



**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DEĞİŞMELİ OLMAYAN BİRLEŞMELİ
CEBİRLERİN 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLÜ VE
MORFİZMLERİ İÇİN İZOMORFİZM TEOREMLERİ**

Gürhan KAYA

BURDUR, 2022

T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DEĞİŞMELİ OLMAYAN BİRLEŞMELİ
CEBİRLERİN 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİ VE
MORFİZMLERİ İÇİN İZOMORFİZM TEOREMLERİ

Gürhan KAYA

Dr. Öğr. Üyesi Selim ÇETİN

BURDUR, 2022

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi / Doktora Tezi olarak sunduğum **“Değişmeli olmayan birleşmeli cebirlerin 2–çaprazlanmış modülü ve morfizmleri için izomorfizm teoremleri”** başlıklı bu tezin;

- Tamamen kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Kullandığım verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

28 /07/2022

(İmza)

Gürhan KAYA

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana her açıdan yol gösteren, çalışma sürecinde her türlü yol gösterici olan ,olumlu tavrıyla beni cesaretlendiren,bilgi birikimiyle çalışmama farklı açılardan bakmamı sağlayan ve öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum çok değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Selim ÇETİN'e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardım ve desteğini benden hiç esirgemeyen, bilgi birikimi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren öğrencisi olmaktan gurur duyduğum Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimi süresince her türlü desteği sağlayan ,Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne teşekkür ediyorum.

Temmuz, 2022

Gürhan KAYA

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iii
ÖZET	v
SUMMARY	vi
1. GİRİŞ	7
2. TEMEL KAVRAMLAR	9
3. BİRLEŞMELİ CEBİRLERİN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİ	19
3.1. Alt Çaprazlanmış Modül ve Çaprazlanmış Modüllerin İdeali	21
3.2. Birleşmeli Cebirlerin Bölüm Çaprazlanmış Modülü	25
3.3. Birleşmeli Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri İçin İzomorfizm Teoremleri	26
4. BİRLEŞMELİ CEBİRLERİN 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİ	31
5. SONUÇ	46
KAYNAKLAR	47

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\leq$	: Alt cebir, Alt çaprazlanmış modül, Alt çaprazlanmış kare
$\subseteq$	: Alt küme
$\not\subseteq$	: Alt küme değil
I_A	: Birim dönüşüm (A kümesi için)
$\cup$	: Birleşim
$\emptyset$	: Boş küme
$/$	: Bölüm
$\bar{\bar{\delta}}$	: Bölüm çaprazlanmış modüllerin bölümünün sınır dönüşümü
$\bar{\delta}$	: Bölüm çaprazlanmış modülün sınır dönüşümü
çek	: Çekirdek
$\in$	: Elemanı
$\notin$	: Elemanı değil
$=$	: Eşit
$\neq$	: Eşit değil
$\cdot$	: Etki
$\setminus$	: Fark
$f : A \rightarrow B$	: Fonksiyon
$\Rightarrow$	: Gerek şart
$\Leftrightarrow$	: Gerek ve yeter şart
gör	: Görüntü
$\forall$	: Her
$\iota : A \hookrightarrow B$	: İçerme dönüşümü
$\trianglelefteq$	: İdeal
■	: İspat sonu
$\cong$	: İzomorf
$\times$	: Kartezyen çarpım
$\cap$	: Kesişim
$ $	: Kısıtlama
:	: Öyle ki
∂	: Sınır dönüşümü

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$:=$	: Tanım olarak eşit
Σ	: Toplam
$\supseteq$	: <i>Üst küme</i>
$\exists$	: Var
$\Leftarrow$	: Yeter şart



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Değişmeli Olmayan Birleşmeli Cebirlerin 2–Çaprazlanmış Modülleri ve Morfizmleri için İzomorfizm Teoremleri

Gürhan KAYA

**Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Selim ÇETİN

Temmuz, 2022

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde tez boyunca gerekecek olan değişmeli olmayan birleşmeli cebirlerin 2–çaprazlanmış modülleri ile ilgili literatür bilgisi sunulmuştur.

İkinci bölümde bazı temel cebirsel ifade ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde değişmeli olmayan birleşmeli cebirlerin çaprazlanmış modülleri detaylı bir şekilde ele alınarak alt çaprazlanmış modül, ideal, çaprazlanmış modül homomorfizminin çekirdeği ve görüntüsü, bölüm çaprazlanmış modülü gibi kavramlar incelenmiş ve cebirlerin çaprazlanmış modülleri için izomorfizm teoremlerinin ispatları verilmiştir.

Dördüncü bölümde, önceden verilmiş olan kavramlar cebirlerin 2–çaprazlanmış modülleri için uyarlanmış ve verilen yeni tanımlar altında izomorfizm teoremlerinin hâlâ geçerli oldukları ispatlanmıştır.

Son bölümde ise daha önceki bölümlerde elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Cebir, çaprazlanmış ve 2–çaprazlanmış modül, izomorfizm teoremi

SUMMARY

M. Sc. Thesis

Isomorphism Theorems for 2–Crossed Modules of Non-commutative Associative Algebras and Their Morphisms

Gürhan KAYA

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Selim ÇETİN

July, 2022

This study consists of five chapters.

In the first chapter, the literature on 2–crossed modules of non-commutative associative algebras that will be required throughout the thesis is presented.

In the second chapter, some basic algebraic expressions and theorems are given.

In the third chapter, crossed modules of non-commutative associative algebras are discussed in detail, concepts such as subcrossed module, ideal, kernel and image of crossed module homomorphism, quotient crossed module are examined, and proofs of isomorphism theorems for crossed modules of algebras are given.

In the fourth chapter, the previously given concepts are adapted for the 2-crossed modules of algebras and it is proved that the isomorphism theorems are still valid under the new definitions given.

In the last chapter, the results obtained in the previous chapters are given.

Keywords: Algebra, crossed module and 2–crossed modules, isomorphism theorems

1. GİRİŞ

Tarihsel olarak aritmetik ve geometriden sonra, özellikle geometrik ölçümlerin hesaplanması gerekliliğinden kaynaklı olarak ortaya çıkan cebir, matematiğin temel alanlarının en eskilerinden biri olarak kabul edilir. Örneğin topoloji 21.yy, analiz 18.yy civarlarında sistematik olarak çalışılmaya başlanmışken cebir üzerine düzenli çalışmalar 8.yy la kadar geriye gitmektedir. Bu durum cebirin birçok diğer alana göre çok daha geniş bilgi birikimi ve bulgulara sahip alan yaptığı gibi matematikteki birçok açıdan en derin ve diğer alanları en çok etkileyen sonuçlarda cebir kaynaklıdır. Bu kadar uzun süredir çalışılması ve literatürün nadir görülecek bir seviyede geniş olması, cebirsel yapıların çeşitliliğinden kaynaklıdır.

Bu çeşitlilik içerisinde hiç şüphesiz grupların ve cebirlerin çok özel bir konumu bulunmaktadır. Grubu özel yapan şey, en basit ancak yine de en kullanışlı özelliklere sahip olan optimal verimlilikte bir cebirsel yapı olması ve örneklerinin matematiğin ve matematik dışı alanların içerisinde bolca bulunmasıdır. Her ne kadar grubun birçok genellemesi bulunsada, basitlik ile kullanışlılık arasındaki bu mükemmel denge grupları cebirin merkezine yerleştirmektedir. Cebirler ise grupların aksine oldukça kompleks bir yapı olup matematiksel anlamda bir çok yapıyı içinde barındırır. Örneğin bir cebir verildiğinde bunun içerisinde en az dört ikili işlem ,bir değişmeli grup, bir cisim, bir vektör uzayı, bir halka ve bunların genellediği bütün matematiksel yapıların adeta minyatür bir örneği bu cebirin içerisinde hali hazırda verilmiş olur.

Cebirsel yapıların çeşitliliği içerisinde yeni yapıların çeşitli sebeplerle tanımlanması, kendine özgü özelliklerin incelenmesi ve farklı cebirsel yapıların özellikleri arasındaki benzerliklerin ve farklılıkların ortaya konulma çabaları sürekli olarak devam etmektedir. Yeni cebirsel yapıların tanımlanmasında birçok yaklaşımlar bulunmakla birlikte, bu yaklaşımlardan bizim çalışmamızı en çok ilgilendireni, cebirsel boyut kavramıdır. Cebirsel nesnelerin üst boyutlara taşınması çok farklı bakış açılarıyla modellenenebilir olsa da bizim burada ele alacağımız bakış açısı aynı cinsten iki cebirsel nesnenin etki ve homomorfizm yoluyla birbirleriyle belli kurallar çerçevesinde bağdaştırılması mantığına dayanan çaprazlanmış modüller ve onların üst boyutunda yer alan 2-çaprazlanmış modüllerdir.

Yukarıda bahsi geçen çaprazlanmış modül kavramının tanımlanması, John Henry Constantine Whitehead (Whitehead, 1949) tarafından yapılan homotopi gruplarıyla ilgili bir

çalışmaya dayanmaktadır ve burada kullanılan temel cebirsel nesneler gruplar ile sınırlı kalmıştır. Whitehead tarafından ortaya atılan bu fikir daha sonraki yıllarda pek çok açıdan incelenmiş, geliştirilmiş ve genelleştirilmiştir. Örneğin bunlardan bazıları birleşmeli ve değişmeli cebirler için gruptakine benzer bir çaprazlanmış modül yapısı kurarak bu konuda çalışmaları gerçekleştiren Stephen Lichtenbaum ile Michael Schlessinger (Lichtenbaum ve Schlessinger, 1967) ve Murray Grestenhaber (Grestenhaber, 1966), çok önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Cebirlerin çaprazlanmış modülleri üzerinde çalışmalar yapan Timothy Porter (Porter, 1986) da bu alanda öne çıkan matematikçilerden biri olmuştur. Graham J. Ellis (Ellis, 1988) birçok farklı cebir türü için çaprazlanmış modül şartlarını kategorik araçlar yardımıyla belirleyerek bu yapılar için literatüre standart tanımlar kazandırmıştır. Timothy Porter ve Zekeriya Arvasi (Porter ve Arvasi, 1996), Ummuhan Ege (Ege, 2002) ve Alper Odabaş (Odabaş, 2009) da cebirlerin çaprazlanmış modülleriyle ilgili dikkat çeken çalışmalar yapmıştır.

Whitehead'ın gruplar üzerinden tanımladığı ve sonraki yıllarda birleşmeli cebirler, değişmeli cebirler, Lie cebirleri, Leibniz cebirleri ve daha birçok cebir türü için uyarlanmış olan çaprazlanmış modüller, farklı cebirsel yapılar için inşa edilmesinin yanı sıra boyutsal yaklaşım olarak adlandırabileceğimiz başka bir yönden de geliştirilebilirler. Çaprazlanmış modüller köken olarak bir topolojik uzayın birinci ve ikinci homotopi grupları arasındaki birtakım ilişkilere dayandığından, üçüncü ve dah yüksek mertebeli homotopi gruplarının da resme katılmasıyla çaprazlanmış modülleri genelleyen ancak çok daha fazla kompleksite taşıyan yüksek boyutlu cebirsel yapılar elde edilebilmektedir. Bu boyut yükseltme fikri birden çok farklı bakış açılarıyla ele alınabilmektedir. Bu yaklaşımlardan öne çıkan iki tanesi n –çaprazlanmış küpler ve n –çaprazlanmış modüller olarak meşhur olmuştur. Burada sözkonusu olan n –çaprazlanmış küpler Graham J. Ellis (Ellis, 1984) tarafından tanımlanmış ve Nizar Miekha Shammu (Shammu, 1992) gibi yazarlar tarafından birleşmeli cebirler için $n = 2$ durumu özelinde ele alınmıştır. n –çaprazlanmış modül kavramı ise, ilk olarak 2 –çaprazlanmış modül için Conduché, (Conduché, 1984) tarafından verilmiştir. Bu çalışmada ele alınacak olan cebirsel yapılarda, birleşmeli cebirlerin çaprazlanmış modülleri ve birleşmeli cebirlerin 2 –çaprazlanmış modülleridir. Özellikle birleşmeli cebirlerin 2 –çaprazlanmış modülleri için izomorfizm teoremlerini ifade etmekte kullanılacak araçların tanımlanması ve bu tanımlar yardımıyla ifade edilen izomorfizm teoremlerinin ispatlanması tezin özgün kısmını teşkil etmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, bu tez çalışması boyunca gerekli olacak olan bazı cebirsel tanımlara, teoremlere ve bunlardan bazılarının ispatlarına yer verilmiştir. Bu bölümdeki tanım ve teoremler literatürde iyi bilinen sonuçlar olup herhangi bir standart kaynakta, örneğin Thomas William Hungerford'un eserinde (Hungerford, 1974) bulunabilir.

Tanım 2.1. (İkili işlem) G bir küme olmak üzere $\star : G \times G \rightarrow G$ şeklindeki bir fonksiyona G kümesi üzerinde bir ikili işlem denir. Eğer $a, b \in G$ ise $\star(a, b)$ elemanı $a \star b$ şeklinde veya karışıklık olmaması hâlinde bazen kısaca ab şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2. (Değişmeli Grup) Bir G kümesi üzerinde bir $+$ ikili işlemi verilsin. Eğer

- i) $\forall x, y, z \in G$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$
- ii) $\forall x \in G$ için $x + 0 = 0 + x$ olacak şekilde bir $0 \in G$ vardır.
- iii) G 'deki her x için, $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olacak şekilde bir $-x \in G$ vardır.
- iv) $\forall x, y \in G$ için $x + y = y + x$

şartları sağlanıyorsa $(G, +)$ ikilisine bir değişmeli grup (Abel grup) denir.

Tanım 2.3. (Halka) Bir H kümesi üzerinde $\forall x, y \in H$ için

$$+ : H \times H \rightarrow H, \quad +(x, y) = x + y$$

$$\cdot : H \times H \rightarrow H, \quad \cdot(x, y) = xy$$

ile tanımlı ikili işlemler verilsin. Eğer,

- i) $(H, +)$ değişmeli grup
- ii) $\forall x, y, z \in H$ için $x(yz) = (xy)z$
- iii) $\forall x, y, z \in H$ için $x(y + z) = xy + xz$ ve $(x + y)z = xz + yz$

özellikleri sağlanıyorsa, H 'ye bir halka denir ve bu halka $(H, +, \cdot)$ şeklinde gösterilir. Eğer bu şartlara ek olarak

- iv) $\forall x \in H$ için $x1_H = 1_Hx = x$ olacak şekilde $1_H \in H$ elemanı vardır.

Şartı da sağlanıyorsa, H halkasına birimli halka ve bu 1_H elemanına da H 'nin birimi denir. Karışıklık olmaması durumunda 1_H yerine kısaca 1 gösterimi de kullanılır. Eğer bir H halkasında

- v) $\forall x, y \in H$ için $xy = yx$

özelliği sağlanıyorsa H 'ye bir değişmeli halka denir.

Tanım 2.4. (Cisim) H birimli ve değişmeli bir halka olsun. $\forall x \in H, x \neq 0$ için $\exists y \in H, xy = yx = 1$ olması sağlanıyorsa, yani birimli ve değişmeli bir H halkasının sıfırdan farklı her elemanının çarpmaya göre bir tersi varsa H 'ye bir cisim denir.

Tanım 2.5. (Modül) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli bir halka ve $(R, +)$ bir değişmeli grup olmak üzere her $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in R$ için

- i) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
- ii) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
- iii) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
- iv) $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

şartlarını sağlayan bir $\cdot : \mathbb{K} \times R \rightarrow R$ dış işlemi verilsin. Bu durumda R 'ye bir sol $\mathbb{K}$ –modül veya kısaca bir $\mathbb{K}$ –modül denir. Eğer burada $\mathbb{K}$ bir cisim ise R 'ye $\mathbb{K}$ üzerinde bir vektör uzayı denir. Benzer şekilde her $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in R$ için

- i) $(x + y) \cdot \alpha = x \cdot \alpha + y \cdot \alpha$
- ii) $x \cdot (\alpha + \beta) = x \cdot \alpha + x \cdot \beta$
- iii) $(x \cdot \beta) \cdot \alpha = x \cdot (\beta\alpha)$
- iv) $x \cdot 1_{\mathbb{K}} = x$

şartlarını sağlayan bir $\cdot : R \times \mathbb{K} \rightarrow R$ dış işlemi varsa R 'ye bir sağ $\mathbb{K}$ –modül denir. Eğer R üzerinde hem bir sol $\mathbb{K}$ –modül, hem de bir sağ $\mathbb{K}$ –modül yapısı varsa ve bu iki yapı her $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in R$ için

$$(\alpha \cdot x) \cdot \beta = \alpha \cdot (x \cdot \beta)$$

olmasını sağlıyorsa R 'ye bir $\mathbb{K}$ –bimodül denir.

Tanım 2.6. Bir R $\mathbb{K}$ –bimodülü üzerinde bir

$$\cdot : R \times R \rightarrow R$$

işleminin verildiğini varsayalım. Eğer bu işlem her $\alpha \in \mathbb{K}$ ve $r, s, t \in R$ için

- i) $(rs)t = r(st)$
- ii) $(r + s)t = rt + st$
- iii) $r(s + t) = rs + rt$
- iv) $\alpha \cdot (rs) = (\alpha \cdot r)s = r(\alpha \cdot s)$
- v) $(rs) \cdot \alpha = r(s \cdot \alpha) = (r \cdot \alpha)s$

olmasını sağlıyorsa $\mathcal{R}$ 'ye bir $\mathbb{K}$ –bicebir denir. Ayrıca $\mathcal{R}$ 'nin bu çarpma işlemine göre bir birim elemanı da varsa, yani bir $1 \in \mathcal{R}$ elemanı her $r \in \mathcal{R}$ için $1r = r1 = r$ olmasını sağlıyorsa $\mathcal{R}$ 'ye birimli $\mathbb{K}$ –bicebir; eğer $\mathcal{R}$ çarpmaya göre değişmeliyse, yani her $r, s \in \mathcal{R}$ için $rs = sr$ oluyorsa $\mathcal{R}$ 'ye değişmeli $\mathbb{K}$ –bicebir denir. $\mathcal{R}$ aynı anda hem birimli hem de değişmeli ise $\mathcal{R}$ 'ye birimli ve değişmeli $\mathbb{K}$ –bicebir denir.

Bu çalışma boyunca “bicebir” yerine kısaca “cebiri” sözcüğü kullanılacaktır. Ayrıca $\mathcal{R}$ birimli bir $\mathbb{K}$ –cebiri ise, $\mathcal{R}$ 'ye bir birimli halka gözüyle bakılarak bir $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde bir $\mathcal{R}$ –cebiri yapısı tanımlanabilir.

Tanım 2.7. $\mathcal{R}$ bir $\mathbb{K}$ –cebiri ve $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ olmak üzere, eğer her $s, s' \in \mathcal{S}$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ için

- i) $s - s' \in \mathcal{S}$
- ii) $ss' \in \mathcal{S}$
- iii) $\alpha \cdot s \in \mathcal{S}$
- iv) $s \cdot \alpha \in \mathcal{S}$

oluyorsa $\mathcal{S}$ 'ye $\mathcal{R}$ 'nin bir alt cebiri denir ve bu durum $\mathcal{S} \leq \mathcal{R}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.8. $\mathcal{R}$ bir $\mathbb{K}$ –cebiri ve I, R 'nin bir alt cebiri olsun. Eğer her $i \in I$ ve $r \in \mathcal{R}$ için

- (i) $ri \in I$
- (ii) $ir \in I$

oluyorsa I 'ya $\mathcal{R}$ 'nin bir iki yönlü ideali denir. Bu durum $I \trianglelefteq \mathcal{R}$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.9. $\mathcal{R}$ bir $\mathbb{K}$ –cebiri olsun.

- a) $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ $\mathcal{R}$ 'nin alt cebirlerinin bir ailesi ise $\bigcap_{\lambda} I_\lambda \leq \mathcal{R}$ 'dir.
- b) $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ $\mathcal{R}$ 'nin ideallerinin bir ailesi ise $\bigcap_{\lambda} I_\lambda \trianglelefteq \mathcal{R}$ 'dir.

Tanım 2.10. $\mathcal{R}$ bir $\mathbb{K}$ –cebiri $I, I' \subseteq \mathcal{R}$ olmak üzere $I + I'$ kümesi,

$$I + I' = \{a + b \mid a \in I, b \in I'\}$$

ile tanımlanır. Ayrıca, $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\mathcal{R}$ 'nin alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere $\sum_{\lambda} I_\lambda$ kümesi

$$\sum_{\lambda} I_\lambda = \{a_{\lambda_1} + \dots + a_{\lambda_n} \mid a_{\lambda_1} \in I_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_n} \in I_{\lambda_n}, \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \Lambda\}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.11. $\mathcal{R}$ bir $\mathbb{K}$ –cebiri olsun.

- a) $I \trianglelefteq \mathcal{R}$ ve $\mathcal{S} \leq \mathcal{R}$ ise, $I + \mathcal{S} \leq \mathcal{R}$ 'dir.
- b) $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ $\mathcal{R}$ 'nin ideallerinin bir ailesi ise $\sum_\lambda I_\lambda \trianglelefteq \mathcal{R}$ 'dir.

Tanım 2.12. $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}'$ birer $\mathbb{K}$ –cebiri olmak üzere eğer bir $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ fonksiyonu her $r, s \in \mathcal{R}$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için

- (i) $\varphi(r + s) = \varphi(r) + \varphi(s)$
- (ii) $\varphi(rs) = \varphi(r)\varphi(s)$
- (iii) $\varphi(\alpha \cdot r) = \alpha \cdot \varphi(r)$
- (iv) $\varphi(r \cdot \alpha) = \varphi(r) \cdot \alpha$

olmasını sağlıyorsa φ 'ye bir $\mathbb{K}$ –cebiri homomorfizmi denir. Eğer φ ayrıca birebir ve örten ise, bu durumda φ 'ye bir $\mathbb{K}$ –cebiri izomorfizmi denir.

Tanım 2.13. $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}'$ birer $\mathbb{K}$ –cebiri ve $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ bir $\mathbb{K}$ –cebiri homomorfizmi olmak üzere

$$\text{çek } \varphi = \{r \in \mathcal{R} \mid \varphi(r) = 0\}$$

kümesine φ 'nin çekirdeği,

$$\text{gör } \varphi = \{\varphi(r) \mid r \in \mathcal{R}\}$$

kümesine φ 'nin görüntüsü denir.

Önerme 2.14. $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}'$ birer $\mathbb{K}$ –cebiri ve $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ bir $\mathbb{K}$ –cebiri homomorfizmi olmak üzere çek $\varphi \trianglelefteq \mathcal{R}$ ve gör $\varphi \leq \mathcal{R}'$ olur.

Tanım 2.15. $\mathcal{R}$ bir $\mathbb{K}$ –cebiri ve $I \trianglelefteq \mathcal{R}$ olmak üzere her bir $r \in \mathcal{R}$ için

$$r + I = \{r + i \mid i \in I\}$$

kümesine I 'nin bir yan sınıfı denir. I 'nin bütün yan sınıflarının kümesi $\mathcal{R}/I$ ile gösterilir.

Önerme 2.16. $\mathcal{R}$ bir $\mathbb{K}$ –cebiri, $I \trianglelefteq \mathcal{R}$ ve $r + I, r' + I \in \mathcal{R}/I$ olmak üzere, $r + I = r' + I$ olması için gerek ve yeter şart $r - r' \in I$ olmasıdır.

Önerme 2.17. $\mathcal{R}$ bir $\mathbb{K}$ –cebiri ve $I \trianglelefteq \mathcal{R}$ olmak üzere her $r + I, r' + I \in \mathcal{R}/I$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için

$$(r + I) + (r' + I) = r + r' + I$$

$$(\mathcal{r} + I)(\mathcal{r}' + I) = \mathcal{r}\mathcal{r}' + I$$

$$\alpha \cdot (\mathcal{r} + I) = \alpha \cdot \mathcal{r} + I$$

$$(\mathcal{r} + I) \cdot \alpha = \mathcal{r} \cdot \alpha + I$$

işlemleri ile birlikte $\mathcal{R}/I$ bir $\mathbb{K}$ -cebirdir. Ayrıca her $\mathcal{r} \in \mathcal{R}$ için $q(\mathcal{r}) = \mathcal{r} + I$ ile tanımlanan $q : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/I$ dönüşümü bir $\mathbb{K}$ -cebir homomorfizmidir.

Tanım 2.18. $\mathcal{R}$ bir $\mathbb{K}$ -cebir ve $I \trianglelefteq \mathcal{R}$ olmak üzere $\mathcal{R}/I$ 'ya bölüm cebiri ve $q(\mathcal{r}) = \mathcal{r} + I$ ile tanımlı $q : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/I$ homomorfizmine kanonik homomorfizm denir.

Teorem 2.19. (Cebirler için 1. İzomorfizm Teoremi)

$\mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}'$ birer $\mathbb{K}$ -cebir ve $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ bir $\mathbb{K}$ -cebir homomorfizmi ise

$$\mathcal{R}/\ker \varphi \cong \text{gör } \varphi$$

olur.

İspat: $\phi : \mathcal{R}/\ker \varphi \rightarrow \text{gör } \varphi$ dönüşümünü her $\mathcal{r} + \ker \varphi \in \mathcal{R}/\ker \varphi$ için

$$\phi(\mathcal{r} + \ker \varphi) = \varphi(\mathcal{r})$$

olarak tanımlayalım.

İyi Tanımlılık: Her $\mathcal{r}_1 + \ker \varphi, \mathcal{r}_2 + \ker \varphi \in \mathcal{R}/\ker \varphi$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{r}_1 + \ker \varphi = \mathcal{r}_2 + \ker \varphi &\Rightarrow \mathcal{r}_1 - \mathcal{r}_2 \in \ker \varphi \\ &\Rightarrow \varphi(\mathcal{r}_1 - \mathcal{r}_2) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi(\mathcal{r}_1) - \varphi(\mathcal{r}_2) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi(\mathcal{r}_1) = \varphi(\mathcal{r}_2) \\ &\Rightarrow \phi(\mathcal{r}_1 + \ker \varphi) = \phi(\mathcal{r}_2 + \ker \varphi) \end{aligned}$$

Birebirlik: Her $\mathcal{r}_1 + \ker \varphi, \mathcal{r}_2 + \ker \varphi \in \mathcal{R}/\ker \varphi$ için

$$\begin{aligned} \phi(\mathcal{r}_1 + \ker \varphi) = \phi(\mathcal{r}_2 + \ker \varphi) &\Rightarrow \varphi(\mathcal{r}_1) = \varphi(\mathcal{r}_2) \\ &\Rightarrow \varphi(\mathcal{r}_1) - \varphi(\mathcal{r}_2) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi(\mathcal{r}_1 - \mathcal{r}_2) = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{r}_1 - \mathcal{r}_2 \in \ker \varphi \\ &\Rightarrow \mathcal{r}_1 + \ker \varphi = \mathcal{r}_2 + \ker \varphi \end{aligned}$$

Örtenlik: $\mathcal{r}' \in \text{gör } \varphi$ olsun.

$$\varphi(\mathcal{r}) = \mathcal{r}'$$

olacak şekilde $r \in \mathcal{R}$ vardır.

$$r + \ker \varphi \in \mathcal{R}/\ker \varphi$$

elemanını ele alırsak

$$\phi(r + \ker \varphi) = \varphi(r) = r'$$

olur.

Homomorfizm: Her $r_1 + \ker \varphi, r_2 + \ker \varphi \in \mathcal{R}/\ker \varphi$ için

$$\begin{aligned} \phi(r_1 + \ker \varphi + r_2 + \ker \varphi) &= \phi(r_1 + r_2 + \ker \varphi) \\ &= \varphi(r_1 + r_2) \\ &= \varphi(r_1) + \varphi(r_2) \\ &= \phi(r_1 + \ker \varphi) + \phi(r_2 + \ker \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi((r_1 + \ker \varphi)(r_2 + \ker \varphi)) &= \phi(r_1 r_2 + \ker \varphi) \\ &= \varphi(r_1 r_2) \\ &= \varphi(r_1) \varphi(r_2) \\ &= \phi(r_1 + \ker \varphi) \phi(r_2 + \ker \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(\alpha \cdot (r + \ker \varphi)) &= \phi(\alpha \cdot r + \ker \varphi) \\ &= \varphi(\alpha \cdot r) \\ &= \alpha \cdot \varphi(r) \\ &= \alpha \cdot \phi(r + \ker \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi((r + \ker \varphi) \cdot \alpha) &= \phi(r \cdot \alpha + \ker \varphi) \\ &= \varphi(r \cdot \alpha) \\ &= \varphi(r) \cdot \alpha \\ &= \phi(r + \ker \varphi) \cdot \alpha \end{aligned}$$

■

Önerme 2.20. $\mathcal{R}$ bir $\mathbb{K}$ –cebiri, $\mathcal{S} \leq I \trianglelefteq \mathcal{R}$ ve $\mathcal{S} \trianglelefteq \mathcal{R}$ ise, $\mathcal{S} \trianglelefteq I$ ve $I/\mathcal{S} \trianglelefteq \mathcal{R}/\mathcal{S}$ ’dir.

İspat: $i \in I$ ve $s \in \mathcal{S}$ olsun. $\mathcal{S} \trianglelefteq \mathcal{R}$ ve $i \in \mathcal{R}$ olduğu için $si, is \in \mathcal{S}$ olur. Böylece $\mathcal{S} \trianglelefteq I$ ’dir. $I \subseteq \mathcal{R}$ olduğundan $I/\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}/\mathcal{S}$ olur.

$$i_1 + \mathcal{S}, i_2 + \mathcal{S} \in I/\mathcal{S}$$

ise $i_1, i_2 \in I$ olup $i_1 - i_2 \in I$ olmasından

$$(i_1 + \mathcal{S}) - (i_2 + \mathcal{S}) = i_1 - i_2 + \mathcal{S} \in I/\mathcal{S}$$

ve $i \in I$, $r \in \mathcal{R}$ olmak üzere $i + \mathcal{S} \in I/\mathcal{S}$, $r + \mathcal{S} \in \mathcal{R}/\mathcal{S}$ için

$$(i + \mathcal{S})(r + \mathcal{S}) = ir + \mathcal{S}$$

$$(r + \mathcal{S})(i + \mathcal{S}) = ri + \mathcal{S}$$

ve $ir, ri \in I$ olduğundan

$$(i + \mathcal{S})(r + \mathcal{S}) \in I/\mathcal{S}$$

olur. Böylece $I/\mathcal{S} \trianglelefteq \mathcal{R}/\mathcal{S}$ 'dir.

Teorem 2.21. (Cebirler için 2. İzomorfizm Teoremi)

$\mathcal{R}$ bir $\mathbb{K}$ -cebir $\mathcal{S} \leq I \trianglelefteq \mathcal{R}$ ve $\mathcal{S} \trianglelefteq \mathcal{R}$ ise

$$\mathcal{R}/\mathcal{S} / I/\mathcal{S} \cong \mathcal{R}/I$$

olur.

İspat: İlk olarak

$$\varphi: \mathcal{R}/\mathcal{S} / I/\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}/I$$

$$\varphi(r + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}) = r + I$$

fonksiyonu tanımlayalım.

İyi Tanımlılık: $r_1 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}, r_2 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S} \in \mathcal{R}/\mathcal{S} / I/\mathcal{S}$ olmak üzere eğer

$$r_1 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S} = r_2 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}$$

ise, bu durumda

$$(r_1 + \mathcal{S}) - (r_2 + \mathcal{S}) \in I/\mathcal{S}$$

yani

$$r_1 - r_2 + \mathcal{S} \in I/\mathcal{S}$$

olur. Bu nedenle

$$r_1 - r_2 + \mathcal{S} = i + \mathcal{S}$$

olacak şekilde en az bir $i \in I$ vardır. Burada $r_1 - r_2 - i \in \mathcal{S} \subseteq I$ olmasından

$$r_1 - r_2 = (r_1 - r_2 - i) + i \in I \Rightarrow r_1 + I = r_2 + I$$

$$\Rightarrow \varphi(r_1 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}) = \varphi(r_2 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S})$$

elde edilir.

Birebirlik: Her $r_1 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}, r_2 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S} \in \mathcal{R}/\mathcal{S}/I/\mathcal{S}$ için

$$\begin{aligned}\varphi(r_1 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}) &= \varphi(r_2 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}) \Rightarrow r_1 + I = r_2 + I \\ &\Rightarrow r_1 - r_2 \in I \\ &\Rightarrow r_1 - r_2 + \mathcal{S} \in I/\mathcal{S} \\ &\Rightarrow (r_1 + \mathcal{S}) - (r_2 + \mathcal{S}) \in I/\mathcal{S} \\ &\Rightarrow r_1 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S} = r_2 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}\end{aligned}$$

Örtenlik: $r \in \mathcal{R}$ olmak üzere $r + I \in \mathcal{R}/I$ olsun. Bu durumda

$$r + I + I/\mathcal{S} \in \mathcal{R}/\mathcal{S}/I/\mathcal{S}$$

olup $\varphi(r + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}) = r + I$ bulunur.

Homomorfizm: Her $r_1 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}, r_2 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S} \in \mathcal{R}/\mathcal{S}/I/\mathcal{S}$ için

$$\begin{aligned}\varphi(r_1 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S} + r_2 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}) &= \varphi(r_1 + r_2 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}) \\ &= r_1 + r_2 + I \\ &= r_1 + I + r_2 + I \\ &= \varphi(r_1 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}) + \varphi(r_2 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi((r_1 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S})(r_2 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S})) &= \varphi(r_1 r_2 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}) \\ &= r_1 r_2 + I \\ &= (r_1 + I)(r_2 + I) \\ &= \varphi(r_1 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}) \varphi(r_2 + \mathcal{S} + I/\mathcal{S})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha \cdot (r + \mathcal{S} + I/\mathcal{S})) &= \varphi(\alpha \cdot r + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}) \\ &= \alpha \cdot r + I \\ &= \alpha \cdot (r + I) \\ &= \alpha \cdot \varphi(r + \mathcal{S} + I/\mathcal{S})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi((r + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}) \cdot \alpha) &= \varphi(r \cdot \alpha + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}) \\ &= r \cdot \alpha + I \\ &= (r + I) \cdot \alpha \\ &= \varphi(r + \mathcal{S} + I/\mathcal{S}) \cdot \alpha\end{aligned}$$

Teorem 2.22. (Cebirler İçin 3. İzomorfizm Teoremi)

$I \trianglelefteq \mathcal{R}, \mathcal{S} \leq \mathcal{R}$ ise

$$\mathcal{S}/I \cap \mathcal{S} \cong I + \mathcal{S}/I$$

İspat: İlk olarak

$$\varphi: \mathcal{S}/I \cap \mathcal{S} \rightarrow I + \mathcal{S}/I$$

$$\varphi(s + I \cap \mathcal{S}) = s + I$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

İyi Tanımlılık: $s_1 + I \cap \mathcal{S} = s_2 + I \cap \mathcal{S} \in \mathcal{S}/I \cap \mathcal{S}$

$$s_1 + I \cap \mathcal{S} = s_2 + I \cap \mathcal{S}$$

olsun. Bu durumda

$$s_1 - s_2 \in I \cap \mathcal{S}$$

olup

$$s_1 - s_2 \in I$$

'dır. Buradan,

$$s_1 + I = s_2 + I$$

olup

$$\varphi(s_1 + I \cap \mathcal{S}) = \varphi(s_2 + I \cap \mathcal{S})$$

elde edilir.

Birebirlik: Her $s_1 + I \cap \mathcal{S} = s_2 + I \cap \mathcal{S} \in \mathcal{S}/I \cap \mathcal{S}$ için

$$\begin{aligned} \varphi(s_1 + I \cap \mathcal{S}) &= \varphi(s_2 + I \cap \mathcal{S}) \Rightarrow s_1 + I = s_2 + I \\ &\Rightarrow s_1 - s_2 \in I \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ olduğundan $s_1 - s_2 \in \mathcal{S}$ olur. Dolayısıyla $s_1 - s_2 \in I \cap \mathcal{S}$ olup

$$s_1 + I \cap \mathcal{S} = s_2 + I \cap \mathcal{S}$$

Örtenlik: $i \in I, s \in \mathcal{S}$ olmak üzere, $i + s + I \in I + \mathcal{S}/I$ olsun. $i \in I$ olduğundan,

$$i + s + I = i + I + s + I = I + s + I = s + I$$

ve böylece $s + I \cap \mathcal{S} \in \mathcal{S}/I \cap \mathcal{S}$ için

$$\varphi(s + I \cap \mathcal{S}) = s + I = i + s + I$$

olur.

Homomorfizm: Her $s_1 + I \cap \mathcal{S} = s_2 + I \cap \mathcal{S} \in \mathcal{S}/I \cap \mathcal{S}$ için

$$\varphi(s_1 + I \cap \mathcal{S} + s_2 + I \cap \mathcal{S}) = \varphi(s_1 + s_2 + I \cap \mathcal{S})$$

$$\begin{aligned}
&= s_1 + s_2 + I \\
&= s_1 + I + s_2 + I \\
&= \varphi(s_1 + I \cap \mathcal{S}) + \varphi(s_2 + I \cap \mathcal{S}) \\
\varphi((s_1 + I \cap \mathcal{S})(s_2 + I \cap \mathcal{S})) &= \varphi(s_1 s_2 + I \cap \mathcal{S}) \\
&= s_1 s_2 + I \\
&= (s_1 + I)(s_2 + I) \\
&= \varphi(s_1 + I \cap \mathcal{J}) \varphi(s_2 + I \cap \mathcal{J}) \\
\varphi(\alpha \cdot (s + I \cap \mathcal{S})) &= \varphi(\alpha \cdot s + I \cap \mathcal{S}) \\
&= \alpha \cdot s + I \\
&= \alpha \cdot (s + I) \\
&= \alpha \cdot \varphi(s + I \cap \mathcal{J}) \\
\varphi((s + I \cap \mathcal{S}) \cdot \alpha) &= \varphi(s \cdot \alpha + I \cap \mathcal{S}) \\
&= s \cdot \alpha + I \\
&= (s + I) \cdot \alpha \\
&= \varphi(s + I \cap \mathcal{J}) \cdot \alpha
\end{aligned}$$

3. BİRLEŞMELİ CEBİRLERİN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİ

Bu bölümde, birleşmeli cebirlerin çaprazlanmış modülleri ile ilgili tanımlara, teoremlere ve bunlardan bazılarının ispatlarına yer verilmiştir. Bu bölümde açıklanarak derlenen bütün sonuçlar özet hâlinde Nizar Miekha Shammu'nun (Shammu, 1992) eserlerinde bulunabilir. Ayrıca buradaki kavramların değişmeli cebirler için benzerleri Erkan Can'ın (Can, 2021) yüksek lisan tezinde mevcuttur. Burada dikkat edilmelidir ki bu tezdeki ifadelerin değişmeli olması gerekmediğinden burada elde edilecek sonuçlar daha geneldir.

$\mathcal{R}$ bir $\mathbb{K}$ – cebir olsun. Bu durumda $\mathcal{R}$ üzerindeki çarpma ile birlikte $\mathcal{R}$ 'ye aynı zamanda bir $\mathcal{R}$ – cebir gözüyle bakılabilir. Böylece, eğer $\mathcal{G}$ bir $\mathcal{R}$ – cebir ise bir $\delta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{R}$ fonksiyonunun bir $\mathcal{R}$ – cebir homomorfizmi olup olmamasından bahsedilebilir. Böyle bir durumda δ 'ın bir $\mathcal{R}$ – cebir homomorfizmi olması

- i) $\delta(g_1 + g_2) = \delta(g_1) + \delta(g_2)$
- ii) $\delta(g_1 g_2) = \delta(g_1) \delta(g_2)$
- iii) $\delta(r \cdot g) = r \delta(g)$
- iv) $\delta(g \cdot r) = \delta(g) r$

eşitliklerinin her $g, g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, $r \in \mathcal{R}$ için sağlanması anlamına gelmiş olur. Ayrıca; 1, $\mathcal{R}$ 'nin birim elemanını göstermek üzere her $\alpha \in \mathbb{K}$ için α 'nın g 'ye etkisini $\alpha \cdot g := (\alpha \cdot 1) \cdot g$ ve $g \cdot \alpha := g(1 \cdot \alpha)$ olarak tanımlamamız durumunda $\mathcal{G}$ 'ye de bir $\mathbb{K}$ – cebir olarak bakılabilir. Bu durumda da, $\delta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{R}$ fonksiyonunun bir $\mathbb{K}$ – cebir homomorfizmi olması

- (i) $\delta(g_1 + g_2) = \delta(g_1) + \delta(g_2)$
- (ii) $\delta(g_1 g_2) = \delta(g_1) \delta(g_2)$
- (iii) $\delta(\alpha \cdot g) = \alpha \cdot \delta(g)$
- (iv) $\delta(g \cdot \alpha) = \delta(g) \cdot \alpha$

eşitliklerinin her $g, g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ için sağlanması anlamına gelir.

Tanım 3.1. $\mathcal{R}$ bir $\mathbb{K}$ – cebir, $\mathcal{G}$ bir $\mathcal{R}$ – cebir ve $\delta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{R}$ bir $\mathbb{K}$ – cebir homomorfizmi olsun. Her $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, $r \in \mathcal{R}$ için

$$\text{LCM1) } \delta(r \cdot g) = r \delta(g)$$

$$\text{RCM1) } \delta(g \cdot r) = \delta(g) r$$

$$\text{LCM2) } \delta(g_1) \cdot g_2 = g_1 g_2$$

$$\text{RCM2) } g_1 \cdot \delta(g_2) = g_1 g_2$$

şartlarını sağlıyorsa $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ üçlüsüne $\mathbb{K}$ – cebirlerin bir çaprazlanmış modülü denir.

Tanım 3.2. $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ ve $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \delta')$ $\mathbb{K}$ – cebirlerin çaprazlanmış modülleri olsunlar. Eğer

- (i) $\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ ve $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ birer $\mathbb{K}$ – cebir homomorfizmi
- (ii) $\psi(r \cdot g) = \phi(r) \cdot \psi(g)$
- (iii) $\psi(g \cdot r) = \psi(g) \cdot \phi(r)$
- (iv) $\delta' \psi = \phi \delta$

ise, yani

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{G}' \\
 \delta \downarrow & & \downarrow \delta' \\
 \mathcal{R} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{R}'
 \end{array}$$

diyagramı değişimli ise, $(\psi, \phi) : (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta) \rightarrow (\mathcal{G}', \mathcal{R}', \delta')$ yazılır ve burada (ψ, ϕ) ikilisine bir $\mathbb{K}$ – cebir çaprazlanmış modül morfizmi denir.

Önerme 3.3. $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ $\mathbb{K}$ – cebirlerin bir çaprazlanmış modülü ise $\text{gör}\delta$, $\mathcal{R}$ 'nin bir idealidir.

İspat: $i_1, i_2 \in \text{gör}\delta$ olsun. Bu durumda $i_1 = \delta g_1, i_2 = \delta g_2$ olacak şekilde $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ vardır. Buradan $i_1 - i_2 = \delta g_1 - \delta g_2 = \delta(g_1 - g_2)$, $g_1 - g_2 \in \mathcal{G}$ olup $i_1 - i_2 \in \text{gör}\delta$ elde edilir. $i \in \text{gör}\delta$ ve $r \in \mathcal{R}$ olsun. $\delta g = i$ olacak şekilde $g \in \mathcal{G}$ vardır. Ayrıca $ri = r\delta g = \delta(r \cdot g)$, $r \cdot g \in \mathcal{G}$ olduğundan $ri \in \text{gör}\delta$ 'dir. $ir \in \text{gör}\delta$ olduğu da benzer şekilde görülebilir. Dolayısıyla $\text{gör}\delta$, $\mathcal{G}$ 'nin bir idealidir. ■

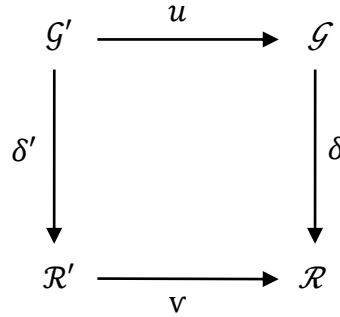
Uyarı 3.4. Herhangi bir δ cebir homomorfizminin çekirdeği ideal olmayı her zaman sağlamadığından, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ cebirlerin bir çaprazlanmış modülü ise $\text{çek}\delta$, $\mathcal{G}$ 'nin bir idealidir. Yukarıdaki önerme ise $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ 'ın çaprazlanmış modül olması durumunda δ 'ın görüntüsünün de $\mathcal{R}$ 'nin ideali olduğunu ifade etmektedir. Hatırlatalım ki, her zaman alt cebir olduğu bilinen görüntü kümesinin, aynı zamanda bir ideal olması sıradan bir cebir homomorfizmi için normalde sağlanmak zorunda değildir, ancak çaprazlanmış modüllerin sınır homomorfizmleri bu özelliği de sağlamaktadır.

3.1. Alt Çaprazlanmış Modül ve Çaprazlanmış Modüllerin İdeali

Bu bölümde, alt çaprazlanmış modüllerin tanımı, bölüm alt çaprazlanmış modülü ve idealleri ile ilgili bilgilere yer verilmiştir.

Tanım 3.5. $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$, $\mathbb{K}$ –cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olsun. $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ 'ın bir $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \delta')$ alt çaprazlanmış modülü şu şekilde tanımlanır.

- i) $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}$ 'nin alt cebiri ve $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}$ 'nin alt cebiridir.
- ii) $\mathcal{R}'$ 'nün $\mathcal{G}'$ üzerine etkisi, $\mathcal{R}$ 'nin $\mathcal{G}$ üzerine etkisinin kısıtlanmışıdır.
- iii) $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \delta')$ bir çaprazlanmış $\mathcal{R}'$ –modülüdür.
- iv) Çaprazlanmış modüllerin morfizmlerinin



diyagramı, u ve v içermeye dönüşümlerini göstermek üzere değişmelidir.

Tanım 3.6. $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \delta')$, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ 'ın bir alt çaprazlanmış modülü olsun. Eğer aşağıdakiler sağlanıyorsa $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \delta')$ 'ye $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ 'ın bir ideali denir.

- i) $\mathcal{G}\mathcal{G}' \cup \mathcal{G}'\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}'$ ve $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}$ 'nin idealidir.
- ii) $\mathcal{G} \cdot \mathcal{R}' \cup \mathcal{R}' \cdot \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}'$
- iii) $\mathcal{G}', \mathcal{R}'$ 'nin etkisi altında kapalıdır, yani $\mathcal{R} \cdot \mathcal{G}', \mathcal{G}' \cdot \mathcal{R} \subseteq \mathcal{G}'$

Örnek 3.7. $(\mathcal{R}, \mathcal{R}, I_{\mathcal{R}})$ çaprazlanmış modülünü ele alalım. I , $\mathcal{R}$ 'nin ideali ve J , $\mathcal{R}$ 'nin alt halkası, $I \subseteq J$ olmak üzere (I, J, ι) , $(\mathcal{R}, \mathcal{R}, I_{\mathcal{R}})$ 'nin bir alt çaprazlanmış modülüdür.

Gerçekten, I , $\mathcal{R}$ 'nin ideali olduğu için alt cebiri ve J , $\mathcal{R}$ 'nin alt halkası olmak üzere; I ideal, $J \subseteq \mathcal{R}$ olduğu için J , I 'ya $\mathcal{R}$ üzerinde aynı etkiyi yapar, aynı nedenle (I, J, ι) bir çaprazlanmış modüldür ve açık olarak

$$\begin{array}{ccc}
I & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{R} \\
\downarrow \iota & & \downarrow I_{\mathcal{R}} \\
J & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{R}
\end{array}$$

değişmelidir.

Örnek 3.8. $I, \mathcal{R}$ halkasının bir ideali ise, $(I, I, I_I), (\mathcal{R}, \mathcal{R}, I_{\mathcal{R}})$ 'nin bir idealidir.

Gerçekten, bir önceki örnekte J yerine I alırsak $(I, I, I_I), (\mathcal{R}, \mathcal{R}, I_{\mathcal{R}})$ 'nin bir alt çaprazlanmış modüldür. $II \cup II = II$ olup $\mathcal{R}$ 'nin bir idealidir. $I\mathcal{R} \cup \mathcal{R}I = I \cup I = I \subseteq I$ olur. ve $\mathcal{R}I = I\mathcal{R} = I \subseteq I$ olması sağlanır.

Örnek 3.9. I ve $J, \mathcal{R}$ 'nin idealleri olsun. Bu durumda, $(I \cap J, I, \iota), (J, \mathcal{R}, \iota)$ 'nin ideali ve $(I \cap J, J, \iota), (I, \mathcal{R}, \iota)$ 'nin idealidir.

Gerçekten, $I \cap J, J$ 'nin ideali olduğundan alt cebirdir, $I, \mathcal{R}$ 'nin ideali olduğu için alt halkasıdır. $I, I \cap J$ üzerine, $\mathcal{R}$ 'nin J üzerine yaptığı etki gibi etki eder. $(I \cap J, I, \iota)$ üçlüsü, $I \cap J, I$ 'nin ideali olduğu için bir çaprazlanmış modüldür ve

$$\begin{array}{ccc}
I \cap J & \xrightarrow{\iota} & J \\
\downarrow \iota & & \downarrow \iota \\
I & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{R}
\end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

Böylece $(I \cap J, I, \iota), (J, \mathcal{R}, \iota)$ 'nin bir alt çaprazlanmış modülü olur. Bunun yanında ayrıca $(I \cap J)J \cup J(I \cap J) \subseteq I \cap J$ 'dir. $I, \mathcal{R}$ 'nin idealidir, hem I hem J $\mathcal{R}$ 'nin ideali olduklarından $JI \cup IJ \subseteq I, JI \cup IJ \subseteq J$ olur. Buradan $JI \cup IJ \subseteq I \cap J$ olur. $I \cap J$ de $\mathcal{R}$ 'nin ideali olacağından $\mathcal{R}(I \cap J), (I \cap J)\mathcal{R} \subseteq I \cap J$ 'dir. Böylece $(I \cap J, I, \iota), (J, \mathcal{R}, \iota)$ 'nin idealidir.

$(I \cap J, J, \iota) \leq (I, \mathcal{R}, \iota)$ olduğundan $(I \cap J)I \cup I(I \cap J) \subseteq I \cap J$ olup J de $\mathcal{R}$ 'nin idealidir. Hem I hem de J $\mathcal{R}$ 'nin ideali olduklarından $JI \cup I \subseteq I$, $JI \cup IJ \subseteq J$ olur. Böylece $JI \cup IJ \subseteq I \cap J$ elde edilir. $I \cap J$, $\mathcal{R}$ 'nin ideali olacağından $\mathcal{R}(I \cap J), (I \cap J)\mathcal{R} \subseteq I \cap J$ 'dir. Böylece $(I \cap J, J, \iota), (I, \mathcal{R}, \iota)$ 'nin idealidir.

Önerme 3.10. i) $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modüllerinin herhangi bir $\{(I_\lambda, J_\lambda, \delta_\lambda)\}$ ailesinin kesişimi de bir alt çaprazlanmış modülüdür.

ii) $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ çaprazlanmış modülünün ideallerinin herhangi bir $\{(I_\lambda, J_\lambda, \mathcal{R}_\lambda)\}$ ailesinin kesişimi de bir idealdir.

İspat: i) Her i için I_λ , $\mathcal{G}$ 'nin alt cebiri olduğundan $\cap I_\lambda$ de $\mathcal{G}$ 'nin alt cebiridir. J_λ 'ler $\mathcal{R}$ 'nin alt cebiri olduğundan $\cap J_\lambda$ de $\mathcal{R}$ 'nin alt cebiridir. $J \cap J_\lambda, J \in \cap I_\lambda$ olsun. Bu durumda her i için $j \in J_\lambda$ ve $J \in I_\lambda$ olduğundan $j \cdot J \in I_\lambda$ olur ki, buradan $j \cdot J \in \cap I_\lambda$ bulunur. Her bir $(I_\lambda, J_\lambda, \delta_\lambda)$ bir çaprazlanmış modül olduğundan

$$\text{CM1)} \quad \text{Her } J \in \cap I_\lambda, j \in \cap J_\lambda \text{ için } \delta(j \cdot J) = j\delta J$$

$$\text{CM2)} \quad \text{Her } J_1, J_2 \in \cap I_\lambda \text{ için } \delta(J_1) \cdot J_2 = J_1 J_2$$

olduğu etkinin ve sınır dönüşümünün $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ 'daki etki ve sınır dönüşümünün kısıtlamaları olmasından görülür. Ayrıca, açık olarak

$$\begin{array}{ccc} \bigcap I_i & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{G} \\ \delta| \downarrow & & \downarrow \delta \\ \bigcap J_i & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{R} \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

ii) $(\cap I_\lambda, \cap J_\lambda, \delta_\lambda)$ 'nin alt çaprazlanmış modülü olduğu ilk kısımdan görülmektedir. $\cap(I_\lambda \mathcal{G}) = (\cap I_\lambda)\mathcal{G}$ ve $\cap(\mathcal{G}I_\lambda) = \mathcal{G}(\cap I_\lambda)$ olduğuna dikkat edilirse her i için $I_\lambda \mathcal{G} \subseteq I_\lambda$ ve $\mathcal{G}I_\lambda \subseteq I_\lambda$ olmasından, $(\cap I_\lambda)\mathcal{G} \cup \mathcal{G}(\cap I_\lambda) \subseteq \cap I_\lambda$ olur. Her bir J_λ , $\mathcal{R}$ 'nin ideali olduğundan $\cap J_\lambda$ de $\mathcal{R}$ 'nin bir idealidir.

Yine her i için, $\mathcal{G}J_\lambda \subseteq I_\lambda$ ve $J_\lambda \mathcal{G} \subseteq I_\lambda$ olduğundan, her iki tarafta kesişiminin alınmasıyla $\cap(\mathcal{G}J_\lambda) \cup \cap(J_\lambda \mathcal{G}) \subseteq \cap I_\lambda$ ve dolayısıyla, $\mathcal{G}(\cap J_\lambda) \cup (\cap J_\lambda)\mathcal{G} \subseteq \cap I_\lambda$ elde edilir.

$\mathcal{R}(\cap I_\lambda) \subseteq \cap I_\lambda$ ve $(\cap I_\lambda)\mathcal{R} \subseteq \cap I_\lambda$ olduğu benzer şekilde görülür. ■

Uyarı 3.11. Yukarıdaki önermede varlığı gösterilen $(\cap I_\lambda, \cap J_\lambda, \delta_\lambda)$ alt çaprazlanmış modülü veya ideali, $\cap(I_\lambda, J_\lambda, \delta_\lambda)$ şeklinde de gösterilir.

Teorem 3.12. $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olsun.

- i) $(I, J, \delta) \trianglelefteq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ ve $(\mathcal{B}, \mathcal{Q}, \delta) \leq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ ise $(I + \mathcal{B}, J + \mathcal{Q}, \delta) \leq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ olur.
- ii) $\{(I_\lambda, J_\lambda, \delta)_{\lambda \in \Lambda}, (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)\}$ 'in ideallerinin ailesi ise, $(\sum_\lambda I_\lambda, \sum_\lambda J_\lambda, \delta) \trianglelefteq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ olur.

İspat: i) Önerme 2.11(a) gereği, $I \trianglelefteq \mathcal{G}$ ve $\mathcal{B} \leq \mathcal{G}$ olduğundan $I + \mathcal{B} \leq \mathcal{G}$, $J \trianglelefteq \mathcal{R}$ ve $\mathcal{Q} \leq \mathcal{R}$ olduğundan $J + \mathcal{Q} \leq \mathcal{R}$ olur. Ayrıca eğer $j + q \in J + \mathcal{Q}$ ve $i + b \in I + \mathcal{B}$ ise bu durumda $(j + q) \cdot (i + b) = (j \cdot i + j \cdot b + q \cdot i) + q \cdot b \in I + \mathcal{B}$ olması sağlanır.

ii) Önerme 2.11(b) gereğince, $\sum_\lambda I_\lambda \trianglelefteq \mathcal{G}$ ve $\sum_\lambda J_\lambda \trianglelefteq \mathcal{R}$ 'dir. $\sum_\lambda j_\lambda \in \sum_\lambda J_\lambda$ ve $g \in \mathcal{G}$ olsun. $g \cdot \sum_\lambda j_\lambda = \sum_\lambda g \cdot j_\lambda$ ve her λ için $(I_\lambda, J_\lambda, \delta) \trianglelefteq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ olduğundan $g \cdot j_\lambda \in I_\lambda$ olup, $g \cdot \sum_\lambda j_\lambda \in \sum_\lambda I_\lambda$ olur. Benzer şekilde $r \in \mathcal{R}$ ve $\sum_\lambda i_\lambda \in \sum_\lambda I_\lambda$ için $r \cdot \sum_\lambda i_\lambda = \sum_\lambda r \cdot i_\lambda \in \sum_\lambda I_\lambda$ olur. ■

Önerme 3.13. $(\psi, \phi) : (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta) \rightarrow (\mathcal{D}, \mathcal{S}, \partial)$ bir çaprazlanmış modül homomorfizmi olmak üzere $(\text{çek}\psi, \text{çek}\phi, \delta) \trianglelefteq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ olur.

İspat: $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{D}$, $\mathcal{R}$ -cebir homomorfizmi, $\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$, $\mathbb{K}$ -cebir homomorfizmi olduğundan $\text{çek}\psi \trianglelefteq \mathcal{G}$, $\text{çek}\phi \trianglelefteq \mathcal{R}$ olur. Ayrıca (ψ, ϕ) , çaprazlanmış modül homomorfizmi olduğundan $g \in \text{çek}\psi$ ve $r \in \mathcal{R}$ ise bu durumda $\psi(r \cdot g) = \phi(r) \cdot \psi(g) = \psi(r) \cdot 0 = 0$ olup $r \cdot g \in \text{çek}\psi$ 'dir. $g \in \mathcal{G}$, $r \in \text{çek}\phi$ ise $\psi(r \cdot g) = \phi(r) \cdot \psi(g) = 0 \cdot \psi(g) = 0$ olup $r \cdot g \in \text{çek}\psi$ 'dir. Son olarak, ayrıca $g \in \text{çek}\psi$ ise $\phi(\delta g) = \partial(\psi g) = \partial 0 = 0$ olduğundan $\delta g \in \text{çek}\phi$ 'dir.

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{çek}\psi & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\quad \psi \quad} & \mathcal{D} \\
 \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \partial \\
 \text{çek}\phi & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{R} & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & \mathcal{S}
 \end{array}$$

Önerme 3.14. $(\psi, \phi) : (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta) \rightarrow (\mathcal{D}, \mathcal{S}, \partial)$ bir çaprazlanmış modül homomorfizmi olmak üzere $(\text{gör}\psi, \text{gör}\phi, \partial) \leq (\mathcal{D}, \mathcal{S}, \partial)$ 'dır.

İspat: $d \in \text{gör}\psi$, $s \in \text{gör}\phi$ olsun. $g \in \mathcal{G}$, $r \in \mathcal{R}$ olmak üzere $d = \psi(g)$, $s = \phi(r)$ diyelim. $s \cdot d = \phi(r) \cdot \psi(g) = \psi(r \cdot g)$ olduğundan $s \cdot d \in \text{gör}\psi$ 'dir. Ayrıca $d = \psi(g)$ olmak üzere $d \in \text{gör}\psi$ ise $\partial(d) = \partial\psi(g) = \phi(\delta g)$ olup $\partial(d) \in \text{gör}\phi$ elde edilir.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{G} & \xrightarrow{\psi} & \text{gör}\psi & \hookrightarrow & \mathcal{D} \\
 \delta \downarrow & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 \mathcal{R} & \xrightarrow{\phi} & \text{gör}\phi & \hookrightarrow & \mathcal{S}
 \end{array}$$

3.2. Birleşmeli Cebirlerin Bölüm Çaprazlanmış Modülü

$(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ cebirlerin bir çaprazlanmış modülü ve $(I, J, \delta) \trianglelefteq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ olsun. $\mathcal{G}/I$ ve $\mathcal{R}/J$ bölüm cebirlerini göz önüne alalım. Bu durumda, $\mathcal{R}/J$ üzerine soldan $r \cdot (g + I) = r \cdot g + I$ şeklinde, sağdan $(g + I) \cdot r = g \cdot r + I$ şeklinde etki eder.

Aynı şekilde $j \in J$ ise $j \cdot (g + I) = j \cdot g + I$ ve $(g + I) \cdot j = g \cdot j + I$ şeklinde etkilerden bahsedebiliriz. Ancak burada $(I, J, \delta) \trianglelefteq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ olduğundan $j \cdot g, g \cdot j \in I$ olup $j \cdot g + I = g \cdot j + I = I$ 'dir. Böylece her $j \in J$ için $j \cdot (g + I) = (g + I) \cdot j = I$ olup J , $\mathcal{G}/I$ üzerine aşık bir etki yapar. $\mathcal{R}/J$ 'nin $\mathcal{G}/I$ 'ya sol etkisine $(r + J) \cdot (g + I) = r \cdot g + I$ ile tanımlayalım. Bu etki iyi tanımlıdır, çünkü $r + J = r' + J$ ve $g + I = g' + I$ ise $r - r' \in J$ ve $g - g' \in I$ 'dir.

$(I, J, \delta) \trianglelefteq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ olduğundan $g \in \mathcal{G}$, $r - r' \in J \Rightarrow (r - r') \cdot g \in I$ ve $g - g' \in I$, $r' \in J \Rightarrow r' \cdot (g - g') \in I$ olup

$$(r - r') \cdot g + r' \cdot (g - g') = r \cdot g - r' \cdot g + r' \cdot g - r' \cdot g' = r \cdot g - r' \cdot g' \in I$$

elde edilir. Böylece, $r \cdot g + I = r' \cdot g' + I$ 'dir. Sağ etki de benzer şekilde tanımlanarak, $g \cdot r + I = g' \cdot r' + I$ olduğu da gösterilebilir.

$\bar{\delta} : \mathcal{G}/I \rightarrow \mathcal{R}/J$ fonksiyonunu, $\bar{\delta}(\mathcal{g} + I) = \delta\mathcal{g} + J$ ile tanımlayalım. Bu fonksiyon iyi tanımlıdır. Gerçekten, $\mathcal{g} + I = \mathcal{g}' + I$ ise $(\mathcal{g} - \mathcal{g}') \in I$ olur ve ayrıca $\delta(\mathcal{g} - \mathcal{g}') \in J \Rightarrow \delta\mathcal{g} - \delta\mathcal{g}' \in J \Rightarrow \delta\mathcal{g} + J = \delta\mathcal{g}' + J$ 'dir. $\bar{\delta}$ 'nin bir $\mathcal{R}/J$ - cebir homomorfizmi olduğu da açıktır. Böylece $(\mathcal{G}/I, \mathcal{R}/J, \bar{\delta})$ cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olur. Bu çaprazlanmış modül $\frac{(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)}{(I, J, \delta)}$ şeklinde de gösterilir.

3.3. Birleşmeli Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri İçin İzomorfizm Teoremleri

Bu bölümde, cebirlerin çaprazlanmış modülleri için üç izomorfizm teoremi ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 3.15. (1. İzomorfizm Teoremi) $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ ve $(\mathcal{D}, \mathcal{S}, \partial)$ cebirlerin çaprazlanmış modülleri ve $(\psi, \phi) : (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta) \rightarrow (\mathcal{D}, \mathcal{S}, \partial)$ çaprazlanmış modüllerin bir morfizmi olmak üzere $\frac{(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)}{(\text{çek}\psi, \text{çek}\phi, \delta)} \cong (\text{gör}\psi, \text{gör}\phi, \partial)$ 'dir.

İspat: Her $\mathcal{g} + \text{çek}\psi \in \mathcal{G}/\text{çek}\psi$ için $\alpha : \mathcal{G}/\text{çek}\psi \rightarrow \text{gör}\psi$, $\alpha(\mathcal{g} + \text{çek}\psi) = \psi(\mathcal{g})$ ve her $r + \text{çek}\phi \in \mathcal{R}/\text{çek}\phi$ için $\beta : \mathcal{R}/\text{çek}\phi \rightarrow \text{gör}\phi$, $\beta(r + \text{çek}\phi) = \phi(r)$ ile tanımlı fonksiyonların birer cebir izomorfizmi oldukları Teorem 2.19'dan bilinmektedir. Dolayısıyla burada $\frac{(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)}{(\text{çek}\psi, \text{çek}\phi, \delta)} \cong (\text{gör}\psi, \text{gör}\phi, \partial)$ izomorfizminin varlığını göstermek için yalnızca $(\alpha, \beta) : (\mathcal{G}/\text{çek}\psi, \mathcal{R}/\text{çek}\phi, \bar{\delta}) \rightarrow (\text{gör}\psi, \text{gör}\phi, \partial)$ ikilisinin bir çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu göstermek yeterlidir. Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}/\text{çek}\psi & \xrightarrow{\bar{\delta}} & \mathcal{R}/\text{çek}\phi \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \text{gör}\psi & \xrightarrow{\partial} & \text{gör}\phi \end{array}$$

$\mathcal{g} + \text{çek}\psi \in \mathcal{G}/\text{çek}\psi$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\beta(\bar{\delta}(\mathfrak{g} + \text{çek}\psi)) &= \beta(\delta\mathfrak{g} + \text{çek}\phi) \\
&= \phi(\delta\mathfrak{g}) \\
&= \partial(\psi(\mathfrak{g})) \\
&= \partial(\alpha(\mathfrak{g} + \text{çek}\psi))
\end{aligned}$$

olduğundan $\beta\bar{\delta} = \partial\alpha$ olup bu diyagram değişmelidir. Ek olarak, $\mathfrak{r} + \text{çek}\phi \in \mathcal{R}/\text{çek}\phi$ ve $\mathfrak{g} + \text{çek}\psi \in \mathcal{G}/\text{çek}\psi$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\beta(\mathfrak{r} + \text{çek}\phi) \cdot \alpha(\mathfrak{g} + \text{çek}\psi) &= \phi(\mathfrak{r}) \cdot \psi(\mathfrak{g}) \\
&= \psi(\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{g}) \\
&= \alpha(\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{g} + \text{çek}\psi) \\
&= \alpha((\mathfrak{r} + \text{çek}\phi) \cdot (\mathfrak{g} + \text{çek}\psi))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\alpha(\mathfrak{g} + \text{çek}\psi) \cdot \beta(\mathfrak{r} + \text{çek}\phi) &= \psi(\mathfrak{g}) \cdot \phi(\mathfrak{r}) \\
&= \psi(\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{r}) \\
&= \alpha(\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{r} + \text{çek}\psi) \\
&= \alpha((\mathfrak{g} + \text{çek}\psi) \cdot (\mathfrak{r} + \text{çek}\phi))
\end{aligned}$$

olduğundan (α, β) etkileri de korumaktadır ve dolayısıyla bir çaprazlanmış modül izomorfizmidir. ■

Teorem 3.16. (2. İzomorfizm Teoremi) $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olmak üzere eğer $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \delta) \leq (I, J, \delta) \trianglelefteq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ ve $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \delta) \trianglelefteq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ ise bu durumda

$$(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \delta) \trianglelefteq (I, J, \delta) \text{ ve } \frac{\frac{(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)}{(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \delta)}}{\frac{(I, J, \delta)}{(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \delta)}} \cong \frac{(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)}{(I, J, \delta)} \text{ olur.}$$

İspat: İlk olarak $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \delta) \trianglelefteq (I, J, \delta)$ olduğunu gösterelim. $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \delta) \leq (I, J, \delta)$ ve $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \delta) \trianglelefteq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ olduğu verilmiştir. $I \subseteq \mathcal{G}$, $J \subseteq \mathcal{R}$ olduğundan $i \in I$, $j \in J$, $m \in \mathcal{M}$, $n \in \mathcal{N}$ için $j \cdot m$, $i \cdot n \in \mathcal{M}$ olup $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \delta) \trianglelefteq (I, J, \delta)$ bulunur.

Şimdi de izomorfizmin varlığını gösterelim. Her $\mathfrak{g} + \mathcal{M} + I/\mathcal{M} \in \mathcal{G}/\mathcal{M}/I/\mathcal{M}$ için

$$\alpha: \mathcal{G}/\mathcal{M}/I/\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{G}/I, \alpha(\mathfrak{g} + \mathcal{M} + I/\mathcal{M}) = \mathfrak{g} + I \text{ ve her } \mathfrak{r} + \mathcal{N} + J/\mathcal{N} \in \mathcal{R}/\mathcal{N}/J/\mathcal{N}$$

için $\beta : \mathcal{R}/\mathcal{N} / \mathcal{J}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{R}/\mathcal{J}$, $\beta(r + \mathcal{N} + \mathcal{J}/\mathcal{N}) = r + \mathcal{J}$ ile tanımlı fonksiyonların birer cebir izomorfizm olduklarını Teorem 2.21'den bilmekteyiz. Böylece teoremi ispatlamak için sadece $(\alpha, \beta) : \left(\mathcal{G}/\mathcal{M} / \mathcal{I}/\mathcal{M}, \mathcal{R}/\mathcal{N} / \mathcal{J}/\mathcal{N}, \bar{\delta} \right) \rightarrow \left(\mathcal{G}/\mathcal{I}, \mathcal{R}/\mathcal{J}, \bar{\delta} \right)$ ikilisinin bir çaprazlanmış modül homomorfizmi olduğunu göstermek kalır. Aşağıdaki diyagramı dikkate alalım.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}/\mathcal{M} / \mathcal{I}/\mathcal{M} & \xrightarrow{\bar{\delta}} & \mathcal{R}/\mathcal{N} / \mathcal{J}/\mathcal{N} \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
 \mathcal{G}/\mathcal{I} & \xrightarrow{\bar{\delta}} & \mathcal{R}/\mathcal{J}
 \end{array}$$

Her $\mathfrak{g} + \mathcal{M} + \mathcal{I}/\mathcal{M} \in \mathcal{G}/\mathcal{M} / \mathcal{I}/\mathcal{M}$ için;

$$\begin{aligned}
 \beta \bar{\delta}(\mathfrak{g} + \mathcal{M} + \mathcal{I}/\mathcal{M}) &= \beta(\bar{\delta}(\mathfrak{g} + \mathcal{M}) + \mathcal{J}/\mathcal{N}) \\
 &= \beta(\delta \mathfrak{g} + \mathcal{N} + \mathcal{J}/\mathcal{N}) \\
 &= \delta \mathfrak{g} + \mathcal{J} \\
 &= \bar{\delta}(\mathfrak{g} + \mathcal{I}) \\
 &= \bar{\delta} \alpha(\mathfrak{g} + \mathcal{M} + \mathcal{I}/\mathcal{M})
 \end{aligned}$$

olduğundan $\beta \bar{\delta} = \bar{\delta} \alpha$ olup diyagram değişmelidir. Ayrıca her $r + \mathcal{N} + \mathcal{J}/\mathcal{N} \in \mathcal{R}/\mathcal{N} / \mathcal{J}/\mathcal{N}$

ve her $\mathfrak{g} + \mathcal{M} + \mathcal{I}/\mathcal{M} \in \mathcal{G}/\mathcal{M} / \mathcal{I}/\mathcal{M}$ için

$$\begin{aligned}
 \beta(r + \mathcal{N} + \mathcal{J}/\mathcal{N}) \cdot \alpha(\mathfrak{g} + \mathcal{M} + \mathcal{I}/\mathcal{M}) &= (r + \mathcal{J}) \cdot (\mathfrak{g} + \mathcal{I}) \\
 &= r \cdot \mathfrak{g} + \mathcal{I} \\
 &= \alpha(r \cdot \mathfrak{g} + \mathcal{M} + \mathcal{I}/\mathcal{M}) \\
 &= \alpha((r + \mathcal{N}) \cdot (\mathfrak{g} + \mathcal{M}) + \mathcal{I}/\mathcal{M}) \\
 &= \alpha((r + \mathcal{N} + \mathcal{J}/\mathcal{N}) \cdot (\mathfrak{g} + \mathcal{M} + \mathcal{I}/\mathcal{M}))
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \alpha(\mathfrak{g} + \mathcal{M} + I/\mathcal{M}) \cdot \beta(r + \mathcal{N} + \mathcal{J}/\mathcal{N}) = (\mathfrak{g} + I) \cdot (r + \mathcal{J}) \\
& = \mathfrak{g} \cdot r + I \\
& = \alpha(\mathfrak{g} \cdot r + \mathcal{M} + I/\mathcal{M}) \\
& = \alpha((\mathfrak{g} + \mathcal{M}) \cdot (r + \mathcal{N}) + I/\mathcal{M}) \\
& = \alpha((\mathfrak{g} + \mathcal{M} + I/\mathcal{M}) \cdot (r + \mathcal{N} + \mathcal{J}/\mathcal{N}))
\end{aligned}$$

olduğundan (α, β) ikisi etkileri de korumaktadır ve böylece bir çaprazlanmış modül izomorfizmi olur. ■

Teorem 3.17. (3. İzomorfizm Teoremi) $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ cebirlerin bir çaprazlanmış modülü ve $(\mathcal{B}, \mathcal{Q}, \delta) \leq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ ve $(I, \mathcal{J}, \delta) \trianglelefteq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta)$ ise $\frac{(\mathcal{B}, \mathcal{Q}, \delta)}{(\mathcal{B} \cap I, \mathcal{Q} \cap \mathcal{J}, \delta)} \cong \frac{(\mathcal{B} + I, \mathcal{Q} + \mathcal{J}, \delta)}{(I, \mathcal{J}, \delta)}$ olur.

İspat: Teorem 2.22 gereğince, her $\mathfrak{b} + \mathcal{B} \cap I \in \mathcal{B}/\mathcal{B} \cap I$ için $\alpha : \mathcal{B}/\mathcal{B} \cap I \rightarrow \mathcal{B} + I/I$, $\alpha(\mathfrak{b} + \mathcal{B} \cap I) = \mathfrak{b} + I$ ile ve her $\mathfrak{q} + \mathcal{Q} \cap \mathcal{J} \in \mathcal{Q}/\mathcal{Q} \cap \mathcal{J}$ için $\beta : \mathcal{Q}/\mathcal{Q} \cap \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{Q} + \mathcal{J}/\mathcal{J}$, $\beta(\mathfrak{q} + \mathcal{Q} \cap \mathcal{J}) = \mathfrak{q} + \mathcal{J}$ ile tanımlı fonksiyonların izomorfizm olduklarını biliyoruz. Geriye sadece $(\alpha, \beta) : (\mathcal{B}/\mathcal{B} \cap I, \mathcal{Q}/\mathcal{Q} \cap \mathcal{J}, \bar{\delta}) \rightarrow (\mathcal{B} + I/I, \mathcal{Q} + \mathcal{J}/\mathcal{J}, \bar{\delta})$ ikilisinin çaprazlanmış modül homomorfizmi olduğunu göstermek kalır. Bunu görmek için aşağıdaki diyagramı ele alalım.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{B}/\mathcal{B} \cap I & \xrightarrow{\bar{\delta}} & \mathcal{Q}/\mathcal{Q} \cap \mathcal{J} \\
\alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
\mathcal{B} + I/I & \xrightarrow{\bar{\delta}} & \mathcal{Q} + \mathcal{J}/\mathcal{J}
\end{array}$$

Her $\mathfrak{b} + \mathcal{B} \cap I \in \mathcal{B}/\mathcal{B} \cap I$ için;

$$\begin{aligned}
\beta \bar{\delta}(\mathfrak{b} + \mathcal{B} \cap I) &= \beta(\delta \mathfrak{b} + \mathcal{Q} \cap \mathcal{J}) \\
&= \delta \mathfrak{b} + \mathcal{J} \\
&= \bar{\delta}(\mathfrak{b} + I)
\end{aligned}$$

$$= \bar{\delta}\alpha(\mathcal{L} + \mathcal{B} \cap \mathcal{J})$$

olduğundan $\beta\tilde{\delta} = \bar{\delta}\alpha$ olup diyagram değişmelidir. Ayrıca her $q + \mathcal{Q} \cap \mathcal{J} \in \mathcal{Q}/\mathcal{Q} \cap \mathcal{J}$ ve her $\mathcal{L} + \mathcal{B} \cap \mathcal{I} \in \mathcal{B}/\mathcal{B} \cap \mathcal{I}$ için;

$$\begin{aligned} \beta(q + \mathcal{Q} \cap \mathcal{J}) \cdot \alpha(\mathcal{L} + \mathcal{B} \cap \mathcal{I}) &= (q + \mathcal{J}) \cdot (\mathcal{L} + \mathcal{I}) \\ &= q \cdot \mathcal{L} + \mathcal{I} \\ &= \alpha(q \cdot \mathcal{L} + \mathcal{B} \cap \mathcal{I}) \\ &= \alpha((q + \mathcal{Q} \cap \mathcal{J}) \cdot (\mathcal{L} + \mathcal{B} \cap \mathcal{I})) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{L} + \mathcal{B} \cap \mathcal{I}) \cdot \beta(q + \mathcal{Q} \cap \mathcal{J}) &= (\mathcal{L} + \mathcal{I}) \cdot (q + \mathcal{J}) \\ &= \mathcal{L} \cdot q + \mathcal{I} \\ &= \alpha(\mathcal{L} \cdot q + \mathcal{B} \cap \mathcal{I}) \\ &= \alpha((\mathcal{L} + \mathcal{B} \cap \mathcal{I}) \cdot (q + \mathcal{Q} \cap \mathcal{J})) \end{aligned}$$

olduğundan bu diyagram üzerinde etkiler de korunur. Böylece (α, β) ikilisi bir çaprazlanmış modül izomorfizmidir. ■

4. BİRLEŞMELİ CEBİRLERİN 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİ

Tanım 4.1. $\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}$ birleşmeli $\mathbb{K}$ –cebirler ve $\delta_1: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{H}$ ile $\delta_2: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{R}$; gör $\delta_2 \subseteq \ker \delta_1$ olmasını sağlayacak şekilde homomorfizmler olsun. Bu durumda

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\delta_2} \mathcal{R} \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{H}$$

cebirsal yapısı, birleşmeli $\mathbb{K}$ –cebirlerin 2 –zincir kompleksi olarak adlandırılır. İlâveten eğer gör $\delta_2 \trianglelefteq \mathcal{R}$ ve gör $\delta_1 \leq \mathcal{H}$ ise bu durumda yukarıdaki 2 –komplekse bir normal 2 –zincir kompleksi denir.

Tanım 4.2. Birleşmeli $\mathbb{K}$ –cebirlerin bir

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\delta_2} \mathcal{R} \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{H}$$

normal 2–kompleksi ve $\{, \}_1: \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{G}$, $\{, \}_2: \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{G}$ şeklinde iki ekstra bilineer dönüşüm verilsin. $\mathcal{H}$ ’nin $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{R}$ üzerindeki sağ ve sol etkileri ile $\mathcal{R}$ ’nin $\mathcal{G}$ üzerindeki sağ ve sol etkileri bulunduğunu varsayalım. $h \in \mathcal{H}$, $r \in \mathcal{R}$ ve $g \in \mathcal{G}$ olmak üzere $r \cdot h$, $g \cdot h$, $g \cdot r$ sağ etkileri ve $h \cdot r$, $h \cdot g$, $r \cdot g$ sol etkileri gösterebiliriz. Aşağıdaki koşulların her $g, g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, $r, r_1, r_2, r_3 \in \mathcal{R}$ ve $h \in \mathcal{H}$ için geçerli olması durumunda bu yapı bir 2 –çaprazlanmış modül olarak adlandırılır.

- (1) $\delta_1(r \cdot h) = \delta_1(r)h$ ve $\delta_2(g \cdot h) = \delta_2(g) \cdot h$
- (2) $\delta_1(h \cdot r) = h\delta_1(r)$ ve $\delta_2(h \cdot g) = h \cdot \delta_2(g)$
- (3) $\delta_2\{r_1, r_2\}_1 = r_1 \cdot \delta_1(r_2) - r_1 r_2$
- (4) $\delta_2\{r_1, r_2\}_2 = \delta_1(r_1) \cdot r_2 - r_1 r_2$
- (5) $\{\delta_2(g_1), \delta_2(g_2)\}_1 = -g_1 g_2$
- (6) $\{\delta_2(g_1), \delta_2(g_2)\}_2 = -g_1 g_2$
- (7) $\{\delta_2(g), r\}_1 = g \cdot \delta_1(r) - g \cdot r$
- (8) $\{\delta_2(g), r\}_2 = -r \cdot g$
- (9) $\{r, \delta_2(g)\}_1 = -g \cdot r$
- (10) $\{r, \delta_2(g)\}_2 = \delta_1(r) \cdot g - r \cdot g$
- (11) $\{r_1, r_2 r_3\}_1 = \{r_1, r_2\}_1 \cdot \delta_1(r_3) + \{r_1 r_2, r_3\}_1$
- (12) $\{r_1, r_2 r_3\}_2 = \delta_1(r_1) \cdot \{r_2, r_3\}_2 - \{r_1 r_2, r_3\}_2$
- (13) $\{r_1, r_2\}_1 \cdot h = \{r_1, r_2 \cdot h\}_1$
- (14) $\{r_1, r_2\}_2 \cdot h = \{r_1, r_2 \cdot h\}_2$

$$(15) h \cdot \{r_1, r_2\}_1 = \{h \cdot r_1, r_2\}_1$$

$$(16) h \cdot \{r_1, r_2\}_2 = \{h \cdot r_1, r_2\}_2$$

Eğer karışıklık riski mevcut değilse bir

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\delta_2} \mathcal{R} \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{H}$$

2 –çaprazlanmış modülü bazen $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1)$ ya da kısaca $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ şeklinde de gösterilir. Buradaki $\{, \}_1$ ve $\{, \}_2$ küme parantezleri, Peiffer liftingleri olarak adlandırılır.

Bir

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\delta_2} \mathcal{R} \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{H}$$

2 –çaprazlanmış modülü verildiğinde, aynı zamanda bir

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\delta_2} \mathcal{R}$$

çaprazlanmış modülü ile

$$\mathcal{R} \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{H}$$

ve

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\delta_1 \delta_2} \mathcal{H}$$

şeklinde iki tane de ön-çaprazlanmış modül verilmiş olur. Bunlardan ikincisinin sınır dönüşümünün aşıkâr, yani $\delta_1 \delta_2 = 0_{\mathcal{H}}$ olduğuna dikkat edelim.

Tanım 4.3. Birleşmeli cebirlerin

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\delta_2} \mathcal{R} \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{H}$$

ve

$$\mathcal{G}' \xrightarrow{\delta'_2} \mathcal{R}' \xrightarrow{\delta'_1} \mathcal{H}'$$

gibi iki tane 2 –çaprazlanmış modülü verildiğinde, bunlar arasındaki bir

$$\Phi : (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1) \rightarrow (\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}', \delta'_2, \delta'_1)$$

homomorfizm $\Phi = (\alpha, \beta, \gamma)$ üçlüsü ile tanımlanır, öyle ki

$$\alpha : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$$

$$\beta : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$$

$$\gamma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$$

birer cebir homomorfizmidir,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\delta_2} & \mathcal{R} & \xrightarrow{\delta_1} & \mathcal{H} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ \mathcal{G}' & \xrightarrow{\delta'_2} & \mathcal{R}' & \xrightarrow{\delta'_1} & \mathcal{H}' \end{array}$$

diyagramı değişmelidir ve

$$\alpha(\mathcal{G} \cdot h) = \alpha(\mathcal{G}) \cdot \gamma(h)$$

$$\alpha(h \cdot \mathcal{G}) = \gamma(h) \cdot \alpha(\mathcal{G})$$

$$\beta(r \cdot h) = \beta(r) \cdot \gamma(h)$$

$$\beta(h \cdot r) = \gamma(h) \cdot \beta(r)$$

$$\alpha\{r_1, r_2\}_1 = \{\beta(r_1), \beta(r_2)\}_1$$

$$\alpha\{r_1, r_2\}_2 = \{\beta(r_1), \beta(r_2)\}_2$$

özellikleri sağlanır.

Eğer α , β ve γ 'nın her biri cebir izomorfizmi ise, o halde yukarıdaki şartlar ile birlikte Φ 'nin 2—çaprazlanmış modül izomorfizmi olduğu söylenir.

Bir $\Phi : (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1) \rightarrow (\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}', \delta'_2, \delta'_1)$ homomorfizmi verildiğinde, ayrıca $\mathcal{R}$ 'nin $\mathcal{G}$ üzerindeki her iki etkisi de korunur çünkü,

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{G} \cdot r) &= \alpha(-\{r, \delta_2(\mathcal{G})\}_1) \\ &= -\{\beta(r), \beta\delta_2(\mathcal{G})\}_1 \\ &= -\{\beta(r), \delta'_2\alpha(\mathcal{G})\}_1 \\ &= \alpha(\mathcal{G}) \cdot \beta(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(r \cdot g) &= \alpha(-\{\delta_2(g), r\}_2) \\
&= -\{\beta\delta_2(g), \beta(r)\}_2 \\
&= -\{\delta'_2\alpha(g), \beta(r)\}_2 \\
&= \beta(r) \cdot \alpha(g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(g \cdot \delta_1(r)) &= \alpha(g) \cdot \gamma\delta_1(r) \\
&= \alpha(g) \cdot \delta'_1\beta(r)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\alpha(\delta_1(r) \cdot g) &= \gamma\delta_1(r) \cdot \alpha(g) \\
&= \delta'_1\beta(r) \cdot \alpha(g).
\end{aligned}$$

Ayrıca eğer $\Phi = (\alpha, \beta, \gamma)$ bir 2 – çaprazlanmış modül homomorfizmi ise bu durumda

$$(\alpha, \beta) : (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta_2) \rightarrow (\mathcal{G}', \mathcal{R}', \delta'_2)$$

bir çaprazlanmış modül homomorfizmidir.

Tanım 4.4. Birleşmeli cebirlerin bir

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\delta_2} \mathcal{R} \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{H}$$

2–çaprazlanmış modülü verilsin ve

$$\mathcal{G}' \xrightarrow{\delta'_2} \mathcal{R}' \xrightarrow{\delta'_1} \mathcal{H}'$$

de $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$, $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$, $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ ve $\delta'_1 = \delta_1|_{\mathcal{R}'}$, $\delta'_2 = \delta_2|_{\mathcal{G}'}$ olacak şekilde bir 2 –çaprazlanmış modül olsun ve ayrıca buradaki etkiler ve Peiffer Liftingleri, diğerlerinin kısıtlaması olsun. Bu durumda $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}', \delta'_2, \delta'_1)$ 'in, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1)$ için bir 2–alt çaprazlanmış modül olduğu söylenir. Bu durum $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') \leq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 4.5. Bir $\mathcal{G} \xrightarrow{\delta_2} \mathcal{R} \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{H}$ 2–çaprazlanmış modülün bir 2 –alt çaprazlanmış modülü aşağıdaki gibi verilsin.

$$\mathcal{G}' \xrightarrow{\delta'_2} \mathcal{R}' \xrightarrow{\delta'_1} \mathcal{H}'$$

Eğer

- (1) $\mathcal{R}' \trianglelefteq \mathcal{R}$ and $\mathcal{H}' \trianglelefteq \mathcal{H}$
- (2) $r' \cdot h, h \cdot r' \in \mathcal{R}', g' \cdot h, h \cdot g' \in \mathcal{G}'$
- (3) $r \cdot h', h' \cdot r \in \mathcal{R}', g \cdot h', h' \cdot g \in \mathcal{G}'$
- (4) $\{r', r\}_1, \{r', r\}_2, \{r, r'\}_1, \{r, r'\}_2 \in \mathcal{G}'$

koşulları tüm $g \in \mathcal{G}, g' \in \mathcal{G}', r \in \mathcal{R}, r' \in \mathcal{R}', h \in \mathcal{H}$ ve $h' \in \mathcal{H}'$ için geçerliyse, o halde $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')$ 'nin $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ için bir 2-çaprazlanmış ideal olduğu söylenir ve bu durum $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') \trianglelefteq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımda verilen (4) koşulundan görülebilir ki, tüm $g \in \mathcal{G}, g' \in \mathcal{G}', r \in \mathcal{R}$ ve $r' \in \mathcal{R}'$ için $g' \cdot r, r \cdot g' \in \mathcal{G}'$ ve $g \cdot r', r' \cdot g \in \mathcal{G}'$ elde ettiğimize dikkat edin. Eğer $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}'), (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1)$ 'nin 2-çaprazlanmış ideali ise o halde tüm $g \in \mathcal{G}, g' \in \mathcal{G}', r \in \mathcal{R}$ ve $r' \in \mathcal{R}'$ için aşağıdakileri elde ederiz

$$\begin{aligned} g' \cdot r &= -\{r, \delta_2 g'\}_1 \in \mathcal{G}' \\ r \cdot g' &= -\{\delta_2 g', r\}_2 \in \mathcal{G}' \\ g \cdot r' &= -\{r', \delta_2(g)\}_1 \in \mathcal{G}' \\ r' \cdot g &= -\{\delta_2(g), r'\}_2 \in \mathcal{G}' \end{aligned}$$

benzer şekilde

$$g' \cdot \delta_1(r), \delta_1(r) \cdot g' \in \mathcal{G}' \text{ ve } g \cdot \delta_1(r'), \delta_1(r') \cdot g \in \mathcal{G}'$$

elde edilir. Ek olarak, $\mathcal{G}' \leq \mathcal{G}$ olur çünkü

$$g' \cdot g = g' \cdot \delta_2(gg) \in \mathcal{G}' \text{ ve } g \cdot g' = \delta_2(g) \cdot g' \in \mathcal{G}' \text{ d\u00fcr.}$$

Bu arg\u00fcm\u00e2nların bir sonucu olarak, $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}'), (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1)$ 'nin 2-çaprazlanmış ideali ise; $(\mathcal{G}', \mathcal{R}')$ de $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \delta_2)$ 'nin bir çaprazlanmış ideali olur.

Tanım 4.6. Bir

$$\Phi = (\alpha, \beta, \gamma) : (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1) \rightarrow (\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}', \delta'_2, \delta'_1)$$

biçiminde 2-çaprazlanmış mod\u00fcl homoformizmi verilmiş olsun. Φ 'nin çekirdeğ i çek $\Phi =$ (çek α , çek β , çek γ) ile tanımlanır ve Φ 'nin görüntüsü gör $\Phi =$ (gör α , gör β , gör γ) ile tanımlanır.

çek Φ 'nin, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ 'nin 2-çaprazlanmış ideal olduğunu görmek kolaydır ve ayrıca gör Φ , $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')$ 'nin 2-altçaprazlanmış modülüdür. Örneğin, gör Φ için 2-çaprazlanmış ideal halinin diğer bir koşulu $k \in \text{çek } \beta$, $r \in \mathcal{R}$ için, $\{r, k\}_1, \{r, k\}_2, \{k, r\}_1, \{k, r\}_2 \in \text{çek } \alpha$ olduğu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\alpha\{r, k\}_1 &= \{\beta(r), \beta(k)\}_1 = \{\beta(r), 0_{\mathcal{R}'}\}_1 \\
&= \{\beta(r), \delta'_2(0_{\mathcal{G}'})\}_1 = -(0_{\mathcal{G}'} \cdot \beta(r)) = 0_{\mathcal{G}'} \\
\alpha\{r, k\}_2 &= \{\beta(r), \beta(k)\}_2 = \{\beta(r), 0_{\mathcal{R}'}\}_2 \\
&= \{\beta(r), \delta'_2(0_{\mathcal{G}'})\}_2 = \delta'_1\beta(r) \cdot 0_{\mathcal{G}'} - \beta(r) \cdot 0_{\mathcal{G}'} = 0_{\mathcal{G}'} \\
\alpha\{k, r\}_1 &= \{\beta(k), \beta(r)\}_1 = \{0_{\mathcal{R}'}, \beta(r)\}_1 \\
&= \{\delta'_2(0_{\mathcal{G}'}), \beta(r)\}_1 = 0_{\mathcal{G}'} \cdot \delta_1(r) - 0_{\mathcal{G}'} \cdot r = 0_{\mathcal{G}'} \\
\alpha\{k, r\}_2 &= \{\beta(k), \beta(r)\}_2 = \{0_{\mathcal{R}'}, \beta(r)\}_2 \\
&= \{\delta'_2(0_{\mathcal{G}'}), \beta(r)\}_2 = -(\beta(r) \cdot 0_{\mathcal{G}'}) = 0_{\mathcal{G}'}
\end{aligned}$$

Tanım 4.7. $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1)$, 2-çaprazlanmış modül ve $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')$, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ 'nin bir 2-çaprazlandırılmış ideali olsun. Bu durumda $\frac{(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})}{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')}$ 2-çaprazlanmış bölüm modülü $(\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}'}, \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}'}, \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}'}, \overline{\delta_2}, \overline{\delta_1})$ beşlisi ile tanımlanır. Burada $\overline{\delta_2}, \overline{\delta_1}$ ve Peiffer liftingleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned}
\overline{\delta_2}(\mathcal{G} + \mathcal{G}') &= \delta_2(\mathcal{G}) + \mathcal{R}' \\
\overline{\delta_1}(r + \mathcal{R}') &= \delta_1(r) + \mathcal{H}' \\
\{r_1 + \mathcal{R}', r_2 + \mathcal{R}'\}_1 &= \{r_1, r_2\}_1 + \mathcal{G}' \\
\{r_1 + \mathcal{R}', r_2 + \mathcal{R}'\}_2 &= \{r_1, r_2\}_2 + \mathcal{G}'
\end{aligned}$$

$\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}'}$ 'nin $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}'}$ ve $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}'}$ üzerindeki ve $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}'}$ 'nin $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}'}$ üzerindeki etkileri şu şekilde verilmiştir:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{G} + \mathcal{G}') \cdot (h + \mathcal{H}') &= (\mathcal{G} \cdot h) + \mathcal{G}' \\
(h + \mathcal{H}') \cdot (\mathcal{G} + \mathcal{G}') &= (h \cdot \mathcal{G}) + \mathcal{G}' \\
(r + \mathcal{R}') \cdot (h + \mathcal{H}') &= (r \cdot h) + \mathcal{R}' \\
(h + \mathcal{H}') \cdot (r + \mathcal{R}') &= (h \cdot r) + \mathcal{R}' \\
(\mathcal{G} + \mathcal{G}') \cdot (r + \mathcal{R}') &= (\mathcal{G} \cdot r) + \mathcal{G}' \\
(r + \mathcal{R}') \cdot (\mathcal{G} + \mathcal{G}') &= (r \cdot \mathcal{G}) + \mathcal{G}'
\end{aligned}$$

Yukarıdaki tanımda $\left(\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}'}, \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}'}, \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}'}, \overline{\delta_2}, \overline{\delta_1}\right)$ 'deki tüm etkilerin ve sınır dönüşümlerinin iyi tanımlı oldukları çaprazlanmış modüllerden bilinmektedir. Aşağıda, Peiffer liftinglerinin de iyi tanımlı olduğunu görelim.

Lemma 4.8. $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1)$, 2-çaprazlandırılmış modül ve $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')$, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ 'nin 2-çaprazlanmış ideali olsun. Bu durumda bölüm 2-çaprazlanmış modülünün Peiffer liftingleri iyi tanımlıdır.

İspat. İdeal tanımdan her $r' \in \mathcal{R}'$, $r \in \mathcal{R}$ için $\{r', r\}_1, \{r, r'\}_1 \in \mathcal{G}'$ olduğunu biliyoruz.

$\mathcal{R}/\mathcal{R}'$ 'de $r_1 + \mathcal{R}' = r_2 + \mathcal{R}'$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $r_2 - r_1 \in \mathcal{R}'$ olur.

$$\{r_2, r\}_1 - \{r_1, r\}_1 = \{r_2 - r_1, r\}_1 = \{0_{\mathcal{R}}, r\}_1 = 0_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}'$$

olmasından $\{r_2, r\}_1 - \{r_1, r\}_1 \in \mathcal{G}'$ elde edilir ve $\{r_1 + \mathcal{R}', r + \mathcal{R}'\}_1 = \{r_2 + \mathcal{R}', r + \mathcal{R}'\}_1$, $\{r + \mathcal{R}', r_1 + \mathcal{R}'\}_1 = \{r + \mathcal{R}', r_2 + \mathcal{R}'\}_1$ olur. $\{, \}_2$ liftinginin bölüm 2-çaprazlanmış modülünde iyi tanımlı olduğu da benzer şekilde görülebilir.

Önerme 4.9. $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1)$ 2-çaprazlanmış modül ve $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')$, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ 'nin bir 2-çaprazlanmış ideali olsun. Bu durumda her $g \in \mathcal{G}$, $r \in \mathcal{R}$ ve $h \in \mathcal{H}$ için

$$\mathbf{q}_1(g) = g + \mathcal{G}', \mathbf{q}_2(r) = r + \mathcal{R}', \mathbf{q}_3(h) = h + \mathcal{H}'$$

ile tanımlanan $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ üçlüsü $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1)$ 'den $\left(\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}'}, \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}'}, \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}'}, \overline{\delta_2}, \overline{\delta_1}\right)$ 'ye bir 2-çaprazlanmış modül homomorfizmidir ve $\mathbf{Q}$ 'nun çekirdeği $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')$ dir.

İspat. $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ ve $\mathbf{q}_3$ 'ün kanonik homomorfizm denen cebir homomorfizmleri oldukları bilindiğinden, her $g \in \mathcal{G}$, $r \in \mathcal{R}$, $h \in \mathcal{H}$ için aşağıdaki eşitliklerin varlığını görmek yeterlidir.

$$\overline{\delta_2} \mathbf{q}_1(g) = \overline{\delta_2}(g + \mathcal{G}') = \delta_2(g) + \mathcal{R}' = \mathbf{q}_2 \delta_2(g)$$

$$\delta_1 \mathbf{q}_2(r) = \delta_1(r + \mathcal{R}') = \delta_1(r) + \mathcal{H}' = \mathbf{q}_3 \delta_1(r)$$

$$\{\mathbf{q}_2(r_1), \mathbf{q}_2(r_2)\}_1 = \{r_1 + \mathcal{R}', r_2 + \mathcal{R}'\}_1 = \{r_1, r_2\}_1 + \mathcal{G}' = \mathbf{q}_1(\{r_1, r_2\}_1)$$

$$\{\mathbf{q}_2(r_1), \mathbf{q}_2(r_2)\}_2 = \{r_1 + \mathcal{R}', r_2 + \mathcal{R}'\}_2 = \{r_1, r_2\}_2 + \mathcal{G}' = \mathbf{q}_1(\{r_1, r_2\}_2)$$

$$\mathbf{q}_3(g) \cdot \mathbf{q}_1(h) = (g + \mathcal{G}') \cdot (h + \mathcal{H}') = (g \cdot h) + \mathcal{G}' = \mathbf{q}_1(g \cdot h)$$

$$\mathbf{q}_1(h) \cdot \mathbf{q}_3(g) = (h + \mathcal{H}') \cdot (g + \mathcal{G}') = (h \cdot g) + \mathcal{G}' = \mathbf{q}_1(h \cdot g)$$

$$\mathbf{q}_3(r) \cdot \mathbf{q}_2(h) = (r + \mathcal{R}') \cdot (h + \mathcal{H}') = (r \cdot h) + \mathcal{R}' = \mathbf{q}_2(r \cdot h)$$

$$\mathbf{q}_2(h) \cdot \mathbf{q}_3(r) = (h + \mathcal{H}') \cdot (r + \mathcal{R}') = (h \cdot r) + \mathcal{R}' = \mathbf{q}_2(h \cdot r).$$

Ayrıca cebirleri için bilinen denkliklerden

$$\text{çek } \mathbf{Q} = (\text{çek } \mathbf{q}_1, \text{çek } \mathbf{q}_2, \text{çek } \mathbf{q}_3) = (\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')$$

olduğu elde edilir. ■

Yukarıdaki önermenin bir direkt sonucu olarak, ideal tanımının kategorik olarak doğru olduğunu ifade eden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.10. $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1)$ bir 2-çaprazlanmış modül ve $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') \leq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ olsun. Bu durumda, $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') \leq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ olması için gerek ve yeter şart, en az bir $(\mathcal{G}^*, \mathcal{R}^*, \mathcal{H}^*, \delta_2^*, \delta_1^*)$ 2-çaprazlanmış modülü ve $\Phi: (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1) \rightarrow (\mathcal{G}^*, \mathcal{R}^*, \mathcal{H}^*, \delta_2^*, \delta_1^*)$ homomorfizmi için çek $\Phi = (\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')$ olmasıdır.

Teorem 4.11. 2-çaprazlanmış modüllerin bir

$$\Phi = (\alpha, \beta, \gamma) : (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1) \rightarrow (\mathcal{G}^*, \mathcal{R}^*, \mathcal{H}^*, \delta_2^*, \delta_1^*)$$

homomorfizmi verilsin. Bu durumda

$$\frac{(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})}{\text{çek } \Phi} \cong \text{gör } \Phi$$

olur.

İspat. $\bar{\alpha} : \frac{\mathcal{G}}{\text{çek } \alpha} \rightarrow \text{gör } \alpha$, $\bar{\beta} : \frac{\mathcal{R}}{\text{çek } \beta} \rightarrow \text{gör } \beta$ ve $\bar{\gamma} : \frac{\mathcal{H}}{\text{çek } \gamma} \rightarrow \text{gör } \gamma$, cebirler için 1. izomorfizm teoreminin ispatında kullanılan izomorfizmler olmak, yani $\bar{\alpha}(g + \text{çek } \alpha) = \alpha(g)$, $\bar{\beta}(r + \text{çek } \beta) = \beta(r)$ ve $\bar{\gamma}(h + \text{çek } \gamma) = \gamma(h)$ ile tanımlı olmak üzere $\bar{\Phi} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) : \frac{(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})}{\text{çek } \Phi} \rightarrow \text{gör } \Phi$ dönüşümünü tanımlayalım.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{\mathcal{G}}{\text{çek } \alpha} & \xrightarrow{\delta_2} & \frac{\mathcal{R}}{\text{çek } \beta} & \xrightarrow{\delta_1} & \frac{\mathcal{H}}{\text{çek } \gamma} \\ \downarrow \bar{\alpha} & & \downarrow \bar{\beta} & & \downarrow \bar{\gamma} \\ \text{gör } \alpha & \xrightarrow{\delta_2^*} & \text{gör } \beta & \xrightarrow{\delta_1^*} & \text{gör } \gamma \end{array}$$

Yukarıdaki diyagramın değişmeliliği ve etkilerin korunması, çaprazlanmış modüller için 1. izomorfizm teoreminin bir sonucudur. Böylece, $\lambda = 1, 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\{\bar{\beta}(r_1 + \ker \beta), \bar{\beta}(r_2 + \ker \beta)\}_i &= \{\beta(r_1), \beta(r_2)\}_\lambda \\ &= \alpha(\{r_1, r_2\}_\lambda) \\ &= \bar{\alpha}(\{r_1, r_2\}_\lambda + \ker \alpha) \\ &= \bar{\alpha}(\{r_1 + \ker \beta, r_2 + \ker \beta\}_\lambda)\end{aligned}$$

eşitliği görmek yeterli olur ve buradan $\bar{\Phi}$ 'nin bir 2-çaprazlanmış modül izomorfizmi olduğu sonucuna varılır. ■

Tanım 4.12. $(\mathcal{G}_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{H}_1)$ ve $(\mathcal{G}_2, \mathcal{R}_2, \mathcal{H}_2)$, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1)$ 'in 2-altçaprazlanmış modülleri olsunlar. Bu durumda $(\mathcal{G}_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{H}_1)$ ve $(\mathcal{G}_2, \mathcal{R}_2, \mathcal{H}_2)$ 'nin arakesitleri,

$$(\mathcal{G}_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{H}_1) \cap (\mathcal{G}_2, \mathcal{R}_2, \mathcal{H}_2) := (\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2, \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2, \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2)$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 4.13. Bir 2-çaprazlanmış modülün iki 2-altçaprazlanmış modülün arakesiti de bir 2-alt çaprazlanmış modüldür. Özel olarak, eğer bu 2-alt çaprazlanmış modülün her ikisi de birer ideal ise, bu durumda arakesitleri de bir idealdir.

İspat. 2-alt çaprazlanmış modül ve ideal tanımlarından hemen görülür. ■

Tanım 4.14. $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1)$ bir 2-çaprazlanmış modül ve $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')$ ile $(\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')$, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ 'nin birer 2-alt çaprazlanmış modülü olsun. Bu şartlar altında, $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')$ ve $(\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')$ 'nin toplamı

$$(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') + (\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'') := (\mathcal{G}' + \mathcal{G}'', \mathcal{R}' + \mathcal{R}'', \mathcal{H}' + \mathcal{H}'')$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 4.15. $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')$, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1)$ 2-çaprazlanmış modülünün bir ideali ve $(\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')$ de $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1)$ 'in bir 2-alt-çaprazlanmış modülü olsun.

- (i) $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') + (\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')$, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ 'nin 2-alt-çaprazlanmış modülüdür.
- (ii) Eğer buna ilaveten $(\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')$ de ideal ise, $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') + (\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')$, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ nin bir idealidir.

İspat. (i) $\delta_2(\mathcal{G}' + \mathcal{G}'') \subseteq \mathcal{R}' + \mathcal{R}''$ ve $\delta_1(\mathcal{R}' + \mathcal{R}'') \subseteq \mathcal{H}' + \mathcal{H}''$ olduğu açıkça görülmektedir. Bunun yanında, her $\mathcal{G}' \in \mathcal{G}'$, $\mathcal{r}' \in \mathcal{R}'$, $h' \in \mathcal{H}'$, $\mathcal{G}'' \in \mathcal{G}''$, $\mathcal{r}'' \in \mathcal{R}''$ ve $h'' \in \mathcal{H}''$ için,

$$\begin{aligned}(h' + h'') \cdot (\mathcal{G}' + \mathcal{G}'') &= h' \cdot \mathcal{G}' + h' \cdot \mathcal{G}'' + h'' \cdot \mathcal{G}' + h'' \cdot \mathcal{G}'' \in \mathcal{G}' + \mathcal{G}'' \\ (\mathcal{G}' + \mathcal{G}'') \cdot (h' + h'') &= \mathcal{G}' \cdot h' + \mathcal{G}' \cdot h'' + \mathcal{G}'' \cdot h' + \mathcal{G}'' \cdot h'' \in \mathcal{G}' + \mathcal{G}'' \\ (h' + h'') \cdot (\mathcal{r}' + \mathcal{r}'') &= h' \cdot \mathcal{r}' + h' \cdot \mathcal{r}'' + h'' \cdot \mathcal{r}' + h'' \cdot \mathcal{r}'' \in \mathcal{R}' + \mathcal{R}''\end{aligned}$$

ve

$$(\mathcal{r}' + \mathcal{r}'') \cdot (h' + h'') = \mathcal{r}' \cdot h' + \mathcal{r}' \cdot h'' + \mathcal{r}'' \cdot h' + \mathcal{r}'' \cdot h'' \in \mathcal{R}' + \mathcal{R}''$$

olur. Ayrıca $\mathcal{r}'_1, \mathcal{r}'_2 \in \mathcal{R}'$, $\mathcal{r}''_1, \mathcal{r}''_2 \in \mathcal{R}''$ için $\lambda = 1, 2$ olmak üzere

$$\{\mathcal{r}'_1 + \mathcal{r}''_1, \mathcal{r}'_2 + \mathcal{r}''_2\}_\lambda = \{\mathcal{r}'_1, \mathcal{r}'_2\}_\lambda + \{\mathcal{r}'_1, \mathcal{r}''_2\}_\lambda + \{\mathcal{r}''_1, \mathcal{r}'_2\}_\lambda + \{\mathcal{r}''_1, \mathcal{r}''_2\}_\lambda \in \mathcal{R}' + \mathcal{R}''$$

olup $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') + (\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'') \leq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ elde edilir.

(ii) $\mathcal{R}' + \mathcal{R}'' \leq \mathcal{R}$ ve $\mathcal{H}' + \mathcal{H}'' \leq \mathcal{H}$ olduğu, $\mathcal{R}', \mathcal{R}'' \leq \mathcal{R}$ ve $\mathcal{H}', \mathcal{H}'' \leq \mathcal{H}$ olmasından görülmür. Diğer şartlar da aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}(\mathcal{r}' + \mathcal{r}'') \cdot h &= (\mathcal{r}' \cdot h) + (\mathcal{r}'' \cdot h) \in \mathcal{R}' + \mathcal{R}'' \\ h \cdot (\mathcal{r}' + \mathcal{r}'') &= (h \cdot \mathcal{r}') + (h \cdot \mathcal{r}'') \in \mathcal{R}' + \mathcal{R}'' \\ (\mathcal{G}' + \mathcal{G}'') \cdot h &= (\mathcal{G}' \cdot h) + (\mathcal{G}'' \cdot h) \in \mathcal{G}' + \mathcal{G}'' \\ (\mathcal{G}' + \mathcal{G}'') \cdot h &= (\mathcal{G}' \cdot h) + (\mathcal{G}'' \cdot h) \in \mathcal{G}' + \mathcal{G}'' \\ \mathcal{r} \cdot (h' + h'') &= (\mathcal{r} \cdot h') + (\mathcal{r} \cdot h'') \in \mathcal{R}' + \mathcal{R}'' \\ (h' + h'') \cdot \mathcal{r} &= (h' \cdot \mathcal{r}) + (h'' \cdot \mathcal{r}) \in \mathcal{R}' + \mathcal{R}'' \\ \mathcal{G} \cdot (h' + h'') &= (\mathcal{G} \cdot h') + (\mathcal{G} \cdot h'') \in \mathcal{G}' + \mathcal{G}'' \\ (h' + h'') \cdot \mathcal{G} &= (h' \cdot \mathcal{G}) + (h'' \cdot \mathcal{G}) \in \mathcal{G}' + \mathcal{G}'' \\ \{\mathcal{r}' + \mathcal{r}'', \mathcal{r}\}_1 &= \{\mathcal{r}', \mathcal{r}\}_1 + \{\mathcal{r}'', \mathcal{r}\}_1 \in \mathcal{R}' + \mathcal{R}'' \\ \{\mathcal{r}' + \mathcal{r}'', \mathcal{r}\}_2 &= \{\mathcal{r}', \mathcal{r}\}_2 + \{\mathcal{r}'', \mathcal{r}\}_2 \in \mathcal{R}' + \mathcal{R}'' \\ \{\mathcal{r}, \mathcal{r}' + \mathcal{r}''\}_1 &= \{\mathcal{r}, \mathcal{r}'\}_1 + \{\mathcal{r}, \mathcal{r}''\}_1 \in \mathcal{R}' + \mathcal{R}'' \\ \{\mathcal{r}, \mathcal{r}' + \mathcal{r}''\}_2 &= \{\mathcal{r}, \mathcal{r}'\}_2 + \{\mathcal{r}, \mathcal{r}''\}_2 \in \mathcal{R}' + \mathcal{R}''.\end{aligned}$$

■

Teorem 4.16. $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1)$ bir 2-çaprazlanmış modül, $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')$, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ 'nin bir ideali ve $(\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')$, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ 'nin bir 2-alt-çaprazlanmış modülü olsun. Bu durumda,

$$\frac{(\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')}{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') \cap (\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')} \cong \frac{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') + (\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')}{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')}$$

İspat. $\alpha(\mathcal{G}'') = \mathcal{G}'' + \mathcal{G}'$, $\beta(\mathcal{R}'') = \mathcal{R}'' + \mathcal{R}'$ ve $\gamma(\mathcal{H}'') = \mathcal{H}'' + \mathcal{H}'$ ile bir

$$\Phi = (\alpha, \beta, \gamma) : (\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'') \longrightarrow \frac{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') + (\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')}{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')}$$

dönüşümünü tanımlayalım.

Her $\mathcal{G}' \in \mathcal{G}'$, $\mathcal{G}'' \in \mathcal{G}''$ olduğu durumda her bir $\mathcal{G}' + \mathcal{G}'' + \mathcal{G}' \in \frac{\mathcal{G}' + \mathcal{G}''}{\mathcal{G}'}$ için, $\mathcal{G}' \in \mathcal{G}'$ olmasında dolayı $\mathcal{G}' + \mathcal{G}'' + \mathcal{G}' = \mathcal{G}'' + \mathcal{G}' + \mathcal{G}' = \mathcal{G}'' + \mathcal{G}'$ elde ederiz. Dolayısıyla, $\alpha(\mathcal{G}'') = \mathcal{G}'' + \mathcal{G}' = \mathcal{G}' + \mathcal{G}'' + \mathcal{G}'$ olur. Bu da α 'nın bir örten fonksiyon olduğunu gösterir, yani gör $\alpha = \frac{\mathcal{G}' + \mathcal{G}''}{\mathcal{G}'}$ olur. Benzer şekilde, gör $\beta = \frac{\mathcal{R}' + \mathcal{R}''}{\mathcal{R}'}$ ve gör $\gamma = \frac{\mathcal{H}' + \mathcal{H}''}{\mathcal{H}'}$ olduğu görülür ve böylece gör $\Phi = \frac{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') + (\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')}{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')}$ elde edilir.

Öte yandan, her $\mathcal{G}'' \in \mathcal{G}''$ için $\alpha(\mathcal{G}'') = 0_{\frac{\mathcal{G}' + \mathcal{G}''}{\mathcal{G}'}} \Leftrightarrow \mathcal{G}'' + \mathcal{G}' = \mathcal{G}' \Leftrightarrow \mathcal{G}'' \in \mathcal{G}'$ olduğundan çek $\alpha = \mathcal{G}' \cap \mathcal{G}''$ olur. Benzer şekilde, çek $\beta = \mathcal{R}' \cap \mathcal{R}''$ ve çek $\gamma = \mathcal{H}' \cap \mathcal{H}''$ olup buradan da çek $\Phi = (\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') \cap (\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')$ elde edilir.

Teorem 4.11 uyarınca $\frac{(\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')}{\text{çek } \Phi} \cong$ gör Φ olmasından

$$\frac{(\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')}{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') \cap (\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')} \cong \frac{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') + (\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')}{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')}$$

sonucu elde edilir. ■

Önerme 4.17. $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1)$ bir 2-çaprazlanmış modül, $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') \trianglelefteq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$, $(\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'') \trianglelefteq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ ve $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}') \trianglelefteq (\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')$ olsun. Bu durumda, $\frac{(\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')}{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')} \trianglelefteq \frac{(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})}{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')}$ olması için gerek ve yeter şart $(\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'') \trianglelefteq (\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ olmasıdır.

İspat. $\frac{(\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')}{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')} \leq \frac{(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})}{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')}$ olduğu kapsamalardan açıktır. Ayrıca cebirler için ilgili sonuçtan dolayı $\mathcal{R}'' \leq \mathcal{R} \Leftrightarrow \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'} \leq \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}'}$ ve $\mathcal{H}' \trianglelefteq \mathcal{H} \Leftrightarrow \frac{\mathcal{H}''}{\mathcal{H}'} \trianglelefteq \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}'}$ olduğu bilinmektedir. İdeal olmanın diğer şartları arasındaki çift yönlü gerektirme ise aşağıdaki şekilde görülür.

$$\begin{aligned}
r'' \cdot h \in \mathcal{R}'' &\Leftrightarrow (r'' \cdot h) + \mathcal{R}' \in \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'} \Leftrightarrow (r'' + \mathcal{R}') \cdot (h + \mathcal{H}') \in \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'} \\
h \cdot r'' \in \mathcal{R}'' &\Leftrightarrow (h \cdot r'') + \mathcal{R}' \in \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'} \Leftrightarrow (h + \mathcal{H}') \cdot (r'' + \mathcal{R}') \in \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'} \\
g'' \cdot h \in \mathcal{G}'' &\Leftrightarrow (g'' \cdot h) + \mathcal{G}' \in \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \Leftrightarrow (g'' + \mathcal{G}') \cdot (h + \mathcal{H}') \in \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \\
h \cdot g'' \in \mathcal{G}'' &\Leftrightarrow (h \cdot g'') + \mathcal{G}' \in \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \Leftrightarrow (h + \mathcal{H}') \cdot (g'' + \mathcal{G}') \in \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \\
r \cdot h'' \in \mathcal{R}'' &\Leftrightarrow (r \cdot h'') + \mathcal{R}' \in \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'} \Leftrightarrow (r + \mathcal{R}') \cdot (h'' + \mathcal{H}') \in \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'} \\
h'' \cdot r \in \mathcal{R}'' &\Leftrightarrow (h'' \cdot r) + \mathcal{R}' \in \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'} \Leftrightarrow (h'' + \mathcal{H}') \cdot (r + \mathcal{R}') \in \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'} \\
g \cdot h'' \in \mathcal{G}'' &\Leftrightarrow (g \cdot h'') + \mathcal{G}' \in \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \Leftrightarrow (g + \mathcal{G}') \cdot (h'' + \mathcal{H}') \in \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \\
h'' \cdot g \in \mathcal{G}'' &\Leftrightarrow (h'' \cdot g) + \mathcal{G}' \in \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \Leftrightarrow (h'' + \mathcal{H}') \cdot (g + \mathcal{G}') \in \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \\
\{r'', r\}_1 \in \mathcal{G}'' &\Leftrightarrow \{r'', r\}_1 \mathcal{G}' \in \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \Leftrightarrow \{r'' \mathcal{R}', r \mathcal{R}'\}_1 \in \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \\
\{r'', r\}_2 \in \mathcal{G}'' &\Leftrightarrow \{r'', r\}_2 \mathcal{G}' \in \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \Leftrightarrow \{r'' \mathcal{R}', r \mathcal{R}'\}_2 \in \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \\
\{r, r''\}_1 \in \mathcal{G}'' &\Leftrightarrow \{r, r''\}_1 \mathcal{G}' \in \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \Leftrightarrow \{r \mathcal{R}', r'' \mathcal{R}'\}_1 \in \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \\
\{r, r''\}_2 \in \mathcal{G}'' &\Leftrightarrow \{r, r''\}_2 \mathcal{G}' \in \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \Leftrightarrow \{r \mathcal{R}', r'' \mathcal{R}'\}_2 \in \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} .
\end{aligned}$$

■

Teorem 4.18. $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \delta_2, \delta_1)$ bir 2-çaprazlanmış modül, $(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')$ ve $(\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')$, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})$ 'nin $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}'', \mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}''$ ve $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}''$ olacak şekilde ideali olsunlar. Bu durumda,

$$\frac{\frac{(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})}{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')}}{\frac{(\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')}{(\mathcal{G}', \mathcal{R}', \mathcal{H}')}} \cong \frac{(\mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{H})}{(\mathcal{G}'', \mathcal{R}'', \mathcal{H}'')} .$$

İspat. α , β ve γ fonksiyonlarını

$$\begin{aligned}\alpha : \frac{\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}'}}{\frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'}} &\rightarrow \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}''}, & \alpha\left(\varphi + \mathcal{G}' \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'}\right) &= \varphi + \mathcal{G}'' \\ \beta : \frac{\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}'}}{\frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'}} &\rightarrow \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}''}, & \beta\left(r + \mathcal{R}' \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'}\right) &= r + \mathcal{R}'' \\ \gamma : \frac{\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}'}}{\frac{\mathcal{H}''}{\mathcal{H}'}} &\rightarrow \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}''}, & \gamma\left(h + \mathcal{H}' \frac{\mathcal{H}''}{\mathcal{H}'}\right) &= h + \mathcal{H}''\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. α , β ve γ fonksiyonlarının cebir izomorfizmleri olduğu bilinmektedir. Aşağıdaki diyagram göz önüne alalım.

$$\begin{array}{ccccc}\frac{\mathcal{G}/\mathcal{G}'}{\mathcal{G}''/\mathcal{G}'} & \xrightarrow{\bar{\delta}_2} & \frac{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'} & \xrightarrow{\bar{\delta}_1} & \frac{\mathcal{H}/\mathcal{H}'}{\mathcal{H}''/\mathcal{H}'} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}''} & \xrightarrow{\bar{\delta}_2} & \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}''} & \xrightarrow{\bar{\delta}_1} & \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}''}\end{array}$$

Her $\varphi \in \mathcal{G}$, $r, r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ ve $h \in \mathcal{H}$ için

$$\begin{aligned}\beta \bar{\delta}_2\left(\varphi + \mathcal{G}' \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'}\right) &= \beta\left(\frac{\bar{\delta}_2(\varphi + \mathcal{G}')\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'}\right) \\ &= \beta\left(\delta_2(\varphi) + \mathcal{R}' \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'}\right) \\ &= \delta_2(\varphi) + \mathcal{R}'' \\ &= \bar{\delta}_2(\varphi + \mathcal{G}'') \\ &= \bar{\delta}_2\alpha\left(\varphi + \mathcal{G}' \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'}\right)\end{aligned}$$

$$\gamma \bar{\delta}_1\left(r + \mathcal{R}' \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'}\right) = \gamma\left(\frac{\bar{\delta}_1(r + \mathcal{R}')\mathcal{H}''}{\mathcal{H}'}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma \left(\delta_1(r) + \mathcal{H}' \frac{\mathcal{H}''}{\mathcal{H}'} \right) \\
&= \delta_1(r) + \mathcal{H}'' \\
&= \bar{\delta}_1(r + \mathcal{R}'') \\
&= \bar{\delta}_1 \beta \left(r + \mathcal{R}' \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'} \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\alpha \left(\left(\mathcal{G} + \mathcal{G}' \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \right) \cdot \left(h + \mathcal{H}' \frac{\mathcal{H}''}{\mathcal{H}'} \right) \right) &= \alpha \left(\frac{((\mathcal{G} + \mathcal{G}') \cdot (h + \mathcal{H}')) \mathcal{G}''}{\mathcal{G}} \right) \\
&= \alpha \left((\mathcal{G} \cdot h) + \mathcal{G}' \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \right) \\
&= (\mathcal{G} \cdot h) + \mathcal{G}'' \\
&= (\mathcal{G} + \mathcal{G}'') \cdot (h + \mathcal{H}'') \\
&= \alpha \left(\mathcal{G} + \mathcal{G}' \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \right) \cdot \gamma \left(h + \mathcal{H}' \frac{\mathcal{H}''}{\mathcal{H}'} \right) \\
\beta \left(\left(r + \mathcal{R}' \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'} \right) \cdot \left(h + \mathcal{H}' \frac{\mathcal{H}''}{\mathcal{H}'} \right) \right) &= \beta \left(\frac{((r + \mathcal{R}') \cdot (h + \mathcal{H}')) \mathcal{R}''}{\mathcal{R}} \right) \\
&= \beta \left((r \cdot h) + \mathcal{R}' \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'} \right) \\
&= (r \cdot h) + \mathcal{R}'' \\
&= (r + \mathcal{R}'') \cdot (h + \mathcal{H}'') \\
&= \beta \left(r + \mathcal{R}' \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'} \right) \cdot \gamma \left(h + \mathcal{H}' \frac{\mathcal{H}''}{\mathcal{H}'} \right).
\end{aligned}$$

olur. Sol etkiler için olan eşitlikler de benzer şekilde görülür. Ek olarak, her $\lambda \in \{1,2\}$ için

$$\begin{aligned}
\alpha \left\{ r_1 + \mathcal{R}' \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'}, r_2 + \mathcal{R}' \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}'} \right\}_\lambda &= \alpha \left(\{r_1 + \mathcal{R}', r_2 + \mathcal{R}'\}_\lambda \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \right) \\
&= \alpha \left(\{r_1, r_2\}_\lambda + \mathcal{G}' \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}'} \right) \\
&= \{r_1, r_2\}_\lambda + \mathcal{G}'' \\
&= \{r_1 + \mathcal{R}'', r_2 + \mathcal{R}''\}_\lambda
\end{aligned}$$

$$= \{\beta(r_1 \mathcal{R}'(\mathcal{R}''/\mathcal{R}')), \beta(r_2 \mathcal{R}'(\mathcal{R}''/\mathcal{R}'))\}_{\lambda}$$

olduğuna dikkat edilerek ispat tamamlanır. ■



5. SONUÇ

Bu çalışmada değişmeli olmayan birleşmeli cebirler, bu cebirlerin çaprazlanmış modülleri ve özellikle de 2 –çaprazlanmış modülleri konu edilmiş ve grup teoriden bilinen üç klasik izomorfizm teoreminin benzerlerinin bu yapılar için de geçerli oldukları ispatlanmıştır. Çalışmanın 2 –çaprazlanmış modüller ile ilgili olan kısmı bu bakımdan daha önce literatürde yer almamış bazı orijinal sonuçlar içermektedir.

2 –çaprazlanmış modüllerin cebirsel topoloji alanında kullanışlı olduklarının bilinmesi yanında son yıllarda başka alanlarda, örneğin fiziksel modellemede, araç olarak kullanıldığı da görülmüştür. Burada incelenen yapının bu kullanışlılığı göz önüne alındığında, bu çalışmanın konu ile ilgilenen araştırmacılara yönelik temel bir referans kaynağı oluşturacak olması bakımından önem arz ettiği düşünülmektedir.

Burada elde edilen sonuçlar daha başka çalışmaların gerçekleştirilmesi için bir temel oluşturabilir veya buradaki sonuçları temel almayacak olan bazı çalışmalar için ilham kaynağı olabilir. Bu çalışmada 2 –çaprazlanmış modüller merkeze alındığı gibi 3 –çaprazlanmış modüller ve daha yüksek boyutlar için benzer konuların araştırılması bu çalışmanın üzerine kurulabilecek geliştirmelerden biri olabilir. Buradaki sonuçlar değişmeli olmayan birleşmeli cebirlerin 2 –çaprazlanmış modülleri yerine bunlardan daha genel cebirsel yapıların 2 –çaprazlanmış modülleri konu edilerek farklı bir yapı içerisinde araştırılabilir. Bunun yanında ön çaprazlanmış modüllerin de yüksek boyutlu benzerleri için bu bağlamda çalışmalar yapılabilir. Buradaki sonuçlar karşılık geldikleri anlamlar üzerinden fiziksel modellerde uyarlanarak teorik sonuçlar ortaya konulabilir. Ayrıca izomorfizm teoremlerinin sonuçları olarak değerlendirilebilecek olan ve cebirsel yapıların daha küçük parçalara ayrıştırılarak anlaşılmasında önemli bir araç olarak kullanılma potansiyeli bulunan Zassenhaus Lemması, Schreier İnceltme Teoremi ve Jordan-Hölder Teoremi, bu çalışmada söz konusu olan yapılarda araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Arvasi, Z., Porter T., 1996. Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras. *Journal of Algebra*, 181, 426-448.
- Can, E., 2021. Cebirlerin Çaprazlanmış Kareleri ve Morfizmleri İçin İzomorfizm Teoremleri, Yüksek Lisans Tezi. Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Burdur, Türkiye
- Conduché, D., 1984. Modules croisés généralisés de longueur 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 34, 155-178.
- Ege, U., 2002. Çarpım Cebiri ve Çaprazlanmış Modüller, Doktora Tezi. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, Türkiye
- Ellis, G. J., 1984. Crossed Modules and their Higher Dimensional Analogues, Ph.D. Dissertation. University of Wales, Bangor, Wales
- Ellis, G. J., 1988. Higher Dimensional Crossed Modules of Algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 52, 3, 277-282.
- Gerstenhaber, M., 1966. On the Deformation of Rings and Algebras II. *Annals of Mathematics*, 84, 1-19.
- Hungerford T.W., 1974. *Algebra*, Springer Verlag, New York, 528 s.
- Lichtenbaum, S., Schlessinger, M., 1967. The Cotangent Complex of a Morphism. *Transactions of the American Mathematical Society*, 128, 41-70.
- Odabaş, A., 2009. GAP (Grup, Algoritma ve Programlama) ile Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller, Doktora Tezi. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, Türkiye
- Porter, T., 1986. Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconcelos. *Journal of Algebra*, 99, 458-465.
- Shammu, N. M., 1992. Algebraic and an Categorical Structure of Category of Crossed Modules of Algebras, Ph.D. Dissertation. University College of North Wales, Bangor, Wales
- Whitehead, J.H.C., 1949. Combinatorial Homotopy II. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55, 5, 453-496.