_-f, M_+f \in L_p(I)$ ve

$$\begin{aligned} \|M_-f\|_p &\leq C(p) \|f\|_p \\ \|M_+f\|_p &\leq C(p) \|f\|_p \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Değişken üstlü Lebesgue uzayında ise M_- operatörü sınırlı iken M_+ operatörü sınırlı olmayabilir. Böyle bir durumda M maksimal operatörün de sınırlı olmayacağı açıktır. Aşağıdaki teorem değişken üstlü Lebesgue uzayında bu durumu açıklamaktadır.

Teorem 3.3.1. $I = [0, b]$ sınırlı bir aralık olsun.

a) $L^{p(\cdot)}(I)$ uzayında M_- operatörü sınırlı olduğu halde M maksimal operatörü sınırlı olmayacak şekilde I aralığında süreksiz bir p fonksiyonu vardır.

b) $L^{p(\cdot)}(I)$ uzayında M_+ operatörü sınırlı olduğu halde M maksimal operatörü sınırlı olmayacak şekilde I aralığında süreksiz bir p fonksiyonu vardır. (Edmunds, Kokilashvilli and Meskhi 2008)

Tanım 3.3.2. $I, \mathbb{R}$ de açık bir aralık ve $p \in \mathcal{M}(I)$ olsun. Hemen hemen her $x, y \in I$ için

$$p(x) \leq p(y) + \frac{C_1}{-\ln(x-y)}, \quad 0 < x-y \leq \frac{1}{2} \quad (3.3.1)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $C_1 > 0$ sabiti varsa, p fonksiyonuna bir tarafı log-Hölder sürekli ve (3.3.1) koşuluna bir tarafı log-Hölder süreklilik koşulu adı verilir. Bu koşulu sağlayan p fonksiyonlarının sınıfı $P_-(I)$ ile gösterilir. Benzer şekilde hemen hemen her $x, y \in I$ için

$$p(x) \leq p(y) + \frac{C_2}{-\ln(y-x)}, \quad 0 < y-x \leq \frac{1}{2} \quad (3.3.2)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $C_2 > 0$ sabiti varsa $p \in P_+(I)$ ile gösterilir.

p fonksiyonu I aralığında artmayan bir fonksiyon ise (3.3.1) koşulunun, I aralığında azalmayan fonksiyon ise (3.3.2) koşulunun sağlandığı açıktır.

Ayrıca $p \in P_+(I) \cap P_-(I)$ ise p fonksiyonu I aralığında log-Hölder süreklidir.

Benzer şekilde her $x, y \in I$ için

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{\log(e+x)}, \quad x \leq y \quad (3.3.3)$$

ise bu durumda $p \in P_\infty(I)$ ile gösterilir (Edmunds, Kokilashvilli and Meskhi 2008).

Lemma 3.3.3. $p \in \mathcal{M}(I)$ ve $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

a) $p \in P_-(I)$

b) Hemen hemen her $x \in I$ ve $I_-(x, h) \neq \emptyset$ olmak üzere $0 < h \leq \frac{1}{2}$ için

$$h^{p_{I_-(x,h)}^- - p(x)} \leq C$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı vardır.

c) Hemen hemen her $x \in I$ ve $I_+(x, h) \neq \emptyset$ olmak üzere $0 < h \leq \frac{1}{2}$ için

$$h^{p(x) - p_{I_+(x,h)}^+} \leq C$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı vardır (Edmunds, Kokilashvilli and Meskhi 2008).

Lemma 3.3.4. $p \in \mathcal{M}(I)$ ve $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

a) $p \in P_+(I)$

b) Hemen hemen her $x \in I$ ve $I_+(x, h) \neq \emptyset$ olmak üzere $0 < h \leq \frac{1}{2}$ için

$$h^{p_{I_+(x,h)}^- - p(x)} \leq C$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı vardır.

c) Hemen hemen her $x \in I$ ve $I_-(x, h) \neq \emptyset$ olmak üzere $0 < h \leq \frac{1}{2}$ için

$$h^{p(x) - p_{I_-(x,h)}^+} \leq C$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı vardır (Edmunds, Kokilashvilli and Meskhi 2008).

Teorem 3.3.5. I sınırlı bir aralık, $p \in P_-(I)$ ve $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ olsun. Bu durumda M_- operatörü $L^{p(\cdot)}(I)$ da sınırlıdır (Edmunds, Kokilashvilli and Meskhi 2008).

Teorem 3.3.6. I sınırlı bir aralık, $p \in P_+(I)$ ve $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ olsun. Bu durumda M_+ operatörü $L^{p(\cdot)}(I)$ da sınırlıdır (Edmunds, Kokilashvilli and Meskhi 2008).

Teorem 3.3.7. $I, \mathbb{R}$ de açık bir küme ve $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ olsun. $p \in P_+(I) \cap P_\infty(I)$ olmak üzere M_+ operatörü $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}_+)$ uzayında sınırlıdır (Edmunds, Kokilashvilli and Meskhi 2008).

Teorem 3.3.8. $I = \mathbb{R}_+$, $p \in P_+(I)$ ve $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ olsun. Eğer (a, ∞) aralığında her x için

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{C}{\log(e + x)}$$

olacak şekilde pozitif bir a ve C sayısı var ise M_+ operatörü $L^{p(\cdot)}(I)$ uzayında sınırlıdır (Edmunds, Kokilashvilli and Meskhi 2008).

Sonuç 3.3.9. $I = \mathbb{R}_+$, $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ve p fonksiyonu I da azalmayan bir fonksiyon olsun. Eğer

$$p(x) \leq p(y) + \frac{C}{\log(e + y)}, \quad a < y < x$$

olacak şekilde bir a sayısı var ise M_+ operatörü $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}_+)$ da sınırlıdır (Edmunds, Kokilashvilli and Meskhi 2008).

Teorem 3.3.10. $I, \mathbb{R}$ de açık bir küme ve $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ olsun. $p \in P_-(I) \cap P_\infty(I)$ olmak üzere M_- operatörü $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}_+)$ da sınırlıdır (Edmunds, Kokilashvilli and Meskhi 2008).

Teorem 3.3.11. $I = \mathbb{R}_+$, $p \in P_-(I)$ ve $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ olsun. Eğer (a, ∞) aralığında her x için

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{C}{\log(e + x)}$$

olacak şekilde pozitif bir a ve C sayısı var ise M_- operatörü $L^{p(\cdot)}(I)$ uzayında sınırlıdır (Edmunds, Kokilashvili and Meskhi 2008).

Sonuç 3.3.12. $I = \mathbb{R}_+$, $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ve p fonksiyonu I da azalmayan bir fonksiyon olsun. Eğer

$$p(x) \leq p(y) + \frac{C}{\log(e + x)}, \quad a < x < y$$

olacak şekilde bir a sayısı var ise M_- operatörü $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}_+)$ da sınırlıdır (Edmunds, Kokilashvili and Meskhi 2008).

Lemma 3.3.13. I açık bir aralık, $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, $p \in P_-(I)$ ve $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ olsun. Bu durumda $M_- (I)$ operatörü $L^{p(\cdot)}(I)$ da sınırlıdır ve

$$(M_- f)^{p(x)}(x) \leq C(p) \left[(M_- (|f|^{p(\cdot)}))(x) + 1 \right] \quad (3.3.4)$$

eşitsizliği sağlanır (Edmunds, Kokilashvili and Meskhi 2008).

Lemma 3.3.14. I açık bir aralık, $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, $p \in P_+(I)$ ve $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ olsun. Bu durumda $M_+ (I)$ operatörü $L^{p(\cdot)}(I)$ da sınırlıdır ve

$$(M_+ f)^{p(x)}(x) \leq C(p) \left[(M_+ (|f|^{p(\cdot)}))(x) + 1 \right] \quad (3.3.5)$$

eşitsizliği sağlanır (Edmunds, Kokilashvili and Meskhi 2008).

Teorem 3.3.15. $I = [0, b]$ sınırlı bir aralık ve $\alpha, (0, 1)$ aralığında bir sabit olsun. Bu durumda

a) I da süreksiz öyle bir p fonksiyonu vardır ki $q(x) = \frac{p(x)}{1-\alpha(x)p(x)}$ ve $0 < \alpha < \frac{1}{p_I^+}$ iken R_α operatörü $L^{p(\cdot)}(I)$ dan $L^{q(\cdot)}(I)$ ya sınırlı olduğu halde I_α operatörü $L^{p(\cdot)}(I)$ dan $L^{q(\cdot)}(I)$ ya sınırlı değildir.

b) I da süreksiz öyle bir p fonksiyonu vardır ki $q(x) = \frac{p(x)}{1-\alpha(x)p(x)}$ ve $0 < \alpha < \frac{1}{p_I^+}$ iken W_α operatörü $L^{p(\cdot)}(I)$ dan $L^{q(\cdot)}(I)$ ya sınırlı olduğu halde I_α operatörü $L^{p(\cdot)}(I)$ dan $L^{q(\cdot)}(I)$ ya sınırlı değildir (Edmunds, Kokilashvili and Meskhi 2008).

Tanım 3.3.16. $I = [0, b)$ ve $0 < b \leq \infty$ iken bir taraflı potansiyel operatörler Riemann Liouville $R_{\alpha(x)}$ ve Weyl operatörü $W_{\alpha(x)}$, $0 < \alpha(x) < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R_{\alpha(x)}f(x) &= \int_0^x f(t) (x-t)^{\alpha(x)-1} dt, & 0 < x < b \\ W_{\alpha(x)}f(x) &= \int_x^b f(t) (t-x)^{\alpha(x)-1} dt, & 0 < x < b \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Riemann Liouville ve Weyl operatörünün tanımından

$$I_{\alpha(x)}f(x) = R_{\alpha(x)}f(x) + W_{\alpha(x)}f(x) = \int_0^b f(t) |x-t|^{\alpha(x)-1} dt, \quad 0 < x < b$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 3.3.17. $I = \mathbb{R}^+$, $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ve $p \in P_+(I)$ olsun. $p \in P_\infty((a, \infty))$ olacak şekilde bir pozitif a sabiti var olsun. α, I da, $0 < \alpha < \frac{1}{p_I^+}$ ve $q(x) = \frac{p(x)}{1-\alpha p(x)}$ koşullarını sağlayan bir sabit olmak üzere W_α operatörü $L^{p(\cdot)}(I)$ dan $L^{q(\cdot)}(I)$ ya sınırlıdır (Edmunds, Kokilashvili and Meskhi 2008).

Teorem 3.3.18. $I = \mathbb{R}^+$, $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ve $p \in P_+(I)$ olsun. α, I da $0 < \alpha < \frac{1}{p_I^+}$ ve $q(x) = \frac{p(x)}{1-\alpha p(x)}$ koşullarını sağlayan bir sabit olmak üzere, bazı pozitif a sayıları için $p \in P_\infty((a, \infty))$ oluyorsa R_α operatörü $L^{p(\cdot)}(I)$ dan $L^{q(\cdot)}(I)$ ya sınırlıdır (Edmunds, Kokilashvili and Meskhi 2008).

Teorem 3.3.19. $I = [0, b]$ sınırlı bir aralık, $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ve $p \in P_+(I)$ olsun. $0 < \alpha_I^-$, $(\alpha p)_I^+ < 1$ ve $q(x) = \frac{p(x)}{1-\alpha(x)p(x)}$ olmak üzere $W_{\alpha(\cdot)}$ operatörü $L^{p(\cdot)}(I)$ dan $L^{q(\cdot)}(I)$ ya sınırlıdır (Edmunds, Kokilashvili and Meskhi 2008).

Lemma 3.3.20. $p \in P^+([0, b])$ iken öyle bir c pozitif sabiti vardır ki hemen hemen her $x \in [0, b]$, $0 < r < 1/2$ ve $I_+(x, r) \neq \emptyset$ olmak koşuluyla

$$r^{\frac{1}{(p_{I_+(x,r)}^-)^r} - \frac{1}{p'(x)}} \leq c$$

eşitsizliği sağlanır (Edmunds, Kokilashvili and Meskhi 2008).

Teorem 3.3.21. $I = [0, b]$ sınırlı bir aralık, $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ve $p \in P_-(I)$ olsun. Kabul edelim ki $0 < \alpha_-$, $(\alpha p)_I^+ < 1$ ve $q(x) = \frac{p(x)}{1-\alpha(x)p(x)}$ olsun. Bu durumda $R_{\alpha(\cdot)}$ operatörü $L^{p(\cdot)}(I)$ dan $L^{q(\cdot)}(I)$ ya sınırlıdır (Edmunds, Kokilashvili and Meskhi 2008).

3.4. Değişken Üstlü Morrey Uzayları ve Hardy-Littlewood Maksimal ve Riesz Potansiyel Operatörlerinin Sınırlılığı

Değişken üstlü Morrey uzayları ile ilgili ilk çalışmalar Almeida ve ark. (2008) ve Fan (2010), tarafından yapılmıştır.

Tanım 3.4.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de açık bir bölge, $p \in L_+^\infty(\Omega)$ ve $\lambda : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere $\lambda \in M(\Omega)$ olsun. Değişken üstlü Morrey uzayı $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$,

$$I_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(f) := \sup_{x \in \Omega, r > 0} r^{-\lambda(x)} \int_{\tilde{B}(x, r)} |f(y)|^{p(y)} dy < \infty$$

özelliğine sahip $f \in L^1(\Omega)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır.

$\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ normu $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ üzerinde tanımlanan norm olmak üzere $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında

$$\|f\|_1 = \inf \left\{ \eta > 0 : I_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}\left(\frac{f}{\eta}\right) \leq 1 \right\}$$

ya da

$$\|f\|_2 = \sup_{x \in \Omega, r > 0} \left\| r^{-\frac{\lambda(x)}{p(\cdot)}} f \chi_{\tilde{B}(x, r)} \right\|_{p(\cdot)}$$

şeklinde normlar tanımlanabilir.

Lemma 3.4.2. $\forall f \in L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\|f\|_i \leq 1 \text{ ise } \|f\|_i^{p_i^+} \leq I_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(f) \leq \|f\|_i^{p_i^-} \quad (3.4.1)$$

$$\|f\|_i \geq 1 \text{ ise } \|f\|_i^{p_i^-} \leq I_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(f) \leq \|f\|_i^{p_i^+} \quad (3.4.2)$$

eşitsizlikleri $i = 1, 2$ için geçerlidir (Almeida ve ark. 2008).

Lemma 3.4.3. $\forall f \in L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ için

$$\|f\|_1 = \|f\|_2$$

eşitliği geçerlidir (Almeida ve ark. 2008).

Normların çakışmasından dolayı

$$\|f\|_{p(\cdot), \lambda(\cdot)} := \|f\|_1 = \|f\|_2$$

yazılabilir.

Lemma 3.4.4. Ω sınırlı açık bir bölge ve λ fonksiyonu log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın. Bu durumda $|x - y| \leq r$ olacak şekilde her $x, y \in \Omega$ için

$$\frac{1}{C} r^{-\lambda(y)} \leq r^{-\lambda(x)} \leq C r^{-\lambda(y)},$$

eşitsizliği geçerlidir. $C = e^{A_\lambda}$ sabiti x, y ve r ye bağlı değildir (Almeida ve ark. 2008).

Lemma 3.4.5. Ω sınırlı bir bölge ve λ fonksiyonu log-Hölder süreklilik koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$\|f\|_3 = \sup_{x \in \Omega, r > 0} \left\| r^{-\frac{\lambda(\cdot)}{p(\cdot)}} f \chi_{\tilde{B}(x, r)} \right\|_{p(\cdot)}$$

fonksiyoneli $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında bir denk norm tamımlar.

Eğer $p(x) \equiv p$ ve $\lambda(x) \equiv \lambda$ şeklinde sabit olarak alınırsa $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega) = L^{p, \lambda}(\Omega)$ eşitliği yazılabilir.

Teorem 3.4.6. $\Omega, \mathbb{R}^n$ nin sınırlı açık bir alt bölgesi, $p : \bar{\Omega} \rightarrow [1, \infty)$ ve $\lambda : \bar{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$, $\bar{\Omega}$ üzerinde log-Hölder sürekli olsun. Bu durumda aşağıdaki durumlar geçerlidir.

- 1) $\lambda \equiv 0$ ise $L^{p(\cdot), 0}(\Omega) \cong L^{p(\cdot)}(\Omega)$
- 2) $\lambda \equiv n$ ise $L^{p(\cdot), n}(\Omega) \cong L^\infty(\Omega)$
- 3) $\lambda^- > n$ ise $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega) \equiv \{0\}$ (Fan 2010).

Lemma 3.4.7. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölge, $0 \leq \lambda(x) \leq n$ ve $0 \leq \mu(x) \leq n$ olsun. Eğer $p(\cdot)$ ve $q(\cdot)$ fonksiyonları log-Hölder sürekli, $p(x) \leq q(x)$ ve

$$\frac{n - \lambda(x)}{p(x)} \geq \frac{n - \mu(x)}{q(x)}$$

ise bu durumda

$$L^{q(\cdot), \mu(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$$

gömmesi geçerlidir (Almeida ve ark. 2008).

Teorem 3.4.8. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olsun. Eğer p fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder sürekli ve $0 \leq \lambda(x) \leq \lambda^+ < n$ ise M maximal operatörü $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır (Almeida ve ark. 2008).

Sonuç 3.4.9. Teorem 3.4.8 in koşulları altında $M^\sharp$ sharp maximal operatörü $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sınırlıdır.

Teorem 3.4.10. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge, p fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder sürekli ve $0 \leq \lambda(x) \leq \lambda^+ < n$ olsun. Eğer α fonksiyonu log-Hölder sürekli ve

$$\inf_{x \in \Omega} \alpha(x) > 0, \quad \sup_{x \in \Omega} [\lambda(x) + \alpha(x)p(x)] < n \quad (3.4.3)$$

ise

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n - \lambda(x)}$$

olmak üzere $I_{\alpha(\cdot)}$ operatörü $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayından $L^{q(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır (Almeida ve ark. 2008).

Sonuç 3.4.11. Teorem 3.4.10 nun koşulları altında $M_{\alpha(\cdot)}$ kesirli maximal operatörü $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayından $L^{q(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır (Almeida ve ark. 2008).

Teorem 3.4.12. Ω sınırlı bir bölge, p fonksiyonu $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olacak şekilde log-Hölder sürekli olsun. Ayrıca α ve λ fonksiyonları log-Hölder sürekli ve (3.4.3) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $I_{\alpha(\cdot)}$ operatörü, $q(\cdot)$ fonksiyonu log-Hölder sürekli,

$$1 \leq q(x) \leq \frac{p(x) [n - \lambda(x)]}{n - [\lambda(x) + \alpha(x)p(x)]}$$

ve $\mu(\cdot)$ fonksiyonu

$$\frac{n - \mu(x)}{q(x)} = \frac{n - \lambda(x)}{p(x)} - \alpha(x)$$

şeklinde tanımlanmak üzere $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ den $L^{q(\cdot), \mu(\cdot)}(\Omega)$ ya sınırlıdır. (Almeida ve ark. 2008).

Sonuç 3.4.13. Teorem 3.4.12 nin koşulları altında $M_{\alpha(\cdot)}$ kesirli maksimal operatörü $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(\Omega)$ uzayından $L^{q(\cdot), \mu(\cdot)}(\Omega)$ uzayına sınırlıdır (Almeida ve ark. 2008).

4. BULGULAR

Bu bölümde çalışmada elde edilen bulgulara yer verilecektir. Bir taraflı maximal operatörler M_+ ve M_- nin değişken üstlü bir taraflı Morrey uzayında sınırlılığı gösterilecek ve bu operatörlere bağlı olarak Maksimal operatör M , Riemann Liouville R_α ve Weyl W_α operatörlerinin değişken üstlü bir taraflı Morrey uzayında sınırlılığı gösterilecektir.

4.1. Bir Taraflı Morrey Uzayları

$I = (0, \ell)$ aralığı $\mathbb{R}^+$ da sınırlı bir aralık, $p \in L_\infty^+(I)$ ve $\lambda : I \rightarrow [0, 1]$ olmak üzere $\lambda \in M(I)$ olsun. Bir taraflı değişken üstlü Morrey uzayı $L_+^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$,

$$I_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}^+(f) := \sup_{x \in I, h > 0} h^{-\lambda(x)} \int_{I_+(x, h)} |f(y)|^{p(y)} dy < \infty$$

özelliğine sahip $f \in L^{p(\cdot)}(I)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlayalım.

$L_+^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ uzayı

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_+^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)}^1 &: = \inf \left\{ \eta > 0 : I_{p, \lambda}^+ \left(\frac{f}{\eta} \right) \leq 1 \right\} \\ &: = \sup_{x \in I, h > 0} \left\| h^{\frac{-\lambda(x)}{p(\cdot)}} f \chi_{I_+(x, h)} \right\|_{p(\cdot)} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

şeklinde normlar tanımlanabilir. Bu normlar Morrey uzayında olduğu gibi çakışır.

Benzer olarak, bir taraflı değişken üstlü Morrey uzayı $L_-^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$,

$$I_{p(\cdot), \lambda(\cdot)}^-(f) := \sup_{x \in I, h > 0} h^{-\lambda(x)} \int_{I_-(x, h)} |f(y)|^{p(y)} dy < \infty$$

özelliğine sahip $f \in L^{p(\cdot)}(I)$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlayalım. Bu fonksiyon uzayı üzerinde

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_-^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)}^1 &: = \inf \left\{ \eta > 0 : I_{p, \lambda}^- \left(\frac{f}{\eta} \right) \leq 1 \right\} \\ &: = \sup_{x \in I, h > 0} \left\| h^{\frac{-\lambda(x)}{p(\cdot)}} f \chi_{I_-(x, h)} \right\|_{p(\cdot)} \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

normları tanımlanabilir.

$I = (0, \ell)$ aralığı $\mathbb{R}^+$ da sınırlı bir aralık olduğundan, (4.1.1) ve (4.1.2) de yer alan " $\sup_{x \in I, h > 0}$ " yerine " $\sup_{x \in I, 0 < h \leq \ell}$ " alınabilir. Ayrıca verilen bir $f \in L^{p(\cdot)}(I)$ fonksiyonun $f \in L_+^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ veya $f \in L_-^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ olduğunu göstermek için $0 < h < \frac{1}{2}$ iken sırasıyla (4.1.1) veya (4.1.2) ifadelerinin sonlu olduğunu göstermek yeterlidir.

Tanımlanan bu fonksiyon uzayları arasında

$$L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I) \subset L_+^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I) \quad (4.1.3)$$

ve

$$L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I) \subset L_-^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I) \quad (4.1.4)$$

kapsama bağıntılarının olduğu açıktır.

Lemma 4.1.1. $I = (0, \ell)$ aralığı $\mathbb{R}^+$ da sınırlı bir aralık, her $x \in I$ için $0 \leq \lambda(x) < 1$ olacak şekilde $\lambda \in M(I)$ olsun.

- a) $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I) = L_+^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I) \cap L_-^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I)$
- b) $\lambda \in P_-(I)$ ise $L_-^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I) \subset L_+^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I)$
- c) $\lambda \in P_+(I)$ ise $L_+^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I) \subset L_-^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I)$
- d) $\lambda \in P(I)$ ise $L_+^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I) = L_-^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I)$
- e) $0 \leq \lambda(x) \equiv \lambda < 1$ ise $L_+^{p(\cdot),\lambda}(I) = L_-^{p(\cdot),\lambda}(I)$
- f) $\lambda(x) \equiv 0$ ise $L_+^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I) = L^{p(\cdot)}(I)$

İspat :

- a) $f \in L_+^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I) \cap L_-^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I)$ olsun. Bu durumda

$$I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}^-(f) < \infty$$

ve

$$I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}^+(f) < \infty$$

olduğundan $I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f) < \infty$ elde edilir. (4.1.3) ve (4.1.4) kapsama bağıntıları ile birlikte istenen sonuç elde edilir.

- b) $\lambda \in P_-(I)$ ve $f \in L_-^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I)$ olsun. Bu durumda

$$\int_{I_-(x,h)} |f(y)|^{p(y)} dy \leq Ch^{\lambda(x)}$$

olduğundan $x + h \in I$ olmak üzere

$$\int_{I_+(x,h)} |f(y)|^{p(y)} dy \leq Ch^{\lambda(x+h)}$$

yazılabilir.

$0 < h < \frac{1}{2}$ iken

$$\begin{aligned} h^{\lambda(x+h)-\lambda(x)+\lambda(x)} &\leq h^{\frac{C_1}{-\log h}} h^{\lambda(x)} \\ &= Ch^{\lambda(x)} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{I_+(x,h)} |f(y)|^{p(y)} dy &\leq Ch^{\lambda(x+h)} \\ &\leq Ch^{\lambda(x)} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $f \in L_+^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I)$ olduğunu gösterir.

c) $\lambda \in P_+(I)$ ve $f \in L_+^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I)$ olsun. Bu durumda

$$\int_{I_+(x,h)} |f(y)|^{p(y)} dy \leq Ch^{\lambda(x)}$$

olduğundan $x - h \in I$ olmak üzere

$$\int_{I_-(x,h)} |f(y)|^{p(y)} dy \leq Ch^{\lambda(x-h)}$$

yazılabilir. $0 < h < \frac{1}{2}$ iken

$$\begin{aligned} h^{\lambda(x-h)-\lambda(x)+\lambda(x)} &\leq h^{\frac{C_1}{-\log h}} h^{\lambda(x)} \\ &= Ch^{\lambda(x)} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{I_-(x,h)} |f(y)|^{p(y)} dy &\leq Ch^{\lambda(x-h)} \\ &\leq Ch^{\lambda(x)} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $f \in L_-^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I)$ olduğunu gösterir.

d) $\lambda \in P(I) = P_-(I) \cap P_+(I)$ ise b) ve c) seçeneklerinden istenen elde edilir.

e) λ bir sabit ise d) seçeneğinden istenen elde edilir.

f) $\lambda(x) \equiv 0$ ise

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_+^{p(\cdot),0}(I)} &= \sup_{x \in I, h > 0} \|f\chi_{I_+(x,h)}\|_{p(\cdot)} \\ &= \|f\|_{p(\cdot)}\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 4.1.2.

$I = (0, \ell)$ aralığı $\mathbb{R}^+$ da sınırlı bir aralık olsun.

a) $p \in P_-(I)$ ise $\|\chi_{I_+(x,h)}\|_{p(\cdot)} \leq Ch^{\frac{1}{p(x)}}$

b) $p \in P_+(I)$ ise $\|\chi_{I_-(x,h)}\|_{p(\cdot)} \leq Ch^{\frac{1}{p(x)}}$

İspat : I sınırlı bir aralık olduğundan ispatı $0 < h < \frac{1}{2}$ için yapmak yeterlidir.

a) $0 < h < \frac{1}{2}$ için modular ve norm arasındaki ilişkiden

$$\begin{aligned}\|\chi_{I_+(x,h)}\|_{p(\cdot)} &\leq \left[\int_{I_+(x,h)} dy \right]^{\frac{1}{p_{I_+}^+(x,h)}} \\ &\leq h^{\frac{1}{p_{I_+}^+(x,h)}}\end{aligned}$$

yazılabilir. $p \in P_-(I)$ ise Lemma 3.3.3 c) seçeneğinden

$$\begin{aligned}\|\chi_{I_+(x,h)}\|_{p(\cdot)} &\leq h^{\frac{1}{p_{I_+}^+(x,h)} - \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p(x)}} \\ &\leq Ch^{\frac{1}{p(x)}}\end{aligned}$$

elde edilir.

b) Benzer şekilde $0 < h < \frac{1}{2}$ için

$$\begin{aligned}\|\chi_{I_-(x,h)}\|_{p(\cdot)} &\leq \left[\int_{I_-(x,h)} dy \right]^{\frac{1}{p_{I_-}^+(x,h)}} \\ &\leq h^{\frac{1}{p_{I_-}^+(x,h)}}\end{aligned}$$

yazılabilir.

$p \in P_+(I)$ ise Lemma 3.3.4 c) seçeneğinden

$$\|\chi_{I_+(x,h)}\|_{p(\cdot)} \leq h^{\frac{1}{p_+^+(x,h)} - \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p(x)}} \leq Ch^{\frac{1}{p(x)}}$$

elde edilir. ■

Lemma 4.1.3. $I = (0, \ell)$ aralığı $\mathbb{R}^+$ da sınırlı bir aralık, $0 \leq \lambda(x) \leq 1$ ve $0 \leq \mu(x) \leq 1$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in M(I)$ olsun.

a) $p, q \in P_+(I)$ olmak üzere $p(x) \leq q(x)$ ve

$$\frac{1 - \lambda(x)}{p(x)} \geq \frac{1 - \mu(x)}{q(x)} \quad (4.1.5)$$

ise

$$L_+^{q(\cdot), \mu(\cdot)}(I) \hookrightarrow L_+^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I).$$

b) $p, q \in P_-(I)$ olmak üzere $p(x) \leq q(x)$ ve

$$\frac{1 - \lambda(x)}{p(x)} \geq \frac{1 - \mu(x)}{q(x)} \quad (4.1.6)$$

ise

$$L_-^{q(\cdot), \mu(\cdot)}(I) \hookrightarrow L_-^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I).$$

İspat: b) nin ispatı a) ya benzer olduğundan sadece a) seçeneğini ispatlayacağız.

a) $\|f\|_{L_+^{q(\cdot), \mu(\cdot)}(I)} \leq 1$ olsun. $r(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$ olmak üzere Hölder eşitsizliğinden

$$h^{-\lambda(x)} \int_{I^+(x,h)} |f(y)|^{p(y)} dy \leq Ch^{-\lambda(x)} \|f^{p(\cdot)} \chi_{I^+(x,h)}\|_{r(\cdot)} \|\chi_{I^+(x,h)}\|_{r'(\cdot)}$$

yazılabilir. $p, q \in P_+(I)$ olduğundan $r \in P_+(I)$ elde edilir. Bu yüzden

$$\|f^{p(\cdot)} \chi_{I^+(x,h)}\|_{r(\cdot)} \leq Ch^{\mu(x) \frac{1}{r(x)}}$$

bulunur. Lemma 4.1.2 ve 4.1.5 kabulünden

$$\begin{aligned} h^{-\lambda(x)} \int_{I^+(x,h)} |f(y)|^{p(y)} dy &\leq Ch^{-\lambda(x)} h^{\mu(x) \frac{1}{r(x)}} h^{\frac{1}{r'(x)}} \\ &\leq Ch^{-\lambda(x) + \mu(x) \frac{p(x)}{q(x)} + 1 - \frac{p(x)}{q(x)}} \\ &\leq C \end{aligned}$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar. ■

4.2. Bir Taraflı Maksimal Operatörlerin Morrey Uzayında Sınırlılığı

Teorem 4.2.1. $I = (0, b)$, $\mathbb{R}^+$ da sınırlı bir aralık olsun. $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, $p \in P_-(I)$ ve $0 \leq \lambda^+ < 1$ ise M_- maksimal operatörü $L_-^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ uzayında sınırlıdır.

İspat: M_- operatörü pozitif ve alt liner olduğundan, $c > 0$ ve $C = C(c) > 0$ sayıları f fonksiyonuna bağlı olmayan sabitler olmak üzere $\|f\|_{L_-^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)} \leq c$ iken $\|M_- f\|_{L_-^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)} \leq C$ olduğunu göstermek yeterlidir. f fonksiyonunu I aralığının dışında sıfır fonksiyonu olarak devam ettirerek

$$\int_{I_-(x, h)} (M_- f(y))^{p(y)} dy = \int_I (M_- f(\cdot))^{\frac{p(y)}{p^-}}(y)^{p^-} \chi_{I_-(x, h)}(y) dy$$

eşitliği yazılabilir. I aralığı sınırlı ve $c > 0$ sayısı sadece d_I ve λ^+ ya bağlı olmak üzere

$$\|f\|_{L_-^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)} \geq c \|f\|_{p(\cdot)}$$

yazılabilir. Böylece Lemma 3.3.13 de yer alan noktasal eşitsizlik uygulanarak

$$\begin{aligned} \int_{I_-(x, h)} (M_- f(y))^{p(y)} dy &\leq \int_I C(p) \left[M_- (|f|^{\frac{p(\cdot)}{p^-}})(y) + 1 \right]^{p^-} \chi_{I_-(x, h)}(y) dy \\ &\leq C(p) 2^{p^- - 1} \int_I \left[\left(M_- (|f|^{\frac{p(\cdot)}{p^-}})(y) \right)^{p^-} + 1 \right] \chi_{I_-(x, h)}(y) dy \\ &\leq C \left(\int_I \left(M_- (|f|^{\frac{p(\cdot)}{p^-}})(y) \right)^{p^-} \chi_{I_-(x, h)}(y) dy + \int_I \chi_{I_-(x, h)}(y) dy \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.5.2 de $\alpha = 0$ alınarak (2.5.1) eşitsizliğinden

$$\int_{I_-(x, h)} (M_- f(y))^{p(y)} dy \leq C \left(\int_I |f(y)|^{p(y)} M_+ \chi_{I_-(x, h)}(y) dy + h \right)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\begin{aligned} A &= \int_{I_-(x, 2h)} |f(y)|^{p(y)} M_+ \chi_{I_-(x, h)}(y) dy \\ B &= \int_{(I_-(x, 2h))^c} |f(y)|^{p(y)} M_+ \chi_{I_-(x, h)}(y) dy \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\int_I |f(y)|^{p(y)} M_{+\chi_{I_{-(x,h)}}}(y) dy \leq A + B$$

yazılabilir. $x < y < b$ için

$$M_{+\chi_{I_{-(x,h)}}}(y) dy = 0$$

ve $0 < y < x - 2h$ için

$$M_{+\chi_{I_{-(x,h)}}}(y) dy \leq \frac{h}{x - y - h}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} B &\leq \int_0^{x-2h} |f(y)|^{p(y)} M_{+\chi_{I_{-(x,h)}}}(y) dy + \int_x^b |f(y)|^{p(y)} M_{+\chi_{I_{-(x,h)}}}(y) dy \\ &\leq \int_0^{x-2h} |f(y)|^{p(y)} \frac{h}{x - y - h} dy \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$A \leq Ch^{\lambda(x)}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{I_{-(x,h)}} (M_- f(y))^{p(y)} dy &\leq C \left(h^{\lambda(x)} + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{I_{-(x,2^{j+1}h)} \setminus I_{-(x,2^j h)}} |f(y)|^{p(y)} \frac{h}{x - y - h} dy \right) \\ &\leq C \left(h^{\lambda(x)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2^{j+1}h)^{\lambda(x)}}{(2^{j+1}h)^{\lambda(x)}} \frac{1}{2^j - 1} \int_{I_{-(x,2^{j+1}h)}} |f(y)|^{p(y)} dy \right) \\ &\leq C \left(h^{\lambda(x)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2^{j+1}h)^{\lambda(x)}}{2^j - 1} \right) \\ &\leq Ch^{\lambda(x)} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $J_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}^-(M^- f) \leq C$ bulunur ki bu ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.2.2. $I = (0, b)$, $\mathbb{R}^+$ da sınırlı bir aralık olsun. $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, $p \in P_-(I)$ ve $0 \leq \lambda^+ < 1$ ise M_+ maksimal operatörü $L_+^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I)$ uzayında sınırlıdır.

İspat : Teoremin ispatı Teorem 4.2.1 e benzer olarak yapılacaktır. M^+ operatörü pozitif ve alt liner olduğundan, $c > 0$ ve $C = C(c) > 0$ sayıları f fonksiyonuna bağlı olmayan sabitler olmak üzere $\|f\|_{L_+^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)} \leq c$ iken $\|M_+ f\|_{L_+^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)} \leq C$ olduğunu göstermek yeterlidir. f fonksiyonunu I aralığının dışında sıfır fonksiyonu olarak devam ettirerek

$$\int_{I_+(x,h)} (M_+ f(y))^{p(y)} dy = \int_I (M_+ f(\cdot))^{\frac{p(y)}{p_-}})^{p_-}(y) \chi_{I_+(x,h)}(y) dy$$

eşitliği yazılabilir. I aralığı sınırlı ve $c > 0$ sayısı sadece d_I ve λ^+ ya bağlı olmak üzere

$$\|f\|_{L_+^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)} \geq c \|f\|_{p(\cdot)}$$

yazılabilir. Böylece Lemma 3.3.14 de yer alan noktasal eşitsizlik uygulanarak

$$\begin{aligned} \int_{I_+(x,h)} (M_+ f(y))^{p(y)} dy &= \int_I (M_+ f(y))^{\frac{p(y)}{p_-}})^{p_-} \chi_{I_+(x,h)}(y) dy \\ &\leq \int_I C \left[M_+ (|f(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{p_-}})(y) + 1 \right]^{p_-} \chi_{I_+(x,h)}(y) dy \\ &\leq C 2^{p_- - 1} \int_I \left[\left(M_+ (|f|^{\frac{p(\cdot)}{p_-}})(y) \right)^{p_-} + 1 \right] \chi_{I_+(x,h)}(y) dy \\ &\leq C \left(\int_I \left(M_+ (|f|^{\frac{p(\cdot)}{p_-}})(y) \right)^{p_-} \chi_{I_+(x,h)}(y) dy + \int_I \chi_{I_+(x,h)}(y) dy \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.5.2 de yer alan (2.5.2) noktasal eşitsizliğinden

$$\int_{I_+(x,h)} (M_+ f(y))^{p(y)} dy \leq C \left(\int_I |f(y)|^{p(y)} M_- \chi_{I_+(x,h)}(y) dy + h \right)$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} D &= \int_{I_+(x,2h)} |f(y)|^{p(y)} M_- \chi_{I_+(x,h)}(y) dy \\ E &= \int_{(I_+(x,2h))^c} |f(y)|^{p(y)} M_- \chi_{I_+(x,h)}(y) dy \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\int_I |f(y)|^{p(y)} M_{-\chi_{I_+(x,h)}}(y) dy \leq D + E$$

şeklinde yazalım.

$$E \leq Ch^{\lambda(x)}$$

ve

$$\begin{aligned} D &= \int_0^x |f(y)|^{p(y)} M_{-\chi_{I_+(x,h)}}(y) dy + \int_{x+2h}^b |f(y)|^{p(y)} M_{-\chi_{I_+(x,h)}}(y) dy \\ &= \int_{x+2h}^b |f(y)|^{p(y)} M_{-\chi_{I_+(x,h)}}(y) dy \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{I_+(x,2^{j+1}h) \setminus I_+(x,2^j h)} |f(y)|^{p(y)} \frac{h}{y-x-h} dy \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2^{j+1}h)^{\lambda(x)}}{(2^{j+1}h)^{\lambda(x)}} \frac{1}{2^j-1} \int_{I_+(x,2^{j+1}h)} |f(y)|^{p(y)} dy \\ &\leq Ch^{\lambda(x)} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\int_{I_+(x,h)} (M_+ f(y))^{p(y)} dy \leq Ch^{\lambda(x)}$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar. ■

Sonuç 4.2.3. $I = (0, b)$, $\mathbb{R}^+$ da sınırlı bir aralık $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, $0 \leq \lambda^+ < 1$ ve $p \in P_-(I) \cap P_+(I)$ olsun. M maksimal operatörü $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ uzayında sınırlıdır.

İspat: $Mf(x) \leq M_-f(x) + M_+f(x)$ olduğundan Lemma 4.1.1, Teorem 4.2.1. ve Teorem 4.2.2 den istenen sonuç elde edilir. ■

4.3. Bir Taraflı Potansiyel Operatörlerin Morrey Uzayında Sınırlılığı

Teorem 4.3.1. $I = (0, b)$, $\mathbb{R}^+$ da sınırlı bir aralık, $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, $p \in P_-(I)$, $0 \leq \lambda^+ < 1$, $0 < \alpha^-$ ve $\sup_{x \in I} [\lambda(x) + \alpha(x)p(x)] < 1$ olmak üzere $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{1-\lambda(x)}$ iken $W_{\alpha(x)}$ Weyl operatörü $L_+^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ uzayından $L_+^{q(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ uzayına sınırlıdır.

İspat : $\|f\|_{L_+^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)} \leq 1$ olsun. Weyl operatörü

$$\begin{aligned} W_{\alpha(x)}(|f|)(x) &= \int_x^b |f(t)| (t-x)^{\alpha(x)-1} dt \\ &= \int_x^{x+h} |f(t)| (t-x)^{\alpha(x)-1} dt + \int_{x+h}^b |f(t)| (t-x)^{\alpha(x)-1} dt \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $0 < \alpha^-$ olduğundan

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_x^{x+h} |f(t)| (t-x)^{\alpha(x)-1} dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k}h < t-x \leq 2^{1-k}h} |f(t)| (t-x)^{\alpha(x)-1} dt \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-k}h)^{\alpha(x)-1} \int_{2^{-k}h < t-x \leq 2^{1-k}h} |f(t)| dt \\ &= Ch^{\alpha(x)} M_+ f(x) \end{aligned}$$

yazılabilir. İkinci integrali

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{x+h}^b |f(t)| (t-x)^{\alpha(x)-1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k h < t-x \leq 2^{1+k} h} |f(t)| (t-x)^{\alpha(x)-1} dt \end{aligned}$$

şeklinde yazalım. I sınırlı aralık ve $p \in P_+(I)$ olduğundan

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k h < t-x \leq 2^{1+k} h} (2^k h)^{\frac{-\lambda(x)}{p(t)}} (t-x)^{\alpha(x)-1+\frac{\lambda(x)}{p(t)}} |f(t)| dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (2^k h)^{\alpha(x)-1+\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \int_{2^k h < t-x \leq 2^{1+k} h} (2^k h)^{\frac{-\lambda(x)}{p(t)}} |f(t)| dt \end{aligned}$$

yazılabilir.

Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$I_2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} (2^k h)^{\alpha(x)-1+\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \left\| (2^k h)^{\frac{-\lambda(x)}{p(\cdot)}} f \chi_{[x+2^k h, x+2^{1+k} h]} \right\|_{p(\cdot)} \left\| \chi_{[x+2^k h, x+2^{1+k} h]} \right\|_{p'(\cdot)}$$

elde edilir. Lemma 4.1.3 den

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (2^k h)^{\alpha(x)-1+\frac{\lambda(x)}{p(x)}} (2^k h)^{\frac{1}{\left(p_{[x+2^k h, x+2^{1+k} h]}^-\right)'}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (2^k h)^{\alpha(x)-1+\frac{\lambda(x)}{p(x)}+\frac{1}{p'(x)}} \\ &= h^{\alpha(x)-\frac{1-\lambda(x)}{p(x)}} \sum_{k=0}^{\infty} (2^k)^{\alpha(x)-\frac{1-\lambda(x)}{p(x)}} \end{aligned}$$

ve $\sup_{x \in I} [\lambda(x) + \alpha(x)p(x)] < 1$ olduğundan

$$I_2 \leq C h^{\alpha(x)-\frac{1-\lambda(x)}{p(x)}}$$

elde edilir. Böylece

$$W_{\alpha(\cdot)}(|f|)(x) \leq C h^{\alpha(x)} M_+ f(x) + C h^{\alpha(x)-\frac{1-\lambda(x)}{p(x)}}$$

noktasal eşitsizliği elde edilir. Sağ tarafı minimize etmek için

$$h = (M_+ f(x))^{\frac{-p(x)}{1-\lambda(x)}}$$

olarak alınır

$$W_{\alpha(\cdot)}(|f|)(x) \leq c (M_+ f(x))^{\frac{p(x)}{q(x)}}$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.2.2 den

$$\begin{aligned} \int_{I_+(x,h)} |W_{\alpha(\cdot)}(f)(y)|^{q(y)} dy &\leq \int_{I_+(x,h)} M_+ f(x)^{p(y)} dy \\ &\leq c h^{\lambda(x)} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.3.2. $I = (0, b)$, $\mathbb{R}^+$ da sınırlı bir aralık olsun. $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, $p \in P_-(I)$, $0 < \alpha^-$ ve $\sup_{x \in I} [\lambda(x) + \alpha(x)p(x)] < 1$ olmak üzere $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{1-\lambda(x)}$ iken Riemann Liouville $R_{\alpha(x)}$ operatörü $L_-^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ dan $L_-^{q(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ ya sınırlıdır.

İspat : $\|f\|_{L_+^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)} \leq 1$ olsun. Riemann Liouville operatörünü

$$\begin{aligned} R_{\alpha(x)}(|f|)(x) &= \int_0^x |f(t)| (x-t)^{\alpha(x)-1} dt \\ &= \int_0^{x-h} |f(t)| (x-t)^{\alpha(x)-1} dt + \int_{x-h}^x |f(t)| (x-t)^{\alpha(x)-1} dt \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

şeklinde yazalım. $\alpha^- > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{x-h}^x |f(t)| (x-t)^{\alpha(x)-1} dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k}h < x-t \leq 2^{1-k}h} |f(t)| (x-t)^{\alpha(x)-1} dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (2^{-k}h)^{\alpha(x)-1} \int_{2^{-k}h < x-t \leq 2^{1-k}h} |f(t)| dt \\ &= Ch^{\alpha(x)} M_- f(x) \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$J_2 \leq Ch^{\alpha(x) - \frac{1-\lambda(x)}{p(x)}}$$

Böylece

$$R_{\alpha(x)}(|f|)(x) \leq Ch^{\alpha(x)} M_- f(x) + Ch^{\alpha(x) - \frac{1-\lambda(x)}{p(x)}}$$

noktasal eşitsizliği elde edilir. Sağ tarafı minimize etmek için

$$h = (M_- f(x))^{\frac{-p(x)}{1-\lambda(x)}}$$

olarak alınırsa

$$R_{\alpha(x)}(|f|)(x) \leq c (M_- f(x))^{\frac{p(x)}{q(x)}}$$

elde edilir.

Böylece Teorem 4.2.1 den

$$\begin{aligned} \int_{I_-(x,h)} |R_{\alpha(x)}(f)(y)|^{q(y)} dy &\leq \int_{I_-(x,h)} M_- f(x)^{p(y)} dy \\ &\leq ch^{\lambda(x)} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar. ■

Sonuç 4.3.3. $I = (0, b)$, $\mathbb{R}^+$ da sınırlı bir aralık, $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, $p \in P^-(I) \cap P^+(I)$, $0 \leq \lambda(x) \leq \lambda^+ < 1$, $0 < \alpha^-$ ve $\sup_{x \in I} [\lambda(x) + \alpha(x)p(x)] < 1$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{1-\lambda(x)}$ iken $I_{\alpha(x)}$ Riesz operatörü $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ dan $L^{q(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ ya sınırlıdır.

İspat: $I_{\alpha(x)}f(x) = R_{\alpha(x)}(f)(x) + W_{\alpha(x)}(f)(x)$ olduğundan dolayı Teorem 4.3.1 ve Teorem 4.3.2 den Riesz operatorünün $L^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ dan $L^{q(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ ya sınırlılığını elde ederiz. ■

Bir taraflı kesirli maksimal operatör $0 < \alpha^- \leq \alpha^+ < 1$ olmak üzere

$$M_{\alpha(x)}^+(f)(x) = \sup_{h>0} h^{\alpha(x)-1} \int_x^{x+h} |f(t)| dt$$

ve

$$M_{\alpha(x)}^-(f)(x) = \sup_{h>0} h^{\alpha(x)-1} \int_{x-h}^x |f(t)| dt$$

olarak tanımlanır.

Sonuç 4.3.4. $I = (0, b)$, $\mathbb{R}^+$ da sınırlı bir aralık, $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, $p \in P^+(I)$, $0 \leq \lambda(x) \leq \lambda^+ < 1$, $0 < \alpha^-$ ve $\sup_{x \in I} [\lambda(x) + \alpha(x)p(x)] < 1$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{1-\lambda(x)}$ iken $M_{\alpha(\cdot)}^+$ operatörü $L_+^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ den $L_+^{q(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ ya sınırlıdır.

İspat : $\forall x \in I$ için

$$\begin{aligned} M_{\alpha(x)}^+(f)(x) &= \sup_{h>0} h^{\alpha(x)-1} \int_x^{x+h} |f(t)| dt \\ &\leq \sup_{h>0} \int_x^{x+h} |f(t)| (t-x)^{\alpha(x)-1} dt \\ &= W_{\alpha(x)}(|f|)(x) \end{aligned}$$

olduğundan Teorem 4.3.1 den istenen sonuç elde edilir. ■

Sonuç 4.3.5. $I = (0, b)$, $\mathbb{R}^+$ da sınırlı bir aralık, $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, $p \in P^-(I)$, $0 \leq \lambda(x) \leq \lambda^+ < 1$, $0 < \alpha^-$ ve $\sup_{x \in I} [\lambda(x) + \alpha(x)p(x)] < 1$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{1-\lambda(x)}$ iken $M_{\alpha(x)}^-$ operatörü $L_-^{p(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ den $L_-^{q(\cdot), \lambda(\cdot)}(I)$ ya sınırlıdır.

İspat : $\forall x \in I$ için

$$\begin{aligned} M_{\alpha(x)}^-(f)(x) &= \sup_{h>0} h^{\alpha(x)-1} \int_{x-h}^x |f(t)| dt \\ &\leq \sup_{h>0} \int_{x-h}^x |f(t)| (x-t)^{\alpha(x)-1} dt \\ &= R_{\alpha(x)}(|f|)(x) \end{aligned}$$

olduğundan Teorem 4.3.2 den istenen sonuç elde edilir. ■

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında bir taraflı değişken üstlü Morrey uzayları tanıtılmış ve bir taraflı Maksimal operatörler ile bir taraflı potansiyel operatörler olan Riemann Liouville ve Weyl operatörlerin sınırlılığı araştırılmıştır. Bir taraflı maksimal operatörlerin sınırlığından yararlanarak Maksimal ve Riesz potansiyel operatörlerin sınırlılığı ifade edilmiştir.

Elde edilen sonuçlarda I aralığında $\lambda \equiv 0$ alınrsa değişken üstlü Lebesgue uzaylarında bir taraflı operatörlerin sınırlılığı elde edilir.

Daha ileri olarak p fonksiyonuna sonsuzda logaritmik süreklilik koşulu bırakılarak elde edilen sonuçlar $\mathbb{R}^+$ ya taşınabilir.

6. KAYNAKLAR

- Adams, R. A., Hedberg, L. I. 1996. Function spaces and Potential Theory. Springer-Verlag, Berlin.
- Adams, R. A. 2003. Fournier J. J. Sobolev Space. Academic Pres, New York.
- Almeida, A., Hasanov, J., Samko, S. 2008. Maximal and Potential operators in variable exponent Morrey Spaces. Georgian Mathematical Journal, 15 (2): 195-208.
- Andersen, K. and Sawyer, E. 1988. Weighted norm inequalities for the Riemann–Liouville and Weyl fractional integral operators. Trans. Amer.Math. Soc., 308 (2): 547–558
- Capone, C., Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A. 2007. The fractional maximal operator on variable L^p spaces. Rev. Mat. Iberoamericana, 23 (3): 743-770.
- Chiarenza, F., Frasca, M., 1987. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function. Rend. Math., 7 (3-4): 273-279.
- Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A., Neugebauer, C. J. 2003. The maximal function on variable L^p spaces. Ann. Acad. Sci Fenn. Math, 28 (1): 223-238.
- De Rosa, L. 2006. Two weight norm inequalities for fractional one sided maximal and integral operators. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 47 (1): 35-46.
- Diening, L. 2004. Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$. Math. Inequal. Appl, 7 (2): 245-253.
- Diening, L. 2004. Riesz potential and Sobolev imbeddings of generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$. Math. Nachr., 263 (1): 31-43.
- Diening, L. 2005. Maximal function on Orlicz-Musielak spaces and generalized Lebesgue spaces. Bull. Sci. Math., 129 (8): 657-700.
- Edmunds, D. E., Kokilashvili, V., Meskhi, A. 2008. One sided operators in variable exponent Lebesgue spaces. Math. Nachr., 281 (11):1525-1548.
- Fan, X. L., Zhao, D. 2001. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl, 424-446.
- Fan, X. L. 2010. Variable exponent Morrey and Companato spaces. Nonlinear. Anal., 72 (11): 4148-4161.

- Guliyev, V. S. 2009. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in generalized Morrey spaces. *J. Inequal. Appl.*, 48 (1): 1-20.
- Kokilashvili, V., Samko, S. 2003. Singular integrals in Weighted Lebesgue spaces with variable exponent. *Georgian Math. J.*, 10 (1): 145-156.
- Kokilashvili, V., Samko, S. 2004. Maximal and fractional operators in Weighted $L^{p(x)}$ spaces. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 20 (2): 493-515.
- Kokilashvili, V., Meskhi, A. 2008. Maximal and singular integrals in Morrey spaces with variable exponent. *Armenian J. Math.*, 1 (1): 18-28.
- Kováčik, O., Rákosník, J. 1991. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. *Czechoslovak Math. J.*, 41 (4): 592-618.
- Martin Reyes F.J. 1993. New proofs of weighted inequalities for the one-sided Hardy-Littlewood maximal functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 117 (3) 691-698.
- Nekvinda A. 2010. A note on one-sided maximal operator in $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$. *Mathematical Inequalities and Applications* 13, no.4, 887-897.
- Ombrosi S. and De Rosa L. 2003. Boundedness of the Weyl fractional integral on one-sided weighted Lebesgue and Lipschitz spaces. *Publicacions Matematiques*, vol. 47, no. 1, pp. 71-102.
- Orlicz, W. 1931. Über konjugierte Exponentenfolgen. *Studia Math.*, 3 (1) :200-212.
- Peetre, J. 1966. On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 72: 295-304.
- Peetre, J. 1968. On the Theory of Lebesgue Spaces. *Journal of Functional Analysis*, 4: 71-87.
- Samko, S. 1998. Convolution type operators in $L^{p(x)}$. *Integr. Transform. Spec. Funct.*, 7(1):123-144.
- Samko, S. 1999. Convolution and potential type operators in $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$. *Integr. Transform. Spec. Funct.*, 7(3): 261-284.
- Shi, S. and Fu, Z. 2013. Estimates of Some Operators on One-Sided Weighted Morrey Spaces. *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2013, Article ID 829218, 9 pages.
- Stein, E.M. 1970. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, No:30, Princeton.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ayşegül ÇELİK ALABALIK

Doğum Yeri ve Yılı : DİYARBAKIR, 10.10.1980

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lisans : 1999-2004, Dicle Üniversitesi, Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi,
Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği

Yüksek Lisans : 2012-Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

Adres : Miss İstanbul 1 Sitesi C Blok No:24 Kayapınar/DİYARBAKIR