



**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DEĞİŞMELİ OLMAYAN BİRLEŞMELİ
CEBİRLERİN ÇAPRAZLANMIŞ KARELERİ VE
MORFİZMLERİ İÇİN İZOMORFİZM TEOREMLERİ**

Yasemin ÖZDEMİR

BURDUR, 2022

T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DEĞİŞMELİ OLMAYAN BİRLEŞMELİ
CEBİRLERİN ÇAPRAZLANMIŞ KARELERİ VE
MORFİZMLERİ İÇİN İZOMORFİZM TEOREMLERİ

Yasemin ÖZDEMİR

Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL

BURDUR, 2022

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi / Doktora Tezi olarak sunduğum “**Tiyofen İçeren Porfirin Moleküllerinin Sentezi ve Elektrokimyasal Polimerizasyonu**” başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışının olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

13 / 01 / 2022

(İmza)

Yasemin ÖZDEMİR

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana her açıdan yol gösteren, beni yüreklendiren karşılaştığım her zorlukta destek olan, çalışmamı titizlikle takip eden ve öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum çok değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL’a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardım ve desteğini benden hiç esirgemeyen, bilgi birikimi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren öğrencisi olmaktan gurur duyduğum Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dr. Öğr. Üyesi Selim ÇETİN’e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan canım eşim Necdet Emin’e, yüksek lisans eğitimime şahit olan, okula gitmeme ve çalışmama izin veren beni sabırla bekleyen 4 yaşındaki canım kızım Belis’e, eğitim hayatım boyunca desteklerini üzerimden esirgemeyen anneme ve babama, yüksek lisansa başlamamda beni teşvik eden kayınvalideme ve kayınpederime de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ocak, 2022

Yasemin ÖZDEMİR

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iii
ÖZET v	
SUMMARY	vi
1. GİRİŞ 7	
2. TEMEL KAVRAMLAR	9
3. BİRLEŞMELİ CEBİRLERİN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİ.....	19
3.1. Alt Çaprazlanmış Modül ve Çaprazlanmış Modüllerin İdeali	21
3.2. Birleşmeli Cebirlerin Bölüm Çaprazlanmış Modülü.....	25
3.3. Birleşmeli Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri İçin İzomorfizm Teoremleri	26
4. BİRLEŞMELİ CEBİRLERİN ÇAPRAZLANMIŞ KARELERİ	30
4.1. Birleşmeli Cebirlerin Çaprazlanmış Kareleri	30
4.2. Cebirlerin Çaprazlanmış Karelerinin Alt Çaprazlanmış Karesi	33
4.3. Cebirlerin Çaprazlanmış Karelerinin İdeali	34
4.4. Cebirlerin Çaprazlanmış Karelerinin Çekirdeği ve Görüntüsü	37
4.5. Çaprazlanmış Karelerin Bölüm Çaprazlanmış Kareleri	43
4.6. Cebirlerin Çaprazlanmış Kareler İçin İzomorfizm Teoremleri	49
5. SONUÇ.....	55
KAYNAKLAR.....	56

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\leq$	: Alt cebir, Alt çaprazlanmış modül, Alt çaprazlanmış kare
$\subseteq$	: Alt küme
$\not\subseteq$	: Alt küme değil
I_A	: Birim dönüşüm (A kümesi için)
$\cup$	: Birleşim
$\emptyset$	: Boş küme
$/$	: Bölüm
$\bar{\bar{\delta}}$	: Bölüm çaprazlanmış modüllerin bölümünün sınır dönüşümü
$\bar{\delta}$	: Bölüm çaprazlanmış modülün sınır dönüşümü
çek	: Çekirdek
$\in$	: Elemanı
$\notin$	: Elemanı değil
$=$	: Eşit
$\neq$	: Eşit değil
$\cdot$	: Etki
$\setminus$	: Fark
$f : A \rightarrow B$	: Fonksiyon
$\Rightarrow$	: Gerek şart
$\Leftrightarrow$	: Gerek ve yeter şart
gör	: Görüntü
$\forall$	: Her
$\iota : A \hookrightarrow B$	: İçerme dönüşümü
$\trianglelefteq$	: İdeal
■	: İspat sonu
$\cong$	: İzomorf
$\times$	: Kartezyen çarpım
$\cap$	: Kesişim
$ $	: Kısıtlama
:	: Öyle ki
∂	: Sınır dönüşümü

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$:=$	: Tanım olarak eşit
Σ	: Toplam
$\supseteq$	: <i>Üst küme</i>
$\exists$	: Var
$\Leftarrow$	: Yeter şart



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Değişmeli Olmayan Birleşmeli Cebirlerin Çaprazlanmış Kareleri ve Morfizmleri için İzomorfizm Teoremleri

Yasemin ÖZDEMİR

**Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL

Ocak, 2022

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde cebirlerin çaprazlanmış kareleriyle ilgili literatür bilgisi sunulmuştur.

İkinci bölümde temel cebirsel kavramlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde cebirlerin çaprazlanmış modülleri detaylı bir şekilde ele alınarak alt çaprazlanmış modül, ideal, çaprazlanmış modül homomorfizminin çekirdeği ve görüntüsü, bölüm çaprazlanmış modülü gibi kavramlar incelenmiş ve cebirlerin çaprazlanmış modülleri için izomorfizm teoremlerinin ispatları verilmiştir.

Dördüncü bölümde, daha önceki bölümde verilen kavramlar cebirlerin çaprazlanmış kareleri için uyarlanmış ve verilen yeni tanımlar altında izomorfizm teoremlerinin hâlâ geçerli oldukları ispatlanmıştır.

Son bölümde ise daha önceki bölümlerde elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Cebir, çaprazlanmış modül, izomorfizm teoremi, çaprazlanmış kare

SUMMARY

M. Sc. Thesis

Isomorphism Theorems for Crossed Squares of Non-commutative Associative Algebras and Their Morphisms

Yasemin ÖZDEMİR

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Utku GÜRDAL

January, 2022

This study consists of five parts.

In the first chapter, information about the literature on crossed squares of algebras is presented.

In the second chapter, basic algebraic concepts and theorems are given.

In the third chapter, crossed modules of algebras are discussed in detail, concepts such as subcrossed module, ideal, kernel and image of crossed module homomorphism, quotient crossed module are defined, and proofs of isomorphism theorems for crossed modules of algebras are given.

In the fourth chapter, the concepts given in the previous chapter are adapted for the crossed squares of algebras and it is proved that the isomorphism theorems are still valid under the new definitions given.

In the last chapter, the results obtained in the previous chapters are interpreted.

Keywords: Algebra, crossed module, isomorphism theorems, crossed square

1. GİRİŞ

Matematiğin en eski ve en kapsayıcı alanlarından biri olan cebirin bir terim olarak etimolojisi Arapçada kırık parçaların birleştirilmesi anlamına gelen, ayrıca kimilerince zorluk ve zorlama anlamı ile de özdeşleştirilmiş olan الجبر (el-cebr) kelimesine dayanmaktadır. Bu adlandırma esas olarak, 8. ve 9. yüzyılda cebir alanında, daha genel olarak da matematik, coğrafya ve astronomi başta olmak üzere daha birçok alanda kilit çalışmalar yapmış olan ve birçok bilim tarihçisi tarafından cebirin kurucusu olarak kabul edilen Muhammed bin Musa el-Harezmi veya daha çok bilinen kısa adıyla Harezmi'nin aynı addaki kitabından kaynaklanmaktadır. Her ne kadar Harezmi sistematik cebirin kurucusu ve cebiri ayrı bir alan olarak çalışan ilk kişi olarak bilinse de modern cebir, en temel araçlardan biri olarak ikili işlem kavramını kullandığı için ve toplama işlemi de cebirsel bir temele dayandığı için cebirsel çalışmalar insanlık tarihi kadar eskiye dayanmaktadır ve buna ek olarak Harezmi döneminden çok daha önce de, örneğin Bâbil döneminde, gelişmiş cebirsel çalışmalara da rastlamak mümkündür. Harezmi'nin ve bu dönemde yaşayan bazı diğer âlimlerin eserlerinin İtalyanca ve İspanyolcaya çevrilmesiyle gelişmiş cebir çalışmaları Avrupa'da da hızlanmış ve nihayet Yeni Çağ'da modern anlamdaki cebirsel akademik çalışmaların temelleri atılmıştır.

Cebir, geometri ile birlikte, matematiğin temel alt alanlarının en köklü olanlarından biri olarak düşünülebilir. Matematiğin başka bir temel alt alanı olan topolojinin ise, cebirin hâlihazırda büyük gelişim göstermiş olduğu 18. yüzyılın sonlarında kavramsal temelleri yeni yeni oluşmaya başlamış ve modern anlamdaki topoloji tanımı ancak 20. yüzyılın ikinci çeyreğinde verilebilmiştir. Hemen hemen aynı dönemlerde, daha 20. yüzyılın yarısına bile ulaşılmamışken, cebir ile topoloji arasında çok sıkı bağların bulunduğu keşfedilmeye başlanmıştır. Bu keşif, günümüzde cebirsel topoloji adıyla bilinen yeni bir alanın ortaya çıkmasına neden olmuştur. Adından zannedilebileceğinin aksine cebirsel topoloji, cebirle topolojinin bir karışımı olmaktan ziyade, yüzlerce hatta binlerce yıllık cebirsel bilgi birikiminden yararlanarak çözüme daha kolay bir yoldan ulaşmak için, yeni gelişmekte olan topoloji alanındaki bazı problemlerin topoloji alanından cebir alanına çeşitli araç ve yöntemlerle transfer edilmesini, cebir alanına taşınan problemin çözülmesini ve bu çözüm yardımıyla topoloji alanındaki orijinal problem ile ilgili yorumlar yapılmasını, hatta bazı durumlarda kesin çözümler elde edilmesini amaçlar. Bu çalışmanın temel konusunu oluşturan

çaprazlanmış modüller ve çaprazlanmış kareler de cebirsel topoloji alanındaki bazı çalışmalarda karşılaşılan örnekler model alınarak soyutlanmış cebirsel topolojik kavramlardır.

Çaprazlanmış modül kavramı literatürde ilk defa John Henry Constantine Whitehead (Whitehead, 1949) tarafından gruplar için tanımlanmıştır. Buradaki tanım bir topolojik uzayın homotopi gruplarından ilham alınarak geliştirilmiştir. Daha sonraki yıllarda çaprazlanmış modüllerle ilgili burada hepsi sıralanamayacak kadar çok sayıda çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan öne çıkan bazılarına Stephen Lichtenbaum ile Michael Schlessinger (Lichtenbaum ve Schlessinger, 1967) ve Murray Grestenhaber (Grestenhaber, 1966) tarafından birleşmeli ve değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modülleri ile ilgili yapılan çalışmalar, Timothy Porter (Porter, 1986) tarafından çaprazlanmış modül kavramını değişmeli cebirler üzerine aktarılması ile ilgili çalışma, Graham J. Ellis (Ellis, 1988) tarafından birçok farklı cebirin çaprazlanmış modül tanımlarına yer verilen çalışma, Timothy Porter ve Zekeriya Arvasi (Porter ve Arvasi, 1996) ve Ummuhan Ege (Ege, 2002) tarafından değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modülleriyle ilgi önemli bulgular sunan çalışma ve Alper Odabaş (Odabaş, 2009) tarafından çaprazlanmış modüller için izomorfizm teoremlerini konu edinen çalışma örnek olarak verilebilir.

İlk ortaya çıkışı gruplara dayanan ancak daha sonra değişmeli cebir, Lie cebiri, Leibniz cebiri, birleşmeli cebir ve daha birçok başka cebir türlerine, ayrıca raklar, topolojik gruplar ve benzeri diğer cebirsel yapılara ve bunlara ek olarak oldukça genel çerçevede kalan bazı kategori teorik yapılara uyarlanan çaprazlanmış modül kavramının başka bir geliştirme yönü de boyutsaldır. Sıradan bir cebirsel yapıyla kıyaslandığında iki boyutlu olduğu söylenebilecek olan çaprazlanmış modüllerden, öne çıkan iki temel yaklaşım altında daha üst boyutları temsil eden yapılar üretmek mümkündür. Söz konusu bu yaklaşımlardan ilki, $n + 1$ tane temel cebirsel yapının sıra sıra dizilmesi şeklinde gözüken $n -$ çaprazlanmış modül kavramını vermektedir. İkinci yaklaşım ise 2^n tane temel cebirsel yapının bir $n -$ küp üzerine yerleşmesi şeklinde gözüken $n -$ çaprazlanmış küp kavramını vermektedir. Her iki yaklaşımın ürünlerinin de belirli kriterler altında birbirlerine dönüştürülebilir oldukları bilinmektedir. Özel olarak $n = 2$ alındığında elde edilen $2 -$ çaprazlanmış küp yapısına çaprazlanmış kare adı verilir ki bu yapı bu tezin odağında yer almaktadır. Burada bahsi geçen $n -$ çaprazlanmış küpler Graham J. Ellis (Ellis, 1984) tarafından tanımlanmış ve Nizar Miekha Shammu (Shammu, 1992) cebirlerin çaprazlanmış karelerinde bizim çalışmamıza kaynaklık eden bazı öncü çalışmalarda bulunmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, bu tez çalışması boyunca gerekli olacak olan bazı cebirsel tanımlara, teoremlere ve bunlardan bazılarının ispatlarına yer verilmiştir. Bu bölümdeki tanım ve teoremler literatürde iyi bilinen sonuçlar olup herhangi bir standart kaynakta, örneğin Thomas William Hungerford'un eserinde (Hungerford, 1974) bulunabilir.

Tanım 2.1. (İkili işlem) G bir küme olmak üzere $\star : G \times G \rightarrow G$ şeklindeki bir fonksiyona G kümesi üzerinde bir ikili işlem denir. Eğer $a, b \in G$ ise $\star(a, b)$ elemanı $a \star b$ şeklinde veya karışıklık olmaması hâlinde bazen kısaca ab şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2. (Değişmeli Grup) Bir G kümesi üzerinde bir $+$ ikili işlemi verilsin. Eğer

- i) $\forall x, y, z \in G$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$
- ii) $\forall x \in G$ için $x + 0 = 0 + x$ olacak şekilde bir $0 \in G$ vardır.
- iii) G 'deki her x için, $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olacak şekilde bir $-x \in G$ vardır.
- iv) $\forall x, y \in G$ için $x + y = y + x$

şartları sağlanıyorsa $(G, +)$ ikilisine bir değişmeli grup (Abel grup) denir.

Tanım 2.3. (Halka) Bir H kümesi üzerinde $\forall x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} + : H \times H &\rightarrow H, & +(x, y) &= x + y \\ \cdot : H \times H &\rightarrow H, & \cdot(x, y) &= xy \end{aligned}$$

ile tanımlı ikili işlemler verilsin. Eğer,

- i) $(H, +)$ değişmeli grup
- ii) $\forall x, y, z \in H$ için $x(yz) = (xy)z$
- iii) $\forall x, y, z \in H$ için $x(y + z) = xy + xz$ ve $(x + y)z = xz + yz$

özellikleri sağlanıyorsa, H 'ye bir halka denir ve bu halka $(H, +, \cdot)$ şeklinde gösterilir. Eğer bu şartlara ek olarak

- iv) $\forall x \in H$ için $x1_H = 1_Hx = x$ olacak şekilde $1_H \in H$ elemanı vardır.

Şartı da sağlanıyorsa, H halkasına birimli halka ve bu 1_H elemanına da H 'nin birimi denir. Karışıklık olmaması durumunda 1_H yerine kısaca 1 gösterimi de kullanılır. Eğer bir H halkasında

- v) $\forall x, y \in H$ için $xy = yx$

özelliği sağlanıyorsa H 'ye bir değişmeli halka denir.

Tanım 2.4. (Cisim) H birimli ve değişmeli bir halka olsun. $\forall x \in H, x \neq 0$ için $\exists y \in H, xy = yx = 1$ olması sağlanıyorsa, yani birimli ve değişmeli bir H halkasının sıfırdan farklı her elemanının çarpmaya göre bir tersi varsa H 'ye bir cisim denir.

Tanım 2.5. (Modül) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli bir halka ve $(R, +)$ bir değişmeli grup olmak üzere her $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in R$ için

- i) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
- ii) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
- iii) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
- iv) $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

şartlarını sağlayan bir $\cdot : \mathbb{K} \times R \rightarrow R$ dış işlemi verilsin. Bu durumda R 'ye bir sol $\mathbb{K}$ -modül veya kısaca bir $\mathbb{K}$ -modül denir. Eğer burada $\mathbb{K}$ bir cisim ise R 'ye $\mathbb{K}$ üzerinde bir vektör uzayı denir. Benzer şekilde her $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in R$ için

- i) $(x + y) \cdot \alpha = x \cdot \alpha + y \cdot \alpha$
- ii) $x \cdot (\alpha + \beta) = x \cdot \alpha + x \cdot \beta$
- iii) $(x \cdot \beta) \cdot \alpha = x \cdot (\beta\alpha)$
- iv) $x \cdot 1_{\mathbb{K}} = x$

şartlarını sağlayan bir $\cdot : R \times \mathbb{K} \rightarrow R$ dış işlemi varsa R 'ye bir sağ $\mathbb{K}$ -modül denir. Eğer R üzerinde hem bir sol $\mathbb{K}$ -modül, hem de bir sağ $\mathbb{K}$ -modül yapısı varsa ve bu iki yapı her $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in R$ için

$$(\alpha \cdot x) \cdot \beta = \alpha \cdot (x \cdot \beta)$$

olmasını sağlıyorsa R 'ye bir $\mathbb{K}$ -bimodül denir.

Tanım 2.6. Bir R $\mathbb{K}$ -bimodülü üzerinde bir

$$\cdot : R \times R \rightarrow R$$

işleminin verildiğini varsayalım. Eğer bu işlem her $\alpha \in \mathbb{K}$ ve $r, s, t \in R$ için

- i) $(rs)t = r(st)$
- ii) $(r + s)t = rt + st$
- iii) $r(s + t) = rs + rt$
- iv) $\alpha \cdot (rs) = (\alpha \cdot r)s = r(\alpha \cdot s)$
- v) $(rs) \cdot \alpha = r(s \cdot \alpha) = (r \cdot \alpha)s$

olmasını sağlıyorsa R 'ye bir $\mathbb{K}$ –bicebir denir. Ayrıca R 'nin bu çarpma işlemine göre bir birim elemanı da varsa, yani bir $1 \in R$ elemanı her $r \in R$ için $1r = r1 = r$ olmasını sağlıyorsa R 'ye birimli $\mathbb{K}$ –bicebir; eğer R çarpmaya göre değişmeliyse, yani her $r, s \in R$ için $rs = sr$ oluyorsa R 'ye değişmeli $\mathbb{K}$ –bicebir denir. R aynı anda hem birimli hem de değişmeli ise R 'ye birimli ve değişmeli $\mathbb{K}$ –bicebir denir.

Bu çalışma boyunca “bicebir” yerine kısaca “cebiri” sözcüğü kullanılacaktır. Ayrıca R birimli bir $\mathbb{K}$ –cebiri ise, R 'ye bir birimli halka gözüyle bakılarak bir A kümesi üzerinde bir R –cebiri yapısı tanımlanabilir.

Tanım 2.7. R bir $\mathbb{K}$ –cebiri ve $S \subseteq R$ olmak üzere, eğer her $s, s' \in S$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ için

- i) $s - s' \in S$
- ii) $ss' \in S$
- iii) $\alpha \cdot s \in S$
- iv) $s \cdot \alpha \in S$

oluyorsa S 'ye R 'nin bir alt cebiri denir ve bu durum $S \leq R$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.8. R bir $\mathbb{K}$ –cebiri ve I, R 'nin bir alt cebiri olsun. Eğer her $i \in I$ ve $r \in R$ için

- (i) $ri \in I$
- (ii) $ir \in I$

oluyorsa I 'ya R 'nin bir ideali denir. Bu durum $I \trianglelefteq R$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.9. R bir $\mathbb{K}$ –cebiri olsun.

- a) $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ R 'nin alt cebirlerinin bir ailesi ise $\bigcap_{\lambda} I_\lambda \leq R$ 'dir.
- b) $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ R 'nin ideallerinin bir ailesi ise $\bigcap_{\lambda} I_\lambda \trianglelefteq R$ 'dir.

Tanım 2.10. R bir $\mathbb{K}$ –cebiri $I, I' \subseteq R$ olmak üzere $I + I'$ kümesi,

$$I + I' = \{a + b \mid a \in I, b \in I'\}$$

ile tanımlanır. Ayrıca, $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, R 'nin alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere $\sum_{\lambda} I_\lambda$ kümesi

$$\sum_{\lambda} I_\lambda = \{a_{\lambda_1} + \dots + a_{\lambda_n} \mid a_{\lambda_1} \in I_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_n} \in I_{\lambda_n}, \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \Lambda\}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.11. R bir $\mathbb{K}$ –cebiri olsun.

- a) $I \trianglelefteq R$ ve $S \leq R$ ise, $I + S \leq R$ ’dir.
- b) $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ R ’nin ideallerinin bir ailesi ise $\sum_\lambda I_\lambda \trianglelefteq R$ ’dir.

Tanım 2.12. R ve R' birer $\mathbb{K}$ –cebiri olmak üzere eğer bir $\varphi : R \rightarrow R'$ fonksiyonu her $r, s \in R$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için

- (i) $\varphi(r + s) = \varphi(r) + \varphi(s)$
- (ii) $\varphi(rs) = \varphi(r)\varphi(s)$
- (iii) $\varphi(\alpha \cdot r) = \alpha \cdot \varphi(r)$
- (iv) $\varphi(r \cdot \alpha) = \varphi(r) \cdot \alpha$

olmasını sağlıyorsa φ ’ye bir $\mathbb{K}$ –cebiri homomorfizmi denir. Eğer φ ayrıca birebir ve örten ise, bu durumda φ ’ye bir $\mathbb{K}$ –cebiri izomorfizmi denir.

Tanım 2.13. R ve R' birer $\mathbb{K}$ –cebiri ve $\varphi : R \rightarrow R'$ bir $\mathbb{K}$ –cebiri homomorfizmi olmak üzere

$$\text{çek } \varphi = \{r \in R \mid \varphi(r) = 0\}$$

kümesine φ ’nin çekirdeği,

$$\text{gör } \varphi = \{\varphi(r) \mid r \in R\}$$

kümesine φ ’nin görüntüsü denir.

Önerme 2.14. R ve R' birer $\mathbb{K}$ –cebiri ve $\varphi : R \rightarrow R'$ bir $\mathbb{K}$ –cebiri homomorfizmi olmak üzere çek $\varphi \trianglelefteq R$ ve gör $\varphi \leq R'$ olur.

Tanım 2.15. R bir $\mathbb{K}$ –cebiri ve $I \trianglelefteq R$ olmak üzere her bir $r \in R$ için

$$r + I = \{r + i \mid i \in I\}$$

kümesine I ’nin bir yan sınıfı denir. I ’nin bütün yan sınıflarının kümesi R/I ile gösterilir.

Önerme 2.16. R bir $\mathbb{K}$ –cebiri, $I \trianglelefteq R$ ve $r + I, r' + I \in R/I$ olmak üzere, $r + I = r' + I$ olması için gerek ve yeter şart $r - r' \in I$ olmasıdır.

Önerme 2.17. R bir $\mathbb{K}$ –cebiri ve $I \trianglelefteq R$ olmak üzere her $r + I, r' + I \in R/I$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için

$$(r + I) + (r' + I) = r + r' + I$$

$$(r + I)(r' + I) = rr' + I$$

$$\alpha \cdot (r + I) = \alpha \cdot r + I$$

$$(r + I) \cdot \alpha = r \cdot \alpha + I$$

işlemleri ile birlikte R/I bir $\mathbb{K}$ -cebirdir. Ayrıca her $r \in R$ için $q(r) = r + I$ ile tanımlanan $q : R \rightarrow R/I$ dönüşümü bir $\mathbb{K}$ -cebir homomorfizmidir.

Tanım 2.18. R bir $\mathbb{K}$ -cebir ve $I \trianglelefteq R$ olmak üzere R/I 'ya bölüm cebiri ve $q(r) = r + I$ ile tanımlı $q : R \rightarrow R/I$ homomorfizmine kanonik homomorfizm denir.

Teorem 2.19. (Cebirler için 1. İzomorfizm Teoremi)

R ve R' birer $\mathbb{K}$ -cebir ve $\varphi : R \rightarrow R'$ bir $\mathbb{K}$ -cebir homomorfizmi ise

$$R/\ker \varphi \cong \text{gör } \varphi$$

olur.

İspat: $\phi : R/\ker \varphi \rightarrow \text{gör } \varphi$ dönüşümünü her $r + \ker \varphi \in R/\ker \varphi$ için

$$\phi(r + \ker \varphi) = \varphi(r)$$

olarak tanımlayalım.

İyi Tanımlılık: Her $r_1 + \ker \varphi, r_2 + \ker \varphi \in R/\ker \varphi$ için

$$\begin{aligned} r_1 + \ker \varphi = r_2 + \ker \varphi &\Rightarrow r_1 - r_2 \in \ker \varphi \\ &\Rightarrow \varphi(r_1 - r_2) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi(r_1) = \varphi(r_2) \\ &\Rightarrow \phi(r_1 + \ker \varphi) = \phi(r_2 + \ker \varphi) \end{aligned}$$

Birebirlik: Her $r_1 + \ker \varphi, r_2 + \ker \varphi \in R/\ker \varphi$ için

$$\begin{aligned} \phi(r_1 + \ker \varphi) = \phi(r_2 + \ker \varphi) &\Rightarrow \varphi(r_1) = \varphi(r_2) \\ &\Rightarrow \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi(r_1 - r_2) = 0 \\ &\Rightarrow r_1 - r_2 \in \ker \varphi \\ &\Rightarrow r_1 + \ker \varphi = r_2 + \ker \varphi \end{aligned}$$

Örtenlik: $r' \in \text{gör } \varphi$ olsun.

$$\varphi(r) = r'$$

olacak şekilde $r \in R$ vardır.

$$r + \ker \varphi \in R / \ker \varphi$$

elemanını ele alırsak

$$\phi(r + \ker \varphi) = \varphi(r) = r'$$

olur.

Homomorfizm: Her $r_1 + \ker \varphi, r_2 + \ker \varphi \in R / \ker \varphi$ için

$$\begin{aligned} \phi(r_1 + \ker \varphi + r_2 + \ker \varphi) &= \phi(r_1 + r_2 + \ker \varphi) \\ &= \varphi(r_1 + r_2) \\ &= \varphi(r_1) + \varphi(r_2) \\ &= \phi(r_1 + \ker \varphi) + \phi(r_2 + \ker \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi((r_1 + \ker \varphi)(r_2 + \ker \varphi)) &= \phi(r_1 r_2 + \ker \varphi) \\ &= \varphi(r_1 r_2) \\ &= \varphi(r_1) \varphi(r_2) \\ &= \phi(r_1 + \ker \varphi) \phi(r_2 + \ker \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(\alpha \cdot (r + \ker \varphi)) &= \phi(\alpha \cdot r + \ker \varphi) \\ &= \varphi(\alpha \cdot r) \\ &= \alpha \cdot \varphi(r) \\ &= \alpha \cdot \phi(r + \ker \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi((r + \ker \varphi) \cdot \alpha) &= \phi(r \cdot \alpha + \ker \varphi) \\ &= \varphi(r \cdot \alpha) \\ &= \varphi(r) \cdot \alpha \\ &= \phi(r + \ker \varphi) \cdot \alpha \end{aligned}$$

Önerme 2.20. R bir $\mathbb{K}$ –cebiri, $S \leq I \leq R$ ve $S \trianglelefteq R$ ise, $S \trianglelefteq I$ ve $I/S \trianglelefteq R/S$ ’dir.

İspat: $i \in I$ ve $s \in S$ olsun. $S \trianglelefteq R$ ve $i \in R$ olduğu için $si, is \in S$ olur. Böylece $S \trianglelefteq I$ ’dir. $I \subseteq R$ olduğundan $I/S \subseteq R/S$ olur.

$$i_1 + S, i_2 + S \in I/S$$

ise $i_1, i_2 \in I$ olup $i_1 - i_2 \in I$ olmasından

$$(i_1 + S) - (i_2 + S) = i_1 - i_2 + S \in I/S$$

ve $i \in I, r \in R$ olmak üzere $i + S \in I/S, r + S \in R/S$ için

$$(i + S)(r + S) = ir + S$$

$$(r + S)(i + S) = ri + S$$

ve $ir, ri \in I$ olduğundan

$$(i + S)(r + S) \in I/S$$

olur. Böylece $I/S \trianglelefteq R/S$ 'dir.

Teorem 2.21. (Cebirler için 2. İzomorfizm Teoremi)

R bir $\mathbb{K}$ -cebir $S \leq I \trianglelefteq R$ ve $S \trianglelefteq R$ ise

$$R/S \Big/ I/S \cong R/I$$

olur.

İspat: İlk olarak

$$\varphi: R/S \Big/ I/S \rightarrow R/I$$

$$\varphi(r + S + I/S) = r + I$$

fonksiyonu tanımlayalım.

İyi Tanımlılık: $r_1 + S + I/S, r_2 + S + I/S \in R/S \Big/ I/S$ olmak üzere eğer

$$r_1 + S + I/S = r_2 + S + I/S$$

ise, bu durumda

$$(r_1 + S) - (r_2 + S) \in I/S$$

yani

$$r_1 - r_2 + S \in I/S$$

olur. Bu nedenle

$$r_1 - r_2 + S = i + S$$

olacak şekilde en az bir $i \in I$ vardır. Burada $r_1 - r_2 - i \in S \subseteq I$ olmasından

$$r_1 - r_2 = (r_1 - r_2 - i) + i \in I \Rightarrow r_1 + I = r_2 + I$$

$$\Rightarrow \varphi(r_1 + S + I/S) = \varphi(r_2 + S + I/S)$$

elde edilir.

Birebirlik: Her $r_1 + S + I/S, r_2 + S + I/S \in R/S \big/ I/S$ için

$$\begin{aligned}\varphi(r_1 + S + I/S) &= \varphi(r_2 + S + I/S) \Rightarrow r_1 + I = r_2 + I \\ &\Rightarrow r_1 - r_2 \in I \\ &\Rightarrow r_1 - r_2 + S \in I/S \\ &\Rightarrow (r_1 + S) - (r_2 + S) \in I/S \\ &\Rightarrow r_1 + S + I/S = r_2 + S + I/S\end{aligned}$$

Örtenlik: $r \in R$ olmak üzere $r + I \in R/I$ olsun. Bu durumda

$$r + I + I/S \in R/S \big/ I/S$$

olup

$$\varphi(r + S + I/S) = r + I$$

bulunur.

Homomorfizm: Her $r_1 + S + I/S, r_2 + S + I/S \in R/S \big/ I/S$ için

$$\begin{aligned}\varphi(r_1 + S + I/S + r_2 + S + I/S) &= \varphi(r_1 + r_2 + S + I/S) \\ &= r_1 + r_2 + I \\ &= r_1 + I + r_2 + I \\ &= \varphi(r_1 + S + I/S) + \varphi(r_2 + S + I/S)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi((r_1 + S + I/S)(r_2 + S + I/S)) &= \varphi(r_1 r_2 + S + I/S) \\ &= r_1 r_2 + I \\ &= (r_1 + I)(r_2 + I) \\ &= \varphi(r_1 + S + I/S) \varphi(r_2 + S + I/S)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha \cdot (r + S + I/S)) &= \varphi(\alpha \cdot r + S + I/S) \\ &= \alpha \cdot r + I \\ &= \alpha \cdot (r + I) \\ &= \alpha \cdot \varphi(r + S + I/S)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi((r + S + I/S) \cdot \alpha) &= \varphi(r \cdot \alpha + S + I/S) \\ &= r \cdot \alpha + I \\ &= (r + I) \cdot \alpha\end{aligned}$$

$$= \varphi(r + S + I/S) \cdot \alpha$$

Teorem 2.22. (Cebirler İçin 3. İzomorfizm Teoremi)

$I \trianglelefteq R, S \leq R$ ise

$$S/I \cap S \cong I + S/I$$

İspat: İlk olarak

$$\varphi: J/I \cap S \rightarrow I + S/I$$

$$\varphi(s + I \cap S) = s + I$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

İyi Tanımlılık: $s_1 + I \cap S = s_2 + I \cap S \in J/I \cap S$

$$s_1 + I \cap S = s_2 + I \cap S$$

olsun. Bu durumda

$$s_1 - s_2 \in I \cap S$$

olup

$$s_1 - s_2 \in I$$

'dır. Buradan,

$$s_1 + I = s_2 + I$$

olup

$$\varphi(s_1 + I \cap S) = \varphi(s_2 + I \cap S)$$

elde edilir.

Birebirlik: Her $s_1 + I \cap S = s_2 + I \cap S \in J/I \cap S$ için

$$\begin{aligned} \varphi(s_1 + I \cap S) &= \varphi(s_2 + I \cap S) \Rightarrow s_1 + I = s_2 + I \\ &\Rightarrow s_1 - s_2 \in I \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $s_1, s_2 \in S$ olduğundan $s_1 - s_2 \in S$ olur. Dolayısıyla $s_1 - s_2 \in I \cap S$ olup

$$s_1 + I \cap S = s_2 + I \cap S$$

Örtenlik: $i \in I, s \in S$ olmak üzere, $i + s + I \in I + S/I$ olsun.

$i \in I$ olduğundan,

$$i + s + I = i + I + s + I = I + s + I = s + I$$

ve böylece $s + I \cap S \in S/I \cap S$ için

$$\varphi(s + I \cap S) = s + I = i + s + I$$

olur.

Homomorfizm: Her $s_1 + I \cap S = s_2 + I \cap S \in J/I \cap S$ için

$$\begin{aligned}\varphi(s_1 + I \cap S + s_2 + I \cap S) &= \varphi(s_1 + s_2 + I \cap S) \\ &= s_1 + s_2 + I \\ &= s_1 + I + s_2 + I \\ &= \varphi(s_1 + I \cap S) + \varphi(s_2 + I \cap S)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi((s_1 + I \cap S)(s_2 + I \cap S)) &= \varphi(s_1 s_2 + I \cap S) \\ &= s_1 s_2 + I \\ &= (s_1 + I)(s_2 + I) \\ &= \varphi(s_1 + I \cap S) \varphi(s_2 + I \cap S)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha \cdot (s + I \cap S)) &= \varphi(\alpha \cdot s + I \cap S) \\ &= \alpha \cdot s + I \\ &= \alpha \cdot (s + I) \\ &= \alpha \cdot \varphi(s + I \cap S)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi((s + I \cap S) \cdot \alpha) &= \varphi(s \cdot \alpha + I \cap S) \\ &= s \cdot \alpha + I \\ &= (s + I) \cdot \alpha \\ &= \varphi(s + I \cap S) \cdot \alpha\end{aligned}$$

3. BİRLEŞMELİ CEBİRLERİN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİ

Bu bölümde, birleşmeli cebirlerin çaprazlanmış modülleri ile ilgili tanımlara, teoremlere ve bunlardan bazılarının ispatlarına yer verilmiştir. Bu bölümde açıklanarak derlenen bütün sonuçlar özet hâlinde Nizar Miekha Shammu'nun (Shammu, 1992) eserlerinde bulunabilir.

R bir $\mathbb{K}$ – cebir olsun. Bu durumda R üzerindeki çarpma ile birlikte R 'ye aynı zamanda bir R – cebir gözüyle bakılabilir. Böylece, eğer R bir $\mathbb{K}$ – cebir ve örneğin C bir R – cebir ise bir $\partial : C \rightarrow R$ fonksiyonunun bir R – cebir homomorfizmi olup olmamasından bahsedilebilir. Böyle bir durumda ∂ 'ın bir R – cebir homomorfizmi olması

- i) $\partial(c_1 + c_2) = \partial(c_1) + \partial(c_2)$
- ii) $\partial(c_1 c_2) = \partial(c_1)\partial(c_2)$
- iii) $\partial(r \cdot c) = r\partial(c)$
- iv) $\partial(c \cdot r) = \partial(c)r$

eşitliklerinin her $c, c_1, c_2 \in C$, $r \in R$ için sağlanması anlamına gelmiş olur. Ayrıca; 1, R 'nin birim elemanını göstermek üzere her $\alpha \in \mathbb{K}$ için α 'nın c 'ye etkisini $\alpha \cdot c := (\alpha \cdot 1) \cdot c$ ve $c \cdot \alpha := c \cdot (1 \cdot \alpha)$ olarak tanımlamamız durumunda C 'ye de bir $\mathbb{K}$ – cebir olarak bakılabilir. Bu durumda da, $\partial : C \rightarrow R$ fonksiyonunun bir $\mathbb{K}$ – cebir homomorfizmi olması

- (i) $\partial(c_1 + c_2) = \partial(c_1) + \partial(c_2)$
- (ii) $\partial(c_1 c_2) = \partial(c_1)\partial(c_2)$
- (iii) $\partial(\alpha \cdot c) = \alpha \cdot \partial(c)$
- (iv) $\partial(c \cdot \alpha) = \partial(c) \cdot \alpha$

eşitliklerinin her $c, c_1, c_2 \in C$, $\alpha \in \mathbb{K}$ için sağlanması anlamına gelir.

Tanım 3.1. R bir $\mathbb{K}$ – cebir, C bir R – cebir ve $\partial : C \rightarrow R$ bir $\mathbb{K}$ – cebir homomorfizmi olsun. Her $c_1, c_2 \in C$, $r \in R$ için

- LCM1) $\partial(r \cdot c) = r\partial(c)$
- RCM1) $\partial(c \cdot r) = \partial(c)r$
- LCM2) $\partial(c_1) \cdot c_2 = c_1 c_2$
- RCM2) $c_1 \cdot \partial(c_2) = c_1 c_2$

şartlarını sağlıyorsa (C, R, ∂) üçlüsüne $\mathbb{K}$ – cebirlerin bir çaprazlanmış modülü denir.

Tanım 3.2. (C, R, ∂) ve (C', R', ∂') $\mathbb{K}$ – cebirlerin çaprazlanmış modülleri olsunlar. Eğer

- (i) $\phi : R \rightarrow R'$ ve $\psi : C \rightarrow C'$ birer $\mathbb{K}$ – cebir homomorfizmi
- (ii) $\psi(r \cdot c) = \phi(r) \cdot \psi(c)$
- (iii) $\psi(c \cdot r) = \psi(c) \cdot \phi(r)$
- (iv) $\partial' \psi = \phi \partial$

ise, yani

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\psi} & C' \\
 \partial \downarrow & & \downarrow \partial' \\
 R & \xrightarrow{\phi} & R'
 \end{array}$$

diyagramı değişimli ise, $(\psi, \phi) : (C, R, \partial) \rightarrow (C', R', \partial')$ yazılır ve burada (ψ, ϕ) ikilisine bir $\mathbb{K}$ – cebir çaprazlanmış modül morfizmi denir.

Önerme 3.3. (C, R, ∂) $\mathbb{K}$ – cebirlerin bir çaprazlanmış modülü ise $\text{gör}\partial$, R 'nin bir idealidir.

İspat: $i_1, i_2 \in \text{gör}\partial$ olsun. Bu durumda $i_1 = \partial c_1$, $i_2 = \partial c_2$ olacak şekilde $c_1, c_2 \in C$ vardır. Buradan $i_1 - i_2 = \partial c_1 - \partial c_2 = \partial(c_1 - c_2)$, $c_1 - c_2 \in C$ olup $i_1 - i_2 \in \text{gör}\partial$ elde edilir. $i \in \text{gör}\partial$ ve $r \in R$ olsun. $\partial c = i$ olacak şekilde $c \in C$ vardır. Ayrıca $ri = r\partial c = \partial(r \cdot c)$, $r \cdot c \in C$ olduğundan $ri \in \text{gör}\partial$ 'dır. Dolayısıyla $\text{gör}\partial$, C 'nin bir idealidir. ■

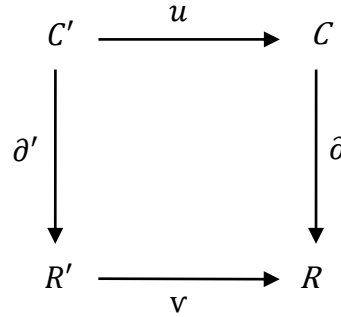
Uyarı 3.4. Herhangi bir ∂ cebir homomorfizminin çekirdeği ideal olmayı her zaman sağlamadığından, (C, R, ∂) cebirlerin bir çaprazlanmış modülü ise $\text{çek}\partial$, C 'nin bir idealidir. Yukarıdaki önerme ise (C, R, ∂) 'ın çaprazlanmış modül olması durumunda ∂ 'ın görüntüsünün de R 'nin ideali olduğunu ifade etmektedir. Hatırlatalım ki, her zaman alt cebir olduğu bilinen görüntü kümesinin, aynı zamanda bir ideal olması sıradan bir cebir homomorfizmi için normalde sağlanmak zorunda değildir, ancak çaprazlanmış modüllerin sınır homomorfizmleri bu özelliği de sağlamaktadır.

3.1. Alt Çaprazlanmış Modül ve Çaprazlanmış Modüllerin İdeali

Bu bölümde, alt çaprazlanmış modüllerin tanımı, bölüm alt çaprazlanmış modülü ve idealleri ile ilgili bilgilere yer verilmiştir.

Tanım 3.5. (C, R, ∂) , $\mathbb{K}$ –cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olsun. (C, R, ∂) 'ın bir (C', R', ∂') alt çaprazlanmış modülü şu şekilde tanımlanır.

- i) C' , C 'nin alt cebiri ve R' , R 'nin alt cebiridir.
- ii) R' 'nün C' üzerine etkisi, R 'nin C üzerine etkisinin kısıtlanmışıdır.
- iii) (C', R', ∂') bir çaprazlanmış R' –modülüdür.
- iv) Çaprazlanmış modüllerin morfizmlerinin



diyagramı, u ve v içermeye dönüşümlerini göstermek üzere değişmelidir.

Tanım 3.6. (C', R', ∂') , (C, R, ∂) 'ın bir alt çaprazlanmış modülü olsun. Eğer aşağıdakiler sağlanıyorsa (C', R', ∂') 'ye (C, R, ∂) 'ın bir ideali denir.

- i) $CC' \cup C'C \subseteq C'$ ve R' , R 'nin idealidir.
- ii) $CR' \cup R'C \subseteq C'$
- iii) C' , R 'nin etkisi altında kapalıdır, yani $RC', C'R \subseteq C'$

Örnek 3.7. (R, R, I_R) çaprazlanmış modülünü ele alalım. I , R 'nin ideali ve J , R 'nin alt halkası, $I \subseteq J$ olmak üzere (I, J, ι) , (R, R, I_R) 'nin bir alt çaprazlanmış modülüdür.

Gerçekten, I , R 'nin ideali olduğu için alt cebiri ve J , R 'nin alt halkası olmak üzere; I ideal, $J \subseteq R$ olduğu için J , I 'ya R üzerinde aynı etkiyi yapar, aynı nedenle (I, J, ι) bir çaprazlanmış modüldür ve açık olarak

$$\begin{array}{ccc}
I & \xrightarrow{\iota} & R \\
\downarrow \iota & & \downarrow I_R \\
J & \xrightarrow{\iota} & R
\end{array}$$

değişmelidir.

Örnek 3.8. I, R halkasının bir ideali ise, $(I, I, I_I), (R, R, I_R)$ 'nin bir idealidir.

Gerçekten, bir önceki örnekte J yerine I alırsak $(I, I, I_I), (R, R, I_R)$ 'nin bir alt çaprazlanmış modülüdür. $II \cup II = II$ olup R 'nin bir idealidir. $IR \cup RI = I \cup I = I \subseteq I$ olur. ve $RI = IR = I \subseteq I$ olması sağlanır.

Örnek 3.9. I ve J, R 'nin idealleri olsun. Bu durumda, $(I \cap J, I, \iota), (J, R, \iota)$ 'nin ideali ve $(I \cap J, J, \iota), (I, R, \iota)$ 'nin idealidir.

Gerçekten, $I \cap J, J$ 'nin ideali olduğundan alt cebirdir, I, R 'nin ideali olduğu için alt halkasıdır. $I, I \cap J$ üzerine, R 'nin J üzerine yaptığı etki gibi etki eder. $(I \cap J, I, \iota)$ üçlüsü, $I \cap J, I$ 'nin ideali olduğu için bir çaprazlanmış modüldür ve

$$\begin{array}{ccc}
I \cap J & \xrightarrow{\iota} & J \\
\downarrow \iota & & \downarrow \iota \\
I & \xrightarrow{\iota} & R
\end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

Böylece $(I \cap J, I, \iota), (J, R, \iota)$ 'nin bir alt çaprazlanmış modülü olur. Bunun yanında ayrıca $(I \cap J)J \cup J(I \cap J) \subseteq I \cap J$ 'dir. I, R 'nin idealidir, hem I hem J R 'nin ideali olduklarından $JI \cup IJ \subseteq I, JI \cup IJ \subseteq J$ olur. Buradan $JI \cup IJ \subseteq I \cap J$ olur. $I \cap J$ de R 'nin ideali olacağından $R(I \cap J), (I \cap J)R \subseteq I \cap J$ 'dir. Böylece $(I \cap J, I, \iota), (J, R, \iota)$ 'nin idealidir.

$(I \cap J, J, \iota) \leq (I, R, \iota)$ olduğundan $(I \cap J)I \cup I(I \cap J) \subseteq I \cap J$ olup J de R 'nin idealidir. Hem I hem de J R 'nin ideali olduklarından $JI \cup IJ \subseteq I, JI \cup IJ \subseteq J$ olur. Böylece

$JI \cup IJ \subseteq I \cap J$ elde edilir. $I \cap J$, R 'nin ideali olacağından $R(I \cap J), (I \cap J)R \subseteq I \cap J$ 'dir. Böylece $(I \cap J, J, \iota), (I, R, \iota)$ 'nın idealidir.

Önerme 3.10. i) (C, R, ∂) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modüllerinin herhangi bir $\{(I_i, J_i, \partial_i)\}$ ailesinin kesişimi de bir alt çaprazlanmış modüldür.

ii) (C, R, ∂) çaprazlanmış modülünün ideallerinin herhangi bir $\{(I_i, J_i, R_i)\}$ ailesinin kesişimi de bir idealdir.

İspat: i) Her i için I_i , C 'nin alt cebiri olduğundan $\cap I_i$ de C 'nin alt cebiridir. J_i 'ler R 'nin alt cebiri olduğundan $\cap J_i$ de R 'nin alt cebiridir. $j \in \cap J_i, j \in \cap I_i$ olsun. Bu durumda her i için $j \in J_i$ ve $j \in I_i$ olduğundan $j \cdot j \in I_i$ olur ki, buradan $j \cdot j \in \cap I_i$ bulunur. Her bir (I_i, J_i, ∂_i) bir çaprazlanmış modül olduğundan

$$\text{CM1)} \quad \text{Her } j \in \cap I_i, j \in \cap J_i \text{ için } \partial(j \cdot j) = j\partial j$$

$$\text{CM2)} \quad \text{Her } j_1, j_2 \in \cap I_i \text{ için } \partial(j_1) \cdot j_2 = j_1 j_2$$

olduğu etkinin ve sınır dönüşümünün (C, R, ∂) 'daki etki ve sınır dönüşümünün kısıtlamaları olmasından görülür. Ayrıca, açık olarak

$$\begin{array}{ccc} \bigcap I_i & \xrightarrow{\iota} & C \\ \partial| \downarrow & & \downarrow \partial \\ \bigcap J_i & \xrightarrow{\iota} & R \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

ii) $(\cap I_i, \cap J_i, \partial_i)$ 'nin alt çaprazlanmış modülü olduğu ilk kısımdan görülmektedir. $\cap(I_i C) = (\cap I_i)C$ ve $\cap(CI_i) = C(\cap I_i)$ olduğuna dikkat edilirse her i için $I_i C \subseteq I_i$ ve $CI_i \subseteq I_i$ olmasından, $(\cap I_i)C \cup C(\cap I_i) \subseteq \cap I_i$ olur. Her bir J_i , R 'nin ideali olduğundan $\cap J_i$ de R 'nin bir idealidir.

Yine her i için, $CJ_i \subseteq I_i$ ve $J_i C \subseteq I_i$ olduğundan, her iki tarafta kesişiminin alınmasıyla $\cap(CJ_i) \cup \cap(J_i C) \subseteq \cap I_i$ ve dolayısıyla, $C(\cap J_i) \cup (\cap J_i)C \subseteq \cap I_i$ elde edilir.

$$R(\cap I_i) \subseteq \cap I_i \text{ ve } (\cap I_i)R \subseteq \cap I_i \text{ olduğu benzer şekilde görülür. } \blacksquare$$

Uyarı 3.11. Yukarıdaki önermede varlığı gösterilen $(\cap I_i, \cap J_i, \partial_i)$ alt çaprazlanmış modülü veya ideali, $\cap(I_i, J_i, \partial_i)$ şeklinde de gösterilir.

Teorem 3.12. (C, R, ∂) cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olsun.

- i) $(I, J, \partial) \trianglelefteq (C, R, \partial)$ ve $(B, Q, \partial) \leq (C, R, \partial)$ ise $(I + B, J + Q, \partial) \leq (C, R, \partial)$ olur.
- ii) $\{(I_\lambda, J_\lambda, \partial)\}_{\lambda \in \Lambda}$, (C, R, ∂) 'in ideallerinin ailesi ise, $(\sum_\lambda I_\lambda, \sum_\lambda J_\lambda, \partial) \trianglelefteq (C, R, \partial)$ olur.

İspat: i) Önerme 2.11(a) gereği, $I \trianglelefteq C$ ve $B \leq C$ olduğundan $I + B \leq C$, $J \trianglelefteq R$ ve $Q \leq R$ olduğundan $J + Q \leq R$ olur. Ayrıca eğer $j + q \in J + Q$ ve $i + b \in I + B$ ise bu durumda $(j + q) \cdot (i + b) = (j \cdot i + j \cdot b + q \cdot i) + q \cdot b \in I + B$ olması sağlanır.

ii) Önerme 2.11(b) gereğince, $\sum_\lambda I_\lambda \trianglelefteq C$ ve $\sum_\lambda J_\lambda \trianglelefteq R$ 'dir. $\sum_\lambda j_\lambda \in \sum_\lambda J_\lambda$ ve $c \in C$ olsun. $c \cdot \sum_\lambda j_\lambda = \sum_\lambda c \cdot j_\lambda$ ve her λ için $(I_\lambda, J_\lambda, \partial) \trianglelefteq (C, R, \partial)$ olduğundan $c \cdot j_\lambda \in I_\lambda$ olup, $c \cdot \sum_\lambda j_\lambda \in \sum_\lambda I_\lambda$ olur. Benzer şekilde $r \in R$ ve $\sum_\lambda i_\lambda \in \sum_\lambda I_\lambda$ için $r \cdot \sum_\lambda i_\lambda = \sum_\lambda r \cdot i_\lambda \in \sum_\lambda I_\lambda$ olur. ■

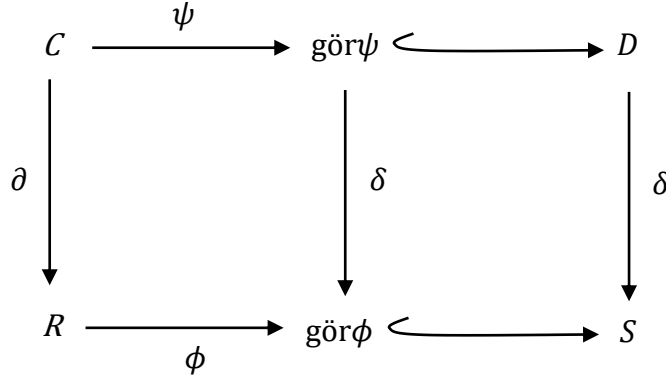
Önerme 3.13. $(\psi, \phi) : (C, R, \partial) \rightarrow (D, S, \delta)$ bir çaprazlanmış modül homomorfizmi olmak üzere $(\text{çek}\psi, \text{çek}\phi, \partial) \trianglelefteq (C, R, \partial)$ olur.

İspat: $\psi : C \rightarrow D$, R – cebir homomorfizmi, $\phi : R \rightarrow S$, $\mathbb{K}$ – cebir homomorfizmi olduğundan $\text{çek}\psi \trianglelefteq C$, $\text{çek}\phi \trianglelefteq R$ olur. Ayrıca (ψ, ϕ) , çaprazlanmış modül homomorfizmi olduğundan $c \in \text{çek}\psi$ ve $r \in R$ ise bu durumda $\psi(r \cdot c) = \phi(r) \cdot \psi(c) = \psi(r) \cdot 0 = 0$ olup $r \cdot c \in \text{çek}\psi$ 'dir. $c \in C$, $r \in \text{çek}\phi$ ise $\psi(r \cdot c) = \phi(r) \cdot \psi(c) = 0 \cdot \psi(c) = 0$ olup $r \cdot c \in \text{çek}\psi$ 'dir. Son olarak, ayrıca $c \in \text{çek}\psi$ ise $\phi(\partial c) = \partial(\psi c) = \partial 0 = 0$ olduğundan $\partial c \in \text{çek}\phi$ 'dir.

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{çek}\psi & \xleftarrow{\quad} & C & \xrightarrow{\psi} & D \\
 \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \delta \\
 \text{çek}\phi & \xleftarrow{\quad} & R & \xrightarrow{\phi} & S
 \end{array}$$

Önerme 3.14. $(\psi, \phi) : (C, R, \partial) \rightarrow (D, S, \delta)$ bir çaprazlanmış modül homomorfizmi olmak üzere $(\text{gör}\psi, \text{gör}\phi, \partial) \leq (D, S, \delta)$ 'dir.

İspat: $d \in \text{gör}\psi$, $s \in \text{gör}\phi$ olsun. $c \in C$, $r \in R$ olmak üzere $d = \psi(c)$, $s = \phi(r)$ diyelim. $s \cdot d = \phi(r) \cdot \psi(c) = \psi(r \cdot c)$ olduğundan $s \cdot d \in \text{çek}\psi$ 'dir. Ayrıca $d = \psi(c)$ olmak üzere $d \in \text{gör}\psi$ ise $\delta(d) = \delta\psi(c) = \phi(\partial c)$ olup $\delta(d) \in \text{gör}\phi$ elde edilir.



3.2. Birleşmeli Cebirlerin Bölüm Çaprazlanmış Modülü

(C, R, ∂) cebirlerin bir çaprazlanmış modülü ve $(I, J, \partial) \trianglelefteq (C, R, \partial)$ olsun. C/I ve R/J bölüm cebirlerini göz önüne alalım. Bu durumda, $R, C/I$ üzerine $r \cdot (c + I) = r \cdot c + I$ şeklinde etki eder.

Aynı şekilde $j \in J$ ise $j \cdot (c + I) = j \cdot c + I$ şeklinde bir etkiden bahsedebiliriz. Ancak burada $(I, J, \partial) \trianglelefteq (C, R, \partial)$ olduğundan $j \cdot c \in I$ olup $j \cdot c + I = I$ 'dir. Böylece her $j \in J$ için $j \cdot (c + I) = I$ olup $J, C/I$ üzerine aşık bir etki yapar. R/J 'nin C/I 'ya etkisini $(r + J) \cdot (c + I) = r \cdot c + I$ ile tanımlayalım. Bu etki iyi tanımlıdır, çünkü $r + J = r' + J$ ve $c + I = c' + I$ ise $r - r' \in J$ ve $c - c' \in I$ 'dir.

$(I, J, \partial) \trianglelefteq (C, R, \partial)$ olduğundan $c \in C, r - r' \in J \Rightarrow (r - r') \cdot c \in I$ ve $c - c' \in I, r' \in J \Rightarrow r' \cdot (c - c') \in I$ olup

$(r - r') \cdot c + r' \cdot (c - c') = r \cdot c - r' \cdot c + r' \cdot c - r' \cdot c' = r \cdot c - r' \cdot c' \in I$ elde edilir. Böylece, $r \cdot c + I = r' \cdot c' + I$ 'dir.

$\bar{\partial} : C/I \rightarrow R/J$ fonksiyonunu, $\bar{\partial}(c + I) = \partial c + J$ ile tanımlayalım. Bu fonksiyon iyi tanımlıdır. Gerçekten, $c + I = c' + I$ ise $(c - c') \in I$ olur ve ayrıca $\partial(c - c') \in J \Rightarrow \partial c - \partial c' \in J \Rightarrow \partial c + J = \partial c' + J$ 'dir. $\bar{\partial}$ 'nin bir R/J - cebir homomorfizmi olduğu da

açıktır. Böylece $(C/I, R/J, \bar{\partial})$ cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olur. Bu çaprazlanmış modül $\frac{(C,R,\partial)}{(I,J,\partial)}$ şeklinde de gösterilir.

3.3. Birleşmeli Cebirlerin Çaprazlanmış Modülleri İçin İzomorfizm Teoremleri

Bu bölümde, cebirlerin çaprazlanmış modülleri için üç izomorfizm teoremi ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 3.15. (1. İzomorfizm Teoremi) (C, R, ∂) ve (D, S, δ) cebirlerin çaprazlanmış modülleri ve $(\psi, \phi) : (C, R, \partial) \rightarrow (D, S, \delta)$ çaprazlanmış modüllerin bir morfizmi olmak üzere $\frac{(C,R,\partial)}{(\psi, \phi, \partial)} \cong (\text{gör}\psi, \text{gör}\phi, \delta)$ 'dir.

İspat: Her $c + \psi \in C/\psi$ için $\alpha : C/\psi \rightarrow \text{gör}\psi$, $\alpha(c + \psi) = \psi(c)$ ve her $r + \phi \in R/\phi$ için $\beta : R/\phi \rightarrow \text{gör}\phi$, $\beta(r + \phi) = \phi(r)$ ile tanımlı fonksiyonların birer cebir izomorfizmi oldukları Teorem 2.19'dan bilinmektedir. Dolayısıyla burada $\frac{(C,R,\partial)}{(\psi, \phi, \partial)} \cong (\text{gör}\psi, \text{gör}\phi, \delta)$ izomorfizminin varlığını göstermek için yalnızca $(\alpha, \beta) : (C/\psi, R/\phi, \bar{\partial}) \rightarrow (\text{gör}\psi, \text{gör}\phi, \delta)$ ikilisinin bir çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu göstermek yeterlidir. Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım.

$$\begin{array}{ccc}
 C/\psi & \xrightarrow{\bar{\partial}} & R/\phi \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
 \text{gör}\psi & \xrightarrow{\delta} & \text{gör}\phi
 \end{array}$$

$c + \psi \in C/\psi$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
 \beta(\bar{\partial}(c + \psi)) &= \beta(\partial c + \phi) \\
 &= \phi(\partial c) \\
 &= \delta(\psi(c)) \\
 &= \delta(\alpha(c + \psi))
 \end{aligned}$$

olduğundan $\beta\bar{\partial} = \delta\alpha$ olup bu diyagram değişmelidir. Ek olarak, $r + \text{çek}\phi \in R/\text{çek}\phi$ ve $c + \text{çek}\psi \in C/\text{çek}\psi$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\beta(r + \text{çek}\phi) \cdot \alpha(c + \text{çek}\psi) &= \phi(r) \cdot \psi(c) \\ &= \psi(r \cdot c) \\ &= \alpha(r \cdot c + \text{çek}\psi) \\ &= \alpha((r + \text{çek}\phi) \cdot (c + \text{çek}\psi))\end{aligned}$$

olduğundan (α, β) etkileri de korumaktadır ve dolayısıyla bir çaprazlanmış modül izomorfizmidir. ■

Teorem 3.16. (2. İzomorfizm Teoremi) (C, R, ∂) cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olmak üzere eğer $(M, N, \partial) \leq (I, J, \partial) \trianglelefteq (C, R, \partial)$ ve $(M, N, \partial) \trianglelefteq (C, R, \partial)$ ise bu durumda

$$(M, N, \partial) \trianglelefteq (I, J, \partial) \text{ ve } \frac{\frac{(C, R, \partial)}{(M, N, \partial)}}{\frac{(I, J, \partial)}{(M, N, \partial)}} \cong \frac{(C, R, \partial)}{(I, J, \partial)} \text{ olur.}$$

İspat: İlk olarak $(M, N, \partial) \trianglelefteq (I, J, \partial)$ olduğunu gösterelim. $(M, N, \partial) \leq (I, J, \partial)$ ve $(M, N, \partial) \trianglelefteq (C, R, \partial)$ olduğu verilmiştir. $I \subseteq C$, $J \subseteq R$ olduğundan $i \in I$, $j \in J$, $m \in M$, $n \in N$ için $j \cdot m, i \cdot n \in M$ olup $(M, N, \partial) \trianglelefteq (I, J, \partial)$ bulunur.

Şimdi de izomorfizmin varlığını gösterelim. Her $c + M + I/M \in C/M/I/M$ için

$$\alpha : C/M/I/M \rightarrow C/I, \quad \alpha(c + M + I/M) = c + I \text{ ile ve her } r + N + J/N \in R/N/J/N \text{ için}$$

$$\beta : R/N/J/N \rightarrow R/J, \quad \beta(r + N + J/N) = r + J \text{ ile tanımlı fonksiyonların birer cebir izo-}$$

morfizm olduklarını Teorem 2.21'den bilmekteyiz. Böylece teoremi ispatlamak için sadece

$$(\alpha, \beta) : \left(C/M/I/M, R/N/J/N, \bar{\partial} \right) \rightarrow (C/I, R/J, \bar{\partial}) \text{ ikilisinin bir çaprazlanmış modül}$$

homomorfizmi olduğunu göstermek kalır. Aşağıdaki diyagramı dikkate alalım.

$$\begin{array}{ccc}
C/M/I/M & \xrightarrow{\bar{\partial}} & R/N/J/N \\
\alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
C/I & \xrightarrow{\bar{\partial}} & R/I
\end{array}$$

Her $c + M + I/M \in C/M/I/M$ için;

$$\begin{aligned}
\beta \bar{\partial}(c + M + I/M) &= \beta(\bar{\partial}(c + M) + J/N) \\
&= \beta(\partial c + N + J/N) \\
&= \partial c + J \\
&= \bar{\partial}(c + I) \\
&= \bar{\partial}\alpha(c + M + I/M)
\end{aligned}$$

olduğundan $\beta \bar{\partial} = \bar{\partial} \alpha$ olup bu diyagram değişmelidir. Ayrıca her $r + N + J/N \in R/N/J/N$

ve her $c + M + I/M \in C/M/I/M$ için

$$\begin{aligned}
\beta(r + N + J/N) \cdot \alpha(c + M + I/M) &= (r + J) \cdot (c + I) \\
&= r \cdot c + I \\
&= \alpha(r \cdot c + M + I/M) \\
&= \alpha((r + N) \cdot (c + M) + I/M) \\
&= \alpha((r + N + J/N) \cdot (c + M + I/M))
\end{aligned}$$

olduğundan (α, β) ikisi etkileri de korumaktadır ve böylece bir çaprazlanmış modül izomorfizmi olur. ■

Teorem 3.17. (3. İzomorfizm Teoremi) (C, R, ∂) cebirlerin bir çaprazlanmış modülü ve

$(B, Q, \partial) \leq (C, R, \partial)$ ve $(I, J, \partial) \trianglelefteq (C, R, \partial)$ ise $\frac{(B, Q, \partial)}{(B \cap I, Q \cap J, \partial)} \cong \frac{(B + I, Q + J, \partial)}{(I, J, \partial)}$ olur.

İspat: Teorem 2.22 gereğince, her $b + B \cap I \in B/B \cap I$ için $\alpha : B/B \cap I \rightarrow B + I/I$, $\alpha(b + B \cap I) = b + I$ ile ve her $q + Q \cap J \in Q/Q \cap J$ için $\beta : Q/Q \cap J \rightarrow Q + J/J$, $\beta(q + Q \cap J) = q + J$ ile tanımlı fonksiyonların izomorfizm olduklarını biliyoruz. Geriye sadece $(\alpha, \beta) : (B/B \cap I, Q/Q \cap J, \tilde{\partial}) \rightarrow (B + I/I, Q + J/J, \bar{\partial})$ ikilisinin çaprazlanmış modül homomorfizmi olduğunu göstermek kalır. Bunu görmek için aşağıdaki diyagramı ele alalım.

$$\begin{array}{ccc}
 B/B \cap I & \xrightarrow{\tilde{\partial}} & Q/Q \cap J \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
 B + I/I & \xrightarrow{\bar{\partial}} & Q + J/J
 \end{array}$$

Her $b + B \cap I \in B/B \cap I$ için;

$$\begin{aligned}
 \beta \tilde{\partial}(b + B \cap I) &= \beta(\partial b + Q \cap J) \\
 &= \partial b + J \\
 &= \bar{\partial}(b + I) \\
 &= \bar{\partial} \alpha(b + B \cap I)
 \end{aligned}$$

olduğundan $\beta \tilde{\partial} = \bar{\partial} \alpha$ olup diyagram değişmelidir. Ayrıca her $q + Q \cap J \in Q/Q \cap J$ ve her $b + B \cap I \in B/B \cap I$ için;

$$\begin{aligned}
 \beta(q + Q \cap J) \cdot \alpha(b + B \cap I) &= (q + J) \cdot (b + I) \\
 &= q \cdot b + I \\
 &= \alpha(q \cdot b + B \cap I) \\
 &= \alpha((q + Q \cap J) \cdot (b + B \cap I))
 \end{aligned}$$

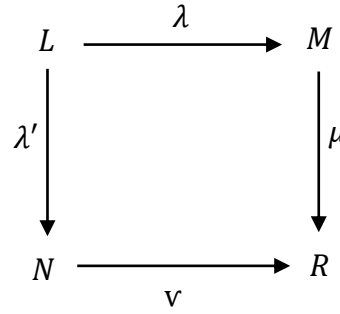
olduğundan bu diyagram üzerinde etkiler de korunur. Böylece (α, β) ikilisi bir çaprazlanmış modül izomorfizmidir. ■

4. BİRLEŞMELİ CEBİRLERİN ÇAPRAZLANMIŞ KARELERİ

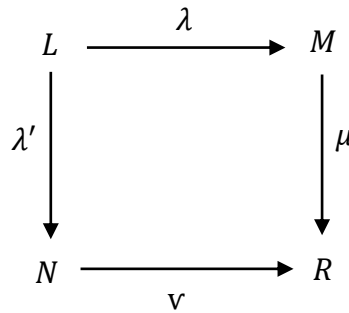
Bu bölümde, cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin çaprazlanmış modülü olarak yorumlanabilecek ve çaprazlanmış modüllerin bir üst boyutu olarak düşünülebilecek olan çaprazlanmış kareler üzerinde duracağız. Burada, cebirlerin çaprazlanmış kareleri için bölüm nesnelerinin tanımlanmasında gerekli olan yeni kavramlar tanıtılmış ve çaprazlanmış kareler için izomorfizm teoremleri ifade edilerek ispatlanmıştır.

4.1. Birleşmeli Cebirlerin Çaprazlanmış Kareleri

Tanım 4.1. R birimli bir $\mathbb{K}$ –cebir, L , M ve N birer R –cebir olmak üzere cebir homomorfizmlerinin



değişmeli diyagramı, bir $h : M \times N \rightarrow L$ fonksiyonu ve bir $h' : N \times M \rightarrow L$ fonksiyonu verilsin. Ayrıca, M 'nin L üzerine μ vasıtasıyla her $m \in M$ ve $l \in L$ için $m \cdot l = \mu(m) \cdot l$ ve $l \cdot m = l \cdot \mu(m)$ şeklinde, N 'nin de L üzerine ν vasıtasıyla her $n \in N$ ve $l \in L$ için $n \cdot l = \nu(n) \cdot l$ ve $l \cdot n = l \cdot \nu(n)$ şeklinde etki eder. Eğer her $k \in \mathbb{K}$, $l \in L$, $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ ve $r \in R$ için aşağıdakiler sağlanıyorsa



yapısına cebirlerin bir çaprazlanmış karesi denir.

i) (L, M, λ) , (L, N, λ') , (M, R, μ) , (N, R, ν) ve $(L, R, \mu\lambda)$ üçlülere cebirlerin birer çaprazlanmış modülüdür.

ii) $\forall l \in L$ ve $\forall r \in R$ için

$$\lambda(r \cdot l) = r \cdot \lambda(l)$$

$$\lambda'(r \cdot l) = r \cdot \lambda'(l)$$

$$\lambda(l \cdot r) = \lambda(l) \cdot r$$

$$\lambda'(l \cdot r) = \lambda'(l) \cdot r$$

iii) $\forall k \in \mathbb{K}$, $\forall m \in M$, $\forall n \in N$ için

$$k \cdot h(m, n) = h(k \cdot m, n) = h(m, k \cdot n)$$

$$h(m, n) \cdot k = h(m \cdot k, n) = h(m, n \cdot k)$$

$$k \cdot h'(n, m) = h'(k \cdot n, m) = h'(n, k \cdot m)$$

$$h'(n, m) \cdot k = h'(n \cdot k, m) = h'(n, m \cdot k)$$

iv) $\forall m, m' \in M$, $\forall n, n' \in N$ için

$$h(m + m', n) = h(m, n) + h(m', n)$$

$$h(m, n + n') = h(m, n) + h(m, n')$$

$$h'(n + n', m) = h'(n, m) + h'(n', m)$$

$$h'(n, m + m') = h'(n, m) + h'(n, m')$$

v) $\forall r \in R$, $\forall m \in M$ ve $\forall n \in N$ için

$$r \cdot h(m, n) = h(r \cdot m, n) = h(m, r \cdot n)$$

$$h(m, n) \cdot r = h(m \cdot r, n) = h(m, n \cdot r)$$

$$r \cdot h'(n, m) = h'(r \cdot n, m) = h'(n, r \cdot m)$$

$$h'(n, m) \cdot r = h'(n \cdot r, m) = h'(n, m \cdot r)$$

vi) $\forall m \in M$ ve $\forall n \in N$ için

$$\lambda h(m, n) = m \cdot \nu(n)$$

$$\lambda' h(m, n) = \mu(m) \cdot n$$

$$\lambda h'(n, m) = \nu(n) \cdot m$$

$$\lambda' h'(n, m) = n \cdot \mu(m)$$

vii) $\forall l \in L$, $\forall m \in M$ ve $\forall n \in N$ için

$$h(\lambda(l), n) = l \cdot n$$

$$h(m, \lambda'(l)) = m \cdot l$$

$$h'(n, \lambda(l)) = n \cdot l$$

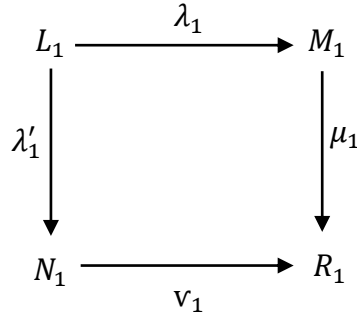
$$h'(\lambda'(l), m) = l \cdot m$$

viii) $\forall l \in L, \forall m, m' \in M$ ve $\forall n, n' \in N$ için

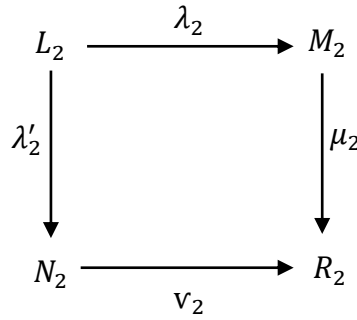
$$n \cdot h(m, n') = h'(n, m) \cdot n'$$

$$m \cdot h'(n, m') = h(m, n) \cdot m'$$

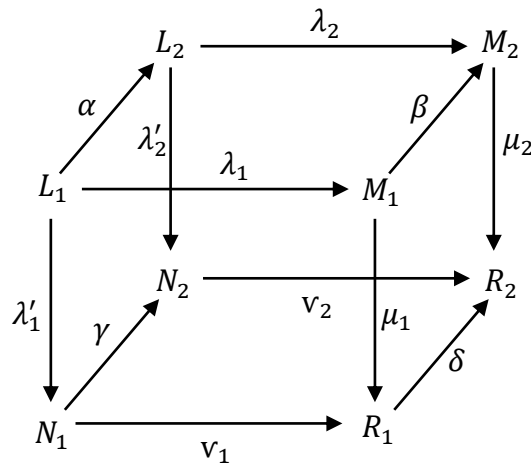
Tanım 4.2. Cebirlerin



şeklinde bir $\mathcal{C}_1$ çaprazlanmış karesi ve



şeklinde bir $\mathcal{C}_2$ çaprazlanmış karesi verilsin. Bir $\phi : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ çaprazlanmış kare homomorfizmi



diyagramının değişmeli olmasını, her $l_1 \in L_1, m_1 \in M_1, n_1 \in N_1$ ve $r_1 \in R_1$ için

$$\alpha(r_1 \cdot l_1) = \delta(r_1) \cdot \alpha(l_1)$$

$$\alpha(l_1 \cdot r_1) = \delta(l_1) \cdot \alpha(r_1)$$

$$\beta(r_1 \cdot m_1) = \delta(r_1) \cdot \beta(m_1)$$

$$\beta(m_1 \cdot r_1) = \beta(m_1) \cdot \delta(r_1)$$

$$\gamma(r_1 \cdot n_1) = \delta(r_1) \cdot \gamma(n_1)$$

$$\gamma(n_1 \cdot r_1) = \gamma(n_1) \cdot \delta(r_1)$$

olmasını ve her $m_1 \in M_1, n_1 \in N_1$ için

$$\alpha(h_1(m_1, n_1)) = h_2(\beta(m_1), \gamma(n_1))$$

$$\alpha(h'_1(n_1, m_1)) = h'_2(\gamma(n_1), \beta(m_1))$$

olmasını sağlayacak şekildeki cebir homomorfizmlerinin bir $\phi = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dörtlüsü olarak tanımlanır.

Yukarıdaki tanıma dikkat edilirse, diyagramın değişmeliliğinden ve etkilerin korunmasından dolayı $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\beta, \delta), (\gamma, \delta)$ ve (α, δ) birer çaprazlanmış modül homomorfizmi olur.

Örnek 4.3. R bir $\mathbb{K}$ – cebir ve I ile J R 'nin idealleri olsun. $\lambda : I \cap J \rightarrow I$ ve $\lambda' : I \cap J \rightarrow J$ için λ, λ', μ ve ν içermeye dönüşümleri olmak ve $\forall i \in I$ ve $\forall j \in J$ için $h : I \times J \rightarrow I \cap J, (i, j) \mapsto h(i, j) = ij, h' : J \times I \rightarrow I \cap J, (j, i) \mapsto h'(j, i) = ji$ olarak tanımlanmak üzere

$$\begin{array}{ccc} I \cap J & \xrightarrow{\lambda} & I \\ \lambda' \downarrow & & \downarrow \mu \\ J & \xrightarrow{\nu} & R \end{array}$$

cebirlere çaprazlanmış karesidir. Burada R cebiri, I, J ve $I \cap J$ 'ye çarpma ile etki yapmaktadır. Bu durumda çaprazlanmış kare olma şartları aşıkâr bir şekilde sağlanır.

4.2. Cebirlerin Çaprazlanmış Karelerinin Alt Çaprazlanmış Karesi

Alt cebirlerden ve alt çaprazlanmış modüllerden bahsedilebildiği gibi, cebirlerin çaprazlanmış kareleri için de alt çaprazlanmış kare tanımı vermek mümkündür. Bu alt bölümde yalnızca cebirlerin çaprazlanmış kareleri için alt çaprazlanmış kare tanımının verilmesi ile yetinilmiştir. Daha sonraki bölümde ise bu tanım üzerine ekleme yapılarak çaprazlanmış kareler için ideal kavramı tanımlanacak ve alt çaprazlanmış karelerle ilgili bazı özellikler de ideallerin özellikleri ile birlikte araştırılarak ispatlanacaktır.

Tanım 4.4. Cebirlerin bir

$$\mathcal{L} = \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \downarrow \lambda' & & \downarrow \mu \\ N & \xrightarrow{\nu} & R \end{array}$$

çaprazlanmış karesi verilsin. Eğer λ , λ' , μ , ν ve h fonksiyonlarının kısıtlamaları altında, $A \leq L$, $B \leq M$, $C \leq N$, $D \leq R$ olmak üzere

$$\mathcal{A} = \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\lambda|} & B \\ \downarrow \lambda'| & & \downarrow \mu| \\ C & \xrightarrow{\nu|} & D \end{array}$$

de bir çaprazlanmış kare ise $\mathcal{A}$ 'ya $\mathcal{L}$ 'nin bir alt çaprazlanmış karesi denir. Bu durum $\mathcal{A} \leq \mathcal{L}$ ile gösterilir.

4.3. Cebirlerin Çaprazlanmış Karelerinin İdeali

Tanım 4.5. Cebirlerin bir

$$\mathcal{L} = \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \downarrow \lambda' & & \downarrow \mu \\ N & \xrightarrow{\nu} & R \end{array}$$

çaprazlanmış karesi ve $\mathcal{L}$ 'nin bir

$$\mathcal{H} = \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\lambda} & I \\ \downarrow \lambda' & & \downarrow \mu \\ J & \xrightarrow{\nu} & K \end{array}$$

alt çaprazlanmış karesi verilsin.

- i) $K \trianglelefteq R$
- ii) $r \in R, a \in H, b \in I, c \in J$ için,
 $r \cdot a, a \cdot r \in H$
 $r \cdot b, b \cdot r \in I$
 $r \cdot c, c \cdot r \in J$
- iii) $d \in K, l \in L, m \in M, n \in N$ için,
 $d \cdot l, l \cdot d \in H$
 $d \cdot m, m \cdot d \in I$
 $d \cdot n, n \cdot d \in J$
- iv) $m \in M, j \in J$ için,
 $h(m, j), h'(j, m) \in H$
- v) $i \in I, n \in N$ için,
 $h(i, n), h'(n, i) \in H$

özelliklerinin tamamı sağlanıyorsa $\mathcal{H}$ 'ye $\mathcal{L}$ 'nin çaprazlanmış kare ideali ya da kısaca ideali denir. Bu durum $\mathcal{H} \trianglelefteq \mathcal{L}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 4.6. Bir

$$\mathcal{L} = \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \downarrow \lambda' & & \downarrow \mu \\ N & \xrightarrow{\nu} & R \end{array}$$

çaprazlanmış karesi ve $\mathcal{L}$ 'nin bir

$$\mathcal{H} = \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\quad} & I \\ \downarrow & & \downarrow \\ J & \xrightarrow{\quad} & K \end{array}$$

ideali verilsin. Bu durumda,

- a) $(H, I, \lambda) \trianglelefteq (L, M, \lambda)$
- b) $(H, J, \lambda') \trianglelefteq (L, N, \lambda')$
- c) $(I, K, \mu) \trianglelefteq (M, R, \mu)$
- d) $(J, K, \nu) \trianglelefteq (N, R, \nu)$
- e) $(H, K, \mu\lambda) \trianglelefteq (L, R, \mu\lambda)$

olur.

İspat: a) $\mathcal{H} \leq \mathcal{L}$ olduğundan (H, I, λ) bir çaprazlanmış modüldür ve $H \leq L$, $I \leq M$ olduğundan $(H, I, \lambda) \leq (L, M, \lambda)$ olur. Her $a \in H$, $b \in I$, $l \in L$, $m \in M$ için

- (i) $mb = \mu(m) \cdot b \in I$, $bm = b \cdot \mu(m) \in I$
- (ii) $m \cdot a = \mu(m) \cdot a \in H$, $a \cdot m = a \cdot \mu(m)$
- (iii) $b \cdot l = \mu(b) \cdot l \in H$, $l \cdot b = l \cdot \mu(b)$

olduğundan $(H, I, \lambda) \trianglelefteq (L, M, \lambda)$

b) $\mathcal{H} \leq \mathcal{L}$ olduğundan (H, J, λ') bir çaprazlanmış modüldür ve $H \leq L$, $J \leq N$ olduğundan $(H, J, \lambda') \leq (L, N, \lambda')$ olur. $a \in H$, $c \in J$, $l \in L$, $n \in N$ için

- (i) $nc = \nu(n) \cdot c \in J$, $cn = c \cdot \nu(n) \in J$
- (ii) $n \cdot a = \nu(n) \cdot a \in H$, $a \cdot n = a \cdot \nu(n) \in H$
- (iii) $c \cdot l = \nu(c) \cdot l \in H$, $l \cdot c = l \cdot \nu(c) \in H$

olduğundan $(H, J, \lambda') \trianglelefteq (L, N, \lambda')$

c) $\mathcal{H} \leq \mathcal{L}$ olduğundan (I, K, μ) bir çaprazlanmış modül ve $I \leq M$, $K \leq R$ olduğundan $(I, K, \mu) \leq (M, R, \mu)$ olur. Her $b \in I$, $k \in K$, $m \in M$, $r \in R$ için

- (i) $rk \in K$, $kr \in K$
- (ii) $r \cdot b \in I$, $b \cdot r \in I$
- (iii) $k \cdot m \in I$, $m \cdot k \in I$

olduğundan $(I, K, \mu) \trianglelefteq (M, R, \mu)$.

d) $\mathcal{H} \leq \mathcal{L}$ olduğundan (J, K, ν) bir çaprazlanmış modül ve $J \leq N$, $K \leq R$ olduğundan $(J, K, \nu) \leq (N, R, \nu)$ olur. $c \in J$, $k \in K$, $n \in N$, $r \in R$ için

- (i) $rk \in K, kr \in K$
- (ii) $r \cdot c \in J, c \cdot r \in J$
- (iii) $k \cdot n \in J, n \cdot k \in J$

olduğundan $(J, K, \nu) \trianglelefteq (N, R, \nu)$.

e) $\mathcal{H} \leq \mathcal{L}$ olduğundan $(H, K, \mu\lambda)$ bir çaprazlanmış modül ve $H \leq L$, $K \leq R$ olduğundan $(H, K, \mu\lambda) \leq (L, R, \mu\lambda)$ olur. $a \in H, k \in K, l \in L, r \in R$ için

- (i) $rk \in K, kr \in K$
- (ii) $r \cdot a \in H, a \cdot r \in H$
- (iii) $k \cdot l \in H, l \cdot k \in H$

olduğundan $(H, K, \mu\lambda) \trianglelefteq (L, R, \mu\lambda)$ dır. ■

4.4. Cebirlerin Çaprazlanmış Karelerinin Çekirdeği ve Görüntüsü

Teorem 4.7. Cebirlerin

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \downarrow \lambda' & & \downarrow \mu \\ N & \xrightarrow{\nu} & R \end{array} \quad \begin{array}{ccc} L^* & \xrightarrow{\lambda^*} & M^* \\ \downarrow \lambda'^* & & \downarrow \mu^* \\ N^* & \xrightarrow{\nu^*} & R^* \end{array}$$

$\mathcal{L} =$ $\mathcal{L}^* =$

çaprazlanmış kareleri verilsin ve $\phi = (\alpha, \beta, \gamma, \delta): \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^*$ bir çaprazlanmış kare homomorfizmi olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} \text{çek}\alpha & \longrightarrow & \text{çek}\beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{çek}\gamma & \longrightarrow & \text{çek}\delta \end{array}$$

$\text{çek}\phi :=$

olmak üzere $\text{çek}\phi \trianglelefteq \mathcal{L}'$ dir.

İspat: İlk olarak $\text{çek}\phi$ 'nin $\mathcal{L}$ 'nin bir alt çaprazlanmış karesi olduğunu gösterelim. Önerme 3.13 gereğince

$$(\text{çek}\alpha, \text{çek}\beta, \lambda) \leq (L, M, \lambda)$$

$$(\text{çek}\alpha, \text{çek}\gamma, \lambda') \leq (L, M, \lambda')$$

$$(\text{çek}\beta, \text{çek}\delta, \mu) \leq (M, R, \mu)$$

$$(\text{çek}\gamma, \text{çek}\delta, \nu) \leq (N, R, \nu)$$

$$(\text{çek}\alpha, \text{çek}\delta, \mu\lambda) \leq (L, R, \mu\lambda)$$

olur.

Bunun yanında $b \in \text{çek}\beta, c \in \text{çek}\gamma$ ise $\alpha(h(b, c)) = h^*(\beta(b), \gamma(c)) = h^*(0, 0)$ ve ayrıca $h^*(0, 0) = h^*(0 + 0, 0) = h^*(0, 0) + h^*(0, 0)$ olmasından dolayı $h^*(0, 0) = 0_{L^*}$ olup $h(b, c) \in \text{çek}\alpha$ elde edilir. Benzer şekilde $h'(c, b) \in \text{çek}\alpha$ olduğu da gösterilebilir. Böylece $\text{çek}\phi \leq \mathcal{L}$ olur.

Şimdi $\text{çek}\phi$ 'nin ideal olduğunu gösterelim.

i) Önerme 2.14'ten dolayı $\text{çek}\delta \trianglelefteq R$ 'dir.

ii) $r \in R, a \in \text{çek}\alpha, b \in \text{çek}\beta, c \in \text{çek}\gamma$ için

$$\alpha(r \cdot a) = \delta(r) \cdot \alpha(a) = \delta(r) \cdot 0 = 0 \text{ olduğundan } r \cdot a \in \text{çek}\alpha$$

$$\alpha(a \cdot r) = \alpha(a) \cdot \delta(r) = 0 \cdot \delta(r) = 0 \text{ olduğundan } a \cdot r \in \text{çek}\alpha$$

$$\beta(r \cdot b) = \delta(r) \cdot \beta(b) = \delta(r) \cdot 0 = 0 \text{ olduğundan } r \cdot b \in \text{çek}\beta$$

$$\beta(b \cdot r) = \beta(b) \cdot \delta(r) = 0 \cdot \delta(r) = 0 \text{ olduğundan } b \cdot r \in \text{çek}\beta$$

$$\gamma(r \cdot c) = \delta(r) \cdot \gamma(c) = \delta(r) \cdot 0 = 0 \text{ olduğundan } r \cdot c \in \text{çek}\gamma$$

$$\gamma(c \cdot r) = \gamma(c) \cdot \delta(r) = 0 \cdot \delta(r) = 0 \text{ olduğundan } c \cdot r \in \text{çek}\gamma$$

iii) $d \in \text{çek}\delta, l \in L, m \in M$ ve $n \in N$ için

$$\alpha(d \cdot l) = \delta(d) \cdot \alpha(l) = 0 \cdot \alpha(l) = 0$$

$$\alpha(l \cdot d) = \alpha(l) \cdot \delta(d) = \alpha(l) \cdot 0 = 0$$

$$\beta(d \cdot m) = \delta(d) \cdot \beta(m) = 0 \cdot \beta(m) = 0$$

$$\beta(m \cdot d) = \beta(m) \cdot \delta(d) = \beta(m) \cdot 0 = 0$$

$$\gamma(d \cdot n) = \delta(d) \cdot \gamma(n) = 0 \cdot \gamma(n) = 0$$

$$\gamma(n \cdot d) = \gamma(n) \cdot \delta(d) = \gamma(n) \cdot 0 = 0$$

olduğundan $d \cdot a \in \text{çek}\alpha, d \cdot b \in \text{çek}\beta$ ve $d \cdot c \in \text{çek}\gamma$ olur.

iv) $m \in M, c \in \text{çek}\gamma$ için $\alpha(h(m, c)) = h^*(\beta(m), \gamma(c)) = h^*(\beta(m), 0)$ ve ayrıca

$$h^*(\beta(m), 0) = h^*(\beta(m), 0 + 0) = h^*(\beta(m), 0) + h^*(\beta(m), 0)$$

olduğundan dolayı $h^*(\beta(m), 0) = 0_{L^*}$ olur, dolayısıyla $h(m, c) \in \text{çek}\alpha$ dır. Benzer şekilde $h'(c, m) \in \text{çek}\alpha$ olduğu görülür.

v) $b \in \text{çek}\beta$, $n \in N$ için $\alpha(h(b, n)) = h(\beta(b), \gamma(n)) = h(0, \gamma(n)) = 0$ olduğundan $h(b, n) \in \text{çek}\alpha$ dir. $h'(n, b) \in \text{çek}\alpha$ olduğuda benzer şekilde görülebilir. ■

Teorem 4.8. Cebirlerin

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \downarrow \lambda' & & \downarrow \mu \\ N & \xrightarrow{\nu} & R \end{array} \quad \mathcal{L} = \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} L^* & \xrightarrow{\lambda^*} & M^* \\ \downarrow \lambda'^* & & \downarrow \mu^* \\ N^* & \xrightarrow{\nu^*} & R^* \end{array} \quad \mathcal{L}^* =$$

çaprazlanmış kareleri ve bir $\phi = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^*$ çaprazlanmış kare homomorfizmi verilsin. Bu durumda

$$\text{gör}\phi := \begin{array}{ccc} \text{gör}\alpha & \xrightarrow{\quad} & \text{gör}\beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{gör}\gamma & \xrightarrow{\quad} & \text{gör}\delta \end{array}$$

olmak üzere $\text{gör}\phi \leq \mathcal{L}^*$ dır.

İspat: Önerme 3.14'ten görüleceği üzere

$$(\text{gör}\alpha, \text{gör}\beta, \lambda^*) \leq (L^*, M^*, \lambda^*)$$

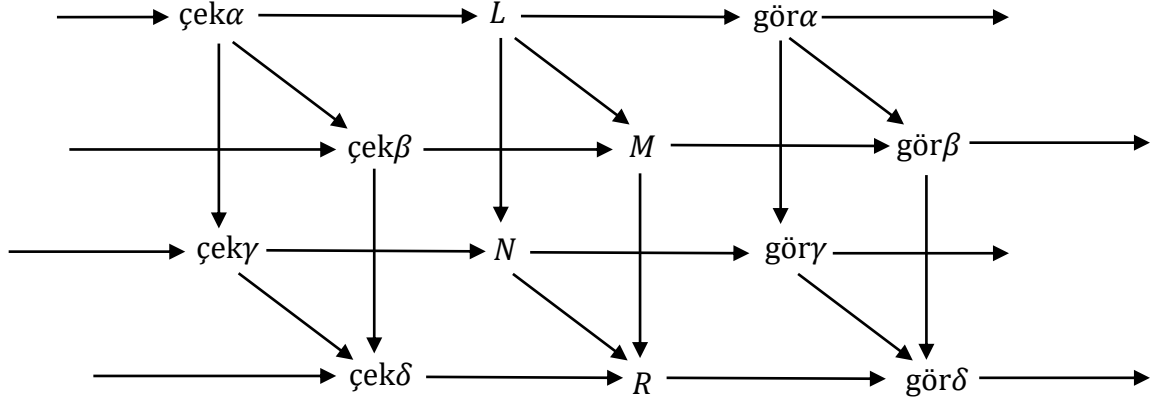
$$(\text{gör}\alpha, \text{gör}\gamma, \lambda'^*) \leq (L^*, M^*, \lambda'^*)$$

$$(\text{gör}\beta, \text{gör}\delta, \mu^*) \leq (M^*, R^*, \mu^*)$$

$$(\text{gör}\gamma, \text{gör}\delta, \nu^*) \leq (N^*, R^*, \nu^*)$$

$$(\text{gör}\alpha, \text{gör}\delta, \mu^* \lambda^*) \leq (L, R, \mu^* \lambda^*)$$

olduğu görülür. Ayrıca $b^* \in \text{gör}\beta$ ve $c^* \in \text{gör}\gamma$ ise $b^* = \beta(b)$ olacak şekilde $b \in M$ ve $c^* = \gamma(c)$ olacak şekilde $c \in N$ vardır. Burada $h^*(b^*, c^*) = h^*(\beta(b), \gamma(c)) = \alpha(h(b, c))$ olduğundan $h^*(b^*, c^*) \in \text{gör}\alpha$ ve $h^*(c^*, b^*) = h^*(\gamma(c), \beta(b)) = \alpha(h'(c, b))$ olduğundan $h^*(c^*, b^*) \in \text{gör}\alpha$ dır.



Teorem 4.9. Bir

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{\lambda} & M \\
 \mathcal{L} = \downarrow \lambda' & & \downarrow \mu \\
 N & \xrightarrow{\nu} & R
 \end{array}$$

çaprazlanmış karesi verilsin.

i) Eğer

$$\mathcal{A}_i = \begin{array}{ccc}
 A_i & \xrightarrow{\quad} & B_i \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C_i & \xrightarrow{\quad} & D_i
 \end{array}$$

$\mathcal{L}$ 'nin alt çaprazlanmış karelerinin bir ailesi ise

$$\bigcap \mathcal{A}_i := \begin{array}{ccc}
 \bigcap A_i & \xrightarrow{\quad} & \bigcap B_i \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bigcap C_i & \xrightarrow{\quad} & \bigcap D_i
 \end{array}$$

de $\mathcal{L}$ 'nin bir alt çaprazlanmış karesidir.

ii) Eğer

$$\mathcal{H}_i = \begin{array}{ccc} H_i & \longrightarrow & I_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_i & \longrightarrow & K_i \end{array}$$

$\mathcal{L}$ 'nin ideallerinin bir ailesi ise,

$$\bigcap \mathcal{H}_i := \begin{array}{ccc} \bigcap H_i & \longrightarrow & \bigcap I_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigcap J_i & \longrightarrow & \bigcap K_i \end{array}$$

de $\mathcal{L}$ 'nin bir idealidir.

İspat: Önerme 3.12 (i)'nin bir sonucu olarak $\bigcap \mathcal{A}_i$ ve $\bigcap \mathcal{H}_i$ yapılarının her bir kenarının bir çaprazlanmış modülü olduğu görülür. Dolayısıyla yalnızca aşağıdakileri kontrol etmek yeterlidir.

i) $b \in \bigcap B_i$ ve $c \in \bigcap C_i$ ise her i için $h(b, c), h'(c, b) \in A_i$ olacağından dolayı $h(b, c), h'(c, b) \in \bigcap A_i$ olur.

ii) $m \in M$, $c \in \bigcap J_i$ ise her i için $h(m, c), h'(c, m) \in H_i$ olduğundan dolayı $h(m, c), h'(c, m) \in \bigcap H_i$ ve $b \in \bigcap I_i, n \in N$ ise her i için $h(b, n), h'(n, b) \in H_i$ olduğundan $h(b, n), h'(n, b) \in \bigcap H_i$ 'dir. ■

Teorem 4.10. Bir

$$\mathcal{L} = \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \downarrow \lambda' & & \downarrow \mu \\ N & \xrightarrow{\nu} & R \end{array}$$

çaprazlanmış karesi verilsin.

i) Eğer

$$\mathcal{A} = \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array} \quad \mathcal{H} = \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & I \\ \downarrow & & \downarrow \\ J & \longrightarrow & K \end{array}$$

çaprazlanmış kareleri için $\mathcal{A} \leq \mathcal{L}$ ve $\mathcal{H} \leq \mathcal{L}$ ise,

$$\mathcal{A} + \mathcal{H} := \begin{array}{ccc} A + H & \longrightarrow & B + I \\ \downarrow & & \downarrow \\ C + J & \longrightarrow & D + K \end{array}$$

olmak üzere $\mathcal{A} + \mathcal{H} \leq \mathcal{L}$ 'dir.

ii) Her i için

$$\mathcal{H}_i = \begin{array}{ccc} H_i & \longrightarrow & I_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_i & \longrightarrow & K_i \end{array}$$

$\mathcal{L}$ 'nin ideali ise

$$\sum \mathcal{H}_i := \begin{array}{ccc} \sum H_i & \longrightarrow & \sum I_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sum J_i & \longrightarrow & \sum K_i \end{array}$$

olmak üzere $\sum \mathcal{H}_i \leq \mathcal{L}$ 'dir.

İspat: $\mathcal{A} + \mathcal{H}$ 'nin her bir kenarının, $\mathcal{L}$ 'nin karşılık gelen kenarı için birer alt çaprazlanmış modül olduğu ve $\sum \mathcal{H}_i$ 'nin kenarlarının da benzer şekilde $\mathcal{L}$ 'nin kenarlarının idealleri oldukları Önerme 3.12 (ii)'den görülür. Böylece, aşağıdakileri göstermek yeterlidir.

i) $b \in B, b' \in I, c \in C, c' \in J$ olsun.

$$h(b + b', c + c') = h(b, c) + h(b, c') + h(b', c) + h(b', c')$$

ve $h(b, c) \in A, h(b, c'), h(b', c), h(b', c') \in H$ olduğundan $h(b + b', c + c') \in A + H$ dir. Benzer şekilde $h'(c + c', b + b') \in A + H$ olduğu görülür.

ii) $m \in M$ ve $\sum c_i \in \sum J_i$ ise $h(m, \sum c_i) = \sum h(m, c_i) \in \sum H_i$ ve $\sum b_i \in \sum I_i, n \in N$ ise $h(\sum b_i, n) = \sum h(b_i, n) \in \sum H_i$ olur. Buna benzer şekilde $h'(\sum c_i, m) \in \sum H_i$ ve $h'(n, \sum b_i) \in \sum H_i$ olduğu da görülür. ■

4.5. Çaprazlanmış Karelerin Bölüm Çaprazlanmış Kareleri

Teorem 4.11. Cebirlerin bir

$$\mathcal{L} = \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \downarrow \lambda' & & \downarrow \mu \\ N & \xrightarrow{\nu} & R \end{array}$$

çaprazlanmış karesi ve $\mathcal{L}$ 'nin bir

$$\mathcal{H} = \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\quad} & I \\ \downarrow & & \downarrow \\ J & \xrightarrow{\quad} & K \end{array}$$

ideali verilsin. $\forall l + H \in L/H, \forall m + I \in M/I$ ve $\forall n + J \in N/J$ için

$$\bar{\lambda} : L/H \rightarrow M/I, \quad \bar{\lambda}(l + H) = \lambda(l) + I$$

$$\bar{\lambda}' : L/H \rightarrow N/J, \quad \bar{\lambda}'(l + H) = \lambda'(l) + J$$

$$\bar{\mu} : M/I \rightarrow R/K, \quad \bar{\mu}(m + I) = \mu(m) + K$$

$$\bar{\nu} : N/J \rightarrow R/K, \quad \bar{\nu}(n + J) = \nu(n) + K$$

$$\begin{aligned}\bar{h} : M/I \times N/J &\rightarrow L/H, & \bar{h}(m+I, n+J) &= h(m, n) + H \\ \bar{h}' : N/J \times M/I &\rightarrow L/H, & \bar{h}'(n+J, m+I) &= h'(n, m) + H\end{aligned}$$

ile tanımlı fonksiyonlarla birlikte

$$\mathcal{L}/\mathcal{H} := \begin{array}{ccc} L/H & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & M/I \\ \downarrow \bar{\lambda}' & & \downarrow \bar{\mu} \\ N/J & \xrightarrow{\bar{\nu}} & R/K \end{array}$$

bir çaprazlanmış karedir.

İspat: i) $\mathcal{L}/\mathcal{H}$ yapısının her bir kenarının bir çaprazlanmış modül olduğundan Bölüm 3.2’de bahsedilmiştir. $\bar{h}$ ve $\bar{h}'$ fonksiyonlarının iyi tanımlı olduğunu ve çaprazlanmış karelerle ilgili şartları sağladığını göstermek yeterlidir.

$m, m' \in M, n, n' \in N$ olmak üzere $m+I = m'+I$ ve $n+J = n'+J$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $m - m' \in I$, $n - n' \in J$ olur. Buradan $m - m' \in I, n \in N$ olduğundan $h(m - m', n) \in H$ olur. $m' \in M, n - n' \in J$, $h(m', n - n') \in H$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}h(m - m', n) + h(m', n - n') &= h(m, n) - h(m', n) + h(m', n) - h(m', n') \\ &= h(m, n) - h(m', n') \in H\end{aligned}$$

olur ve bu $h(m, n) + H = h(m', n') + H$ ve $\bar{h}(m+I, n+J) = \bar{h}(m'+I, n'+J)$ olduğu anlamına gelir. Böylece $\bar{h}$ iyi tanımlıdır. $\bar{h}'$ ’nin iyi tanımlılığı da benzer şekilde görülür.

ii) $\forall r + K \in R/K$ ve $\forall l + H \in L/H$ için

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}((r + K) \cdot (l + H)) &= \bar{\lambda}(r \cdot l + H) \\ &= \lambda(r \cdot l) + I \\ &= r \cdot \lambda(l) + I \\ &= (r + K) \cdot (\lambda(l) + I) \\ &= (r + K) \cdot \bar{\lambda}(l + H).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}'((r + K) \cdot (l + H)) &= \bar{\lambda}'(r \cdot l + H) \\ &= \lambda'(r \cdot l) + J \\ &= r \cdot \lambda'(l) + J \\ &= (r + K) \cdot (\lambda'(l) + J)\end{aligned}$$

$$= (r + K) \cdot \bar{\lambda}'(l + H)$$

iii) $\forall m + I \in M/I, \forall n + J \in N/J$ ve $\forall k \in K$ için

$$\begin{aligned} k\bar{h}(m + I, n + J) &= k(h(m, n) + H) \\ &= kh(m, n) + H \\ &= h(km, n) + H \\ &= h(m, kn) + H \\ &= \bar{h}(km + I, n + J) \\ &= \bar{h}(m + I, kn + J) \\ &= \bar{h}(k(m + I), n + J) \\ &= \bar{h}(m + I, k(n + J)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k\bar{h}'(n + J, m + I) &= k(h'(n, m) + H) \\ &= kh'(n, m) + H \\ &= h'(n, km) + H \\ &= h'(kn, m) + H \\ &= \bar{h}'(n + J, km + I) \\ &= \bar{h}'(m + I, kn + J) \\ &= \bar{h}'(n + J, k(m + I)) \\ &= \bar{h}'(k(n + J), m + I) \end{aligned}$$

iv) $\forall m + I, m' + I \in M/I$ ve $\forall n + J \in N/J$ için

$$\begin{aligned} \bar{h}(m + I + m' + I, n + J) &= \bar{h}(m + m' + I, n + J) \\ &= h(m + m', n) + H \\ &= h(m, n) + h(m', n) + H \\ &= h(m, n) + H + h(m', n) + H \\ &= \bar{h}(m + I, n + J) + \bar{h}(m' + I, n + J) \\ \bar{h}'(n + J, m + I + m' + I) &= \bar{h}'(n + J, m + m' + I) \\ &= h'(n, m + m') + H \\ &= h'(n, m) + h'(n, m') + H \\ &= h'(n, m) + H + h'(n, m') + H \\ &= \bar{h}'(n + J, m + I) + \bar{h}'(n + J, m' + I) \end{aligned}$$

$\forall m + I \in M/I$ ve $\forall n + J, n' + J \in N/J$ için

$$\bar{h}(m + I, n + J + n' + J) = \bar{h}(m + I, n + n' + J)$$

$$\begin{aligned}
&= h(m, n + n') + H \\
&= h(m, n) + h(m, n') + H \\
&= h(m, n) + H + h(m, n') + H \\
&= \bar{h}(m + I, n + J) + \bar{h}(m + I, n' + J)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{h}'(n + J + n' + J, m + I) &= \bar{h}'(n + n' + J, m + I) \\
&= h'(n + n', m) + H \\
&= h'(n, m) + h'(n', m) + H \\
&= h'(n, m) + H + h'(n', m) + H \\
&= \bar{h}'(n + J, m + I) + \bar{h}'(n' + J, m + I)
\end{aligned}$$

v) $\forall r + K \in R/K, \forall m + I \in M/I$ ve $\forall n + J \in N/J$ için

$$\begin{aligned}
(r + K) \cdot \bar{h}(m + I, n + J) &= (r + K) \cdot (h(m, n) + H) \\
&= r \cdot h(m, n) + H \\
&= h(r \cdot m, n) + H \\
&= \bar{h}(r \cdot m + I, n + J) \\
&= \bar{h}((r + K) \cdot (m + I), n + J)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(r + K) \cdot \bar{h}'(n + J, m + I) &= (r + K) \cdot (h'(n, m) + H) \\
&= r \cdot h'(n, m) + H \\
&= h'(n, r \cdot m) + H \\
&= \bar{h}'(n + J, r \cdot m + I) \\
&= \bar{h}'(n + J, (r + K) \cdot (m + I))
\end{aligned}$$

$\forall r + K \in R/K, \forall m + I \in M/I$ ve $\forall n + J \in N/J$ için

$$\begin{aligned}
(r + K) \cdot \bar{h}(m + I, n + J) &= (r + K) \cdot (h(m, n) + H) \\
&= r \cdot h(m, n) + H \\
&= h(m, r \cdot n) + H \\
&= \bar{h}(m + I, r \cdot n + J) \\
&= \bar{h}(m + I, (r + K) \cdot (n + J))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(r + K) \cdot \bar{h}'(n + J, m + I) &= (r + K) \cdot (h'(n, m) + H) \\
&= r \cdot h'(n, m) + H \\
&= h'(r \cdot n, m) + H \\
&= \bar{h}'(r \cdot n + J, m + I) \\
&= \bar{h}'((r + K) \cdot (n + J), m + I)
\end{aligned}$$

vi) $\forall m + I \in M/I, \forall n + J \in N/J$ için

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}(\bar{h}(m + I, n + J)) &= \bar{\lambda}(h(m, n) + H) \\
&= \lambda(h(m, n)) + I \\
&= m \cdot v(n) + I \\
&= (m + I) \cdot (v(n) + K) \\
&= (m + I) \cdot \bar{v}(n + J) \\
\bar{\lambda}(\bar{h}'(n + J, m + I)) &= \bar{\lambda}(h'(n, m) + H) \\
&= \lambda(h'(n, m)) + I \\
&= v(n) \cdot m + I \\
&= (v(n) + K) \cdot (m + I) \\
&= \bar{v}(n + J) \cdot (m + I)
\end{aligned}$$

$\forall m + I \in M/I, \forall n + J \in N/J$ için

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}'(\bar{h}(m + I, n + J)) &= \bar{\lambda}'(h(m, n) + H) \\
&= \lambda'(h(m, n)) + J \\
&= \mu(m) \cdot n + J \\
&= (\mu(m) + K) \cdot (n + J) \\
&= \bar{\mu}(m + I) \cdot (n + J) \\
\bar{\lambda}'(\bar{h}'(n + J, m + I)) &= \bar{\lambda}'(h'(n, m) + H) \\
&= \lambda'(h'(n, m)) + J \\
&= n \cdot \mu(m) + J \\
&= (n + J) \cdot (\mu(m) + K) \\
&= (n + J) \cdot \bar{\mu}(m + I)
\end{aligned}$$

vii) $\forall l + H \in L/H$ ve $\forall n + J \in N/J$ için

$$\begin{aligned}
\bar{h}(\bar{\lambda}(l + H), n + J) &= \bar{h}(\lambda(l) + I, n + J) \\
&= h(\lambda(l), n) + H \\
&= n \cdot l + H \\
&= (n + J) \cdot (l + H) \\
\bar{h}'(n + J, \bar{\lambda}(l + H)) &= \bar{h}'(n + J, \lambda(l) + I) \\
&= h'(n, \lambda(l)) + H \\
&= l \cdot n + H \\
&= (l + H) \cdot (n + J)
\end{aligned}$$

$\forall m + I \in M/I$ ve $\forall l + H \in L/H$ için

$$\begin{aligned}
h(m + I, \bar{\lambda}'(l + H)) &= \bar{h}(m + I, \lambda'(l) + J) \\
&= h(m, \lambda'(l)) + H \\
&= m \cdot l + H \\
&= (m + I) \cdot (l + H) \\
h'(\bar{\lambda}'(l + H), m + I) &= \bar{h}'(\lambda'(l) + J, m + I) \\
&= h'(\lambda'(l), m) + H \\
&= l \cdot m + H \\
&= (l + H) \cdot (m + I)
\end{aligned}$$

viii) $\forall m + I, m' + I \in M/I$ ve $\forall n + J, n' + J \in N/J$ için

$$\begin{aligned}
(n + J) \cdot \bar{h}(m + I, n' + J) &= (n + J) \cdot (h(m, n') + H) \\
&= n \cdot h(m, n') + H \\
&= h'(n, m) \cdot n' + H \\
&= (h'(n, m) + H) \cdot (n' + J) \\
&= \bar{h}'(n + J, m + I) \cdot (n' + J) \\
(m + I) \cdot \bar{h}'(n + J, m' + I) &= (m + I) \cdot (h'(n, m') + H) \\
&= m \cdot h'(n, m') + H \\
&= h(m, n) \cdot m' + H \\
&= (h'(n, m) + H) \cdot (n' + J) \\
&= (h(m, n) + H) \cdot (m' + I) \\
&= \bar{h}(m + I, n + J) \cdot (m' + I) \blacksquare
\end{aligned}$$

Tanım 4.12. $\mathcal{H} \trianglelefteq \mathcal{L}$ olmak üzere yukarıdaki teoremde verilen $\mathcal{L}/\mathcal{H}$ çaprazlanmış karesine $\mathcal{L}$ 'nin $\mathcal{H}$ 'ye bölümü denir.

Sonuç 4.13. $\mathcal{L}$ bir çaprazlanmış kare olmak üzere $\mathcal{H}$ 'nin $\mathcal{L}$ 'nin bir çaprazlanmış kare ideali olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{H}$ 'nin bir $\phi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ çaprazlanmış kare homomorfizminin çekirdeğine eşit olmasıdır.

4.6. Cebirlerin Çaprazlanmış Kareler İçin İzomorfizm Teoremleri

Bu bölümde birimli, değişmeli cebirlerin çaprazlanmış karelerinde birinci, ikinci ve üçüncü izomorfizm teoremleri ispatlanmıştır.

Teorem 4.14. (Çaprazlanmış Kareler İçin 1. İzomorfizm Teoremi)

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \downarrow \lambda' & & \downarrow \mu \\ N & \xrightarrow{\nu} & R \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} L^* & \xrightarrow{\lambda^*} & M^* \\ \downarrow \lambda'^* & & \downarrow \mu^* \\ N^* & \xrightarrow{\nu^*} & R^* \end{array}$$

çaprazlanmış kareler ve $\phi = (\alpha, \beta, \gamma, \delta): \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^*$ bir çaprazlanmış kare homomorfizmi olmak üzere $\mathcal{L}/\text{çek}\phi \cong \text{gör}\phi$.

İspat: Çaprazlanmış modüllerle ilgili benzer sonuç gereği

$$\forall l + \text{çek}\alpha \in L/\text{çek}\alpha \text{ için } \bar{\alpha}: L/\text{çek}\alpha \rightarrow \text{gör}\alpha, \bar{\alpha}(l + \text{çek}\alpha) = \alpha(l)$$

$$\forall m + \text{çek}\beta \in M/\text{çek}\beta \text{ için } \bar{\beta}: M/\text{çek}\beta \rightarrow \text{gör}\beta, \bar{\beta}(m + \text{çek}\beta) = \beta(m)$$

$$\forall n + \text{çek}\gamma \in N/\text{çek}\gamma \text{ için } \bar{\gamma}: N/\text{çek}\gamma \rightarrow \text{gör}\gamma, \bar{\gamma}(n + \text{çek}\gamma) = \gamma(n)$$

$$\forall r + \text{çek}\delta \in R/\text{çek}\delta \text{ için } \bar{\delta}: R/\text{çek}\delta \rightarrow \text{gör}\delta, \bar{\delta}(r + \text{çek}\delta) = \delta(r)$$

fonksiyonlarının oluşturdukları $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), (\bar{\alpha}, \bar{\gamma}), (\bar{\beta}, \bar{\delta}), (\bar{\gamma}, \bar{\delta})$ ve $(\bar{\alpha}, \bar{\delta})$ ikilileri birer çaprazlanmış modül izomorfizmi olduklarından yalnızca $\bar{h}: M/\text{çek}\beta \times N/\text{çek}\gamma \rightarrow L/\text{çek}\alpha$, $\bar{h}': N/\text{çek}\gamma \times M/\text{çek}\beta \rightarrow L/\text{çek}\alpha$, $h^*: \text{gör}\beta \times \text{gör}\gamma \rightarrow \text{gör}\alpha$, $h'^*: \text{gör}\gamma \times \text{gör}\beta \rightarrow \text{gör}\alpha$ fonksiyonları için olan şartları incelemek yeterlidir.

$$\forall m + \text{çek}\beta \in M/\text{çek}\beta \text{ ve } \forall n + \text{çek}\gamma \in N/\text{çek}\gamma \text{ için}$$

$$\bar{\alpha}(\bar{h}(m + \text{çek}\beta, n + \text{çek}\gamma)) = \bar{\alpha}(h(m, n) + \text{çek}\alpha)$$

$$= \alpha(h(m, n))$$

$$= h^*(\beta(m), \gamma(n))$$

$$= h^*(\bar{\beta}(m + \text{çek}\beta), \bar{\gamma}(n + \text{çek}\gamma)).$$

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}(\bar{h}'(n + \text{çek}\gamma, m + \text{çek}\beta)) &= \bar{\alpha}(h'(n, m) + \text{çek}\alpha) \\
&= \alpha(h'(n, m)) \\
&= h'^*(\gamma(n), \beta(m)) \\
&= h'^*(\bar{\gamma}(n + \text{çek}\gamma), \bar{\beta}(m + \text{çek}\beta)). \blacksquare
\end{aligned}$$

Önerme 4.15. Cebirlerin bir

$$\begin{array}{ccc}
L & \xrightarrow{\lambda} & M \\
\downarrow \lambda' & & \downarrow \mu \\
N & \xrightarrow{\nu} & R
\end{array}$$

$\mathcal{L} =$

çaprazlanmış karesi verilsin ve

$$\begin{array}{ccc}
H & \longrightarrow & I \\
\downarrow & & \downarrow \\
J & \longrightarrow & K
\end{array}
, \quad
\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & B \\
\downarrow & & \downarrow \\
C & \longrightarrow & D
\end{array}$$

$\mathcal{H} =$ $\mathcal{A} =$

olsun. $\mathcal{A} \leq \mathcal{H} \trianglelefteq \mathcal{L}$ ve $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{L}$ ise $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{H}$ ve $\mathcal{L}/\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{H}/\mathcal{A}$ 'dır.

İspat: $\mathcal{A} \leq \mathcal{H}$ olduğu bilindiğinden $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{H}$ olduğunu göstermek için aşağıdakileri göstermek yeterlidir.

i) $D \leq K \trianglelefteq R$ ve $D \trianglelefteq R$ olduğundan cebirlerle ilgili benzer sonuç gereğince $D \trianglelefteq K$ olur.

ii) $k \in K$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ için aynı zamanda $k \in R$ olduğundan $k \cdot a \in A$, $k \cdot b \in B$, $k \cdot c \in C$ olur.

iii) $d \in D$, $a \in H$, $b \in I$, $c \in J$ için aynı zamanda $a \in L$, $b \in M$, $c \in N$ ve $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{L}$ olduğundan $d \cdot a \in A$, $d \cdot b \in B$, $d \cdot c \in C$ olur.

iv) $i \in I$ ve $c \in C$ ise aynı zamanda $i \in M$ olduğundan $h(i, c), h'(c, i) \in A$ 'dır.

v) $b \in B$ ve $j \in J$ ise $j \in N$ olduğundan $h(b, j), h'(j, b) \in A$ 'dır.

Böylece sonuç olarak $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{H}$ elde edilir.

Şimdi $\mathcal{L}/\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}/\mathcal{A}$ olduğunu gösterelim. $H/A \subseteq L/A$, $I/B \subseteq M/B$, $J/C \subseteq N/C$, $K/D \subseteq R/D$ ve $\mathcal{H}/\mathcal{A}$ bir çaprazlanmış kare olduğundan ve de $\mathcal{H}/\mathcal{A}$ 'nın sınır homomorfizmleri $\mathcal{L}/\mathcal{A}$ 'nin sınır homomorfizmlerinin kısıtlanmışları olduğundan $\mathcal{L}/\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}/\mathcal{A}$ 'dır.

i) Önerme 2.20'den $K/D \subseteq R/D$ 'dir.

ii) $r + D \in R/D$, $a + A \in H/A$, $b + B \in I/B$, $c + C \in J/C$ olmak üzere

$$(r + D) \cdot (a + A) = r \cdot a + A \in H/A$$

$$(r + D) \cdot (b + B) = r \cdot b + B \in I/B$$

$$(r + D) \cdot (c + C) = r \cdot c + C \in J/C$$

iii) $k + D \in K/D$, $l + A \in L/A$, $m + B \in M/B$, $n + C \in N/C$ olmak üzere

$$(k + D) \cdot (l + A) = k \cdot l + A \in H/A$$

$$(k + D) \cdot (m + B) = k \cdot m + B \in I/B$$

$$(k + D) \cdot (n + C) = k \cdot n + C \in J/C$$

iv) $m + B \in M/B$, $j + C \in J/C$ ise

$$\bar{h}(m + B, j + C) = h(m, j) + A \in H/A$$

$$\bar{h}'(j + C, m + B) = h'(j, m) + A \in H/A$$

v) $i + B \in I/B$, $n + C \in N/C$ ise

$$\bar{h}(i + B, n + C) = h(i, n) + A \in H/A$$

$$\bar{h}'(n + C, i + B) = h'(n, i) + A \in H/A \quad \blacksquare$$

Teorem 4.16. (Çaprazlanmış Kareler İçin 2. İzomorfizm Teoremi)

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \mathcal{L} = \downarrow \lambda' & & \downarrow \mu \\ N & \xrightarrow{\nu} & R \end{array}$$

bir çaprazlanmış kare ve

$$\mathcal{H} = \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & I \\ \downarrow & & \downarrow \\ J & \longrightarrow & K \end{array}, \quad \mathcal{A} = \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

olmak üzere $\mathcal{L}/\mathcal{A}/\mathcal{H}/\mathcal{A} \cong \mathcal{L}/\mathcal{H}$ 'dir.

İspat: Teorem 3.16 gereği

$$\forall l + A + H/A \in L/A/H/A \text{ için } \alpha: L/A/H/A \rightarrow L/A, \alpha(l + A + H/A) = l + H$$

$$\forall m + B + I/B \in M/B/I/B \text{ için } \beta: M/B/I/B \rightarrow M/I, \beta(m + B + I/B) = m + I$$

$$\forall n + C + J/C \in N/C/J/C \text{ için } \gamma: N/C/J/C \rightarrow N/J, \gamma(n + C + J/C) = n + J$$

$$\forall r + D + K/D \in R/D/K/D \text{ için } \delta: R/D/K/D \rightarrow R/K, \delta(r + D + K/D) = r + K$$

fonksiyonlarının oluşturdukları (α, β) , (α, γ) , (β, δ) , (γ, δ) ve (α, δ) ikilileri birer çaprazlanmış modül izomorfizmi olduklarından yalnızca

$$\bar{h}: M/B/I/B \times N/C/J/C \rightarrow L/A/H/A$$

$$\bar{h}': N/C/J/C \times M/B/I/B \rightarrow L/A/H/A$$

$$\bar{h}: M/I \times N/J \rightarrow L/H$$

ve

$$\bar{h}': N/J \times M/I \rightarrow L/H$$

fonksiyonları için olan şartları incelemek yeterlidir.

$$m + B + I/B \in M/B/I/B \text{ ve } n + C + J/C \in N/C/J/C \text{ olmak üzere;}$$

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\bar{h}\left(m+B+I/B, n+C+J/C\right)\right) &= \alpha\left(\bar{h}(m+B, n+C)+H/A\right) \\
&= \alpha\left(h(m, n)+A+H/A\right) \\
&= h(m, n)+H \\
&= \bar{h}(m+I, n+B) \\
&= \bar{h}\left(\beta\left(m+B+I/B\right), \gamma\left(n+C+J/C\right)\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\bar{h}'\left(n+C+J/C, m+B+I/B\right)\right) &= \alpha\left(\bar{h}'(n+C, m+B)+H/A\right) \\
&= \alpha\left(h'(n, m)+A+H/A\right) \\
&= h'(n, m)+H \\
&= \bar{h}'(n+B, m+I) \\
&= \bar{h}'\left(\gamma\left(n+C+J/C\right), \beta\left(m+B+I/B\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.17. (Çaprazlanmış Kareler İçin 3. İzomorfizm Teoremi)

$$\begin{array}{ccc}
L & \xrightarrow{\lambda} & M \\
\mathcal{L} = \downarrow \lambda' & & \downarrow \mu \\
N & \xrightarrow{\nu} & R
\end{array}$$

bir çaprazlanmış kare ve

$$\mathcal{H} = \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & I \\ \downarrow & & \downarrow \\ J & \longrightarrow & K \end{array}, \quad \mathcal{A} = \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

olmak üzere $\mathcal{A} \leq \mathcal{L}$ ve $\mathcal{H} \trianglelefteq \mathcal{L}$ ise $\mathcal{A}/\mathcal{A} \cap \mathcal{H} \cong \mathcal{A} + \mathcal{H}/\mathcal{H}$, dir.

İspat: Teorem 3.17'nin ispatından görüleceği üzere

$$\forall a + A \cap H \in A/A \cap H \text{ için } \alpha: A/A \cap H \rightarrow A+H/H, \quad \alpha(a + A \cap H) = a + H$$

$$\forall b + B \cap I \in B/B \cap I \text{ için } \beta: B/B \cap I \rightarrow B + I/I, \beta(b + B \cap I) = b + I$$

$$\forall c + C \cap J \in C/C \cap J \text{ için } \gamma: C/C \cap J \rightarrow C + J/J, \gamma(c + C \cap J) = c + J$$

$$\forall d + D \cap K \in D/D \cap K \text{ için } \delta: D/D \cap K \rightarrow D + K/K, \delta(d + D \cap K) = r + K$$

fonksiyonlarının oluşturdukları (α, β) , (α, γ) , (β, δ) , (γ, δ) ve (α, δ) ikilileri birer çaprazlanmış modül izomorfizmi olduklarından

$$\bar{h}_1: B/B \cap I \times C/C \cap J \rightarrow A/A \cap H$$

$$\bar{h}_1: B/B \cap I \times C/C \cap J \rightarrow A/A \cap H$$

$$\bar{h}_2: B + I/I \times C + J/J \rightarrow A + H/H$$

ve

$$\bar{h}_2: B + I/I \times C + J/J \rightarrow A + H/H$$

fonksiyonlarla ilgili olan şartları göstermek yeterlidir.

$$\forall b + B \cap I \in B + I/I \text{ ve } \forall c + C \cap J \in C + J/J \text{ için}$$

$$\alpha(\bar{h}_1(b + B \cap I, c + C \cap J)) = \alpha(h(b, c) + A \cap H)$$

$$= h(b, c) + H$$

$$= \bar{h}_2(b + I, c + J)$$

$$= \bar{h}_2(\beta(b + B \cap I), \gamma(c + C \cap J)).$$

$$\alpha(\bar{h}_1(b + B \cap I, c + C \cap J)) = \alpha(h(b, c) + A \cap H)$$

$$= h(b, c) + H$$

$$= \bar{h}_2(b + I, c + J)$$

$$= \bar{h}_2(\beta(b + B \cap I), \gamma(c + C \cap J)). \blacksquare$$

5. SONUÇ

Bu tez çalışması ile birlikte cebir ve özel olarak çaprazlanmış kareler alanında, değişmeli olmayan birleşmeli cebirlerin çaprazlanmış kareleri ele alınmış ve her cebirsel yapı gibi bu yapı için de önemli bir yere sahip olan izomorfizm teoremlerinin varlığı orijinal bir sonuç olarak ispatlanmıştır.

Bu çalışmanın matematik, fizik ve mühendislikte, özellikle de cebir ve cebirsel topoloji alanında cebirler için çaprazlanmış modüllerin kullanılması gereken durumlarda başvurulabilecek temel bir kaynak olması amaçlanmıştır.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar çok farklı şekillerde genelleştirilerek yeni çalışmalara temel oluşturabilir. Örneğin benzer sonuçların, cebirlerin çaprazlanmış küpleri ve daha genel olarak çaprazlanmış n – küpleri için de geçerli olup olmadığı araştırılabilir ya da benzer bir çalışma n – çaprazlanmış modüller için de yapılabilir. Diğer taraftan, bu çalışmada birleşmeli cebirler temel alınmıştır. Birleşmeli olmayan ve yalın cebir olarak da literatürde bahsi geçen yapılar, bu yapıların bazı daha özel formları ve daha genel olarak da herhangi bir cebirsel yapı için benzer şekilde çaprazlanmış modül ve çaprazlanmış kare yapıların kurulup kurulamayacağı ve kurulabilirse izomorfizm teoremlerinin bu yapılarda sağlanıp sağlanmayacağı araştırılabilir. Ayrıca, izomorfizm teoremlerinin bazı gelişmiş ifade şekilleri ve bunlarla ilişkili bazı sonuçlar da bulunmaktadır. Kelebek Lemması ve Jordan-Hölder Teoremi bu tarz sonuçlara örnek olarak verilebilir. Bu şekildeki sonuçların da söz konusu olan her bir yapı üzerinde araştırılması mümkündür.

KAYNAKLAR

- Arvasi, Z., Porter T., 1996. Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras. *Journal of Algebra*, 181, 426-448.
- Ege, U., 2002. Çarpım Cebiri ve Çaprazlanmış Modüller, Doktora Tezi. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, Türkiye
- Ellis, G. J., 1984. Crossed Modules and their Higher Dimensional Analogues, Ph.D. Dissertation. University of Wales, Bangor, Wales
- Ellis, G. J., 1988. Higher Dimensional Crossed Modules of Algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 52, 3, 277-282.
- Gerstenhaber, M., 1966. On the Deformation of Rings and Algebras II. *Annals of Mathematics*, 84, 1-19.
- Hungerford T.W., 1974. *Algebra*, Springer Verlag, New York, 528 s.
- Lichtenbaum, S., Schlessinger, M., 1967. The Cotangent Complex of a Morphism. *Transactions of the American Mathematical Society*, 128, 41-70.
- Odabaş, A., 2009. GAP (Grup, Algoritma ve Programlama) ile Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller, Doktora Tezi. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, Türkiye
- Porter, T., 1986. Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconcelos. *Journal of Algebra*, 99, 458-465.
- Shammu, N. M., 1992. Algebraic and an Categorical Structure of Category of Crossed Modules of Algebras, Ph.D. Dissertation. University College of North Wales, Bangor, Wales
- Whitehead, J.H.C., 1949. Combinatorial Homotopy II. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55, 5, 453-496.