

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ İKİ KÜBİK MATRİSİN LİNEER BİLEŞİMLERİNİN
KUADRATİKLİĞİNİN KARAKTERİZE EDİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İrem Gamze ÜNLÜTÜRK

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

ARALIK 2024

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ İKİ KÜBİK MATRİSİN LİNEER BİLEŞİMLERİNİN
KUADRATİKLİĞİNİN KARAKTERİZE EDİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İrem Gamze ÜNLÜTÜRK

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr.Öğr.Üyesi Tuğba DEMİRKOL

ARALIK 2024

İrem Gamze ÜNLÜTÜRK tarafından hazırlanan “Değişmeli İki Kübik Matrisin Lineer Bileşimlerinin Kuadratikliğinin Karakterize Edilmesi” adlı tez çalışması 23.12.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı :

Jüri Üyesi :

Jüri Üyesi :



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “Değişmeli İki Kübik Matrisin Lineer Bileşimlerinin Kuadratikliğinin Karakterize Edilmesi” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(23/12/2024)

İrem Gamze ÜNLÜTÜRK



TEŞEKKÜR

Lisansüstü öğrenimimin son yılında, tezimin her aşamasında bana zaman, bilgi ve desteğini titizlikle sunan tez danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Tuğba DEMİRKOL'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü öğretimim süresince bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, ilgi ve desteğini her zaman hissettiğim Sayın Prof. Dr. Şevket GÜR'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Özellikle, eğitimim ve öğretimim süresince maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen babam İrfan ÜNLÜTÜRK'e ve annem Cevahir ÜNLÜTÜRK'e sonsuz sevgi ve minnettarlığımı belirtmek isterim. Lisansüstü öğrenimim boyunca her türlü manevi desteğini her zaman hissettiğim kardeşim Zeynep ÜNLÜTÜRK'e teşekkürü borç bilirim.

İrem Gamze ÜNLÜTÜRK



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	ix
SİMGELER	xi
ÖZET	xiii
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ARAŞTIRMASI.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Literatür Araştırması	3
2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLER	5
3. DEĞİŞMELİ İKİ KÜBİK MATRİSİN LİNEER BİLEŞİMLERİNİN KUADRATİKLİĞİNİN KARAKTERİZE EDİLMESİ	13
3.1. Giriş.....	13
3.2. İki Değişmeli Kübik Matrisin Lineer Bileşiminin Kuadratikliği	13
4. TARTIŞMA VE ÖNERİLER	135
KAYNAKLAR	137
ÖZGEÇMİŞ.....	141



SİMGELER

$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{C}^*$	: Sıfırdan farklı karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{C}_{m \times n}$	: $m \times n$ boyutlu karmaşık matrisler kümesi
$\mathbb{C}_n$	: $n \times n$ boyutlu karmaşık matrisler kümesi
$\mathbb{C}^n$	: n boyutlu karmaşık vektörler kümesi
I_n	: $n \times n$ boyutlu birim matris
I	: Uygun boyutlu birim matris
0	: Uygun boyutlu sıfır matris
i	: $\sqrt{-1}$
$\text{rk}(A)$	: A matrisinin rankı
$\sigma(A)$	: A matrisinin spektrumu
$\in$	: Elemanıdır
$\subset$	: Alt kümesi
(a, b)	: a, b sıralı ikilisi
$A \sim B$	: A matrisi B matrisine benzerdir



DEĞİŞMELİ İKİ KÜBİK MATRİSİN LİNEER BİLEŞİMLERİNİN KUADRATİKLİĞİNİN KARAKTERİZE EDİLMESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: idempotent matris, kuadratik matris, genelleştirilmiş kuadratik matris, kübik matris, köşegenleştirme

İlk bölümde, çalışmaya konu olan kübik matrislerin yapıtaşı olan idempotent matrislerin önemine ve kullanım alanlarına dikkat çekilmektedir. Ayrıca kübik matrisler ailesi ve bu ailenin kapsadığı kuadratik ve genelleştirilmiş kuadratik matrisler aileleri ile ilgili bugüne kadar yapılan çalışmaların bazılarından bahsedilmektedir.

İkinci bölümde, ispatsız bir şekilde bazı temel kavram ve özellikler verilmektedir.

Üçüncü bölümde $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2 \in \mathbb{C}$ ve $A_1, A_2 \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere A_1 ve A_2 matrisleri, $p_1 \neq q_1, p_1 \neq r_1, q_1 \neq r_1$ ve $p_2 \neq q_2, p_2 \neq r_2, q_2 \neq r_2$ olacak şekildeki sırasıyla $\{p_1, q_1, r_1\}$ -kübik matris ve $\{p_2, q_2, r_2\}$ -kübik matris olmak üzere, $A_1 A_2 = A_2 A_1$ koşulu altında, bu iki matrisin lineer bileşimlerinin kuadratikliği problemi ele alınmış ve detaylı bir inceleme yapılmıştır. Bunu yaparken $A_3 = a_1 A_1 + a_2 A_2$ lineer bileşimi göz önüne alınmış, $A_1 A_2 = A_2 A_1$ koşulundan $B_1 B_2 = B_2 B_1$ koşuluna ulaşılmış ve A_3 matrisi aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

$$A_3 = a_1 A_1 + a_2 A_2 = a_1 B_1 + a_2 B_2 + (a_1 r_1 + a_2 r_2) I_n$$

Buradan A_3 matrisinin $p_3, q_3 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\{p_3, q_3\}$ -kuadratik matris olduğu tüm durumlar ele alınmıştır. Yani

$$(A_3 - p_3 I_n)(A_3 - q_3 I_n) = \mathbf{0}$$

olması için gerek ve yeter koşullar araştırılmıştır. Bu yapılırken A_1 ve A_2 matrislerinin ayrı idempotent X_1, Y_1 ve X_2, Y_2 matrisleri cinsinden aşağıdaki formda yazılabileceği düşünülmüştür.

$$A_1 = (p_1 - r_1) X_1 + (q_1 - r_1) Y_1 + r_1 I_n, \quad X_1 Y_1 = Y_1 X_1 = \mathbf{0}$$

$$A_2 = (p_2 - r_2) X_2 + (q_2 - r_2) Y_2 + r_2 I_n, \quad X_2 Y_2 = Y_2 X_2 = \mathbf{0}$$

Daha sonra $(p_1 - r_1) X_1 + (q_1 - r_1) Y_1 = B_1$, $X_1 + Y_1 = P_1$ ve $(p_2 - r_2) X_2 + (q_2 - r_2) Y_2 = B_2$, $X_2 + Y_2 = P_2$ denilerek B_1 matrisinin P_1 matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{p_1 - r_1, q_1 - r_1\}$ -kuadratik matris ve B_2 matrisinin P_2 matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{p_2 - r_2, q_2 - r_2\}$ -kuadratik matris olduğu ve dolayısıyla B_1

matrisinin P_1 matrisi ile B_2 matrisinin de P_2 matrisi ile değışmeli olduğu gözlemlenmiştir. Dolayısıyla, $(A_3 - p_3 I_n)(A_3 - q_3 I_n) = \mathbf{0}$ eşitliğinden, $A_3 = a_1 A_1 + a_2 A_2 = a_1 B_1 + a_2 B_2 + (a_1 r_1 + a_2 r_2) I_n$ eşitliği de dikkate alınarak uygun notasyon değışikliği ile

$$c_1 B_1 + c_2 B_2 + 2a_1 a_2 B_1 B_2 + c_3 P_1 + c_4 P_2 + c_5 I_n = \mathbf{0}$$

eşitiğine ulaşılmıştır. Ardından, P_1 idempotent matrisini köşegenleştiren S tersinir matrisi yardımıyla B_1 , B_2 ve P_2 matrislerinin blok formları ifade edilmiştir. Daha sonra bu matrisler $c_1 B_1 + c_2 B_2 + 2a_1 a_2 B_1 B_2 + c_3 P_1 + c_4 P_2 + c_5 I_n = \mathbf{0}$ eşitliğinde yerine yazılarak sadece idempotent matrislerin kombinasyonu olan daha basit bir formdaki iki denklem elde edilmiştir. Bu iki denklem çözülrken kombinasyondaki idempotent matrislerin köşegen formları ve birbirleri ile değışmeli olan matrisler dikkate alınarak mümkün olabilecek tüm durumlar ele alınmış ve gerekli katsayı eşitlikleri elde edilmiştir. Bunu yaparken iki denklem ayrı ayrı incelenmiştir. İlk denkleme nispeten daha basit formda olduğu için önce ikinci denklem ele alınmıştır. Elementer matris işlemleri ve idempotent matrislerin köşegen formları dikkate alınarak ikinci denklemden Teorem 3.4, Teorem 3.5 ve Teorem 3.6 elde edilmiştir. Daha sonra ilk denklem de benzer şekilde incelenerek Teorem 3.8, Teorem 3.9 ve Teorem 3.10' a ulaşılmıştır. Dolayısıyla ana sonucun elde edilebilmesi için gerekli olan şey, bu teoremlerdeki sonuçların kesiştirilmesidir. Böyle yapmak suretiyle Teorem 3.4'ü sırasıyla Teorem 3.8, Teorem 3.9 ve Teorem 3.10 ile; benzer şekilde Teorem 3.5'i sırasıyla Teorem 3.8, Teorem 3.9 ve Teorem 3.10 ile; son olarak Teorem 3.6'yı sırasıyla Teorem 3.8, Teorem 3.9 ve Teorem 3.10 ile kesiştirerek toplamda dokuz tane teorem elde edilmiştir. Bu dokuz teoremde istenen katsayı eşitlikleri yer almaktadır. Fakat matris eşitlikleri sadece alt matrislerin köşegen formları cinsinden verilmektedir. Kombinasyonu oluşturan B_1 ve B_2 matrisleri cinsinden matris eşitliği elde etmek için bu dokuz teoremde yer alan katsayı eşitlikleri ve köşegen formlar $c_1 B_1 + c_2 B_2 + 2a_1 a_2 B_1 B_2 + c_3 P_1 + c_4 P_2 + c_5 I_n = \mathbf{0}$ denkleminde yerine yazılarak istenen matris eşitlikleri elde edilmiş ve ana teoremde bu dokuz teorem hem katsayı eşitlikleri hem de matris eşitlikleri olacak şekilde birleştirilmiştir.

Ana teroem, A_1 ve A_2 matrislerinin özel olarak kuadratik veya skaler potent olduğu özel durumları da içermektedir. Elde edilen ana sonucun, özel yapıya sahip matrislerin lineer bileşimleri ile ilgili olan literatürdeki pek çok sonucu kapsadığına dikkat çekilmiştir. Örneğin,

$$(p_3, q_3) \in \{(1, -1), (-1, 1)\}$$

ve

$$(p_1, q_1, r_1), (p_2, q_2, r_2) \in \{(1, -1, 0), (-1, 1, 0), (1, 0, -1), (-1, 0, 1), (0, 1, -1), (0, -1, 1)\}$$

alınırsa, A_1 ve A_2 matrisleri tripotent, A_3 matrisi involutif matris olup, literatürdeki iki tripotent matrisin lineer bileşimlerinin involutifliği ile ilgili çalışmanın bir sonucu elde edilir. Bölüm 3'ün sonunda bu kapsamalarla ilgili daha fazla örnek verilmektedir. Ayrıca ana teorem ile ilgili bir sayısal örnek de sunulmaktadır.

Son bölümde ise, çalışmanın ana sonucunun içerik bakımından kaba oluşunun nedeni açıklanmakta ve aslında bu kabalığın sadece görşellikten ibaret olduğu

vurgulanmaktadır. Son olarak, çalışmanın ileriki aşamalarda genelleştirilmiş kübik matrislere de uyarlanabileceğine dair bir takım gözlemler yapılmıştır.





CHARACTERIZING OF QUADRATICITY OF LINEAR COMBINATIONS OF TWO CUBIC MATRICES THAT COMMUTE

SUMMARY

Keywords: idempotent matrix, quadratic matrix, generalized quadratic matrix, cubic matrix, diagonalization.

In the first section, attention is drawn to the importance of idempotent matrices, which are the building blocks of the cubic matrices that are the subject of the study. In addition, some studies in the literature regarding the matrix classes discussed in the study are mentioned.

In the second section, some basic concepts and features that will be used throughout the study are given.

In the third section, the problem of quadraticity of the linear combinations of these two matrices under the condition that the matrices A_1 and A_2 are $\{p_1, q_1, r_1\}$ -cubic matrix and $\{p_2, q_2, r_2\}$ -cubic matrix such that $p_1 \neq q_1, p_1 \neq r_1, q_1 \neq r_1$ and $p_2 \neq q_2, p_2 \neq r_2, q_2 \neq r_2$, respectively is discussed and a detailed examination is made where $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2 \in \mathbb{C}$ and $A_1, A_2 \in \mathbb{C}_n$. While doing this, the linear combination $A_3 = a_1 A_1 + a_2 A_2$ was taken into account, the condition $B_1 B_2 = B_2 B_1$ was reached from the condition $A_1 A_2 = A_2 A_1$ and the matrix A_3 was expressed as follows.

$$A_3 = a_1 A_1 + a_2 A_2 = a_1 B_1 + a_2 B_2 + (a_1 r_1 + a_2 r_2) I_n$$

From this, all cases where matrix A_3 is a $\{p_3, q_3\}$ -quadratic matrix with $p_3, q_3 \in \mathbb{C}$ are considered. That is, the necessary and sufficient conditions for

$$(A_3 - p_3 I_n)(A_3 - q_3 I_n) = \mathbf{0}$$

have been investigated. While doing this, it was thought that the matrices A_1 and A_2 could be written in terms of the disjoint idempotent matrices X_1, Y_1 and X_2, Y_2 in the following form.

$$\begin{aligned} A_1 &= (p_1 - r_1) X_1 + (q_1 - r_1) Y_1 + r_1 I_n, & X_1 Y_1 &= Y_1 X_1 = \mathbf{0} \\ A_2 &= (p_2 - r_2) X_2 + (q_2 - r_2) Y_2 + r_2 I_n, & X_2 Y_2 &= Y_2 X_2 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Then, denoting the matrices $(p_1 - r_1) X_1 + (q_1 - r_1) Y_1$, $X_1 + Y_1$, $(p_2 - r_2) X_2 + (q_2 - r_2) Y_2$, and $X_2 + Y_2$ by B_1 , P_1 , B_2 , and P_2 , respectively, it is observed that the matrix B_1 is a generalized $\{p_1 - r_1, q_1 - r_1\}$ -quadratic matrix with respect to the matrix P_1 and the matrix B_2 is a generalized $\{p_2 - r_2, q_2 - r_2\}$ -quadratic

matrix with respect to the matrix P_2 , and hence the matrix B_1 commutes with the matrix P_1 and the matrix B_2 commutes with the matrix P_2 . Therefore, from the equation $(A_3 - p_3 I_n)(A_3 - q_3 I_n) = \mathbf{0}$, the equation

$$c_1 B_1 + c_2 B_2 + 2a_1 a_2 B_1 B_2 + c_3 P_1 + c_4 P_2 + c_5 I_n = \mathbf{0}$$

was reached with the appropriate notation change, taking into account the equation

$$A_3 = a_1 A_1 + a_2 A_2 = a_1 B_1 + a_2 B_2 + (a_1 r_1 + a_2 r_2) I_n.$$

Then, the block forms of the matrices B_1 , B_2 ve P_2 were expressed with the help of the nonsingular matrix S diagonalizing the idempotent matrix P_1 . And then, these matrices were written in their places in the equation $c_1 B_1 + c_2 B_2 + 2a_1 a_2 B_1 B_2 + c_3 P_1 + c_4 P_2 + c_5 I_n = \mathbf{0}$ and two equations in a simpler form, which are combinations of only idempotent matrices, were obtained. While solving these two equations, all possible situations were examined by considering the diagonal forms of the idempotent matrices and the matrices which commute with each other in the combination, and then necessary coefficient equations were obtained. While doing this, two equations were examined separately. The second equation was discussed first because it is in a relatively simpler form than the first equation. By taking into account the elementary matrix operations and the diagonal forms of idempotent matrices, Theorem 3.4, Theorem 3.5 and Theorem 3.6 were obtained from the second equation. Then, the first equation was examined in a similar way and Theorem 3.8, Theorem 3.9 and Theorem 3.10 were obtained. Therefore, what is required to obtain the main result is the intersection of the results in these theorems. By doing so, we intersect Theorem 3.4 with Theorem 3.8, Theorem 3.9 and Theorem 3.10, respectively. Similarly, we intersect Theorem 3.5 with Theorem 3.8, Theorem 3.9 and Theorem 3.10 respectively. Finally, by intersecting Theorem 3.6 with Theorem 3.8, Theorem 3.9 and Theorem 3.10, respectively, nine theorems in total were obtained. The desired coefficient equations are included in these nine theorems. However, matrix equations are given only in terms of the diagonal forms of the submatrices. In order to obtain matrix equality in terms of the matrices B_1 and B_2 forming the combination, the coefficient equations and diagonal forms in these nine theorems were substituted in the equation $c_1 B_1 + c_2 B_2 + 2a_1 a_2 B_1 B_2 + c_3 P_1 + c_4 P_2 + c_5 I_n = \mathbf{0}$ to obtain the desired matrix equations, and in the main theorem, these nine theorems were combined to form both coefficient equations and matrix equations.

The main theorem also includes special cases where matrices A_1 and A_2 are exclusively quadratic or scalar potent. It is noted that the main result obtained covers many results in the literature regarding linear combinations of matrices with special structures.

For example, if

$$(p_3, q_3) \in \{(1, -1), (-1, 1)\}$$

and

$$(p_1, q_1, r_1), (p_2, q_2, r_2) \in \{(1, -1, 0), (-1, 1, 0), (1, 0, -1), (-1, 0, 1), (0, 1, -1), (0, -1, 1)\}$$

are taken, then the matrices A_1 and A_2 are tripotent, the matrix A_3 is involutive matrix, and a result of the study in the literature on the involutivity of linear combinations of two tripotent matrices is obtained. More examples of these coverages are given at the end of Chapter 3. A numerical example related to the main theorem is also presented.

In the last section, the reason why the main result of the study is rough in terms of content is explained and it is emphasized that this roughness is only visual. Finally, some observations were made that the study could also be adapted to generalized cubic matrices in future stages.





1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

1.1. Giriş

İster arızalarla uğraşın, ister tekrarlanabilir sonuçların garantisini sağlayın, idempotentlik, sağlam ve dayanıklı veri hatları oluşturmanın temel anahtarıdır. İdempotentlik, en temel haliyle, matematik ve bilgisayar bilimlerindeki belirli işlemlerin özelliğini ifade eder; burada bir işlemin tekrar tekrar uygulanması, ilk uygulamanın ötesinde sonucu değiştirmez. Bu kalite, çeşitli hesaplama süreçlerinde, özellikle de ağ arızaları, yeniden denemeler veya diğer nedenlerden dolayı işlemlerin tekrarlanabileceği sistemlerde hayati öneme sahiptir.

Ödeme ve faturalandırma uygulamaları söz konusu olduğunda, yalnızca kullanılabilirlik çok önemli olmakla kalmıyor, aynı zamanda geliştirme ekiplerinin veri doğruluğunu garanti etmek için sistemlerine idempotentliği inşa etmeleri gerekiyor.

Finansal servislerde, idempotentlik, sonucu değiştirmeden birden çok kez uygulanmasına olanak tanıyan bir işlemin özelliğidir. Sisteme entegre edildiğinde müşterilerinizi hayal kırıklığına uğratacak hataların (mükerrer ödemeler, hatalı bakiyeler vb.) önüne geçebilirsiniz. Ancak, yüksek hacimde rakip işlemleri işleyen dağıtılmış bir sisteminiz varsa, idempotentliğe ulaşmak zor olabilir.

Dağıtılmış bir sistemde, birden fazla düğüm aynı işlemi aynı anda yürütüyor olabilir. Eğer işlem idempotent ise, düğümler herhangi bir tutarsızlık riski olmadan paralel olarak yürütülebilir. Ancak işlem idempotent değilse, farklı düğümler farklı sonuçlarla sonuçlanabileceğinden bu durum tutarsız sonuçlara yol açabilir. Bu da şu soruya yol açıyor: Dağıtılmış bir sistem için eş zamanlılığın kontrol edilmesine yardımcı olmak için idempotentliği nasıl inşa edersiniz? Şimdi, finansal hizmetlerde idempotentliğin nasıl çalıştığına ve ardından dağıtılmış ödeme sisteminde nasıl uygulanabileceğine bakacağız.

Bir bankada, bazı işlemler doğal olarak idempotent olurken, diğerlerinin değiştirilmesi gerekebilir. Örneğin, adlar, telefon numaraları vb. gibi hesap bilgilerinin

güncellenmesi doğal olarak idempotenttir. Bu tür işlemleri istediğiniz kadar uygulayabilirsiniz, sonuç her zaman aynı olacaktır.

Peki ya hesaptaki işlemler? Onlar doğal olarak idempotent midir?

Bir hesaptan para çekmek doğal olarak idempotent bir işlem değildir. Hesabımızdan 10 dolar çekip, aynı işlemi ikinci kez yaparsanız 20 dolar çekmiş olursunuz. Bu, bir para çekme olayının bir kopyasını alırsanız, sistemde potansiyel olarak bir hataya neden olabileceğiniz anlamına gelir. Bu, özellikle de bu sık sık oluyorsa, hesap sahiplerinin çok sinirlenmesine neden olacaktır.

Kolay bir düzeltme, işlemin zaman damgalarına bakmak olacaktır. Aynı zaman damgasına sahip iki işlem bulursanız birinin kopya olduğunu varsayarsınız ve onu atarsınız.

Daha küçük ölçekli sistemler için bu yeterli olabilir. Bununla birlikte, yüksek düzeyde eşzamanlı ve dağıtılmış sistemlerde, yinelenen zaman damgalarının bulunması oldukça yaygındır ve bu teknik güvenilir olmaz. Bir ödeme ve/veya faturalandırma sistemi için kendinize güvenmeniz gerekir. Ayrıca geri dönüp işlemleri manuel olarak denetlemek ve düzeltmek zorunda kalmak istemezsiniz.

Başka bir çözüm, bir işlem kimliği kullanmak olabilir, böylece her işleme, oluşturulduğunda benzersiz bir tanımlayıcı atanır. İdempotentliği zorlamak için bu tanımlayıcıyı kullanabilirsiniz. Bir işlemi her uyguladığınızda, aynı kimliğe sahip başka bir işlemin zaten mevcut olup olmadığını görmek için veritabanını kontrol edersiniz. Eğer öyleyse, o zaman bir kopya bulunduğunuzu bilirsiniz ve bunu güvenle göz ardı edebilirsiniz. Bu, bir sistemde idempotentliği nasıl oluşturabileceğinizin temel bir örneğidir. Ancak tahmin edebileceğiniz gibi büyük ölçekli dağıtılmış sistemlerde dikkate alınması gereken çok şey vardır. Özetle, idempotent ve idempotent olmayan işlemler arasındaki farkı anlamamanın, özellikle dağıtılmış sistemlerde sistem tasarımı için çok önemli olduğu söylenebilir [1].

İdempotent matrisler, regresyon analizinde ve lineer istatistiksel modeller teorisinde, özellikle değişken analizi ve en küçük kareler teorisiyle ilişkili olarak da önemlidir. İdempotent matrisin en önemli kullanımlarından biri de, ekonometride regresyon analizi sırasında M matrisi ve H matrisinin çözümünde kullanım kolaylığı sağlaması ve kullanışlılığıdır. M matrisinin idempotentliği, çeşitli regresyon analizlerinde ve ekonometrik hesaplamalarda çok önemlidir [2,3].

Kübik ve genelleştirilmiş kuadratik matrisler aileleri, idempotent matrislerle yakından ilişkilir. Örneğin, $A \in \mathbb{C}_n$ matrisi $p \neq q, p \neq r, q \neq r$ şartlarını sağlayan bir $\{p, q, r\}$ - kübik matris olsun. Bu durumda $A = pX + qY + rZ$ olacak şekilde karşılıklı olarak ayrık ve toplamları birim matris olan $X, Y, Z \in \mathbb{C}_n$ idempotent matrisleri vardır [4]. Dolayısıyla bir kübik matris, aslında üç tane ayrık idempotent matrisin bir lineer bileşimidir. Bu yapısı sayesinde, kübik matrislerin, yukarıda bahsi geçen uygulamalarda önemli bir yere sahip olduğu söylenebilir.

1.2. Literatür Araştırması

2000 li yıllardan itibaren, kuadratik, genelleştirilmiş kuadratik ve kübik matrislerin ele alındığı çalışmalara sıklıkla rastlanmaktadır. Örneğin, 2000 yılında kuadratik matrislerin singüler değerleri, Moore-Penrose tersi ve bir kuadratik matrise en yakın normal matrisi bulma problemleri ile ilgilenilmiş ve bu tip matrislerin daha pek çok özelliği hakkında incelemeler yapılmıştır [5]. Daha sonra 2005'te genelleştirilmiş kuadratik matris kavramı tanıtarak, bir genelleştirilmiş kuadratik matrisin tüm doğal sayı kuvvetlerinin de yine bir genelleştirilmiş kuadratik matris olduğu ispatlanmış ve yine bu matrislerle ilgili karakterizasyonlar sunulmuştur [6]. 2010 yılında genelleştirilmiş kuadratik operatörler üzerine bir takım çalışmalar yapılmıştır [7]. 2013'te, genelleştirilmiş kuadratik matrislerin toplam ve çarpımının lineer bileşimleri için rank ve sıfırlığın değişmezliği üzerine çalışılmıştır [8]. Yine 2013'te genelleştirilmiş kuadratik matrislerin idempotentlerle ilişkisinden faydalanılmak suretiyle genelleştirilmiş kuadratik matrislerin komütatörü için rank eşitlikleri verilmiştir [9]. 2014'te, önce genelleştirilmiş kuadratik matris kavramından yola çıkılarak genelleştirilmiş kübik matris tanımı verilmiş, daha sonra bazı koşullar altında bir genelleştirilmiş kübik matrisin üç tane ayrık idempotent matrisin bir lineer bileşimi olarak yazılabileceği ve sonuç olarak bir genelleştirilmiş kuadratik matrisin, bir kübik matrisin özel bir durumu olduğu gösterilmiştir [10]. Oldukça yakın bir zamanda genelleştirilmiş kuadratik matrislerin sağladığı bağıntının tekliği ile ilgili çalışılmıştır [11].

Son yıllarda kuadratik, genelleştirilmiş kuadratik ve kübik matrislerin lineer bileşimlerinin karakterizasyonu da sıklıkla çalışılan bir konudur. Örneğin, 2015'te iki kuadratik matrisin lineer bileşimlerinin kuadratik matris olması problemi, matrislerin karakteristik değerleri ve köşegen formları dikkate alınarak ele alınmıştır [12]. Daha

sonra, yine 2015'te, aynı idempotent matris ile ilişkili iki genelleştirilmiş kuadratik matrisin lineer bileşimlerinin yine aynı idempotent ile ilişkili bir genelleştirilmiş kuadratik matris olması için gerekli ve yeterli koşullar, elementer matris işlemleri kullanılarak araştırılmıştır [13]. 2016'da yapılan bir başka çalışmada, iki kuadratik matrisin lineer bileşimlerinin bir genelleştirilmiş kuadratik matris olması için gerekli ve yeterli koşullar irdelenmiştir [14]. 2019'da, bir kuadratik veya kübik ve bir keyfi matrisin lineer bileşimlerinin idempotentliği ile ilgili çalışma yapılmıştır [15]. 2021'de, bir kuadratik ve bir keyfi matrisin lineer bileşimlerinin involutifliği farklı bir tarzda araştırılmıştır [16]. 2022'de, değişmeli bir kuadratik ve bir kübik matrisin lineer bileşimlerinin kuadratikliği üzerine çalışılmıştır [17].

Bu çalışmada ise iki değişmeli kübik matrisin lineer bileşimlerinin kuadratikliği, elementer cebirsel matris işlemleri kullanarak elde edilmiştir. Kübik matrisler ailesi, yukarıda bahsi geçen tüm özel tipli matrisler ailelerinden daha geniş bir aile olduğundan elde edilen sonuçların literatürdeki pek çok çalışmayı kapsadığı öngörülmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde, çalışmanın genelinde faydalanılan bazı tanım ve teoremlere yer verilmektedir.

Tanım 2.1. Bir $A_1 \in \mathbb{C}_n$ matrisi için, $A_1 A_2 = A_2 A_1 = I_n$ olacak şekilde bir $A_2 \in \mathbb{C}_n$ matrisi varsa, A_1 matrisine *tersinir matris*, A_2 matrisine de, A_1 matrisinin *tersi* denir ve $A_2 = A_1^{-1}$ ile gösterilir [18].

Çalışma boyunca, $[a_{ij}]$ notasyonu ile, i . satır ve j . sütundaki elemanı a_{ij} sayısı olan bir $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisi kastedilecektir.

Tanım 2.2. Bir kare matrisin köşegen elemanlarının dışındaki diğer tüm elemanlar sıfır ise, bu matrise bir *köşegen matris* denir [19].

Tanım 2.3. Bir $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisinin bazı satır ve/veya sütunlarının silinmesi ile elde edilen matrise A matrisinin bir *alt matrisi* denir [19].

Tanım 2.4. Bir matris, satırları veya sütunları arasına yatay veya dikey çizgiler çizilerek alt matrislere parçalanabilir. Bu durumda matrise *parçalanmış matris* ve alt matrislere de *bloklar* denir. Parçalanmış bir matrisin i . satır ve j . sütunundaki matrise, parçalanmış matrisin i, j – bloğu, köşegeni üzerinde yer alan matrise de parçalanmış matrisin bir *köşegen bloğu* denir [19].

Çalışma boyunca i, j – bloğu uygun boyutlu M_{ij} matrisi olan $m \times n$ boyutlu bir parçalanmış matrisi $[M_{ij}]$ ile göstereceğiz. Ayrıca, parçalanmış matris kavramı yerine daha çok *blok matris* kavramını kullanacağız.

Tanım 2.5. Bir $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ parçalanmış matrisinin, köşegen blokları dışındaki tüm alt blokları sıfır matrisi ise, A matrise *blok köşegen matris* denir. A matrisinin köşegen

blokları $A_{ii} \in \mathbb{C}_{n_i}$ ve $\sum_{i=1}^k n_i = n$ olmak üzere $A = A_{11} \oplus A_{22} \oplus \dots \oplus A_{kk} = \bigoplus_{i=1}^k A_{ii}$ olarak yazılır ve bu yazılışa $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{kk}$ *matrislerinin direkt toplamı* denir [19].

Tanım 2.6. Bir $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisinin lineer bağımsız satır veya sütunlarının sayısına o matrisin *rankı* denir ve genellikle $\text{rk}(A)$ sembolü ile gösterilir [18].

Tanım 2.7. $A \in \mathbb{C}_n$ matrisi için

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$$

olacak şekilde bir λ sayısı ve $\mathbf{x} \neq 0$ vektörü varsa, λ sayısına A matrisinin bir *karakteristik değeri* ve $\mathbf{x}$ vektörüne de A matrisinin λ karakteristik değeri ile ilişki bir *karakteristik vektörü* denir [19].

Tanım 2.8. Bir $A \in \mathbb{C}_n$ matrisinin tüm karakteristik değerlerinin oluşturduğu kümeye, A matrisinin *spektrumu* denir ve $\sigma(A)$ ile gösterilir [19].

Teorem 2.9. Bir kare matrisinin tüm karakteristik değerleri sıfırdan farklı ise bu matris tersinirdir [19].

Tanım 2.10. $A_1, A_2 \in \mathbb{C}_n$ matrisleri için $A_2 = T^{-1}A_1T$ eşitliğini sağlayan bir $T \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi varsa, A_2 *matrisi* A_1 *matrisine benzerdir* denir [19].

Tanım 2.11. Köşegen bir matrise benzer olan bir kare matrise *köşegenleştirilebilirdir* denir [18, 19].

Teorem 2.12. $A \in \mathbb{C}_n$ matrisi köşegenleştirilebilir ise, D matrisi, A matrisinin karakteristik değerlerini köşegen elemanı olarak kabul eden bir köşegen matris ve T matrisi, A matrisinin lineer bağımsız karakteristik vektörlerini sütun kabul eden bir tersinir matris olmak üzere $A = TDT^{-1}$ olarak yazılabilir. Burada dikkat etmek gerekir ki, karakteristik değerlerin D matrisindeki sıralanışı önemlidir. T matrisi, bu sıraya göre oluşturulan lineer bağımsız karakteristik vektörleri içerir [19].

Teorem 2.13. Bir blok köşegen matrisin köşegenleştirilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu, her bir köşegen bloğunun köşegenleştirilebilir olmasıdır [19].

Tanım 2.14. $A_1, A_2 \in \mathbb{C}_n$ matrisleri için $T^{-1}A_1T$ ve $T^{-1}A_2T$ çarpımlarının her ikisi de köşegen olacak şekilde bir $T \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi varsa, A_1 ve A_2 matrislerine eşzamanlı olarak köşegenleştirilebilir denir [19].

Teorem 2.15. Köşegenleştirilebilir iki matrisin eş zamanlı olarak köşegenleştirilebilir olmasının gerek ve yeter koşulu, bu iki matrisin değişmeli olmasıdır [19].

Tanım 2.16. A bir kare matris ve $c \in \mathbb{C}^*$ olsun. Eğer $A^2 = cA$ ise, A matrisine bir skaler-potent matris denir [20].

Çalışma boyunca skaler-potent matrisleri ifade ederken, bağlı oldukları skalerler ile ifade edeceğiz. Örneğin, $A^2 = kA$, $k \neq 0$ ifadesini sağlayan matrise k -skaler potent matris diyeceğiz.

Tanım 2.17. Karesi kendisine eşit olan matrise idempotent matris denir [21].

Bir skaler-potent matrisin, $c = 1$ olması durumunda idempotent matrise dönüştüğüne dikkat edelim.

Tanım 2.18. Karesi birim matrise eşit olan matrise involutif matris denir [19].

Tanım 2.19. Küpü kendisine eşit olan matrise tripotent matris denir [21].

Dikkat edilirse, idempotent ve involutif matrisler, tripotent matrislerin özel bir durumudur. Üstelik, involutif matrisler, tersinir tripotent matrislerdir.

Tanım 2.20. Bir A kare matrisi için, $A^3 = A$, $A^2 \neq A$ ve $A^2 \neq -A$ ise A matrisine bir esas tripotent matris denir [22].

Tanım 2.21. Bir A kare matrisi için, $A^2 = -A$ ise A matrisine bir çarpık idempotent matris, $A^2 = -I_n$ ise A matrisine bir çarpık involutif matris denir [23].

Tanım 2.22. A bir kare matris ve $P \neq I_n$ bir idempotent matris olsun. Eğer $A^2 = P$ ise A matrisine bir genelleştirilmiş involutif matris denir [6].

Tanım 2.23. A bir kare matris ve $P \neq I_n$ bir idempotent matris olsun. Eğer $A^2 = -P$ ise A matrisine bir genelleştirilmiş çarpık involutif matris denir [6].

Teorem 2.24. İdempotent ve involutif matrisler bir köşegen matrise benzerdir [24].

Teorem 2.25. Tripotent matrisler bir köşegen matrise benzerdir [25].

Teorem 2.26. İdempotent matrislerin karakteristik değerleri 0 veya 1 skalerlerinden ibarettir [21].

Teorem 2.27. İnvolutif matrislerin karakteristik değerleri -1 veya 1 skalerlerinden ibarettir [24]

Teorem 2.28. Tripotent matrislerin karakteristik değerleri -1 , 0 veya 1 skalerlerinden ibarettir [21].

Teorem 2.29. Çarpık idempotent matrisler bir köşegen matrise benzerdir ve bu matrislerin karakteristik değerleri 0 ve -1 sayılarından oluşur. Benzer şekilde, çarpık involutif matrisler bir köşegen matrise benzerdir ve karakteristik değerleri $-i$ ve i sayılarından oluşur [23].

Teorem 2.30. Bir idempotent matrisin rankı, sıfırdan farklı karakteristik değerleri olan 1 ' lerin sayısıdır [21].

Teorem 2.31. Bir A kare matrisinin bir tripotent matris olmasının gerek ve yeter koşulu bu matrisin iki ayrık (yani, karşılıklı olarak çarpımları sıfıra eşit olan) idempotent matrisin farkı olarak yazılabilmesidir. Ayrıca, bu iki ayrık idempotent matris $X = \frac{1}{2}(A^2 + A)$ ve $Y = \frac{1}{2}(A^2 - A)$ şeklinde tek türlü ifadeye sahiptir [26].

Tanım 2.32. $A \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere, $(A - pI_n)(A - qI_n) = \mathbf{0}$ olacak şekilde $p, q \in \mathbb{C}$ sayıları varsa, A matrisine bir *kuadratik matris* denir [5].

Buradan sonra, yukarıdaki gibi tanımlanan $A \in \mathbb{C}_n$ matrisine, kısaca bir $\{p, q\}$ -*kuadratik matris* diyeceğiz. p ve q birbirinden farklı iken tüm $\{p, q\}$ -kuadratik matrislerin kümesini $\Omega(p, q)$ sembolü ile göstereceğiz.

Aşağıdaki tabloda, p ve q sayılarının durumuna göre A matrisinin ait olduğu aile karakterize edilmektedir.

Tablo 2.1. Bir A matrisinin ait olduğu ailenin karakterize edilmesi.

p ve q sayıları	A matrisinin yapısı
$(p, q) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$	İdempotent
$(p, q) \in \{(1, -1), (-1, 1)\}$	İnvolutif
$(p, q) \in \{(-1, 0), (0, -1)\}$	Çarpık İdempotent
$(p, q) \in \{(i, -i), (-i, i)\}$	Çarpık İnvolutif

Teorem 2.33. $A \in \mathbb{C}_n$, $p, q \in \mathbb{C}$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) $A \in \Omega(p, q)$ 'dur.
- ii) A köşegenleştirilebilirdir ve $\sigma(A) \subset \{p, q\}$ 'dur.
- iii) $A = pX + qY$ ve $X + Y = I_n$ bağıntılarını sağlayan $X, Y \in \mathbb{C}_n$ ayrık idempotent matrisleri ve birbirinden farklı $p, q \in \mathbb{C}$ sayıları vardır.
- iv) $A = (p - q)X + qI_n$ bağıntısını sağlayan bir $X \in \mathbb{C}_n$ idempotent matrisi vardır [27].

Tanım 2.34. $A^2 = \alpha A + \beta P$ ve $AP = PA = A$ bağıntılarını sağlayan $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sayıları ve sıfırdan farklı bir $P \in \mathbb{C}_n$ idempotent matrisi varsa, $A \in \mathbb{C}_n$ matrisine bir *genelleştirilmiş kuadratik matris* denir [6].

Tanımdaki $A^2 = \alpha A + \beta P$ bağıntısı, $p = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$ ve $q = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$ olmak üzere $(A - pP)(A - qP) = \mathbf{0}$ şeklinde de ifade edilebilir. Artık, $(A - pP)(A - qP) = \mathbf{0}$ ve $AP = PA = A$ bağıntılarını sağlayan bir A matrisine P idempotent matrisine göre bir *genelleştirilmiş $\{p, q\}$ -kuadratik matris* diyeceğiz. $p \neq q$ olması durumunda bu tip A matrislerinin kümesini $\mathcal{L}(P; p, q)$ ile göstereceğiz. Bir P idempotent matrisine göre bir *genelleştirilmiş $\{p, q\}$ -kuadratik matris* tanımında, $P = I_n$ olması durumunda, $AP = PA = A$ ifadesi otomatik olarak sağlanır. Ayrıca, yine bu durumda, $(A - pI_n)(A - qI_n) = \mathbf{0}$ olduğundan, bir $\{p, q\}$ -kuadratik matrisin, özel olarak

$P = I_n$ matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{p, q\}$ -kuadratik matris olduğuna dikkat etmek gerekir.

Teorem 2.35. $p, q \in \mathbb{C}$ olmak üzere $A \in \mathcal{L}(P; p, q)$ olmasının gerekli ve yeterli koşulu

$$A = pX + qY, \quad X + Y = P$$

bağıntılarını sağlayan X ve Y ayrık idempotent matrislerinin mevcut olmasıdır [13].

Teorem 2.36. $A \in \mathcal{L}(P; p, q)$ ise $\sigma(A) \subset \{0, p, q\}$ 'dur [6].

Teorem 2.28, Teorem 2.31, Teorem 2.35 ve Teorem 2.36 dikkate alındığında, genelleştirilmiş kuadratik matrisler ailesinin tripotent matrisler ailesini kapsadığı kolaylıkla görülebilir.

Yine, $A \in \mathcal{L}(P; p, q)$ olmak üzere, p, q ve P 'nin durumlarına göre A matrisinin hangi özel matris ailesine ait olduğu aşağıdaki tabloda listelenmektedir.

Tablo 2.2. Bir A matrisinin ait olduğu özel matris ailesi.

p, q ve P	A matrisinin yapısı
$(p, q) = (1, 1)$ ve $P = A$	İdempotent
$(p, q) = (-1, -1)$ ve $P = -A$	Çarpık İdempotent
$(p, q) \in \{(1, -1), (-1, 1)\}$ ve $P \neq I$	Genelleştirilmiş İnvolutif
$(p, q) \in \{(i, -i), (-i, i)\}$ ve $P \neq I$	Genelleştirilmiş Çarpık İnvolutif

Teorem 2.37. $A \in \mathbb{C}_n$, $p, q \in \mathbb{C}$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) $A \in \mathcal{L}(P; p, q)$ 'dur.
- ii) A köşegenleştirilebilirdir ve $\sigma(A) \subset \{p, q, 0\}$ 'dır.
- iii) $p \neq q$ olacak şekilde $p, q \in \mathbb{C}$ sayıları, $A = pX + qY$ ve $X + Y = P$ bağıntılarını sağlayan X ve Y ayrık idempotent matrisleri vardır.
- iv) $A = (p - q)X + qP$ olacak şekilde bir $X \in \mathbb{C}_n$ idempotent matrisi vardır [13].

Tanım 2.38. $A \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere $(A - pI_n)(A - qI_n)(A - rI_n) = \mathbf{0}$ olacak şekilde $p, q, r \in \mathbb{C}$ sayıları varsa, A matrisine bir *kübik matris* denir [4].

$p \neq q, q \neq r, p \neq r$ olmak üzere bu tip matrislerin kümesini $\kappa(p, q, r)$ ile göstereceğiz.

Çalışmanın ilerleyen kısımlarında görülecektir ki bir kübik matris, bir genelleştirilmiş kuadratik matris yardımıyla yazılabilir ve bu kübik matrisler ailesinin genelleştirilmiş kuadratik matrisler ailesini kapsadığını ifade eder. Genelleştirilmiş kuadratik matrisler ailesinin kuadratik matrisler ailesini kapsadığı bilindiğinden, kübik matrisler ailesinin bu tür matrisler ailesinin tamamını kapsadığı söylenebilir.

Teorem 2.39. $p, q, r \in \mathbb{C}$ ve $A \in \mathbb{C}_n$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (i) $A \in \kappa(p, q, r)$ 'dir.
- (ii) A köşegenleştirilebilirdir ve $\sigma(A) \subset \{p, q, r\}$ 'dir.
- (iii) $A = pX + qY + rZ$ ve $X + Y + Z = I_n$ olacak şekilde karşılıklı olarak ayrık $X, Y, Z \in \mathbb{C}$ idempotent matrisleri vardır.
- (iv) $A = (p - r)X + (q - r)Y + rI_n$ olacak şekilde $X, Y \in \mathbb{C}_n$ ayrık idempotent matrisleri vardır [4].



3. DEĞİŞMELİ İKİ KÜBİK MATRİSİN LİNEER BİLEŞİMLERİNİN KUADRATİKLİĞİNİN KARAKTERİZE EDİLMESİ

3.1. Giriş

Bu bölümde, değişmeli iki kübik matrisin lineer bileşimlerinin kuadratik matris olduğu tüm durumları karakterize edeceğiz. Bunun için öncelikle aşağıdaki gözlemleri yapalım.

Teorem 2.39’da $(p-r)X + (q-r)Y = N$ diyelim. X ve Y ayrık idempotent matrisler olduğundan bu matrislerin toplamı da idempotenttir. Bu toplam matrisini P ile gösterelim. Teorem 2.37’den N matrisinin P matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{p-r, q-r\}$ -kuadratik matris olduğunu gözlemleyelim. Böylece bir kübik matris bir genelleştirilmiş kuadratik matris ile bir birim matrisin bir skaler katının toplamı olarak ifade edilebilir:

Yani, $p, q, r \in \mathbb{C}$, $p \neq q$, $p \neq r$, $q \neq r$ ve $M \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere M bir $\{p, q, r\}$ -kübik matris olsun. Bu durumda M matrisi, N matrisi P matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{p-r, q-r\}$ -kuadratik matris olmak üzere

$$M = N + rI \quad (3.1)$$

olarak ifade edilebilir.

Tez boyunca $\kappa(p, q, r, N, P)$ gösterimi ile, $p \neq q$, $q \neq r$, $p \neq r$ olmak üzere P matrisine göre genelleştirilmiş kuadratik matris olan N matrisi ile ilişkili $\{p, q, r\}$ -kübik matrislerinin kümesi kastedilecektir.

3.2. İki Değişmeli Kübik Matrisin Lineer Bileşiminin Kuadratikliği

$p_i, q_i, r_i \in \mathbb{C}$ ve $p_i \neq q_i$, $p_i \neq r_i$, $q_i \neq r_i$, $i=1,2$ olmak üzere $A_i \in \mathbb{C}_n$ matrisleri $\{p_i, q_i, r_i\}$ -kübik matris olsun. Teorem 2.39’a göre

$$\begin{aligned} A_1 &= (p_1 - r_1)X_1 + (q_1 - r_1)Y_1 + r_1I_n, & X_1Y_1 &= Y_1X_1 = \mathbf{0} \\ A_2 &= (p_2 - r_2)X_2 + (q_2 - r_2)Y_2 + r_2I_n, & X_2Y_2 &= Y_2X_2 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.2)$$

olacak şekilde X_1, Y_1 ve X_2, Y_2 idempotent matrisleri vardır.

$(p_1 - r_1)X_1 + (q_1 - r_1)Y_1 = B_1$, $X_1 + Y_1 = P_1$ ve $(p_2 - r_2)X_2 + (q_2 - r_2)Y_2 = B_2$, $X_2 + Y_2 = P_2$ diyelim. B_1 matrisinin P_1 matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{p_1 - r_1, q_1 - r_1\}$ -kuadratik matris ve B_2 matrisinin P_2 matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{p_2 - r_2, q_2 - r_2\}$ -kuadratik matris olduğunu gözlemleyelim.

Şimdi A_1 ve A_2 matrisleri için $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $A_3 = a_1A_1 + a_2A_2$ lineer bileşimini göz önüne alalım. $A_1A_2 = A_2A_1$ olsun. Bu durumda $B_1B_2 = B_2B_1$ olup, A_3 matrisi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$A_3 = a_1A_1 + a_2A_2 = a_1B_1 + a_2B_2 + (a_1r_1 + a_2r_2)I_n \quad (3.3)$$

Bu bölümde A_3 matrisinin $p_3, q_3 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\{p_3, q_3\}$ -kuadratik matrisi olduğu tüm durumları inceleyeceğiz. Yani

$$(A_3 - p_3I_n)(A_3 - q_3I_n) = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

olması için gerek ve yeter koşulları araştıracağız. (3.3) ve (3.4) ifadeleri birlikte düşünülürse

$$(a_1B_1 + a_2B_2 + (a_1r_1 + a_2r_2 - p_3)I_n)(a_1B_1 + a_2B_2 + (a_1r_1 + a_2r_2 - q_3)I_n) = \mathbf{0}$$

eşitliği elde edilir. Burada $a_1r_1 + a_2r_2 = a_3$ olarak alınırsa

$$(a_1B_1 + a_2B_2 + (a_3 - p_3)I_n)(a_1B_1 + a_2B_2 + (a_3 - q_3)I_n) = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

olur. (3.5) ifadesi $B_1B_2 = B_2B_1$ olduğu hatırlanarak düzenlenirse aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & a_1^2B_1^2 + 2a_1a_2B_1B_2 + a_2^2B_2^2 + a_1(2a_3 - p_3 - q_3)B_1 \\ & + a_2(2a_3 - p_3 - q_3)B_2 + (a_3 - p_3)(a_3 - q_3)I_n = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

B_1 matrisi P_1 matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{p_1 - r_1, q_1 - r_1\}$ -kuadratik matris olduğundan Tanım 2.34 gereği

$$B_1^2 = (p_1 - r_1 + q_1 - r_1)B_1 - (p_1 - r_1)(q_1 - r_1)P_1, \quad P_1B_1 = B_1P_1 = B_1; \quad (3.7)$$

benzer şekilde B_2 matrisi P_2 matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{p_2 - r_2, q_2 - r_2\}$ -kuadratik matris olduğundan Tanım 2.34 gereği

$$B_2^2 = (p_2 - r_2 + q_2 - r_2)B_2 - (p_2 - r_2)(q_2 - r_2)P_2, \quad P_2 B_2 = B_2 P_2 = B_2 \quad (3.8)$$

ifadeleri yazılabilir.

(3.7) ve (3.8) eşitlikleri (3.6) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} & a_1^2 ((p_1 + q_1 - 2r_1)B_1 - (p_1 - r_1)(q_1 - r_1)P_1) + 2a_1 a_2 B_1 B_2 \\ & + a_2^2 ((p_2 + q_2 - 2r_2)B_2 - (p_2 - r_2)(q_2 - r_2)P_2) \\ & + a_1 (2a_3 - p_3 - q_3)B_1 + a_2 (2a_3 - p_3 - q_3)B_2 + (a_3 - p_3)(a_3 - q_3)I_n = \mathbf{0} \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & (a_1^2 (p_1 + q_1 - 2r_1) + a_1 (2a_3 - p_3 - q_3))B_1 \\ & + (a_2^2 (p_2 + q_2 - 2r_2) + a_2 (2a_3 - p_3 - q_3))B_2 \\ & + 2a_1 a_2 B_1 B_2 - a_1^2 (p_1 - r_1)(q_1 - r_1)P_1 \\ & - a_2^2 (p_2 - r_2)(q_2 - r_2)P_2 + (a_3 - p_3)(a_3 - q_3)I_n = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte

$$c_1 = a_1^2 (p_1 + q_1 - 2r_1) + a_1 (2a_3 - p_3 - q_3),$$

$$c_2 = a_2^2 (p_2 + q_2 - 2r_2) + a_2 (2a_3 - p_3 - q_3),$$

$$c_3 = -a_1^2 (p_1 - r_1)(q_1 - r_1) \neq 0,$$

$$c_4 = -a_2^2 (p_2 - r_2)(q_2 - r_2) \neq 0,$$

$$c_5 = (a_3 - p_3)(a_3 - q_3)$$

olarak alınırsa (3.9) eşitliği

$$c_1 B_1 + c_2 B_2 + 2a_1 a_2 B_1 B_2 + c_3 P_1 + c_4 P_2 + c_5 I_n = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

eşitliğine dönüşür.

Şimdi, P_1 matrisi bir idempotent matris olduğundan, genelliği bozmaksızın Teorem 2.24, Teorem 2.26 ve Teorem 2.30 gereği

$$P_1 = S(I_r \oplus \mathbf{0})S^{-1}, \quad \text{rk}(P_1) = r \quad (3.11)$$

olacak şekilde bir tersinir S matrisi vardır.

K, L, M, N uygun boyutlu matrisler olmak üzere $B_1 = S \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} S^{-1}$ diyelim.

$B_1 P_1 = P_1 B_1 = B_1$ olduğundan $\begin{pmatrix} K & \mathbf{0} \\ M & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & L \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ olur. Buradan matrislerin eşitliği tanımı kullanılarak $L = \mathbf{0}, M = \mathbf{0}, N = \mathbf{0}$ olduğu görülür. Böylece

$$B_1 = S \begin{pmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} S^{-1} \quad (3.12)$$

olarak elde edilir.

B_1, P_1 matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{p_1 - r_1, q_1 - r_1\}$ -kuadratik matris olduğundan $(B_1 - (p_1 - r_1)P_1)(B_1 - (q_1 - r_1)P_1) = \mathbf{0}$ yazılabilir. Bu eşitlikte (3.11) ve (3.12) kullanılarak,

$$\begin{pmatrix} K - (p_1 - r_1)I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K - (q_1 - r_1)I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

olur. İlk blokların eşitliğinden, $(K - (p_1 - r_1)I_r)(K - (q_1 - r_1)I_r) = \mathbf{0}$ olduğu görülür.

Yani K matrisi $\{p_1 - r_1, q_1 - r_1\}$ -kuadratik matristir. K matrisinin karakteristik değerleri Teorem 2.33'e göre $p_1 - r_1 \neq 0$ ve $q_1 - r_1 \neq 0$ olduğundan Teorem 2.9'a göre K tersinir bir matristir.

X, Y, Z, T uygun boyutlu matrisler olmak üzere, $B_2 = S \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} S^{-1}$ diyelim.

$B_1 B_2 = B_2 B_1$ olduğundan $\begin{pmatrix} KX & KY \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XK & \mathbf{0} \\ ZK & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ olur. Buradan $KX = XK, KY = \mathbf{0}$

ve $ZK = \mathbf{0}$ yazılabilir. K tersinir bir matris olduğu için $KY = \mathbf{0}$ ve $ZK = \mathbf{0}$ eşitliklerinden $Y = \mathbf{0}$ ve $Z = \mathbf{0}$ bulunur. Böylece

$$B_2 = S \begin{pmatrix} X & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T \end{pmatrix} S^{-1} \quad (3.13)$$

olur. M_1, M_2, M_3, M_4 uygun boyutlu matrisler olmak üzere

$$P_2 = S \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} S^{-1} \quad (3.14)$$

diyelim. B_1, B_2, P_1, P_2 matrislerinin (3.11), (3.12), (3.13) ve (3.14)'deki ifadeleri (3.10) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$c_1 \begin{pmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} X & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T \end{pmatrix} + 2a_1a_2 \begin{pmatrix} KX & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

olur. (3.15) eşitliğindeki esas köşegen dışındaki bloklardan $c_4 M_2 = \mathbf{0}$ ve $c_4 M_3 = \mathbf{0}$ bulunur. $c_4 \neq 0$ olduğundan $M_2 = \mathbf{0}$ ve $M_3 = \mathbf{0}$ olur. Böylece P_2 matrisi,

$$P_2 = S \begin{pmatrix} M_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_4 \end{pmatrix} S^{-1} \quad (3.16)$$

olarak elde edilir. P_2 matrisi bir idempotent matris olduğundan M_1 ve M_4 matrisleri de idempotent matrislerdir. (3.15) eşitliğinin (1,1)-bloğundan

$$c_1 K + c_2 X + 2a_1a_2 KX + c_4 M_1 + (c_3 + c_5) I_r = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

bulunur. Ayrıca $B_2 P_2 = P_2 B_2 = B_2$ olduğundan (3.13) ve (3.16) eşitliklerinden $X M_1 = M_1 X = X$ ve $T M_4 = M_4 T = T$ yazılabilir. (3.15) eşitliğinin (2,2)-bloğundan

$$c_2 T + c_4 M_4 + c_5 I_{n-r} = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

bulunur.

Öte yandan, B_2 matrisi P_2 matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{p_2 - r_2, q_2 - r_2\}$ -kuadratik matris olduğundan X matrisi M_1 matrisine göre, T matrisi M_4 matrisine göre bir genelleştirilmiş $\{p_2 - r_2, q_2 - r_2\}$ -kuadratik matristir. Böylece Teorem 2.37'ye göre

$$X = (p_2 - q_2) Z_1 + (q_2 - r_2) M_1, \quad Z_1 M_1 = M_1 Z_1 = Z_1 \quad (3.19)$$

ve

$$T = (p_2 - q_2) Z_2 + (q_2 - r_2) M_4, \quad Z_2 M_4 = M_4 Z_2 = Z_2 \quad (3.20)$$

olacak şekilde Z_1 ve Z_2 idempotent matrisleri vardır.

K matrisi $\{p_1 - r_1, q_1 - r_1\}$ -kuadratik matris olduğundan Teorem 2.33'e göre

$$K = (p_1 - q_1)Z_3 + (q_1 - r_1)I_r \quad (3.21)$$

olacak şekilde Z_3 idempotent matrisi vardır.

Şimdi (3.19)'daki X ve (3.21)'deki K matrisleri (3.17) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & (c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2))Z_1 \\ & + (c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4)M_1 \\ & + c_1(p_1 - q_1)Z_3 + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5)I_r \\ & + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)Z_3Z_1 + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2)Z_3M_1 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.22)$$

bulunur. Benzer şekilde (3.20)'deki T matrisi (3.18) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$c_2(p_2 - q_2)Z_2 + (c_2(q_2 - r_2) + c_4)M_4 + c_5I_{n-r} = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

olur.

Sonuç 3.3. (3.3) ifadesindeki lineer bileşimin $p_3, q_3 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\{p_3, q_3\}$ -kuadratik matris olması için gerek ve yeter şart Z_1, Z_2, Z_3, M_1, M_4 matrisleri (3.19)-(3.21)'deki matrisler olmak üzere (3.22) ve (3.23) eşitliklerinin birlikte sağlanmasıdır.

Şimdi (3.23) eşitliğini detaylı olarak inceleyelim.

(3.23) eşitliği $Z_2M_4 = M_4Z_2 = Z_2$ ve $Z_2^2 = Z_2$ olduğu hatırlanarak Z_2 ile çarpılırsa, $c_2(p_2 - q_2)Z_2 + (c_2(q_2 - r_2) + c_4)Z_2 + c_5Z_2 = \mathbf{0}$ olur. Buradan gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$(c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5)Z_2 = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

eşitliği bulunur. Burada üç durum söz konusudur:

Durum I. $Z_2 = \mathbf{0}$ ve $c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5 \neq 0$ olması durumu.

Bu durumda (3.23) eşitliğinden

$$(c_2(q_2 - r_2) + c_4)M_4 + c_5I_{n-r} = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

olur. M_4 bir idempotent matris olduğundan Teorem 2.24 ve Teorem 2.26'ya göre $M_4 = I$, $M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}$ veya $M_4 = \mathbf{0}$ şeklindedir. Dolayısıyla (3.25) eşitliğinin sağlanabilmesi üç farklı sonuç ile mümkündür. Bunların sırasıyla,

$$c_2(q_2 - r_2) + c_4 + c_5 = 0 \text{ veya } c_2(q_2 - r_2) + c_4 = 0, c_5 = 0 \text{ veya } c_5 = 0$$

eşitliklerinden ibaret olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.4. Z_2 ve M_4 matrisleri (3.20)'deki matrisler olmak üzere $Z_2 = \mathbf{0}$ ve $c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5 \neq 0$ koşullarıyla birlikte (3.23) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

- (i) $c_2(q_2 - r_2) + c_4 + c_5 = 0, c_2 \neq 0, Z_2 = \mathbf{0}, M_4 = I$
- (ii) $c_2(q_2 - r_2) + c_4 = 0, c_5 = 0, Z_2 = \mathbf{0}, M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}$
- (iii) $c_5 = 0, c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), Z_2 = \mathbf{0}, M_4 = \mathbf{0}$

Durum II. $Z_2 \neq \mathbf{0}$ ve $c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5 = 0$ olması durumu.

Bu durumda $c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4$ olur. Bu ifade (3.23) eşitliğinde kullanılırsa

$$c_2(p_2 - q_2)Z_2 + (c_2(q_2 - r_2) + c_4)M_4 + (-c_2(p_2 - r_2) - c_4)I_{n-r} = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

bulunur.

Öte yandan $Z_2M_4 = M_4Z_2 = Z_2$ olduğundan Z_2 ve M_4 matrislerinin mümkün olabileceği tüm durumlar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} Z_2 &\sim I \oplus \mathbf{0}, & M_4 &\sim I \oplus \mathbf{0} \\ Z_2 &\sim I \oplus \mathbf{0}, & M_4 &= I \\ Z_2 &= I, & M_4 &= I \\ Z_2 &\sim \mathbf{0} \oplus I, & M_4 &\sim \mathbf{0} \oplus I \\ Z_2 &\sim \mathbf{0} \oplus I, & M_4 &= I \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadelerden birincisi ve dördüncüsü ile ikincisi ve beşincisi aynı sonuca götüreceğinden dördüncü ve beşinci durumları eleyerek devam edeceğiz.

Durum II.I. (Z_2, M_4) çiftinin köşegen formunun $(I \oplus \mathbf{0}, I \oplus \mathbf{0})$ olması durumu.

İlgili köşegen formlar (3.26) eşitliğinde kullanılırsa,

$$c_2(p_2 - q_2) + c_2(q_2 - r_2) + c_4 - c_2(p_2 - r_2) - c_4 = 0 \text{ ve } -c_2(p_2 - r_2) - c_4 = 0$$

bulunur.

Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa, $0 = 0$ ve $c_4 = -c_2(p_2 - r_2)$ olur.

Durum II.II. (Z_2, M_4) çiftinin köşegen formunun $(I \oplus \mathbf{0}, I \oplus I)$ olması durumu.

İlgili köşegen formlar (3.26) eşitliğinde kullanılırsa

$$c_2(p_2 - q_2) + c_2(q_2 - r_2) + c_4 - c_2(p_2 - r_2) - c_4 = 0 \text{ ve} \\ c_2(q_2 - r_2) + c_4 - c_2(p_2 - r_2) - c_4 = 0$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa; $0 = 0$ ve $c_2 = 0$ bulunur.

Durum II.III. $Z_2 = I$ ve $M_4 = I$ olması durumu.

Bu durumda (3.26) eşitliğinden, $c_2(p_2 - q_2) + c_2(q_2 - r_2) + c_4 - c_2(p_2 - r_2) - c_4 = 0$ yani $0 = 0$ gelir. Durum II' nin hipotezinden $c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4$ olduğu bilinmektedir. Bu da dikkate alınırsa Durum II.I' den Durum II.III'e kadar elde edilen sonuçlar sırasıyla aşağıdaki gibi olur:

$$c_4 = -c_2(p_2 - r_2), c_5 = 0 \text{ veya } c_2 = 0, c_5 = -c_4 \text{ veya } c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4$$

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.5. Z_2 ve M_4 matrisleri (3.20)'deki matrisler olmak üzere $Z_2 \neq \mathbf{0}$ ve $c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5 = 0$ koşullarıyla (3.23) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

$$(iv) \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), c_5 = 0, Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}$$

$$(v) \quad c_2 = 0, c_5 = -c_4, Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_4 = I$$

$$(vi) \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4, Z_2 = I, M_4 = I$$

Durum III. $Z_2 = \mathbf{0}$ ve $c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5 = 0$ olması durumu.

Bu durumda yine (3.25) sağlanır. Dolayısıyla Teorem 3.4'deki (i)'den (iii)'ye kadar olan sonuçlar $c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5 = 0$ hipotezi ile birlikte düşünülürse

$$c_2 = 0, c_5 = -c_4 \text{ veya } c_2 = c_4 = c_5 = 0 \text{ veya } c_4 = -c_2(p_2 - r_2), c_5 = 0$$

eşitlikleri elde edilir. $c_2 = c_4 = c_5 = 0$ eşitlikleri $c_4 = 0$ olmasından kaynaklı bir çelişki belirtir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.6. Z_2 ve M_4 matrisleri (3.20)'deki matrisler olmak üzere $Z_2 = \mathbf{0}$ ve $c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5 = 0$ koşullarıyla (3.23) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

$$(vii) \quad c_2 = 0, c_5 = -c_4, Z_2 = \mathbf{0}, M_4 = I$$

$$(viii) \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), c_5 = 0, Z_2 = \mathbf{0}, M_4 = \mathbf{0}$$

Sonuç olarak (3.23) eşitliği ile ilgili detaylı incelememizi aşağıdaki teorem ile özetleyebiliriz.

Teorem 3.7. (3.23) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart Teorem 3.4-Teorem 3.6'daki sekiz sonuçtan birinin sağlanmasıdır.

Şimdi de (3.22) eşitliğini detaylı olarak inceleyelim.

(3.22) eşitliği $Z_1^2 = Z_1$ ve $Z_1 M_1 = M_1 Z_1 = Z_1$ olduğu hatırlanarak sağdan Z_1 matrisi ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & (c_2(p_2 - r_2) + 2a_1 a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_4 + c_5)Z_1 \\ & + (c_1(p_1 - q_1) + 2a_1 a_2(p_1 - q_1)(p_2 - r_2))Z_3 Z_1 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.27)$$

eşitliği yazılabilir. Daha sonra (3.27) ifadesi soldan Z_3 idempotent matrisi ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1 a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5)Z_3 Z_1 = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi buradan hareketle üç durum mevcuttur:

$$Z_3 Z_1 = \mathbf{0} \text{ ve } c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1 a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 \neq 0$$

veya

$$Z_3 Z_1 \neq \mathbf{0} \text{ ve } c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1 a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0$$

veya

$$Z_3 Z_1 = \mathbf{0} \text{ ve } c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1 a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0$$

Şimdi bu durumları detaylı olarak ele alalım:

Durum 1. $Z_3 Z_1 = \mathbf{0}$ ve $c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1 a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 \neq 0$ olması durumu.

Bu durumda (3.27) ifadesinden

$$(c_1(q_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1 a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5)Z_1 = \mathbf{0} \quad (3.29)$$

eşitliği elde edilir. Burada yine üç alt durum söz konusudur.

Durum 1.a. $Z_1 = \mathbf{0}$ ve $c_1(q_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1 a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 \neq 0$ olması durumu.

Bu durumda (3.22) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & (c_2(q_2 - r_2) + 2a_1 a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4)M_1 + c_1(p_1 - q_1)Z_3 \\ & + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5)I + 2a_1 a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2)Z_3 M_1 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.30)$$

bulunur. Ayrıca $Z_1 = \mathbf{0}$ olduğundan (3.19)'dan $X = (q_2 - r_2)M_1$ olur. Öte yandan (3.21)'den biliyoruz ki $K = (p_1 - q_1)Z_3 + (q_1 - r_1)I$ 'dir. $KX = XK$, $p_1 \neq q_1$ ve $q_2 \neq r_2$ olduğundan $M_1 Z_3 = Z_3 M_1$ olur. M_1 ve Z_3 değişmeli idempotent matrisler olduğundan aşağıdaki durumlar mevcuttur:

$$\begin{aligned} M_1 & \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0} \text{ veya } \mathbf{0} \oplus I \text{ veya } Z_3 = I \text{ veya } Z_3 = \mathbf{0}, \\ M_1 & = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0} \text{ veya } Z_3 = I \text{ veya } Z_3 = \mathbf{0}, \\ M_1 & = \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0} \text{ veya } Z_3 = I \text{ veya } Z_3 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Şimdi bu 10 durumun hepsini tek tek irdeleyelim:

Durum 1.a.1. (M_1, Z_3) çiftinin köşegen formunun $(I \oplus \mathbf{0}, I \oplus \mathbf{0})$ olması durumu.

İlgili köşegen formlar (3.30) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & (c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_1(p_1 - q_1) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ & + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Bu matris eşitliğinde (1,1) ve (2,2)-bloklarından sırasıyla

$$\begin{aligned} & c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4 + c_1(p_1 - q_1) \\ & + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2) + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0 \end{aligned}$$

ve

$$c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılır ve durum hipotezleri dikkate alınır

$$\begin{aligned} & c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - c_2(q_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\ & c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3, \\ & -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)] \end{aligned} \quad (3.31)$$

yazılabilir.

Durum 1.a.2. (M_1, Z_3) çiftinin köşegen formunun $(I \oplus \mathbf{0}, \mathbf{0} \oplus I)$ olması durumu.

İlgili köşegen formlar (3.30) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & (c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_1(p_1 - q_1) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \\ & + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Buradan (1,1) ve (2,2)-bloklarından sırasıyla

$$c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4 + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0$$

ve

$$c_1(p_1 - q_1) + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılır ve durum hipotezleri dikkate alınır

$$\begin{aligned} & c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = c_1(p_1 - q_1) - c_2(q_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\ & c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3, \\ & -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)] \end{aligned} \quad (3.32)$$

yazılabilir.

Durum 1.a.3. (M_1, Z_3) çiftinin köşegen formunun $(I \oplus \mathbf{0}, I \oplus I)$ olması durumu.

İlgili köşegen formlar (3.30) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & (c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_1(p_1 - q_1) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \\ & + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Matrislerin eşitliği tanımından hareketle (1,1) ve (2,2)-bloklarından sırasıyla

$$\begin{aligned} & c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4 + c_1(p_1 - q_1) \\ & + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2) + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0 \end{aligned}$$

ve

$$c_1(p_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılır ve durum hipotezleri dikkate alınır

$$\begin{aligned} & c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\ & c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3, \\ & -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)] \end{aligned} \quad (3.33)$$

elde edilir.

Durum 1.a.4. (M_1, Z_3) çiftinin köşegen formunun $(I \oplus \mathbf{0}, \mathbf{0} \oplus \mathbf{0})$ olması durumu.

İlgili köşegen formlar (3.30) eşitliğinde kullanılırsa,

$$(c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

olur. Buradan (1,1) ve (2,2)-bloklarından sırasıyla

$$c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4 + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0$$

ve

$$c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0$$

elde edilir. Böylece gerekli düzenlemeler yapılır ve durum hipotezleri dikkate alınır

$$\begin{aligned} & c_4 = -c_2(q_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\ & c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3, \quad c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\ & -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)] \end{aligned} \quad (3.34)$$

bulunur.

Durum 1.a.5. (M_1, Z_3) çiftinin köşegen formunun $(I \oplus I, I \oplus \mathbf{0})$ olması durumu.

İlgili köşegen formlar (3.30) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & (c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} + c_1(p_1 - q_1) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ & + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Buradan (1,1) ve (2,2)-bloklarından sırasıyla

$$\begin{aligned} & c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4 + c_1(p_1 - q_1) \\ & + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2) + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0 \end{aligned}$$

ve

$$c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4 + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılır ve durum hipotezleri dikkate alınır,

$$\begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\ c_5 &= -c_2(q_2 - r_2) - c_3 - c_4 \end{aligned} \quad (3.35)$$

elde edilir.

Durum 1.a.6. $M_1 = I$ ve $Z_3 = I$ olması durumu.

(3.30) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} & (c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} + c_1(p_1 - q_1) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \\ & + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Buradan sadece

$$\begin{aligned} & c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4 + c_1(p_1 - q_1) \\ & + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2) + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılır ve durum hipotezleri dikkate alınır,

$$\begin{aligned} c_3 + c_4 + c_5 &= -c_1(p_1 - r_1) - c_2(q_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\ c_2 &\neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\ -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) &\neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)] \end{aligned} \quad (3.36)$$

elde edilir.

Durum 1.a.7. $M_1 = I$ ve $Z_3 = \mathbf{0}$ olması durumu.

(3.30) eşitliğinden,

$$(c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

olur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılır ve durum hipotezleri dikkate alınır,

$$\begin{aligned} c_3 + c_4 + c_5 &= -c_1(q_1 - r_1) - c_2(q_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\ c_2 &\neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\ -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) &\neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)] \end{aligned} \quad (3.37)$$

elde edilir.

Durum 1.a.8. (M_1, Z_3) çiftinin köşegen formunun $(\mathbf{0} \oplus \mathbf{0}, I \oplus \mathbf{0})$ olması durumu.

İlgili köşegen formlar (3.30) eşitliğinde kullanılırsa,

$$c_1(p_1 - q_1) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

olur. Buradan (1,1) ve (2,2)-bloklarından sırasıyla

$$c_1(p_1 - q_1) + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0$$

Ve

$$c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0$$

elde edilir. Böylece durum hipotezleri de dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \text{ ve } c_5 = -c_3, \quad c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\ c_4 &\neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)) \end{aligned} \quad (3.38)$$

bulunur.

Durumu 1.a.9. $M_1 = \mathbf{0}$ ve $Z_3 = I$ olması durumu.

(3.30) eşitliğinden,

$$c_1(p_1 - q_1) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

olur. Buradan

$$c_1(p_1 - q_1) + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0$$

bulunur. Böylece durum hipotezleri de dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} c_5 &= -c_1(p_1 - r_1) - c_3, \quad c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\ c_4 &\neq c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)) \end{aligned} \quad (3.39)$$

elde edilir.

Durum 1.a.10. $M_1 = \mathbf{0}$ ve $Z_3 = \mathbf{0}$ olması durumu.

Bu durumda (3.30) eşitliği ile beraber durum hipotezleri dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} c_5 &= -c_1(q_1 - r_1) - c_3, \quad c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\ c_4 &\neq -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)) \end{aligned} \quad (3.40)$$

bulunur.

Durum 1.b. $Z_1 \neq \mathbf{0}$ ve $c_1(q_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0$ olması durumu.

Bu durumda

$$c_3 + c_4 + c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) \quad (3.41)$$

bulunur. Öte yandan $Z_3Z_1 = \mathbf{0}$ olduğundan (3.22) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &(c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2))Z_1 \\ &+ (c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4)M_1 \\ &+ c_1(p_1 - q_1)Z_3 + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5)I + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2)Z_3M_1 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.42)$$

elde edilir.

Şimdi $Z_3 \neq \mathbf{0}$ ve $Z_3 = \mathbf{0}$ durumlarını ayrı ayrı inceleyelim:

Durum 1.b.1. $Z_3Z_1 = \mathbf{0}$, $Z_1 \neq \mathbf{0}$, $Z_3 \neq \mathbf{0}$ olması durumu.

Durum 1.b.1.1. $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$ ve $Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ olması durumu.

$Z_3Z_1 = \mathbf{0}$ olduğundan $A = \mathbf{0}$, $C = \mathbf{0}$ olur. Böylece $Z_3 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$ bulunur. Ayrıca

$Z_3^2 = Z_3$ olduğundan $BD = B$, $D^2 = D$ olur.

Z_1 , M_1 ve Z_3 matrislerinin benzer olduğu matrisler (3.42) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & (c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_4) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_1(p_1 - q_1) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} \\ & + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son matris eşitliğinde,

$$(1,1)\text{-bloğundan; } c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_4 + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0$$

bulunur. Bu ise (3.41) eşitliği ile aynıdır.

$$(1,2)\text{-bloğundan; } c_1(p_1 - q_1)B = \mathbf{0} \text{ bulunur. Buradan}$$

$(c_1 = 0 \text{ ve } B \neq \mathbf{0})$ veya $(c_1 \neq 0 \text{ ve } B = \mathbf{0})$ veya $(c_1 = 0 \text{ ve } B = \mathbf{0})$ elde edilir.

(2,2)-bloğundan;

$$c_1(p_1 - q_1)D + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5)I = \mathbf{0} \quad (3.43)$$

bulunur.

Şimdi $(c_1 = 0 \text{ ve } B \neq \mathbf{0})$ veya $(c_1 \neq 0 \text{ ve } B = \mathbf{0})$ veya $(c_1 = 0 \text{ ve } B = \mathbf{0})$ olması durumlarını ayrı ayrı inceleyelim:

Durum 1.b.1.1.(1). $c_1 = 0$ ve $B \neq \mathbf{0}$ olması durumu.

(3.43) eşitliğinden $(c_3 + c_5)I = \mathbf{0}$ yani

$$c_5 = -c_3 \quad (3.44)$$

elde edilir. Sonuç olarak, (3.41) eşitliği de dikkate alınarak

$$c_1 = 0, B \neq \mathbf{0}, c_5 = -c_3, c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) \quad (3.45)$$

bulunur.

Durum 1.b.1.1.(2). $c_1 \neq 0$ ve $B = \mathbf{0}$ olması durumu.

Bu durumda $D \neq \mathbf{0}$ olmalıdır. Aksi halde $Z_3 = \mathbf{0}$ olur. Böylece genelliği bozmaksızın

$D = I$ veya $D \sim I \oplus \mathbf{0}$ dır.

Durum 1.b.1.1.(2)-1. $D = I$ olması durumu.

(3.43) eşitliğinden

$$c_1(p_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0 \quad (3.46)$$

elde edilir. Sonuç olarak, (3.41) eşitliği ve durum hipotezleri dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} c_1 &\neq 0, B = \mathbf{0}, D = I, c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\ c_4 &= c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\ c_5 &= -c_1(p_1 - r_1) - c_3 \end{aligned} \quad (3.47)$$

bulunur.

Durum 1.b.1.1.(2)-2. $D \sim I \oplus \mathbf{0}$ olması durumu.

(3.43) eşitliğinden

$$c_1 = 0 \text{ ve } c_3 + c_5 = 0 \quad (3.48)$$

bulunur ki bu $c_1 \neq 0$ olması durumu ile çelişir. Bu nedenle bu durumu ihmal edeceğiz.

Durum 1.b.1.1.(3). $c_1 = 0$ ve $B = \mathbf{0}$ olması durumu.

Bu durumda (3.46) veya (3.48) eşitlikleri yine sağlanır. Dolayısıyla (3.41) eşitliği de dikkate alınarak

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, B = \mathbf{0}, D = I \text{ veya } D \sim I \oplus \mathbf{0}, c_5 = -c_3, \\ c_4 &= -c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) \end{aligned} \quad (3.49)$$

bulunur.

Durum 1.b.1.2. $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 \sim I \oplus I$ ve $Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ olması durumu.

$Z_3Z_1 = \mathbf{0}$ olduğundan $A = \mathbf{0}$, $C = \mathbf{0}$ olur. Böylece $Z_3 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$ bulunur. Ayrıca

$Z_3^2 = Z_3$ olduğundan $BD = B$, $D^2 = D$ olur. Z_1 , M_1 ve Z_3 matrislerinin benzer olduğu matrisler (3.42) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &(c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2)) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + (c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \\ &+ c_1(p_1 - q_1) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki matris eşitliğinin,

$$(1,1)\text{-bloğundan; } c_1(q_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0$$

bulunur. Bu ise (3.41) eşitliği ile aynıdır.

$$(1,2)\text{-bloğundan; } (p_1 - q_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2))B = \mathbf{0} \text{ olur. Buradan}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2) \\ B \neq \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ veya } \begin{pmatrix} c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2) \\ B = \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ veya } \begin{pmatrix} c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2) \\ B = \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

bulunur.

(2,2)-bloğundan;

$$\begin{aligned} & (c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4 + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5)I \\ & + (c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2))D = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.50)$$

elde edilir.

c_1 ve B 'nin yukarıda bahsedilen durumlarına göre ayrı ayrı inceleme yapalım:

Durum 1.b.1.2.(1). $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$ ve $B \neq \mathbf{0}$ olması durumu.

Bu durumda (3.41) eşitliğinden

$$c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0, \quad (3.51)$$

(3.50) eşitliğinden de

$$c_2(q_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0 \quad (3.52)$$

elde edilir. (3.51) den (3.52) çıkarılırsa

$$c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)$$

olur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(q_2 - r_2), B \neq \mathbf{0}, c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\ c_5 &= -c_2(q_2 - r_2) - c_3 - c_4 \end{aligned} \quad (3.53)$$

elde edilir.

Durum 1.b.1.2.(2). $c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2)$ ve $B = \mathbf{0}$ olması durumu.

Bu durumda $D \neq \mathbf{0}$ olmalıdır. Aksi halde $Z_3 = \mathbf{0}$ olur. Böylece genelliği bozmaksızın $D = I$ veya $D \sim I \oplus \mathbf{0}$ dır.

Durum 1.b.1.2.(2)-1. $D = I$ olması durumu.

(3.50) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4 + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 \\ & + c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2) = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

bulunur. (3.41) eşitliği (3.54) eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$(p_1 - q_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + (q_2 - p_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)) = 0 \quad (3.55)$$

bulunur.

Sonuç olarak durum hipotezleri de dikkate alınarak (3.41) ve (3.55) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} & c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad B = \mathbf{0}, \quad D = I, \\ & c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_3 - c_4, \\ & -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(q_2 - r_2)(p_1 - q_1) - (q_1 - r_1)(p_2 - q_2)] \end{aligned} \quad (3.56)$$

elde edilir.

Durum 1.b.1.2.(2)-2. $D \sim I \oplus \mathbf{0}$ olması durumu.

(3.50) eşitliğinden

$$c_1(p_1 - r_1) + c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0 \quad (3.57)$$

ve

$$c_1(q_1 - r_1) + c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0 \quad (3.58)$$

bulunur. (3.57) ve (3.58) taraf tarafa çıkarılırsa

$c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2) = 0$ olduğu görülür. Buradan

$$c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2) \quad (3.59)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla bu durum ihmal edilecektir.

Durum 1.b.1.2.(3). $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$ ve $B = \mathbf{0}$ olması durumu.

Bu durumda (3.56) veya (3.59), $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$ olmak üzere yine sağlanır.

Böylece

$$\begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(q_2 - r_2), D = I \text{ veya } D \sim I \oplus \mathbf{0}, B = \mathbf{0}, \\ c_2 &= -2a_1a_2(q_1 - r_1), c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_3 - c_4, \end{aligned} \quad (3.60)$$

elde edilir.

Genel olarak $Z_1 = I$ olamaz. Aksi halde $Z_3Z_1 = \mathbf{0}$ olduğundan $Z_3 = \mathbf{0}$ olur ki bu da çelişkidir.

Durum 1.b.2. $Z_3Z_1 = \mathbf{0}$, $Z_1 \neq \mathbf{0}$, $Z_3 = \mathbf{0}$ olması durumu.

(3.22) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & (c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2))Z_1 \\ & + (c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4)M_1 + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5)I = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.61)$$

olur. $Z_1M_1 = M_1Z_1 = Z_1$ ve $Z_1 \neq \mathbf{0}$ olduğundan aşağıdaki durumlardan biri mevcuttur:

$$Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$$

$$Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 = I$$

$$Z_1 = I, \quad M_1 = I$$

Durum 1.b.2.1. (Z_1, M_1) çiftinin köşegen formunun $(I \oplus \mathbf{0}, I \oplus \mathbf{0})$ olması durumu.

İlgili köşegen formlar (3.61) eşitliğinde kullanılırsa,

(1,1)-bloğundan;

$$\begin{aligned} & c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2) + c_2(q_2 - r_2) \\ & + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4 + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

(2,2)-bloğundan;

$$c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0 \quad (3.63)$$

olur. (3.62) ve (3.63) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_4 = 0 \quad (3.64)$$

elde edilir. Sonuç olarak durum hipotezleri dikkate alınarak (3.63) ve (3.64) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} c_1 &\neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\ c_5 &= -c_1(q_1 - r_1) - c_3 \end{aligned} \quad (3.65)$$

bulunur.

Durum 1.b.2.2. (Z_1, M_1) çiftinin köşegen formunun $(I \oplus 0, I \oplus I)$ olması durumu.

İlgili köşegen formlar (3.61) eşitliğinde kullanılırsa,

(1,1)-bloğundan;

$$\begin{aligned} c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2) + c_2(q_2 - r_2) \\ + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4 + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

(2,2)-bloğundan;

$$c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4 + c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5 = 0 \quad (3.67)$$

bulunur. (3.66) ve (3.67) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1) \quad (3.68)$$

bulunur. (3.68) eşitliği (3.67) eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$c_3 + c_4 + c_5 = -c_1(q_1 - r_1) \quad (3.69)$$

olur. Sonuç olarak durum hipotezleri de dikkate alınarak (3.68) ve (3.69) eşitliklerinden

$$c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3 - c_4 \quad (3.70)$$

elde edilir.

Durum 1.b.2.3. $Z_1 = I$ ve $M_1 = I$ olması durumu.

(3.61) eşitliği ile katsayılar ile ilgili hipotezler birlikte düşünülürse,

$$\begin{aligned} c_1 &\neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\ c_3 + c_4 + c_5 &= -c_1(q_1 - r_1) - c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) \end{aligned} \quad (3.71)$$

olur.

Durum 1.c. $Z_1 = 0$ ve $c_1(q_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0$ olması durumu.

Bu durumda Durum 1.a.1'den Durum 1.a.10'a kadar olan durumlar ve dolayısıyla (3.31)'den (3.40)'a kadar olan katsayı eşitlikleri yine geçerlidir. Bu katsayı eşitlikleri, $c_1(q_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0$ hipotezi ile birlikte düşünülürse sırasıyla aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} c_2 &\neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\ c_5 &= -c_1(q_1 - r_1) - c_3, \\ -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) &= 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)] \end{aligned} \quad (3.72)$$

veya

$$\begin{aligned} c_2 &= -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = c_1(p_1 - q_1), \quad c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3, \\ -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) &\neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)] \end{aligned} \quad (3.73)$$

veya

$$\begin{aligned} c_2 &\neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\ c_5 &= -c_1(p_1 - r_1) - c_3, \\ -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) &= 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)] \end{aligned} \quad (3.74)$$

veya

$$\begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_3 - c_4, \\ c_2 &\neq -2a_1a_2(p_1 - r_1) \end{aligned} \quad (3.75)$$

veya

$$\begin{aligned} c_2 &\neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\ c_3 + c_4 + c_5 &= -c_1(p_1 - r_1) - c_2(q_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_2 - r_2)(p_1 - r_1), \\ -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) &= 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)] \end{aligned} \quad (3.76)$$

veya

$$\begin{aligned} c_2 &= -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3 - c_4, \\ -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) &\neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)] \end{aligned} \quad (3.77)$$

veya

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \quad c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = -c_3, \\ c_4 &\neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)) \end{aligned} \quad (3.78)$$

veya

$$\begin{aligned} c_4 &= c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\ c_5 &= -c_1(p_1 - r_1) - c_3, \quad c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)) \text{ (veya } c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2)) \end{aligned} \quad (3.79)$$

veya

$$\begin{aligned} c_4 &= -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3, \\ c_4 &\neq c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)) \text{ (veya } c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2)) \end{aligned} \quad (3.80)$$

elde edilir.

Durum 1.a.4 ile $c_1(q_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0$ katsayı eşitliği birlikte düşünüldüğünde $c_4 = 0$ çelişkisine ulaşıldığı için yukarıdaki listede ilgili kesişime yer verilmemiştir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.8. Z_1, M_1 ve Z_3 matrisleri (3.19) ve (3.21)'deki matrisler olmak üzere $Z_3Z_1 = \mathbf{0}$ ve $c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 \neq 0$ koşullarıyla birlikte (3.22) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

$$\begin{aligned} &c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\ &c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3, \\ 1) \quad &-c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\ &Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0} \\ &c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = c_1(p_1 - q_1) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\ &c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3, \\ 2) \quad &-c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\ &Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I \end{aligned}$$

- $c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1)$, $c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1))$,
 $c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3$,
 3) $-c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)]$,
 $Z_1 = \mathbf{0}$, $M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $Z_3 = I$
- $c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1)$, $c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1))$,
 $c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3$,
 4) $-c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)]$,
 $Z_1 = \mathbf{0}$, $M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $Z_3 = \mathbf{0}$
- $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$, $c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1)$, $c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1)$,
 5) $c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_3 - c_4$,
 $Z_1 = \mathbf{0}$, $M_1 = I$, $Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}$
- $c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1)$, $c_3 + c_4 + c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1))$,
 6) $-c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)]$,
 $Z_1 = \mathbf{0}$, $M_1 = I$, $Z_3 = I$
- $c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1)$, $c_3 + c_4 + c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1))$,
 7) $-c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)]$,
 $Z_1 = \mathbf{0}$, $M_1 = I$, $Z_3 = \mathbf{0}$
- $c_1 = 0$, $c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1))$, $c_5 = -c_3$,
 8) $c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1))$,
 $Z_1 = \mathbf{0}$, $M_1 = \mathbf{0}$, $Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}$
- $c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3$, $c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1))$,
 9) $c_4 \neq c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1))$,
 $Z_1 = \mathbf{0}$, $M_1 = \mathbf{0}$, $Z_3 = I$
- $c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3$, $c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1))$,
 10) $c_4 \neq -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1))$,
 $Z_1 = \mathbf{0}$, $M_1 = \mathbf{0}$, $Z_3 = \mathbf{0}$
- $c_1 = 0$, $c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1))$, $c_5 = -c_3$,
 11) $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $Z_3 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$, $BD = B$, $D^2 = D$, $B \neq \mathbf{0}$,

- $c_1 \neq 0, c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3,$
 12) $c_4 = c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)),$
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I$
- 13) $c_1 = 0, c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), c_5 = -c_3,$
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus D, D^2 = D, D \neq \mathbf{0}$
- 14) $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_3 - c_4,$
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 = I, Z_3 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, BD = B, D^2 = D, B \neq \mathbf{0}$
- $c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2),$
 $c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)) - c_3 - c_4,$
 15) $-c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(q_2 - r_2)(p_1 - q_1) - (q_1 - r_1)(p_2 - q_2)],$
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 = I, Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I$
- 16) $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_3 - c_4,$
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 = I, Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus D, D^2 = D, D \neq \mathbf{0}$
- 17) $c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3,$
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, Z_3 = \mathbf{0}$
- 18) $c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3 - c_4,$
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 = I, Z_3 = \mathbf{0}$
- 19) $c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_3 + c_4 + c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)),$
 $Z_1 = I, M_1 = I, Z_3 = \mathbf{0}$
- $c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3,$
 20) $-c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)],$
 $Z_1 = \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}$
- $c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), c_4 = c_1(p_1 - q_1), c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3,$
 21) $-c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)],$
 $Z_1 = \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I$
- $c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3,$
 22) $-c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)],$
 $Z_1 = \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, Z_3 = I$
- 23) $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_3 - c_4,$
 $Z_1 = \mathbf{0}, M_1 = I, Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}$

$$c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), c_3 + c_4 + c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)),$$

$$24) -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)],$$

$$Z_1 = \mathbf{0}, M_1 = I, Z_3 = I$$

$$c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3 - c_4,$$

$$25) -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)],$$

$$Z_1 = \mathbf{0}, M_1 = I, Z_3 = \mathbf{0}$$

$$26) c_1 = 0, c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), c_5 = -c_3,$$

$$Z_1 = \mathbf{0}, M_1 = \mathbf{0}, Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}$$

$$c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_4 = c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)),$$

$$27) c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3,$$

$$Z_1 = \mathbf{0}, M_1 = \mathbf{0}, Z_3 = I$$

$$c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)),$$

$$28) c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3,$$

$$Z_1 = \mathbf{0}, M_1 = \mathbf{0}, Z_3 = \mathbf{0}$$

Şimdi 2. durumu ele alalım:

Durum 2. $Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}$ ve $c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0$ olması durumu.

Bu durumda

$$c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(p_2 - r_2) = -c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_1(q_1 - r_1) - c_3 - c_4 - c_5 \quad (3.81)$$

olur. Böylece (3.27) eşitliğinden

$$(c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(p_2 - r_2))(Z_3Z_1 - Z_1) = \mathbf{0}$$

olur. Dolayısıyla üç farklı durum söz konusudur:

$$\left(\begin{matrix} c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2) \\ Z_3Z_1 \neq Z_1 \end{matrix} \right) \text{ veya } \left(\begin{matrix} c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2) \\ Z_3Z_1 = Z_1 \end{matrix} \right) \text{ veya } \left(\begin{matrix} c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2) \\ Z_3Z_1 = Z_1 \end{matrix} \right)$$

Şimdi bu durumları ayrı ayrı ele alalım.

Durum 2.a. $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2)$ ve $Z_3Z_1 \neq Z_1$ olması durumu.

Bu durumda (3.81) eşitliğinden

$$c_3 + c_4 + c_5 = -c_2(p_2 - r_2) \quad (3.82)$$

olur. Böylece

$$Z_3Z_1 \neq Z_1, Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}, c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3 - c_4 \quad (3.83)$$

elde edilir.

$XK = KX$ olduğundan

$$(p_2 - q_2)(Z_1Z_3 - Z_3Z_1) = (q_2 - r_2)(Z_3M_1 - M_1Z_3) \quad (3.84)$$

olur. Z_1 ve M_1 değişmeli idempotent olup $Z_3Z_1 \neq Z_1$ ve $Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}$ olduğundan aşağıdaki gözlemler yapılabilir.

Durum 2.a.1. $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$ ve $Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ olması durumu.

Z_1 , M_1 ve Z_3 matrislerinin benzer olduğu matrisler (3.84) eşitliğinde yerine yazılırsa $(p_2 - q_2)B = (r_2 - q_2)B$ ve $(q_2 - p_2)C = (q_2 - r_2)C$ olup $p_2 - q_2 \neq r_2 - q_2$ olduğundan $B = \mathbf{0}$ ve $q_2 - p_2 \neq q_2 - r_2$ olduğundan $C = \mathbf{0}$ bulunur.

Böylece $Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$ olur. $Z_3Z_1 \neq Z_1$ olduğundan $A \neq I$, $Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}$ olduğundan da $A \neq \mathbf{0}$ dır.

Z_1 , M_1 ve Z_3 matrislerinin benzer olduğu matrisler olduğundan (3.22) eşitliğinde yerine yazılırsa,

(1,1)-bloğundan;

$$c_2(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0 \quad (3.85)$$

bulunur.

(2,2)-bloğundan;

$$-2a_1a_2(p_1 - q_1)(p_2 - r_2)D + (c_3 + c_5 - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2))I = 0 \quad (3.86)$$

olur.

Durum 2.a.1.1. $D = I$ olması durumu.

(3.86) eşitliğinden $c_3 + c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2)$ olur. Bu son eşitlik (3.85) eşitliğinde yerine yazılırsa $c_4 = (p_2 - r_2)(-c_2 - 2a_1a_2(p_1 - r_1))$ elde edilir. Böylece (3.83) eşitliği de dikkate alınarak $D = I$ olması durumunda ki sonuçların

$$\begin{aligned} D = I, \quad c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 + c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\ c_4 &= (p_2 - r_2)(-c_2 - 2a_1a_2(p_1 - r_1)) \end{aligned} \quad (3.87)$$

şeklinde olduğu görülür.

Durum 2.a.1.2. $D = \mathbf{0}$ olması durumu.

(3.86) eşitliğinde $c_3 + c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2)$ olur. Bu eşitlik (3.85) eşitliğinde yerine yazılırsa yazılırsa $c_4 = (p_2 - r_2)(-c_2 - 2a_1a_2(q_1 - r_1))$ elde edilir. Böylece (3.83) eşitliği de dikkate alınarak $D = \mathbf{0}$ olması durumunda ki sonuçların

$$\begin{aligned} D = \mathbf{0}, \quad c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 + c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\ c_4 &= (p_2 - r_2)(-c_2 - 2a_1a_2(q_1 - r_1)) \end{aligned} \quad (3.88)$$

şeklinde olduğu görülür.

Durum 2.a.1.3. $D \sim I \oplus \mathbf{0}$ olması durumu.

(3.86) eşitliğinden $p_1 = q_1$ çelişkisi gelir.

Durum 2.a.2. $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 = I$ ve $Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ olması durumu.

(3.84) eşitliği ile birlikte $Z_3Z_1 \neq Z_1$ ve $Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}$ olduğu kullanılırsa Z_3 matrisinin

$$Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad A \neq \mathbf{0} \text{ ve } A \neq I \text{ şeklinde olduğu görülür. Bu matrisler (3.22)}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa,

(1,1)-bloğundan; $0 = 0$ ve (2,2)-bloğundan;

$$(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1))I + 2a_1a_2(p_1 - q_1)D = 0 \quad (3.89)$$

bulunur.

Durum 2.a.2.1. $D = I$ olması durumu.

(3.89) eşitliğinden $c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)$ olur. (3.83) eşitliği de dikkate alınarak $D = I$ olması durumunda ki sonuçların

$$\begin{aligned} D = I, \quad c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\ c_3 + c_4 + c_5 &= -c_2(p_2 - r_2) \end{aligned} \quad (3.90)$$

olduğu görülür.

Durum 2.a.2.2. $D = \mathbf{0}$ olması durumu.

(3.89) eşitliğinden $c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)$ olur. Böylece (3.83) eşitliği de dikkate alınarak $D = I$ olması durumunda ki sonuçlar

$$\begin{aligned} D = \mathbf{0}, \quad c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\ c_3 + c_4 + c_5 &= -c_2(p_2 - r_2) \end{aligned} \quad (3.91)$$

şeklinde olur.

Durum 2.a.2.3. $D \sim I \oplus \mathbf{0}$ olması durumu.

(3.86) eşitliğinden $p_1 = q_1$ çelişkisi gelir.

Durum 2.a.3. $Z_1 = I \quad M_1 = I$ ve $Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ olması durumu.

$Z_3Z_1 \neq Z_1$ olduğundan $Z_3 \neq I$; $Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}$ olduğundan $Z_3 \neq \mathbf{0}$ olur. $Z_1 = I$ ve $M_1 = I$ eşitlikleri (3.22) eşitliğinde yerine yazılırsa, $0 = 0$ eşitliği bulunur. Dolayısıyla (3.83) eşitlikleri dikkate alınarak

$$c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 + c_4 + c_5 = -c_2(p_2 - r_2) \quad (3.92)$$

elde edilir.

Durum 2.b. $c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2)$ ve $Z_3Z_1 = Z_1$ olması durumu.

Bu durumda (3.28) eşitliğinden, $Z_1 \neq \mathbf{0}$ olduğu dikkate alınarak,

$$c_3 + c_4 + c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2)$$

eşitliği elde edilir ki bu (3.81) eşitliği ile aynıdır. Dolayısıyla (3.22) eşitliğini irdelemek için Z_1 ve M_1 matrislerinin muhtemel köşegen formlarını dikkate alarak ilerleyeceğiz. Üç farklı durum söz konusudur:

$$Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$$

$$Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus I$$

$$Z_1 = I, \quad M_1 = I$$

Durum 2.b.1. $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$ ve $Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ olması durumu.

$Z_3 Z_1 = Z_1$ olduğundan $A = I$ ve $C = \mathbf{0}$ olup $Z_3 \sim \begin{pmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$ bulunur. Ayrıca $Z_3^2 = Z_3$

olduğundan $D^2 = D$ olur. Böylece (3.22) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & (c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2)) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ & + (c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + c_1(p_1 - q_1) \begin{pmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} \\ & + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(p_2 - q_2) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ & + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & (c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_4) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ & + c_1(p_1 - q_1) \begin{pmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitliğin (1,1)-bloğundan;

$$c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0 \quad (3.93)$$

elde edilir. (3.93)'ün, Durum 2'nin ilk hipotezi olan (3.81) ile aynı olduğuna dikkat edelim.

Benzer şekilde (1,2)-bloğundan; $c_1(p_1 - q_1)B = \mathbf{0}$ olur. Buradan

$$(c_1 = 0, B \neq \mathbf{0}) \text{ veya } (c_1 \neq 0, B = \mathbf{0}) \text{ veya } (c_1 = 0, B = \mathbf{0})$$

bulunur.

(2,2)-bloğundan;

$$(c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5)I + c_1(p_1 - q_1)D = 0 \quad (3.94)$$

bulunur.

Şimdi c_1 ve B 'nin durumlarına göre irdeleme yapalım:

Durum 2.b.1.1. $c_1 = 0$ ve $B \neq 0$ olması durumu.

$c_1 = 0$ ise (3.81) eşitliğinden

$$c_3 + c_4 + c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) \quad (3.95)$$

(3.94) eşitliğinden de

$$c_3 + c_5 = 0 \quad (3.96)$$

elde edilir. (3.95) ve (3.96) eşitlikleri durum hipotezi ile birlikte

$$c_1 = 0, \quad B \neq 0, \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3 \quad (3.97)$$

sonucuna ulaştırır.

Durum 2.b.1.2. $c_1 \neq 0$ ve $B = 0$ olması durumu.

Bu durumda D 'nin durumlarına göre üç farklı irdeleme yapacağız.

Durum 2.b.1.2.(1). $D = 0$ olması durumu.

Bu durumda (3.94) eşitliğinden

$$c_3 + c_5 = -c_1(q_1 - r_1) \quad (3.98)$$

elde edilir. (3.98) eşitliği (3.81) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) \quad (3.99)$$

bulunur. (3.98) ve (3.99) eşitlikleri durum hipotezleri ile birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} c_1 &\neq 0, \quad B = 0, \quad D = 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\ c_4 &= -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\ c_5 &= -c_1(q_1 - r_1) - c_3 \end{aligned} \quad (3.100)$$

sonucuna götürür.

Durum 2.b.1.2.(2). $D = I$ olması durumu.

Bu durumda (3.94) eşitliğinden

$$c_3 + c_5 = -c_1(p_1 - r_1) \quad (3.101)$$

olur. (3.101) eşitliği (3.81) yerine yazılırsa,

$$c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) \quad (3.102)$$

bulunur. (3.101) ve (3.102) eşitlikleri durum hipotezleri ile birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} c_1 \neq 0, B = \mathbf{0}, D = I, c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\ c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3, \end{aligned} \quad (3.103)$$

elde edilir.

Durum 2.b.1.2.(3). $D \sim I \oplus \mathbf{0}$ olması durumu.

Bu durumda (3.94) eşitliğinden

$$c_3 + c_5 = -c_1(p_1 - r_1) = -c_1(q_1 - r_1) \quad (3.104)$$

bulunur. $p_1 \neq q_1$ olduğundan (3.104)'deki son iki ifadenin eşitliğinden $c_1 = 0$ olur. Fakat bu, Durum 2.b.1.2'nin hipotezi ile çelişir. Dolayısıyla bu durum ihmal edilecektir.

Durum 2.b.1.3. $c_1 = 0$ ve $B = \mathbf{0}$ olması durumu.

Bu durumda Durum 2.b.1.2.(1), Durum.2.b.1.2.(2) veya Durum.2.b.1.2.(3) durumlarındaki sonuçlar $c_1 = 0$ olmak kaydıyla yine geçerlidir. Fakat bu sonuçların her birinin $c_1 = 0$ olması durumunda

$$c_1 = 0, B = \mathbf{0}, c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), c_5 = -c_3 \quad (3.105)$$

sonucuna götürdüğüne dikkat edelim.

Durum 2.b.2. $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 \sim I \oplus I$ ve $Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ olması durumu.

$Z_3Z_1 = Z_1$ olduğundan $A = I$ ve $C = \mathbf{0}$ olduğu görülür. Böylece $Z_3 \sim \begin{pmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$ olur.

(3.22) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
& (c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2)) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
& + (c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_4) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \\
& + c_1(p_1 - q_1) \begin{pmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} + (c_1(q_1 - r_1) + c_3 + c_5) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \\
& + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(p_2 - q_2) \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2) \begin{pmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitliğin (1,1)-bloğundan;

$$c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0 \quad (3.106)$$

olur ki bu (3.81) ile aynıdır.

(1,2)-bloğundan; $(c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2))B = \mathbf{0}$ bulunur. Buradan $(p_1 - q_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2))B = \mathbf{0}$ yani

$$\begin{pmatrix} c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2) \\ B \neq \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ veya } \begin{pmatrix} c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2) \\ B = \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ veya } \begin{pmatrix} c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2) \\ B = \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

(2,2)-bloğundan;

$$\begin{aligned}
& (c_1(q_1 - r_1) + c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5)I \\
& + (c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - q_1)(q_2 - r_2))D = \mathbf{0}
\end{aligned} \quad (3.107)$$

olur.

Şimdi c_1 ve B 'nin durumlarına göre ayrı ayrı irdeleme yapalım.

Durum 2.b.2.1. $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$ ve $B \neq \mathbf{0}$ olması durumu.

$c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$ eşitliği (3.106) eşitliğinde yerine yazılırsa

$-2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0$ olur.

Buradan

$$c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0 \quad (3.108)$$

elde edilir. (3.107) eşitliğinde $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$ eşitliği yerine yazılırsa

$$c_2(q_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0 \quad (3.109)$$

bulunur. (3.108) ve (3.109) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $(p_2 - q_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)) = 0$ olur. Buradan

$$c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1) \quad (3.110)$$

elde edilir. Böylece, (3.109) ve (3.110) eşitlikleri durum hipotezi ile birlikte düşünülürse

$$c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), B \neq 0, c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_3 - c_4 \quad (3.111)$$

sonucuna götürür.

Durum 2.b.2.2. $c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2)$ ve $B = 0$ olması durumu.

Bu durumda (3.106) ve (3.107) eşitliklerinin irdemesini yapacağız. (3.106)'nin aynı zamanda Durum 2'nin hipotezi ile aynı olduğuna dikkat edelim. (3.107)'i D matrisinin durumlarına göre ayrı ayrı inceleyeceğiz.

Durum 2.b.2.2.(1). $D = 0$ olması durumu.

Bu durumda (3.107)'den

$$c_3 + c_4 + c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_2(q_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) \quad (3.112)$$

olur. Öte yandan (3.106)'den

$$c_3 + c_4 + c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) \quad (3.113)$$

olduğunu biliyoruz. (3.112) ve (3.113) eşitlikleri durum hipotezleri ile birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), B = 0, D = 0, c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2) \\ c_3 + c_4 + c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) \\ = -c_1(q_1 - r_1) - c_2(q_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) \end{aligned} \quad (3.114)$$

sonucuna götürür.

Durum 2.b.2.2.(2). $D = I$ olması durumu.

Yine (3.107)'den

$$c_3 + c_4 + c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_2(q_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) \quad (3.115)$$

elde edilir. (3.115), (3.106) ile birlikte düşünülürse

$$c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1) \quad (3.116)$$

bulunur. (3.116) eşitliği (3.115) eşitliğine yerine yazılırsa,

$$c_3 + c_4 + c_5 = -c_1(p_1 - r_1) \quad (3.117)$$

elde edilir. (3.116) ve (3.117) eşitlikleri durum hipotezleri ile birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} c_1 &\neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad B = \mathbf{0}, \quad D = I, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\ c_2 &= -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3 - c_4 \end{aligned} \quad (3.118)$$

sonucuna götürür.

Durum 2.b.2.2.(3). $D \sim I \oplus \mathbf{0}$ olması durumu.

Bu durumda (3.107) eşitliğinden

$$c_1(q_1 - r_1) + c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0 \quad (3.119)$$

ve

$$c_1(p_1 - r_1) + c_2(q_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0 \quad (3.120)$$

elde edilir. (3.119) eşitliğinden (3.120) eşitliği çıkarılırsa $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$

bulunur ki bu Durum 2.b.2.2 hipotezi ile çelişir. Dolayısıyla bu durum ihmal edilecektir.

Durum 2.b.2.3. $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$ ve $B = \mathbf{0}$ olması durumu.

Durum 2.b.2.2'deki üç durumun her birinden elde edilen sonuçlarda $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$ yazılarak,

$$\begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad B = \mathbf{0}, \quad D = \mathbf{0}, \\ c_2 &= -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_3 - c_4 \end{aligned} \quad (3.121)$$

veya

$$\begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad B = \mathbf{0}, \quad D = I, \\ c_2 &= -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3 - c_4 \end{aligned} \quad (3.122)$$

veya (3.106) eşitliği de dikkate alınarak

$$\begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad B = \mathbf{0}, \quad D \sim I \oplus \mathbf{0}, \\ c_2 &= -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_3 - c_4 \end{aligned} \quad (3.123)$$

elde edilir.

Durum 2.b.3. $Z_1 = I$, $M_1 = I$ ve $Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ olması durumu.

Bu durumda $Z_3Z_1 = Z_1$ eşitliğinden $Z_3 = I$ bulunur. Böylece (3.22) eşitliğinden

$$\begin{aligned} c_5 &= -c_1(p_1 - r_1) - c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_3 - c_4, \\ c_1 &\neq -2a_1a_2(p_2 - r_2) \end{aligned} \quad (3.124)$$

elde edilir.

Durum 2.c. $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2)$ ve $Z_3Z_1 = Z_1$ olması durumu.

Durum 2.b'nin tüm alt durumlarında $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2)$ yazılarak sonuçlar elde edilecektir. Fakat Durum 2.b.1.1, Durum 2.b.1.3 durumlarının hipotezleri ile $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2)$ eşitliği birlikte düşünülürse $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ veya $p_2 = r_2$ çelişkisine ulaşılır. Benzer şekilde Durum 2.b.2.1 ve Durum 2.b.2.3 durumlarında $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$ hipotezi mevcuttur ve bu hipotez $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2)$ eşitliği ile kesiştirildiğinde $p_2 = q_2$ çelişkisine ulaşılır. Böylece Durum 2.b.1.2, Durum 2.b.2.2 ve Durum 2.b.3 durumlarından elde edilen sonuçlar $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2)$ eşitliği ile birlikte düşünülerek,

$$\begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad B = \mathbf{0}, \quad D = \mathbf{0}, \\ c_4 &= c_1(q_1 - r_1) - c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3 \end{aligned} \quad (3.125)$$

veya

$$\begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), B = \mathbf{0}, D = I, \\ c_4 &= c_1(p_1 - r_1) - c_2(p_2 - r_2), c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3 \end{aligned} \quad (3.126)$$

veya

$$\begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), B = \mathbf{0}, D = \mathbf{0}, \\ c_2 &= -2a_1a_2(q_1 - r_1), c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3 - c_4 \end{aligned} \quad (3.127)$$

veya

$$\begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), B = \mathbf{0}, D = I, \\ c_2 &= -2a_1a_2(p_1 - r_1), c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3 - c_4 \end{aligned} \quad (3.128)$$

veya

$$c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3 - c_4 \quad (3.129)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.9. Z_1, M_1 ve Z_3 matrisleri (3.19) ve (3.21)'deki matrisler olmak üzere $Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}$ ve $c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0$ koşuluyla (3.22) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

- $$\begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_3 + c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\ 29) \quad c_4 &= (p_2 - r_2)(-c_2 - 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\ Z_1 &\sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, Z_3 \sim A \oplus I, D = I \\ c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_3 + c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\ 30) \quad c_4 &= (p_2 - r_2)(-c_2 - 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\ Z_1 &\sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, Z_3 \sim A \oplus \mathbf{0}, D = \mathbf{0} \\ 31) \quad c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), c_3 + c_4 + c_5 = -c_2(p_2 - r_2), \\ Z_1 &\sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 = I, Z_3 \sim A \oplus I, D = I \\ 32) \quad c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), c_3 + c_4 + c_5 = -c_2(p_2 - r_2), \\ Z_1 &\sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 = I, Z_3 \sim A \oplus \mathbf{0}, D = \mathbf{0} \end{aligned}$$

- 33) $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2)$, $c_3 + c_4 + c_5 = -c_2(p_2 - r_2)$,
 $Z_1 = I$, $M_1 = I$, $Z_3 \neq I$, $Z_3 \neq \mathbf{0}$
- 34) $c_1 = 0$, $c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1))$, $c_5 = -c_3$,
 $Z_3Z_1 = Z_1$, $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $Z_3 \sim \begin{pmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$, $B \neq \mathbf{0}$, $BD = B$, $D^2 = D$
- $c_1 \neq 0$, $c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2)$, $c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1))$,
- 35) $c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3$,
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}$
- $c_1 \neq 0$, $c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2)$, $c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1))$,
- 36) $c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3$,
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $Z_3 = I$
- 37) $c_1 = 0$, $c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1))$, $c_5 = -c_3$,
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $Z_3 \sim I \oplus D$, $D^2 = D$
- $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$, $c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)$, $c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_3 - c_4$,
- 38) $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 = I$, $Z_3 \sim \begin{pmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$, $B \neq \mathbf{0}$, $BD = B$, $D^2 = D$
- $c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2)$, $c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2)$,
- 39) $c_3 + c_4 + c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1))$,
 $-c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)]$,
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 = I$, $Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}$
- $c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2)$, $c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2)$, $c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)$,
- 40) $c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3 - c_4$,
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 = I$, $Z_3 = I$
- 41) $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$, $c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)$, $c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_3 - c_4$,
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 = I$, $Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}$
- 42) $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$, $c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)$, $c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3 - c_4$,
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 = I$, $Z_3 = I$
- 43) $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$, $c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)$, $c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_3 - c_4$,
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 = I$, $Z_3 \sim I \oplus D$, $D \sim I \oplus \mathbf{0}$
- 44) $c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2)$, $c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)) - c_3 - c_4$,
 $Z_1 = I$, $M_1 = I$, $Z_3 = I$

- 45) $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2)$, $c_4 = c_1(q_1 - r_1) - c_2(p_2 - r_2)$, $c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3$,
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}$
- 46) $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2)$, $c_4 = c_1(p_1 - r_1) - c_2(p_2 - r_2)$, $c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3$,
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $Z_3 = I$
- 47) $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2)$, $c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)$, $c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3 - c_4$,
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 = I$, $Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}$
- 48) $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2)$, $c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)$, $c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3 - c_4$,
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $M_1 = I$, $Z_3 = I$
- 49) $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2)$, $c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3 - c_4$,
 $Z_1 = I$, $M_1 = I$, $Z_3 = I$

Şimdi son durumu göz önüne alalım:

Durum 3. $Z_3Z_1 = \mathbf{0}$ ve $c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0$ olması durumu.

Durum 1'in tüm alt durumlarından elde edilen sonuçlarda $c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0$ eşitliği kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\begin{aligned} c_2 &= -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_1(p_1 - q_1), \quad c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3, \\ &-c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)] \end{aligned} \quad (3.130)$$

veya

$$\begin{aligned} c_2 &\neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = c_1(p_1 - q_1) - c_2(q_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\ c_5 &= -c_1(p_1 - r_1) - c_3, \\ &-c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)] \end{aligned} \quad (3.131)$$

veya

$$\begin{aligned} c_2 &\neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\ c_5 &= -c_1(q_1 - r_1) - c_3, \\ &-c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)] \end{aligned} \quad (3.132)$$

veya

$$c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 + c_4 + c_5 = -c_2(q_2 - r_2) \quad (3.133)$$

veya

$$\begin{aligned}
c_2 &= -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3 - c_4, \\
-c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) &\neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)]
\end{aligned} \tag{3.134}$$

veya

$$\begin{aligned}
c_2 &\neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
c_3 + c_4 + c_5 &= -c_1(q_1 - r_1) - c_2(q_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
-c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) &= 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)]
\end{aligned} \tag{3.135}$$

veya

$$c_1 = 0, \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3 \tag{3.136}$$

veya

$$\begin{aligned}
c_1 &\neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
c_5 &= -c_1(p_1 - r_1) - c_3
\end{aligned} \tag{3.137}$$

veya

$$\begin{aligned}
c_1 &\neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\
c_4 &= -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
c_5 &= -c_1(q_1 - r_1) - c_3
\end{aligned} \tag{3.138}$$

veya

$$\begin{aligned}
c_1 &\neq 0, \quad B = \mathbf{0}, \quad D = I, \quad c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\
c_4 &= c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
c_5 &= -c_1(p_1 - r_1) - c_3
\end{aligned} \tag{3.139}$$

veya

$$\begin{aligned}
c_1 &\neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad B = \mathbf{0}, \quad D = I, \quad c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\
c_2 &= -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3 - c_4
\end{aligned} \tag{3.140}$$

veya

$$\begin{aligned}
c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
c_5 &= 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1) - c_3
\end{aligned} \tag{3.141}$$

veya

$$c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3 - c_4 \quad (3.142)$$

veya

$$c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3 - c_4 \quad (3.143)$$

veya

$$\begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\ c_4 &= 2a_1a_2(p_1 - q_1)(p_2 - r_2), c_5 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1) - c_3 \end{aligned} \quad (3.144)$$

veya

$$\begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), c_4 = c_1(p_1 - q_1), \\ c_5 &= -c_1(p_1 - r_1) - c_3 \end{aligned} \quad (3.145)$$

Veya

$$c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3 - c_4 \quad (3.146)$$

veya

$$c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3 - c_4 \quad (3.147)$$

veya

$$\begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\ c_5 &= -c_1(p_1 - r_1) - c_3 \end{aligned} \quad (3.148)$$

veya

$$\begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\ c_5 &= -c_1(q_1 - r_1) - c_3 \end{aligned} \quad (3.149)$$

elde edilir.

$c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0$ katsayısı eşitliği ile (3.33), (3.45), (3.49), (3.53), (3.60), (3.74), (3.75), (3.78) durumlarından herhangi biri kesiştirildiğinde $c_4 = 0$, $p_i = q_i$, $p_i = r_i$, $q_i = r_i$, $i = 1, 2$ çelişkilerinden herhangi biri elde edildiğinden yukarıdaki listede ilgili kesişimlere yer verilmemektedir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.10. Z_1, M_1 ve Z_3 matrisleri (3.19) ve (3.21)'deki matrisler olmak üzere $Z_3 Z_1 = \mathbf{0}$ ve $c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1 a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0$ koşuluyla (3.22) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

- $c_2 = -2a_1 a_2(p_1 - r_1)$, $c_4 = -c_1(p_1 - q_1)$, $c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3$,
- 50) $-c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1 a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)]$,
 $Z_1 = \mathbf{0}$, $M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}$
- $c_2 \neq -2a_1 a_2(q_1 - r_1)$, $c_4 = c_1(p_1 - q_1) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1 a_2(q_1 - r_1))$,
 $c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3$,
- 51) $-c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1 a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)]$
 $Z_1 = \mathbf{0}$, $M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I$
- $c_2 \neq -2a_1 a_2(q_1 - r_1)$, $c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1 a_2(q_1 - r_1))$,
 $c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3$,
- 52) $-c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1 a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)]$,
 $Z_1 = \mathbf{0}$, $M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}$, $Z_3 = \mathbf{0}$
- $c_1 = -2a_1 a_2(q_2 - r_2)$, $c_2 = -2a_1 a_2(p_1 - r_1)$, $c_3 + c_4 + c_5 = -c_2(q_2 - r_2)$,
- 53) $Z_1 = \mathbf{0}$, $M_1 = I$, $Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}$
- $c_2 = -2a_1 a_2(p_1 - r_1)$, $c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3 - c_4$,
- 54) $-c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1 a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)]$,
 $Z_1 = \mathbf{0}$, $M_1 = I$, $Z_3 = I$
- $c_2 \neq -2a_1 a_2(q_1 - r_1)$, $c_3 + c_4 + c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1 a_2(q_1 - r_1))$,
- 55) $-c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1 a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)]$,
 $Z_1 = \mathbf{0}$, $M_1 = I$, $Z_3 = \mathbf{0}$
- $c_1 = 0$, $c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1 a_2(p_1 - r_1))$, $c_5 = -c_3$,
- 56) $Z_1 = \mathbf{0}$, $M_1 = \mathbf{0}$, $Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}$
- $c_1 \neq -2a_1 a_2(p_2 - r_2)$, $c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1 a_2(p_1 - r_1))$,
- 57) $c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3$,
 $Z_1 = \mathbf{0}$, $M_1 = \mathbf{0}$, $Z_3 = I$

- $c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)),$
 58) $c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3,$
 $Z_1 = \mathbf{0}, M_1 = \mathbf{0}, Z_3 = \mathbf{0}$
- $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_4 = c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)),$
 59) $c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3,$
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I$
- 60) $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3 - c_4,$
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 = I, Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I$
- $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)),$
 61) $c_5 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1) - c_3,$
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, Z_3 = \mathbf{0}$
- 62) $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3 - c_4,$
 $Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus I, Z_3 = \mathbf{0}$
- 63) $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3 - c_4,$
 $Z_1 = I, M_1 = I, Z_3 = \mathbf{0}$
- $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1),$
 64) $c_4 = 2a_1a_2(p_1 - q_1)(p_2 - r_2), c_5 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1) - c_3,$
 $Z_1 = \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}$
- $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), c_4 = c_1(p_1 - q_1),$
 65) $c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3,$
 $Z_1 = \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I$
- 66) $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3 - c_4,$
 $Z_1 = \mathbf{0}, M_1 = I, Z_3 = I$
- 67) $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3 - c_4,$
 $Z_1 = \mathbf{0}, M_1 = I, Z_3 = \mathbf{0}$
- 68) $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3,$
 $Z_1 = \mathbf{0}, M_1 = \mathbf{0}, Z_3 = I$
- 69) $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3,$
 $Z_1 = \mathbf{0}, M_1 = \mathbf{0}, Z_3 = \mathbf{0}$

Teorem 3.8, Teorem 3.9 ve Teorem 3.10, (3.22) eşitliğinin detaylı bir incelemesini parçalar halinde bizlere vermektedir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.11. (3.22) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart Teorem 3.8, Teorem 3.9 veya Teorem 3.10'daki sonuçlardan birinin sağlanmasıdır.

Sonuç olarak (3.22) ve (3.23) eşitliklerinin aynı anda sağlanması için gerek ve yeter şart Teorem 3.7 ve Teorem 3.11'in aynı anda sağlanmasıdır. Bunu sağlamak için Teorem 3.7'yi oluşturan Teorem 3.4, Teorem 3.5 ve Teorem 3.6'nın her birini Teorem 3.11'i oluşturan Teorem 3.8, Teorem 3.9 ve Teorem 3.10'un her biri ile ayrı ayrı kesiştireceğiz. Sadelik açısından kesişimleri yine parça parça ele alarak ilerleyeceğiz.

Teorem 3.4 ile Teorem 3.8'in kesişimi aşağıdaki teoremi verir:

Teorem 3.12. Z_1, Z_2, M_1 ve M_4 matrisleri (3.19) ve (3.20)'deki matrisler olmak üzere

$Z_2 = \mathbf{0}, Z_3 Z_1 = \mathbf{0}, c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1 a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 \neq 0$ ve $c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5 \neq 0$ koşullarıyla birlikte (3.22) ve (3.23) eşitliklerinin aynı anda sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

$$(i)-(1) \quad \begin{aligned} c_2 &\neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1 a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1 a_2(q_2 - r_2)), \\ c_4 &= -c_1(p_1 - q_1) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1 a_2(p_1 - r_1)), \\ c_5 &= c_1(p_1 - q_1) + 2a_1 a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\ -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) &\neq 2a_1 a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\ Z_1 &= \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I \end{aligned}$$

$$(i)-(2) \quad \begin{aligned} c_2 &\neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1 a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1 a_2(q_2 - r_2)), \\ c_4 &= c_1(p_1 - q_1) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1 a_2(q_1 - r_1)), \\ c_5 &= -c_1(p_1 - q_1) + 2a_1 a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\ -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) &\neq 2a_1 a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\ Z_1 &= \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I \end{aligned}$$

$$(i)-(3) \quad \begin{aligned} c_2 &\neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1 a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1 a_2(q_2 - r_2)), \\ c_4 &= -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1 a_2(p_1 - r_1)), \quad c_5 = 2a_1 a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\ -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) &\neq 2a_1 a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\ Z_1 &= \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I \end{aligned}$$

$$(i)-(4) \quad \begin{aligned} c_2 &\neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1 a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1 a_2(q_2 - r_2)), \\ c_4 &= -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1 a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = 2a_1 a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\ -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) &\neq 2a_1 a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\ Z_1 &= \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
& c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)] \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_1 = 0, \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \quad c_5 = -c_3 \\
& c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3, \\
& c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_4 \neq c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3, \\
& c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_4 \neq c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 \neq 0, \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad BD = B, \quad D^2 = D, \quad B \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq 0, \quad c_2 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
& c_4 = c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_5 = -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 \neq 0, \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
(i)-(13) \quad & c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \\
& Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus D, \quad D^2 = D, \quad D \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\
(i)-(15) \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - q_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - q_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 \neq 0, \quad c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
(i)-(17) \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
& c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
(i)-(18) \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 \neq 0, \\
(i)-(19) \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
(i)-(20) \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
(i)-(21) \quad & c_4 = c_1(p_1 - q_1), \quad c_5 = -c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
(i)-(22) \quad & c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
& c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, M_1 = I, Z_3 = I, Z_2 = \mathbf{0}, M_4 = I
\end{aligned}
\tag{i)-(24}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
& c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_4, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - q_1)(p_2 - q_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, M_1 = I, Z_3 = \mathbf{0}, Z_2 = \mathbf{0}, M_4 = I
\end{aligned}
\tag{i)-(25}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 \neq 0, \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, M_1 = \mathbf{0}, Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, Z_2 = \mathbf{0}, M_4 = I
\end{aligned}
\tag{i)-(26}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 \neq 0, \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
& c_4 = c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_5 = -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, M_1 = \mathbf{0}, Z_3 = I, Z_2 = \mathbf{0}, M_4 = I
\end{aligned}
\tag{i)-(27}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 \neq 0, \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
& c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, M_1 = \mathbf{0}, Z_3 = \mathbf{0}, Z_2 = \mathbf{0}, M_4 = I
\end{aligned}
\tag{i)-(28}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, Z_2 = \mathbf{0}, M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{ii)-(1}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, Z_2 = \mathbf{0}, M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{ii)-(2}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
(ii)-(6) \quad & c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
(ii)-(7) \quad & c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
(ii)-(9) \quad & c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_4 \neq c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
(ii)-(10) \quad & c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_4 \neq -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
(ii)-(12) \quad & c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
(ii)-(17) \quad & c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
(ii)-(18) \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
(ii)-(19) \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
(ii)-(20) \quad & c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(q_2 - r_2)(p_1 - r_1) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \\
(ii)-(21) \quad & c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
(ii)-(24) \quad & c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
(ii)-(25) \quad & c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
(ii)-(27) \quad & c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
(ii)-(28) \quad & c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(\beta_1 - \gamma_1), \\
(iii)-(1) \quad & c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \\
(iii)-(2) \quad & c_4 = c_1(p_1 - q_1) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iii)-(3)} \quad & c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iii)-(4)} \quad & c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(5)} \quad & c_4 = -c_2(q_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iii)-(6)} \quad & c_4 = -c_1(p_1 - r_1) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)) - c_3, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iii)-(7)} \quad & c_4 = -c_1(q_1 - r_1) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)) - c_3, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iii)-(9)} \quad & c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& c_4 \neq c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iii)-(10)} \quad & c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& c_4 \neq -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 \neq -c_2(\alpha_2 - \gamma_2), \\
\text{(iii)-(12)} \quad & c_4 = c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
& c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad BD = B, \quad D^2 = D, \quad B \neq \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{iii}-(14)$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& c_4 = -c_1(q_1 - r_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)) - c_3, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(q_2 - r_2)(p_1 - q_1) - (q_1 - r_1)(p_2 - q_2)], \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{iii}-(15)$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
& c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus D, \quad D^2 = D, \quad D \neq \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{iii}-(16)$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \\
& c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{iii}-(17)$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
& c_4 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3, \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{iii}-(18)$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& c_4 = -c_1(q_1 - r_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)) - c_3, \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{iii}-(19)$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \\
& c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{iii}-(20)$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = c_1(p_1 - q_1), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{iii}-(21)$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
\text{(iii)-(22)} \quad & c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(23)} \quad & c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iii)-(24)} \quad & c_4 = -c_1(p_1 - r_1) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)) - c_3, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3, \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
\text{(iii)-(25)} \quad & -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iii)-(27)} \quad & c_4 = c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(28)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Benzer şekilde Teorem 3.4 ile Teorem 3.9'un kesişimi aşağıdaki teoremi verir:

Teorem 3.13. Z_1, Z_2, M_1 ve M_4 matrisleri (3.19) ve (3.20)'deki matrisler olmak üzere

$$Z_2 = \mathbf{0}, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}, \quad c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0 \quad \text{ve}$$

$c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5 \neq 0$ koşullarıyla birlikte (3.22) ve (3.23) eşitliklerinin aynı anda sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \\
c_4 &= -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
c_5 &= c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
Z_1 &\sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \\
Z_3 &\sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}, \quad Z_3Z_1 \neq Z_1, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{i)-(29}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \\
c_4 &= -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
c_5 &= c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
Z_1 &\sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \\
Z_3 &\sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad Z_3Z_1 \neq Z_1, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{i)-(30}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
c_3 &= 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_4, \\
Z_1 &\sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \\
Z_3 &\sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}, \quad Z_3Z_1 \neq Z_1, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{i)-(31}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
c_3 &= 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_4, \\
Z_1 &\sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \\
Z_3 &\sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad Z_3Z_1 \neq Z_1, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{i)-(32}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \\
Z_1 &= I, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \\
Z_3 &\sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad Z_3Z_1 \neq Z_1, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}, \quad Z_3 \neq \mathbf{0}, \quad Z_3 \neq I
\end{aligned}
\tag{i)-(33}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &\neq 0, \quad c_1 = 0, \quad c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
c_3 &= -c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
c_5 &= c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
Z_3Z_1 &= Z_1, \quad Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \\
Z_3 &\sim \begin{pmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad B \neq \mathbf{0}, \quad BD = B, \quad D^2 = D
\end{aligned}
\tag{i)-(34}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 \neq 0, \\
& c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
& c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_5 = c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}
\tag{i)-(35)}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 \neq 0, \\
& c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
& c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}
\tag{i)-(36)}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_1 = 0, \quad c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_3 = -c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \\
& Z_3 \sim I \oplus D, \quad D^2 = D
\end{aligned}
\tag{i)-(37)}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 \neq 0 \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}
\tag{i)-(39)}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
& c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}
\tag{i)-(40)}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 \neq 0, \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \\
& c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}
\tag{i)-(44)}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \quad c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}
\tag{i)-(45)}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
(i)-(46) \quad & c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \quad c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_2 - r_2)(p_1 - r_1), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
(i)-(47) \quad & c_3 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
(i)-(48) \quad & c_3 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(i)-(49) \quad & c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2(p_2 - q_2) = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
(ii)-(29) \quad & c_3 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}, \quad Z_3Z_1 \neq Z_1, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2(p_2 - q_2) = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
(ii)-(30) \quad & c_3 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad Z_3Z_1 \neq Z_1, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
(ii)-(31) \quad & c_3 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}, \quad Z_3Z_1 \neq Z_1, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
(ii)-(32) \quad & c_3 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad Z_3Z_1 \neq Z_1, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \\
& c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
(ii)-(33) \quad & Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad Z_3Z_1 \neq Z_1, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}, \quad Z_3 \neq I, \quad Z_3 \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
(ii)-(35) \quad & c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
(ii)-(36) \quad & c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\
(ii)-(39) \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
(ii)-(40) \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
(ii)-(44) \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
(ii)-(45) \quad & c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
(ii)-(46) \quad & c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
(ii)-(47) \quad & c_3 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
(ii)-(48) \quad & c_3 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii)-(49) \quad & c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
(iii)-(29) \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}, \quad Z_3Z_1 \neq Z_1, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
(iii)-(30) \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad Z_3Z_1 \neq Z_1, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
(iii)-(31) \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}, \quad Z_3Z_1 \neq Z_1, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
(iii)-(31) \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}, \quad Z_3Z_1 \neq Z_1, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
(iii)-(32) \quad & c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad Z_3Z_1 \neq Z_1, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
\text{(iii)-(33)} \quad & Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad Z_3Z_1 \neq Z_1, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0}, \quad Z_3 \neq I, \quad Z_3 \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(35)} \quad & c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iii)-(36)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(38)} \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad B \neq \mathbf{0}, \quad BD = B, \quad D^2 = D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iii)-(39)} \quad & c_4 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - r_2) - c_3, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
\text{(iii)-(40)} \quad & c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(41)} \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(42)} \quad & c_4 = 2a_1a_2(q_2 - r_2)(p_1 - r_1) - c_3, \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(43)} \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus D, \quad D \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iii)-(44)} \quad & c_4 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - r_2) - c_3, \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3, \\
\text{(iii)-(45)} \quad & c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(p_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(46)} \quad & c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(47)} \quad & c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(48)} \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(p_1 - r_1) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
\text{(iii)-(49)} \quad & Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Son olarak Teorem 3.4 ile Teorem 3.10'nun kesişimi aşağıdaki teoremi verir:

Teorem 3.14. Z_1, Z_2, M_1 ve M_4 matrisleri (3.19) ve (3.20)'deki matrisler olmak üzere $c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0, Z_2 = \mathbf{0}, Z_3Z_1 = \mathbf{0}$, ve $c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5 \neq 0$ koşullarıyla birlikte (3.22) ve (3.23) eşitliklerinin aynı anda sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
\text{(i)-(50)} \quad & c_4 = -c_1(p_1 - q_1), \quad c_5 = c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
\text{(i)-(51)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_5 = -c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
(i)-(52) \quad & c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_4, \\
(i)-(54) \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
(i)-(55) \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 \neq 0, \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
(i)-(56) \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 \neq 0, \\
(i)-(57) \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
& c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 \neq 0, \\
(i)-(58) \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
& c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 - 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_5 = c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \\
(i)-(59) \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
(i)-(60) \quad & c_3 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \\
(i)-(61) \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
(i)-(62) \quad & c_3 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \\
(i)-(63) \quad & Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
(i)-(64) \quad & c_3 = 2a_1a_2(p_2 - q_2)(p_1 - r_1), \quad c_4 = 2a_1a_2(p_1 - q_1)(p_2 - r_2), \\
& c_5 = 2a_1a_2[(p_2 - r_2)(q_1 - r_1) - (p_2 - q_2)(p_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
(i)-(65) \quad & c_3 = 2a_1a_2(p_2 - q_2)(q_1 - r_1), \quad c_4 = -2a_1a_2(p_2 - r_2)(p_1 - q_1), \\
& c_5 = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (p_2 - q_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
(i)-(66) \quad & c_3 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
(i)-(67) \quad & c_3 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
(i)-(68) \quad & c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \quad c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 - 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
(ii)-(69) \quad & c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \quad c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \\
(ii)-(50) \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
(ii)-(51) \quad & c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) = 0, \\
& c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 - 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
(ii)-(54) \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 - 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
(ii)-(55) \quad & c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
(ii)-(57) \quad & c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
(ii)-(58) \quad & -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
(ii)-(59) \quad & c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
(ii)-(60) \quad & c_3 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
(ii)-(61) \quad & c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
(ii)-(62) \quad & c_3 = 2a_1a_2(p_2 - q_2)(q_1 - r_1), \quad c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii)-(63) \quad & c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii)-(66) \quad & c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
& c_3 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii)-(67) \quad & c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
& c_3 = 2a_1a_2(p_2 - q_2)(q_1 - r_1), \quad c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii)-(68) \quad & c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
& c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii)-(69) \quad & c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
& c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_1(p_1 - q_1), \\
(iii)-(50) \quad & c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
(iii)-(51) \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iii)-(52)} \quad & c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 - 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(53)} \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3, \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
\text{(iii)-(54)} \quad & -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
\text{(iii)-(55)} \quad & c_4 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) - c_2(q_2 - r_2) - c_3, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(57)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 - 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
\text{(iii)-(58)} \quad & c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(p_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(59)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(60)} \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(61)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(62)} \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
\text{(iii)-(63)} \quad & Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
\text{(iii)-(64)} \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_1 - q_1)(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
\text{(iii)-(65)} \quad & c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(p_1 - r_1), \quad c_4 = -2a_1a_2(p_2 - r_2)(p_1 - q_1), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(66)} \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(67)} \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(p_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(68)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1), \\
\text{(iii)-(69)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Teorem 3.5 ile Teorem 3.8'in kesişiminden aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.15. Z_1, Z_2, M_1 ve M_4 matrisleri (3.19) ve (3.20)'deki matrisler olmak üzere

$$c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 \neq 0 \quad Z_2 \neq \mathbf{0}, \quad Z_3Z_1 = \mathbf{0} \quad \text{ve}$$

$$c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5 = 0 \quad \text{koşullarıyla birlikte (3.22) ve (3.23) eşitliklerinin aynı anda}$$

sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iv)-(1)} \quad & -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iv)-(2)} \quad & c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\
\text{(iv)-(3)} \quad & c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\
\text{(iv)-(4)} \quad & c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
\text{(iv)-(5)} \quad & c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_3 = c_2(p_2 - q_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iv)-(6)} \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iv)-(7)} \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iv)-(9)} \quad & c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_4 \neq c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_4 \neq -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\
& c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
& c_3 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad BD = B, \quad D^2 = D, \quad B \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(q_2 - r_2)(p_1 - q_1) - (q_1 - r_1)(p_2 - q_2)], \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(r_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
& c_3 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus D, \quad D^2 = D, \quad D \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1-r_1), \quad c_3 = -c_1(p_1-r_1), \\
\text{(iv)-(22)} \quad & c_1(p_1-q_1) - 2a_1a_2(p_2-r_2)(q_1-r_1) = 0, \quad c_4 = -c_2(p_2-r_2), \\
& c_2(p_2-q_2) - 2a_1a_2(p_1-r_1)(q_2-r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2-r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1-r_1), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iv)-(23)} \quad & c_3 = -2a_1a_2(q_1-r_1)(p_2-q_2), \quad c_4 = -2a_1a_2(q_1-r_1)(p_2-r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1-r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2-r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(iv)-(24)} \quad & c_3 = -(q_1-r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2-r_2)), \\
& -c_1(p_1-q_1) + c_2(p_2-q_2) = 2a_1a_2[(p_1-r_1)(q_2-r_2) - (p_2-r_2)(q_1-r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(q_1-r_1), \quad c_4 = 2a_1a_2(q_1-r_1)(p_2-r_2), \\
\text{(iv)-(25)} \quad & c_3 = -(q_1-r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2-r_2)), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1-q_1) - c_2(p_2-q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1-r_1)(p_2-r_2) - (q_1-r_1)(q_2-r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2-r_2), \quad c_3 = -c_1(p_1-r_1), \\
\text{(iv)-(27)} \quad & c_4 = -c_2(p_2-r_2), \quad c_5 = 0, \quad c_1(p_1-q_1) - 2a_1a_2(p_2-r_2)(q_1-r_1) = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_3 = -(p_1-r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2-r_2)), \\
\text{(v)-(1)} \quad & c_4 = -c_1(p_1-q_1) - 2a_1a_2(p_1-r_1)(q_2-r_2), \\
& c_5 = c_1(p_1-q_1) + 2a_1a_2(p_1-r_1)(q_2-r_2), \\
& -c_1(p_1-q_1) + c_2(p_2-q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1-r_1)(q_2-r_2) - (p_2-r_2)(q_1-r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_3 = -(q_1-r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2-r_2)), \\
\text{(v)-(2)} \quad & c_4 = c_1(p_1-q_1) - 2a_1a_2(q_1-r_1)(q_2-r_2), \\
& c_5 = -c_1(p_1-q_1) + 2a_1a_2(q_1-r_1)(q_2-r_2), \\
& -c_1(p_1-q_1) - c_2(p_2-q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1-r_1)(p_2-r_2) - (q_1-r_1)(q_2-r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(p_1-r_1)(q_2-r_2), \\
\text{(v)-(3)} \quad & c_3 = -(p_1-r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2-r_2)), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1-r_1)(q_2-r_2), \\
& -c_1(p_1-q_1) + c_2(p_2-q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1-r_1)(q_2-r_2) - (q_1-r_1)(p_2-r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
(v)-(4) \quad & c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_4, \\
(v)-(6) \quad & -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)] \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_4 \\
(v)-(7) \quad & -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_5 = -c_3 = -c_4, \quad c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
(v)-(8) \quad & c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3, \quad c_5 = -c_4, \\
(v)-(9) \quad & c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_4 \neq c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3, \quad c_5 = -c_4, \\
(v)-(10) \quad & c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_4 \neq -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3 = -c_4, \\
(v)-(11) \quad & Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad BD = B, \quad D^2 = D, \quad B \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
(v)-(12) \quad & c_4 = c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3 = -c_4, \\
(v)-(13) \quad & Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \\
& Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus D, \quad D^2 = D, \quad D \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \\
(v)-(15) \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_4, \\
& c_1(p_1 - q_1) = 2a_1a_2[(q_1 - r_1)(p_2 - q_2) - (q_2 - r_2)(p_1 - q_1)], \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
(v)-(17) \quad & c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \\
(v)-(19) \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
(v)-(20) \quad & c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& c_1(p_1 - q_1) = 2a_1a_2[(p_2 - r_2)(q_1 - r_1) - (p_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
(v)-(22) \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_4, \\
& c_1(p_1 - q_1) = 2a_1a_2[(p_2 - r_2)(q_1 - r_1) - (p_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
(v)-(24) \quad & c_1(p_1 - q_1) = 2a_1a_2[(p_2 - r_2)(q_1 - r_1) - (p_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3 = -c_4, \\
(v)-(26) \quad & Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -(\beta_1 - \gamma_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
(v)-(27) \quad & c_4 = c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_4, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
(v)-(28) \quad & c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_4, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2), \\
(vi)-(1) \quad & c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_5 = c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2), \\
(vi)-(2) \quad & c_4 = c_1(p_1 - q_1) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_5 = -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
(vi)-(3) \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2), \\
& c_5 = -c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
(vi)-(4) \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2), \\
& c_5 = -c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
(vi)-(5) \quad & c_3 = c_2(p_2 - q_2), \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4, \\
(vi)-(6) \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4, \\
\text{(vi)-(7)} \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_3 = c_2(p_2 - r_2) + c_4, \quad c_5 = -c_3, \\
\text{(vi)-(8)} \quad & c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_3 = -c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + c_4, \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4, \\
\text{(vi)-(9)} \quad & c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_4 \neq c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_3 = -c_1(q_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + c_4, \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4, \\
\text{(vi)-(10)} \quad & c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_4 \neq -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_3 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3, \\
\text{(vi)-(11)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad BD = B, \quad D^2 = D, \quad B \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
\text{(vi)-(12)} \quad & c_4 = c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_5 = -c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_3 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3, \\
\text{(vi)-(13)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I, \\
& Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus D, \quad D^2 = D, \quad D \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
& c_3 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_4, \\
\text{(vi)-(14)} \quad & Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad BD = B, \quad D^2 = D, \quad B \neq \mathbf{0} \\
\\
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\
\text{(vi)-(15)} \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(q_2 - r_2)(p_1 - q_1) - (q_1 - r_1)(p_2 - q_2)], \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I \\
\\
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
\text{(vi)-(16)} \quad & c_3 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I, \\
& Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus D, \quad D^2 = D, \quad D \neq \mathbf{0} \\
\\
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
\text{(vi)-(17)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I \\
\\
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
\text{(vi)-(18)} \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I \\
\\
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4, \\
\text{(vi)-(19)} \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I \\
\\
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 - 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
\text{(vi)-(20)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 - 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I \\
\\
& c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = c_1(p_1 - q_1), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
\text{(vi)-(21)} \quad & c_5 = -c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2), \\
\text{(vi)-(22)} \quad & c_5 = -c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
\text{(vi)-(23)} \quad & c_3 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4, \\
\text{(vi)-(24)} \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
\text{(vi)-(25)} \quad & c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_4, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_3 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3, \\
\text{(vi)-(26)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& c_4 = c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
\text{(vi)-(27)} \quad & c_5 = -c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
\text{(vi)-(28)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

Benzer şekilde Teorem 3.5 ile Teorem 3.9'un kesiştirilmesi ile aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.16. Z_1, Z_2, M_1 ve M_4 matrisleri (3.19) ve (3.20)'deki matrisler olmak üzere

$c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 \neq 0, \quad Z_2 \neq \mathbf{0}, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0},$ ve

$c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5 = 0$ koşullarıyla birlikte (3.22) ve (3.23) eşitliklerinin aynı anda sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

$$(iv)-(35) \quad \begin{aligned} c_1 &\neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\ c_4 &= -c_2(p_2 - r_2), \quad c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \\ Z_1 &\sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$(iv)-(38) \quad \begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\ c_3 &= -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\ Z_1 &\sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}, \\ Z_3 &\sim \begin{pmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad B \neq \mathbf{0}, \quad BD = B, \quad D^2 = D \end{aligned}$$

$$(iv)-(39) \quad \begin{aligned} c_1 &\neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\ c_3 &= -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = 0, \\ -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) &= 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\ Z_1 &\sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$(iv)-(40) \quad \begin{aligned} c_1 &\neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\ c_4 &= 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\ Z_1 &\sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$(iv)-(41) \quad \begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\ c_3 &= -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\ Z_1 &\sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$(iv)-(42) \quad \begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\ c_3 &= -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\ Z_1 &\sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$(iv)-(43) \quad \begin{aligned} c_1 &= -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\ c_3 &= -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\ Z_1 &\sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}, \\ Z_3 &\sim I \oplus D, \quad D \sim I \oplus \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$(iv)-(44) \quad \begin{aligned} c_1 &\neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\ c_3 &= -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\ Z_1 &= I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3 = -c_4, \\
(v)-(34) \quad & Z_3Z_1 = Z_1, \quad Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad B \neq \mathbf{0}, \quad BD = B, \quad D^2 = D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
(v)-(35) \quad & c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq 0, \quad c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
(v)-(36) \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3 = -c_4, \\
(v)-(37) \quad & Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus D, \quad D^2 = D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \\
(v)-(39) \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_4, \\
& c_1(p_1 - q_1) = 2a_1a_2[(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \\
(v)-(44) \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_3 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3, \\
(vi)-(34) \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& Z_3Z_1 = Z_1, \quad Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad B \neq \mathbf{0}, \quad BD = B, \quad D^2 = D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
(vi)-(35) \quad & c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_5 = c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
(vi)-(36) \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_3 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3, \\
\text{(vi)-(37)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus D, \quad D^2 = D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
& c_3 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_4, \\
\text{(vi)-(38)} \quad & Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad B \neq \mathbf{0}, \quad BD = B, \quad D^2 = D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\
\text{(vi)-(39)} \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
\text{(vi)-(40)} \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
\text{(vi)-(41)} \quad & c_3 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
\text{(vi)-(42)} \quad & c_3 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
\text{(vi)-(43)} \quad & c_3 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus D, \quad D \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
\text{(vi)-(44)} \quad & c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I,
\end{aligned}$$

Teorem 3.5 ile Teorem 3.10'un kesiştirilmesi ile aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.17. Z_1, Z_2, M_1 ve M_4 matrisleri (3.19) ve (3.20)'deki matrisler olmak üzere

$$c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0, \quad Z_2 \neq \mathbf{0}, \quad Z_3Z_1 = \mathbf{0} \quad \text{ve}$$

$c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5 = 0$ koşullarıyla birlikte (3.22) ve (3.23) eşitliklerinin aynı anda sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

$$\begin{aligned}
 & c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\
 & c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
 & -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
 & Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0},
 \end{aligned}
 \tag{iv}-(50)$$

$$\begin{aligned}
 & c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\
 & c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
 & c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) = 0, \\
 & Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0},
 \end{aligned}
 \tag{iv}-(52)$$

$$\begin{aligned}
 & c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \\
 & c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
 & Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0},
 \end{aligned}
 \tag{iv}-(53)$$

$$\begin{aligned}
 & c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
 & c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
 & -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
 & Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0},
 \end{aligned}
 \tag{iv}-(54)$$

$$\begin{aligned}
 & c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
 & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
 & -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
 & Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0},
 \end{aligned}
 \tag{iv}-(55)$$

$$\begin{aligned}
 & c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
 & c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \\
 & Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 \sim I \oplus \mathbf{0},
 \end{aligned}
 \tag{iv}-(58)$$

$$\begin{aligned}
 & c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
 & c_4 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
 & c_1(p_1 - q_1) = 2a_1a_2[(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
 & Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
 \end{aligned}
 \tag{v}-(51)$$

$$\begin{aligned}
 & c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \quad c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
 & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
 & c_1(p_1 - q_1) = 2a_1a_2[(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
 & Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
 \end{aligned}
 \tag{v}-(52)$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
(v)-(55) \quad & c_1(p_1 - q_1) = 2a_1a_2[(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(v)-(56) \quad & c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3 = -c_4, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(v)-(57) \quad & c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \\
& c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_4 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(v)-(58) \quad & c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_4, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(vi)-(50) \quad & c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& c_4 = -c_1(p_1 - q_1), \quad c_5 = c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(vi)-(51) \quad & c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(vi)-(52) \quad & c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2), \\
& c_5 = -c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(vi)-(53) \quad & c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
& c_3 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_4, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(vi)-(54) \quad & c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_4, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4, \\
\text{(vi)-(55)} \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_3 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3, \\
\text{(vi)-(56)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
\text{(vi)-(57)} \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
\text{(vi)-(58)} \quad & c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_5 = c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = I, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

Teorem 3.6 ile Teorem 3.8'in kesişimi ile aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.18. Z_1, Z_2, M_1 ve M_4 matrisleri (3.19) ve (3.20)'deki matrisler olmak üzere

$c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 \neq 0, Z_2 = \mathbf{0}, Z_3Z_1 = \mathbf{0}$ ve $c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5 = 0$ koşullarıyla birlikte (3.22) ve (3.23) eşitliklerinin aynı anda sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
\text{(vii)-(1)} \quad & c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& c_5 = c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
\text{(vii)-(2)} \quad & c_4 = c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& c_5 = -c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
\text{(vii)-(3)} \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
\text{(vii)-(4)} \quad & c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_4, \\
\text{(vii)-(6)} \quad & -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
\text{(vii)-(7)} \quad & -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_5 = -c_3 = -c_4, \quad c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
\text{(vii)-(8)} \quad & c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_5 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3, \quad c_5 = -c_4, \\
\text{(vii)-(9)} \quad & c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_4 \neq c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_5 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3, \quad c_5 = -c_4, \\
\text{(vii)-(10)} \quad & c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_4 \neq -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3 = -c_4, \\
\text{(vii)-(11)} \quad & Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad BD = B, \quad D^2 = D, \quad B \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& c_4 = c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3 = -c_4, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \\
& Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus D, \quad D^2 = D, \quad D \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_4, \\
& c_1(p_1 - q_1) = 2a_1a_2[(q_1 - r_1)(p_2 - q_2) - (q_2 - r_2)(p_1 - q_1)], \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \quad c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& c_1(p_1 - q_1) = 2a_1a_2[(p_2 - r_2)(q_1 - r_1) - (p_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_4, \\
& c_1(p_1 - q_1) = 2a_1a_2[(p_2 - r_2)(q_1 - r_1) - (p_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
& c_1(p_1 - q_1) = 2a_1a_2[(p_2 - r_2)(q_1 - r_1) - (p_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3 = -c_4, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
\text{(vii)-(27)} \quad & c_4 = c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_4, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
\text{(vii)-(28)} \quad & c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_4, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(viii)-(1)} \quad & -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(viii)-(2)} \quad & -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\
\text{(viii)-(3)} \quad & c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\
\text{(viii)-(4)} \quad & c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \\
\text{(viii)-(5)} \quad & c_3 = c_2(p_2 - q_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(viii)-(6)} \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

(viii)-(7)

$$\begin{aligned}
& c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_4 \neq c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

(viii)-(9)

$$\begin{aligned}
& c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
& c_4 \neq -c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

(viii)-(10)

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\
& c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

(viii)-(12)

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
& c_3 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad BD = B, \quad D^2 = D, \quad B \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

(viii)-(14)

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(q_2 - r_2)(p_1 - q_1) - (q_1 - r_1)(p_2 - q_2)], \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

(viii)-(15)

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
& c_3 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus D, \quad D^2 = D, \quad D \neq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

(viii)-(16)

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
\text{(viii)-(18)} \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0} \\
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(viii)-(19)} \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0} \\
& c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
\text{(viii)-(21)} \quad & c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0} \\
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(viii)-(22)} \quad & c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(p_2 - r_2)(q_1 - r_1) = 0, \\
& c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0} \\
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
\text{(viii)-(23)} \quad & c_3 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0} \\
& c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(viii)-(24)} \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0} \\
& c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
\text{(viii)-(25)} \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0} \\
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\
\text{(viii)-(27)} \quad & c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Teorem 3.6 ile Teorem 3.9'un kesiştirilmesi ile aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.19. Z_1, Z_2, M_1 ve M_4 matrisleri (3.19) ve (3.20)'deki matrisler olmak üzere

$$c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad Z_3Z_1 \neq \mathbf{0} \text{ ve}$$

$c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5 = 0$ koşullarıyla birlikte (3.22) ve (3.23) eşitliklerinin aynı anda sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

$$\begin{aligned} & c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3 = -c_4, \\ \text{(vii)-(34)} \quad & Z_3Z_1 = Z_1, \quad Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \\ & Z_3 \sim \begin{pmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad B \neq \mathbf{0}, \quad BD = D, \quad D^2 = D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_1 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \\ \text{(vii)-(35)} \quad & c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\ & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_4, \\ & Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_1 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\ \text{(vii)-(36)} \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 - 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_4, \\ & Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3 = -c_4, \\ \text{(vii)-(37)} \quad & Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus D, \quad D^2 = D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \\ \text{(vii)-(39)} \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_4, \\ & c_1(p_1 - q_1) = 2a_1a_2[(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\ & Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \\ \text{(vii)-(44)} \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\ & Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\ \text{(viii)-(35)} \quad & c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\ & Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
& c_3 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
\text{(viii)-(38)} \quad & Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}, \\
& Z_3 \sim \begin{pmatrix} I & B \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad B \neq \mathbf{0}, \quad BD = B, \quad D^2 = D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\
\text{(viii)-(39)} \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
\text{(viii)-(40)} \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
\text{(viii)-(41)} \quad & c_3 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
\text{(viii)-(42)} \quad & c_3 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
\text{(viii)-(43)} \quad & c_3 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus D, \quad D \sim I \oplus \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(viii)-(44)} \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& Z_1 = I, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Son olarak Teorem 3.6 ile Teorem 3.10'nun kesişimi ile aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.20. Z_1, Z_2, M_1 ve M_4 matrisleri (3.19) ve (3.20)'deki matrisler olmak üzere

$c_1(p_1 - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) + c_3 + c_4 + c_5 = 0$, $Z_2 = \mathbf{0}$, $Z_3Z_1 = \mathbf{0}$ ve

$c_2(p_2 - r_2) + c_4 + c_5 = 0$ koşullarıyla birlikte (3.22) ve (3.23) eşitliklerinin aynı anda

sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
\text{(vii)-(51)} \quad & c_4 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& c_1(p_1 - q_1) = 2a_1a_2[(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim \mathbf{0} \oplus I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \quad c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
\text{(vii)-(52)} \quad & c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
& c_1(p_1 - q_1) = 2a_1a_2[(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
\text{(vii)-(55)} \quad & c_1(p_1 - q_1) = 2a_1a_2[(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_1 - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3 = -c_4, \\
\text{(vii)-(56)} \quad & Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \\
\text{(vii)-(57)} \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_4 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \\
\text{(vii)-(58)} \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& c_4 = -c_1(p_1 - q_1) - 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\
\text{(viii)-(50)} \quad & c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(viii)-(52)} \quad & c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \\
& c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \\
\text{(viii)-(53)} \quad & c_3 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 \sim I \oplus \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
\text{(viii)-(54)} \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(p_1 - q_1) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(q_1 - r_1)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = I, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(viii)-(55)} \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = I, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
\text{(viii)-(58)} \quad & c_1(p_1 - q_1) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \\
& Z_1 = \mathbf{0}, \quad M_1 = \mathbf{0}, \quad Z_3 = \mathbf{0}, \quad Z_2 = \mathbf{0}, \quad M_4 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Teorem 3.12'den Teorem 3.20'ye kadar olan teoremler birlikte düşünülür ve bu teoremlerdeki ilgili katsayı eşitlikleri ve alt matrisler, (3.10) denkleminde yerlerine yazılarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa aşağıdaki ana teorem yazılabilir.

Teorem 3.21. $A_1 \in \kappa(p_1, q_1, r_1, B_1, P_1)$, $A_2 \in \kappa(p_2, q_2, r_2, B_2, P_2)$, $A_1, A_2 \in \mathbb{C}_n$ ve $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^*$ olsun. $A_1A_2 = A_2A_1$ olmak üzere $A_3 = a_1A_1 + a_2A_2$ lineer bileşiminin $\{p_3, q_3\}$ -kuadratik matris olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
& c_1 = a_1^2(p_1 + q_1 - 2r_1) + a_1(2a_3 - p_3 - q_3), \quad c_2 = a_2^2(p_2 + q_2 - 2r_2) + a_2(2a_3 - p_3 - q_3), \\
& c_3 = -a_1^2(p_1 - r_1)(q_1 - r_1) \neq 0, \quad c_4 = -a_2^2(p_2 - r_2)(q_2 - r_2) \neq 0, \quad c_5 = (a_3 - p_3)(a_3 - q_3) \text{ ve} \\
& a_3 = a_1r_1 + a_2r_2 \text{ olmak üzere aşağıdaki durumların birinin sağlanmasıdır. (Sadece } i \\
& \text{indisinin içerildiği şıklarda } i=1 \text{ veya } i=2 \text{ dir. Hem } i \text{ hem de } j \text{ indisinin içerildiği} \\
& \text{şıklarda } (i, j) = (1, 2) \text{ veya } (i, j) = (2, 1), \quad (\omega_1, \omega_2) = (p_1, q_1) \text{ dir.)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
& c_4 = -c_1(\omega_i - \omega_j) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
& c_5 = c_1(\omega_i - \omega_j) + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \\
1. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(q_2 - r_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1 + (\omega_i - \omega_j)[P_2 - I], \\
& B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I + P_1P_2 \\
& \text{(i)-(1)/(i)-(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
& c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \quad c_5 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \\
2. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I + P_1P_2 \\
& (i)-(3)/(i)-(4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \\
& c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \\
3. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)I, \quad P_2 = I \\
& (i)-(6)/(i)-(7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_1 = 0, \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \quad c_5 = -c_3, \\
4. \quad & c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I \\
& (i)-(8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
& c_4 \neq c_1(p_1 - q_1) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)), \\
5. \quad & c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4 = -c_1(\omega_i - r_1) - c_3, \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I \\
& (i)-(9)/(i)-(10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 \neq 0, \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2), \\
6. \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \quad c_5 = -c_3, \\
& B_2 = (p_2 - r_2)P_2 + (p_2 - q_2)[P_1 - I], \quad B_1B_2 = (p_2 - r_2)(\omega_i - r_1)[P_1 + P_2 - I] \\
& (i)-(11)/(i)-(13)/(i)-(34)/(i)-(37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq 0, \quad c_2 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\
& c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
& c_4 = c_1(\omega_i - \omega_j) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)), \\
7. \quad & c_5 = -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2), \\
& B_1 = (\omega_j - r_1)P_1 - (\omega_i - \omega_j)[P_2 - I], \\
& B_2 = (p_2 - r_2)P_2 + (p_2 - q_2)[P_1 - I], \quad P_1 + P_2 = I + P_1P_2 \\
& (i)-(12)/(i)-(35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\
& c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \\
& -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(\omega_j - r_1)] \neq 0, \\
8. \quad & (\omega_i - \omega_j)B_1B_2 = (p_1 - r_1)(q_1 - r_1)(p_2 - q_2)P_1 \\
& \quad + [(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(\omega_j - r_1)]B_1, \\
& (\alpha_2 - \beta_2)B_1B_2 = (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)(p_2 - q_2)P_1 \\
& \quad - [(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(\omega_j - r_1)][B_2 - (q_2 - r_2)I], \\
& P_2 = I \\
& \text{(i)-(15)/(i)-(39)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 \neq 0, \\
& c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
& c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
9. \quad & c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& B_1 = (q_1 - r_1)P_1, \quad P_1 + P_2 = I + P_1P_2, \\
& B_2 = (p_2 - r_2)P_2 + (p_2 - q_2)[P_1 - I] \\
& \text{(i)-(17)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \\
10. \quad & c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_5 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2) - c_4, \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_1B_2 = (\omega_i - r_1)B_2 + (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)[P_1 - I], \quad P_2 = I \\
& \text{(i)-(18)/(i)-(40)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \\
11. \quad & c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)I + (p_2 - q_2)P_1, \quad P_2 = I \\
& \text{(i)-(19)/(i)-(44)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
& c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)), \\
& c_5 = c_1(\omega_i - \omega_j) + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \\
12. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)] \neq 0, \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1 + (\omega_i - \omega_j)[P_2 - I], \\
& B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I + P_1P_2 \\
& \text{(i)-(20)/(i)-(51)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &= -2a_1a_2(\omega_j - r_1), \quad c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
c_4 &= c_1(\omega_i - \omega_j), \quad c_5 = -c_1(\omega_i - \omega_j) + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(q_2 - r_2), \\
- c_1(\omega_i - \omega_j) - c_2(p_2 - q_2) &\neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(q_2 - r_2)], \\
B_1 &= (\omega_i - r_1)P_1 + (\omega_i - \omega_j)[P_2 - I], \\
B_2 &= (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I + P_1P_2 \\
&\text{(i)-(21)/(i)-(50)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &\neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
c_4 &= -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \quad c_5 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \\
- c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) &= 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
B_1 &= (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I + P_1P_2 \\
&\text{(i)-(22)/(i)-(52)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &\neq 0, \quad c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \\
c_3 &= -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \\
- c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) &= 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
B_1 &= (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)I, \quad P_2 = I \\
&\text{(i)-(24)/(i)-(55)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &= -2a_1a_2(\omega_j - r_1), \quad c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)), \\
c_5 &= 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(q_2 - r_2) - c_4, \\
- c_1(\omega_i - \omega_j) - c_2(p_2 - q_2) &\neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(q_2 - r_2)], \\
B_1 &= (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)I, \quad P_2 = I \\
&\text{(i)-(25)/(i)-(54)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= 0, \quad c_2 \neq 0, \quad c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
c_3 &= -c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2), \\
c_5 &= c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2), \\
B_2 &= (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I \\
&\text{(i)-(26)/(i)-(56)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \\
& c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
18. \quad & c_4 = c_1(\omega_i - \omega_j) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)), \\
& c_5 = -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2), \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I \\
& (i)-(27)/(i)-(58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
& c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
19. \quad & c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2), \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I \\
& (i)-(28)/(i)-(57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \quad c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4, \\
20. \quad & B_2 = (p_2 - q_2)P_1 + (q_2 - r_2)I, \quad B_1B_2 = (p_2 - r_2)B_1, \quad P_2 = I \\
& (i)-(33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq 0, \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 \neq 0, \\
& c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2), \\
21. \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \\
& c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& B_1 = (p_1 - r_1)P_1, \quad B_2 = (p_2 - r_2)P_2 + (p_2 - q_2)[P_1 - I], \quad P_1 + P_2 = I + P_1P_2 \\
& (i)-(36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
& c_5 = c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \\
22. \quad & B_2 = (p_2 - q_2)[P_1 - I] + (p_2 - r_2)P_2, \\
& B_1B_2 = (p_2 - r_2)[B_1 + (\omega_i - r_1)[P_2 - I]] \\
& (i)-(29)/(i)-(30)/(i)-(45)/(i)-(46)/(i)-(59)/(i)-(61)/(i)-(68)/(i)-(69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \\
& c_3 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - c_4, \\
23. \quad & B_1B_2 = (p_2 - r_2)B_1 + (\omega_i - r_1)[B_2 - (p_2 - q_2)P_1 - (q_2 - r_2)I], \\
& P_2 = I \\
& (i)-(31)/(i)-(32)/(i)-(47)/(i)-(48)/(i)-(60)/(i)-(62)/(i)-(66)/(i)-(67)
\end{aligned}$$

24. $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2)$, $c_3 = -c_2(p_2 - q_2)$, $c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4$,
 $B_2 = (p_2 - q_2)P_1 + (q_2 - r_2)I$, $P_2 = I$
 (i)-(49)/(i)-(63)
25. $c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2)$, $c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)$,
 $c_3 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - q_2)$, $c_4 = 2a_1a_2(\omega_i - \omega_j)(p_2 - r_2)$,
 $c_5 = 2a_1a_2[(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) - (\omega_i - r_1)(p_2 - q_2)]$,
 $B_1B_2 = (p_2 - r_2)[B_1 - (\omega_i - \omega_j)P_2 - (\omega_j - r_1)I]$
 $+ (\omega_i - r_1)[B_2 - (p_2 - q_2)P_1 + (p_2 - q_2)I]$
 (i)-(64)/(i)-(65)
26. $c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1)$, $c_3 = -c_1(\omega_j - r_1)$, $c_4 = -c_2(q_2 - r_2)$,
 $c_1(\omega_i - \omega_j) + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) = 0$, $c_5 = 0$,
 $-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)]$,
 $B_2 = (q_2 - r_2)P_2$,
 $(\omega_i - \omega_j)B_1B_2 = (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)[B_1 - (\omega_j - r_1)P_1]$
 (ii)-(1)/(ii)-(2)
27. $c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1)$, $c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2))$,
 $c_4 = -c_2(\beta_2 - r_2)$, $c_5 = 0$,
 $-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)]$,
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1$, $B_2 = (q_2 - r_2)P_2$, $P_1P_2 = P_1$
 (ii)-(6)/(ii)-(7)
28. $c_3 = -c_1(\omega_i - r_1)$, $c_4 = -c_2(q_2 - r_2)$, $c_4 \neq -(p_2 - r_2)[c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)]$,
 $c_4 \neq c_1(\omega_i - \omega_j) - (p_2 - r_2)[c_2 + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)]$, $c_5 = 0$,
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1$, $B_2 = (q_2 - r_2)P_2$, $P_1P_2 = 0$
 (ii)-(9)/(ii)-(10)
29. $c_2 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2)$, $c_3 = -c_1(\omega_i - r_1)$, $c_4 = -c_2(q_2 - r_2)$, $c_5 = 0$,
 $-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = -2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)$,
 $(\omega_i - \omega_j)B_1B_2 = -(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)[B_1 - (\omega_i - r_1)P_1]$,
 $(p_2 - q_2)B_1B_2 = (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)[B_2 - (q_2 - r_2)P_2]$
 (ii)-(12)/(ii)-(35)

- $c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2),$
 $c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0,$
 30. $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1,$
 $(p_2 - q_2)B_1B_2 = (\omega_i - r_1)(p_2 - r_2)[B_2 - (q_2 - r_2)P_2]$
 (ii)-(17)/(ii)-(36)
- $c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0,$
 $c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_4 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2),$
 31. $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1,$
 $B_1B_2 = (\omega_i - r_1)[B_2 - (q_2 - r_2)P_2] + (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)P_1$
 (ii)-(18)/(ii)-(40)
- $c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0,$
 $c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - q_2),$
 32. $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (p_2 - q_2)P_1 + (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = P_1$
 (ii)-(19)/(ii)-(44)
- $c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_3 = -c_1(\omega_j - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0,$
 $c_1(\omega_i - \omega_j) + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) = 0,$
 33. $c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) = 0,$
 $B_2 = (q_2 - r_2)P_2,$
 $(\omega_i - \omega_j)B_1B_2 = (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)[B_1 - (\omega_j - r_1)P_1]$
 (ii)-(20)/(ii)-(51)
- $c_2 = -2a_1a_2(\omega_j - r_1), \quad c_4 = 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(q_2 - r_2),$
 $c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \quad c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(q_2 - r_2) = 0,$
 34. $c_2(\alpha_2 - \beta_2) \neq -2a_1a_2(\omega_i - \gamma_1)(\alpha_2 - \gamma_2), \quad c_5 = 0,$
 $B_2 = (q_2 - r_2)P_2,$
 $(\omega_i - \omega_j)B_1B_2 = -(\omega_j - r_1)(q_2 - r_2)[B_1 - (\omega_i - r_1)P_1]$
 (ii)-(21)/(ii)-(50)

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
& c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
35. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = P_1 \\
& \text{(ii)-(24)/(ii)-(55)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
& c_4 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
36. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = P_1 \\
& \text{(ii)-(25)/(ii)-(54)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
37. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = -2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2), \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = 0 \\
& \text{(ii)-(27)/(ii)-(58)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
38. \quad & c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = 0 \\
& \text{(ii)-(28)/(ii)-(57)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
39. \quad & B_2 = (p_2 - q_2)P_1 + (q_2 - r_2)P_2, \quad B_1B_2 = (p_2 - r_2)B_1 \\
& \text{(ii)-(33)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
& -c_1(p_1 - q_1) - c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)] \neq 0, \\
40. \quad & (p_1 - q_1)B_1B_2 = [(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_2 - r_2)(q_1 - r_1)]B_1 \\
& \quad - (p_1 - r_1)(q_1 - r_1)(p_2 - q_2)P_1, \\
& (p_2 - q_2)B_1B_2 = (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)(p_2 - q_2)P_1 \\
& \quad + [(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - (q_2 - r_2)(q_1 - r_1)][B_2 - (q_2 - r_2)P_2] \\
& \text{(ii)-(39)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(\omega_i - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
& c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
41. \quad & (p_2 - q_2)B_1B_2 = (p_2 - r_2)(p_2 - q_2)[B_1 - (\omega_i - r_1)P_1] \\
& \quad + (p_2 - r_2)(\omega_i - r_1)[B_2 - (q_2 - r_2)P_2] \\
& \text{(ii)-(29)/(ii)-(30)/(ii)-(45)/(ii)-(59)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(\omega_i - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
& c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - q_2) = 0, \quad c_5 = 0, \\
42. \quad & B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \\
& (p_2 - q_2)B_1B_2 = (p_2 - r_2)(\omega_i - r_1)[B_2 - (q_2 - r_2)P_2] \\
& \text{(ii)-(46)/(ii)-(61)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \\
& c_3 = 2a_1a_2(p_2 - q_2)(\omega_i - r_1), \quad c_4 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
43. \quad & B_1B_2 = (p_2 - r_2)B_1 + (\omega_i - r_1)[B_2 - (p_2 - q_2)P_1 - (q_2 - r_2)P_2] \\
& \text{(ii)-(31)/(ii)-(32)/(ii)-(47)/(ii)-(48)/(ii)-(60)/(ii)-(62)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_2(p_2 - q_2), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
44. \quad & B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (p_2 - q_2)P_1 + (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = P_1 \\
& \text{(ii)-(49)/(ii)-(63)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \\
& c_3 = 2a_1a_2(p_2 - q_2)(\omega_i - r_1), \quad c_4 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
45. \quad & B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = P_2 \\
& \text{(ii)-(66)/(ii)-(67)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(\omega_i - r_1), \quad c_4 = -c_2(q_2 - r_2), \\
46. \quad & c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(p_2 - r_2)(\omega_i - r_1) = 0, \quad c_5 = 0, \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = 0 \\
& \text{(ii)-(68)/(ii)-(69)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_3 = -c_1(\omega_j - r_1), \quad c_5 = 0, \\
& c_4 = -c_1(\omega_i - \omega_j) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
47. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& B_1 = (\omega_j - r_1)P_1 + (\omega_i - \omega_j)P_2, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = P_2 \\
& \text{(iii)-(1)/(iii)-(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \quad c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
48. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = P_2 \\
& \text{(iii)-(3)/(iii)-(4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
49. \quad & c_4 = -c_2(q_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(iii)-(5)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0, \\
& c_4 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) - c_2(q_2 - r_2) - c_3, \\
50. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(iii)-(6)/(iii)-(7)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
51. \quad & c_4 \neq c_1(\omega_i - \omega_j) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)), \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad P_2 = 0 \\
& \text{(iii)-(9)/(iii)-(10)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0, \\
52. \quad & c_4 = c_1(\omega_i - \omega_j) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1 - (\omega_i - \omega_j)P_2, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = P_2 \\
& \text{(iii)-(12)/(iii)-(35)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0, \\
53. \quad & c_4 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - c_3, \quad c_4 \neq -c_2(\alpha_2 - \gamma_2), \\
& B_1B_2 = (\omega_i - r_1)B_2 + (q_2 - r_2)[B_1 - (\omega_i - r_1)P_1], \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(iii)-(14)/(iii)-(16)/(iii)-(38)/(iii)-(41)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& c_4 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - r_2) - c_3, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(p_2 - r_2)(\omega_i - r_1) - (\omega_j - r_1)(q_2 - r_2)] \neq 0, \\
54. \quad & (\omega_i - \omega_j)B_1B_2 = (p_1 - r_1)(q_1 - r_1)(p_2 - q_2)P_1 + [(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(\omega_j - r_1)]B_1, \\
& (p_2 - q_2)B_1B_2 = (p_2 - r_2)(q_2 - r_2)(\omega_i - \omega_j)P_2 + [(p_2 - r_2)(\omega_j - r_1) - (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)]B_2, \\
& P_1 = P_2 \\
& \text{(iii)-(15)/(iii)-(39)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0, \\
55. \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = P_2 \\
& \text{(iii)-(17)/(iii)-(36)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
56. \quad & c_4 = -c_1(q_1 - r_1) - c_3, \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& B_1 = (q_1 - r_1)P_1, \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(iii)-(18)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
57. \quad & c_4 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - r_2) - c_3, \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(iii)-(19)/(iii)-(45)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_3 = -c_1(\omega_j - r_1), \quad c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
58. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& B_1 = (\omega_j - r_1)P_1 + (\omega_i - \omega_j)P_2, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = P_2 \\
& \text{(iii)-(20)/(iii)-(51)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(\omega_j - r_1), \quad c_5 = 0, \quad c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \\
& c_4 = c_1(\omega_i - \omega_j), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
59. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1 - (\omega_i - \omega_j)P_2, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = P_2 \\
& \text{(iii)-(21)/(iii)-(50)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0, \\
& c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
60. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = P_2 \\
& \text{(iii)-(22)/(iii)-(52)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0, \\
& c_4 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - c_3, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - q_2), \\
61. \quad & B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(iii)-(23)/(iii)-(53)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& c_4 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) - c_2(q_2 - r_2) - c_3, \\
62. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(iii)-(24)/(iii)-(55)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(\omega_j - r_1), \quad c_5 = 0, \quad c_4 = -c_1(\omega_j - r_1) - c_3, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
& -c_1(\omega_i - \omega_j) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(q_2 - r_2)], \\
63. \quad & B_1 = (\omega_j - r_1)P_1, \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(iii)-(25)/(iii)-(54)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0, \\
& c_4 = c_1(\omega_i - \omega_j) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
64. \quad & B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad P_2 = 0 \\
& \text{(iii)-(27)/(iii)-(58)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0, \\
& c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
65. \quad & B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad P_2 = 0 \\
& \text{(iii)-(28)/(iii)-(57)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
66. \quad & B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \quad B_1B_2 = (p_2 - r_2)B_1, \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(iii)-(33)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
67. \quad & c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_4 = -c_1(p_1 - r_1) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
& B_1 = (p_1 - r_1)P_1, \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(iii)-(40)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
68. \quad & c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(q_2 - r_2) - c_3, \\
& B_1 = (p_1 - r_1)P_1, \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(iii)-(42)/(iii)-(43)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0, \\
& c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
69. \quad & B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \\
& B_1B_2 = (p_2 - r_2)[B_1 - (\omega_i - r_1)[P_1 - P_2]] \\
& \text{(iii)-(29)/(iii)-(30) / (iii)-(45)/(iii)-(59)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(p_2 - r_2)(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0, \\
70. \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = P_2 \\
& \text{(iii)-(46)/(iii)-(61)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0, \\
71. \quad & c_4 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2) - c_3, \\
& B_1B_2 = (\omega_i - r_1)B_2 + (p_2 - r_2)[B_1 - (\omega_i - r_1)P_1], \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(iii)-(31)/(iii)-(32)/(iii)-(47)/(iii)-(48)/(iii)-(60)/(iii)-(62)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2) - c_3, \quad c_5 = 0, \\
72. \quad & B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(iii)-(49)/(iii)-(63)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0, \quad c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2), \\
73. \quad & c_3 = 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(\omega_i - \omega_j)(p_2 - r_2), \\
& B_1B_2 = (\omega_i - r_1)B_2 + (p_2 - r_2)[B_1 - (\omega_j - r_1)P_1 - (\omega_i - \omega_j)P_2] \\
& \text{(iii)-(64)/(iii)-(65)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0, \\
c_4 &= 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2) - c_3, \\
74. \quad B_1 &= (\omega_i - r_1)P_1, \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(iii)-(66)/(iii)-(67)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
75. \quad c_4 &= -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
B_1 &= (\omega_i - r_1)P_1, \quad P_2 = 0 \\
& \text{(iii)-(68)/(iii)-(69)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &\neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_3 = -c_1(\omega_j - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\
& -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
76. \quad (\omega_i - \omega_j)B_1B_2 &= (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)[B_1 - (\omega_j - r_1)P_1], \\
(p_2 - q_2)B_1B_2 &= -(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)[B_2 - (p_2 - r_2)P_2] \\
& \text{(iv)-(1)/(iv)-(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &\neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\
c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) &= 0, \quad c_5 = 0, \\
77. \quad c_1(\omega_i - \omega_j) &\neq 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2), \\
B_1 &= (\omega_i - r_1)P_1, \\
(p_2 - q_2)B_1B_2 &= -(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)[B_2 - (p_2 - r_2)P_2] \\
& \text{(iv)-(3)/(iv)-(4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &\neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \\
78. \quad c_1 &= -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_3 = c_2(p_2 - q_2), \quad c_5 = 0, \\
B_2 &= -(p_2 - q_2)P_1 + (p_2 - r_2)P_2, \quad B_1B_2 = (q_2 - r_2)B_1 \\
& \text{(iv)-(5)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &\neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
c_3 &= -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2), \\
79. \quad -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) &\neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
B_1 &= (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = -(p_2 - q_2)P_1 + (p_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = P_1 \\
& \text{(iv)-(6)/(iv)-(7)}
\end{aligned}$$

- $c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0,$
 $c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)),$
 80. $c_4 \neq c_1(\omega_i - \omega_j) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)),$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = 0$
 (iv)-(9)/(iv)-(10)
- $c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2),$
 $c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \quad c_5 = 0,$
 81. $B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \quad (\omega_i - \omega_j)B_1B_2 = -(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)[B_1 - (\omega_i - r_1)P_1]$
 (iv)-(12)/(iv)-(35)
- $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_3 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - q_2),$
 $c_4 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0,$
 82. $B_1B_2 = (q_2 - r_2)B_1 + (\omega_i - r_1)[B_2 - (p_2 - r_2)P_2] + (\omega_i - r_1)(p_2 - q_2)P_1$
 (iv)-(14)/(iv)-(16)/(iv)-(38)/(iv)-(41)/(iv)-(42)/(iv)-(43)
- $c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0,$
 $c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)),$
 $-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(q_2 - r_2)(\omega_i - r_1) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)],$
 83. $(\omega_i - \omega_j)B_1B_2 = [(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(\omega_j - r_1)]B_1 + (p_1 - r_1)(q_1 - r_1)(p_2 - q_2)P_1,$
 $(p_2 - q_2)B_1B_2 = (\omega_j - r_1)(p_2 - q_2)(p_2 - r_2)P_1$
 $+ [(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) - (q_2 - r_2)(\omega_i - r_1)][B_2 - (p_2 - r_2)P_2]$
 (iv)-(15)/(iv)-(39)
- $c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)),$
 $c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0,$
 84. $B_1 = (q_1 - r_1)P_1,$
 $B_1B_2 = (q_1 - r_1)[B_2 + (p_2 - r_2)[P_1 - P_2]]$
 (iv)-(18)
- $c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0,$
 85. $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \quad P_1P_2 = P_1$
 (iv)-(19)/(iv)-(44)

86. $c_2 = -2a_1a_2(\omega_j - r_1)$, $c_3 = -c_1(\omega_i - r_1)$, $c_4 = 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)$,
 $c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(q_2 - r_2) = 0$, $c_5 = 0$,
 $c_2(p_2 - q_2) \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2)$,
 $(\omega_i - \omega_j)B_1B_2 = (\omega_i - \omega_j)(\omega_j - r_1)[B_2 - (p_2 - r_2)P_2]$
 $\quad - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)[B_1 - (\omega_i - r_1)P_1]$
(iv)-(21)/(iv)-(50)
87. $c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1)$, $c_3 = -c_1(\omega_i - r_1)$, $c_4 = -c_2(p_2 - r_2)$, $c_5 = 0$,
 $c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) = 0$,
 $c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) = 0$,
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1$,
 $(p_2 - q_2)B_1B_2 = -(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)[B_2 - (p_2 - r_2)P_2]$
(iv)-(22)/(iv)-(52)
88. $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$, $c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)$, $c_3 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - q_2)$,
 $c_4 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2)$, $c_5 = 0$,
 $B_1B_2 = (q_2 - r_2)B_1 + (\omega_i - r_1)[B_2 + (p_2 - q_2)P_1 - (p_2 - r_2)P_2]$
(iv)-(23)/(iv)-(53)
89. $c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1)$, $c_4 = -c_2(p_2 - r_2)$, $c_5 = 0$,
 $c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2))$,
 $-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)]$,
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1$, $B_2 = -(p_2 - q_2)P_1 + (p_2 - r_2)P_2$, $P_1P_2 = P_1$
(iv)-(24)/(iv)-(55)
90. $c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)$, $c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2))$,
 $c_4 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2)$, $c_5 = 0$,
 $-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)]$,
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1$, $B_1B_2 = (\omega_i - r_1)[B_2 + (p_2 - r_2)[P_1 - P_2]]$
(iv)-(25)/(iv)-(54)
91. $c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2)$, $c_3 = -c_1(\omega_i - r_1)$, $c_4 = -c_2(p_2 - r_2)$,
 $c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) = 0$, $c_5 = 0$,
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1$, $B_2 = (p_2 - r_2)P_2$, $P_1P_2 = 0$
(iv)-(27)/(iv)-(58)

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_5 = 0, \\
92. \quad & c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& B_1 = (p_1 - r_1)P_1, \quad B_1B_2 = (p_1 - r_1)[B_2 + (p_2 - r_2)[P_1 - P_2]] \\
& \text{(iv)-(40)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
& c_4 = -c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \\
& c_5 = c_1(\omega_i - \omega_j) + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \\
93. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(\omega_j - r_1)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1 + (\omega_i - \omega_j)[P_2 - I], \\
& B_1B_2 = (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)[P_1 + P_2 - I] \\
& \text{(v)-(1)/(v)-(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
& c_4 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \\
94. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(\omega_j - r_1)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_1B_2 = (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)[P_1 + P_2 - I] \\
& \text{(v)-(3)/(v)-(4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_4 \\
95. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(\omega_j - r_1)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_1B_2 = (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)P_1, \quad P_2 = I \\
& \text{(v)-(6)/(v)-(7)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_5 = -c_3 = -c_4, \\
96. \quad & c_4 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_4 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \\
& B_1B_2 = 0, \quad P_1 + P_2 = I \\
& \text{(v)-(8)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_5 = -c_1(\omega_i - r_1) - c_3, \quad c_4 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2), \\
97. \quad & c_4 \neq c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_4, \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad P_1 + P_2 = I \\
& \text{(v)-(9)/(v)-(10)}
\end{aligned}$$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_4 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3 = -c_4,$$

98. $B_1B_2 = (\omega_i - r_1)(p_2 - r_2)[P_1 + P_2 - I]$
(v)-(11)/(v)-(13)/(v)-(34)/(v)-(37)/(vii)-(11)/(vii)-(13)

$$c_1 \neq 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)),$$

$$c_4 = c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_4,$$

99. $B_1 = (\omega_j - r_1)P_1 - (\omega_i - \omega_j)[P_2 - I],$
 $B_1B_2 = (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)[P_1 + P_2 - I]$
(v)-(12)/(v)-(35)

$$c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4,$$

$$c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)),$$

$$c_1(\omega_i - \omega_j) = 2a_1a_2[(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) - (q_2 - r_2)(\omega_i - r_1)] \neq 0,$$

100. $(\omega_i - \omega_j)B_1B_2 = [(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(\omega_j - r_1)]B_1$
 $+ (p_1 - r_1)(q_1 - r_1)(p_2 - q_2)P_1,$
 $P_2 = I$
(v)-(15)/(v)-(39)

$$c_2 = 0, \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)),$$

$$c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_4,$$

101. $B_1 = (q_1 - r_1)P_1, \quad B_1B_2 = (q_1 - r_1)(p_2 - q_2)[P_1 + P_2 - I]$
(v)-(17)

$$c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)),$$

102. $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_1B_2 = (\omega_i - r_1)(p_2 - r_2)P_1, \quad P_2 = I$
(v)-(19)/(v)-(44)

$$c_2 = 0, \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)),$$

$$c_4 = -2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_4,$$

$$c_1(\omega_i - \omega_j) = 2a_1a_2[(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) - (q_2 - r_2)(\omega_i - r_1)] \neq 0,$$

103. $(\omega_i - \omega_j)B_1B_2 = [(q_2 - r_2)(\omega_i - r_1) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)]B_1$
 $+ (\omega_i - r_1)(\omega_j - r_1)(p_2 - q_2)P_1$
 $+ (\omega_i - \omega_j)(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)[P_2 - I]$
(v)-(20)/(v)-(51)

- $c_2 = 0, c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)),$
 $c_4 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), c_5 = -c_4,$
 104. $c_1(\omega_i - \omega_j) = 2a_1a_2[(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) - (q_2 - r_2)(\omega_i - r_1)],$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, B_1B_2 = (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)[P_1 + P_2 - I]$
 (v)-(22)/(v)-(52)
- $c_2 = 0, c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), c_5 = -c_4,$
 105. $c_1(\omega_i - \omega_j) = 2a_1a_2[(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) - (q_2 - r_2)(\omega_i - r_1)],$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, B_1B_2 = (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)P_1, P_2 = I$
 (v)-(24)/(v)-(55)
- $c_1 = 0, c_2 = 0, c_4 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2), c_5 = -c_4 = -c_3,$
 106. $B_1B_2 = 0, P_1 + P_2 = I$
 (v)-(26)/(v)-(56)
- $c_2 = 0, c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)),$
 107. $c_4 = c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2), c_5 = -c_4,$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, P_1 + P_2 = I$
 (v)-(27)/(v)-(58)
- $c_2 = 0, c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)),$
 108. $c_4 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2), c_5 = -c_4,$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, P_1 + P_2 = I$
 (v)-(28)/(v)-(57)
- $c_1 \neq 0, c_2 = 0, c_4 = -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2),$
 109. $c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), c_5 = -c_4,$
 $B_1 = (p_1 - r_1)P_1, B_1B_2 = (p_1 - r_1)(p_2 - r_2)[P_1 + P_2 - I]$
 (v)-(36)/(vii)-(36)

$$\begin{aligned}
c_2 &\neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2), \\
c_4 &= -c_1(\omega_i - \omega_j) - (q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
c_5 &= c_1(\omega_i - \omega_j) - c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \\
110. \quad &-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(\omega_j - r_1)], \\
&B_1 = (\omega_i - r_1)P_1 + (\omega_i - \omega_j)[P_2 - I], \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2 - (p_2 - q_2)[P_1 - I], \\
&P_1 + P_2 - I = P_1P_2 \\
&(\text{vi})-(1)/(\text{vi})-(2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_3 &= -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2), \\
c_4 &= -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
c_5 &= -c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \\
111. \quad &-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(\omega_j - r_1)], \\
&B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2 - (p_2 - q_2)[P_1 - I], \\
&P_1 + P_2 - I = P_1P_2 \\
&(\text{vi})-(3)/(\text{vi})-(4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), \quad c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), \\
112. \quad &c_3 = c_2(p_2 - q_2), \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4, \\
&B_2 = (p_2 - r_2)I - (p_2 - q_2)P_1, \quad P_2 = I \\
&(\text{vi})-(5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &\neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2), \\
c_5 &= -c_2(p_2 - r_2) - c_4, \\
113. \quad &-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(\omega_j - r_1)], \\
&B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (p_2 - r_2)I - (p_2 - q_2)P_1, \quad P_2 = I \\
&(\text{vi})-(6)/(\text{vi})-(7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= 0, \quad c_3 = c_2(p_2 - r_2) + c_4, \quad c_5 = -c_3, \\
114. \quad &c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), \quad c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \\
&B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I \\
&(\text{vi})-(8)
\end{aligned}$$

- $c_3 = -c_1(\omega_i - r_1) + c_2(p_2 - r_2) + c_4, \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4,$
 $c_4 \neq c_1(\omega_i - \omega_j) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)),$
 115. $c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)),$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I$
 (vi)-(9)/(vi)-(10)
- $c_1 = 0, \quad c_3 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3,$
 116. $c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)),$
 $B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \quad B_1B_2 = (\omega_i - r_1)(p_2 - r_2)[P_1 + P_2 - I]$
 (vi)-(11)/(vi)-(13)/(vi)-(34)/(vi)-(37)
- $c_1 \neq 0, \quad c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)),$
 $c_4 = c_1(\omega_i - \omega_j) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)),$
 117. $c_5 = -c_1(\omega_i - \omega_j) + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2),$
 $B_1 = (\omega_j - r_1)P_1 - (\omega_i - \omega_j)[P_2 - I], \quad B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I + P_1P_2$
 (vi)-(12)/(vi)-(35)
- $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1),$
 $c_3 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - c_4,$
 118. $B_1B_2 = (q_2 - r_2)B_1 + (\omega_i - r_1)[B_2 + (p_2 - q_2)P_1 - (p_2 - r_2)I],$
 $P_2 = I$
 (vi)-(14)/(vi)-(16)/(vi)-(38)/(vi)-(41)/(vi)-(42)/(vi)-(43)
- $c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4,$
 $-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(q_2 - r_2)(\omega_i - r_1) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)] \neq 0,$
 $(\omega_i - \omega_j)B_1B_2 = [(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)]B_1$
 119. $+ (p_1 - r_1)(q_1 - r_1)(p_2 - q_2)P_1,$
 $(p_2 - q_2)B_1B_2 = (\omega_j - r_1)(p_2 - q_2)(p_2 - r_2)P_1$
 $+ [(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) - (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)][B_2 - (p_2 - r_2)I],$
 $P_2 = I$
 (vi)-(15)/(vi)-(39)
- $c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)),$
 120. $c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(q_1 - r_1)), \quad c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2),$
 $B_1 = (q_1 - r_1)P_1, \quad B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I + P_1P_2$
 (vi)-(17)

- $c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)),$
 $c_5 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_4,$
 121. $B_1 = (q_1 - r_1)P_1,$
 $B_1B_2 = (q_1 - r_1)[B_2 + (p_2 - r_2)[P_1 - I]], \quad P_2 = I$
 (vi)-(18)
- $c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4,$
 122. $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (p_2 - r_2)I, \quad P_2 = I$
 (vi)-(19)/(vi)-(44)
- $c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 - 2a_1a_2(p_2 - r_2)),$
 $c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)), \quad c_5 = 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2),$
 123. $-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(\omega_j - r_1)],$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1 + (\omega_i - \omega_j)[P_2 - I],$
 $B_2 = (\beta_2 - \gamma_2)P_2 - (\alpha_2 - \beta_2)[P_1 - I], \quad P_1 + P_2 = I + P_1P_2$
 (vi)-(20)/(vi)-(51)
- $c_2 = -2a_1a_2(\omega_j - r_1), \quad c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)),$
 $c_4 = c_1(\omega_i - \omega_j), \quad c_5 = -c_1(\omega_i - \omega_j) + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2),$
 124. $-c_1(\omega_i - \omega_j) - c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(q_2 - r_2)],$
 $B_1 = (\omega_j - r_1)P_1 - (\omega_i - \omega_j)[P_2 - I],$
 $B_1B_2 = (\omega_j - r_1)[B_2 - (\alpha_2 - \gamma_2)[P_1 - I]]$
 (vi)-(21)/(vi)-(50)
- $c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2),$
 $c_4 = -(q_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)),$
 $c_5 = -c_2(p_2 - q_2) + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2),$
 125. $-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(\omega_j - r_1)],$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2 - (p_2 - q_2)[P_1 - I],$
 $P_1 + P_2 = I + P_1P_2$
 (vi)-(22)/(vi)-(52)

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \\
126. \quad & c_3 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_5 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2) - c_4, \\
& B_1B_2 = (q_2 - r_2)B_1 + (\omega_i - r_1)[B_2 + (p_2 - q_2)P_1 - (p_2 - r_2)I], \quad P_2 = I \\
& \text{(vi)-(23)/(vi)-(51)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_5 = -c_2(p_2 - r_2) - c_4, \\
& c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
127. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (p_2 - r_2)(\omega_j - r_1)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (p_2 - r_2)I - (p_2 - q_2)P_1, \quad P_2 = I \\
& \text{(vi)-(24)/(vi)-(55)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& c_5 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2) - c_4, \\
128. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(q_2 - r_2)(\omega_i - r_1) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_1B_2 = (\omega_i - r_1)[B_2 + (p_2 - r_2)[P_1 - I]], \quad P_2 = I \\
& \text{(vi)-(25)/(vi)-(54)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = 0, \quad c_3 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_3, \\
129. \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
& B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I \\
& \text{(vi)-(26)/(vi)-(56)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& c_4 = c_1(\omega_i - \omega_j) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)), \\
130. \quad & c_5 = -c_1(\omega_i - \omega_j) + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2), \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I + P_1P_2 \\
& \text{(vi)-(27)/(vi)-(58)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
131. \quad & c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \quad c_5 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2), \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (p_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I + P_1P_2 \\
& \text{(vi)-(28)/(vi)-(57)}
\end{aligned}$$

132. $c_1 \neq 0, c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)),$
 $c_4 = -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(p_1 - r_1)), c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2),$
 $B_1 = (p_1 - r_1)P_1, B_2 = (p_2 - r_2)P_2, P_1 + P_2 = I + P_1P_2$
(vi)-(36)
133. $c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1),$
 $c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), c_5 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2) - c_4,$
 $B_1 = (p_1 - r_1)P_1,$
 $B_1B_2 = (p_1 - r_1)[B_2 + (p_2 - r_2)[P_1 - I]], P_2 = I$
(vi)-(40)
134. $c_2 = 0, c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)),$
 $c_4 = -c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), c_5 = -c_4,$
 $-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)],$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1 + (\omega_i - \omega_j)[P_2 - I], B_2 = (q_2 - r_2)P_2, P_1 + P_2 = I + P_1P_2$
(vii)-(1)/(vii)-(2)
135. $c_2 = 0, c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)),$
 $c_4 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), c_5 = -c_4,$
 $-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)],$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, B_2 = (q_2 - r_2)P_2, P_1 + P_2 = I + P_1P_2$
(vii)-(3)/(vii)-(4)
136. $c_2 = 0, c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), c_5 = -c_4,$
 $-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)],$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, B_2 = (q_2 - r_2)I, P_2 = I$
(vii)-(6)/(vii)-(7)
137. $c_1 = 0, c_2 = 0, c_5 = -c_3 = -c_4,$
 $c_4 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2), c_4 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2),$
 $B_2 = (q_2 - r_2)P_2, P_1 + P_2 = I$
(vii)-(8)
138. $c_2 = 0, c_5 = -c_1(\omega_i - r_1) - c_3, c_5 = -c_4, c_4 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2),$
 $c_4 \neq c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2),$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, B_2 = (q_2 - r_2)P_2, P_1 + P_2 = I$
(vii)-(9)/(vii)-(10)

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq 0, \quad c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \quad c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
139. \quad & c_4 = c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2), \\
& B_1 = (\omega_j - r_1)P_1 - (\omega_i - \omega_j)[P_2 - I], \quad B_1B_2 = (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)[P_1 + P_2 - I] \\
& \text{(vii)-(12)/(vii)-(35)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = 0, \\
& c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \quad c_5 = -c_4, \\
& c_1(\omega_i - \omega_j) = 2a_1a_2[(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) - (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)] \neq 0, \\
140. \quad & (\omega_i - \omega_j)B_1B_2 = [(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)]B_1 \\
& \quad + (p_1 - r_1)(q_1 - r_1)(p_2 - q_2)P_1, \\
& P_2 = I \\
& \text{(vii)-(15)/(vii)-(39)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
141. \quad & c_4 = -2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_4, \\
& B_1 = (q_1 - r_1)P_1, \quad B_1B_2 = (q_1 - r_1)(p_2 - r_2)[P_1 + P_2 - I] \\
& \text{(vii)-(17)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_5 = -c_4, \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 - 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
142. \quad & B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_1B_2 = (\omega_i - r_1)(p_2 - r_2)P_1, \quad P_2 = I \\
& \text{(vii)-(19)/(vii)-(44)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& c_4 = -2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_4, \\
143. \quad & c_1(\omega_i - \omega_j) = 2a_1a_2[(p_2 - r_2)(\omega_j - r_1) - (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad B_1 = (\omega_i - \gamma_1)P_1 + (\omega_i - \omega_j)[I - P_2], \quad P_1 + P_2 = I + P_2P_1 \\
& \text{(vii)-(20)/(vii)-(51)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = 0, \quad c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
& c_4 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \quad c_5 = -c_4, \\
144. \quad & c_1(\omega_i - \omega_j) = 2a_1a_2[(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) - (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1 + P_2 = I + P_1P_2 \\
& \text{(vii)-(22)/(vii)-(52)}
\end{aligned}$$

145. $c_2 = 0, c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), c_5 = -c_4,$
 $c_1(\omega_i - \omega_j) = 2a_1a_2[(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) - (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)],$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, B_2 = (q_2 - r_2)I, P_2 = I$
(vii)-(24)/(vii)-(55)
146. $c_1 = 0, c_2 = 0, c_5 = -c_3 = -c_4 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2),$
 $B_2 = (q_2 - r_2)P_2, P_1 + P_2 = I$
(vii)-(26)/(vii)-(56)
147. $c_2 = 0, c_5 = -c_4, c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)),$
 $c_4 = c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2),$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, B_2 = (p_2 - r_2)P_2, P_1 + P_2 = I$
(vii)-(27)/(vii)-(58)
148. $c_2 = 0, c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)),$
 $c_4 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2), c_5 = -c_4,$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, B_2 = (q_2 - r_2)P_2, P_1 + P_2 = I$
(vii)-(28)/(vii)-(57)
149. $c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), c_3 = -c_1(\omega_j - r_1), c_4 = -c_2(p_2 - r_2), c_5 = 0,$
 $-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2),$
 $B_1 = (\omega_j - r_1)P_1 + (\omega_i - \omega_j)P_2, B_2 = (q_2 - r_2)P_2, P_1P_2 = P_2$
(viii)-(1)/(viii)-(2)
150. $c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), c_4 = -c_2(p_2 - r_2), c_5 = 0,$
 $c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) = 0,$
 $c_1(\omega_i - \omega_j) \neq 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2),$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, B_2 = (q_2 - r_2)P_2, P_1P_2 = P_2$
(viii)-(3)/(viii)-(4)
151. $c_2 \neq -2a_1a_2(p_1 - r_1), c_2 \neq -2a_1a_2(q_1 - r_1), c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2),$
 $c_3 = c_2(p_2 - q_2), c_4 = -c_2(p_2 - r_2), c_5 = 0,$
 $B_2 = (q_2 - r_2)P_2, P_1 = P_2$
(viii)-(5)

$$\begin{aligned}
& c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)) + c_2(p_2 - q_2), \\
152. \quad & -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(viii)-(6)/(viii)-(7)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_4 \neq -(p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_i - r_1)), \\
153. \quad & c_4 \neq c_1(\omega_i - \omega_j) - (p_2 - r_2)(c_2 + 2a_1a_2(\omega_j - r_1)), \quad c_5 = 0, \\
& B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, \quad P_2 = 0 \\
& \text{(viii)-(9)/(viii)-(10)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), \quad c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) = 0, \\
154. \quad & B_2 = (q_2 - r_2)P_2, \\
& (\omega_i - \omega_j)B_1B_2 = -(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)[B_1 - (\omega_i - r_1)P_1] \\
& \text{(viii)-(12)/(viii)-(35)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1), \quad c_5 = 0, \\
155. \quad & c_3 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - q_2), \quad c_4 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2), \\
& B_1B_2 = (q_2 - r_2)[B_1 - (\omega_i - r_1)P_1] + (\omega_i - r_1)B_2, \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(viii)-(14)/(viii)-(16)/(viii)-(38)/(viii)-(41)/(viii)-(42)/(viii)-(43)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
& c_4 = -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& -c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)], \\
156. \quad & (\omega_i - \omega_j)B_1B_2 = [(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)]B_1 \\
& \quad + (p_1 - r_1)(q_1 - r_1)(p_2 - q_2)P_1, \\
& (p_2 - q_2)B_1B_2 = [(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) - (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)]B_2 \\
& \quad + (\omega_i - \omega_j)(q_2 - r_2)(p_2 - r_2)P_2, \\
& P_1 = P_2 \\
& \text{(viii)-(15)/(viii)-(39)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_2 = -2a_1a_2(q_1 - r_1), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
157. \quad & c_4 = 2a_1a_2(q_1 - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \\
& B_1 = (q_1 - r_1)P_1, \quad P_1 = P_2 \\
& \text{(viii)-(18)}
\end{aligned}$$

158. $c_4 = -c_2(p_2 - r_2)$, $c_5 = 0$, $c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2))$,
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1$, $B_2 = (p_2 - r_2)P_2$, $P_1 = P_2$
(viii)-(19)/(viii)-(44)
159. $c_2 = -2a_1a_2(\omega_j - r_1)$, $c_3 = -c_1(\omega_i - r_1)$, $c_4 = -c_2(p_2 - r_2)$, $c_5 = 0$,
 $c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(q_2 - r_2) = 0$,
 $c_2(p_2 - q_2) \neq 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2)$,
 $B_2 = (q_2 - r_2)P_2$,
 $(\omega_i - \omega_j)B_1B_2 = -(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)[B_1 - (\omega_i - r_1)P_1]$
(viii)-(21)/(viii)-(50)
160. $c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1)$, $c_3 = -c_1(\omega_i - r_1)$, $c_4 = -c_2(p_2 - r_2)$, $c_5 = 0$,
 $c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) = 0$,
 $c_2(p_2 - q_2) - 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) = 0$,
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1$, $B_2 = (q_2 - r_2)P_2$, $P_1P_2 = P_2$
(viii)-(22)/(viii)-(52)
161. $c_1 = -2a_1a_2(q_2 - r_2)$, $c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)$, $c_5 = 0$,
 $c_3 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - q_2)$, $c_4 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2)$,
 $B_2 = (q_2 - r_2)P_2$, $P_1 = P_2$
(viii)-(23)/(viii)-(53)
162. $c_2 \neq -2a_1a_2(\omega_i - r_1)$, $c_4 = -c_2(p_2 - r_2)$, $c_5 = 0$,
 $c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2))$,
 $-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - q_2) = 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)]$,
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1$, $B_2 = (q_2 - r_2)P_2$, $P_1 = P_2$
(viii)-(24)/(viii)-(55)
163. $c_2 = -2a_1a_2(\omega_i - r_1)$, $c_4 = 2a_1a_2(\omega_i - r_1)(p_2 - r_2)$, $c_5 = 0$,
 $c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2))$,
 $-c_1(\omega_i - \omega_j) + c_2(p_2 - r_2) \neq 2a_1a_2[(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) - (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)]$,
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1$, $B_2 = (q_2 - r_2)P_2$, $P_1 = P_2$
(viii)-(25)/(viii)-(54)

164. $c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_3 = -c_1(\omega_i - r_1), c_4 = -c_2(p_2 - r_2), c_5 = 0,$
 $c_1(\omega_i - \omega_j) - 2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) = 0,$
 $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1, P_2 = 0$
(viii)-(27)/(viii)-(58)
165. $c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), c_2 = -2a_1a_2(p_1 - r_1), c_4 = 2a_1a_2(p_1 - r_1)(p_2 - r_2),$
 $c_3 = -(p_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), c_5 = 0,$
 $B_1 = (p_1 - r_1)P_1, P_1 = P_2$
(viii)-(40)
166. $c_2 \neq 0, c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2),$
 $c_3 = -(\omega_i - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), c_5 = -c_2(q_2 - r_2) - c_4,$
 $c_1(\omega_i - \omega_j) = c_2(p_2 - q_2), (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) = (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)$
 $(p_2 - q_2)[B_1 - (\omega_i - r_1)P_1] + (\omega_i - \omega_j)[B_2 - (q_2 - r_2)I] = 0,$
 $P_2 = I, B_1B_2 = (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)P_1$
(i)-(15)/(i)-(39)
167. $c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), c_5 = 0,$
 $c_4 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)) - c_2(p_2 - r_2) - c_3, c_4 \neq -c_2(p_2 - r_2),$
 $c_1(\omega_i - \omega_j) = c_2(p_2 - q_2), (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) = (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2)$
 $B_1B_2 = (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)P_1, P_1 = P_2$
(iii)-(15)/(iii)-(39)
168. $c_1 \neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), c_1 \neq -2a_1a_2(p_2 - r_2),$
 $c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), c_4 = -c_2(p_2 - r_2), c_5 = 0,$
 $c_1(\omega_i - \omega_j) = c_2(p_2 - q_2), (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) = (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2),$
 $(p_2 - q_2)[B_1 - (\omega_j - r_1)P_1] + (\omega_i - \omega_j)[B_2 - (p_2 - r_2)P_2] = 0,$
 $B_1B_2 = (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)P_1$
(iv)-(15)/(iv)-(39)
169. $c_1 = c_2 = 0, c_3 = -2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2), c_5 = -c_4,$
 $(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2) = (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2),$
 $B_1B_2 = (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)P_1, P_2 = I$
(v)-(15)/(v)-(39)

$$\begin{aligned}
c_1 &\neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = -c_2(\alpha_2 - \gamma_2) - c_4, \\
c_3 &= -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
170. \quad c_1(\omega_i - \omega_j) &= c_2(p_2 - q_2), \quad (\omega_j - r_1)(p_2 - \gamma_2) = (q_2 - r_2)(\omega_i - \gamma_1), \\
(p_2 - q_2)[B_1 - (\omega_i - r_1)P_1] &+ (\omega_i - \omega_j)[B_2 - (p_2 - r_2)I] = 0, \\
B_1B_2 &= (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)P_1, \quad P_2 = I \\
&(\text{vi})-(15)/(\text{vi})-(39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 &= -2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_4, \\
171. \quad (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) &= (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \\
B_1B_2 &= (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)P_1, \quad P_2 = I \\
&(\text{vii})-(15)/(\text{vii})-(39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &\neq -2a_1a_2(q_2 - r_2), \quad c_3 = -(\omega_j - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(p_2 - r_2)), \\
c_4 &= -c_2(p_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \quad c_1(\omega_i - \omega_j) = c_2(p_2 - q_2), \\
172. \quad (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) &= (\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \\
B_1B_2 &= (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2)P_1, \quad P_1 = P_2 \\
&(\text{viii})-(15)/(\text{viii})-(39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &\neq -2a_1a_2(p_2 - r_2), \quad c_3 = -(q_1 - r_1)(c_1 + 2a_1a_2(q_2 - r_2)), \\
c_4 &= -c_2(q_2 - r_2), \quad c_5 = 0, \quad -c_1(p_1 - q_1) = c_2(p_2 - q_2), \\
173. \quad (p_1 - r_1)(p_2 - r_2) &= (q_1 - r_1)(q_2 - r_2), \\
(p_2 - q_2)[B_1 - (q_1 - r_1)P_1] &- (p_1 - q_1)[B_2 - (q_2 - r_2)P_2] = 0, \\
B_1B_2 &= (q_1 - r_1)(q_2 - r_2)P_1 \\
&(\text{ii})-(39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 &= -2a_1a_2(\omega_i - r_1)(q_2 - r_2), \\
c_4 &= -2a_1a_2(\omega_j - r_1)(p_2 - r_2), \quad c_5 = -c_4, \\
174. \quad (\omega_j - r_1)(p_2 - r_2) &= (q_2 - r_2)(\omega_i - r_1), \\
B_1B_2 &= (q_2 - r_2)(\omega_i - r_1)[P_1 + P_2 - I] \\
&(\text{v})-(20)/(\text{v})-(51)
\end{aligned}$$

Uygulamalarda iki kübik matris verildiğinde p_1, q_1, r_1 ve p_2, q_2, r_2 zaten bilinen skalerler olacaktır. Bu iki kübik matrisin lineer bileşimlerinin $\{p_3, q_3\}$ -kuadratik matris olması problemi ile ilgilenildiğinde, p_3, q_3 skalerleri de bilinen sayılar olacaktır. Haliyle lineer bileşimin katsayıları olan ve bilinmeyen a_1 ve a_2 katsayıları,

yukarıdaki teoremden bilinenler yerlerine koyularak kolaylıkla elde edilebilir. Dikkat edilirse, teoremin şıkları, lineer bileşimi oluşturan A_1 ve A_2 matrislerine göre değil, B_1 ve B_2 matrislerine göre ifade edilmiştir. Fakat A_1 ve A_2 matrisleri B_1 ve B_2 matrislerinden sadece bir birim matrisin bir skaler katı kadar farklı olduğundan, teoremin şıkları istenildiğinde A_1 ve A_2 matrislerine göre de ifade edilebilir.

Teorem 3.21'in literatürdeki pek çok sonucu kapsadığı söylenebilir. Örneğin, Teorem 3.21'de $(p_1, q_1, r_1), (p_2, q_2, r_2) \in \{(1, -1, 0), (-1, 1, 0), (1, 0, -1), (-1, 0, 1), (0, 1, -1), (0, -1, 1)\}$ ve $(p_3, q_3) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$ alınırsa, A_1 ve A_2 matrisleri tripotent, A_3 matrisi idempotent matris olup, aşağıdaki teorem elde edilir.

Sonuç 3.22. (Teorem 2.2, [28]) $A_1, A_2 \in \mathbb{C}_n$, $A_1 \neq \pm A_2$ olacak şekilde sıfırdan farklı değişmeli tripotent matrisler ve $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $A_3 = a_1 A_1 + a_2 A_2$ lineer bileşiminin idempotent olmasının gerekli ve yeterli koşulu aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

- (a) $(a_1, a_2) \in \left\{ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$ ve $2a_1 A_1 + 2a_2 A_2 - 4a_1 a_2 A_1 A_2 = A_1^2 = A_2^2$,
- (b) $(a_1, a_2) \in \{(-1, -1), (1, 1), (-1, 1), (1, -1)\}$ ve $a_1 A_1 + a_2 A_2 - 2a_1 a_2 A_1 A_2 = A_1^2 + A_2^2$,
- (c) $(a_1, a_2) \in \{(-1, -2), (1, 2), (-1, 2), (1, -2)\}$ ve $a_1 A_1 + a_2 A_2 = A_1^2$,
- (d) $(a_1, a_2) \in \{(-2, -1), (2, 1), (-2, 1), (2, -1)\}$ ve $a_1 A_1 + a_2 A_2 = A_2^2$.

Yine Teorem 3.21'de $(p_3, q_3) \in \{(1, -1), (-1, 1)\}$ ve $(p_1, q_1, r_1), (p_2, q_2, r_2) \in \{(1, -1, 0), (-1, 1, 0), (1, 0, -1), (-1, 0, 1), (0, 1, -1), (0, -1, 1)\}$ alınırsa, A_1 ve A_2 matrisleri tripotent, A_3 matrisi involutif matris olup, aşağıdaki teorem elde edilir.

Sonuç 3.23. (Teorem 2.2, [29]) $A_1, A_2 \in \mathbb{C}_n$, $A_1 \neq \pm A_2$ olacak şekildeki sıfırdan farklı değişmeli tripotent matrisler ve $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $A = a_1 A_1 + a_2 A_2$ lineer bileşiminin involutif olmasının gerekli ve yeterli koşulu aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $(a_1, a_2) = (1, 1)$ veya $(a_1, a_2) = (-1, -1)$ ve $A_1^2 + 2A_1A_2 + A_2^2 = I$ olup

A_1 ve A_2 involutif değildir,

(b) $(a_1, a_2) = (1, -1)$ veya $(a_1, a_2) = (-1, 1)$ ve $A_1^2 - 2A_1A_2 + A_2^2 = I$ olup

A_1 ve A_2 involutif değildir,

(c) $(a_1, a_2) = (2, 1)$ veya $(a_1, a_2) = (-2, -1)$ ve $4A_1^2 + 4A_1A_2 + A_2^2 = I$ olup

A_1 involutif değildir,

(d) $(a_1, a_2) = (2, -1)$ veya $(a_1, a_2) = (-2, 1)$ ve $4A_1^2 - 4A_1A_2 + A_2^2 = I$ olup

A_1 involutif değildir,

(e) $(a_1, a_2) = (1, 2)$ veya $(a_1, a_2) = (-1, -2)$ ve $A_1^2 + 4A_1A_2 + 4A_2^2 = I$ olup

A_2 involutif değildir,

(f) $(a_1, a_2) = (1, -2)$ veya $(a_1, a_2) = (-1, 2)$ ve $A_1^2 - 4A_1A_2 + 4A_2^2 = I$ olup

A_2 involutif değildir,

Teorem 3.21’de A_1 ve A_2 matrislerinin özel olarak kuadratik veya skaler potent olduğu durumlar da içermektedir.

Örneğin 1’de $B_2 = (q_2 - r_2)P_2$ olup $A_2 = B_2 + r_2I$ olduğundan $A_2 = (q_2 - r_2)P_2 + r_2I$ olur. Bu ise Teorem 2.33-(iv)’e göre A_2 matrisinin kuadratik olduğunu gösterir.

2’de $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1$ ve $B_2 = (q_2 - r_2)P_2$ olup $A_1 = B_1 + r_1I$ ve $A_2 = B_2 + r_2I$ olduğundan $A_1 = (\omega_i - r_1)P_1 + r_1I$ ve $A_2 = (q_2 - r_2)P_2 + r_2I$ olur. Dolayısıyla Teorem 2.33-(iv)’e göre A_1 ve A_2 matrisleri kuadratik olur.

3’de $B_1 = (\omega_i - r_1)P_1$ ve $B_2 = (q_2 - r_2)I$ olup buradan $A_1 = (\omega_i - r_1)P_1 + r_1I$ ve $A_2 = q_2I$ olur. Bu ise A_1 matrisinin kuadratik matris, A_2 matrisinin skaler potent olduğunu gösterir.

Teorem 3.21’de A_1 ve A_2 matrislerinin kuadratik olduğu şıklardaki sonuçların [12]’deki Teorem 2.3 ile uyumlu olduğu görülebilir.

Teorem 3.21’de A_1 matrisinin kübik A_2 matrisinin de kuadratik olduğu şıklardaki sonuçların da [4]’deki Teorem 3.7 ile örtüştüğünü görmek kolaydır.

Aşağıda, Teorem 3.21’e ilişkin bir sayısal örnek verilmektedir.

Örnek 3.24. $A_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -7 & 15 & -6 \\ -9 & 41 & -18 \\ -15 & 75 & -34 \end{pmatrix}$ ve $B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ matrisleri verilsin.

A_1 matrisi $\{2, -1\}$ -kuadratik, A_2 matrisi $\{-2\}$ -skaler-potent matristir.

$\frac{2}{3}A_1 + \frac{1}{6}A_2$ ve $-\frac{2}{3}A_1 - \frac{1}{6}A_2$ matrisleri involutiftir. Bunu Teorem 3.21 in 3. şikkından görebiliriz:

$\{p_1, r_1\} = \{2, -1\}$ ve $q_2 = -2$ alınırsa, $A_1 = 3X_1 - I$, $P = X_1$, $A_2 = -2I$, $P_2 = I$ olarak yazılabilir. Buradan $B_1 = 3P_1$ ve $B_2 = (-2 - r_2)I$ olur. Bu ise Teorem 3.21’in 3. şikkının $(i, j) = (1, 2)$ alındığındaki hali ile uyumludur. p_1, r_1 ve q_2 değerleri, Teorem 3.21’in 3. şikkındaki katsayı eşitliklerinde yerlerine yazılırsa, $(a_1, a_2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$ veya $(a_1, a_2) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\right)$ bulunur. Burada not etmek gerekir ki,

Teorem 3.21’in 3. şikkındaki ifadelerde, seçtiğimiz p_1, r_1 ve q_2 değerlerinin dışında

p_2, r_2 ve q_1 değerleri de vardır fakat bunlar, c_1, c_2, c_3, c_4 ve c_5 ifadelerinin p_i, q_i ve r_i cinsinden değerleri yerlerine yazıldığında sadeleştiğinden, bunların karşılık geldiği sayı değerlerinin bilinmesine ihtiyaç yoktur. Bu, sadece teoremin 3. şikkında değil, teoremin pek çok şikkında mevcut olan bir durumdur.



4. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Teorem 3.21'in şıklarına bakıldığında bir hayli fazla ve içerik olarak da karmaşık olduğu görülmektedir. Fakat dikkat edilirse her bir şık birbiri ile kesin olarak ayrıktır. Teoremin şıklarının bu denli fazla olması, her bir alt durumun detaylı olarak incelenmesinden kaynaklıdır. Detaylı incelemeden kasıt şudur:

Bir matris ile bir skalerin çarpımı sıfır ise, matris veya skalerden en az biri sıfırdır. Biz bu durumu skalerin sıfıra eşitliği veya matrisin sıfıra eşitliği şeklinde 2 durum olarak değil aşağıdaki gibi irdeleyerek ilerledik.

c bir skaler ve K bir matris olsun. $cK = 0$ ise, 3 durum söz konusudur:

$$(c = 0 \text{ ve } K \neq 0) \text{ veya } (c \neq 0 \text{ ve } K = 0) \text{ veya } (c = 0 \text{ ve } K = 0)$$

Bu şekilde ilerlendiği için her bir durum kendi içinde ayrı durum olmuştur. Üstelik tez boyunca iç içe bu tarz ifadeler çok defa karşımıza çıktığından haliyle bu durumlar teoremin şıklarının fazla olmasına neden olmuştur.

[10] çalışmasında yazarlar genelleştirilmiş kübik matris kavramını tanıtmış ve bazı özelliklerinden bahsetmişlerdir. Söz konusu çalışma, aslında genelleştirilmiş kuadratik matris kavramından esinlenerek ortaya çıkmıştır. [10] çalışmasındaki özellikler kullanılarak ve bu tezdeki yöntem dikkate alınarak iki genelleştirilmiş kübik matrisin lineer bileşimlerinin karakterizasyonu da çalışılmaya değerdir.



KAYNAKLAR

- [1] The Power of Idempotency: Understanding its Significance (2023, 18 Mart)
<https://www.codementor.io/@sidverma32/the-power-of-idempotency-understanding-its-significance-22zkyc7ci1> adresinden Eylül 2024 tarihinde alınmıştır.
- [2] Idempotence. <https://en.wikipedia.org/wiki/Idempotence> adresinden Eylül 2024 tarihinde alınmıştır.
- [3] Idempotent matrix. https://en.wikipedia.org/wiki/Idempotent_matrix adresinden Eylül 2024 tarihinde alınmıştır.
- [4] Gökmen, B. T. (2018). *değişmeli bir kübik ve bir kuadratik matrisin lineer bileşimlerinin kuadratikliği* [Yüksek Lisans Tezi] Sakarya Üniversitesi.
- [5] Aleksiejczyk, M. ve Smoktunowicz, A. (2000). On Properties of Quadratic Matrices. *Math. Pannon.* 11(2), 239-248. <https://mathematica-pannonica.ttk.pte.hu/articles/mp11-2/mp11-2-239-248.pdf>
- [6] Farebrother, R. W. ve Trenkler, G. (2005). On Generalized Quadratic Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 410, 244-253. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379505003927>
- [7] Deng, C. Y. (2010). On Properties of Generalized Quadratic Operators. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 847-856. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379509004996>
- [8] Liu, S., Chen, M., Feng, X., Yang, Z., Xie, Y. (2013). Invariance of rank and nullity for linear combinations of sum and product of generalized quadratic matrices. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 42(12), 157-166.
- [9] Lv, H., Yang, Z., Chen, M. (2013). Rank equalities for commutator of generalized quadratic matrices and their applications. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 32(2), 59-67.
- [10] Zhu, L., Zhang, Dong-mei, Yang, Zhong-peng. (2014). Generalized Cubic Matrix and Its Properties. *Journal of Jilin University*, 52(02), 195-200.
- [11] Chen, M., Yang, Z., Chen, Q. (2024). The uniqueness of expression for generalized quadratic matrices. *Open Mathematics*, 22(1), <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/math-2023-0186/html>
- [12] Uç, M., Özdemir, H., Özban, A. Y. (2015). On the Quadraticity of Linear Combinations of Quadratic Matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 63(6), 1125-1137.
- [13] Petik, T., Uç, M., Özdemir, H. (2015). Generalized Quadraticity of Linear Combination of Two Generalized Quadratic Matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 63(12), 2430-2439.

- [14] Uç, M., Petik, T., Özdemir, H. (2015). The Generalized Quadraticity of Linear Combinations of Two Commuting Quadratic Matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 64(9), 1696-1715. <https://doi.org/10.1080/03081087.2015.1114985>
- [15] Sarduvan, M. ve Kalaycı, N. (2019). On idempotency of linear combinations of a quadratic or a cubic matrix and arbitrary matrix. *Filomat*, 33(10), 3161-3185. <https://journal.pmf.ni.ac.rs/filomat/index.php/filomat/article/view/9767>
- [16] Kalaycı, N. ve Sarduvan, M. (2021). On Involutiveness of Linear Combinations of a Quadratic Matrix and an Arbitrary Matrix. *Haceteppe Journal of Mathematics and Statistics*, 50(4), 1012-1027. <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/1011797>
- [17] Petik, T., Özdemir, H., Gökmen, B. T. (2022). Notes on The Quadraticity of Linear Combinations of a Cubic Matrix and a Quadratic Matrix That Commute. *Turkish Journal of Mathematics*, 46(8), 3373-3390. <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3338>
- [18] Lay, D. C. (2006). *Linear Algebra and Its Applications*. Pearson Addison-Wesley.
- [19] Horn, R. A. ve Jhonson, C. R. (2013). *Matrix Analysis*. Cambrige University Press.
- [20] Tian, Y. ve Styan, G. P. H. (2001). Rank Equalities for Idempotent and Involutory Matrices. *Linear Algebra Appl.*, 335(1), 101-117. [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(01\)00297-X](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(01)00297-X)
- [21] Graybill, F. A. (1983). *Matrices with Applications in Statistics*. Wadsworth Publishing Company.
- [22] Özdemir, H., Sarduvan, M., Özban, A. Y., Güler, N. (2009). On Idempotency and Tripotency of Linear Combinations of Two Commuting Tripotent Matrices. *Appl. Math. Comput.*, 207(1), 197-201. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.10.017>
- [23] Bernstein, D. S. (2009). *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas*. Princeton University Press.
- [24] Zhang, F. (2011). *Matrix Theory, Basic Results and Techniques*. Springer Science+Business Media LLC.
- [25] Bu, C. (2005). Linear Maps Preserving Drazin Inverses of Matrices over Fields, *Linear Algebra Appl.*, 396(1), 159-173. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.09.012>
- [26] Rao, C. R. ve Mitra, S. K. (1971). *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications*, Wiley.
- [27] Özdemir, H. ve Petik, T. (2013). On the Spectra of Some Matrices Derived From Two Quadratic Matrices. *Bulletin of The Iranian Mathematical Society*, 39(2), 225-238. http://bims.iranjournals.ir/article_337.html
- [28] Özdemir, H. ve Sarduvan, M. (2008). Notes on Linear Combinations of Two Tripotent, Idempotent, and Involution Matrices That Commute. *An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat.*, 16(2), 83-90. <https://www.anstuocmath.ro/mathematics/pdf16/OZDEMIR-manuscript.pdf>

- [29] Sarduvan, M. ve Özdemir, H. (2008). On Linear Combinations of Two Tripotent, Idempotent and Involution Matrices. *Appl. Math. Comput.*, 200(1), 401-406. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.11.019>





ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : İrem Gamze ÜNLÜTÜRK

ÖĞRENİM DURUMU:

- Lisans** : 2012, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2014-2017 yılları arasında Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı Bulanık Anadolu Lisesine öğretmen olarak atandı.
- 2017-2022 yılları arasında Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı Taşoluk Anadolu Lisesine öğretmen olarak çalıştı.
- 2022'den beri Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı Şen Piliç Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesinde öğretmen olarak çalışıyor.

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- (2024, 17-19 May). Ases International Malatya Scientific Research Conference, Malatya, Turkey