

**GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DEĞİŞMELİ CEBİRDE
BAZI MODÜLLERİN
HOMOLOJİK BOYUTLARI**

**MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MİKAİL BAL
OCAK 2011**

**Değişmeli Cebirde Bazı Modüllerin
Homolojik Boyutları**

**Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
M.Sc. Tezi**

**Danışman
Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN**

**Mikail BAL
OCAK 2011**

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Değişmeli Cebirde Bazı Modüllerin Homolojik Boyutları
Öğrencinin, Adı Soyadı: Mikail BAL
Tez Savunma Tarihi: 27/01/2011

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı


Prof. Dr. Ramazan KOÇ
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.


Doç. Dr. Ali İhsan HASÇELİK
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.


Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

İmzası

Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN


.....

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN


.....

Yrd. Doç. Dr. Ali BOZKURT


.....

Anneme ve Babama. . .

ÖZET

DEĞİŞMELİ CEBİRDE BAZI MODÜLLERİN HOMOLOJİK BOYUTLARI

BAL, Mikail

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN

Ocak 2011, 46 sayfa

Bu tez çalışması, modüllerin homolojik boyutları ile ilgilidir. R değişmeli bir halka ve M bir R -modül olsun. M R -modülünün projektif boyutu ile R halkasının yapısı arasındaki ilişkiler incelenmiş. Bulunan sonuçlar örneklerle birlikte tezde verilmiştir.

Tezin giriş bölümünde halkalar ve modül teorisi arasındaki ilişkiden bahsedilmiştir. Modüllerin projektif boyutlarının tarihi gelişimi verilmiştir.

İkinci bölümünde halkalar ve modüllerle ilgili temel tanım, teorem ve sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde modüllerin projektif boyutlarının temel tanım, teorem ve sonuçlarından bahsedilerek bir takım örnekler verilmiştir.

Son olarak da modüllerin projektif boyutları ile halkaların yapısı arasındaki ilişki incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Modül, Noetherian Halka, Projektif Boyut, Regüler Halka Projektif Modül

ABSTRACT

HOMOLOGICAL DIMENSIONS OF SOME MODULES IN COMMUTATIVE ALGEBRA

BAL, Mikail

M.Sc. in Department of Mathematics

Supervisor: Asst Prof. Dr. Necati OLGUN

January 2011, 46 pages

This thesis is related with homological dimensions of modules. Let R be a commutative ring and M be an R -module. The relationship between projective dimensions of R -module M and the ring structure are examined. Founded results are given with examples.

In the introduction of the thesis, the relationship between the rings and modules theory are mentioned. The historical development of the projective dimensions of the modules are given.

In the second section, basic definitions, theorems and results related to ring and module theory are given.

In the third section, the basic definitions, theorems and results of the dimensions of projective modules are mentioned and the related examples are given.

Finally, the relationship between the structure of rings and the projective dimensions of modules are examined.

Key Words: Module, Noetherian Ring, Projective Dimension, Regular Ring, Projective Module.

TEŞEKKÜRLER

Bütün çalışmam boyunca bana rehber olan çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Necati OLGUN'a ve her konuda olduğu gibi bu tezi hazırlamam konusunda da benden desteklerini esirgemeyen anneme, babama, ağabeylerime ve kardeşlerime sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZ.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜRLER.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER LİSTESİ.....	v
 1.BÖLÜM : GİRİŞ.....	 1
 2.BÖLÜM : TEMEL BİLGİLER.....	 4
2.1. Halkalar.....	4
2.2. Modüller.....	5
2.3. Homomorfizma ve İzomorfizma.....	10
2.4. Diziler.....	12
 3.BÖLÜM : HOMOLOJİK BOYUTLAR.....	 20
 4. BÖLÜM : LOKAL HALKALARIN GLOBAL BOYUTLARI.....	 34
 5. BÖLÜM : SONUÇLAR.....	 43
 KAYNAKLAR.....	 45

SİMGELER LİSTESİ

Simge	Açıklama
$\oplus$	Direkt Toplam
$\otimes$	Direkt Çarpım
$\sim$	Denklik Bağlantısı
I_R	R'nin birim elemanı
$P \triangleleft R$	P Kümesi R'nin İdeali
$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$	$(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ailesinin direkt toplamı
$\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$	$(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ailesinin direkt çarpımı
(X)	X Kümesi tarafından üretilen ideal
M/G	M'nin Bölüm Modülü
Çek f	f'nin çekirdeği
Rank(F)	F'nin Rankı
DimR	Kurul boyutu
Im f	f'nin görüntüsü
Ann(M)	M'nin sıfırlayanı
(0:m)	m'nin sıfırlayanı
Dept(R)	Maksimal M-Regüler dizisinin uzunluğu
Max(R)	R'nin Maksimal idealleri
Sup	Supremum

Simge	Açıklama
Hom	Homomorfizma
Max	Maksimum
Min	Minimum
$\cong$	<i>İzomorfizma</i>
<i>Tor</i>	<i>Torsion</i>
<i>Ext</i>	<i>Extension</i>
$V(R)$	<i>m maksimal idealinin minimal üreteç sayısı</i>

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bir R halkasının yapısını anlamak için en etkili yöntemlerden birisi R üzerinde çeşitli yöntemlerle tanımlanan modül yapısını çalışmaktır. Bu yüzden halka teorisi içerisinde modül teorisinin en önemli bölüm olduğu görülür.

Klasik olarak modüller temsil (representation) teorisinin çalışmasında kullanılır. 1950'li yıllarda homolojik yöntemlerin tanımlanmasıyla birlikte modül teorisinin kullanım alanı daha da genişledi.

Bugünlerde modül teorisi cebir çalışmalarında kendi başına çalışılabilen bir alan oldu. Bunun sonucu olarak sadece modül teorisi ile ilgili yazılmış birkaç kitap bulunmaktadır.

Projektif modülleri anlattıktan sonra genel olarak modüllerin homolojik boyutlarını anlatmak doğaldır. Bundan dolayı bu bölümde modüllerin projektif (homolojik) boyut teorilerinden bahsedilecektir. Bu teoriler halkaların boyutları olarak tanımlanan bazı yeni sayısal değişmezlerin tanımlanmasını sağlayacaktır.

Modüllerin homolojik boyutları kullanılarak bir halkanın global boyutu tanımlanır. Bu homolojik değişmezler hem değişmeli hem de değişmeli olmayan halkaları incelemek için yeni çözümler sunmaktadır. Örneğin Serre'nin meşhur teoreminde; değişmeli Noetherian lokal bir R halkası regülerdir ancak ve ancak R 'nin global boyutu sonludur (Global boyutu Krull boyutuna eşittir) sonucu bulunmuştur. Bu sonuç değişmeli olmayan halkalara da uyarlanmıştır. Bununla birlikte global boyutu sonlu olmayan halkalar da vardır. Örneğin k bir cisim olmak üzere $k[x,y]/(y^2-x^3)$ halkasının global boyutu sonsuzdur.

Modüllerin homolojik boyutları ile ilgili bilgiler için öncelikle temel tanımlar, bazı önemli teoremler ve sonuçlar verilmiştir. Bu konu ile ilgili uzun konu dışı açıklamalardan kaçınmak için homolojik boyutların tanımını ‘Ext’ veya ‘Tor’ kullanmadan, fakat projektif modüller kullanılarak bir tanım verilmiştir. Bu tanım için Kaplansky’nin çalışmalarından yararlanılmıştır.

Schaunel teoremi, Kaplansky 1958 sonbaharında Chicago üniversitesinde homolojik halka teorisi üzerinde bir ders anlattığında Schaunel tarafından tasarlandı. Bu buluşun koşulları Kaplansky tarafından şu şekilde anlatılmaktadır: ‘Dersin başında bir modülün projektif çözünürlüğünü şekillendirdim ve şunu söyledim. Eğer bir çözünürlükte çekirdek projektif ise hepsinde çekirdek projektiftir. Şunu ilave ettim. İfadenin çok basit ve aşık olmasına rağmen bizim ispatlamamız biraz zaman alabilirdi. Daha sonra Steve Schaunel, kendi adıyla bilinen teoremi tasarlamış olduğunu bana ve sınıfa söyledi ve bunu bizim tamamen ispatlamamız iki, üç gün kadar sürer, dedi.’

Kaplansky’nin fikirlerini kullanarak sonsuz projektif boyutların modüllerinin bazı örnekleri kolayca yapılabilir.

R regüler lokal bir halka ve $p \triangleleft R$ asal ideal olsun. O zaman R_p de regüler lokal bir halkadır sonucu Krull’ın 1930’lu yıllarda çalıştığı bir problem. Yıllarca açık problem olarak kalan bu sonuç homolojik metotların gelişmesiyle birlikte çözüldü. Bilinenlere göre hala bu problem sadece klasik değişmeli cebir teknikleriyle çözülemiyor.

Değişmeli Noetherian lokal halkalar üzerindeki modüllerin homolojik özellikleri 1950’li yılların sonunda Auslander, Buchsbaum ve Serre tarafından geliştirilmiştir. Detayları girmeden yazılan teoremlerden sonra en güzel sonuçlardan ikisi hakkında bilgi verelim ilki herhangi bir regüler lokal halka tek türlü çarpanlara ayrılındır. İkincisi ise Auslander – Buchsbaum formülüdür.

(R, m) noetherian lokal halka üzerinde $m \neq 0$ sonlu üretilmiş ve projektif boyutu sonlu ise

$$pd(m) + depth(m) = depth(R) \leq V(R)$$

formülü vardır. Burada $depth(M)$ m maksimal idealinde bir maksimal M – Regüler dizisinin uzunluğu olarak tanımlanır.

Ayrıca $depth(M)$, $Ext_R^d(k, M) \neq 0$ olacak şekilde en küçük d tam sayısıdır. R regüler lokal halka ise sonlu üretilmiş $m \neq 0$ R – modülü için

$$depth(R) = V(R) = \dim R$$

eşitliği vardır.

BÖLÜM 2

TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde homolojik boyutlara temel oluşturacak şekilde halka, ideal, modül, homomorfizma, izomorfizma ve dizilerin tanımları ile bazı teoremler verilmiştir. Bu bölümdeki çalışmalar [1, 10, 11, 13, 15] kaynaklarından derlenmiştir.

2.1.Halkalar

Tanım 2.1.1 $R \neq \emptyset$ üzerinde tanımlı ikili işlem olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $(R, +, \cdot)$ 'ya bir halka denir.

- i. $(R, +)$ bir değişmeli gruptur.
- ii. $\forall a, b$ için $ab \in R$ 'dir.
- iii. $\forall a, b, c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$ 'dir.
- iv. $\forall a, b, c \in R$ için $(a + b)c = ac + bc$
 $a(b + c) = ab + ac$ 'dir.

Eğer $\forall ab \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R 'ye değişmeli halka denir.

$\forall a \in R$ için $1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$ oluyorsa R 'ye birim elemanlı halka denir.

Tanım 2.1.2 R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun.

- i. $\forall x, y \in I$ için $x - y \in I$
- ii. $\forall r \in R$ ve $x \in I$ için $rx \in I$ ve $rx \in I$ şartlarını sağlayan I kümesine R 'nin bir ideali denir ve $I \triangleleft R$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3 R bir halka ve $X \subseteq R$ için;

$$\{I_i : \forall i \in I, I_i \triangleleft R \text{ ve } X \subseteq I_i\}$$

idealler ailesi olsun. O zaman $\bigcap_{i \in I} I_i$ 'ye X kümesi tarafından üretilen ideal denir ve

(X) ile gösterilir. X 'in elemanlarına (X) idealinin üreteçleri denir.

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ise $(X) = (x_1, \dots, x_n)$ ile gösterilir ve (X) idealine sonlu üretilmiştir denir.

Tek bir eleman tarafından üretilen ideale temel ideal denir.

Tanım 2.1.4 R bir halka ve $P \neq R$ olacak şekilde $P \triangleleft R$ olsun.

$\forall a, b \in R$ için; $a.b \in P \Rightarrow a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P 'ye bir asal ideal denir.

Tanım 2.1.5 R bir halka ve $M \neq R$ olacak şekilde $M \triangleleft R$ olsun. $M \subseteq N \subseteq R$ olacak şekilde her $N \triangleleft R$ ideali için $M = N$ veya $N = R$ oluyorsa M 'ye R 'nin bir maksimal ideali denir.

2.2. Modüller

Tanım 2.2.1 R değişmeli ve birimli bir halka, M değişmeli bir grup olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan M 'ye R -modül denir.

$$\cdot : R \times M \rightarrow M$$

$$(r, m) \rightarrow r.m$$

$$\text{i. } \forall r \in R, m, m' \in M \text{ için } r(m + m') = rm + rm'$$

$$\text{ii. } \forall r, r' \in R, m \in M \text{ için } (r + r')m = rm + r'm$$

$$\text{iii. } \forall r, r' \in R, m \in M \text{ için } (r.r')m = r(r'm)$$

$$\text{iv. } \forall m \in M \text{ için } 1_R m = m$$

Örnek 2.2.2 Bir K cismi üzerinde modül, K üzerinde bir vektör uzayıdır.

Örnek 2.2.3

1- Her değişmeli halka, tamsayılar halkası üzerinde bir $\mathbb{Z}$ -modül olarak düşünülebilir. G değişmeli halka olsun.

$$\mu : \mathbb{Z} \times G \rightarrow G$$

$$(n, g) \rightarrow \mu(n, g) = ng = g + g + \dots + g, \quad g \in G, \quad n \in \mathbb{Z}$$

modül yapısı vardır.

2- R değişmeli halka, $I \triangleleft R$ olsun;

- i. R 'nin kendisi R -modüldür.
- ii. I, R modüldür.
- iii. R/I bölüm halkası bir R -modüldür. (R/I bir doğal değişmeli grup yapısına sahiptir.)

$$r \in R \text{ ve } R/I \text{ içinde } s, s' \in R \quad s + I = s' + I$$

$$\Rightarrow s - s' \in I \Rightarrow rs - rs' = r(s - s') \in I \Rightarrow rs + I = rs' + I$$

$$R \times R/I \rightarrow R/I$$

$$(r, s + I) \rightarrow rs + I$$

R -modül yapısı vardır.

3- R değişmeli halka ve $f : R \rightarrow S$ halka homomorfizması yapısı ile S bir R cebir olsun. O zaman S bir R -modüldür ve

$$R \times S \rightarrow S$$

$$(r, s) \rightarrow f(r)s$$

yapısı kurulur.

4- R, S değışmeli halka ve $f : R \rightarrow S$ halka homomorfizması olsun. Eğer G, S -modül ise G aynı zamanda R -modüldür.

$$\begin{aligned} R \times G &\rightarrow G \\ (r, g) &\rightarrow f(r)g \end{aligned}$$

Tanım 2.2.4 R bir değışmeli halka M R -modül ve $G \subseteq M$ olsun. G R -modül ise G 'ye M 'nin alt modülü denir.

Önerme 2.2.5 R değışmeli halka ve G, M R -modülünün bir altkümesi olsun. O zaman G, M 'nin alt modülüdür. $\Leftrightarrow \forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall r \in R$ için $g_1 + g_2 \in G$ ve $rg \in G$ 'dir.

Önerme 2.2.6 M 'nin alt modüllerinin boş olmayan herhangi bir ailesinin kesişimi yine bir alt modüldür.

R değışmeli halka, M R -modül, $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ M 'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ tarafından üretilen M 'nin alt modüllerinin toplamını $\sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ ile göstereceğiz. $\Lambda = \emptyset$ ise $\sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda = 0$ 'dır.

i. $\sum_{i=1}^n G_i = \left\{ \sum_{i=1}^n g_i : g_i \in G_i \text{ için } i = 1, \dots, n \right\}$

ii. $j_1, j_2, \dots, j_n \in M$ olsun. $j_1, j_2, \dots, j_n$ tarafından üretilen M 'nin alt modülü $Rj_1 + Rj_2 + \dots + Rj_n$ 'dır.

Tanım 2.2.7 R değışmeli halka, M R -modül, $I, J \triangleleft R$ ve IM, M 'nin alt modülü olsun. $IM, \{rg : r \in I, g \in M\}$ kümesi tarafından üretilir. Aşağıdaki özelliklere sahiptir;

- i. $IM = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i g_i : r_i \in I, g_i \in M, n \in \mathbb{N} \right\}$
 - ii. $I(JM) = (IJ)M$
 - iii. $a \in R$ için $(Ra)M$ 'nin yerine aM yazılır.
- $$(Ra)M = \{am : m \in M\}$$

Tanım 2.2.8 R değişmeli halka, M R -modül, G M 'nin bir alt modülü ve $J \subseteq M$ olacak şekilde $J \neq \emptyset$ olsun.

$$(G : J) = (G :_R J) = \{ r \in R : \forall j \in J \text{ için } rj \in G \}$$

ideal olarak tanımlanır.

Eğer N, J tarafından üretilen M 'nin alt modülü ise $(G : J) = (G : N)$ 'dir. $m \in M$ için $(G : \{m\})$ 'nin yerine $(G : m)$ yazılır.

Eğer $G = 0$ ise $(0 : J) = \{ r \in R : \forall j \in J \text{ için } rj = 0 \}$ kümesine J 'nin sıfırlayanı denir ve $Ann_R(J)$ ya da $Ann(J)$ ile gösterilir. Aynı zamanda $m \in M$ için m 'nin sıfırlayanı $(0 : m)$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.9 $I \triangleleft R$ değişmeli halka olsun. $I = Ann_R(R/I) = (0 :_R 1 + I)$

Önerme 2.2.10 R değişmeli halka, M R – modül ve N, N', G M 'nin alt modülü ve $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ M 'nin alt modüllerinin iki ailesi olsun.

- i. $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda : N) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (G_\lambda : N)$
- ii. $(G : \sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (G : N_\lambda)$ (veya $Ann(N + N') = Ann(N) \cap Ann(N')$)

Tanım 2.2.11 R değişmeli halka, M R - modül ve $I, I \subset Ann(M)$ olacak şekilde R 'nin ideali olsun. M üzerinde R/I modül yapısı kuralım.

$r, r' \in R$ $r + I = r' + I$ ve $m \in M$ olsun. O zaman $r - r' \in I \subseteq \text{Ann}(M)$ ve böylece $(r - r')m = 0$ ve $rm = r'm$ olur.

Böylece $\begin{matrix} R/I \times M \rightarrow M \\ (r + I, m) \rightarrow rm \end{matrix}$ bir dönüşüm tanımlanabilir.

M üzerinde R -modül ve R/I modül yapıları aşağıdaki yolla yapılır.

Her $r \in R$, $m \in M$ için $(r + I)m = rm$

$G \subseteq M$ 'nin bir alt R -modülüdür $\Leftrightarrow G \subseteq M$ 'nin bir alt R/I modülüdür.

Tanım 2.2.12 R değişmeli halka, M R -modül, $G \subseteq M$ 'nin alt modülü ve $I \triangleleft R$ olsun. O zaman $(G :_m I) = \{m \in M : \forall r \in I \text{ için } rm \in G\}$ M 'nin alt modülü ve $G \subseteq (G :_m I)$ 'dir.

Eğer $G = 0 \Rightarrow (0 :_m I) = \{m \in M : \forall r \in I \text{ için } rm = 0\}$ 'dır.

Önerme 2.2.13 R değişmeli halka, M R -modül, $G \subseteq M$ 'nin alt modülü $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ M 'nin alt modüllerinin bir ailesi, $K, I, J \triangleleft R$, $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ R 'nin ideallerinin bir ailesi olsun.

$$i) ((G :_m J) :_m K) = (G :_m JK) = ((G :_m K) :_m J)$$

$$ii) \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda :_m I \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (G_\lambda :_m I)$$

$$ii) (G :_m \sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (G :_m I_\lambda)$$

Tanım 2.2.14 R değişmeli halka, M R -modül ve $G \subseteq M$ 'nin bir alt modülü olsun. (G, M) toplamsal değişmeli grubunun bir alt grubudur.) $M/G = \{m + G : m \in M\}$ bölüm grubunu oluşturabiliriz.

$$m + G = m' + G \Leftrightarrow m - m' \in G$$

$$\forall m, x \in G \text{ için } (m + G) + (x + G) = (m + x) + G$$

Böylece
$$\begin{aligned} R \times M/G &\rightarrow M/G \\ (r, m+G) &\rightarrow rm+G \end{aligned}$$

M/G değişmeli grubu bir R -modüldür. Bu M , R -modüle M 'nin bölüm modülü denir ve M/G ile gösterilir.

Önerme 2.2.15 R değişmeli halka, M R -modül ve $I \triangleleft R$ olsun. O zaman $I \subseteq \text{Ann}_R(M/IM)$ ve M/IM , her $r \in R$ ve $m \in M$ için

$$(r+I)(m+IM) = rm+IM$$

ile R/I yapısına sahiptir.

Önerme 2.2.16 R değişmeli halka, M R -modül ve G , M 'nin bir alt modülü

- i.* G' , M 'nin alt modülü yani $G' \supseteq G$ ise G'/G , M/G 'nin bir alt modülüdür.
- ii.* M/G 'nin herhangi bir alt modülü $G'' \supset G$ gibi M 'nin G'' bir alt modülü için G''/G şeklindedir.
- iii.* G_1, G_2 G 'yi içeren M 'nin alt modülleri

$$G_1 \subseteq G_2 \Leftrightarrow G_1/G \subseteq G_2/G$$

Önerme 2.2.17 R değişmeli halka, M R -modül, G_1, G_2 M 'nin alt modülleri olsun. O zaman

$$\text{Ann}((G_1 + G_2)/G_1) = (G_1 : G_2) \text{ 'dır.}$$

2.3. Homomorfizma ve İzomorfizma

Tanım 2.3.1 M, N R değişmeli halkası üzerinde modüller olsun. $f: M \rightarrow N$ dönüşümü

$$\forall m, m' \in M \text{ için } f(m + m') = f(m) + f(m')$$

$$\forall m \in M \text{ ve } r \in R \text{ için } f(rm) = rf(m)$$

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme R -modül homomorfizması denir. $Z : M \rightarrow N$ dönüşümü her $m \in M$ için $Z(m) = 0_N$ tanımlanarak bir R -modül homomorfizmasıdır ve buna sıfır homomorfizma denir ve 0 ile gösterilir.

Tanım 2.3.2 $f : M \rightarrow N$ birebir ve örten bir modül homomorfizması ise bu homomorfizmaya bir izomorfizma denir ve $M \cong N$ ile gösterilir.

Önerme 2.3.3 R değişmeli halka M, N R -modül ve $f : M \rightarrow N$ bir izomorfizma olsun. O zaman $f^{-1} : N \rightarrow M$ de aynı zamanda bir izomorfizmadır ve $M \cong N$ ile gösterilir.

$M \cong N$ ise M 'nin kendi üzerine i_{d_M} özdeş dönüşümdür.

Önerme 2.3.4 $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow G$ R -modül homomorfizmaları ve $g \circ f$ de R -modül homomorfizmasıdır.

$f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow G$ R -modül izomorfizması ise $g \circ f$ de R -modül izomorfizmasıdır.

Tanım 2.3.5 R değişmeli bir halka M R -modül ve G , M 'nin alt modülü olsun. Her $m \in M$ için $m \rightarrow f(m) = m + G$ olarak tanımlanan $f : M \rightarrow M/G$ dönüşümüne doğal (kanonik) homomorfizma denir ve f örtendir.

Tanım 2.3.6 R değişmeli halka, M R -modül olsun.

i) N R -modül ve $f : M \rightarrow N$ R -modül homomorfizması ise f 'nin çekirdeği $\text{Çek}f = \{m \in M : f(m) = 0_N\}$ ile gösterilir. $\text{Çek}f$, M 'nin bir alt modülüdür. $\text{Çek}f = 0 \Leftrightarrow f$ monomorfizmadır. f 'nin görüntüsü $\text{Im } f$ ile gösterilir ve $f(M) = \{f(m) : m \in M\}$ kümesi N 'nin alt kümesidir. $\text{Im } f$ N 'nin alt modülüdür.

ii) $f : M \rightarrow M/G$, $\text{Çekf} = G$ ve $M/0 \cong M$ 'dır.

iii) $H \subseteq M$ alt kümesi M 'nin bir alt modülüdür. $\Leftrightarrow \text{Çekf} = H$ olacak şekilde $f : M \rightarrow M'$ homomorfizması vardır.

($\Leftrightarrow \exists f : M \rightarrow M'$ homomorfizma $\text{Çekf} = H$ dır.)

Teorem 2.3.7 R değişmeli halka M, N R -modül ve $f : M \rightarrow N$ R -modül homomorfizması olsun. O zaman $f \quad \forall \quad m \in M$ için $\bar{f}(m + \text{Çekf}) = f(m)$ olacak şekilde $\bar{f} : M/\text{Çekf} \rightarrow \text{Im } f$ izomorfizması vardır. ($M/\text{Çekf} \cong \text{Im } f$)

Teorem 2.3.8 R değişmeli halka, M R -modül, G, G' M 'nin $G' \supseteq G$ olacak şekilde alt modülleri olsun. G'/G , M/G R -modülünün bir alt modülüdür. O zaman burada $\forall \quad m \in M$ için $\eta((m + G) + G'/G) = m + G'$ tanımıyla

$$\eta : (M/G)/(G'/G) \rightarrow (M/G')$$

izomorfizması vardır.

Teorem 2.3.9 R değişmeli halka, M R -modül, G, H M 'nin alt modülleri olsun. O zaman burada $\forall \quad g \in G$ için $\xi(g + G \cap H) = g + H$ tanımıyla

$$\xi : G/(G \cap H) \rightarrow (G + H)/H$$

izomorfizması vardır.

2.4. Diziler

Tanım 2.4.1 R değişmeli halka, G, M, N R -modüller ve $g : G \rightarrow M$ ve $f : M \rightarrow N$ R -modül homomorfizmaları olsun.

$$G \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$$

dizisinde $\text{Im } g = \text{Çek}f$ ise bu diziye M R -modüllerin tam dizisi denir.

Genel olarak

$$.... \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M_n \xrightarrow{d^n} M_{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} M_{n+2} \longrightarrow$$

dizisi her M_n de tam ise bu diziye R -modüllerin tam dizisi denir. Örneğin

$\text{Im } d_n = \text{Çek}d_{n+1}$ iken

$$M_{n-1} \xrightarrow{d_n} M_n \xrightarrow{d_{n+1}} M_{n+1}$$

dizisi tamdır.

Önerme 2.4.2

i. $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ tamdır. $\Leftrightarrow f, 1-1$ ise

ii. $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ tamdır. $\Leftrightarrow f$ örtendir.

iii. $N \subseteq M$ alt modül ise $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$ dizisi her zaman tamdır.

Genel olarak $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ dizisi için f birebir, g , örten ve $\text{Im } f = \text{Çek}g$ ise bu diziye kısa tam dizi denir.

Tanım 2.4.3 R değişmeli halka $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ R -modüllerinin boş olmayan bir ailesi

olsun. $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ kartezyen çarpım kümesi her $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (g'_\mu)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda, r \in R$ için

$$(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} + (g'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = (g_\lambda + g'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

$$r(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = (rg_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

ile bir R -modüldür. Bu R -modüle $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ailesinin çarpımı denir.

$\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ 'nin alt kümesi (her $\lambda \in \Lambda$ için $g_\lambda \in M_\lambda$ ile) $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ailesini içerir ve g_λ elemanlarının sonlu sayıdaki bileşenleri sıfırdan farklı olma özelliğiyle $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ 'nin bir R -alt modülüdür ve $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ ile gösterilir. Buna $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ailesinin direkt toplamıdır denir.

$\Lambda' = 0$ ise $\bigoplus_{\lambda' \in \Lambda'} M_{\lambda'}$ ve $\prod_{\lambda' \in \Lambda'} M_{\lambda'}$ her ikisi de sıfır R -modüldür.

Λ sonlu ise $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ elde ederiz.

Tanım 2.4.4 M , R değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ M 'nin alt modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun. $M = \sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ ise her bir $m \in M$ elemanı

$m = \sum_{i=1}^n g_{\lambda_i}$ formunda ifade edilebilir ki burada $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, her $i = 1, 2, \dots, n$ için $g_{\lambda_i} \in G_{\lambda_i}$ ve Λ 'nın sonlu bir alt kümesidir.

M , $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ alt modüllerinin ailesinin direkt toplamıdır ve her bir $m \in M$ elemanı için g_λ 'nın sonlu sayıda elemanı sıfırdan farklı ve her $\lambda \in \Lambda$ için $g_{\lambda_i} \in G_{\lambda_i}$ $m = \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda$ formunda tek türlü yazılabilir ve bu $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ ile gösterilir.

Önerme 2.4.5 M , $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ alt modül ailesinin direkt toplamıdır.

$\Leftrightarrow$ i) $\sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda = M$ ii) her bir $v \in \Lambda$ için $G_v \cap \bigcap_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq v}} G_\lambda = 0$ elde edilir.

Önerme 2.4.6 R değişmeli halka $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ R - modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun. Herbir $\mu \in \Lambda$ için $M'_\mu = \left\{ (g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda : g_\lambda = 0 \text{ her } \lambda \in \Lambda \text{ ile } \lambda \neq \mu \text{ için} \right\}$ ile verilen $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ 'nin alt kümesi ile gösterilir. M'_μ , $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ 'nın bir alt modülüdür.

Tanım 2.4.7 $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ R değişmeli halkası üzerinde modüllerin boş olmayan bir ailesi ve $\mu \in \Lambda$ olsun.

$M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ kümesinden M_μ üzerine $P_\mu : M \rightarrow M_\mu$ dönüşümü her $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in M$ için $P_\mu((g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = g_\mu$ tanımıyla kanonik izdüşüm dönüşümüdür.

M_μ 'den $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ içine $q_\mu : M_\mu \rightarrow M$ dönüşümü her $\lambda \in \Lambda$ için $g_\lambda = 0$ ile $\lambda \neq \mu$ ve $\forall z \in M_\mu$ $q_\mu(z) = (g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tanımıyla kanonik örten dönüşümdür.

Her iki P_μ ve q_μ R - modül homomorfizmasıdır. P_μ bir epimorfizma ve q_μ bir monomorfizmadır.

i. $p_\mu o q_\mu = Id_{\mu_\lambda}$

ii. Her $\nu \in \Lambda$ ile $\nu \neq \mu$ için $p_\mu o q_\nu = 0$

iii. Λ sonlu iken $\sum_{\lambda \in \Lambda} p_\mu o q_\mu = Id_\mu$ 'dır.

Önerme 2.4.8 $M, M_1, \dots, M_n$ (ki burada $n \in \mathbb{N}$ ile $n \geq 2$) R değişmeli halkası üzerinde modüller olsun.

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{q_1} \bigoplus_{i=1}^n M_i \xrightarrow{P'_1} \bigoplus_{i=2}^n M_i \longrightarrow 0$$

dizisi bir tam dizidir ki burada q_1 kanonik örten ve her $(m_1, \dots, m_n) \in \bigoplus_{i=1}^n M_i$ için

$P'_1((m_1, \dots, m_n)) = (m_2, \dots, m_n)$ ile P'_1 kanonik izdüşümdür.

Tanım 2.4.9 R değişmeli halka ve L, M, N R -modül,

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

R modül homomorfizmalarının kısa tam dizisi olsun. Bu diziye $\text{Im } f = \text{Çekg}$, M 'nin bir direkt toplamı oluyorsa bu diziye split denir. Yani;

Dizi splittir $\Leftrightarrow M = \text{Çekg} \oplus G$ olacak şekilde M 'nin bir G alt modülü vardır.

Önerme 2.4.10

- i. $0 \longrightarrow H \longrightarrow M \longrightarrow M/H \longrightarrow 0$ kısa tam dizidir.
- ii. $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$ split kısa tam dizidir.

Önerme 2.4.11 R değişmeli halka ve $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ kısa tam dizi olsun. Bu dizi splittir $\Leftrightarrow h: N \rightarrow M$ ve $e: M \rightarrow L$ R modül homomorfizmaları vardır, yani

$$eof = 1d_L, \quad goh = 1d_N, \quad eoh = 0, \quad foe + hog = 1d_M \text{ 'dır.}$$

İspat: Dizi split olsun. O zaman bazı $M' \subseteq M$ için $M = \text{Çekg} \oplus M'$ dir. Verilen herhangi bir $n \in N$ için $\exists m \in M$ $g(m) = n$ ile $h: N \rightarrow M$ tanımlandığından $M = \text{Çekg}, M'$ nin direkt toplamıdır.

$$\forall m \in M \text{ için } m_1 \in \text{Çekg}, m_2 \in M' \quad m = m_1 + m_2$$

tek türlü olarak yazılır. Dahası

$$M' \cap \text{Çekg} = \{0\}, \quad \begin{matrix} m = m_1 + m_2 \\ r = r_1 + r_2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} r_1 \in \text{Çekg}, r_2 \in M' \\ g(m) = g(r) = n \end{matrix}$$

tek türüdür. O zaman

$$\underbrace{(m_1 - r_1)}_{\in \text{Çekg}} + (m_2 - r_2) \Rightarrow m_2 - r_2 \in \text{Çekg} \cap M' = \{0\} \Rightarrow m_2 = r_2 \text{ dir. } h(n) = m_2$$

tanımını h iyi tanımlı yapar. Verilen herhangi bir $m \in M$ için $k : M \rightarrow L$ tanımlansın.

$\underbrace{m = m_1 + m_2}_{\in \text{Çekg} = \text{Im } f}$ tek türlü $\Rightarrow l \in L$ için $m_1 = f(l)$ 'dır.

Tanım 2.4.12 R değişmeli halka, $M = \{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tarafından üretilen bir R -modül olsun. Her $m \in M$ ve $m = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda m_\lambda$ olarak $r_\lambda \in R$, $m_\lambda \in M$ ile tek türlü yazılabiliyorsa $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, M için bir tabandır ve M , bir tabana sahip olduğundan bir serbest R -modüldür.

R 'nin kendisi 1_R elemanı tarafından bir tabana sahip olduğundan bir serbest R -modüldür. Sıfır R -modülü tabanı boş küme olan bir serbest R -modüldür.

Önerme 2.4.13 R değişmeli halka, M R -modül $\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ M 'nin bir ailesi olsun. O zaman $\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, $\sum_{\lambda \in \Lambda} Rm_\lambda$ için bir tabandır $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda$ için $\sum_{\lambda} r_y m_y = 0 \Rightarrow r_y = 0$ 'dır

Önerme 2.4.14 R değişmeli halka olsun.

i. $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, her $\lambda \in \Lambda$ için $R_\lambda = R$ ile R -modüllerinin bir ailesi olsun. O zaman $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$, $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tabanı ile serbest R -modüldür ki her $\mu \in \Lambda$ için $e_\mu \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ elemanı R_μ içinde kendisi 1 eşit ve diğer bütün elemanları sıfırdır.

$$\{(1, 0, 0, \dots)(0, 1, 0, 0, \dots)(0, 0, 1, 0, \dots), \dots \text{gibi}\}$$

ii. M R -modül, M serbest R -modüldür $\Leftrightarrow M$, (i) deki türden bir R -modüle izomorftur. $M = (m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tabanına sahip ise $M \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ ki $R_\lambda = R$ 'dır. Burada $Rm_\lambda \cong R$ dir. Böylece $Rm_\lambda \cong R/(0 : m_\lambda) \cong R$ 'dır.

$$f: R \rightarrow Rm_\lambda \text{ olmak üzere } R/(0:m_\lambda) \cong Rm_\lambda \Rightarrow Rm_\lambda \cong R \\ 1 \rightarrow m_\lambda$$

Böylece $M \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ 'dır.

Önerme 2.4.15 $F, \{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tabanı ile bir serbest R -modül olsun. M, R -modül ve $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ M 'nin elemanlarının bir ailesi olsun. O zaman $\forall \lambda \in \Lambda$ için $f(e_\lambda) = m_\lambda$ tanımıyla $f: F \rightarrow M$ bir R -modül homomorfizması vardır.

İspat : $M, \{m_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tabanına sahip serbest R -modül olsun. $\Lambda = \emptyset$ ise açıktır. Böylece $\Lambda \neq \emptyset$ ise $\forall \lambda \in \Lambda$ $Rm_\lambda = R, \forall (r_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ için $f((r_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda m_\lambda$ tanımıyla $f: \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda \rightarrow M$ dönüşümüyle f bir R -modül homomorfizmasıdır. $M, \{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ kümesi tarafından üretildiğinde f örtendir. $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ M 'nin tabanı olduğundan $f, 1-1$ 'dir.

Önerme 2.4.16 M, R değişmeli halkası üzerinde bir modül olsun. O zaman F serbest R -modül olmak üzere $f: F \rightarrow M$ R -modül epimorfizması vardır.

Ayrıca M, n sonlu olarak üretilirse F, n sonlu tabana sahip bir serbest R -modüldür.

Sonuç 2.4.17 $M \cong F/\text{Çekf}$ 'dir.

Önerme 2.4.18 $0 \neq R$ değişmeli halka, F sonlu taban ile serbest R -modül olsun. O zaman F için her taban sonludur ve F için iki tabanın elemanları aynı sayıya sahiptir. F için bir taban içinde ki elemanların sayısına F 'nin *rankı* denir ve $\text{rank}(F)$ ile gösterilir.

Önerme 2.4.19 $R \neq 0$ değişmeli halka, F serbest R -modül ve F sonlu üretilir olsun. O zaman F için her taban sonludur.

Tanım 2.4.20 X R -modül ve $g: A \rightarrow B$ R -modül homomorfizması olsun.
 $\forall f: X \rightarrow B$ R -modül homomorfizması için $h: X \rightarrow A$ R -modül homomorfizması varsa X R -modülüne projektif R -modül denir.

Teorem 2.4.21 Her serbest R -modül projektiftir.

Önerme 2.4.22 X projektif R -modül ve $X = M \oplus N$ ise M projektif R -modüldür.

Önerme 2.4.23 Projektif modüllerin direkt toplamı projektiftir.

Teorem 2.4.24 X R -modül, $i: X \rightarrow X$ için aşağıdaki durumlar denktir.

- i. X projektiftir.
- ii. Her $0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi splittir.
- iii. X serbest R -modüllerinin direkt toplamına izomorftur.
- iv. Her $g: A \rightarrow B$ epimorfizma için

$$g_x = \text{Hom}(i, g): \text{Hom}(X, A) \rightarrow \text{Hom}(X, B)$$

aynı zamanda bir epimorfizmadır.

- v. Her $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(X, A) \longrightarrow \text{Hom}(X, B) \longrightarrow \text{Hom}(X, C) \longrightarrow 0$$

dizisi aynı zamanda kısa tam dizidir.

BÖLÜM 3

Bu bölümde modüllerin projektif boyutlarının temel tanım, teorem ve sonuçlarından bahsedilerek bir takım örnekler verilmiştir. Bu bölümdeki çalışmalar [2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15] kaynaklarından derlenmiştir.

3. HOMOLOJİK BOYUTLAR

Önerme (Schnuel's lemma) 3.1: R değişmeli birimli bir halka ve M R – modül olsun. P projektif R – modül olmak üzere

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow K \rightarrow P \xrightarrow{\alpha} M \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow L \rightarrow Q \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0 \end{aligned}$$

R – modül homomorfizmalarının tam dizisi ise $0 \rightarrow K \rightarrow L \oplus P \rightarrow Q \rightarrow 0$ tam dizisi vardır. Özellikle Q projektif R –modül ise o zaman $K \oplus Q \cong L \oplus P$ elde edilir.

İspat: $X = \{(p, q) \in P \oplus Q : \alpha(p) = \beta(q)\}$ kümesi $P \oplus Q$ 'nun alt modülü olsun.

$$\pi_1 : x \mapsto p \quad \pi_1(p, q) = p$$

dönüşümü örtendir. $\forall p \in P$ için β örten olduğundan $\beta(q) = \alpha(p)$ olacak şekilde $q \in Q$ vardır. Böylece $(p, q) \in X$ ve $\pi_1(p, q) = p$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{Çek } \pi_1 &= \{(0, q) : (0, q) \in X\} \\ &= \{(0, q) : \beta(q) = 0\} \cong \text{çek } \beta \cong L \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $0 \rightarrow L \rightarrow X \xrightarrow{\pi_1} P \rightarrow 0$ tam dizisi elde edilir. Benzer şekilde $0 \rightarrow K \rightarrow X \xrightarrow{\pi_2} Q \rightarrow 0$ tam dizisi elde edilir. P projektif R –modül olduğundan

$$0 \rightarrow L \rightarrow X \xrightarrow{\pi_1} P \rightarrow 0$$

tam dizisi split dizi olur ve $L \oplus P \cong X$ elde edilir.

$0 \rightarrow K \rightarrow X \rightarrow Q \xrightarrow{\pi_1} 0$ tam dizisinde X yerine $L \oplus P$ yazılırsa istenen

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{\psi} L \oplus P \xrightarrow{\phi} Q \rightarrow 0$$

tam dizisi elde edilir. Q projektif ise bu dizi split olduğundan $K \oplus Q \cong L \oplus P$ elde edilir.

Sonuç 3.2: P_i ve Q_i 'ler projektif modüller olmak üzere

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow K \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \xrightarrow{a} M \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow L \rightarrow Q_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0 \end{aligned}$$

R – modül homomorfizmalarının tam dizisi olsun. O zaman

$$K \oplus Q_{n-1} \oplus P_{n-2} \oplus Q_{n-3} \oplus \cdots \cong L \oplus P_{n-1} \oplus Q_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus \cdots$$

İspat: $K = \text{çek } \alpha$ ve $L = \text{çek } \beta$ olsun. Bir önceki önermeden $K' \oplus Q_0 \cong L' \oplus P_0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow K \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \oplus Q_0 \rightarrow K' \oplus Q_0 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow L \rightarrow Q_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_1 \oplus P_0 \rightarrow L' \oplus P_0 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

tam dizileri elde edilir. Tümevarım metodu kullanılarak işleme devam edilirse istenen sonuç elde edilir.

$A, B \in \mathcal{M}_R$ olsun. ($\mathcal{M}_R$ R – modüllerin kümesi) $A \oplus P \cong B \oplus Q$ olacak şekilde $P, Q \in \mathcal{M}_R$ projektif modüller varsa A ve B 'ye projektif olarak denktir denir. $A \sim B$ ile gösterilir. ' $\sim$ ' bir denklik bağıntısıdır.

- i) $A \oplus P \cong A \oplus P$ olup yansıma özelliği vardır.
- ii) $A \sim B$ olsun. O zaman $A \oplus P \cong B \oplus Q$ olacak şekilde $P, Q \in \mathcal{M}_R$ projektif modülleri vardır. $B \oplus Q \cong A \oplus P$ olduğundan $B \sim A$ bulunur.
- iii) $A \sim B$ ve $B \sim C$ olsun. O zaman $A \oplus P \cong B \oplus Q$ ve $B \oplus Q \cong C \oplus T$ olacak şekilde $P, Q, T \in \mathcal{M}_R$ projektif modülleri vardır.

$A \oplus P \cong B \oplus Q$ ve $B \oplus Q \cong C \oplus T$ ise $A \oplus P \cong C \oplus T$ olup $A \sim C$ bulunur.

A 'nın denklik sınıflarını $[A]$ ve böyle bütün denklik sınıfların kümesini G ile gösterelim. O zaman G üzerinde ikili işlem $[A] + [B] = [A \oplus B]$ olarak tanımlanır ve bu tanım iyi tanımlıdır ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Önerme 3.3: $(G, +)$ birim elemanlı değişmeli bir yarıgruptur $[P]$ 'nin G 'de tersi vardır. $\Leftrightarrow [P] = 0 \Leftrightarrow P$ projektif modüldür.

İspat: G 'nin birim elemanı $[0]$ modülüdür.

$[A], [B] \in G$ için

$$[A] + [B] = [A \oplus B] \text{ olup } [A \oplus B] \in G \text{ dir.}$$

$[A], [B], [C] \in G$ için

$$\begin{aligned} ([A] + [B]) + [C] &= [(A \oplus B)] \oplus [C] = [(A \oplus B) \oplus C] \\ &= [A \oplus (B \oplus C)] = [A] + [B \oplus C] \\ &= [A] + ([B] + [C]) \end{aligned}$$

bulunur. $[A] + [B] = [A \oplus B] = [B \oplus A] = [B] + [A]$ olduğundan G değişmelidir.

Benzer işlemler yapılırsa ($n \geq 0$) için $P^n[M]$ aşağıdaki şekilde bulunur. P_i 'ler projektif R – modül olmak üzere

$$\cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{a_n} P_{n-1} \xrightarrow{a_{n-1}} \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{a_1} P_0 \xrightarrow{a_0} M \rightarrow 0$$

R – modül homomorfizmalarının tam dizisi olsun. Bu diziye M – R – modülünün projektif çözünürlüğü denir.

$\forall_n \geq 0$ için $K_n = im(\alpha_n)$ alınırsa buradan $\forall_n$ için $\mathcal{P}^n[M] = [K_n]$ olduğu bulunur. Burada K_n ye ($[K]$ sınıfına) M R – modülünün n^{th} syzygy modülü denir. $[K_n]$ sınıfı M ve n tarafından tek türlü belirlenir.

Tanım 3.4: $M \in \mathcal{M}_R$ R – modülünün projektif boyutu

$$pd(M) = pd_R(M) = \min \{n : \mathcal{P}^n[M] = 0\}$$

olarak tanımlanır. Böyle bir n yoksa $pd_R(M) = \infty$ alınır.

Önerme 3.5: M projektif R – modüldür $\Leftrightarrow pd(M) = 0$ dir.

İspat: Açıktır ($0 \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow 0$ dizisi alınır)

Önerme 3.6: $M \in \mathcal{M}_R$ ve $n \geq 0$ için aşağıdakiler birbirine denktir.

i) $pd_R(M) \leq n$

ii) $P_{n-1} \xrightarrow{a_{n-1}} P_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow M \rightarrow 0$ dizisi için $\zeta_k(\alpha_{n-1})$ projektif R-modüldür.

iii) $0 \rightarrow P_n \xrightarrow{a_n} P_{n-1} \xrightarrow{a_{n-1}} \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ sonlu R – modül homomorfizmalarının sonlu bir tam dizisi vardır.

Ayrıca $n \geq 1$ için α_n split değilse $pd(M) = n$ alınır.

Tanım 3.7: Bir R – halkası global boyutu $gl.\dim R = \sup\{pd_R(M) : M \in M_R\} \leq \infty$ olarak tanımlanır.

Sonuç 3.8: $M \in \mathcal{M}_R$ projektif R – modül ise $gl.\dim R \leq 1$ dir.

Yardımcı Teorem 3.9: $a, b \in R$ ve $ann_r(a) = bR, ann_r(b) = aR$

$aR \oplus bR \cong R$ değilse o zaman $pd(aR) = pd(bR) = \infty$ olur. $aR \oplus bR \cong R$ ise $pd(aR) = pd(bR) = 0$ olur.

İspat: $\begin{array}{l} R \rightarrow aR \\ x \rightarrow ax \end{array}$ olarak tanımlansın. Bu dönüşüm örtendir ve çekirdeği

$ann_r(a) = bR$ dir. $0 \rightarrow bR \rightarrow R \rightarrow aR \rightarrow 0$ tam dizisi elde edilir. Böylece

$\mathcal{P}[aR] = [bR]$ ve benzer şekilde $\mathcal{P}[bR] = [aR]$ bulunur. Eğer aR projektif modül değilse o zaman $pd(aR)$ ve $pd(bR)$ sıfır olmaz. $pd(aR) = pd(bR) = \infty$ olur.

Yani n çift ise $\alpha_n(x) = ax$ ve n tek ise $\alpha_n(x) = bx$ olacak şekilde

$$\cdots \rightarrow R \xrightarrow{\alpha_1} R \xrightarrow{\alpha_1} R \xrightarrow{\alpha_0} aR \rightarrow 0$$

R – modül homomorfizmalarının sonsuz çözünürlüğü bulunur. Diğer yandan eğer aR projektif modül ise $0 \rightarrow bR \rightarrow R \rightarrow aR \rightarrow 0$ dizisi split olup $aR \oplus bR \cong R$ bulunur.

Örnek 3.10: $R = k[t]$ ve $n \geq 2$ için $t^n = 0$ olsun.

$a = t$ ve $b = t^{n-1}$ alınırsa $[(aR \oplus bR)t^{n-1} = 0 \text{ ve } Rt^{n-1} \neq 0 \text{ olduğu için}]$ $aR \oplus bR \cong R$ izomorfizması bulunamaz.

Böylece $pd(aR) = pd(bR) = \infty$ ve buradan da $gl.\dim R = \infty$ bulunur.

Örnek 3.11: $R = k[x, y]$ ve $xy = 0$ olsun. $a = x$ ve $b = y$ alınırsa o zaman $0 \rightarrow bR \rightarrow R \rightarrow aR \rightarrow 0$ dizisi split değildir. Split olsaydı bR R 'nin direkt toplamı

ve sıfırdan farklı bir idempotent eleman içerir. Fakat $bR = yk[x, y] = yk[y] \subseteq k[y]$ olduğundan bR 'nin sıfırdan farklı bir idempotent elemanı yoktur. Böylece

$$pd(aR) = pd(bR) = \infty \text{ ve } gl\dim R = \infty$$

bulunur.

Teorem 3.12: $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ R – modül homomorfizmalarının tam dizisi olsun. $pd(A)$, $pd(B)$ ve $pd(C)$ 'lerden ikisi sonlu ise üçüncüsü de sonludur. Ayrıca

- (1) $pd(A) < pd(B)$ ise $pd(C) = pd(B)$ dir.
- (2) $pd(A) > pd(B)$ ise $pd(C) = pd(A) + 1$ dir.
- (3) $pd(A) = pd(B)$ ise $pd(C) \leq pd(A) + 1$ dir.

İspat: C projektif R – modül olsun. O zaman $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ tam dizisi split olduğundan

$$A \oplus C \cong B \text{ olup } pd(A) = pd(B)$$

bulunur. Böylece sadece (3) durumu diğer durumlar sağlanmaz. B 'nin projektif R – modül olduğunu kabul edelim. O zaman $pdB = 0$ olup $pd(A) < pd(B)$ olması imkansızdır. Eğer $pdA > pdB$ ise o zaman A ve C projektif modül değildir ve

$$pd(C) = pd(A) + 1$$

bulunur. Eğer $pdA = pdB$ ise o zaman A projektif olup

$$pd(C) \leq 1 = pdA + 1$$

bulunur. Şimdi de B ve C 'nin projektif olmadıklarını varsayalım o zaman P projektif modül olmak üzere $B \cong P/K$ ve benzer şekilde Q projektif modül olmak üzere $A \cong Q/K$ olarak yazılır ve $C \cong P/Q$ bulunur. Buradan da

$$pd(B) = pd(K) + 1 \text{ ve } pd(C) = pd(Q) + 1$$

elde edilir. Böylece $0 \rightarrow K \rightarrow Q \rightarrow A \rightarrow 0$ tam dizisi elde edilir. Teoremin ilk sonucu sonlu i projektif boyutların toplamı üzerinde tümevarım yöntemiyle elde edilir. Eğer $pd(A), pd(B), pd(C)$ 'lerden ikisi ∞ ise o zaman (1), (2) ve (3) durumlarının doğru olduğu kolayca görülür.

Teoremin diğer kısmını ispatlamak için $pd(A), pd(B)$ ve $pd(C)$ sonlu olduğunu varsayalım. $0 \rightarrow K \rightarrow Q \rightarrow A \rightarrow 0$ tam dizisi kullanılırsa

(1)' $pd(K) < pd(Q)$ (i.e., $pd(B) < pd(C)$) ise o zaman

$$pd(A) = pd(Q) = pd(C) - 1 \geq pd(B)$$

(2)' $pd(K) > pd(Q)$ (i.e., $pd(B) > pd(C)$) ise o zaman

$$pd(A) = pd(K) + 1 = pd(B)$$

(3)' $pd(K) = pd(Q)$ (i.e., $pd(B) = pd(C)$) ise o zaman

$$pd(A) \leq pd(K) + 1 = pd(B)$$

elde edilir. Şimdi de $pd(A) < pd(B)$ olduğunu kabul edersek sadece (3)' durumu için sağlanır ve $pd(C) = pd(B)$ bulunur. $pd(A) > pd(B)$ olduğunu kabul edersek sadece (1)' durumu için sağlanır ve $pd(C) = pd(A) + 1$ bulunur. Son olarak da $pd(A) = pd(B)$ olduğu kabul edilirse o zaman (2)' ve (3)' durumlarında $pd(C) \leq pd(B) < pd(A) + 1$ ve (1)' durumunda ise $pd(C) = pd(A) + 1$ bulunur.

Sonuç 3.13: $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ R – modül homomorfizmalarının tam dizisi ise $pd(B) \leq \max\{pd(A), pd(C)\}$ bulunur.

İspat: (1) $pd(A) < pd(B)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $pd(C) = pd(B) > pd(A)$ olup böylece $\max\{pd(A), pd(C)\} = pd(C) = pd(B)$ bulunur.

(2) $pd(A) > pd(B)$ olduğu kabul edilirse $pd(C) = pd(A) + 1$ olur. Buradan da $\max\{pd(A), pd(C)\} = pd(A) + 1 \geq pd(B) + 2$ bulunur.

(3) $pd(A) = pd(B)$ olduğunu kabul edersek $pd(C) \leq pd(A) + 1$ olur. Eğer $pd(C) < pd(A) + 1$ ise o zaman $\max\{pd(A), pd(C)\} = pd(A) = pd(B)$ bulunur. Diğer taraftan $\max\{pd(A), pd(C)\} = pd(A) + 1 = pd(B) + 1$ bulunur.

Önerme 3.14: $M = \oplus_i M_i$ olsun. O zaman $pd(M) = \sup\{pd(M_i)\}$ dir.

İspat: $\mathcal{P}^n[\mathcal{M}_i] = K_i$ olsun. O zaman $\mathcal{P}^n[M] = \oplus K_i$ olur.

Böylece $P^n[M] = 0 \Leftrightarrow P^n[M_i] = 0$ olur. $\forall_i \in F$ için $\Leftrightarrow n \geq \sup\{pd(M_i)\}$ bulunur.

Önerme 3.15: R bir halka ve $x \in R$ de sıfır bölen olmayan R 'nin her elemanı ile değişmeli olan bir eleman olsun. $\bar{R} = \frac{R}{xR}$ bölüm halkası olmak üzere $pd_{\bar{R}}(M) = n < \infty$ ise o zaman $pd_R(M) = n + 1$ dir.

İspat: İspatı n üzerinde tümevarım yöntemi ile yapalım $n = 0$ için M projektif $\bar{R}$ – modül olup bir serbest $\bar{R}$ modülün direkt toplamı olarak yazılır. Bu serbest modüle $\bar{F}$ diyelim $0 \rightarrow xR \rightarrow R \rightarrow \bar{R} \rightarrow 0$ R –modül homomorfizmalarının tam dizisini alalım. $xR \cong R$ olduğundan $pd_R(\bar{R}) \leq 1$ olur. Böylece

$$pd_R(M) \leq pd_R(\bar{F}) \leq 1$$

bulunur. Diğer yandan $M_x = 0$ ve X sıfır bölen olmadığı için $M_R \neq 0$ serbest bir R – modülü içerisine gömülemez ve özellikle M_R projektif değildir. Bu da $pd_R(M) = 1$ olduğunu gösterir. $n \geq 1$ durumu serbest $\bar{F}$ ile oluşturulmuş $0 \rightarrow K \rightarrow \bar{F} \rightarrow M \rightarrow 0$ dizisinde gösterilir. O halde $pd_{\bar{R}}(K) = n - 1$ ve tümevarım metodu kullanılarak

$$pd_R(K) > 1 > pd_R(\overline{F}) \text{ ve } pd_R(M) = pd_R(K) + 1 = n + 1$$

olur. O halde $n = 1$ durumu ile tamamlanır. (3.12) teoreminden $pd_R(M) \leq 2$ sonucu için $0 \rightarrow T \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ serbest F' 'li tam dizi için F serbest ve $Mx = 0$ olduğundan $Fx \subseteq T$ olur. Buradan tam dizi $0 \rightarrow T/Fx \rightarrow F/Fx \rightarrow M \rightarrow 0$ olur. O halde

$$pd_{\overline{R}}(T/Fx) = pd_{\overline{R}}(M) - 1 = 0 \text{ ve } 0 \rightarrow Fx/Tx \rightarrow T/Tx \rightarrow T/Fx \rightarrow 0$$

bölmeleri elde edilir. $M \cong F/Tx$ ile çarpılır Fx/Tx diye tanımlanır ve $M, T/Tx$ 'in doğrudan bir toplamı olur. Eğer T/R projektif ise T/Tx olur ve buradan M durumu olmayan $\overline{R}$ projektif olur. O halde

$$pd_R(M) = 2 \text{ den } pd_R(M) = 1 + pd_R(T) \geq 2$$

olur.

Örnek 3.16: $pd_{\overline{R}}(M) = \infty$ ise yukarıdaki önerme genel olarak doğru değildir.

Örneğin $R = Q(t)$ ve $x = t^2$ için $M = Q/\overline{R}$ - modülü olsun. O zaman $pd_{\overline{R}}(M) = \infty$ Fakat $pd_R(M) = 1$ dir. Çünkü m temel ideal bölgesi olan R üzerinde projektif olmayan bir modüldür.

Sonuç 3.17: $R \neq 0$ ve $gl \dim \overline{R} = n < \infty$ ise o zaman $gl. \dim R \geq n + 1$ dir.

Projektif boyutu ile birlikte verilen bir modül oluşturmak için aşağıda tanımlanan regüler dizi kavramını kullanacağız.

Tanım 3.18: R bir halka olsun. Aşağıdaki şartların merkezi elemanların $x_1, x_2, \dots, x_n$ sıralı dizisine bir regüler dizi denir.

- i) $\forall i \geq 1$ için $\sum x_i R \neq R$
- ii) x_i 'nin $R/(x_1 R + \dots + x_{i-1} R)$

halkalarındaki görüntüsü sıfır bölen değildir.

Not: Bu tanıma göre $R \neq 0$ ise ϕ dizisi regülerdir.

Şimdi verilecek önerme regüler dizilerle projektif boyutlar arasındaki temel ilişkiyi verir.

Önerme 3.19: $x_1, x_2, \dots, x_n$ R halkasında bir regüler dizi ve $I = \sum_{i=1}^n x_i R$ olsun. O zaman $pd((R/I)_R) = n$ dir.

İspat: $n = 0$ durumu aşikardır. $n > 0$ için $\overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ ifadesi $\overline{R} := R/x_1 R$ de regüler bir dizi oluşturur. Tümevarım metodu uygulanarak

$$pd\left(\left(\overline{R}/(\overline{x_2} \overline{R} + \dots + \overline{x_n} \overline{R})\right)_{\overline{R}}\right) = n - 1$$

elde edilir. $\overline{R}/(\overline{x_2} \overline{R} + \dots + \overline{x_n} \overline{R})$ 'yi $R/(x_1 R + \dots + x_n R) = R/I$ ile tanımlayarak.

$$pd((R/I)_R) = (n - 1) + 1 = n$$

bulunur. R değişmeli halka olması durumunda

$$0 \rightarrow F_n \xrightarrow{\alpha_n} F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_0 \xrightarrow{\alpha_0} R/I \rightarrow 0$$

tam dizisi vardır. Burada F_i serbesttir. Bu R/I serbest çözünürlüğüne Koszul çözünürlüğü denir.

$F_0 = R$, $F_1 = \bigoplus_{i=1}^n e_i R$, $F_r = \Lambda(F_1)$ ($1 \leq r \leq n$) şeklinde tanımlanır. $\Lambda^r(F_1)$ 'de r^{+h} F_1 in etrierier kuvveti gösterir. R 'den R/I 'e α_0 denklemi örten dönüşümdür. α_1 her bir $e_i \in F_1$ $x_i \in I$ 'ya gönderir. $r \geq 2$ için α_r

$$\alpha_r(e_i, \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) = \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{i_j} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) x_{i_j}$$

ile tanımlanır.

Not: α_n içine dönüşümü split değildir. Eğer α_n bazı $\varphi: F_{n-1} \rightarrow F_n$ ile split ise o zaman $\varphi(e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_i \wedge \cdots \wedge e_n) = (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) b_i$ yazılır. Buradan

$$e_i \wedge \cdots \wedge e_n = \varphi a_n(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = (e_i \wedge \cdots \wedge e_n) \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} b_j x_j$$

olur. $\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} b_j x_j = 1$ olması bir çelişkidir. Koszul çözünürlüğü tam olduğundan $pd(R/I) = n$ olur.

$$0 \rightarrow F_n \xrightarrow{\alpha_n} F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_0 \xrightarrow{\alpha_0} R/I \rightarrow 0$$

Sonlu serbest çözünürlüğün özel durumlarından $n=3$ durumunun çözümü yapıldığında $n=3$ için $0 \rightarrow F_n \xrightarrow{\alpha_n} F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_0 \xrightarrow{\alpha_0} R/I \rightarrow 0$ koszul çözünürlüğü

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{a} R^3 \xrightarrow{\beta} R^3 \xrightarrow{\gamma} R \rightarrow R/(x, y, z) \rightarrow 0$$

olur. x_1, x_2, x_3 x, y, z olarak yeniden yazılır. R^r deki elemanlar sütun r – vektörleri olarak ifade edilir. Tek yapılı $R^r \rightarrow R^s$ bir Sxr matriks olarak ifade edilir.

$f_1 = e_2 \wedge e_3$, $f_2 = -e_1 \wedge e_3$, $f_3 = e_1 \wedge e_2$ $\Lambda^2(R^3) \cong R^3$ üzerinde ve e_1, e_2, e_3 $\Lambda^1(R^3) = R^3$ üzerinde $\beta(f_1) = e_3 y - e_2 z$, $\beta(f_2) = -e_3 x + e_1 z$, $\beta(f_3) = e_2 x - e_1 y$

$$\alpha_r(e_i, \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) = \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{i_j} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) x_{i_j}$$

sonucunu verir. O halde β matrisi $\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$ dir. Ayrıca γ matrisi (x, y, z) ve

α matrisi (x, y, z) 'dir. $\beta\alpha = 0$ ve $\gamma\beta = 0$ olur. x, y, z regüler bir dizinin şekli kullanarak $\text{çek } \beta \subseteq \text{im } \alpha$ ve $\text{çek } \gamma \subseteq \text{im } \beta$ daha açıktır.

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{a} R^3 \xrightarrow{\beta} R^3 \xrightarrow{\gamma} R \rightarrow R/(x, y, z) \rightarrow 0$$

$R/(x, y, z)$ R için serbest çözünürlüğünü verir. Regüler bir dizinin açık bir örneği için herhangi bir sıfır olmayan A halkası üzerinden bir $R = A[x_1 \cdots x_n]$ polinom halkasında $x_1 \cdots x_n$ alınabilir. Burada $R/(x_1 R + \cdots + x_n R) \cong A[x_1 \cdots x_n]$ içerisinde x_i açık bir şekilde 0 – bölen değildir. R – modülü $R/(x_1 R + \cdots + x_n R)$ bütün x_i açıkça hareket ederek sadece A 'dır. $pd(A) = n$ 'i gösterir. A yarı – basit halka olduğunda bir sonraki sonuç $gl.\dim R = n$ olacaktır. O halde A en geniş alanı projektif boyutların bir sağ R – modülüdür.

Teorem 3.20: $A \neq 0$ bir halka ve $R = A[x]$ ise o zaman $gl.\dim R = gl.\dim A + 1$ dir.

İspat: Herhangi A – modülü M için R – modül $M \oplus_A R$ için $M[x]$ olsun $M[x]$ elemanlarını x 'in üzerinde $\sum m_i x^i$ toplamının polinomları olarak düşünülebilir.

" $-\oplus_A R$ " tam olduğundan

$$pd_A(M) = pd_R(M[x])$$

olur. $gl.\dim A = \infty$ durumu için Bu durumda A – modülü M 'nin yeni değeri $pd_A(M) = \infty$ olur. $pd_A(M) = pd_R(M[x])$ 'den $gl.\dim R = \infty$ olur. Buradan $gl.\dim A < 0$ olduğu kabul edilebilir. Bu da $gl.\dim R \leq d + 1$ olduğunu gösterir.

$R \rightarrow R/xR \cong A$ bölüm denklemi kullanılarak

$$gl.\dim R \geq d + 1$$

elde edilir. Herhangi bir R -modül M olsun. M bir A endomorfizma f ile verilen bir A -modül olsun. $\sum m_i x^i$ elemanları kullanılarak $M[x]$ R -modülü düzenlenebilir.

$$0 \rightarrow M[x] \xrightarrow{\psi} M[x] \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$$

kısa tam dizisi oluşturulur. Buradan φ 'yi $\varphi(\sum m_i x^i) = \sum f^i(m_i)$ şeklinde tanımlarız. $\varphi: M[x] \rightarrow M$ üzerine örten bir R -homomorfizmadır. $\sum m_i x^i$ 'yi $\sum t(m_i)x^i$ 'ye göndererek $\bar{f}: f \oplus_A Id_R$ 'nin $M[x]$ 'in bir R -endomorfizması olduğu açıktır. $\sum m_i x^i$ 'yi $\sum m_i x^{i+1}$ 'e göndererek $M[x]$ 'de R -endomorfizması $\bar{x}$ elde edilir. $\psi: 0 \rightarrow M[x] \xrightarrow{\psi} M[x] \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$ 'da $\bar{x} - f$ fark olarak tanımlanır. Buradan

$$\psi\left(\sum_{i=0}^r m_i x^i\right) = -f(m_0) + (m_0 - f(m_1))x + \cdots + (m_{r-1} - f(m_r))x^r + m_r x^{r+1}$$

elde edilir. O zaman ψ birebirdir ve $\varphi\psi = 0$ dır. O halde $\text{çek } \varphi \subseteq \text{im } \psi$

$0 \rightarrow M[x] \xrightarrow{\psi} M[x] \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$ doğru olduğunu gösterir.

$\varphi(\sum m_i x^i) = \sum f^i(m_i) = 0$ olduğunu kabul edelim. O halde $\text{im}(\bar{x} - \bar{f}) = \text{im}(\psi)$ 'de

$$\sum_{i \geq 0} m_i x^i = \sum_{i \geq 0} (m_i x_i - f^i(m_i)) = \sum_{i \geq 1} (\bar{x}^i - \bar{f}^i)(m_i)$$

olur. $0 \rightarrow M[x] \xrightarrow{\psi} M[x] \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$ doğru olduğundan

$$pd_R M \leq 1 + pd_R M[x] = i + pd_A M \leq 1 + d$$

elde edilir. A 'nın alan olduğu durumda $S = A[x_1 \cdots x_n]$ 'nin global boyutu n_i dir. Bu sonuç herhangi bir $\mathcal{U} \subseteq S$ ideali için $0 \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow 0$ olduğunu gösterir. F_i 'ler $f.g$ serbest S – modülleridir.

Sonuç 3.21: A bir cisim ise o zaman $gl.\dim(A[x_1 \cdots x_n]) = n$ dir.

BÖLÜM 4

Bu bölümde lokal halkalar ile ilgili bazı önemli teorem ve sonuçlarından bahsedilmiştir. Bu bölümdeki çalışmalar [8, 11, 12, 14, 16] kaynaklarından derlenmiştir.

4. LOKAL HALKALARIN GLOBAL BOYUTLARI

R lokal halka $m = \text{rad } R$ ve $k = R/m$ olsun

$R \rightarrow k = R/m$ örten dönüşümü olup k R – modül olarak alınabilir.

Önerme 4.1: (R, m) lokal halka ve C sonlu üretilmiş R – modül olsun. $\text{Hom}_R(C, k) = 0$ ise o zaman $C = 0$ ’dır.

İspat: $C \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman Nakayama’nın teoreminden $m \triangleleft R$ maksimal ideali için $C \neq C_m$ ’dir. $f : C/Cm \rightarrow k$ örten homomorfizması ve $C \rightarrow C/Cm$ homomorfizmalarının bileşkesi alınırsa $\text{Hom}_R(C, k) \neq 0$ olduğu görülür.

Önerme 4.2: (R, m) noetherian lokal halka ve C ’de sonlu üretilmiş R – modül olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

(1) C projektif modül

(1¹) C serbest modül

(2) $\text{Ext}(C, k_R) = 0$

(2¹) $\varepsilon : 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ R – modül homomorfizmalarının tam dizisi için $\text{Hom}_R(\varepsilon, k)$ tam dizidir.

(3) $\text{Tor}(C, k) = 0$

(3¹) $\varepsilon : 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ R – modül homomorfizmalarının tam dizisi için $\varepsilon \otimes_R k$ tam dizisidir.

Sonuç 4.3: (R, m) lokal halka ve M sonlu üretilmiş R – modül olsun. $n \geq 0$ için aşağıdakiler birbirine denktir.

- (1) $pd(M) \leq n$
- (2) $Ext_R^{n+1}(M, k) = 0$
- (3) $Tor_{n+1}^R(M, k) = 0$

Teorem 4.4: R Noetherion lokal halka olsun. O zaman $gl.\dim R \leq pd_R(k)$ dir.

İspat: $pd_R(k) \leq n$ olsun. O zaman sonlu üretilmiş M R – modülü için

$$Tor(M, F^n({}_R k)) = 0 \text{ ve } Tor_{n+1}^R(M, k) = 0$$

Buradan $pd M \leq n$ bulunur. Böylece $gl.\dim R \leq pd({}_R k)$ oldu ispatlanır.

Sonuç 4.5: R değişmeli neotherion lokal halka olsun o zaman

- (1) $gl.\dim R = id(k) = pd(k)$.
- (2) $gl.\dim R \leq n$ iff $Tor_{n+1}^R(k, k) = 0$, iff $Ext_R^{n+1}(k, k) = 0$ dir.

İspat : (1) Teorem (5.82) den dolayı $gl.\dim R \leq pd_R(k)$ ve değişmeli olduğu için $pd(k) \leq gl.\dim R$ olup istenilen elde edilir.

(2) $m = k$ alınırsa sonuç (4.3)'ten dolayı

$$Tor_{n+1}^R(k, k) = 0 \Leftrightarrow Ext_R^{n+1}(k, k) = 0 \Leftrightarrow (1) \text{ den de } pd(k) \leq n \Rightarrow gl.\dim R \leq r$$

olduğu bulunur.

Teorem (Serre, Auslander – Buchsbaum) 4.6: (R, m) Noetherian değişmeli lokal halka olsun. O zaman $gl.\dim R < \infty \Leftrightarrow R$ regüler lokal halkadır. Bu durumda $gl.\dim R = \dim R$ ($\dim R : krull \text{ boyutu}$) olur.

Değişmeli bir R halkasının Krull boyutu asal ideallerin bütün zincirlerinin uzunluklarının maximumuna denir. (R, m) değişmeli Noetherian halka olmak üzere $k = R/m$ olsun. Bu durumda $\dim R$ tam olarak height m 'ye eşittir ve height m en fazla m maksimal idealinin minimal üreteç sayısı $V(R)$ olabilir. Nakayama'nın ön teoreminden $V(R) = \dim_k m/m^2$ dir.

Eğer $\dim R \leq V(R)$ eşitliği varsa bu $v(R) = \dim_k (m/m^2) = \dim R$ olduğunu gösterir. Bu da (R, m) lokal halkalarının regüler lokal halka olduğunu söyler. Regüler lokal bir halka tamlık bölgesidir.

İspat: $\dim R = d$ olacak şekilde R regüler halka olsun o zaman uygun $x_i \in R$ elemanları için $m = \sum_{i=1}^d x_i R$ dir. R tamlık bölgesi olduğu için x_i sıfır bölen değildir. Buradan $R/x_1 R$ regüler lokal halkadır ve boyutu $d-1$ dir. $R/x_1 R$ halkalarının maksimal ideali ise $x_2, \dots, x_d$ elemanlarının $R/x_1 R$ deki görüntüleri ile üretilir. Böylece d üzerinde tümevarım yöntemi kullanılırsa $x_1, x_2, \dots, x_d$ elemanları, R 'de bir regüler dizi oluşturur. Buradan

$$gl.\dim R = pd(k) = pd(R/m) = d = \dim R \text{ bulunur.}$$

Ön teorem 4.7: $m \setminus m^2$ R 'nin sıfır bölenlerini kapsıyorsa o zaman $am = 0$ olacak şekilde $0 \neq a \in R$ vardır.

İspat: $Ass(R) = \{p_1, \dots, p_r\}$ $p_1 \cup \dots \cup p_r$ için R 'nin 0 – bölenlerinin oluşmasıdır.

$$m \setminus m^2 \subseteq p_1 \cup \dots \cup p_r$$

olur. $m \neq 0$ olsun. Nakayama'nın Teorisine göre bir eleman $x \in m \setminus m^2$ olur. Herhangi bir $y \in m^2$ için $p \geq 1$ için $x + y^p \in m/m^2$ olur. Pigeon – Hole prensibine göre $p < q$ ile uygun p, q, i için $x + y^p, x + y^q \in p_i$ olur. Kısaca $y^p(1 - y^{q-p}) \in p_i$

dir. O halde $y \in p_i$ dir. $m \subseteq p_1 \cup \dots \cup p_r$ bazı j için $m \subseteq p_j$ sonucu bulunur. $a \neq 0$ için p_j 'nin $\text{ann}(a)$ biçimi olduğundan $am = 0$ olur.

Eğer $n = 0$ ise $n := \text{gl.dim } R < \infty$ tümevarıma göre R yarı – basittir. O halde R alandır. $n > 0$ $m \setminus m^2$ bir 0 – olmayan bir bölen içerdiği iddia edilebilir. Eğer başka şekilde yukarıdaki teori içi bir $a \neq 0$ ile $am = 0$ elemanı sonucu çıkar. a $f.g.$ R – modülü P ile $pd(P) = 1$ olsun ve $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow 0$ tam dizisi için K $f.g.$ projektiftir. O halde serbesttir. Fakat $Ka \subseteq Fma = 0$ dır. O halde $K = 0$ olur. Bu $P \cong F$ nin serbest zıt olduğunu gösterir.

Şimdi 0 – olmayan bir bölen $x \in m \setminus m^2$ olsun ve $\bar{R} = R/(x)$ olsun. Bu bir maximal ideal $\bar{m} = m(x)$ ile noetherion lokal halka olur. Buradan

(A) Bir R – modülü olarak $\bar{m}/xm$ in doğrudan bir toplamına eş değerdir.

(B) $pd_{\bar{R}} m/xm < \infty$ elde edilir. Bunlar kabul edilerek.

(A) ve (B) den $pd_{\bar{R}} m/xm < \infty$ elde edilir. Buradan $pd_{\bar{R}} k < \infty$ elde edilir.

Buradan

$$\text{gl.dim } \bar{R} = pd_{\bar{R}} k = pd_R k - 1 = n - 1$$

olur. Tümevarım metodundan $\bar{R}$ düzenli bir lokal halkadır ve $\dim \bar{R} = n - 1$ olur.

R 'de $(x) \subset P_1$ $P_1 \subseteq \dots \subseteq P_n$ x 0 – olmayan bir bölen olduğundan P_1 bir minimal prime olmadığını gösterir o halde $\dim R \geq n$ dir. Diğer taraftan

$$x \in m \setminus m^2 \text{ den } V(R) = 1 + V(\bar{R}) = 1 + \dim \bar{R} = n \text{ olur.}$$

Genelde $V(R) \geq \dim R$ olduğundan $V(R) = \dim R = n$ olur. O halde R n boyutunun regüler bir lokal halkadır.

(A)'nın ispatı; $\{y_i\}$ 'yi $\{x, y_1 \cdots y_1\}$ gibi m için generaturslerin bir minimal düzeni olsun ve $S = xm + \sum y_i R$ olsun. $xm \subseteq S \cap (x)$ 'nin bir denklem olduğu iddia edilebilir. Gerçekte eğer $z \in S \cap (x)$ ise o halde bazı $a \in R$, $b_i \in R$ ve $m \in M$ için

$$z = xa = y_1 b_1 + \cdots + y_1 b_2 + xm$$

olur. O halde $xa - (y_1 b_1 + \cdots + y_1 b_2) = xm \in m^2$ m/m^2 $x_1 y_1, \cdots, y_1$ in sembolleri k – bağımsız olduğundan $a \in m$ olmalı ve buradan $z = xa \in xm$ olur. $Sn(x) = xm$ ve

$$S + (x) = m \text{ 'den } m/xm \cong S/xm \oplus (x)/xm$$

olur. Bu da (A)'yı ispatlar. Çünkü noether'in eş biçim teoremine göre $\overline{m} := m/(x) \cong S/xm$ 'dir.

(B)'nin ispatı; x 'in 0 – olmayan bölen olarak hareket ettiği herhangi bir $pd_R M = r < \infty \Rightarrow pd_{\overline{R}} M/xM \leq r$ R – modül M için. Eğer $r = 0$ ise M R üzerinde projektif. O halde M/xM $\overline{R}$ üzerinden projektiftir. Buradan $pd_{\overline{R}} M/xM = 0$ dir.

Eğer $r > 0$ ise tam bir $0 \rightarrow K \rightarrow F \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0$ dizisi için

$$0 \rightarrow K/xK \rightarrow F/xF \rightarrow M/xM \rightarrow 0 \text{ olur.}$$

Eğer $a \in K, b \in F$ 'de xb biçimine sahipse o zaman

$$0 = \varphi(a) = \varphi(xb) = x\varphi(b) \Rightarrow \varphi(b) = 0$$

olur. Buradan $b \in K$ ve $a = xb \in xK$ olur $x \in F$ 'de $pd_R K = r - 1$ dir. Tümevarım metodu kullanılarak $pd_{\overline{R}} K/xK \leq r - 1$ elde edilir. Buradan

$$pd_{\bar{R}} M / xM \leq 1 + pd_{\bar{R}} K / xK \leq r \text{ olur.}$$

Sonuç 4.8: R regüler lokal bir halka ve $p \triangleleft R$ asal ideal olsun. O zaman R_p de reguler lokal bir halkadır.

İspat: $gl \dim R_p \leq gl \dim R$ olup istenen elde edilir.

Yukarıda ispatlanan sonuç Krull'ın 1930'lu yıllarda çalıştığı bir problemdi. Yıllarca açık problem olarak kalan bu sonuç homolojik metotların gelişmesiyle birlikte çözüldü. Bilinenlere göre hala bu problem sadece klasik değişmeli cebir teknikleriyle çözülemiyor.

Değişmeli Noetherian lokal halkalar üzerindeki homolojik modül teorisi 1950'li yılların sonunda Auslander, Buchsbaum ve Serre tarafından geliştirilmiştir.

Detayları girmeden yazılan teoremlerden sonra en güzel sonuçlardan ikisi hakkında bilgi verelim ilki herhangi bir regüler lokal halka tek türlü çarpanlara ayrılındır. İkincisi ise Auslander – Buchsbaum formülüdür.

(R, m) noetherion lokal halka üzerinde $m \neq 0$ sonlu üretilmiş ve projektif boyotu sonlu ise

$$pd(m) + depth(m) = depth(R) \leq V(R)$$

formülü vardır. Burada $depth(M)$ m maksimal idealinde bir maksimal M – Regüler dizisinin uzunluğu olarak tanımlanır. Ayrıca $depth(M)$, $Ext_R^d(k, M) \neq 0$ olacak şekilde en küçük d tam sayısıdır. R regüler lokal halka ise sonlu üretilmiş $m \neq 0$ R – modülü için

$$depth(R) = V(R) = \dim R \text{ eşitliği vardır.}$$

Ön teorem 4.9: R değişmeli Noetherian halka ve M sonlu üretilmiş R – modül olsun. O zaman

$\forall m \in \max(R)$ ($\max(R) = \text{maksimal / idealler}$) için

$$pd(M) = pd_{R_{m_1}}(M_{m_1}) \geq pd_{R_m}(M_m)$$

olacak şekilde bir $m \in (\max R)$ vardır.

İspat: Her m için $d(m) := pd_{R_m}(M_m) < \infty$ olur. Her bir tam sayı n için M_n $P(M)$ 'nin projektif eşitlik sınıfını temsil eden bir $f.g$ R -modülü olsun. Herhangi bir $m \in \max(R)$ için $(M_n)_m$ $P^n(M_m)$ 'in projektif denklik sınıfını temsil eder. O halde $(M_{d(m)})_m$ $r(m)$ dizisinin serbestidir denir. Bu nedenle bir R -homomorfizm $\varphi(m): R^{r(m)} \rightarrow M_{d(m)}$ m 'de olduğunda bir R_m izomorfizm meydana gelir. Uygun bir $S_m \notin m$ için

$$S_m \text{ çek } (\varphi(m)) = S_m \cdot co.\text{çek } (\varphi(m)) = 0$$

olur. $\{S_m\}$ ($m \in \max(R)$) elemanları R birim idealini oluşturur. O halde $m_1, \dots, m_k \in \max(R)$ olur. Örneğin $\{S_{m_1}, \dots, S_{m_k}\}$ R 'yi oluşturur. $d = \max\{d(m_1), \dots, d(m_k)\} = d(m_i)$ olsun. M_d 'nin projektifi olsun. O halde

$$pd_R(M) \leq d(m_1) = pd_{R_{m_1}}(M_{m_1})$$

olur. M_d sonlu biçimde verilen bir R -modüldür. M_d 'nin projektif olduğunu göstermek için $(M_d)_m$ 'nin herhangi bir $m \in \max(R)$ için serbest olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $i(1 \leq i \leq k)$ indeksi; olsun. Örneğin $S_{m_i} \notin m$ S_{m_i} her iki $\text{çek}(\varphi(m_i))$ ve $co\text{çek}(\varphi(m_i))$ 'yi yok ettiğinden $\varphi(m_i): R^{r(m_i)} \rightarrow M_{d(m_i)}$ m 'de bir izomorfizm oluşturur. $(M_{d(m_i)})_m$ R_m üzerinde serbesttir.

Diğer taraftan $d \geq d(m_i)$ dir. O halde $(M_{d(m_i)})_m$ projektif değiştirme operatörünün bir gücüne başvurarak ${}_1 \cdots {}_1(M_d)_m$ elde edilir. Bu da $(M_d)_m$ 'nin serbest olduğunu gösterir.

Teorem 4.10: R değişmeli Noetherion halka olsun. O zaman $M \in \max R$ için $gl \dim R_m = pd_R(R/m)$ ve $gl \dim R = \sup(gl \dim R_m)$ dir.

İspat: $m \in \max(R)$ ve $M = R/m$ olsun $M_m \cong \frac{R_m}{mR_m} (\cong R/m)$ ve m^1 maksimal ideali için $M_{m^1} = 0$ olduğundan

$$pd_R(R/m) = pd_{R_m}(R_m/mR_m) = gl \dim R_m$$

olup istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.11: R değişmeli Noetherion halka olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

- (1) $\mathfrak{p} \in Spec R$ için $R_{\mathfrak{p}}$ regüler lokal halkadır.
- (2) $m \in Max(R)$ için R_m regüler lokal halkadır.
- (3) $m \in Max(R)$ için $pd_R(m) < \infty$ dur.
- (4) $p \in Spec R$ için $pd_R(\mathfrak{p}) < \infty$ dur.
- (5) Sonlu üretilmiş bir M R – modül için $pd_R(M) < \infty$ dur.

Yukarıdaki şartlardan herhangi birini sağlayan Noetherion R – halkasına regüler halka denir. Böylece bir halkada $gl \dim R = \dim R$ dir.

İspat : (5) $\Rightarrow$ (4) p $f - g$ olduğundan açıktır. (4) $\Rightarrow$ (3) bir gereksiz tekrardır. (3) $\Rightarrow$ (2) $0 \rightarrow m \rightarrow R \rightarrow R/m \rightarrow 0$ tam dizinin bakışıyla (3) $pd(R/m) < \infty$ dur. Buradan $gl \dim R_m < \infty$ olur. O halde R_m herhangi bir $m \in Max(R)$ için düzenli bir

lokal halkadır. (2) $\Rightarrow$ (1) herhangi bir prime ideal $\mathfrak{p} \subset R$ bir maksimal ideal m de bulunur ve $R_{\mathfrak{p}} = R_m$ 'nin bir sonucudur.

Şimdi yukarıdaki denk durumlar değişmez olsun. O halde

$$\begin{aligned} gl.\dim R &= \sup\{gl.\dim R_m : m \in \text{Max}(R)\} \\ &= \sup\{\dim R_m : m \in \text{Max}(R)\} \\ &= \sup\{\text{height}(m) : m \in \text{Max}(R)\} \\ &= \dim R. \end{aligned}$$

olur.

Sonuç 4.12: R değişmeli Noetherian halka olsun. $gl.\dim R < \infty$ ise o zaman R regüler halkadır. Tersine yarı lokal halka ise sağlanır.

Teorem 4.13: R regüler halka ise $R[x]$ de regüler halkadır.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

Bu tez de genel olarak bir R halkasının ve bir M R -modülünün tanımı verilerek arasındaki ilişki incelenerek, R üzerinde çeşitli yöntemlerle tanımlanan halka teorisi içerisindeki modül teoremi üzerinde durulmuştur. Bu teorem homolojik yöntemlerin tanımlanması ile birlikte daha geniş bir alanda kullanılmaya başlanmıştır.

Örneğin R regüler lokal bir halka ve $p \triangleleft R$ asal ideal olsun. O zaman R_p de regüler lokal bir halkadır sonucu Krull'ın 1930'lu yıllarda çalıştığı bir problem idi. Yıllarca açık problem olarak kalan bu sonuç homolojik metotların gelişmesiyle birlikte çözüldü ve zamanla modül teoremi başlı başına bir konu olmuştur.

Modüllerin homolojik boyutlarını kullanarak bir halkanın global boyutu tanımlanmıştır. Bu homolojik değişmezler hem değişmeli, hem de değişmeli olmayan halkaları incelemek için yeni çözümler sunmaktadır.

Bu tez çalışmasında Projektif modülleri anlattıktan sonra genel olarak modüllerin projektif (homolojik) boyut teorilerinden bahsedilmektedir. Bu teoriler halkaların boyutları olarak tanımlanan bazı yeni sayısal değişmezlerin tanımlanmasını sağlamaktadır.

Değişmeli noetherian lokal bir R halkası regülerdir ancak ve ancak R 'nin global boyutu sonludur (Global boyutu Krull boyutuna eşittir.) teoremi kullanarak hem değişmeli hem de değişmeli olmayan halkalar incelenmiştir. Değişmeli bir R halkasının Krull boyutu asal ideallerin bütün zincirlerinin uzunluklarının maksimumuna denilmektedir.

(R, m) değişmeli Noetherian halka olmak üzere $k = R/m$ kabul edilerek $\dim R$ tam olarak $\text{height } m$ 'ye eşitliği ve $\text{height } m$ en fazla m maksimal idealinin minimal üreteç sayısı $V(R)$ olabileceği kanıtlanmıştır ve Nakayama'nın ön teoreminden $V(R) = \dim_k m/m^2$ olduğu gösterilmektedir.

$\dim R \leq V(R)$ eşitliği kabul edilerek $v(R) = \dim_k (m/m^2) = \dim R$ olduğunu gösterilmektedir. Bu da (R, m) lokal halkalarının regüler lokal halka olduğunu söyler. Regüler lokal bir halka tamlık bölgesidir. Sonuç olarak R regüler lokal bir halka ve $p \triangleleft R$ asal ideal olsun. O zaman R_p de regüler lokal bir halkadır.

Son olarak da R değişmeli Noetherian halka için $\mathfrak{p} \in \text{Spec} R$ için $R_{\mathfrak{p}}$ regüler lokal halkadır. $m \in \text{Max}(R)$ için R_m regüler lokal halkadır.

$m \in \text{Max}(R)$ için $pd_R(m) < \infty$ dur. $p \in \text{Spec} R$ için $pd_R(\mathfrak{p}) < \infty$ dur. Sonlu üretilmiş bir M R -modül için $pd_R(M) < \infty$ dur. Şartlarından her hangi birini sağlayan noetherian R halkası regüler halkadır teoreminden faydalanarak.

R değişmeli Noetherian halka için $gl.\dim R < \infty$ ise o zaman R regüler halkadır. Tersini yarı lokal halka ise sağlanır ve R regüler halka ise $R[x]$ de regüler halkadır sonuçlarına varılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Adamson T. (1972) Elementary rings and Modules University Mathematical Text
oliver and boyd
- [2] Auslander M., Buchbaum D., Homological Dimension in Local Rings, Proc.Not.
Acad.Sci., USA, 42, (1956)
- [3] Atiyah, M.F. ve Macdonald, I.G. (1969), *Introduction to Commutative Algebra*,
Addison-Wesley Publishing Company, 83
- [4] Eisenbud, David. (1999), *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic
geometry, Graduate texts in Mathematics.*
- [5] Eisenbud, D. (1995), *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic
geometry*, University of California Berkeley, 87–89
- [6] Hungerford, T. W. (1974), *Algebra*, Springer.
- [7] Kreuzer, M. ve Robbiano, L. (2000), *Computational Commutative Algebra 1*,
Springer-Verlag.
- [8] Lam T. Y., Lectures on Modules and Rings, Springer Werlag, (1998).
- [9] Mastasecu, F. Van Oystaeyen Reidel (1988) Dimensions of rings
- [10] Matsumura H., Commutative Ring Theory, Cambridge Uni. Press, Newyork, (1986).

- [11] McCannel, J.C. Rabson, J.C. Small, Lance W (2001) Revised, ed
Nancommutative Noetherian Rings, Graduat studies in Mathematics 30
- [12] Nagata M. (1962) Local Rings, J. Wiley Interscience, New York.
- [13] Olgun, N. ve Şahin, M.(2010), *Soyut Cebir*, Gaziantep
- [14] Sharp, R.Y. (1990), *Steps in Commutative Algebra*, Cambridge Universty
Pres,101–120
- [15] Sharp, R.Y. (2000), *Steps in Commutative Algebra* (2th ed.), Cambridge
Universty Pres, 62-77, 145-149
- [16] Zariski O. and Samuel P. (1958-60) Commutative Algebra, Vols. (!-2) Van
Nostrand.