



**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

DEĞİŞMELİ CEBİRLERİN 2 –ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİ VE MORFİZMLERİ İÇİN İZOMOR- FİZM TEOREMLERİ

Abdullah TURGUT

BURDUR, 2023

T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DEĞİŞMELİ CEBİRLERİN 2 –ÇAPRAZLANMIŞ
MODÜLLERİ VE MORFİZMLERİ İÇİN İZOMOR-
FİZM TEOREMLERİ

Abdullah TURGUT

Dr. Öğr. Üyesi Selim ÇETİN

BURDUR, 2023

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **“Değişmeli Cebirlerin 2 –Çaprazlanmış Modülleri Ve Morfizmleri İçin İzomorfizm Teoremleri”** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

13/ 01 / 2023

Abdullah TURGUT

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana her açıdan yol gösteren, karşılaştığım her zorlukta destek olan ve çalışmamı titizlikle takip eden çok değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Selim ÇETİN'e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardım ve desteğini benden hiç esirgemeyen, bilgi birikimi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dr. Öğr. Üyesi Utku Gürdal'a teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan eşim Havva Hanım'a, oğlum Mete'ye ve kızım Melis'e de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ocak, 2023

Abdullah TURGUT

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iii
ÖZET	v
1. GİRİŞ	7
2. GENEL BİLGİLER	8
3. CEBİRLERİN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLÜ	17
3.1. Değişmeli Cebirlerin Bölüm Çaprazlanmış Modülü	34
4. DEĞİŞMELİ CEBİRLERİN 2 –ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİ İÇİN İZOMOR- FİZM TEOREMLERİ	39
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	53
KAYNAKLAR	54

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\leq$	: Alt cebir, Alt çaprazlanmış modül, Alt çaprazlanmış kare
$\subseteq$	: Alt küme
$\not\subseteq$	: Alt küme değil
I_A	: Birim dönüşüm (A kümesi için)
$\cup$	: Birleşim
$\emptyset$	: Boş küme
$/$	: Bölüm
$\bar{\mu}$	: Bölüm çaprazlanmış modüllerin bölümünün sınır dönüşümü
$\bar{\mu}$	: Bölüm çaprazlanmış modülün sınır dönüşümü
çek	: Çekirdek
$\in$	: Elemanı
$\notin$	: Elemanı değil
$=$	: Eşit
$\neq$	: Eşit değil
$\cdot$	: Etki
$\setminus$	: Fark
$f : A \rightarrow B$	: Fonksiyon
$\Rightarrow$	: Gerek şart
$\Leftrightarrow$	: Gerek ve yeter şart
gör	: Görüntü
$\forall$	: Her
$\iota : A \hookrightarrow B$	: İçerme dönüşümü
$\trianglelefteq$	: İdeal
■	: İspat sonu
$\cong$	: İzomorf
$\times$	: Kartezyen çarpım
$\cap$	: Kesişim
$ $	: Kısıtlama
:	: Öyle ki

μ	: Sınır dönüşümü
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$:=$	: Tanım olarak eşit
Σ	: Toplam
$\supseteq$	: Üst küme
$\exists$	: Var
$\Leftarrow$	: Yeter şart



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Değişmeli Cebirlerin 2 –Çaprazlanmış Modülleri Ve Morfizmleri İçin İzomorfizm Teoremleri

Abdullah TURGUT

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Selim ÇETİN

Ocak, 2023

İzomorfizm Teoremleri grup ve halka teorilerinde önemli bir konuma sahip olup, cebirler için var olan izomorfizm teoremleri bilinen bir çok yapının temelini oluşturmaktadır. Whitehead'ın cebirleri için nitelendirdiği çaprazlanmış modül kavramı önemli cebirsel yapıdır. Başlangıçlı cebirlerde çaprazlanmış modüllerin izomorfizm teoremleri olup genel bir bakış açısı kazandırmaktadır.

Bu tez çalışmasının amacı değişmeli cebirler üzerinde 2 –çaprazlanmış modüllerin üç izomorfizm teoreminin de var olduğunu ve yapıların birbiri ile ilişkisinin olduğunu araştırmaktır. Böylelikle cebir teorisinde ve cebirsel topolojide temel yapıların aslında bir çok yeni konunun keşfine önemli ışık tutarak güncel yapılara rehberlik edecektir.

Anahtar Kelimeler: Değişmeli cebir, çaprazlanmış modül, izomorfizm teoremleri,
2 –çaprazlanmış modüller, kelebek teorisi

SUMMARY

M. Sc. Thesis

Isomorphism Theorems in 2 –Crossed Modules And Morphisms of Commutative Algebras

Abdullah TURGUT

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assit. Prof. Dr. Selim ÇETİN

January, 2023

Isomorphism Theorems have an important place in group and algebra theories, and the isomorphism theorems for algebras form the basis of many known structures. The crossed module concept that Whitehead describes for groups is an important algebraic structure. The beginning of this thesis is about the isomorphism theorems of crossed modules in commutative algebras and gives a general perspective.

The aim of this thesis study is to investigate the existence of all three isomorphism theorems of 2 –crossed modules on commutative algebras and the relationship between these structures. Thus, basic structures in algebraic theory and algebraic topology will actually guide the current structures by shedding important light on the discovery of many new topics.

Keywords: Commutative algebra, crossed modules, isomorphism theorems, 2-crossed modules, butterfly theory

1. GİRİŞ

Tarihte cebir konusu ve özellikleri matematiğin temelini oluşturmaktadır. Grup ve halka teorilerinde var olan yapıların yıllar süren araştırmalarla cebirler üzerinde de bir çok yapıyı taşıdığı keşfedilmiştir. Yapıların taşınabilmesi için gerekli olan homomorfizm ve izomorfizm teoremleri matematiğin en kıymetli özellikleridir. Whitehead'ın tanımladığı çaprazlanmış modül kavramı cebirlerde gerekli ve önemli bir yapıdır. İzomorfizm teoremlerinin birçok yapıya uygun olduğu görüldüğünden değişmeli cebirlerin 2 –çaprazlanmış modülleri için de var olup olmayacakları araştırılmıştır. Bu teoremlerin çaprazlanmış modüller için varlığı literatürde gösterildiğinden, bu tezde çaprazlanmış modül kavramının üzerine bir boyut daha eklenerek 2 –çaprazlanmış modüllerinde değişmeli cebirlerin üzerinde var olduğunu göstereceğiz.

Yapısal olarak değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modülü incelendiğinde, önemli ölçüde genişlemesini sürdürdüğü görülmektedir. Literatürde ilk defa çaprazlanmış modül kavramı Whitehead (J.H.C. Whitehead, 1949) tarafından gruplar üzerinde tanımlanarak özellikleri incelenmiştir. O zamandan itibaren çaprazlanmış modül kavramı bir çok alana önemli katkılar sağlamıştır. Birleşmeli ve değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modül ile ilgili farklı çalışmalar yapanlar M.Schlessinger, S.Lichtenbaum (1967) ve ayrıca M. Grestenhaber (1966) olmuştur. T. Porter (1986) yaptığı araştırmalarda çaprazlanmış modül kavramını değişmeli cebir üzerine en genel tanımı yapmıştır. Daha sonra T. Porter ve Z. Arvasi (1996,1997,1998) yaptığı çalışmalarda değişmeli cebirlerde çaprazlanmış modüllerle ilgili önemli bulgular elde edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, bu tez çalışması boyunca gerekli olacak olan bazı cebirsel tanımlara, teoremlere ve bunlardan bazılarının ispatlarına yer verilmiştir. Bu bölümdeki tanım ve teoremler literatürde iyi bilinen sonuçlar olup herhangi bir standart kaynakta, örneğin Thomas William Hungerford'un eserinde (Hungerford, 1974), Erkan Can'ın (Can, 2021) yüksek lisans tezinde ve Gürhan Kaya'nın (Kaya, 2022) yüksek lisans tezinde bulunabilir.

Tanım 2.1. (Grup): G boş olmayan bir küme ve bu küme üzerinde bir ikili işlem $*$ var olsun. Eğer aşağıdaki;

- (i) $\forall x, y \in G$ için $x * y \in G$ (Kapalılık özelliği)
- (ii) $\forall x, y, z \in G$ için $x * (y * z) = (x * y) * z$ (Birleşme özelliği)
- (iii) $\forall x \in G$ için $x * e = e * x$ olacak şekilde bir $e \in G$ olması (birim eleman özelliği)
- (iv) G 'nin birim eleman e olmak üzere G 'deki her x için,
 $x * x' = x' * x = e$ olacak şekilde bir $x' \in G$ vardır. (Ters eleman özelliği)
- (v) $\forall x, y \in G$ için $x * y = y * x$ oluyorsa (Değişme özelliği)

şartını da sağlayan $(G, *)$ cebirsel yapısına **değişmeli (komutatif ya da Abelyan) grup** denir.

Tanım 2.2. (Alt Grup): G bir grup olsun. $A \subseteq G$ ve $A \neq \emptyset$ için $\forall x, y \in A$ için $xy^{-1} \in A$ şartını sağlayan A 'ya G 'nin bir alt grubu denir. Eğer grup toplamsal olarak ifade edildiyse bu şart $x - y \in A$ şeklinde de yazılabilir.

Tanım 2.3. (Halka): H boş olmayan bir küme olmak üzere, küme üzerine

$$\begin{aligned} + : H \times H &\rightarrow H & \cdot : H \times H &\rightarrow H \\ (x, y) &\rightarrow x + y & (x, y) &\rightarrow x \cdot y \end{aligned}$$

iki ikili işlem tanımlansın.

- (i) $(H, +)$ değişmeli grup,
- (ii) H kümesi çarpma işlemine göre birleşme özelliğine sahip, yani $\forall x, y, z \in H$ için

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

ve

(iii) Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği

$\forall x, y, z \in H$ için

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

sağlansın. Bu durumda, $(H, +, \cdot)$ üçlüsüne bir halka denir.

(iv) Eğer H , $\forall x \in H$ için

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

olacak şekilde $1 \in H$ elemanı varsa H halkasına birimli halka denir. Ve bu eleman 1_H veya 1 ile gösterilir.

(v) Bir H halkasındaki $\forall x, y \in H$ için $x \cdot y = y \cdot x$ oluyorsa H 'ya değişmeli halka denir.

Not: Birimli bir halkada iki birim var olup birincisi, halkanın toplamaya göre bir grup olduğundan, toplama işlemine göre birim eleman 0_H ve ikincisi ise çarpma işlemine göre birim eleman 1_H dir.

Tanım 2.4. (Cisim): $\mathbb{K}$ değişmeli ve birimli bir halka olsun. $\forall \alpha \in \mathbb{K}; \alpha \neq 0$ için, $\exists \beta \in \mathbb{K}; \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = 1$ ise yani değişmeli $\mathbb{K}$ halkasının sıfırdan farklı her elemanın çarpmaya göre bir tersi varsa $\mathbb{K}$ 'ya bir cisim denir.

Tanım 2.5. (Vektör Uzayı): $(\mathcal{V}, \oplus)$ değişmeli grup ve $\mathbb{K}$ cisim olmak üzere aşağıdaki;

- (i) $(\mathcal{V}, \oplus)$ değişmeli gruptur.
- (ii) $\alpha \in \mathbb{K}$ ve $x \in \mathcal{V}$ için $\alpha \cdot x \in \mathcal{V}$
- (iii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ ve $\forall x, y \in \mathcal{V}$ için $\alpha \cdot (x \oplus y) = \alpha \cdot x \oplus \alpha \cdot y$
- (iv) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ve $\forall x \in \mathcal{V}$ için $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x \oplus \beta \cdot x$
- (v) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ve $\forall x \in \mathcal{V}$ için $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
- (vi) $\forall x \in \mathcal{V}$ için $1 \cdot x = x$ olacak şekilde $1 \in \mathbb{K}$ vardır.

aksiyomları sağlanıyorsa $\mathcal{V}$ 'ye $\mathbb{K}$ cismi üzerinde vektör uzayı denir.

Tanım 2.6. (Modül): $\mathcal{N}$ bir küme olsun. $(\mathcal{N}, \oplus)$ değişmeli grup ve $\mathbb{K}$ halka olmak üzere;

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall m, n \in \mathcal{N} \text{ için } \cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$$

- (i) $\alpha \cdot (m \oplus n) = \alpha \cdot m \oplus \alpha \cdot n$
- (ii) $(\alpha \oplus \beta) \cdot m = \alpha \cdot m \oplus \beta \cdot m$
- (iii) $\alpha \cdot (\beta \cdot m) = (\alpha\beta) \cdot m$
- (iv) $1_{\mathbb{K}} \cdot m = m$

şartlarını sağlayan yapı $\mathbb{K}$ – Modül olarak adlandırılır.

Not: Halka yapısı yerine $\mathbb{K}$ cismi alınırsa $\mathbb{K}$ – modül yapısı $\mathbb{K}$ – vektör uzayı olur.

Tanım 2.7. (Cebir): $\mathcal{E}$ boştan farklı bir küme olsun. $(\mathcal{E}, \oplus)$ değişmeli grup ve $\mathbb{K}$ cisim olmak üzere; $\mathcal{E}$ bir $\mathbb{K}$ – vektör uzayı olsun. R grubuna ikinci işlem olarak çarpma işlemi de tanımlandığında $\alpha \in \mathbb{K}$ ve $d, e, f \in \mathcal{E}$ için

$$\otimes : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

- (i) Birleşme özelliği:

$$(d \otimes e) \otimes f = d \otimes (e \otimes f)$$

- (ii) $\mathbb{K}$ –bi lineerlik özelliği:

$$(d \oplus e) \otimes f = (d \otimes f) \oplus (e \otimes f)$$

$$d \otimes (e \oplus f) = d \otimes e \oplus d \otimes f$$

$$\alpha(d \otimes e) = (\alpha \cdot d) \otimes e = d \otimes (\alpha \cdot e)$$

$$(d \otimes e) \cdot \alpha = d \otimes (e \cdot \alpha) = (d \cdot \alpha) \otimes e$$

oluşturulan yapıya iki taraflı $\mathbb{K}$ – cebiri denir. $\mathcal{E}$ ‘deki çarpma işleminin değişme özelliği varsa (her $d, e \in \mathcal{E}$ için $d \otimes e = e \otimes d$) birleşmeli ve değişmeli cebir denir.

Bu tez boyunca cebir denildiğinde birleşmeli ve değişmeli anlayacağız. Bütün $\mathbb{K}$ – cebirlerin kategorisi $\text{Alg}(\mathbb{K})$ ile gösterilir.

Not: tezin bundan sonraki kısmında kolaylık olması açısından $\oplus$ yerine $+$ ve $\otimes$ yerine elemanlar yan yana konularak kullanılacaktır.

Tanım 2.8. (Alt Cebir): $\mathcal{M}$ bir $\mathcal{E}$ – cebir olmak üzere $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ ve $\mathcal{A} \neq \emptyset$ için $\forall a, a' \in \mathcal{A}$ ve $e \in \mathcal{E}$ için aşağıdaki aksiyomları sağlayan $\mathcal{A}$ ’ya $\mathcal{M}$ ’nin alt cebiri denir.

- (i) $a - a' \in \mathcal{A}$
- (ii) $aa' \in \mathcal{A}$
- (iii) $e \cdot a \in \mathcal{A}$

Tanım 2.9. (İdeal): $\mathcal{A}$, $\mathcal{M}$ ’nin alt cebiri ve $\mathcal{M}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ ise, yani her $m \in \mathcal{M}$, $a \in \mathcal{A}$ için

- (i) $ma \in \mathcal{A}$

ise $\mathcal{A}$ 'ya $\mathcal{M}$ 'nin bir ideali denir. Eğer $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ alt kümesini kapsayan $\mathcal{M}$ 'nin bütün alt cebirlerinin kesişimi $\mathcal{M}$ 'ye eşit ise, $\mathcal{S}$ kümesinin $\mathcal{M}$ cebirini ürettiği söylenir. ı birim homomorfizmi göstermek üzere $\iota(x) = x$ şeklindedir.

Not: Grupların kategorisindeki grup izomorfizmler, grup izomorfizmi; kümeler kategorisindeki izomorfizmler, birebir örten fonksiyon, halkaların kategorisindeki izomorfizmler, halka izomorfizmidir.

Tanım 2.10. $\mathcal{E}$ cebirini halka gibi görüp $\mathcal{E}$ 'nin üzerine $\mathcal{M}$ cebirini inşaa etmek için aşağıdaki şartların sağlanması gerekmektedir;

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & r \in \mathcal{E} \text{ ve her } m \in \mathcal{M} \text{ için } r \cdot m \in \mathcal{M} \\
 (ii) \quad & \mathbb{k} \in \mathbb{K} \text{ ve her } m \in \mathcal{M} \text{ için } \mathbb{k}1_{\mathcal{E}} \in \mathcal{E} \\
 & (\mathbb{k}1_{\mathcal{E}}) \cdot m \Rightarrow \mathbb{k} \cdot (1_{\mathcal{E}}m) \Rightarrow \mathbb{k} \cdot m \\
 & (\mathbb{k}1_{\mathcal{E}}) \cdot m \in \mathcal{M}
 \end{aligned}$$

Tanım 2.11. $\mathcal{M}$ bir cebir $I, J \subseteq \mathcal{M}$ olmak üzere $I + J$ kümesi, $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$

ile tanımlanır. Ayrıca, $\{I_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\mathcal{M}$ 'nin alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere $\sum_{\lambda} I_{\lambda}$ kümesi $\sum_{\lambda} I_{\lambda} = \{a_{\lambda_1} + \dots + a_{\lambda_n} : a_{\lambda_1} \in I_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_n} \in I_{\lambda_n}, \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \Lambda\}$ dir.

Önerme 2.12. $\mathcal{M}$ bir cebir olsun.

- I , $\mathcal{M}$ 'nin bir ideali, J , $\mathcal{M}$ 'nin bir alt cebiri ise, $I + J$ de $\mathcal{M}$ 'nin bir alt cebiridir.
- $\{I_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\mathcal{M}$ 'nin ideallerinin bir ailesi ise $\sum_{\lambda} I_{\lambda}$ da $\mathcal{M}$ 'nin bir idealidir.

Önerme 2.13. $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ birer komutatif cebir, $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ bir $\mathbb{K}$ - cebir homomorfizmi olsun. Bu durumda, $\ker \varphi$, $\mathcal{M}$ 'nin bir idealidir ve $\text{gör} \varphi$, $\mathcal{M}'$ nin bir alt cebiridir.

İspat: $c_1, c_2 \in \ker \varphi$ ise $\varphi(\mathbb{k}_1 - \mathbb{k}_2) = \varphi(\mathbb{k}_1) - \varphi(\mathbb{k}_2) = 0_{\mathcal{M}'} - 0_{\mathcal{M}'} = 0_{\mathcal{M}'}$, olduğundan $\mathbb{k}_1 - \mathbb{k}_2 \in \ker \varphi$.

$c \in \mathcal{M}$, $\mathbb{k} \in \text{çek}\varphi$ ise $\varphi(c\mathbb{k}) = \varphi(c)\varphi(\mathbb{k}) = \varphi(c)0_{\mathcal{M}'} = 0_{\mathcal{M}'}$ olduğundan $c\mathbb{k} \in \text{çek}\varphi$ ve dolayısıyla $\text{çek}\varphi \trianglelefteq \mathcal{M}$ dir.

$g_1, g_2 \in \text{gör}\varphi$ olsun. $g_1 = \varphi(c_1)$, $g_2 = \varphi(c_2)$ olacak şekilde $c_1, c_2 \in \mathcal{M}$ vardır. $g_1 - g_2 = \varphi(c_1) - \varphi(c_2) = \varphi(c_1 - c_2)$ olup $c_1 - c_2 \in \mathcal{M}$ olduğundan $g_1 - g_2 \in \text{gör}\varphi$ dir. Skalerle çarpmada da benzer bir durum geçerli olduğu için $\text{gör}\varphi$ ' nin alt cebir olduğu görülür. ■

Teorem 2.14. (Cebirler için 1. İzomorfizm Teoremi) $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ birer değişmeli cebir olmak üzere, $\varphi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$

homomorfizmi ise $\mathcal{M}/\text{çek}\varphi \cong \text{gör}\varphi$ olur.

İspat: $\forall m \in \mathcal{M}$ için

$$\begin{aligned}\phi: \mathcal{M}/\text{çek}\varphi &\rightarrow \text{gör}\varphi \\ \phi(m + \text{çek}\varphi) &= \varphi(m)\end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa,

İyi tanımlılık şartı: $\forall m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ için

$$\begin{aligned}m_1 + \text{çek}\varphi = m_2 + \text{çek}\varphi &\Rightarrow m_1 - m_2 \in \text{çek}\varphi \\ &\Rightarrow \varphi(m_1 - m_2) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi(m_1) - \varphi(m_2) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi(m_1) = \varphi(m_2) \\ &\Rightarrow \phi(m_1 + \text{çek}\varphi) = \phi(m_2 + \text{çek}\varphi)\end{aligned}$$

Birebirlik şartı: $\forall m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ için

$$\begin{aligned}\phi(m_1 + \text{çek}\varphi) = \phi(m_2 + \text{çek}\varphi) &\Rightarrow \varphi(m_1) = \varphi(m_2) \\ &\Rightarrow \varphi(m_1) - \varphi(m_2) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi(m_1 - m_2) = 0 \\ &\Rightarrow m_1 - m_2 \in \text{çek}\varphi \\ &\Rightarrow m_1 + \text{çek}\varphi = m_2 + \text{çek}\varphi\end{aligned}$$

Örtenlik şartı: $g \in \text{gör}\varphi$ olsun. $\varphi(m) = g$ olacak şekilde $m \in \mathcal{M}$ vardır. $m + \text{çek}\varphi \in \mathcal{M}/\text{çek}\varphi$

elemanını ele alırsak $\phi(m + \text{çek}\varphi) = \varphi(m) = g$ elde edilir.

Homomorfizm şartı: $\forall m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ için

$$\begin{aligned}
\phi(m_1 + \text{çek}\phi + m_2 + \text{çek}\phi) &= \phi(m_1 + m_2 + \text{çek}\phi) \\
&= \phi(m_1 + m_2) \\
&= \phi(m_1) + \phi(m_2) \\
&= \phi(m_1 + \text{çek}\phi) + \phi(m_2 + \text{çek}\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi((m_1 + \text{çek}\phi)(m_2 + \text{çek}\phi)) &= \phi(m_1 m_2 + \text{çek}\phi) \\
&= \phi(m_1 m_2) \\
&= \phi(m_1)\phi(m_2) \\
&= \phi(m_1 + \text{çek}\phi)\phi(m_2 + \text{çek}\phi) \blacksquare
\end{aligned}$$

Önerme 2.15. $\mathcal{M}$ bir $\mathbb{K}$ – cebir, $\mathcal{J} \leq I \trianglelefteq \mathcal{M}$ ve $\mathcal{J} \trianglelefteq \mathcal{M}$ ise, $\mathcal{J} \trianglelefteq I$ ve $I/\mathcal{J} \trianglelefteq \mathcal{M}/\mathcal{J}$ ‘dir.

İspat: $\forall j \in \mathcal{J}$ ve $\forall i \in I$ olsun. $\mathcal{J} \trianglelefteq \mathcal{M}$ ve $i \in \mathcal{M}$ olduğu için $ji \in \mathcal{J}$ olur. Böylece $\mathcal{J} \trianglelefteq I$ ‘dir.

$I \subseteq \mathcal{M}$ olduğundan $I/\mathcal{J} \subseteq \mathcal{M}/\mathcal{J}$ ‘dir. $i_1 + \mathcal{J}, i_2 + \mathcal{J} \in I/\mathcal{J}$ ise $i_1, i_2 \in I$ olup $i_1 - i_2 \in I$ olmasından dolayı $(i_1 + \mathcal{J}) - (i_2 + \mathcal{J}) = i_1 - i_2 + \mathcal{J} \in I/\mathcal{J}$ dir. $\forall i \in I, \forall c \in \mathcal{M}$ olmak üzere

$i + \mathcal{J} \in I/\mathcal{J}$, $c + \mathcal{J} \in I/\mathcal{J}$ için $(i + \mathcal{J})(c + \mathcal{J}) = ic + \mathcal{J}$ ve $ic \in I$ olduğundan $(i + \mathcal{J})(c + \mathcal{J}) \in I/\mathcal{J}$ olur. Böylelikle $I/\mathcal{J} \trianglelefteq \mathcal{M}/\mathcal{J}$ olur. ■

Teorem 2.16. (Cebirler için 2. İzomorfizm Teoremi) $\mathcal{M}$ bir değişmeli $\mathbb{K}$ – cebir $\mathcal{J} \leq I \trianglelefteq$

$\mathcal{M}$ ve $\mathcal{J} \trianglelefteq \mathcal{M}$ ise, $\mathcal{M}/\mathcal{J} / I/\mathcal{J} \cong \mathcal{M}/I$ dir.

İspat: $\forall m \in \mathcal{M}$ için

$$\begin{aligned}
\varphi: \mathcal{M}/\mathcal{J} / I/\mathcal{J} &\rightarrow \mathcal{M}/I \\
\varphi(m + \mathcal{J} + I/\mathcal{J}) &= m + I
\end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa,

İyi tanımlılık şartı: $\forall m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ için $m_1 + \mathcal{J} + I/\mathcal{J} = m_2 + \mathcal{J} + I/\mathcal{J}$ ise $(m_1 + \mathcal{J}) - (m_2 + \mathcal{J}) \in I/\mathcal{J}$ yani $m_1 - m_2 + \mathcal{J} \in I/\mathcal{J}$ olur. Bu durumda, $m_1 - m_2 + \mathcal{J} = i + \mathcal{J}$

olacak şekilde en az bir $i \in I$ vardır. Buradan $m_1 - m_2 - i \in J \subseteq I$ olmasından dolayı

$$\begin{aligned} m_1 - m_2 &= (m_1 - m_2 - i) + i \in I \Rightarrow m_1 + I = m_2 + I \\ &\Rightarrow \varphi(m_1 + J + I/J) = \varphi(m_2 + J + I/J) \end{aligned}$$

Birebirlik şartı: $\forall m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ için

$$\begin{aligned} \varphi(m_1 + J + I/J) &= \varphi(m_2 + J + I/J) \Rightarrow m_1 + I = m_2 + I \\ &\Rightarrow m_1 - m_2 \in I \\ &\Rightarrow m_1 - m_2 + J \in I/J \\ &\Rightarrow (m_1 + J) - (m_2 + J) \in I/J \\ &\Rightarrow m_1 + J + I/J = m_2 + J + I/J \end{aligned}$$

Örtenlik şartı: $m \in \mathcal{M}$ olmak üzere, $m + I \in \mathcal{M}/J$ olsun. Bu durumda

$$m + J + I/J \in \mathcal{C}/J \Big/ I/J$$

olup

$$\varphi(m + J + I/J) = m + I$$

dır.

Homomorfizm şartı: $\forall m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ için

$$\begin{aligned} \varphi(m_1 + J + I/J + m_2 + J + I/J) &= \varphi(m_1 + m_2 + J + I/J) \\ &= m_1 + m_2 + I \\ &= m_1 + I + m_2 + I \\ &= \varphi(m_1 + J + I/J) + \varphi(m_2 + J + I/J) \end{aligned}$$

I/J)

$$\begin{aligned} \varphi((m_1 + J + I/J)(m_2 + J + I/J)) &= \varphi(m_1 m_2 + J + I/J) \\ &= m_1 m_2 + I \\ &= (m_1 + I)(m_2 + I) \\ &= \varphi(m_1 + J + I/J) \varphi(m_2 + J + I/J) \end{aligned}$$

I/J) ■

Önerme 2.17. $J \leq \mathcal{M}$, $I \trianglelefteq \mathcal{M}$ ise $I \cap J \trianglelefteq J$ ve $I + J \leq \mathcal{M}$ dir.

İspat: $i \in I \cap \mathcal{J}$ ve $j \in \mathcal{J}$ olsun. $i \in I$ ve $j \in \mathcal{M}$ olduğundan $ij \in I$, $i \in \mathcal{J}$ ve $j \in \mathcal{J}$ olduğundan $ij \in \mathcal{J}$. Böylece $ij \in I \cap \mathcal{J}$ 'dır. $i_1 + j_1, i_2 + j_2 \in I + \mathcal{J}$ olsun.

$$(i_1 + j_1) - (i_2 + j_2) = (i_1 - i_2) + (j_1 - j_2) \in I + \mathcal{J}$$

$$(i_1 + j_1)(i_2 + j_2) = (i_1 i_2 + i_1 j_2 + j_1 i_2) + j_1 j_2 \in I + \mathcal{J} \blacksquare$$

Teorem 2.18. (Cebirler için 3. İzomorfizm Teoremi)

$\mathcal{J} \leq \mathcal{M}$, $I \trianglelefteq \mathcal{M}$ ise $\mathcal{J}/I \cap \mathcal{J} \cong I + \mathcal{J}/I$ dir.

İspat: $\forall i \in I \cap \mathcal{J}$ ve $\forall j \in \mathcal{J}$ olmak üzere,

$$\varphi: \mathcal{J}/I \cap \mathcal{J} \rightarrow I + \mathcal{J}/I$$

$$\varphi(j + I \cap \mathcal{J}) = j + I$$

tanımlayalım.

İyi tanımlılık şartı: $\forall j_1, j_2 \in \mathcal{J}$ için $j_1 + I \cap \mathcal{J} = j_2 + I \cap \mathcal{J}$

olsun. Bu durumda $j_1 - j_2 \in I \cap \mathcal{J}$ olup $j_1 - j_2 \in I$ dir. Buradan, $j_1 + I = j_2 + I$ olup $\varphi(j_1 + I \cap \mathcal{J}) = \varphi(j_2 + I \cap \mathcal{J})$ elde edilir.

Birebirlik şartı: $\forall j_1, j_2 \in \mathcal{J}$ için

$$\varphi(j_1 + I \cap \mathcal{J}) = \varphi(j_2 + I \cap \mathcal{J}) \Rightarrow j_1 + I = j_2 + I$$

$$\Rightarrow j_1 - j_2 \in I$$

olur. Ayrıca $j_1, j_2 \in \mathcal{J}$ olduğundan $j_1 - j_2 \in \mathcal{J}$ olur. Dolayısıyla $j_1 - j_2 \in I \cap \mathcal{J}$ olup

$$j_1 + I \cap \mathcal{J} = j_2 + I \cap \mathcal{J}$$

olur.

Örtenlik şartı: $i \in I$, $j \in \mathcal{J}$ olmak üzere, $i + j + I \in I + \mathcal{J}/I$ olsun. $i \in I$ olduğundan,

$$i + j + I = i + I + j + I = I + j + I = j + I$$

olur. Ayrıca, $j + I \cap \mathcal{J} \in \mathcal{J}/I \cap \mathcal{J}$ için $\varphi(j + I \cap \mathcal{J}) = j + I = i + j + I$ olur.

Homomorfizm şartı: $\forall j_1, j_2 \in \mathcal{J}$ için

$$\varphi(j_1 + I \cap \mathcal{J} + j_2 + I \cap \mathcal{J}) = \varphi(j_1 + j_2 + I \cap \mathcal{J})$$

$$\begin{aligned}
&= j_1 + j_2 + I \\
&= j_1 + I + j_2 + I \\
&= \varphi(j_1 + I \cap \mathcal{J}) + \varphi(j_2 + I \cap \mathcal{J}) \\
\varphi((j_1 + I \cap \mathcal{J})(j_2 + I \cap \mathcal{J})) &= \varphi(j_1 j_2 + I \cap \mathcal{J}) \\
&= j_1 j_2 + I \\
&= (j_1 + I)(j_2 + I) \\
&= \varphi(j_1 + I \cap \mathcal{J})\varphi(j_2 + I \cap \mathcal{J})
\end{aligned}$$

elde edilir. ■



3. CEBİRLERİN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLÜ

Bu bölümde, değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modülleri ile ilgili tanımlara, teoremlere ve bunlardan bazılarının ispatlarına yer verilmiştir. Buradaki kavramların değişmeli cebirler için benzerleri Erkan Can'ın (Can, 2021) yüksek lisans tezinde bulunabilir.

$\mathcal{E}$ bir $\mathbb{K}$ – cebiri ve $\mathcal{M}$ bir $\mathcal{E}$ – cebiri olsun. $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$, $\mathbb{K}$ – cebir homomorfizmi verilsin. $\forall m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ için homomorfizmi olma şartlarını;

- (i) $\mu(m_1 + m_2) = \mu(m_1) + \mu(m_2)$
- (ii) $\mu(m_1 m_2) = \mu(m_1)\mu(m_2)$
- (iii) $\mu(\mathbb{K}m) = \mathbb{K}\mu(m)$

sağlamakta olup. $\cdot : \mathcal{E} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ yapısı ile

$$\text{CM1) Her } r \in \mathcal{E} \text{ ve Her } m \in \mathcal{M} \text{ için } \mu(r \cdot m) = r\mu(m)$$

$$\text{CM2) Her } m_1, m_2 \in \mathcal{M} \text{ için } \mu(m_1) \cdot m_2 = m_1 m_2$$

şartlarını sağlıyorsa $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ üçlüsüne birleşmeli ve değişmeli $\mathbb{K}$ – cebirinin çaprazlanmış modülleri denir.

Tanım 3.1. (Cebirlerin çaprazlanmış modül morfizmi) $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ve $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mu')$ iki $\mathbb{K}$ – cebir çaprazlanmış modül olsun. $(\psi, \phi) : (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu) \rightarrow (\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mu')$ dönüşümü ve Her $m, m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ ve her $\mathbb{K} \in \mathbb{K}$ için $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$

- (i) $\psi(m_1 + m_2) = \psi(m_1) + \psi(m_2)$
- (ii) $\psi(m_1 m_2) = \psi(m_1)\psi(m_2)$
- (iii) $\psi(\mathbb{K}m) = \mathbb{K}\psi(m)$

Her $e, e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ ve her $\mathbb{K} \in \mathbb{K}$ için $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$

- (i) $\phi(e_1 + e_2) = \phi(e_1) + \phi(e_2)$
- (ii) $\phi(e_1 e_2) = \phi(e_1)\phi(e_2)$
- (iii) $\phi(\mathbb{K}e) = \mathbb{K}\phi(e)$

$\mathbb{K}$ – cebir homomorfizmi olduğundan aşağıdaki şartları sağlamaktadır.

- (i) $\psi(e \cdot m) = \phi(e)\psi(m)$
- (ii) $\psi(m \cdot e) = \psi(m)\phi(e)$

Böylece her $e \in \mathcal{E}$, $m \in \mathcal{M}$ için

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{M} \\
\mu \downarrow & & \downarrow \mu' \\
\mathcal{E} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{E}'
\end{array}$$

diyagramı değişmeli (yani $\partial'\psi = \phi\mu$) ise (ψ, ϕ) ikilisine bir $\mathbb{K}$ – cebir çaprazlanmış modül morfizmi denir. $\mathbb{K}$ – cebir çaprazlanmış modülleri ve $\mathbb{K}$ – cebir çaprazlanmış modül morfizmlerinin kategorisi $\mathcal{M}Mod(\mathbb{K})$ ile gösterilir.

Tanım 3.2. $\mathcal{M}Mod(\mathbb{K})$ kategorisindeki $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ $\mathbb{K}$ – cebir çaprazlanmış modüllerinden $\mathcal{E}$ 'nin sabit tutuldukları çapraz modülleri göz önüne alalım. $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ 'a bir $\mathbb{K}$ – cebir çaprazlanmış $\mathcal{E}$ – modülü denir. $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$, $(\mathcal{M}', \mathcal{E}, \mu')$ iki $\mathbb{K}$ – cebir çaprazlanmış $\mathcal{E}$ – modül olmak üzere bunlar arasında ϕ birim dönüşüm ve (ψ, ϕ) $\mathbb{K}$ – cebir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere ψ 'ye bir $\mathbb{K}$ – cebir çaprazlanmış $\mathcal{E}$ – modül morfizmi denir.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{M}' \\
\mu \searrow & & \swarrow \mu' \\
& \mathcal{E} &
\end{array}$$

$(\mu' \psi = \mu)$

$\mathbb{K}$ – cebir çaprazlanmış $\mathcal{E}$ – modüller ve $\mathbb{K}$ – cebir çaprazlanmış $\mathcal{E}$ – modül morfizmlerinin kategorisi $\mathcal{M}Mod/\mathcal{E}$ ile gösterilir. Açık olarak $\mathcal{M}Mod(\mathbb{K})$ 'nın bir alt kategorisidir.

Örnek 3.3. $I, \mathcal{E}$ 'nin iki yanlı ideali ve $u: I \rightarrow \mathcal{E}$ içermeye dönüşümü olsun. Bu durumda $(I, \mathcal{E}, u)$ cebirlerin bir çaprazlanmış modülüdür. Her $\mathbb{k} \in \mathbb{K}$ ve $i, i_1 i_2 \in I$

$$\begin{aligned}
\mu: I &\rightarrow \mathcal{E} \\
\mu(i_1 + i_2) &= i_1 + i_2 = \mu(i_1) + \mu(i_2) \\
\mu(i_1 i_2) &= i_1 i_2 = \mu(i_1) \mu(i_2) \\
\mu(\mathbb{k}i) &= \mathbb{k}i = \mathbb{k} \mu(i)
\end{aligned}$$

olduğundan μ bir $\mathbb{K}$ – cebir homomorfizimidir.

$$\cdot : \mathcal{E}xI \rightarrow I$$

$$e \cdot i = ei$$

olarak tanımlayabiliriz. Çünkü $I, \mathcal{E}$ 'nin ideali olduğundan $e, i \in I$ dir. $\mathcal{E}$ 'nin I üzerine bir etkisi verilmiş olur. Burada,

Her $e \in \mathcal{E}$ ve $i, i_1, i_2 \in I$ için

$$\text{CM1)} \mu(e \cdot i) = \mu(ei) = ei = e\mu(i)$$

$$\text{CM2)} \mu(i_1) \cdot i_2 = i_1 \cdot i_2 = i_1 i_2$$

Böylece $(I, \mathcal{E}, u)$ bir $\mathbb{K}$ – cebir çaprazlanmış modüldür.

Önerme 3.4. $(g, id): (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu) \rightarrow (\mathcal{N}, \mathcal{E}, \nu)$ cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin homomorfizmi olsun.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{g} & \mathcal{N} \\ & \searrow \mu & \swarrow \nu \\ & \mathcal{E} & \end{array}$$

$$\mu = \nu g$$

$g(e \cdot m) = e \cdot g(m)$ olup. Eğer $(\mathcal{N}, \mathcal{E}, \beta) = (\mathcal{E}, \mathcal{E}, id)$ ise

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{g} & \mathcal{E} \\ & \searrow \mu & \swarrow id \\ & \mathcal{E} & \end{array}$$

$\mu = id \circ g$ olduğundan $\partial = g$ dir. Eğer $\beta = 0$ ise her $n_1, n_2 \in \mathcal{N}$ için

$$n_1 n_2 = \beta(n_1) \cdot n_2 = 0_{\mathcal{E}} \cdot n_2 = 0_{\mathcal{N}}$$

olduğundan $\mathcal{N}$ 'deki çarpma aşıkardır. Yani her $n_1, n_2 \in \mathcal{N}$ için $n_1 n_2 = 0_{\mathcal{N}}$ ' dır. Ve

$$\mu = \beta g = 0_g = 0$$

olduğundan $\mathcal{M}$ 'deki çarpma aşıkardır. $(\forall m_1, m_2 \in \mathcal{M}, m_1 m_2 = 0_{\mathcal{M}})$

Bilgi:

$$\begin{aligned} 0_{\mathcal{E}} \cdot n_2 &= (0_{\mathcal{E}} + 0_{\mathcal{E}})n_2 \\ &= 0_{\mathcal{E}}n_2 + 0_{\mathcal{E}}n_2 \\ &= 0_{\mathcal{E}}n_2 \end{aligned}$$

$$= 0$$

Diğer taraftan $g = 0$ olursa $\partial = \beta 0 = 0$ olacağından yine benzer şekilde $\forall m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ için $m_1 m_2 = 0_{\mathcal{M}}$ olur.

Tanım 3.5. $(f, id): (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu) \rightarrow (B, \mathcal{E}, \beta)$ ve $(g, id): (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu) \rightarrow (B, \mathcal{E}, \beta)$ cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin iki homomorfizmi olsun.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \\ & \xrightarrow{\quad g \quad} & \\ \mu \swarrow & & \searrow \beta \\ & \mathcal{E} & \end{array}$$

Eğer $\text{çek}\beta = 0_B$ ise, $\forall m \in \mathcal{M}$ için $\beta f(m) = \partial(m) = \beta g(m)$ olduğundan

$$\beta f(m) = \beta g(m)$$

$$\beta f(m) - \beta g(m) = 0_{\mathcal{E}}$$

$$\beta(f(m) - g(m)) = 0_{\mathcal{E}} \quad \because \beta, \mathcal{E} - \text{cebir homomorfizmi}$$

$$f(m) - g(m) \in \text{çek}\beta = 0_B$$

$$f(m) = g(m)$$

olup $f = g$ ' dir. Üstte verilen işlemler için yorum yapacak olursak $\mathcal{M}Mod/\mathcal{E}$ kategorisindeki cebirlerin bir $(B, \mathcal{E}, \beta)$ çaprazlanmış modülü için β bir monomorfizm ise bu durumda cebirlerin her $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ çaprazlanmış modülü için bir tek

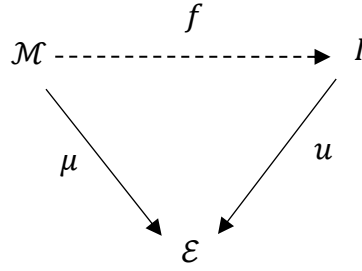
$$(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu) \rightarrow (B, \mathcal{E}, \beta)$$

$\mathbb{K}$ -cebirlerin çaprazlanmış modül morfizmi vardır. Dolayısıyla bu şekildeki $(B, \mathcal{E}, \beta)$ nesneleri $\mathcal{M}Mod/\mathcal{E}$ kategorisinde birer terminal objedir. Aksine $\text{çek}\beta \neq 0$ ise bu durumda $f(m) - g(m) \in \text{çek}\beta$ olmasından dolayı bir $m \in \text{çek}\beta$ için $f(m) = g(m) + m$ eşitliği vardır.

Tanım 3.6. $I, \mathcal{E}$ ' nin bir ideali olsun ve $\text{inc}_u: I \rightarrow \mathcal{E}$ içirme dönüşümü olmak üzere cebirlerin $(I, \mathcal{E}, u)$ çaprazlanmış modülünü ele alalım. $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ' da cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olsun. Bu durumda $\text{çek}u = 0_I$, dolayısıyla içirme dönüşümü bir monomorfizm olduğundan yukarıdaki sonuçtan dolayı

$$(f, id): (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu) \rightarrow (I, \mathcal{E}, u)$$

cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin homomorfizmi olacak şekilde tek bir $f: \mathcal{M} \rightarrow I$ fonksiyonu vardır.



Tanım 3.7. (Alt Çaprazlanmış Modül ve Çaprazlanmış Modüllerin İdealleri)

Bir $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$, $\mathcal{E}$ – çaprazlanmış modülünün bir alt çaprazlanmış modülü $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}'$ nin bir alt cebiri olmak üzere ve $\mu' = \mu|_{\mathcal{M}'}: \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{E}$ olacak şekilde bir $(\mathcal{M}', \mathcal{E}, \mu')$ $\mathcal{E}$ – çaprazlanmış modülüdür.

Önerme 3.8. $(\mathcal{M}', \mathcal{E}, \mu')$ ve $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$, $\mathcal{E}$ – çaprazlanmış modülünün bir alt çaprazlanmış modülü ise $\mathcal{M}', \mathcal{M}'$ nin bir idealidir.

İspat: $\forall m \in \mathcal{M}$ ve $\forall m' \in \mathcal{M}'$ olsun.

$$mm' = \mu m \cdot m' \in \mathcal{M}'$$

$$m'm = m' \cdot \mu m \in \mathcal{M}'$$

olduğundan $\mathcal{M}', \mathcal{M}'$ nin bir ideali olduğu görülür. ■

Örnek 3.9. $I, \mathcal{E}'$ nin bir ideali olsun. $id_{\mathcal{E}}$ birim dönüşümü ve $u: I \rightarrow \mathcal{E}$ içerme dönüşümü olmak üzere $(I, \mathcal{E}, u)$ çaprazlanmış modülü $(\mathcal{E}, \mathcal{E}, id_{\mathcal{E}})$ çaprazlanmış modülünün bir alt çaprazlanmış modülüdür.

Gerçekten,

$$\text{CM1)} \quad u(e \cdot i) = e \cdot i = ei = eu(i)$$

$$\text{CM2)} \quad u(i) \cdot j = i \cdot j = ij$$

dir.

Örnek 3.10. M bir modül ve N, M' nin herhangi bir alt modülü olmak üzere $(N, \mathcal{E}, 0)$, $(M, \mathcal{E}, 0)$ in bir alt çaprazlanmış modülüdür. Gerçekten bir M modülünün cebir olarak ele alınırsa ve $\forall m_1, m_2 \in M$ için $m_1 m_2 = 0_M$ olarak tanımlandığından,

$$\text{CM1)} \quad 0(e \cdot n) = 0_{\mathcal{E}} = 0_{\mathcal{E}} 0(n)$$

CM2) $0(n_1) \cdot n_2 = 0_{\mathcal{E}} \cdot n_2 = 0_M = n_1 n_2$ elde edilir.

Çaprazlanmış modüllerin ideallerini tanımlamadan önce, halkaların idealleri ile ilgili aşağıdaki özelliği dikkate alalım.

Önerme 3.11. $\mathcal{E}$ bir halka olmak üzere her $f: \mathcal{E} \rightarrow S$ halka homomorfizminin çekirdeği $\mathcal{E}'$ nin bir idealidir. Tersine, $\mathcal{E}'$ nin her bir ideali, en az bir halka homomorfizminin çekirdeğine eşittir.

İspat: $f: \mathcal{E} \rightarrow S$ bir halka homomorfizmi olsun. Her $e \in \mathcal{E}$ ve $c, c' \in \text{çek}f$ için, $f(c - c') = f(c) - f(c') = 0_s - 0_s = 0_s$ olduğundan $c - c' \in \text{çek}f$

$$f(ec) = f(e)f(c) = f(e)0_s = 0_s$$

$$f(ce) = f(c)f(e) = 0_s f(e) = 0_s$$

olduğundan $ce, ec \in \text{çek}f$ olur. Buradan $\text{çek}f, \mathcal{E}'$ nin ideali olur. Diğer taraftan, $\mathcal{E}'$ nin bir

I ideali verilsin. $\mathcal{E}/I$ bölüm halkasını oluşturarak; $q: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/I, q(e) = e + I$

Kanonik dönüşümünü ele alalım. $q(e) = 0_{\mathcal{E}/I} = I \Leftrightarrow e + I \Leftrightarrow e \in I$ olduğundan $\text{çek}q =$

I olur ve dolayısıyla I ideali bir halka homomorfizminin çekirdeğine eşittir. ■

Tanım 3.12. $(\mathcal{M}', \mathcal{E}, \mu'), (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ' in bir alt çaprazlanmış modülü olsun. $v: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{M}'$

,

$v(m) = m + \mathcal{M}'$ ve $\bar{\mu}: \mathcal{M}/\mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{E}, \bar{\mu}(m + \mathcal{M}') = \mu m$ olmak üzere $\mathcal{E}$ üzerindeki çapraz-

lanmış modüllerin

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{v} & \mathcal{M}/\mathcal{M}' \\ \mu \searrow & & \nearrow \bar{\mu} \\ & \mathcal{E} & \end{array}$$

morfizminin çekirdeğine eşitse $(\mathcal{M}', \mathcal{E}, \mu'), (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ' in $\mathcal{M}Mod/\mathcal{E}$ ' de bir ideali denir.

Dikkat edelim ki, $(\mathcal{M}', \mathcal{E}, \mu')$ ' nün $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ' in bir ideali olma tanımını sağlaması için

$$\mathcal{M}/\mathcal{M}' \xrightarrow{\bar{\mu}} \mathcal{E}$$

Üçlünün bir çaprazlanmış modül olması ve bunun içinde öncelikle $\bar{\mu}$ fonksiyonun iyi tanımlı olması gerekmektedir. $\bar{\mu}$ 'nin iyi tanımlılığından aşağıdaki şekilde karakterize edilebilir.

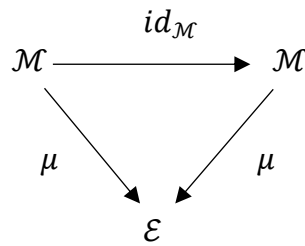
Önerme 3.13. $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ bir çaprazlanmış modül, $(\mathcal{M}', \mathcal{E}, \mu')$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ 'in bir çaprazlanmış alt modülü olmak üzere $\forall m \in \mathcal{M}$ için $\bar{\mu}(m + \mathcal{M}') = \mu m$ ile verilen $\bar{\mu}: \mathcal{M}/\mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{E}$, kuralının iyi tanımlı olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{M}' \subseteq \text{çek}\mu$ olmasıdır.

İspat: $\bar{\mu}$ iyi tanımlı ve $m' \in \mathcal{M}'$ olsun. Bu durumda $m + \mathcal{M}' = \mathcal{M}' = 0_{\mathcal{M}} + \mathcal{M}'$ olduğundan $\bar{\mu}(c + \mathcal{M}') = \bar{\mu}(0_{\mathcal{M}} + \mathcal{M}')$ olup $\mu(m') = \mu(0_{\mathcal{M}}) = 0_{\mathcal{E}}$ bulunur. Buradan $\mathcal{M}' \subseteq \text{çek}\mu$ elde edilir. Aksine; $\mathcal{M}' \subseteq \text{çek}\mu$ ise $m_1 + \mathcal{M}' = m_2 + \mathcal{M}'$ olması $m_1 - m_2 \in \mathcal{M}' \subseteq \text{çek}\mu$ olmasını gerektirdiğinden $\mu(m_1 - m_2) = 0_{\mathcal{E}}$ ve dolayısıyla $\mu m_1 = \mu m_2$ ve tanımı gereğince $\bar{\mu}(m_1 + \mathcal{M}') = \bar{\mu}(m_2 + \mathcal{M}')$ olur. Bu nedenle $\bar{\mu}$ iyi tanımlıdır. ■

Sonuç: Bir $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ çaprazlanmış modülünün bütün idealleri $\mathcal{M}' \subseteq \text{çek}\mu$ olacak şekildeki $(\mathcal{M}', \mathcal{E}, \mu)$ alt çaprazlanmış modülleridir.

Uyarı 3.14. $\mathcal{M}Mod/\mathcal{E}$ kategorisinde bölüm çaprazlanmış modülleri her zaman bulunamayabilir.

Örneğin,



diyagramında $\mathcal{M}/\mathcal{M}$ bölümü bir çaprazlanmış $\mathcal{E}$ – modül olmayı sağlamaz. Çünkü $\forall m \in \mathcal{M}$ için, $\mu m = \bar{\mu}(m + \mathcal{M}) = \bar{\mu}\mathcal{M} = 0_{\mathcal{E}}$ olması ∂ sıfır homomorfizmi olmaya ve $\mathcal{M}'$ deki çarpma işlemini aşıkarmaya zorlar.

Önerme 3.15. Çaprazlanmış $\mathcal{E}$ – modüllerin her morfizmi, bir monomorfizm ve onu takip eden bir regüler epimorfizme tek türlü şekilde ayrıştırılabilir.

İspat: $f: (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu) \rightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{E}, \beta)$, $\mathcal{E}$ – çaprazlanmış modüllerinin bir morfizmi olsun.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M} & \xrightarrow{f} & B \\
\mu \searrow & & \swarrow \beta \\
& \mathcal{E} &
\end{array}$$

$f(m) = 0_B \Rightarrow \mu m = \beta f(m) = \beta 0_B = 0_{\mathcal{E}}$ olduğundan $\text{çek}f \subseteq \text{çek}\mu$ dır. Böylece $(\text{çek}f, \mathcal{E}, \mu)$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ' ın bir idealidir. $\bar{\mu}: \mathcal{M}/\text{çek}f \rightarrow \mathcal{E}$, $\bar{\mu}(m + \text{çek}f) = \mu m$ ile tanımlanan $\bar{\mu}$ ile birlikte $(\mathcal{M}/\text{çek}f, \mathcal{E}, \bar{\mu})$ bir $\mathcal{E}$ - çaprazlanmış modüldür. Böylece; $\rho: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\text{çek}f$, $\rho(m) = m + \text{çek}f$ kanonik morfizmi $\mathcal{E}$ - çaprazlanmış modüllerin bir morfizmi olur.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{M}/\text{çek}f \\
\mu \searrow & & \swarrow \bar{\mu} \\
& \mathcal{E} &
\end{array}$$

Bu ρ morfizminin regüler epimorfizm olduğunu göstereceğiz.

$$\mathcal{M} \rtimes \text{çek}f = \{(m, f): m \in \mathcal{M}, f \in \text{çek}f\}$$

kümesini tanımlayalım ve bu küme üzerinde çarpma işlemini

$$(m, f)(m', f') = (mm', mf' + fm')$$

şeklinde tanımlayalım.

$$fm' = \partial fm' = 0_{\mathcal{E}}m' = 0_{\mathcal{M}}$$

$$mf' = m\partial f' = m0_{\mathcal{E}} = 0_{\mathcal{M}}$$

olduğundan $(m, f)(m', f') = (mm', mf' + fm') = (mm', 0_{\mathcal{M}})$ olur. Bu işlemle birlikte $\mathcal{M} \rtimes \text{çek}f$ kümesine, $\mathcal{M}$ ile $\text{çek}f$ 'in yarı direkt çarpımı denir ve $\mathcal{M} \rtimes \text{çek}f, \mathcal{E}$ çaprazlanmış modül yapısına sahiptir. Kolay olması açısından $T = \mathcal{M} \rtimes \text{çek}f$ diyelim. Burada $\mathcal{E}, T$ üzerine bilinen şekilde etki eder ve $\tau: T \rightarrow \mathcal{E}$ morfizmi $\tau(m, f) = \mu m$ şeklinde verilir.

CM1) $\forall e \in \mathcal{E}, \forall m \in \mathcal{M}$ ve $\forall f \in \text{çek}f$ olmak üzere,

$$\tau(e \cdot (m, f)) = \tau(e \cdot m, e \cdot f) = \mu(e \cdot m) = e\mu(m) = e\tau(m, f)$$

CM2) $\forall r \in \mathcal{E}, \forall m, m' \in \mathcal{M}$ ve $\forall f, f' \in \text{çek}f$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\tau(m, f) \cdot (m', f') &= \mu m \cdot (m', f') \\
&= (\mu m \cdot m', \mu m \cdot f')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (mm', mf') \\
&= (mm', mf' + m'f) \\
&= (m, f)(m', f')
\end{aligned}$$

olduğundan $(T, \mathcal{E}, \tau)$ bir $\mathcal{E}$ – çaprazlanmış modüldür. ■

Önerme 3.16. $s, t: T \rightarrow \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}
s(m, f) &= m \\
t(m, f) &= m + f
\end{aligned}$$

ile tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
s((m, f)(m', f')) &= s(mm', mf' + fm') \\
&= s(mm', 0_{\mathcal{M}}) \\
&= mm' \\
&= s(m, f)s(m', f') \\
t((m, f)(m', f')) &= t(mm', 0_{\mathcal{M}}) \\
&= mm' + 0_{\mathcal{M}} \\
&= mm' + ff' + mf' + fm' \\
&= (m + f)(m' + f') \\
&= t(m, f)t(m', f')
\end{aligned}$$

olduğundan s ve t birer $\mathcal{E}$ – cebir morfizmidir. Bunun yanında

$$\begin{aligned}
s(e \cdot (m, f)) &= s(e \cdot m, e \cdot f) = e \cdot m = e \cdot s(m, f) \\
t(e \cdot (m, f)) &= t(e \cdot m, e \cdot f) = e \cdot m + e \cdot f = e \cdot (m + f) = e \cdot t(m, f)
\end{aligned}$$

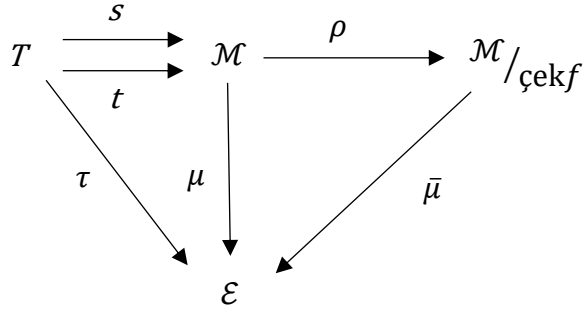
ve $\mu s(m, f) = \mu m = \tau(m, f)$

$$\mu t(m, f) = \mu(m + f) = \mu m + \mu f = \mu m + 0_{\mathcal{M}} = \mu m = \tau(m, f)$$

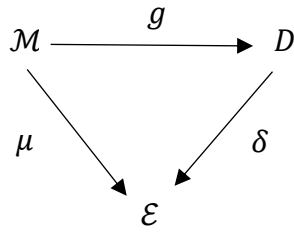
olduğundan s ve t birer çaprazlanmış $\mathcal{E}$ –modül morfizmidir. Ayrıca;

$$\begin{aligned}
\rho t(m, f) &= \rho(m + f) \\
&= \rho(m) + \rho(f) \\
&= (m + \text{çek}f) + (f + \text{çek}f) \\
&= (m + \text{çek}f) + \text{çek}f \\
&= m + \text{çek}f \\
&= \rho(m) \\
&= \rho s(m, f)
\end{aligned}$$

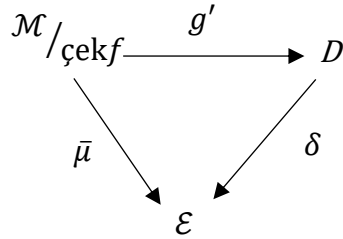
olduğundan $\rho t = \rho s$ dir. Böylece



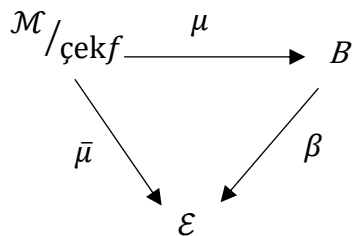
diyagramı değişmelidir. Burada, ρ bir regüler epimorfizmdir. Şimdi, çaprazlanmış $\mathcal{E}$ – modüllerin bir



morfizmi için $gs = gt$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $g'(m + \text{çekf}) = g(m)$ olacak şekilde tanımlanan tek bir



morfizmi vardır. $fs(m, f) = f(m) = f(m) + 0_B = f(m) + f(f) = ft(m, f)$ olduğundan $fs = ft$ olup buradan da



morfizmi $\mu(m + \text{çekf}) = f(m)$ ile tanımlanabilir. Şimdi bu μ 'nün monomorfizm olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{ccc}
X & \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{h'} \end{array} & \mathcal{M}/\text{çekf} \\
& \searrow \chi & \swarrow \bar{\mu} \\
& \mathcal{E} &
\end{array}$$

gibi h ve h' , $\mathcal{E}$ – çaprazlanmış modül morfizminin verildiği ve $\mu h = \mu h'$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{array}{ccccc}
X & \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{h'} \end{array} & \mathcal{M}/\text{çekf} & \xrightarrow{\mu} & B \\
& \searrow \chi & \downarrow \bar{\mu} & \swarrow \beta & \\
& & \mathcal{E} & &
\end{array}$$

$h \neq h'$ olduğunu varsayalım. Bu durumda en az bir $x \in X$ için $h(x) \neq h'(x)$ olur. $h(x) = x_1 + \text{çekf}$, $h'(x) = x_2 + \text{çekf}$ diyelim. Burada yukarıdaki kabul gereği $\mu h(x) = \mu h'(x)$ olduğundan $\mu(x_1 + \text{çekf}) = \mu(x_2 + \text{çekf})$ Buradan da $f(x_1) = f(x_2)$ olur. Böylece, $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 0_B$ olup $x_1 - x_2 \in \text{çekf}$ ' tir. Yani $x_1 + \text{çekf} = x_2 + \text{çekf}$ veya denk olarak $h(x) = h'(x)$ çelişkisi bulunur. Dolayısıyla, μ bir monomorfizmdir. Ve $f = \mu\rho$ olur. ■

Teorem 3.17. (1. İzomorfizm Teoremi) $f: (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu) \rightarrow (B, \mathcal{E}, \beta)$, $\mathcal{M}Mod/\mathcal{E}$ ' deki çaprazlanmış modüllerin bir morfizmi olsun. Bu durumda $(\mathcal{M}/\text{çekf}, \mathcal{E}, \bar{\mu}) \cong (\text{im}f, \mathcal{E}, \beta)$

İspat: $\forall m \in \mathcal{M}$ için $\bar{f}: \mathcal{M}/\text{çekf} \rightarrow \text{Im}f$. $\bar{f}(m + \text{çekf}) = f(m)$ ile tanımlı $\bar{f}$ fonksiyonunu ele alalım.

Örnek 3.18. $(\mathcal{E}, \mathcal{E}, 0)$ çaprazlanmış modülünün $\mathcal{M}Mod/\mathcal{E}$ kategorisindeki bütün idealleri $I, \mathcal{E}$ halkasının bir ideali olmak üzere $(I, \mathcal{E}, 0)$ şeklindeki bütün çaprazlanmış modülleridir.

Örnek 3.19. M bir $\mathcal{E}$ modül olmak üzere, M modülünü $(M, \mathcal{E}, 0)$ çaprazlanmış modülü olarak ele alırsak, M 'nin her N alt modülü, $(M, \mathcal{E}, 0)$ 'ın $(N, \mathcal{E}, 0)$ şeklindeki bir idealini verir.

Örnek 3.20. $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, Id_{\mathbb{Z}})$ çaprazlanmış modülünü ele alalım. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$j: n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$$

içerme dönüşümü ile birlikte $(n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, j)$ çaprazlanmış modülü $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, Id_{\mathbb{Z}})$ 'nin $\mathcal{M}Mod/\mathbb{Z}$ kategorisinde bir çaprazlanmış alt modülü olmakla birlikte bir ideali değildir.

$$\begin{array}{ccc} n\mathbb{Z} & \xrightarrow{j} & \mathbb{Z} \\ & \searrow j & \swarrow Id_{\mathbb{Z}} \\ & \mathcal{E} & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Ancak $n\mathbb{Z}$ hiçbir $\mathcal{M}Mod/\mathbb{Z}$ morfizminin çekirdeğine eşit olamaz ve dolayısıyla ideali de olamaz.

Önerme 3.21. $\{(\mathcal{M}_i, \mathcal{E}, \mu)\}_{i \in I}$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ çaprazlanmış $\mathcal{E}$ – modülünün çaprazlanmış alt modüllerinin bir ailesi ise, $(\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i, \mathcal{E}, \mu)$ da $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ 'ın bir çaprazlanmış alt modülüdür.

İspat: $m, m' \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$, $e \in \mathcal{E}$ olmak üzere Her $i \in I$ için $m + m' \in \mathcal{M}_i$ olacağından $m + m' \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$

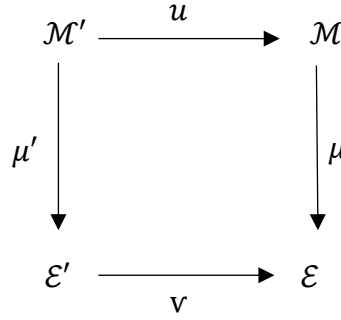
Her $i \in I$ için $mm' \in \mathcal{M}_i$ olacağından $mm' \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$. Her $i \in I$ için $e \cdot m \in \mathcal{M}_i$ olacağından $e \cdot m \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$ olduğu görülür. ■

Önerme 3.22. $\{(\mathcal{M}_i, \mathcal{E}, \mu)\}_{i \in I}$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ çaprazlanmış $\mathcal{E}$ – modülünün ideallerinin bir ailesi ise, $(\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i, \mathcal{E}, \mu)$ da $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ’ın bir idealidir.

İspat: Her bir $(\mathcal{M}_i, \mathcal{E}, \mu)$ ideal olduğundan her $i \in I$ için $\mathcal{M}_i \subseteq \text{çek}\partial$ ve böylece $\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i \subseteq \text{çek}\mu$ olup $(\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i, \mathcal{E}, \mu)$ bir idealdir. ■

Tanım 3.23. $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ $\mathbb{K}$ – cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olsun. $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ’ ın bir $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mu')$ alt çaprazlanmış modülü şu şekilde tanımlanır.

- i) $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}$ ’ nin alt cebiri ve $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}$ ’ nin alt halkasıdır.
- ii) $\mathcal{E}'$ ’ nün $\mathcal{M}'$ üzerine etkisi, $\mathcal{E}$ ’ nin $\mathcal{M}$ üzerine etkisinin kısıtlanmışıdır.
- iii) $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mu')$ bir çaprazlanmış $\mathcal{E}'$ – modülüdür.
- iv) Çaprazlanmış modüllerin $\mathcal{M}Mod(\mathbb{K})$ kategorisindeki morfizmlerinin



diyagramı, u ve v içermeye dönüşümlerini göstermek üzere değişmelidir.

Tanım 3.24. $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mu')$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ’ ın $\mathcal{M}Mod(K)$ kategorisinde bir alt çaprazlanmış modülü olsun. Eğer aşağıdakiler sağlanıyorsa $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mu')$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ’ ın bir ideali denir.

- i) $\mathcal{M}\mathcal{M}' \cup \mathcal{M}'\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ ‘dır ve $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}$ ’ nin idealidir.
- ii) $\mathcal{M}\mathcal{E}' \cup \mathcal{E}'\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$
- iii) $\mathcal{M}'$, $\mathcal{E}$ ‘nin etkisi altında kapalıdır, yani $\mathcal{E}\mathcal{M}', \mathcal{M}'\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}'$ dir.

Örnek 3.25. $(\mathcal{E}, \mathcal{E}, Id_{\mathcal{E}})$ çaprazlanmış modülünü ele alalım. I , $\mathcal{E}$ ’ nin ideali ve J , $\mathcal{E}$ ’ nin alt halkası, $I \subseteq J$ olmak üzere (I, J, inc) , $(\mathcal{E}, \mathcal{E}, Id_{\mathcal{E}})$ ’ nin bir alt çaprazlanmış modülüdür.

Gerçekten, I , $\mathcal{E}$ ‘nin ideali olduğu için alt cebiri ve J , $\mathcal{E}$ ‘nin alt halkası olmak üzere; I ideal, $J \subseteq \mathcal{E}$ olduğu için J, I ya $\mathcal{E}$ üzerinde aynı etkiyi yapar, aynı nedenle (I, J, inc) bir çaprazlanmış J – modüldür ve açık olarak

$$\begin{array}{ccc}
I & \xrightarrow{inc} & \mathcal{E} \\
inc \downarrow & & \downarrow Id_{\mathcal{E}} \\
J & \xrightarrow{inc} & \mathcal{E}
\end{array}$$

değişmelidir.

Örnek 3.26. I , $\mathcal{E}$ halkasının bir ideali ise, (I, I, Id_I) , $(\mathcal{E}, \mathcal{E}, Id_{\mathcal{E}})$ ' nin bir idealidir. Gerçekten, bir önceki örnekte J yerine I alırsak (I, I, Id_I) , $(\mathcal{E}, \mathcal{E}, Id_{\mathcal{E}})$ ' nin bir alt çaprazlanmış modülüdür. $II \cup II = II$ olup $\mathcal{E}'$ nin bir idealidir. $I\mathcal{E} \cup \mathcal{E}I = I \cup I = I \subseteq I$ dır ve $\mathcal{E}I = I\mathcal{E} = I \subseteq I$ olması sağlanır.

Örnek 3.27. I ve J , $\mathcal{E}'$ nin iki yanlı idealleri olsun. Bu durumda $(I \cap J, I, inc)$, $(J, \mathcal{E}, inc)$ ' in ideali ve $(I \cap J, J, inc)$, $(I, \mathcal{E}, inc)$ ' in idealidir. Gerçekten, $I \cap J$, J' nin ideali olduğundan alt cebirdir, I , $\mathcal{E}'$ nin ideali olduğu için alt halkasıdır. I , $I \cap J$ üzerine, $\mathcal{E}'$ nin J üzerine yaptığı etki gibi etki eder. $(I \cap J, I, inc)$, $I \cap J, I'$ nin ideali olduğu için bir çaprazlanmış I – modüldür ve

$$\begin{array}{ccc}
I \cap J & \xrightarrow{inc} & J \\
inc \downarrow & & \downarrow inc \\
I & \xrightarrow{inc} & \mathcal{E}
\end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Böylece $(I \cap J, I, inc)$, $(J, \mathcal{E}, inc)$ ' in bir alt çaprazlanmış modülü olur. Ayrıca, $(I \cap J)J \cup J(I \cap J) \subseteq I \cap J$ dir. I , $\mathcal{E}'$ nin idealidir, hem I hem J $\mathcal{E}'$ nin ideali olduğundan $JI \cup IJ \subseteq I$, $JI \cup IJ \subseteq J$ olur. Böylece $JI \cup IJ \subseteq I \cap J$ dır. $I \cap J$ de $\mathcal{E}'$ nin ideali olacağından $\mathcal{E}(I \cap J), (I \cap J)\mathcal{E} \subseteq I \cap J$ dır ve böylece $(I \cap J, I, inc)$,

$(\mathcal{J}, \mathcal{E}, inc)$ ' in bir idealidir. $(I \cap \mathcal{J}, \mathcal{J}, inc)$ ' nin $(I, \mathcal{E}, inc)$ ' in ideali olduğu da benzer şekilde görülür.

Önerme 3.28.

- i) $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modüllerinin herhangi bir $\{(I_i, \mathcal{J}_i, \mu_i)\}$ ailesinin kesişimi de bir alt çaprazlanmış modülüdür.
- ii) $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ çaprazlanmış modülünün ideallerinin herhangi bir $\{(I_i, \mathcal{J}_i, \mathcal{E}_i)\}$ ailesinin kesişimi de bir idealdir.

İspat:

i) Her i için I_i , $\mathcal{M}$ ' nin alt cebiri olduğundan $\cap I_i$ de $\mathcal{M}$ ' nin alt cebiridir. $\mathcal{J}_i$ ' ler $\mathcal{E}$ ' nin alt halkası olduğundan $\cap \mathcal{J}_i$ de $\mathcal{E}$ ' nin alt halkasıdır. $j \in \cap \mathcal{J}_i$, $\iota \in \cap I_i$ olsun. Bu durumda her i için $j \in \mathcal{J}_i$ ve $\iota \in I_i$ olduğundan $j \cdot \iota \in I_i$ olur ki, buradan $j \cdot \iota \in \cap I_i$ bulunur. Her bir $(I_i, \mathcal{J}_i, \mu_i)$ bir çaprazlanmış modül olduğundan

CM1) Her $\iota \in \cap I_i$, $j \in \cap \mathcal{J}_i$ için $\partial(j \cdot \iota) = j\mu\iota$

CM2) Her $\iota_1, \iota_2 \in \cap I_i$ için $\partial(\iota_1) \cdot \iota_2 = \iota_1\iota_2$

olduğu etkinin ve sınır dönüşümünün $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ' daki etki ve sınır dönüşümünün kısıtlamaları olmasından görülür. Ayrıca, açık olarak

$$\begin{array}{ccc} \bigcap I_i & \xrightarrow{inc} & \mathcal{M} \\ \mu| \downarrow & & \downarrow \mu \\ \bigcap \mathcal{J}_i & \xrightarrow{inc} & \mathcal{E} \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

ii) $(\cap I_i, \cap \mathcal{J}_i, \mu_i)$ ' nin alt çaprazlanmış modülü olduğu ilk kısımdan görülmektedir. $\cap(I_i \mathcal{M}) = (\cap I_i)\mathcal{M}$ ve $\cap(\mathcal{M}I_i) = \mathcal{M}(\cap I_i)$ olduğundan dikkat edilirse her i için $I_i \mathcal{M} \subseteq I_i$ ve $\mathcal{M}I_i \subseteq I_i$ olmasından, $(\cap I_i)\mathcal{M} \cup \mathcal{M}(\cap I_i) \subseteq \cap I_i$ olur. Her bir $\mathcal{J}_i$, $\mathcal{E}$ ' nin ideali olduğundan $\cap \mathcal{J}_i$ de $\mathcal{E}$ ' nin bir idealidir. Yine her i için, $\mathcal{M}\mathcal{J}_i \subseteq I_i$ ve $\mathcal{J}_i\mathcal{M} \subseteq I_i$ olduğundan, her iki tarafta kesişiminin alınmasıyla $\cap(\mathcal{M}\mathcal{J}_i) \cup \cap(\mathcal{J}_i\mathcal{M}) \subseteq \cap I_i$ ve dolayısıyla, $\mathcal{M}(\cap \mathcal{J}_i) \cup (\cap \mathcal{J}_i)\mathcal{M} \subseteq \cap I_i$ elde edilir. Son olarak, $\mathcal{E}(\cap I_i) \subseteq \cap I_i$ ve $(\cap I_i)\mathcal{E} \subseteq \cap I_i$ olduğu benzer şekilde kesişim olarak görülür. ■

Önerme 3.29. Yukarıdaki önermede varlığı gösterilen $(\cap I_i, \cap J_i, \mu_i)$ alt çaprazlanmış modül veya ideali, $\cap(I_i, J_i, \mu_i)$ şeklinde de gösterilir.

Teorem 3.30. $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olsun.

- a) $(I, J, \mu) \trianglelefteq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ve $(B, Q, \mu) \leq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ise $(I + B, J + Q, \mu) \leq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ olur.
- b) $\{(I_\lambda, J_\lambda, \mu)\}_{\lambda \in \Lambda}$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ 'ın ideallerinin bir ailesi ise, $(\sum_\lambda I_\lambda, \sum_\lambda J_\lambda, \mu) \trianglelefteq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ olur.

İspat:

a) Cebirler için ilgili teorem gereğince, $I \trianglelefteq \mathcal{M}$ ve $B \leq \mathcal{M}$ olduğundan $I + B \leq \mathcal{M}$, $J \trianglelefteq \mathcal{E}$ ve $Q \leq \mathcal{E}$ olduğundan $J + Q \leq \mathcal{E}$ olur. $j + q \in J + Q$ ve $i + b \in I + B$ olsun. $(j + q) \cdot (i + b) = (j \cdot i + j \cdot b + q \cdot i) + q \cdot b \in I + B$

b) Cebirlerin idealleri toplamı için ilgili teorem gereğince $\sum_\lambda I_\lambda \trianglelefteq \mathcal{M}$ ve $\sum_\lambda J_\lambda \trianglelefteq \mathcal{E}$ olur. $\sum_\lambda j_\lambda \in \sum_\lambda J_\lambda$ ve $c \in \mathcal{M}$ olsun. $c \cdot \sum_\lambda j_\lambda = \sum_\lambda c \cdot j_\lambda$ ve her λ için $(I_\lambda, J_\lambda, \mu) \trianglelefteq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ olduğundan $c \cdot j_\lambda \in I_\lambda$ olup, $c \cdot \sum_\lambda j_\lambda \in \sum_\lambda I_\lambda$ olur. Benzer şekilde, $r \in \mathcal{E}$ ve $\sum_\lambda i_\lambda \in \sum_\lambda I_\lambda$ için $r \cdot \sum_\lambda i_\lambda = \sum_\lambda r \cdot i_\lambda \in \sum_\lambda I_\lambda$ olur. ■

Önerme 3.31. $(\psi, \phi): (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu) \rightarrow (D, S, \delta)$ bir $\mathcal{M}Mod(\mathbb{K})$ morfizmi olmak üzere $(\psi, \phi, \mu) \trianglelefteq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ olur.

İspat: $\psi: \mathcal{M} \rightarrow D$, $\mathcal{E}$ – cebir homomorfizmi, $\phi: \mathcal{E} \rightarrow S$, $\mathbb{K}$ – cebir homomorfizmi olduğundan $\psi, \phi \trianglelefteq \mathcal{E}$ olur. Ayrıca $(\psi, \phi), \mathcal{M}Mod(\mathbb{K})$ morfizmi olduğundan $c \in \psi$, $e \in \mathcal{E}$ ise $\psi(e \cdot c) = \phi(e) \cdot \psi(c) = \psi(e) \cdot 0 = 0$ olup $e \cdot c \in \psi$ 'dir. $m \in \mathcal{M}$, $d \in \phi$ ise $\psi(d \cdot m) = \phi(d) \cdot \psi(m) = 0 \cdot \psi(m) = 0$ olup $d \cdot m \in \psi$ 'dir. Ayrıca $c \in \psi$ ise $\phi(\mu c) = \mu(\psi c) = \mu 0 = 0$ olduğundan $\mu c \in \phi$ dir.



İspat: $d \in \text{gör}\psi$, $s \in \text{im}\phi$ olsun. $m \in \mathcal{M}$, $e \in \mathcal{E}$ olmak üzere $d = \psi(m)$, $s = \phi(e)$ diyelim. $s \cdot d = \phi(e) \cdot \psi(m) = \psi(e \cdot m)$ olduğundan $s \cdot d \in \text{çek}\psi$ ‘dir. Ayrıca $d = \psi(m)$ olmak üzere $d \in \text{gör}\psi$ ise $\delta(d) = \delta(\psi(m)) = \phi(\mu m)$ olup $\delta(d) \in \text{gör}\phi$ elde edilir.



34

'dır. Böylece her $j \in \mathcal{J}$ için $j \cdot (m + I) = I$ olup $\mathcal{J}$, $\mathcal{M}/I$ üzerine aşık bir etkisi bulunmaktadır. $\mathcal{E}/\mathcal{J}$ 'nin $\mathcal{M}/I$ 'ya etkisini $(e + \mathcal{J}) \cdot (m + I) = e \cdot m + I$ ile tanımlayalım. Bu iyi tanımlıdır, çünkü

$e + \mathcal{J} = e' + \mathcal{J}$ ve $m + I = m' + I$ ise $e - e' \in \mathcal{J}$ ve $m - m' \in I$ 'dir.

$$(I, \mathcal{J}, \mu) \cong (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$$

olmasından,

$$m \in \mathcal{M}, e - e' \in \mathcal{J} \Rightarrow (e - e') \cdot m \in I, m - m' \in I, e' \in \mathcal{J} \Rightarrow e \cdot (m - m') \in I$$

olup

$$(e - e') \cdot m + e' \cdot (m - m') = e \cdot m - e' \cdot m + e' \cdot m - e' \cdot m' = e \cdot m - e' \cdot m' \in I$$

olur.

Böylece, $e \cdot m + I = e' \cdot m' + I$ dir. $\bar{\mu}: \mathcal{M}/I \rightarrow \mathcal{E}/\mathcal{J}$ fonksiyonu, $\bar{\mu}(m + I) = \mu m + \mathcal{J}$ ile tanımlayalım. Bu fonksiyon iyi tanımlıdır. Gerçekten, $m + I = m' + I$ ise $(m - m') \in I$ olur ve $\mu(m - m') \in \mathcal{J} \Rightarrow \mu m - \mu m' \in \mathcal{J} \Rightarrow \mu m + \mathcal{J} = \mu m' + \mathcal{J}$ dir. $\bar{\mu}$ 'nin bir $\mathcal{E}/\mathcal{J}$ - cebir homomorfizmi olduğu da açıktır. Böylece $(\mathcal{M}/I, \mathcal{E}/\mathcal{J}, \bar{\mu})$ cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olur. Bu çaprazlanmış modülü $\frac{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)}{(I, \mathcal{J}, \mu)}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.1.1. (Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri için 1. İzomorfizm Teoremi)

$(\psi, \phi): (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu) \rightarrow (D, S, \delta)$ çaprazlanmış modüllerin bir morfizmi olmak üzere

$$\frac{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)}{(I, \mathcal{J}, \mu)} \cong (\text{gör}\psi, \text{gör}\phi, \delta) \text{ dir.}$$

İspat: Cebirler için 1. İzomorfizm Teoremi uygulandığında $\alpha: \mathcal{M}/\text{çek}\psi \rightarrow \text{gör}\psi$,

$\alpha(m + \text{çek}\psi) = \psi(c)$ ve $\beta: \mathcal{E}/\text{çek}\phi \rightarrow \text{gör}\phi$, $\beta(r + \text{çek}\phi) = \phi(e)$ fonksiyonlarının bi-

rer cebir izomorfizm oldukları bilinmektedir. Böylece $\frac{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)}{(\text{çek}\psi, \text{çek}\phi, \mu)} \cong (\text{gör}\psi, \text{gör}\phi, \delta)$ ol-

duğunu göstermek için yalnızca, $(\alpha, \beta): (\mathcal{M}/\text{çek}\psi, \mathcal{E}/\text{çek}\phi, \bar{\mu}) \rightarrow (\text{gör}\psi, \text{gör}\phi, \delta)$ ikili-sinin bir $\mathcal{M}Mod(\mathbb{K})$ morfizmi olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}/\text{\texttt{cek}}\psi & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \mathcal{E}/\text{\texttt{cek}}\phi \\
\alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
\text{im}\psi & \xrightarrow{\delta} & \text{im}\phi
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\beta(\bar{\delta}(m + \text{\texttt{cek}}\psi)) &= \beta(\mu m + \text{\texttt{cek}}\phi) \\
&= \phi(\mu m) \\
&= \delta(\psi(m)) \\
&= \delta(\alpha(m + \text{\texttt{cek}}\psi))
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\beta\bar{\mu} = \delta\alpha$$

olup yukarıdaki diyagram değişmelidir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\beta(e + \text{\texttt{cek}}\phi) \cdot \alpha(m + \text{\texttt{cek}}\psi) &= \phi(e) \cdot \psi(m) \\
&= \psi(e \cdot m) \\
&= \alpha(e \cdot m + \text{\texttt{cek}}\psi) \\
&= \alpha((e + \text{\texttt{cek}}\phi) \cdot (m + \text{\texttt{cek}}\psi))
\end{aligned}$$

olduğundan (α, β) bir $\mathcal{M}Mod(\mathbb{K})$ izomorfizmidir. ■

Teorem 3.1.2. (Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri için 2. İzomorfizm Teoremi)

$(M, N, \mu) \leq (I, J, \mu) \trianglelefteq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ve $(M, N, \mu) \trianglelefteq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ise $(M, N, \mu) \trianglelefteq (I, J, \mu)$ ve

$$\frac{\frac{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)}{(M, N, \mu)}}{\frac{(I, J, \mu)}{(M, N, \mu)}} \cong \frac{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)}{(I, J, \mu)}$$

olur.

İspat: İlk olarak $(M, N, \mu) \trianglelefteq (I, J, \mu)$ olduğunu gösterelim. $(M, N, \mu) \trianglelefteq (I, J, \mu)$ ve

$(M, N, \mu) \trianglelefteq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ olduğu verilmiştir. $I \subseteq \mathcal{M}$, $J \subseteq \mathcal{E}$ olduğundan $i \in I$, $j \in J$, $m \in$

M , $n \in N$ için $j \cdot m$, $i \cdot n \in M$ olup $(M, N, \mu) \trianglelefteq (I, J, \mu)$ bulunur. Şimdi izomorfizm teo-

remini gösterelim. Cebirler için 2. İzomorfizm Teoremi'nden $\alpha: \mathcal{M}/M/I/M \rightarrow \mathcal{M}/I$,

$\alpha(m + M + I/M) = m + I$ ve $\beta: \mathcal{E}/N/\mathcal{J}/N \rightarrow \mathcal{E}/\mathcal{J}, \beta(e + N + \mathcal{J}/N) = e + \mathcal{J}$ fonksiyonlarının birer cebir izomorfizm olduklarını bilinmekteyiz. Böylece, teoremi ispatlamak

için sadece $(\alpha, \beta): \left(\mathcal{M}/M/I/M, \mathcal{E}/N/\mathcal{J}/N, \bar{\mu} \right) \rightarrow (\mathcal{M}/I, \mathcal{E}/\mathcal{J}, \bar{\mu})$

ikilisinin bir $\mathcal{M}Mod(\mathbb{K})$ morfizmi olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}/M/I/M & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \mathcal{E}/N/\mathcal{J}/N \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \mathcal{M}/I & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \mathcal{E}/I \end{array}$$

$$\begin{aligned} \beta \bar{\mu}(m + M + I/M) &= \beta(\bar{\mu}(m + M) + \mathcal{J}/N) \\ &= \beta(\mu m + N + \mathcal{J}/N) \\ &= \mu m + \mathcal{J} \\ &= \bar{\mu}(m + I) \\ &= \bar{\mu} \alpha(m + M + I/M) \end{aligned}$$

olduğundan $\beta \bar{\mu} = \bar{\mu} \alpha$ olup diyagram değişmelidir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \beta(e + N + \mathcal{J}/N) \cdot \alpha(m + M + I/M) &= (e + \mathcal{J}) \cdot (m + I) \\ &= e \cdot m + I \\ &= \alpha(e \cdot m + M + I/M) \\ &= \alpha((e + N) \cdot (m + M) + I/M) \\ &= \alpha((e + N + \mathcal{J}/N) \cdot (m + M + I/M)) \end{aligned}$$

olduğundan (α, β) bir $\mathcal{M}Mod(\mathbb{K})$ izomorfizmidir. ■

Teorem 3.1.3. (Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri için 3. İzomorfizm Teoremi)

$(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ cebirlerin bir çaprazlanmış modülü ve $(B, Q, \mu) \leq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ve $(I, \mathcal{J}, \mu) \trianglelefteq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu)$ ise $\frac{(B, Q, \mu)}{(B \cap I, Q \cap \mathcal{J}, \mu)} \cong \frac{(B + I, Q + \mathcal{J}, \mu)}{(I, \mathcal{J}, \mu)}$ olur.

İspat: Cebirler için 3. İzomorfizm Teoremi'nden $\alpha: B/B \cap I \rightarrow B + I/I$,

$$\alpha(b + B \cap I) = b + I \text{ ve } \beta: Q/Q \cap J \rightarrow Q + J/J, \beta(q + Q \cap J) = q + J$$

fonksiyonlarının izomorfizm olduklarını biliyoruz. Geriye sadece,

$(\alpha, \beta): (B/B \cap I, Q/Q \cap J, \tilde{\mu}) \rightarrow (B + I/I, Q + J/J, \bar{\mu})$ ikilisinin $\mathcal{M}Mod(\mathbb{K})$ mor-
fizmi olduğunu göstermek kalır.

$$\begin{array}{ccc} B/B \cap I & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & Q/Q \cap J \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ B + I/I & \xrightarrow{\bar{\mu}} & Q + J/J \end{array}$$

$$\begin{aligned} \beta \tilde{\mu}(b + B \cap I) &= \beta(\mu b + Q \cap J) \\ &= \mu b + J \\ &= \bar{\mu}(b + I) \\ &= \bar{\mu} \alpha(b + B \cap J) \end{aligned}$$

olduğundan $\beta \tilde{\mu} = \bar{\mu} \alpha$ olup diyagram değişmelidir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \beta(q + Q \cap J) \cdot \alpha(b + B \cap I) &= (q + J) \cdot (b + I) \\ &= q \cdot b + I \\ &= \alpha(q \cdot b + B \cap I) \\ &= \alpha((q + Q \cap J) \cdot (b + B \cap I)) \blacksquare \end{aligned}$$

4. DEĞİŞMELİ CEBİRLERİN 2 – ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİ İÇİN İZOMORFİZM TEOREMLERİ

Tanım 4.1. $\mathcal{M}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{T}$ birleşmeli ve değişmeli $\mathbb{K}$ – cebirler ve $\mu_1: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T}$ ile $\mu_2: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$; gör $\mu_2 \subseteq$ çek μ_1 olmasını sağlayacak şekilde homomorfizmler olsun. Bu durumda

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\mu_2} \mathcal{E} \xrightarrow{\mu_1} \mathcal{T}$$

cebirsel yapısı, birleşmeli ve değişmeli $\mathbb{K}$ – cebirlerin 2 – zincir kompleksi olarak adlandırılır. İlaveten eğer gör $\mu_2 \trianglelefteq \mathcal{E}$ ve gör $\mu_1 \leq \mathcal{T}$ ise bu durumda yukarıdaki 2 – komplekse bir normal 2 – zincir kompleksi denir.

Tanım 4.2. Birleşmeli ve değişmeli $\mathbb{K}$ – cebirlerin bir

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\mu_2} \mathcal{E} \xrightarrow{\mu_1} \mathcal{T}$$

normal 2 – kompleksi ve $\{, \}: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$, şeklinde bir ekstra bilineer dönüşüm verilsin. $\mathcal{T}$ 'nin $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{E}$ üzerindeki etkisi ile $\mathcal{E}$ 'nin $\mathcal{M}$ üzerindeki etkisi bulunduğunu varsayalım. $t \in \mathcal{T}$, $e \in \mathcal{E}$ ve $m \in \mathcal{M}$ olmak üzere $e \cdot t$, $m \cdot t$, $m \cdot e$ etkileri gösterebilir. Aşağıdaki koşulların her $m, m_1, m_2 \in \mathcal{M}$, $e, e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{E}$ ve $t \in \mathcal{T}$ için geçerli olması durumunda bu yapı bir 2 – çaprazlanmış modül olarak adlandırılır.

- (1) $\mu_1(e \cdot t) = \mu_1(e)t$ ve $\mu_2(m \cdot t) = \mu_2(m) \cdot t$
- (2) $\mu_2\{e_1, e_2\} = e_1 \cdot \mu_1(e_2) - e_1e_2$
- (3) $\{\mu_2(m_1), \mu_2(m_2)\} = -m_1m_2$
- (4) $\{\mu_2(m), e\}_1 = m \cdot \mu_1(e) - m \cdot e$
- (5) $\{e, \mu_2(m)\} = -m \cdot e$
- (6) $\{e_1, e_2e_3\} = \{e_1, e_2\} \cdot \mu_1(e_3) + \{e_1e_2, e_3\}$
- (7) $\{e_1, e_2\} \cdot t = \{e_1, e_2 \cdot t\}$

Eğer karışıklık riski mevcut değilse bir

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\mu_2} \mathcal{E} \xrightarrow{\mu_1} \mathcal{T}$$

2 –çaprazlanmış modülü bazen $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1)$ ya da kısaca $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ şeklinde de gösterilir. Buradaki küme parantezine Peiffer liftingi denir.

Bir

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\mu_2} \mathcal{E} \xrightarrow{\mu_1} \mathcal{T}$$

2 –çaprazlanmış modülü verildiğinde, aynı zamanda bir

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\mu_2} \mathcal{E}$$

çaprazlanmış modülü ile

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\mu_1} \mathcal{T}$$

ve

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\mu_1 \mu_2} \mathcal{T}$$

şeklinde iki tane de ön–çaprazlanmış modül verilmiş olur. Bunlardan ikincisinin sınır dönüşümünün aşıkâr, yani $\mu_1 \mu_2 = 0_{\mathcal{T}}$ olduğuna dikkat edelim.

Tanım 4.3. Birleşmeli ve değişmeli cebirlerin

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\mu_2} \mathcal{E} \xrightarrow{\mu_1} \mathcal{T}$$

ve

$$\mathcal{M}' \xrightarrow{\mu'_2} \mathcal{E}' \xrightarrow{\mu'_1} \mathcal{T}'$$

gibi iki tane 2 –çaprazlanmış modülü verildiğinde, bunlar arasındaki bir

$$\Phi : (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1) \rightarrow (\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}', \mu'_2, \mu'_1)$$

homomorfizm $\Phi = (\alpha, \beta, \gamma)$ üçlüsü ile tanımlanır, öyle ki

$$\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$$

$$\beta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

$$\gamma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$$

birer değişmeli cebir homomorfizmidir.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{M} & \xrightarrow{\mu_2} & \mathcal{E} & \xrightarrow{\mu_1} & \mathcal{T} \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\
\mathcal{M}' & \xrightarrow{\mu'_2} & \mathcal{E}' & \xrightarrow{\mu'_1} & \mathcal{T}'
\end{array}$$

diagramı değişmelidir ve

$$\begin{aligned}
\alpha(m \cdot t) &= \alpha(m) \cdot \gamma(t) \\
\beta(e \cdot t) &= \beta(e) \cdot \gamma(t) \\
\alpha\{e_1, e_2\} &= \{\beta(e_1), \beta(e_2)\}
\end{aligned}$$

özellikleri sağlanır.

Eğer α , β ve γ 'nin her biri cebir izomorfizmi ise, o halde yukarıdaki şartlar ile birlikte $\hat{\mathcal{I}}_1$ 'nin 2-çaprazlanmış modül izomorfizmi olduğu söylenir.

Bir $\Phi : (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1) \rightarrow (\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}', \mu'_2, \mu'_1)$ homomorfizmi verildiğinde, ayrıca $\mathcal{E}$ 'nin $\mathcal{M}$ üzerindeki her iki etkisi de korunur çünkü,

$$\begin{aligned}
\alpha(m \cdot e) &= \alpha(-\{e, \mu_2(m)\}) \\
&= -\{\beta(e), \beta\mu_2(m)\} \\
&= -\{\beta(e), \mu'_2\alpha(m)\} \\
&= \alpha(m) \cdot \beta(e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(m \cdot \mu_1(e)) &= \alpha(m) \cdot \gamma\mu_1(e) \\
&= \alpha(m) \cdot \mu'_1\beta(e).
\end{aligned}$$

Ayrıca eğer $\Phi = (\alpha, \beta, \gamma)$ bir 2 - çaprazlanmış modül homomorfizmi ise bu durumda

$$(\alpha, \beta) : (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu_2) \rightarrow (\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mu'_2)$$

bir çaprazlanmış modül homomorfizmidir.

Tanım 4.4. Birleşmeli ve değişmeli cebirlerin bir

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\mu_2} \mathcal{E} \xrightarrow{\mu_1} \mathcal{T}$$

2-çaprazlanmış modülü verilsin ve

$$\mathcal{M}' \xrightarrow{\mu'_2} \mathcal{E}' \xrightarrow{\mu'_1} \mathcal{T}'$$

de $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ ve $\mu'_1 = \mu_1|_{\mathcal{E}'}$, $\mu'_2 = \mu_2|_{\mathcal{M}'}$ olacak şekilde bir 2-çaprazlanmış modül olsun ve ayrıca buradaki etkiler ve Peiffer Liftingleri, diğerlerinin kısıtlaması olsun. Bu durumda $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}', \mu'_2, \mu'_1)$ 'in, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1)$ için bir 2-alt çaprazlanmış modül olduğu söylenir. Bu durum $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') \leq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 4.5. Bir $\mathcal{M} \xrightarrow{\mu_2} \mathcal{E} \xrightarrow{\mu_1} \mathcal{T}$ 2-çaprazlanmış modülün bir 2-alt çaprazlanmış modülü aşağıdaki gibi verilsin.

$$\mathcal{M}' \xrightarrow{\mu'_2} \mathcal{E}' \xrightarrow{\mu'_1} \mathcal{T}'$$

Eğer

- (1) $\mathcal{E}' \trianglelefteq \mathcal{E}$ and $\mathcal{T}' \trianglelefteq \mathcal{T}$
- (2) $e' \cdot t \in \mathcal{E}'$, $m' \cdot t \in \mathcal{M}'$
- (3) $e \cdot t' \in \mathcal{E}'$, $m \cdot t' \in \mathcal{M}'$
- (4) $\{e', e\}, \{e, e'\} \in \mathcal{M}'$

koşulları tüm $m \in \mathcal{M}$, $m' \in \mathcal{M}'$, $e \in \mathcal{E}$, $e' \in \mathcal{E}'$, $t \in \mathcal{T}$ ve $t' \in \mathcal{T}'$ için geçerliyse, o halde $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')$ 'nin $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ için bir 2-çaprazlanmış ideal olduğu söylenir ve bu durum $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') \trianglelefteq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımda verilen (4) koşulundan görülebilir ki, tüm $m \in \mathcal{M}$, $m' \in \mathcal{M}'$, $e \in \mathcal{E}$ ve $e' \in \mathcal{E}'$ için $m' \cdot e \in \mathcal{M}'$ ve $m \cdot e' \in \mathcal{M}'$ elde ettiğimize dikkat edin. Eğer $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1)$ 'nin 2-çaprazlanmış ideali ise o halde tüm $m \in \mathcal{M}$, $m' \in \mathcal{M}'$, $e \in \mathcal{E}$ ve $e' \in \mathcal{E}'$ için aşağıdakileri elde ederiz

$$m' \cdot e = -\{e, \mu_2 m'\} \in \mathcal{M}'$$

$$m \cdot e' = -\{e', \mu_2(m)\} \in \mathcal{M}'$$

benzer şekilde

$$m' \cdot \mu_1(e) \in \mathcal{M}' \text{ ve } m \cdot \mu_1(e') \in \mathcal{M}'$$

elde edilir. Ek olarak, $\mathcal{M}' \leq \mathcal{M}$ olur çünkü

$$m' \cdot m = m' \cdot \mu_2(m) \in \mathcal{M}' \text{ d\u00fcr.}$$

Bu arg\u00fcm\u00e2nların bir sonucu olarak, $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1)$ 'nin 2-çaprazlanmış ideali ise; $(\mathcal{M}', \mathcal{E}')$ de $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mu_2)$ 'nin bir çaprazlanmış ideali olur.

Tanım 4.6. Bir

$$\Phi = (\alpha, \beta, \gamma) : (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1) \rightarrow (\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}', \mu'_2, \mu'_1)$$

biçiminde 2-çaprazlanmış mod\u00fcl homoformizmi verilmiş olsun. Φ 'nin çekirdeği ek $\Phi =$ (ek α , ek β , ek γ) ile tanımlanır ve Φ 'nin g\u00f6r\u00fct\u00fcs\u00fcs\u00fc g\u00f6r $\Phi =$ (g\u00f6r α , g\u00f6r β , g\u00f6r γ) ile tanımlanır.

ek Φ 'nin, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ 'nin 2-çaprazlanmış ideal olduğunu g\u00f6rmek kolaydır ve ayrıca g\u00f6r Φ , $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')$ 'nin 2-altçaprazlanmış mod\u00fcl\u00fcd\u00fcr. \u00d6rneğin, g\u00f6r Φ 'için 2-çaprazlanmış ideal halinin diğer bir koşulu $k \in$ ek β , $e \in \mathcal{E}$ için, $\{e, k\}_1 \in$ ek α olduğu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \alpha\{e, k\}_1 &= \{\beta(e), \beta(k)\} = \{\beta(e), 0_{\mathcal{E}'}\}_1 \\ &= \{\beta(e), \mu'_2(0_{\mathcal{M}'})\} = -(0_{\mathcal{M}'} \cdot \beta(e)) = 0_{\mathcal{M}'} \end{aligned}$$

Tanım 4.7. $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1)$, 2-aprazlanmış mod\u00fcl ve $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ 'nin bir 2-aprazlandırılmış ideali olsun. Bu durumda $\frac{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})}{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')}$ 2-aprazlanmış b\u00f6l\u00fcm mod\u00fcl\u00fc $(\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}'}, \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'}, \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}'}, \overline{\mu_2}, \overline{\mu_1})$ beşlisi ile tanımlanır. Burada $\overline{\mu_2}, \overline{\mu_1}$ ve Peiffer liftingleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} \overline{\mu_2}(m + \mathcal{M}') &= \mu_2(m) + \mathcal{E}' \\ \overline{\mu_1}(e + \mathcal{E}') &= \mu_1(e) + \mathcal{T}' \\ \{e_1 + \mathcal{E}', e_2 + \mathcal{E}'\} &= \{e_1, e_2\} + \mathcal{M}' \end{aligned}$$

$\frac{T}{T'}$ 'nin $\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}'}$ ve $\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'}$ üzerindeki ve $\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'}$ 'nin $\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}'}$ üzerindeki etkileri şu şekilde verilmiştir:

$$(m + \mathcal{M}') \cdot (t + \mathcal{T}') = (m \cdot t) + \mathcal{M}'$$

$$(e + \mathcal{E}') \cdot (t + \mathcal{T}') = (e \cdot t) + \mathcal{E}'$$

$$(m + \mathcal{M}') \cdot (e + \mathcal{E}') = (m \cdot e) + \mathcal{M}'$$

Yukarıdaki tanımda $\left(\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}'}, \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'}, \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}'}, \overline{\mu_2}, \overline{\mu_1}\right)$ 'deki tüm etkilerin ve sınır dönüşümlerinin iyi tanımlı oldukları çaprazlanmış modüllerden bilinmektedir. Aşağıda, Peiffer liftinglerinin de iyi tanımlı olduğunu görelim.

Lemma 4.8. $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1)$, 2-çaprazlandırılmış modül ve $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ 'nin 2-çaprazlanmış ideali olsun. Bu durumda bölüm 2-çaprazlanmış modülünün Peiffer liftingleri iyi tanımlıdır.

İspat. İdeal tanımdan her $e' \in \mathcal{E}'$, $e \in \mathcal{E}$ için $\{e, e'\} \in \mathcal{M}'$ olduğunu biliyoruz.

$\mathcal{E}/\mathcal{E}'$ 'de $e_1 + \mathcal{E}' = e_2 + \mathcal{E}'$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $e_2 - e_1 \in \mathcal{E}'$ olur.

$$\{e_2, e\} - \{e_1, e\} = \{e_2 - e_1, e\} = \{0_{\mathcal{E}}, e\} = 0_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}'$$

olmasından $\{e_2, e\}_1 - \{e_1, e\}_1 \in \mathcal{M}'$ elde edilir ve $\{e_1 + \mathcal{E}', e + \mathcal{E}'\} = \{e_2 + \mathcal{E}', e + \mathcal{E}'\}$, $\{e + \mathcal{E}', e_1 + \mathcal{E}'\} = \{e + \mathcal{E}', e_2 + \mathcal{E}'\}$ olur. ■

Önerme 4.9. $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1)$ 2-çaprazlanmış modül ve $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ 'nin bir 2-çaprazlanmış ideali olsun. Bu durumda her $m \in \mathcal{M}$, $e \in \mathcal{E}$ ve $t \in \mathcal{T}$ için

$$\mathbf{q}_1(m) = m + \mathcal{M}', \mathbf{q}_2(e) = e + \mathcal{E}', \mathbf{q}_3(t) = t + \mathcal{T}'$$

ile tanımlanan $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ üçlüsü $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1)$ 'den $\left(\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}'}, \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'}, \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}'}, \overline{\mu_2}, \overline{\mu_1}\right)$ 'ye bir 2-çaprazlanmış modül homomorfizmdir ve $\mathbf{Q}$ 'nun çekirdeği $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')$ dir.

İspat. $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ ve $\mathbf{q}_3$ 'ün kanonik homomorfizm denen cebir homomorfizmleri oldukları bilindiğinden, her $m \in \mathcal{M}$, $e \in \mathcal{E}$, $t \in \mathcal{T}$ için aşağıdaki eşitliklerin varlığını görmek yeterlidir.

$$\overline{\mu_2} \mathbf{q}_1(m) = \overline{\mu_2}(m + \mathcal{M}') = \mu_2(m) + \mathcal{E}' = \mathbf{q}_2 \mu_2(m)$$

$$\mu_1 \mathbf{q}_2(e) = \mu_1(e + \mathcal{E}') = \mu_1(e) + \mathcal{T}' = \mathbf{q}_3 \mu_1(e)$$

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{q}_2(e_1), \mathbf{q}_2(e_2)\}_1 &= \{e_1 + \mathcal{E}', e_2 + \mathcal{E}'\}_1 = \{e_1, e_2\}_1 + \mathcal{M}' = \mathbf{q}_1(\{e_1, e_2\}_1) \\
\mathbf{q}_3(m) \cdot \mathbf{q}_1(t) &= (m + \mathcal{M}') \cdot (t + \mathcal{T}') = (m \cdot t) + \mathcal{M}' = \mathbf{q}_1(m \cdot t) \\
\mathbf{q}_3(e) \cdot \mathbf{q}_2(t) &= (e + \mathcal{E}') \cdot (t + \mathcal{T}') = (e \cdot t) + \mathcal{E}' = \mathbf{q}_2(e \cdot t).
\end{aligned}$$

Ayrıca cebirleri için bilinen denkliklerden

$$\text{çek } \mathbf{Q} = (\text{çek } \mathbf{q}_1, \text{çek } \mathbf{q}_2, \text{çek } \mathbf{q}_3) = (\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')$$

olduğu elde edilir. ■

Yukarıdaki önermenin bir direkt sonucu olarak, ideal tanımının kategorik olarak doğru olduğunu ifade eden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.10. $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1)$ bir 2-çaprazlanmış modül ve $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') \leq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ olsun. Bu durumda, $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') \trianglelefteq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ olması için gerek ve yeter şart, en az bir $(\mathcal{M}^*, \mathcal{E}^*, \mathcal{T}^*, \mu_2^*, \mu_1^*)$ 2-çaprazlanmış modülü ve $\Phi: (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1) \rightarrow (\mathcal{M}^*, \mathcal{E}^*, \mathcal{T}^*, \mu_2^*, \mu_1^*)$ homomorfizmi için çek $\Phi = (\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')$ olmasıdır.

Teorem 4.11. 2-çaprazlanmış modüllerin bir

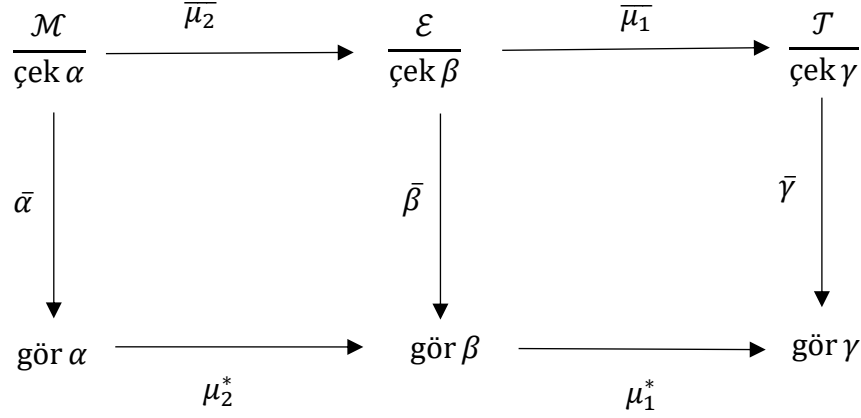
$$\Phi = (\alpha, \beta, \gamma) : (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1) \rightarrow (\mathcal{M}^*, \mathcal{E}^*, \mathcal{T}^*, \mu_2^*, \mu_1^*)$$

homomorfizmi verilsin. Bu durumda

$$\frac{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})}{\text{çek } \Phi} \cong \text{gör } \Phi$$

olur.

İspat. $\bar{\alpha} : \frac{\mathcal{M}}{\text{çek } \alpha} \rightarrow \text{gör } \alpha$, $\bar{\beta} : \frac{\mathcal{E}}{\text{çek } \beta} \rightarrow \text{gör } \beta$ ve $\bar{\gamma} : \frac{\mathcal{T}}{\text{çek } \gamma} \rightarrow \text{gör } \gamma$, cebirler için 1. izomorfizm teoreminin ispatında kullanılan izomorfizmler olmak, yani $\bar{\alpha}(g + \text{çek } \alpha) = \alpha(g)$, $\bar{\beta}(r + \text{çek } \beta) = \beta(r)$ ve $\bar{\gamma}(t + \text{çek } \gamma) = \gamma(t)$ ile tanımlı olmak üzere $\bar{\Phi} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) : \frac{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})}{\text{çek } \Phi} \rightarrow \text{gör } \Phi$ dönüşümünü tanımlayalım.



Yukarıdaki diyagramın değişmeliliği ve etkilerin korunması, çaprazlanmış modüller için 1. izomorfizm teoreminin bir sonucudur. Böylece

$$\begin{aligned}
\{\bar{\beta}(e_1 + \ker \beta), \bar{\beta}(e_2 + \ker \beta)\} &= \{\beta(e_1), \beta(e_2)\} \\
&= \alpha(\{e_1, e_2\}) \\
&= \bar{\alpha}(\{e_1, e_2\} + \ker \alpha) \\
&= \bar{\alpha}(\{e_1 + \ker \beta, e_2 + \ker \beta\})
\end{aligned}$$

eşitliği görmek yeterli olur ve buradan $\bar{\Phi}$ 'nin bir 2-çaprazlanmış modül izomorfizmi olduğu sonucuna varılır. ■

Tanım 4.12. $(\mathcal{M}_1, \mathcal{E}_1, \mathcal{T}_1)$ ve $(\mathcal{M}_2, \mathcal{E}_2, \mathcal{T}_2)$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1)$ 'in 2-altçaprazlanmış modülleri olsunlar. Bu durumda $(\mathcal{M}_1, \mathcal{E}_1, \mathcal{T}_1)$ ve $(\mathcal{M}_2, \mathcal{E}_2, \mathcal{T}_2)$ 'nin arakesitleri,

$$(\mathcal{M}_1, \mathcal{E}_1, \mathcal{T}_1) \cap (\mathcal{M}_2, \mathcal{E}_2, \mathcal{T}_2) := (\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2, \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2, \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2)$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 4.13. Bir 2-çaprazlanmış modülün iki 2-altçaprazlanmış modülün arakesiti de bir 2-alt çaprazlanmış modüldür. Özel olarak, eğer bu 2-alt çaprazlanmış modülün her ikisi de birer ideal ise, bu durumda arakesitleri de bir idealdir.

İspat. 2-alt çaprazlanmış modül ve ideal tanımlarından hemen görülür. ■

Tanım 4.14. $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1)$ bir 2 - çaprazlanmış modül ve $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')$ ile $(\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ 'nin birer 2-alt çaprazlanmış modülü olsun. Bu şartlar altında, $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')$ ve $(\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')$ 'nün toplamı

$$(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') + (\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'') := (\mathcal{M}' + \mathcal{M}'', \mathcal{E}' + \mathcal{E}'', \mathcal{T}' + \mathcal{T}'')$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 4.15. $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1)$ 2-çaprazlanmış modülünün bir ideali ve $(\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')$ de $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1)$ 'in bir 2-alt-çaprazlanmış modülü olsun.

- (i) $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') + (\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ 'nin 2-alt-çaprazlanmış modülüdür.
- (ii) Eğer buna ilaveten $(\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')$ de ideal ise, $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') + (\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ nin bir idealidir.

İspat. (i) $\mu_2(\mathcal{M}' + \mathcal{M}'') \subseteq \mathcal{E}' + \mathcal{E}''$ ve $\mu_1(\mathcal{E}' + \mathcal{E}'') \subseteq \mathcal{T}' + \mathcal{T}''$ olduğu açıkça görülmektedir. Bunun yanında, her $m' \in \mathcal{M}'$, $e' \in \mathcal{E}'$, $t' \in \mathcal{T}'$, $m'' \in \mathcal{M}''$, $e'' \in \mathcal{E}''$ ve $t'' \in \mathcal{T}''$ için,

$$\begin{aligned} (t' + t'') \cdot (m' + m'') &= t' \cdot m' + t' \cdot m'' + t'' \cdot m' + t'' \cdot m'' \in \mathcal{M}' + \mathcal{M}'' \\ (m' + m'') \cdot (t' + t'') &= m' \cdot t' + m' \cdot t'' + m'' \cdot t' + m'' \cdot t'' \in \mathcal{M}' + \mathcal{M}'' \\ (t' + t'') \cdot (e' + e'') &= t' \cdot e' + t' \cdot e'' + t'' \cdot e' + t'' \cdot e'' \in \mathcal{E}' + \mathcal{E}'' \end{aligned}$$

ve

$$(e' + e'') \cdot (t' + t'') = e' \cdot t' + e' \cdot t'' + e'' \cdot t' + e'' \cdot t'' \in \mathcal{E}' + \mathcal{E}''$$

olur. Ayrıca $e'_1, e'_2 \in \mathcal{E}'$, $e''_1, e''_2 \in \mathcal{E}''$ için $\lambda = 1, 2$ olmak üzere

$$\{e'_1 + e''_1, e'_2 + e''_2\}_\lambda = \{e'_1, e'_2\}_\lambda + \{e''_1, e''_2\}_\lambda \in \mathcal{E}' + \mathcal{E}''$$

olup $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') + (\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'') \leq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ elde edilir.

(ii) $\mathcal{E}' + \mathcal{E}'' \leq \mathcal{E}$ ve $\mathcal{T}' + \mathcal{T}'' \leq \mathcal{T}$ olduğu, $\mathcal{E}', \mathcal{E}'' \leq \mathcal{E}$ ve $\mathcal{T}', \mathcal{T}'' \leq \mathcal{T}$ olmasından görülmür. Diğer şartlar da aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} (e' + e'') \cdot t &= (e' \cdot t) + (e'' \cdot t) \in \mathcal{E}' + \mathcal{E}'' \\ (m' + m'') \cdot t &= (m' \cdot t) + (m'' \cdot t) \in \mathcal{M}' + \mathcal{M}'' \\ (m' + m'') \cdot t &= (m' \cdot t) + (m'' \cdot t) \in \mathcal{M}' + \mathcal{M}'' \\ e \cdot (t' + t'') &= (e \cdot t') + (e \cdot t'') \in \mathcal{E}' + \mathcal{E}'' \\ m \cdot (t' + t'') &= (m \cdot t') + (m \cdot t'') \in \mathcal{G}' + \mathcal{M}'' \\ \{e' + e'', e\} &= \{e', e\} + \{e'', e\} \in \mathcal{E}' + \mathcal{E}'' \\ \{e, e' + e''\} &= \{e, e'\} + \{e, e''\} \in \mathcal{E}' + \mathcal{E}'' \end{aligned}$$

■

Teorem 4.16. $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1)$ bir 2-çaprazlanmış modül, $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ 'nin bir ideali ve $(\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ 'nin bir 2-alt-çaprazlanmış modülü olsun. Bu durumda,

$$\frac{(\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')}{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') \cap (\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')} \cong \frac{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') + (\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')}{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')}$$

İspat. $\alpha(m'') = m'' + \mathcal{M}'$, $\beta(e'') = e'' + \mathcal{E}'$ ve $\gamma(t'') = t'' + \mathcal{T}'$ ile bir

$$\Phi = (\alpha, \beta, \gamma) : (\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'') \longrightarrow \frac{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') + (\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')}{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')}$$

dönüşümünü tanımlayalım.

Her $m' \in \mathcal{M}'$, $m'' \in \mathcal{M}''$ olduğu durumda her bir $m' + m'' + \mathcal{M}' \in \frac{\mathcal{M}' + \mathcal{M}''}{\mathcal{M}'}$ için, $m' \in \mathcal{M}'$ olmasında dolayı $m' + m'' + \mathcal{M}' = m'' + m' + \mathcal{M}' = m'' + \mathcal{M}'$ elde ederiz. Dolayısıyla, $\alpha(m'') = m'' + \mathcal{M}' = m' + m'' + \mathcal{M}'$ olur. Bu da α 'nın bir örten fonksiyon olduğunu gösterir, yani gör $\alpha = \frac{\mathcal{M}' + \mathcal{M}''}{\mathcal{M}'}$ olur. Benzer şekilde, gör $\beta = \frac{\mathcal{E}' + \mathcal{E}''}{\mathcal{E}'}$ ve gör $\gamma = \frac{\mathcal{T}' + \mathcal{T}''}{\mathcal{T}'}$ olduğu görülür ve böylece gör $\Phi = \frac{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') + (\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')}{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')}$ elde edilir.

Öte yandan, her $m'' \in \mathcal{M}''$ için $\alpha(m'') = 0_{\frac{\mathcal{M}' + \mathcal{M}''}{\mathcal{M}'}} \Leftrightarrow m'' + \mathcal{M}' = \mathcal{M}' \Leftrightarrow m'' \in \mathcal{M}'$ olduğundan çek $\alpha = \mathcal{M}' \cap \mathcal{M}''$ olur. Benzer şekilde, çek $\beta = \mathcal{E}' \cap \mathcal{E}''$ ve çek $\gamma = \mathcal{T}' \cap \mathcal{T}''$ olup buradan da çek $\Phi = (\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') \cap (\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')$ elde edilir.

Teorem 5.11. uyarınca $\frac{(\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')}{\text{çek } \Phi} \cong$ gör Φ olmasından

$$\frac{(\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')}{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') \cap (\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')} \cong \frac{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') + (\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')}{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')}$$

sonucu elde edilir. ■

Önerme 4.17. $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1)$ bir 2 – çaprazlanmış modül, $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') \trianglelefteq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$, $(\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'') \leq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ ve $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}') \leq (\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')$ olsun. Bu durumda, $\frac{(\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')}{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')} \trianglelefteq \frac{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})}{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')}$ olması için gerek ve yeter şart $(\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'') \trianglelefteq (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ olmasıdır.

İspat. $\frac{(\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')}{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')} \leq \frac{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})}{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')}$ olduğu kapsamalardan açıktır. Ayrıca cebirler için ilgili sonuçtan dolayı $\mathcal{E}'' \leq \mathcal{E} \Leftrightarrow \frac{\mathcal{E}''}{\mathcal{E}'} \leq \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'}$ ve $\mathcal{T}' \trianglelefteq \mathcal{T} \Leftrightarrow \frac{\mathcal{T}''}{\mathcal{T}'} \trianglelefteq \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}'}$ olduğu bilinmektedir. İdeal olmanın diğer şartları arasındaki çift yönlü gerektirme ise aşağıdaki şekilde görülür.

$$\begin{aligned}
e'' \cdot t \in \mathcal{E}'' &\Leftrightarrow (e'' \cdot t) + \mathcal{E}' \in \frac{\mathcal{E}''}{\mathcal{E}'} \Leftrightarrow (e'' + \mathcal{E}') \cdot (t + \mathcal{T}') \in \frac{\mathcal{E}''}{\mathcal{E}'} \\
m'' \cdot t \in \mathcal{M}'' &\Leftrightarrow (m'' \cdot t) + \mathcal{M}' \in \frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'} \Leftrightarrow (m'' + \mathcal{M}') \cdot (t + \mathcal{T}') \in \frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'} \\
e \cdot t'' \in \mathcal{E}'' &\Leftrightarrow (e \cdot t'') + \mathcal{E}' \in \frac{\mathcal{E}''}{\mathcal{E}'} \Leftrightarrow (e + \mathcal{E}') \cdot (t'' + \mathcal{T}') \in \frac{\mathcal{E}''}{\mathcal{E}'} \\
m \cdot t'' \in \mathcal{M}'' &\Leftrightarrow (m \cdot t'') + \mathcal{M}' \in \frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'} \Leftrightarrow (m + \mathcal{M}') \cdot (t'' + \mathcal{T}') \in \frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'} \\
\{e'', e\} \in \mathcal{M}'' &\Leftrightarrow \{e'', e\}\mathcal{M}' \in \frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'} \Leftrightarrow \{e''\mathcal{E}', e\mathcal{E}'\} \in \frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'} \\
\{e, e''\} \in \mathcal{M}'' &\Leftrightarrow \{e, e''\}\mathcal{M}' \in \frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'} \Leftrightarrow \{e\mathcal{E}', e''\mathcal{E}'\} \in \frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'}
\end{aligned}$$

■

Teorem 4.18. $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu_2, \mu_1)$ bir 2 – çaprazlanmış modül, $(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')$ ve $(\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')$, $(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})$ 'nin $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}'', \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}''$ ve $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}''$ olacak şekilde ideali olsunlar. Bu durumda,

$$\frac{\frac{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})}{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')}}{\frac{(\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')}{(\mathcal{M}', \mathcal{E}', \mathcal{T}')}} \cong \frac{(\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{T})}{(\mathcal{M}'', \mathcal{E}'', \mathcal{T}'')}$$

İspat. α , β ve γ fonksiyonlarını

$$\alpha : \frac{\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}'}}{\frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'}} \rightarrow \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}''}, \quad \alpha \left(m + \mathcal{M}' \frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'} \right) = m + \mathcal{M}''$$

$$\beta : \frac{\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'}}{\frac{\mathcal{E}''}{\mathcal{E}'}} \rightarrow \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}''}, \quad \beta \left(e + \mathcal{E}' \frac{\mathcal{E}''}{\mathcal{E}'} \right) = e + \mathcal{E}''$$

$$\gamma : \frac{\frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}'}}{\frac{\mathcal{T}''}{\mathcal{T}'}} \rightarrow \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}''}, \quad \gamma \left(t + \mathcal{T}' \frac{\mathcal{T}''}{\mathcal{T}'} \right) = t + \mathcal{T}''$$

şeklinde tanımlayalım. α , β ve γ fonksiyonlarının cebir izomorfizmleri olduğu bilinmektedir. Aşağıdaki diyagram göz önüne alalım.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{\mathcal{M}/\mathcal{M}'}{\mathcal{M}''/\mathcal{M}'} & \xrightarrow{\bar{\mu}_2} & \frac{\mathcal{E}/\mathcal{E}'}{\mathcal{E}''/\mathcal{E}'} & \xrightarrow{\bar{\mu}_1} & \frac{\mathcal{T}/\mathcal{T}'}{\mathcal{T}''/\mathcal{T}'} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}''} & \xrightarrow{\bar{\mu}_2} & \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}''} & \xrightarrow{\bar{\mu}_1} & \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{T}''} \end{array}$$

Her $m \in \mathcal{M}$, $e, e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ ve $t \in \mathcal{T}$ için

$$\begin{aligned} \beta \bar{\mu}_2 \left(m + \mathcal{M}' \frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'} \right) &= \beta \left(\frac{\bar{\mu}_2(m + \mathcal{M}') \mathcal{E}''}{\mathcal{E}'} \right) \\ &= \beta \left(\mu_2(m) + \mathcal{E}' \frac{\mathcal{E}''}{\mathcal{E}'} \right) \\ &= \mu_2(m) + \mathcal{E}'' \\ &= \bar{\mu}_2(m + \mathcal{M}'') \end{aligned}$$

$$= \bar{\mu}_2 \alpha \left(m + \mathcal{M}' \frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'} \right)$$

$$\begin{aligned} \gamma \bar{\bar{\mu}}_1 \left(e + \varepsilon' \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right) &= \gamma \left(\frac{\tilde{\mu}_1 (e + \varepsilon') \mathcal{T}''}{\mathcal{T}'} \right) \\ &= \gamma \left(\mu_1(e) + \mathcal{T}' \frac{\mathcal{T}''}{\mathcal{T}'} \right) \\ &= \mu_1(e) + \mathcal{T}'' \\ &= \bar{\mu}_1(e + \varepsilon'') \\ &= \bar{\mu}_1 \beta \left(e + \varepsilon' \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha \left(\left(m + \mathcal{M}' \frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'} \right) \cdot \left(t + \mathcal{T}' \frac{\mathcal{T}''}{\mathcal{T}'} \right) \right) &= \alpha \left(\frac{((m + \mathcal{M}') \cdot (t + \mathcal{T}')) \mathcal{M}''}{\mathcal{M}} \right) \\ &= \alpha \left((m \cdot t) + \mathcal{M}' \frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'} \right) \\ &= (m \cdot t) + \mathcal{M}'' \\ &= (m + \mathcal{M}'') \cdot (t + \mathcal{T}'') \\ &= \alpha \left(m + \mathcal{M}' \frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'} \right) \cdot \gamma \left(t + \mathcal{T}' \frac{\mathcal{T}''}{\mathcal{T}'} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta \left(\left(e + \varepsilon' \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right) \cdot \left(t + \mathcal{T}' \frac{\mathcal{T}''}{\mathcal{T}'} \right) \right) &= \beta \left(\frac{((e + \varepsilon') \cdot (t + \mathcal{T}')) \varepsilon''}{\varepsilon} \right) \\ &= \beta \left((e \cdot t) + \varepsilon' \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right) \\ &= (e \cdot t) + \varepsilon'' \\ &= (e + \varepsilon'') \cdot (t + \mathcal{T}'') \\ &= \beta \left(e + \varepsilon' \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right) \cdot \gamma \left(t + \mathcal{T}' \frac{\mathcal{T}''}{\mathcal{T}'} \right). \end{aligned}$$

olur. Sol etkiler için olan eşitlikler de benzer şekilde görülür. Ek olarak, her $\lambda \in \{1,2\}$ için

$$\alpha \left\{ e_1 + \varepsilon' \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}, e_2 + \varepsilon' \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right\}_\lambda = \alpha \left(\{e_1 + \varepsilon', e_2 + \varepsilon'\}_\lambda \frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left(\{e_1, e_2\}_\lambda + \mathcal{M}' \frac{\mathcal{M}''}{\mathcal{M}'} \right) \\
&= \{e_1, e_2\}_\lambda + \mathcal{M}'' \\
&= \{e_1 + \mathcal{E}'', e_2 + \mathcal{E}''\}_\lambda \\
&= \{\beta(e_1 \mathcal{E}'(\mathcal{E}''/\mathcal{E}')), \beta(e_2 \mathcal{E}'(\mathcal{E}''/\mathcal{E}'))\}_\lambda
\end{aligned}$$

olduğuna dikkat edilerek ispat tamamlanır. ■



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında izomorfizm teoremlerinin birçok yapıya uygun olduğu görüldüğünden değişmeli cebirlerin 2 –çaprazlanmış modülleri için de var olup olmayacakları araştırılmıştır. Ve ayrıca bu teoremlerin çaprazlanmış modüller için varlığı literatürde gösterildiğinden, bu tezde çaprazlanmış modül kavramının üzerine bir boyut daha eklenerek 2 –çaprazlanmış modüllerinde değişmeli cebirlerin üzerinde var olduğu gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasında değişmeli cebirler üzerinde 2 –çaprazlanmış modüllerin üç izomorfizm teoreminin de var olduğunu ve yapıların birbiri ile ilişkisinin olduğu araştırılmıştır. Bu araştırmanın sonucunda bilinen üç klasik izomorfizm teoreminin benzerlerinin bu yapılar için de geçerli oldukları ispatlanmıştır.

Böylelikle cebir teorisinde ve cebirsel topolojide temel yapıların aslında bir çok yeni konunun keşfine önemli ışık tutacağı güncel yapılara rehberlik edeceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Arvasi, Z., Porter T., 1996. Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras. *Journal of Algebra*, 181, 426-448.
- Can, E., 2021. Cebirlerin Çaprazlanmış Kareleri ve Morfizmleri İçin İzomorfizm Teoremleri, Yüksek Lisans Tezi. Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Burdur, Türkiye
- Gerstenhaber, M., 1966. On the Deformation of Rings and Algebras II. *Annals of Mathematics*, 84, 1-19.
- Hungerford T.W., 1974. *Algebra*, Springer Verlag, New York, 528 s.
- Kaya, G., 2022. Değişmeli Olmayan Birleşmeli Cebirlerin 2-Çaprazlanmış Modülü ve Morfizmleri için İzomorfizm Teoremleri, Yüksek Lisans Tezi. Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Burdur, Türkiye
- Lichtenbaum, S., Schlessinger, M., 1967. The Cotangent Complex of a Morphism. *Transactions of the American Mathematical Society*, 128, 41-70.
- Porter, T., 1986. Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconcelos. *Journal of Algebra*, 99, 458-465.
- Whitehead, J.H.C., 1949. Combinatorial Homotopy II. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55, 5, 453-496.