

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**DEJENERE OLAN BİR BOYUTLU NONLİNEER
PARABOLİK DENKLEM İÇİN SONLU FARKLAR
YÖNTEMİ**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan.
Erdinç KILIÇ

İSTANBUL, 2018

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**DEJENERE OLAN BİR BOYUTLU NONLİNEER
PARABOLİK DENKLEM İÇİN SONLU FARKLAR
YÖNTEMİ**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan
Erdinç KILIÇ

Öğrenci No:
130860004

Danışman:
Prof. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

İSTANBUL, 2018

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Projesi olarak sunduğum “**Dejenere Olan Bir Boyutlu Nonlineer Parabolik Denklem İçin Sonlu Farklar Yöntemi**” konulu çalışmamın, bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. 11/05/2018

Erdiç KILIÇ



T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

**Beykent Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,**

Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 130860004 no'lu Erdinç KILIÇ'ın 11/05/2018 tarihinde yapılan tez savunma sınavı¹ sonucunda...55 dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında² oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile, ...kabul kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

Anabilim Dalı : Matematik-Bilgisayar
Programı : Uygulamalı Matematik
Tez Başlığı³ : Dejenere Olan Bir Boyutlu Nonlineer Parabolik Denklem İçin Sonlu Farklar Yöntemi

Tez Sınav Jürisi

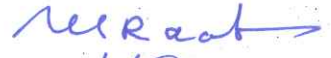
Öğretim Üyesi

Danışman : Prof.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

Üye : Prof.Dr. Mahir RESULOV

Üye : Prof.Dr. Halim ÖZDEMİR (Sakarya Üniversitesi)

İmza



¹ Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

² Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında “kabul”, “düzeltme” veya “red” kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

³ İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

Adı ve Soyadı : Erdiñ Kılıç
Danışmanı : Prof. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL
Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans / 2018
Alanı : Uygulamalı Matematik
Anahtar Kelimeler : Dejenere Olabilen, Sonlu Farklar

ÖZ

DEJENERE OLAN BİR BOYUTLU NONLİNEER PARABOLİK DENKLEM İÇİN SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

Tezde bazı özelliklere sahip olan, örneğin dejenere olabilen nonlineer denklemlerin söz konusu özelliklerini dikkate alarak çözümün tüm fiziksel özelliklerini düzgün ifade edebilen sonlu fark algoritmaları önerilmiştir. Bu amaçla önce bazı denklemlerin gerçek çözümleri bulunmuştur. Bu çözümler sonlu farklar yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümlerin test edilmesinde yardım etmede kullanılmıştır.

Tezin ikinci kısmında iki kez dejenere olan denklem için sonlu farklar yöntemi incelenmiştir. Nümerik çözümün gerçek çözüme yakınsaklık problemi de araştırılmıştır.

Name and Surname : Erdinç Kılıç
Supervisor : Prof. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL
Degree and Date : Master / 2018
Alanı : Applied Mathematics
Anahtar Kelimeler : Finite Difference Method, Numerical Solution

ABSTRACT

FINITE DIFFERENCES METHOD FOR ONE DIMENSIONAL NONLINEAR PARABOLIC EQUATION WITH DEGENERATION

In the thesis, a new finite difference algorithms are proposed, which can express all the physical properties of the solution correctly, taking into consideration the properties of nonlinear equations which have some properties such as degeneracy. For this purpose, at first, exact solutions of some equations were found. These solutions will help to test of the approximate solutions obtained by the finite difference method.

In the second part of the thesis, finite difference method is investigated for two double degenerate equations. The convergence problem of numerical solution is also researched.

ÖNSÖZ

Yüksek lisansım boyunca hem ders aşamasında hem de tez sürecim boyunca engin bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan ve “Dejenere Olan Bir Boyutlu Nonlineer Parabolik Denklem İçin Sonlu Farklar Yöntemi” isimli güncel bir problemi bana öneren, en çetin ispatları bile kolaylıkla ispatlamamda yolumu aydınlatan değerli hocalarım Prof. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL ile Prof. Dr. Mahir RESULOV’a en içten saygılarımı sunar, teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca her zaman yanımda olan ve beni koşulsuz destekleyen sevgili aileme de teşekkür ederim.

Erdinç KILIÇ

İstanbul, 2018

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No.
ÖZ	i
ABSTRACT	ii
1. GİRİŞ	1
1.1 Karakteristikler Yöntemi	2
1.2 Zayıf Çözüm	9
1.3 Nonlinear Kaynak Fonksiyonlu Skalar Denklem için Cauchy Problemi	12
1.4 Burgers Denklemi ve Cole-Hopf Dönüşümü	16
2. İKİ KEZ DEJENERE OLAN PARABOLİK DENKLEM	18
2.1 Cauhy Problemi	20
2.2 Yarı Doğru Üzerinde Sınır Değer Problemi	21
2.3 Birinci Tür Başlangıç-Sınır Değer Problemi	22
3. ESAS PROBLEMİN SAYISAL ÇÖZÜM ALGORİTMASI	24
3.1 Sayısal Çözümün Özellikleri	24
3.2 Sayısal Çözümün Yakınsaklığı	29
3.3 Birinci Deney ve Sayısal Çözümü	32
3.4 İkinci Deney ve Sayısal Çözümü	35
4. SONUÇLAR	38
KAYNAKLAR	39

1. GİRİŞ

Doğa olaylarına karşılık gelen fiziksel olayların ve uygulamada karşılaşılan çoğu problemlerin matematiksel modelleri, kısmi türevli diferansiyel denklem veya denklem sistemi için yazılmış başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümlerinin bulunmasına indirgenilir. Bilindiği üzere, genel olarak problemin başlangıç ve/veya sınır değer verileri süreksiz fonksiyonlar olup, çözümün bulunmasını zora sokar. Hatta çoğu durumda matematiksel problemin çözümünde, fiziksel olayın dinamiğinden doğan süreksizlik ortaya çıkabilir.

Güncel matematiksel fizik problemlerinin çözümünde bilinmesi gereken en önemli olgular, özelliklerin hangisinin fiziksel problemde, hangisinin de matematiksel modellerden ortaya çıktığını bilmektir. Çünkü fiziksel problemleri ifade eden denklemler genelde nonlinear olmaktadır ve söz konusu nonlinearlik yeni fiziksel özellikler barındırmaktadır. Örneğin, dalgaların dağılım zamanı yeri önceden bilinmeyen darbe dalgalarının oluşması, kontakt süreksizlikleri, bifürgasyonlar vesaire. Bu tür fiziksel özellikleri matematiksel ifade etmek için klasik matematiğin yöntemleri yetersiz kalmaktadır. Böylelikle, çağdaş fiziksel problemlerin çözümü yeni matematiksel yöntemler talep etmekle birlikte, modern bilgisayar tekniğinin kullanılmasını zorunlu kılmıştır. Bu nedenle herhangi bir çağdaş fiziksel problemin çözümünü araştırmak için aşağıdaki etapları gerçekleştirmek gerekmektedir:

1. Fiziksel problemi yeterince düzgün ifade edebilen matematiksel modelleri, yani diferansiyel denklem veya denklem sisteminin ve uygun başlangıç ve sınır koşullarının yazılması,

2. Matematiksel problemin etkili çözüm algoritmalarının yazılması ve bunların bilgisayarda gerçekleştirilmesi,

3. Alınan sonuçların fiziksel yorumlanması ve irdelenmesi.

Bu model çerçevesinde yapılan işler çağdaş matematiksel fizik bilim dalının teorik temellerini çok geniş şekilde geliştirmiş ve artık günümüzde bunların yardımı ile kuantum fiziğinin, hidrodinamiğin ve aerodinamiğin çetin problemleri çözülebilmektedir.

Nonlinear problemlerin incelenmesinde ve çözümlerinin elde edilmesinde genel bir teori veya metod bulunmamaktadır. Herhangi bir nonlinear problem için geçerli olan bir metod, yine aynı sınıftan olan fakat farklı bir nonlinear problem için sonuç vermeyebilir.

Bu sebeple gözönüne alınan herhangi bir nonlinear problemin çözümünü elde edebilmek için özel yöntemlerin oluşturulması zorunluluğu ortaya çıkmaktadır.

Uygulamada karşılaşılan nonlinear problemlerin çözümünde ortaya çıkan yeni karakteristik özellikler (örneğin, heyecanlanmış cephenin sonlu hızla dağılımı, darbe dalgası, kontakt sıçrayışları ve benzeri gibi fiziksel özellikler) zayıf çözüm kavramı yardımıyla ifade edilebilirler.

Tezin ileriki bölümlerinde sunulacak olan bilgilere alt yapı oluşturması açısından öncelikle kısmi türevli diferansiyel denklemlerin lineer teorisinden bilinen karakteristikler metodu ele alınacak ve sonra bu metodun nonlinear denklemlerde kullanılmasıyla karşılaşılan güçlüklerden yola çıkılarak çözüm kavramının genişletilmesinin gerekliliği üzerinde durulacaktır.

1.1 Karakteristikler Yöntemi

Sonraki bölümlerde kullanacağımız teoriyi incelemeden önce lineer teorideki

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

homojen denkleminin çözümü için karakteristikler yöntemini ele alalım. Burada $u = u(x, y)$ iki değişkene bağlı bir fonksiyonu göstermektedir. İki değişkenli fonksiyonun tam diferansiyelinin

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

olduğu bilinmektedir. Tüm terimleri ds ye bölersek, (bu hem y 'nin hem de x 'in s parametresine bağlı olduğu anlamına gelir)

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds}$$

(1.2)

elde ederiz. Kıyaslamayla, eğer

$$\begin{cases} a(x, y) = \frac{dx}{ds} \\ b(x, y) = \frac{dy}{ds} \\ 0 = \frac{du}{ds} \end{cases} \quad (1.3)$$

olsaydı, böylece kısmi türevli diferansiyel denklemi adi türevli diferansiyel denklemler sistemine indirgemiş olurduk. (1.3) sisteme (1.1)'e karşılık gelen karakteristik denklem denir.

(1.3) denklemler sistemini

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{0} \quad (1.4)$$

şeklinde yazabiliriz. (1.4) ifadesine (1.3) sisteminin “simetrik yazılım formu” adı da verilmektedir. Burada

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \\ \frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow du = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

şeklinde iki tane adi diferansiyel denklem alırız.

Tanım 1.1 (1.5) adi diferansiyel denklemler sisteminin çözümlerine karakteristikler adı verilir.

(1.5) sistemindeki birinci denklem $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ tipindedir ve adi diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği üzere çözümü $y = \varphi(x, c_1)$ olur, [25]. Bunu $c_1 = \varphi(x, y)$ şeklinde de yazabiliriz. (1.5) deki ikinci denklem olan $du = 0$ dan $u(x, y) = c_2 = \text{sabit}$ buluruz. Buradan görüldüğü üzere çözüm karakteristikler üzerinde sabittir.

$$\begin{cases} c_1 = \varphi(x, y) \\ c_2 = u(x, y) \end{cases}$$

(1.6)

ifadesine sistemin birinci aralık integralleri denir, [24].

Teorem 1.1 Eğer

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad (1.7)$$

kuazi lineer denklemi için

$$c_1 = \varphi(x, y, u) \quad (1.8)$$

$$c_2 = \psi(x, y, u) \quad (1.9)$$

ifadeleri karakteristik denklemin birinci integralleri ise $F(c_1, c_2) = 0$ ile tanımlanan fonksiyon denklemin genel çözümü olur. Burada F fonksiyonu her iki argümana göre diferansiyellenebilir bir fonksiyondur, [19].

Genel teoriye göre (1.8) ve (1.9) da verilen c_1 ve c_2 yerine ifadelerini yazarsak, çözüm

$$F(\varphi(x, y), u) = 0 \quad (1.10)$$

olur. (1.10) çözümü iki değişkene bağlı kapalı bir fonksiyondur. (1.10) ifadesinden y yi çekersek, f herhangi bir diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere

$$u = f(\varphi(x, y))$$

olur. Burada f diferansiyellenebilen bir fonksiyondur.

Örnek 1.1 Karakteristikler yöntemini kullanarak,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.11)$$

denkleminin çözümünü elde edelim.

Çözüm. Karakteristikler yöntemine göre denkleme karşılık gelen karakteristik denklem

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{c} = \frac{du}{0}$$

dır. Buradan, birinci aralık integralleri

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c \Rightarrow x - ct = c_1, \\ du = 0 \Rightarrow u = c_2 \end{cases}$$

olarak elde edilir. Teorem 1.1'e göre (1.11) denkleminin çözümü

$$F(c_1, c_2) = 0 \text{ veya } F(x - ct, u) = 0$$

olur. f herhangi bir diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere genel çözüm

$$u(x, y) = f(x - ct) \quad (1.12)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan görüldüğü üzere, karakteristikler geometrik olarak, eğimi c olan doğrular ailesi oluşturur. Çözüm karakteristikler üzerinde sabit kalır ve her karakteristiğin de kendi sabiti vardır.

(1.12) ifadesinin sonsuz sayıda çözümlerinin içinden tek birini seçebilmek için denkleme $t = 0$ da ek bir koşul koyacağız.

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (1.13)$$

φ bilinen bir fonksiyondur ve dalga'nın başlangıç profilini gösterir. Eğer (1.12) ifadesindeki $u(x, t) = f(x - ct)$ çözüm ise (1.13) başlangıç koşulunu koruması gerekir. Buradan $\varphi(x) = u(x, 0) = f(x)$ olmalıdır. Yani f başlangıçta verilen φ fonksiyonunun kendisidir, yani $f \equiv \varphi$ dir. Bunu (1.12) de yerine yazarsak

$$u(x,t) = \varphi(x-ct) \quad (1.14)$$

olur. Daha iyi anlaşılсын diye başlangıç fonksiyonuna aşağıdaki şekilde özel değer verelim

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases} \quad (1.15)$$

Bu durumda çözüm

$$\begin{aligned} u(x,t) = \varphi(x-ct) = \varphi(\xi) &= \begin{cases} 1-\xi^2, & |\xi| < 1, \\ 0, & |\xi| \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1-(x-ct)^2, & |x-ct| < 1, \\ 0, & |x-ct| \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.16)$$

olur. Bunu şuradan da görebiliriz

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c, (\text{hız}) \\ \frac{du}{dt} = 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Başlangıç profilin her bir noktası aynı hızla hareket ediyor. Başlangıçta çözüme verilen her bir bilgi (değer) karakteristikler üzerinde sonsuz olarak taşınır ($c < 0$ olsaydı, bu olaylar sağa doğru değil, sola doğru hareket ederdi). Yani çözüm karakteristikler üzerinde sabit olmaktadır, [24].

Örnek 1.2 Bu kez, karakteristikler yöntemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.18)$$

Hopf denkleminin için yazılmış

$$u_0(x) \equiv u(x,0) = \begin{cases} 1-x^2, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (1.19)$$

başlangıç değer problemine uygulayalım.

Çözüm. Karakteristikler yöntemine göre (1.18) denkleminin karşılık gelen karakteristik denklem

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u(x,t)} = \frac{du}{0} \quad (1.20)$$

dır. (1.20) den

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x,t), \\ \frac{du}{dt} = 0 \end{cases}$$

(1.21)

olur. (1.21) sistemindeki ikinci denklemden $u(x,t) = \text{sabit}$ olduğu görülmektedir. O halde, birinci aralık integrallerinden ilki $u(x,t) = c_1$ olup, bunun ışığında ikincisi

$$\frac{dx}{dt} = c_1 \text{ den } x - c_1 t = c_2 \text{ veya } x - u(x,t)t = c_2$$

olarak elde edilir. Teorem 1.1'e göre (1.18) denkleminin genel çözümü yazarsak

$$F(u, x - ut) = 0 \text{ veya } u = f(x - ut) \quad (1.22)$$

olur. Burada F ve f herhangi diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmaktadır. (1.22) den

$$u|_{t=0} = f(x) = u_0(x)$$

olup, başlangıç değer probleminin formal çözümü

$$u = u_0(x - ut)$$

dir. O halde, $\xi = x - ut$ Lagrange koordinatını dikkate alarak, (1.18), (1.19) probleminin çözümünü

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 - \xi^2, & |\xi| < 1, \\ 0, & |\xi| \geq 1 \end{cases} \quad (1.23)$$

şeklinde yazabiliriz. (1.23) ifadesinden çözümü biraz daha netleştirirsek

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{(2xt - 1) \pm \sqrt{1 - 4xt + 4t^2}}{2t^2}, & |x - ut| < 1, \\ 0, & |x - ut| \geq 1 \end{cases} \quad (1.24)$$

olduğunu görürüz. (1.24) fonksiyonun grafiğini kurduğumuz zaman, (1.21) ifadesinin

birinci denklemini olan $\frac{dx}{dt} = u(x,t)$ ifadesinden görüleceği üzere, başlangıç profilin her bir

noktası u hızıyla hareket eder. Böylece maksimum büyüklüğe sahip olan nokta, zamanın $t = t_1$ değerinde ut_1 kadar mesafeye gider. Bu göstermektedir ki, $x \geq 1$ olduğunda u çözümü çok değerli bir fonksiyona dönüşür, [24]. Matematiksel olarak bu bir çözümdür, ancak fiziksel olarak bir anlam içermez. Bu da karakteristikler yöntemin nonlinear denklemlerin global çözümüne uygulanamayacağını göstermektedir.

Örnek 1.3 Daha genel olarak, $D = \{(x,t) : -\infty < x < +\infty, t \geq 0\}$ bölgesinde

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial F(u(x,t))}{\partial x} = 0 \quad (1.25)$$

denklemini gözönüne alacağız. Burada, $F(u)$ fonksiyonu $F'(u)$ ve $F''(u)$ türevleri mevcut olan bilinen bir fonksiyonu göstermektedir. (1.25) denklemi için aşağıdaki başlangıç koşuluna sahip

$$u_0(x) \equiv u(x,0) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (1.26)$$

Cauchy problemini inceleyeceğiz, [22]. Burada $f(x)$ başlangıç profilini tanımlayan bilinen sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

Çözüm. (1.25), (1.26) probleminin çözümü karakteristikler metodu ile

$$u(x,t) = \begin{cases} f(\xi), & |\xi| \leq 1, \\ 0, & |\xi| > 1, \end{cases} \quad (1.27)$$

$$\xi = x - F'(u)t \quad (1.28)$$

şeklinde kolayca oluşturulabilir Burada ξ , $F'(u)$ hızı ile hareket eden uzaysal koordinatı göstermektedir, [20],[32].

(1.27) ifadesinden x e göre türev alırsak

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{df(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = f'(\xi) \cdot \left(1 - t f''(u) \frac{\partial u}{\partial x}\right) = f'(\xi) - f'(\xi) t F''(u) \frac{\partial u}{\partial x}$$

veya

$$\frac{\partial u}{\partial x} (1 + f'(\xi) F''(u) t) = f'(\xi)$$

buluruz. Buradan

$$u_x = \frac{f'(\xi)}{1 + f'(\xi) F''(u) t} \quad (1.29)$$

elde ederiz. Yine (1.27) ifadesinin t ye göre türevi alınırsa

$$u_t = \frac{df(t)}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = f'(\xi) (-F'(u) - t F''(u) u_t) = -f'(\xi) F'(u) - f'(\xi) F''(u) t u_t$$

veya

$$u_t(1 + f'(\xi)F''(u)t) = -f'(\xi)F'(u)$$

ifadesinden

$$u_t = \frac{-f'(\xi)F'(u)}{1 + f'(\xi)F''(u)t} \quad (1.30)$$

alırız. (1.29) bağıntısı $(x = \xi, (t = 0))$ da başlangıç profilinin eğimine göre, (x, t) noktasında $u(x, t)$ profilinin eğimini gösterir.

Eğer $f' < 0$ ve $F'' > 0$, (veya $f'(u) > 0$, $F''(u) < 0$) ise, bu taktirde $1 + f'(\xi)F''(u)t = 0$ olur ve

$$t = -\frac{1}{f'(\xi)F''(u)} > 0$$

değeri için $u_x(x, t) = \infty$ bulunur. Ayrıca, bu noktalarda $u_t(x, t)$ de sonsuz olur, yani $u_t(x, t) = \infty$ dır. Bu yüzden, eğer başlangıç profilini belli bir ξ noktasında negatif bir eğimi sahipse, yani $f'(\xi) < 0$ ise, $T_0 = \left(-\frac{1}{f'F''}\right)_{\min}$ de $u_t(x, t) = \infty$ ve $u_x(x, t) = \infty$ olur.

Bu değer türevlerin profilinde ilk kez dik teğetlerin oluştuğu zamandır. O halde,

$x_0 = \xi_0 + T F'(\xi_0)$ noktasının komşuluğunda $t > T = \left(-\frac{1}{f'F''}\right)_{\min}$ için çözüm tek değerli olmayabilir.

Sadece F nin değil aynı zamanda F' türevinin de u nun bir fonksiyonu olması tipik bir nonlinear etkiye neden olur. $F'(u) > 0$ için, büyük değerli u lar küçük değerli olanlardan daha hızlı yayıldığı için $u(x, t)$ başlangıç profilinde zamanla bozulma oluşur. $F'(u) < 0$ olduğunda tersine proses gözlemlenir. Böylece (1.25) denkleminin çözümü tek değerli olamaz. Bu da elbette ki, fiziksel açıdan anlamsızdır. Sürekli, çok değerli çözümler yerine, süresiz fakat tek değerli çözümlerle bu durum düzeltilebilir. Fakat bu süresiz çözüm diferansiyel denklemin klasik anlamda bir çözümü olamaz.

Bu nedenle, bu durum için “Sobolev” anlamında zayıf çözüm kavramını ileri süreceğiz, [31]. Bu tanım sayesinde, (1) denkleminin zayıf (ya da genelleştirilmiş) çözümü için iki kısımdan ibaret olacaktır: İlki, (1) denklemini sağlayan sürekli, diferansiyellenebilir bir çözüm ve ikincisi, Rankhine-Hugoniot koşulunu sağlayan sıçrayıştan oluşur, [32].

1.2 Zayıf Çözüm

İlk kez Rus matematikçi Sobolev'in 1930 lu yıllarda literatüre kattığı zayıf çözüm kavramını vermeden önce temel (test) fonksiyon kavramına değinelim. Önce adi fonksiyonu, sonrasında ise sonlu taşıyıcıya sahip fonksiyonu tanımlamayla başlayalım.

Tanım 1.2 $-\infty < x < \infty$ aralığında tanımlı, reel değerli ve herhangi $a \leq x \leq b$ sonlu aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlara adi (ordinary) fonksiyon denir, [11].

Tanım 1.2'den görüldüğü gibi, her bir $a \leq x \leq b$ sonlu aralığında sürekli (ölçülebilir) fonksiyonlar adi fonksiyonlar olmaktadır.

Tanım 1.3 Bir f fonksiyonunun sıfırdan farklı değerler aldığı noktalar kümesine f fonksiyonunun taşıyıcısı denir ve

$$Supp f(x) = \{x \mid f(x) \neq 0\}$$

ile gösterilir. Başka bir deyimle, keyfi $[a,b]$ aralığında tanımlı ve $a \leq x \leq b$ nin dışında sıfıra eşit olan $\varphi(x)$ fonksiyonuna sonlu fonksiyon denir.

Tanım 1.4 Reel değerlere sahip $-\infty < x < \infty$ aralığında tanımlı ve her mertebeden sürekli diferansiyellenebilen sonlu taşıyıcıya sahip fonksiyonlar sınıfına temel (test) fonksiyonlar sınıfı ve bu sınıfın keyfi elemanına ise temel (test) fonksiyon denir.

Örnek 1.4 Aşağıdaki şekilde tanımlanmış

$$u(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{4-x^2}}, & x \in (-2,2), \\ 0, & x \notin (-2,2) \end{cases}$$

fonksiyonu $Supp u(x) = [-2,2]$ olan bir temel (test) fonksiyondur, [31].

Temel fonksiyonların uzayı $\mathbf{K}$ ile gösterilir ve bu uzayın fonksiyonlarının toplamı ve keyfi reel sayıyla çarpımı yine temel fonksiyon olur, yani temel fonksiyonlar sınıfı lineer uzay oluşturmaktadır.

Tanım 1.5 $\mathbf{K}$ uzayı üzerinde herhangi bir $f(x)$ adi fonksiyonuna karşılık gelen

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathbf{K} \quad (1.31)$$

lineer fonksiyoneline genelleştirilmiş fonksiyon adıverilir, [11]. Burada integralleme aralığı doğal olarak $supp \varphi$ üzerinde yoğunlaşmaktadır.

Tanım 1.5 göstermektedir ki, temel fonksiyonlar iyi seçildiği durumda keyfi genelleştirilmiş fonksiyonun türevi vardır ve o da genelleştirilmiş fonksiyon olmaktadır.

Örnek 1.5 $f(x) \equiv c$ (c -sabit) fonksiyonunun genelleştirilmiş fonksiyonu

$$(f, \varphi) \equiv (c, \varphi) = c \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$$

dır. Özel olarak genelleştirilmiş 1 fonksiyonu, $(1, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$ anlamındadır, [11].

Kısmi türevli diferansiyel denklemler için Sobolev anlamındaki zayıf çözüm, bir integral eşitlik yardımı ile tanımlanmaktadır. Bu tanıma açıklamak için, $Q_T \subset R^{n+1}$ Euklid uzayında konveks bir bölge, $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ ve $f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ Q_T de ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere operatör biçimde verilmiş

$$Lu = f \quad (1.32)$$

lineer kısmi türevli diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada L sürekli diferansiyellenebilen katsayılara sahip self-adjoint (öz eşlenik) diferansiyel ifadeyi göstermektedir.

Tanım 1.6 Test fonksiyonlar sınıfından keyfi $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ fonksiyonları için

$$\int_{Q_T} \{uM\varphi - f\varphi\} dx dt = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \quad (1.33)$$

integral eşitliğini sağlayan u fonksiyonuna (1.32) denkleminin zayıf (veya genelleştirilmiş) çözümü denir. Burada $M = L^*$ dir; yani M, L operatörüne karşılık gelen adjoint operatör olmaktadır, [11].

Tanım 1.6'dan görüldüğü üzere, (1.32) denkleminin herhangi bir klasik çözümü (1.33) eşitliğini korumak zorundadır. Ama (1.33) eşitliğini sağlayan $u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ fonksiyonları daha geniş bir sınıf oluşturur. Çünkü (1.33) eşitliğinin içerdiği u fonksiyonlarının klasik anlamda türevlenebilir olması gerekmemektedir.

Zayıf çözüm kavramını daha iyi anlayabilmek için, Örnek 1.3'deki (1.25) denklemini $\varphi(x, t)$ test fonksiyonu ile çarparak, D bölgesi üzerinden integralleyelim. Bunun için, $u(x, t)$ fonksiyonunun tanım bölgesi olan D bölgesinde bölgeyi ikiye bölen öyle bir $l(t)$ eğrisinin mevcut olduğunu kabul edelim ki, bu eğri üzerinde $u(x, t)$ fonksiyonu sıçrayışa sahip olsun

$$\int_D \int \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \varphi(x, t) dx dt + \int_D \int \frac{\partial F(u(x, t))}{\partial x} \varphi(x, t) dx dt = 0. \quad (1.34)$$

(1.34) eşitliğindeki birinci integrali hesaplamak için, bunun içerisindeki ilk integrali t ye göre kısmi integrasyon metodu ile bulalım. $u = \varphi(x, t)$, $dv = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx$ dönüşümünü

uygularsak, $du = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} dt$, $v = u(x, t)$ olur ve birinci integralin içerisindeki kısım

$$\int_0^T u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = u(x, t) \varphi(x, t) \Big|_0^T - \int_0^T u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$$

olarak elde edilir. Böylece birinci integral için

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^T \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \varphi(x, t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt \quad (1.35)$$

alırız. Şimdi de, (1.34) eşitliğindeki ikinci integrali hesaplamak için, bunun içerisindeki ilk integrali x e göre kısmi integrasyon metodu ile bulalım. $u = \varphi(x, t)$, $dv = \frac{\partial F(u)}{\partial x} dx$

dönüşümünü uygularsak, $du = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$, $v = F(u)$ olur ve ikinci integralin içerisindeki kısım

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F(u)}{\partial x} \varphi(x, t) dx &= \int_0^T dt \left[\int_{-\infty}^{\ell(t)} \frac{\partial F(u)}{\partial x} \varphi(x, t) dx + \int_{\ell(t)}^{\infty} \frac{\partial F(u)}{\partial x} \varphi(x, t) dx \right] \\ &= \int_0^T dt \left[\varphi(x, t) F(u) \Big|_{-\infty}^{\ell_-(t)} - \int_{-\infty}^{\ell_-(t)} F(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \varphi(x, t) F(u) \Big|_{\ell_+(t)}^{\infty} - \int_{\ell_+(t)}^{\infty} F(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right] \\ &= \int_0^T \left[[\varphi(\ell_-(t), t) F(u) - \varphi(\ell_+(t), t) F(u)] - \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right] dt \\ &= \int_0^T [\varphi(\ell_-(t), t) F(u) - \varphi(\ell_+(t), t) F(u)] dt - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T F(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt \end{aligned} \quad (1.36)$$

(1.35) ve (1.36) ifadeleri (1.34) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx + \int_0^T [\varphi(\ell_-(t), t) F(u) - \varphi(\ell_+(t), t) F(u)] dt \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T \left[u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt = 0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

olur. (1.34) eşitliğinin sağlanması için (1.37) ifadesinde

$$\varphi(\ell_-(x, t) F(u) - \varphi(\ell_+(t), t) F(u) = 0$$

olması gerekir, ve buna Rengine-Hugoniot koşulu denir.

(1.37) ifadesinden görüldüğü üzere, (1.34) eşitliğinde u dan talep edilen türevlere artık ihtiyaç kalmamaktadır. Şimdi genelleştirilmiş veya zayıf çözüm kavramını tanımlayabiliriz.

Tanım 1.7 D de kompakt desteğe sahip keyfi bir test fonksiyonu için

$$\int_D [u(x,t) \varphi_t(x,t) + F(u(x,t)) \varphi_x(x,t)] dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,0) u(x,0) dx = 0 \quad (1.38)$$

integral eşitliğini sağlayan $u(x,t)$ fonksiyonuna (1.25), (1.26) probleminin bir zayıf veya genelleştirilmiş çözümü denir.

1.3 Nonlinear Kaynak Fonksiyonlu Skalar Denklemler için Cauchy Problemi

Bilindiği üzere nonlineerlikten oluşan bazı özelliklere sahip olan denklemlerin gerçek çözümünün araştırılması aşamasında önemli zorluklarla karşılaşmaktadır. Bu cinsten olan denklemlerden birisi pratikte çok rastlanan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - u(1-u) = 0, \quad (1.39)$$

$$u(x,0) = e^{-x} \quad (1.40)$$

denklemdir. (1.39) denklemleri için önce Cauchy problemini inceleyelim.

Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği üzere, (1.39) denkleminin çözümü adi diferansiyel denklemler sisteminin çözümüne indirgenmektedir. Bunun için denklemin çözümünü

$$V(t,x,u) = 0 \quad (1.41)$$

şeklinde arayalım. (1.41) ifadesinden t ve x 'e göre türev alırsak

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

olur. Buradan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\frac{\partial V}{\partial t}}{\frac{\partial V}{\partial u}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial u}}$$

alırız. Bu ifadeler (1.39) denkleminde yerine konursa

$$\frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + u(1-u) \frac{\partial V}{\partial u} = 0$$

elde ederiz. Sonuncu denkleme karşılık gelen karakteristik denklem

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{u(1-u)}$$

olur.

$$\frac{dx}{u} = \frac{du}{u(1-u)}$$

denkleminde

$$dx = \frac{du}{1-u}$$

birinci aralık integral olarak

$$c_1 = x + \ln(1-u) \quad (1.42)$$

bulunur. Diğer birinci integral

$$dt = \frac{du}{u(1-u)}$$

denkleminde elde edilecektir. Açık ki, bu aşağıdaki gibi

$$\frac{du}{dt} - u = u^2 \quad (1.43)$$

Bernoulli denklemi olmaktadır.

$$z = \frac{1}{u}$$

değişken dönüşümünden sonra (1.43) denklemi

$$\frac{dz}{dt} + z = 1 \quad (1.44)$$

lineer denkleme dönüşür. Önce homojen denklemi

$$\frac{dz}{dt} + z = 1$$

çözersek

$$z = c_2 e^{-t} \quad (1.45)$$

ifadesini alırız. Sabitin varyasyonu metodunun yapısına göre homojen olmayan denklemin çözümünü elde etmek için (1.45) ifadesinde c_2 yi sabit olarak değil de, bilinmeyen bir fonksiyon olarak varsayacağız. Söz konusu fonksiyonun (1.45) deki ifadesi (1.44) de yerine konulduktan sonra $c_2(x) = e^t + c_2$ olur, çözümü ise

$$z = e^{-t}(c_2 + e^t)$$

şeklinde elde ederiz. (1.44) den

$$u = \frac{e^t}{(c_2 + e^t)}$$

olur. Buradan

$$c_2 = \frac{e^t}{u} - e^t \quad (1.46)$$

buluruz. (1.42), (1.46) ifadelerinde başlangıç koşulunu dikkate alırsak

$$c_1 = x + \ln(1 - e^{-x}), \quad c_2 = \frac{1}{e^{-x}} - 1$$

alırız. Buradan $c_1 = \ln c_2$ elde ederiz. Sonuncu ifadede c_1, c_2 nin değerleri yerine konursa

$$x + \ln(1 - u) = \ln \frac{e^t}{u} - e^t$$

buluruz ki, buradan da

$$u(x, t) = e^{-x+t} \quad (1.47)$$

olur.

Şimdi (1.39) denklemini aşağıdaki genel

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (1.48)$$

başlangıç koşulu çerçevesinde inceleyelim. Bu durumda

$$c_1 = x + \ln(1 - \varphi(x)), \quad c_2 = \frac{1}{\varphi(x)} - 1$$

olmaktadır. Buradan

$$x = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{c_2 + 1}\right)$$

ve

$$c_1 = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{c_2 + 1}\right) + \ln\left(\varphi^{-1}\left(\frac{c_2}{c_2 + 1}\right)\right) \quad (1.49)$$

elde ederiz. Tekrar (1.49) ifadesinde c_1, c_2 nin değerlerini yerine koyarsak

$$x + \ln(1 - \varphi(x)) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\frac{e^t}{u} - e^t + 1}\right) + \ln\frac{\frac{e^t}{u} - e^t}{\frac{e^t}{u} - e^t + 1} \quad (1.50)$$

alırız. (1.50) ifadesini

$$x + \ln(1 - \varphi(x)) - \ln\frac{\frac{e^t}{u} - e^t}{\frac{e^t}{u} - e^t + 1} = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\frac{e^t}{u} - e^t + 1}\right)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$\ln e^x + \ln(1 - u) - \ln\frac{e^t(1 - u)}{e^t - ue^t + u} = \varphi^{-1}\left(\frac{u}{e^t(1 - u + ue^{-t})}\right)$$

veya

$$\ln e^x(1 - u + ue^{-t}) = \varphi^{-1}\left(\frac{u}{e^t(1 - u + ue^{-t})}\right)$$

elde ederiz. Her iki tarafı φ ile etkilersek

$$\varphi\left(\ln e^x(1 - u + ue^{-t})\right) = \frac{u}{e^t(1 - u + ue^{-t})}$$

alırız. Buradan da

$$u(x, t) = e^t(1 - u + ue^{-t})\varphi\left(\ln e^x(1 - u + ue^{-t})\right)$$

buluruz.

Özel durumda $\varphi(x) = e^{-x}$ olursa $u(x, t) = e^{-x+t}$ elde ederiz. $\varphi(x) = x^2$, $\varphi(x) = \sqrt{x}$

olduğu durumlardaki çözümlerin grafikleri Figure gösterilmiştir.

1.4 Burgers Denklemi ve Cole-Hopf Dönüşümü

Diğer gerçek çözümü elde edilebilen denklemlerden birisi de Burgers denklemi olmaktadır. Bir boyutlu durumda Burgers denklemi aşağıdaki

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (1.51)$$

gibi yazılır. Burada ν pozitif sabittir.

Önce (1.51) denkleminin gerçek çözümünü elde etmek için onu

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (1.52)$$

şeklinde yazalım. (1.52) denklemi için başlangıç koşul olarak

$$u(x,0) = F(x) \quad (1.53)$$

ekleyelim. Sonra ise

$$u(x,t) = -2\nu \frac{\varphi_x}{\varphi}$$

Cole-Hopf değişken dönüşümünü yapalım. Açık ki, bu dönüşümü

$$u(x,t) = -2\nu \ln \varphi(x,t) \quad (1.54)$$

gibi de yazabiliriz. Buradan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -2\nu \frac{\varphi_t}{\varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -2\nu \frac{\varphi_x}{\varphi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\nu \frac{\varphi \varphi_{xx} - \varphi_x^2}{\varphi^2}$$

alırız. Bulduğumuz ifadeler (1.52) de yerine konursa $\varphi(x,t)$ fonksiyonu için lineer

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} \quad (1.55)$$

ısı denklemini elde ederiz. Bu denklem için başlangıç koşul, (1.53) ve (1.54) ifadelerini dikkate alırsak

$$\varphi(x,0) = e^{-\frac{1}{2\nu} \int_0^x F(\xi) d\xi} = \Phi(x) \quad (1.56)$$

olur. Kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği üzere (1.54) ve (1.56) probleminin çözümü

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi vt}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta) e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4vt}} d\eta$$

olmaktadır.

Cole-Hopf değişken dönüşümünü dikkate alırsak

$$u(x, t) = -2v \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\eta}{t} e^{-\frac{G}{2v}} d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{G}{2v}} d\eta}$$

olur ve burada

$$G(\eta; x, t) = F(\eta) - \frac{(x-\eta)^2}{2t}$$

olmaktadır.

2. İKİ KEZ DEJENERE OLAN PARABOLİK DENKLEM

Gözenekli bir ortamda Newtonyen olmayan bir sıvının hareketi, ince katmandaki laminar akış, nehirdeki suyun hareketi ve benzeri gibi birçok hidrodinamik problemin, ilgili başlangıç ve sınır koşulları altında iki boyutlu nonlinear parabolik kısmi türevli diferansiyel denklemlerle modellendiği bilinmektedir ([4], [6], [7], [8], [9]). Bu tür problemlerin araştırılması hem pratik hem de teorik açıdan önemlidir.

Alışıldığı üzere, R Reel sayılar kümesi ve $R_T = \{(x, t) \mid x \in R^1, 0 < t < T\} \subset R^2$ olsun. R_T de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} K \left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x} \right) - \frac{\partial Q(u)}{\partial x} \quad (2.1)$$

denklemi için yazılmış başlangıç ve başlangıç-sınır değer problemini inceleyeceğiz. Burada $u(x, t)$ bilinmeyen bir fonksiyon ve $K(s)$, $\sigma(u)$ ve $Q(u)$ fonksiyonları u ya göre bilinen fonksiyonlardır, ayrıca aşağıdaki koşulları da sağlarlar:

- i. $K(s)$, $\sigma(u)$ ve $Q(u)$ fonksiyonları sırasıyla sonlu s ve u için sonlu ve negatif olmayan fonksiyonlardır;
- ii. $u > 0$ için $K'_u(u) > 0$ ve $\sigma'_u(u) > 0$ dır ve sonludur, $K(|u|) - K(0) \geq m_0 > 0$,
 $|u| \geq m_1$;
- iii. $K(0) = K'(0) = \sigma(0) = \sigma'(0) = 0$;
- iv. $K''_u(u)$ işaret değiştirir.

(2.1) denklemi için birinci tür başlangıç-sınır değer problemi $Q(u) = 0$, $\sigma(u) = u$ ve $K(s) = s^{p-2}$, ($p > 2$) olduğunda [17] de incelenmiş ve uygun bir uzayda zayıf çözümün varlığı ispatlanmıştır. (2.1) denklemi nonlinear olduğundan bu denklemin gerçek çözümünü oluşturmak mümkün değildir. Ancak $K(s)$, $\sigma(u)$ ve $Q(u)$ nun özel durumlarında denklemin genel çözümünü bulmak mümkündür. Örneğin, $K(s) = s^n$, ($n > 2$) ve $\sigma(u) = u$ olduğunda, yani $K''(s)$ işaret değişmediğinde (2.1) denklemi koştan dalga şeklinde çözüme sahiptir, ([2], [12], [21], [27]). Bu çözümün sürekli olduğu, fakat onun birinci ve ikinci türevlerinin süreksizlik noktalarına sahip olduğu ispatlanmıştır.

Diğer taraftan, $\frac{\partial u^n}{\partial x}$ fonksiyonu da sürekli dir.

Not 2.1. $K'_s(s) < 0$, $Q(u) = 0$ olduğu durumda, (2.1) denklemini takakalı türbülans akışındaki ısı ve kütle değişimlerini modellemektedir, [5], [18].

$K(s) \equiv 0$ olduğunda ve $Q(u)$ Buckley-Leverett fonksiyonunu gösterdiğinde (2.1) denklemini, kapiler basıncı dikkate alınmaksızın, gözenekli bir ortamda iki fazlı sıkıştırılmaz akışkanların eşzamanlı mikroskobik hareketini modeller. Bu durumda denklem

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(u(x,t))}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

formunu alır. Karakteristikler metodu kullanarak elde edilen çözüm kapalı bir fonksiyonudur ve genellikle pratik olarak kullanılması imkansızdır. Diğer yandan, [6], [7], [13], [14], [15], [20], [30], [32] gibi kaynaklarda (2.1) denkleminin yeri önceden bilinmeyen süreksizlik noktalarına sahip olduğu gösterilmiştir. Bunlara ek olarak, [1], [14], [16], [21], [22], [26], [30] gibi kaynaklarda da (2.1) denkleminin nümerik ve zayıf çözümünü elde etmek için bir metod ve önerilmiştir.

$Q(u) = 0$ olduğu durumda (2.1) denklemini [3] de incelenmiş ve nümerik çözümünü elde edebilmek için çözümde bulunan süreksizlik noktalarını dikkate almayan homojen şemalar önerilmiştir. [23] ve [28] de ise parabolik tip nonlinear denklemin nümerik çözümünü bulmak için süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal bir metod geliştirilmiştir.

$K(s) = vs$, $\sigma(u) = u$ ve $Q(u) = \frac{u^2}{2}$ olduğu zaman, (2.1) aşağıdaki

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Burgers denklemine indirgenir, [10], [32].

Bu tezde, (2.1) denklemini için yazılmış problemin süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümünü bulabilmek için yeni bir sonlu fark metodu önerilecek ve sayısal çözümün bazı özellikleri araştırılacaktır.

(2.1) denkleminden görüldüğü üzere, $u = 0$ ve $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ olduğunda

$$\frac{\partial}{\partial x} K\left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x}\right) = K'(s) \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

eşitliği sağlanacak ve denklem birinci mertebeden denkleme dejenere olacaktır. Fiziksel açıdan, akışı tanımlayan $-K\left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x}\right) + Q(u)$ fonksiyonu sürekli olmaktadır.

2.1 Cauhy Problemi

Bu bölümde öncelikle, (2.1) denklemini aşağıdaki başlangıç koşulu

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (2.2)$$

ile ele alacağız. Burda $u_0(x)$ parçalı sabit ya da sürekli bilinen bir fonsiyondur. (2.1), (2.2) probleminin zayıf çözümünü aşağıdaki şekilde tanımlayacağız.

Tanım 2.1 (2.1) başlangıç koşulunu koruyan ve her test fonsiyonu $f(x,t) \in W_{1,1}^2(\overset{\circ}{R}_T^2)$ için

$$\int_{R_T} \left\{ u \frac{\partial f}{\partial t} + \left[K \left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x} \right) - Q(u) \right] \frac{\partial f}{\partial x} \right\} dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) f(x,0) dx = 0$$

integral eşitliğini sağlayan $u(x,t)$ fonsiyonuna (2.1), (2.2) probleminin bir zayıf çözümü denir. Burada $W_{1,1}^2(\overset{\circ}{R}_T^2)$ uzayı $\overset{\circ}{R}_T^2$ üzerinde tanımlı Sobolev uzayını göstermektedir.

Tanım 2.1'den görüldüğü üzere, $u(x,t)$, $K(s)$ ve $Q(u)$ fonsiyonları bu durumda süreksiz de olabilirler. (2.1), (2.2) probleminin zayıf çözümünü elde edebilmek için [20] ve [21] de izlenen yolu takip edersek,

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = K \left[\frac{\partial}{\partial x} \sigma \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right) \right] - Q \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right),$$

$$v(x,0) = v_0(x)$$

yardımcı problemini önerebiliriz. Buradaki $v_0(x)$ fonsiyonu

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = u_0(x) \quad (2.3)$$

eşitliğinin herhangi biri türevlenebilir çözümdür.

2.2 Yarı Doğru Üzerinde Sınır Değer Problemi

Bu bölümde (2.1) denklemini $R_T^+ = \{0 \leq x < \infty, t \geq 0\}$ bölgesinde

$$u(x,0) = u_0(x), \quad (2.4)$$

$$u(0,t) = u_1(t) \quad (2.5)$$

başlangıç ve sınır koşulları dahilinde inceleyeceğiz. Burada $u_0(x)$ ve $u_1(t)$ fonksiyonları verilen fonksiyonlar.

(2.1), (2.4), (2.5) probleminin zayıf çözümünü aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

Tanım 2.2 (2.4) ve (2.5) koşullarını koruyan ve $f(x,T) = 0$ olan her $f(x,t) \in W_{1,1}^2(\overset{\circ}{R}_T^+)$ test fonksiyonu için

$$\int_{R_T^+} \left\{ u \frac{\partial f}{\partial t} + \left[K \left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x} \right) - Q(u) \right] \frac{\partial f}{\partial x} \right\} dx dt +$$

$$\int_0^T \left[K \left(\frac{\partial \sigma(u(0,t))}{\partial x} \right) - Q(u(0,t)) \right] f(0,t) dx + \int_0^\infty u_0(x) f(x,0) dx = 0$$

integral eşitliğini sağlayan $u(x,t)$ fonksiyonuna (2.1), (2.4), (2.5) probleminin zayıf çözümü denir. Burada $W_{1,1}^2(\overset{\circ}{R}_T^+)$, $\overset{\circ}{R}_T^+$ üzerinde bir Sobolev uzayıdır.

(2.1), (2.4), (2.5) probleminin zayıf çözümü aşağıdaki

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = K \left(\frac{\partial \sigma(u(x,t))}{\partial x} \right) - Q(u),$$

$$v(x,0) = v_0(x),$$

$$u(0,t) = u_1(t)$$

yardımcı probleminden elde edilir. Burda $v_0(x)$ fonksiyonu (2.3) denkleminin herhangi bir çözümüdür.

2.3 Birinci Tür Başlangıç-Sınır Değer Problemi

Bu bölümde (2.1) denklemini $D_T^\ell = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq \ell, 0 \leq t \leq T\}$ bölgesinde

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [a, b] \quad (2.6)$$

başlangıç ve

$$u(0, t) = u_1(t), \quad u(\ell, t) = u_2(t) \quad (2.7)$$

sınır koşulları ile inceleyeceğiz.

Tanım 2.3 (2.6) ve (2.7) koşullarını koruyan ve $f(x, T) = 0$ olan her test $f(x, t) \in W_{1,1}^2(\overset{\circ}{D}_T^\ell)$ fonksiyonu için

$$\int_{D_T^\ell} \left\{ u \frac{\partial f}{\partial t} + \left[K \left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x} \right) - Q(u) \right] \frac{\partial f}{\partial x} \right\} dx dt + \int_0^T \left[K \left(\frac{\partial \sigma(u(0, t))}{\partial x} \right) - Q(u(0, t)) \right] f(0, t) dx + \int_0^\infty u_0(x) f(x, 0) dx = 0$$

integral denklemini sağlayan $u(x, t)$ fonksiyonuna (2.1), (2.6), (2.7) probleminin zayıf çözümü denir. Burada $W_{1,1}^2(\overset{\circ}{D}_T^\ell)$, $\overset{\circ}{D}_T^\ell$ üzerinde bir Sobolev uzayıdır.

(2.1), (2.6), (2.7) porbleminin zayıf çözümünü bulmak için, aşağıdaki

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = K \left(\frac{\partial \sigma(u(x, t))}{\partial x} \right) - Q(u), \quad (2.8)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad (2.9)$$

$$u(0, t) = u_1(t), \quad u(\ell, 0) = u_2(t) \quad (2.10)$$

yardımcı problemini dahil edeceğiz. Burda $v_0(x)$ fonksiyonu (2.3) denkleminin herhangi bir diferansiyellebilir çözümünü göstermektedir.

Teorem 2.1 Eğer $v(x, t)$, (2.8)-(2.10) yardımcı probleminin soft (yumuşak) çözümü ise, aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$u(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (2.11)$$

fonksiyonu (2.1), (2.6), (2.7) esas probleminin zayıf çözümü olur.

Teorem 2.1'i kanıtlamak için, (2.8) denklemini $f_x(x,t)$ ile çarpıp, D_T^ℓ bölgesi üzerinden integralini alırsak

$$\int_{D_T^\ell} f \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} K \left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x} \right) + \frac{\partial Q(u)}{\partial x} \right] dx dt = 0$$

ifadesini alırız. Sırasıyla önce t ve sonra x 'e göre kısmi integrasyon formülünü uygularsak, Teorem 2.1'in ispatını tamamlamış oluruz.

Not 2.2. Teorem 2.1, yukarıda bahsedilen bütün durumlar için geçerlidir.

Önerilen yardımcı problem aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) $v(x,t)$ mutlak sürekli bir fonksiyondur.

ii) (2.1), (2.2) probleminin bilinmeyen çözümünü bulmak için oluşturulan algoritma $u(x,t)$ fonksiyonunun x ve t ye göre türevlerini içermez.

iii) $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ yi elde etmek için oluşturulan algoritmalar bilgisayar hesaplamaları açısından basit ve ekonomiktir.

Önerilen yardımcı problemlerin avantajlarını kullanarak, problemin nümerik çözümünü elde edebilmek için algoritmalar geliştireceğiz ve bir sonraki bölümde onların bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

3. ESAS PROBLEMİN SAYISAL ÇÖZÜM ALGORİTMASI

(2.1), (2.6), (2.7) esas probleminin sayısal algoritmasını geliştirmek için, öncelikle D_T^ℓ bölgesini

$$\Omega_{h,\tau}^\ell = \{(x_i, t_k) \mid x_i = ih, t_k = k\tau, i = 0, 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots; h > 0, \tau > 0\}$$

ağı ile örtelim. Burada, h ve τ sırasıyla x ve t değişkenlerine göre $\Omega_{h,\tau}^\ell$ ağının adımlarını göstermektedir. $\gamma_{h,\tau}^\ell$, $\Omega_{h,\tau}^\ell$ ağının sınırındaki düğüm noktalarının kümesi olmak üzere $\bar{\Omega}_{h,\tau}^\ell = \Omega_{h,\tau}^\ell + \gamma_{h,\tau}^\ell$ dir. $U_{i,k}$ ile $\Omega_{h,\tau}^\ell$ ağında tanımlı $u(x_i, t_k)$ ağ fonksiyonunun değerini göstereceğiz. Ayrıca, R_T ve R_T^+ bölgeleri üzerinde oluşturulan ağları sırasıyla ${}^T\Omega_{h,\tau}$ ve ${}^T\Omega_{h,\tau}^+$ notasyonlarıyla belirteceğiz.

3.1 Sayısal Çözümün Özellikleri

(2.8)-(2.10) yardımcı problemini $\Omega_{h,\tau}^\ell$ ağının keyfi (x_i, t_k) noktalarında

$$\frac{V_{i,k+1} - V_{i,k}}{\tau} = K \left(\frac{\sigma(U_{i,k}) - \sigma(U_{i-1,k})}{h} \right) - Q(U_{i,k}), \quad (3.1)$$

$$V_{i,0} = v_0(x_i), \quad (3.2)$$

$$V_x|_{i=0} = u_1(t_k), \quad V_{\bar{x}}|_{i=n} = u_2(t_k) \quad (3.3)$$

şeklinde sonlu farklara ayrıklaştıralım.

Nümerik çözümün gerçek çözüme yakınsak olduğunu kanıtlamadan önce aşağıdaki teoremlerin ispatlayacağız.

Teorem 3.1 Eğer $V_{i,k}$, (3.1)-(3.3) yardımcı probleminin nümerik çözümü ise, aşağıdaki gibi tanımlanan

$$U_{i,k+1} = \frac{V_{i,k+1} - V_{i-1,k+1}}{h} \quad (3.4)$$

ağ fonksiyonu

$$\frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{\tau} = \frac{1}{h} \left[K \left(\frac{\sigma(U_{i+1,k}) - \sigma(U_{i,k})}{h} \right) - K \left(\frac{\sigma(U_{i,k}) - \sigma(U_{i-1,k})}{h} \right) \right]$$

$$-\frac{Q(U_{i,k}) - Q(U_{i-1,k})}{h}, \quad (3.5)$$

$$U_{i,0} = u_0(x_i), \quad (3.6)$$

$$U_{0,k} = u_1(t_k), \quad U_{n,k} = u_2(t_k) \quad (3.7)$$

problemin nümerik çözümüdür.

Şimdi, $U_{i,k}$ sayısal çözümünün bazı özelliklerini araştıracağız.

Lemma 3.1 (3.5)-(3.7) probleminin çözümü en büyük (veya en küçük) değerini sınır düğüm noktalarında alır, yani

$$0 \leq m \leq U_{i,k} \leq M$$

dır. Burada $m = \min \{u_0, u_1, u_2\}$ ve $M = \max \{u_0, u_1, u_2\}$ olmaktadır.

İspat. Sadelik için $U_{i,k} = U$, $U_{i,k+1} = \hat{U}$ ve $\hat{U}_{\pm} = U_{i\pm 1, k+1}$ notasyonları verelim. Bu notasyonları dikkate alarak (3.5) ifadesini aşağıdaki gibi

$$\hat{U} - U = \frac{\tau}{h} K' \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \left[\frac{\sigma(\hat{U}_+) - \sigma(\hat{U})}{h} - \frac{\sigma(\hat{U}) - \sigma(\hat{U}_-)}{h} \right] - \frac{Q(\hat{U}) - Q(\hat{U}_-)}{h} \quad (3.8)$$

tekrar yazabiliriz. Varsayalım ki, $\hat{U} \neq \text{sabit}$ olsun ve $\hat{U}$ en büyük değerini $\gamma_{h,\tau}^\ell$ nın düğüm noktalarından ziyade, $\Omega_{h,\tau}^\ell$ ağının bazı noktalarda alsın. Öyleyse, $\hat{U}$ 'nın en büyük değerini aldığı öyle bir $(x_1, t_1) \in \Omega_{h,\tau}^\ell$ noktası vardır ki, en azından bu noktanın komşuluğunda $U(x_1, t_1)$, $\hat{U}(x_1, t_1)$ 'den küçüktür.

Eğer $\hat{U}(x_1, t_1) > U(x_1, t_1)$ ise, $\sigma(u)$ fonksiyonu monoton olduğundan dolayı, (3.8) bağıntısının sol kısmı pozitif; sağ kısmı ise negatif olur. Böylece, çelişkiye varırız. Aynı şekilde, eğer $\hat{U}_{\pm}(x_1, t_1) > \hat{U}(x_1, t_1)$ ise, kararsızlığa ulaşırız. Benzer şekilde, $\hat{U}$ 'nın en küçük değerini $\Omega_{h,\tau}^\ell$ ağının iç düğüm noktalarında da alamaz.

Lemma 3.2 Eğer $\max \{|\alpha_1|, |\alpha_2|\} \leq \text{sabit}$ ve

$$\max \left\{ |\alpha_1|, |\alpha_2|, \left| \frac{d\alpha_1}{dt} \right|, \left| \frac{d\alpha_2}{dt} \right| \right\} \leq \text{sabit}$$

ise, bu taktirde (3.5)-(3.7) probleminin çözümü için aşağıdaki değerlendirme

$$(\sigma_x(\hat{U}), [K(\sigma_x(\hat{U})) - K(0) - Q(u)]) \leq \text{sabit} \quad (3.9)$$

geçerli olur.

İspat. (3.9) daki değerlendirmenin geçerliliğini kanıtlamak için, eşitliği

$$U_t = K_{\bar{x}}(\sigma_x(\hat{U})) - Q_{\bar{x}}(\hat{U})$$

denklemini $w(\hat{U})$ ile çarptıktan ve i, k 'ya göre toplamını aldıktan sonra,

$$(\hat{w}, U_t)_{L_2(\Omega_{h\tau})} = (\hat{w}, K_{\bar{x}}(\sigma_x(\hat{U})))_{L_2(\Omega_{h\tau})} - (\hat{w}, Q_{\bar{x}}(\hat{U}))_{L_2(\Omega_{h\tau})} \quad (3.10)$$

elde ederiz. Burada,

$$w(U) = \sigma(U) + (x_{i-\ell})\alpha_1 - x_i\alpha_2 = \sigma(U) + H(t), \quad (3.11)$$

$$\alpha_1 = \sigma(u_1(t)), \quad \alpha_2 = \sigma(u_2(t)), \quad H(t) = (x_{i-\ell})\alpha_1 - x_i\alpha_2$$

dır. $i = 0$ ve $i = n$ olduğunda $w = 0$ olacağı kolayca gösterilebilir.

Şimdi (3.10) formülüne toplam formülünü uygulayacağız. Öncelikle (3.10) ifadesinin sol tarafındaki $I_1 = (\hat{w}, U_t)_{L_2(\Omega_{h\tau})}$ ifadesini gözönüne alalım. (3.11) ifadesini dikkate alarak, I_1 'i aşağıdaki gibi

$$I_1 = (\sigma(\hat{U}), U_t) + I_{12} \quad (3.12)$$

şekilde tekrar yazılabiliriz. Burada

$$I_{12} = \tau \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} H(t) U_t = (H(t), U_t)_{L_2(\Omega_{h\tau})}$$

dır. $I_2 = (\hat{w}, K_{\bar{x}}(\sigma_x(\hat{U})))_{L_2(\Omega_{h\tau})}$ ifadesine kısmi toplam formülünü uygularsak,

$$\begin{aligned} I_2 &= (\hat{w}, K_{\bar{x}}(\sigma_x(\hat{U})))_{L_2(\Omega_{h\tau})} = \tau \sum_{k=1}^{m-1} w|_{i=n} K(\sigma_x(\hat{U}))|_{i=n-1} - \tau \sum_{k=1}^{m-1} (w K(\sigma_x(\hat{U})))_{i=0} \\ &\quad - (\hat{w}_x, K(\sigma_x(\hat{U})))_{L_2(\Omega_{h\tau})} = -(\sigma_x(\hat{U}), K(\sigma_x(\hat{U})))_{L_2(\Omega_{h\tau})} - (H_x(t), K(\sigma_x(\hat{U})))_{L_2(\Omega_{h\tau})} \end{aligned}$$

değerlendirmesini elde ederiz.. Elde ettiğimiz son bağıntıdan I_2 'yi

$$I_2 = -(\sigma_x(\hat{U}), K(\sigma_x(\hat{U})))_{L_2(\Omega_{h\tau})} + I_{21}$$

olarak yazabiliriz. Burada

$$I_{21} = -\left(H_x(t), K(\sigma_x(\hat{U}))\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}$$

dır. Benzer olarak, $I_3 = (\hat{w}, Q_{\bar{x}}(\hat{U}))_{L_2(\Omega_{h\tau})}$ ifadesi için de şunu elde edebiliriz

$$\begin{aligned} I_3 &= \tau \sum_{k=1}^{m-1} w|_{i=n} Q(\hat{U})|_{i=n-1} - \tau \sum_{k=1}^{m-1} w Q(\hat{U})|_{i=0} - (w_x(\hat{U}), Q(\hat{U}))_{L_2(\Omega_{h\tau})} \\ &= -(\sigma_x(\hat{U}), Q(\hat{U}))_{L_2(\Omega_{h\tau})} - (H_x(t), Q(\hat{U}))_{L_2(\Omega_{h\tau})}. \end{aligned}$$

Bu nedenle, I_3 'ü de yine

$$I_3 = -(\sigma_x(\hat{U}), Q(\hat{U}))_{L_2(\Omega_{h\tau})} + I_{32}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $I_{32} = (H_x(t), Q(\hat{U}))_{L_2(\Omega_{h\tau})}$ dır. Böylece, (3.10) ifadesinin aşağıdaki şekilde yazılabildiği görülür

$$(\sigma(\hat{U}), U_t)_{L_2(\Omega_{h\tau})} + (\sigma_x(\hat{U}), K(\sigma_x(\hat{U})) - Q(\hat{U}))_{L_2(\Omega_{h\tau})} \leq I_{12} + I_{22} + I_{32}.$$

Şimdi I_{12}, I_{22} ve I_{32} bağıntıları için bazı değerlendirmeler hesaplayacağız. Bu açmaçla, öncelikle I_{12} ifadesini

$$I_{12} = \tau h \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} [(x_i - \ell)(\alpha_1, U_t) - x_i(\alpha_2, U_t)] = h \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \ell) \tau \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_1 U_t - h \sum_{i=1}^{n-1} x_i \tau \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_2 U_t$$

şeklinde yazalım. Sonra k 'ya bağlı olarak kısmi toplam formülünü uygularsak

$$\tau \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_1 U_t = (\alpha_1, U_t)_{L_2(\Omega_{h\tau})} = \alpha_1|_{k=m} U|_{k=m-1} - \alpha_1 U|_{k=0} - \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, U\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})}$$

I_{12} bağıntısı için

$$\begin{aligned} I_{12} &= h \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \alpha_1|_{k=m} U|_{k=m-1} - (\alpha_1 U)|_{k=0} - \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, U\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})} \right\} - \\ &\quad - h \sum_{i=1}^n x_i \left\{ \alpha_2|_{k=m} U|_{k=m-1} - (\alpha_2 U)|_{k=0} - \left(\frac{d\alpha_2}{dt}, U\right)_{L_2(\Omega_{h\tau})} \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde ederiz. Artık (3.13)'den I_{12} için aşağıdaki değerlendirmeyi yapabiliriz

$$\begin{aligned}
|I_{12}| &\leq \left| h \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(u_1(t_m)) U_{i,m-1}(x_i - \ell) \right| + \left| h \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(u_1(t_0)) U_{i,0}(x_i - \ell) \right| + \left| h \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, U \right)_{L_2(\Omega_{h\tau})} \right| \\
&\quad + \left| h \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(u_2(t_m)) U_{i,m-1}(x_i) \right| + \left| h \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(u_2(t_0)) U_{i,0}(x_i) \right| + \left| h \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d\alpha_2}{dt}, U \right)_{L_2(\Omega_{h\tau})} \right| \\
&\leq \max |\alpha_1| \|U\|_{L_2(\Omega_{h\tau})} + \max |\alpha_2| \|U\|_{L_2(\Omega_{h\tau})} + T \max \left| \frac{d\alpha_1}{dt} \right| \|U\|_{L_2(\Omega_{h\tau})} \\
&\quad + \max \left| \frac{d\alpha_2}{dt} \right| T \|U\|_{L_2(\Omega_{h\tau})} \leq M_3 \|U\|_{L_2(\Omega_{h\tau})}.
\end{aligned}$$

Buradaki M_3 ifadesi

$$M_3 = M_{31} \max \left\{ |\alpha_1|, |\alpha_2|, \left| \frac{d\alpha_1}{dt} \right|, \left| \frac{d\alpha_2}{dt} \right| \right\}$$

olmaktadır ve $M_{31} = 4 + 2T = 2(T + 2)$ dir. Böylece

$$|I_{12}| \leq M_3 \max \left\{ |\alpha_1|, |\alpha_2|, \left| \frac{d\alpha_1}{dt} \right|, \left| \frac{d\alpha_2}{dt} \right| \right\} \quad (3.14)$$

eşitsizliğini elde ederiz. I_{21} için bir değerlendirmeye varmadan önce $H_x(t)$ 'yi bulacağız

$$H_x(t) = [(x_i - \ell)_x \alpha_1 - (x_i)_x \alpha_2] = \frac{x_{i+1} - x_i}{h} \alpha_1 - \frac{x_{i+1} - x_i}{h} \alpha_2 = \alpha_1(t) - \alpha_2(t) = H_1(t).$$

Bu sınırlandırmaya göre, I_{21} ifadesini

$$\begin{aligned}
I_{21} &= (H_1(t), (K(\sigma_x(\hat{U})) - K(0))) = \tau h \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} H_1(t) [K(\sigma_x(\hat{U})) - K(0)] \\
&= \frac{1}{2} \tau h \sum_{i,k}^* \sigma_x(\hat{U}) [K(\sigma_x(\hat{U})) - K(0)] + \frac{1}{2} \tau h \sum_{i,k}^{**} c H_1(t)
\end{aligned} \quad (3.15)$$

olarak yazabiliriz. Burada $\sum^*$ ve $\sum^{**}$ toplamları, sırasıyla aşağıdaki

$$|H_1(t)| \leq \frac{1}{2} \sigma_x(\hat{U}) \quad \text{ve} \quad |\sigma_x(\hat{U})| \leq H_1(t) \quad (3.16)$$

eşitsizliklerini sağlayan (x_i, t_k) noktalarında doğrulanmıştır. (3.16) eşitsizliğinden görüldüğü üzere

$$|\sigma_x(\hat{U})| \leq c_1 = \text{sabit}$$

olmaktadır. Böylece, I_{21} için aşağıdaki değerlendirmeye ulaşırız

$$|I_{21}| \leq \frac{1}{2} \theta h \sum_{i,k} [K(\sigma_x(\hat{U})) - K(0)] + c_1.$$

Şimdi $I_{11} = (\sigma(\hat{U}), U_t)$ ifadesini gözönüne alalım. Bunun için

$$\begin{aligned} \sigma(U)(\hat{U} - U) &= \sigma_1(\hat{U}) - \sigma_1(U) + \alpha - \sigma(0)(\hat{U} - U) \\ &= [\sigma_1(\hat{U}) - \sigma_1(0)] - [\sigma_1(U) - \sigma_1(0)] - \sigma(0)(\hat{U} - U) + \alpha \end{aligned}$$

buluruz. Burada

$$\sigma_1(U) - \sigma_1(0) = \int_0^U [\sigma(\xi) - \sigma(0)] d\xi$$

olmaktadır. Bu bağıntıyı dikkate alarak,

$$h \sum_i \{ \sigma_1(U) |_{t=T} - \sigma_1(u) |_{t=0} \} + \frac{1}{2} \theta h \sum_{i,k} \sigma_x(\hat{U}) [K(\sigma_x(\hat{U})) - K(0) - \phi(\hat{U})] \leq \text{sabit}$$

elde ederiz.

3.2 Sayısal Çözümün Yakınsaklığı

Sayısal çözümün gerçek çözüme yakınsaklığını ispatlamak için $\frac{\partial \sigma(u)}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ ve $\frac{\partial v}{\partial t}$ yaklaşım fonksiyonlarının hatalarını sırasıyla $\varepsilon_{i,k}$, $\eta_{i,k}$ ve $\delta_{i,k}$ ile gösterelim. Ayrıca, (2.8) denklemini aşağıdaki formda

$$v_t = K(\sigma_x(\hat{U}_{\bar{x}})) - Q(v_{\bar{x}}) + v_{i,k}^{(1)} + v_{i,k}^{(2)} \quad (3.17)$$

tekrar yazılım. $K(s)$ bağıntısı sürekli olduğundan,

$$v_{i,k}^{(1)} = K\left(\sigma_x\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) - K(\sigma_x(v_{\bar{x}})) = K(\sigma_x(u(x_i, t_k))) - K(\sigma_x(u(x_i^*, t_k)))$$

$$= K\left(\frac{\partial\sigma(u)}{\partial x}\Big|_{x=x^{**}}\right) - K\left(\frac{\partial\sigma(u)}{\partial x}\Big|_{x=x^{***}}\right) \rightarrow 0$$

olur. Burada, $|x_i - x^{**}| \leq h$, $|x_i - x^{***}| \leq h$, $\nu_{i,k}^{(2)} = \delta_{i,k} + \varepsilon_{i,k} K'(s) - \eta_{i,k} Q'(s)$, $\nu_{i,k}^{(3)} = \nu_{i,k}^{(1)} + \nu_{i,k}^{(2)}$ dır.

(3.17) denklemini (2.8) denkleminde çıkarır ve $\nu - V$ yerine R yazarsak, yani $R = \nu - V$ alırsak

$$R_t = K'(s) \left[\sigma'(s^*) \hat{R}_x \right]_{\bar{x}} - Q'(s^*) R_{\bar{x}} + \nu_{i,k}^{(3)}, \quad (3.18)$$

$$R_{i,0} = h \sum_{j=1}^{i-1} \Delta_{0,j} = \tilde{\Delta}(0),$$

$$\left(\frac{\partial \nu}{\partial x} - V_x \right) \Big|_{i=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} - V_{\bar{x}} \right) \Big|_{i=n} = 0$$

elde ederiz.

Teorem 3.2 Keyfi τ ve h için, (3.1)-(3.3) ile (3.5)-(3.7) problemlerinin çözümleri

$$|\nu - V| \leq \max_i |\tilde{\Delta}(0)| + 2T \max_{i,k} |\nu_{i,k}^{(3)}|, \quad (3.19)$$

$$\tau h \sum_{i,k} [\sigma(\hat{u}) - \sigma(\hat{U})] (u - U) + \tau h \sum_{i,k} [K(\hat{u}) - K(\hat{U})]_{\bar{x}} (\nu - V)$$

$$\leq \text{const} \left(\max_{i,k} |\nu - V| + \max_i |\eta_{i,k}| \right) \quad (3.20)$$

eşitsizliklerini gerçekler.

İspat. Öncelikle (3.19) eşitsizliğini ispatlayacağız. $\nu - V = \rho + A(t_k)$ olacak şekilde bir ρ fonksiyonu içereyim. Buradaki $A(t_k)$ fonksiyonu daha sonra seçilecektir. ρ fonksiyonunun aşağıdaki

$$\rho_t = K'(s) \left[\sigma'(s^*) \hat{\rho}_{\bar{x}} \right]_x - Q'(s^*) \rho_{\bar{x}} + \nu_{i,k}^{(3)} - A'_t \quad (3.21)$$

eşitsizliğini ve

$$A(0) + \rho_{i,0} = (\nu - V)_{i,0} = \tilde{\Delta}^{(0)}, \quad (3.22)$$

$$\left[\rho_x - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - V_x \right) \right]_{i=0} = 0, \quad \left[\rho_{\bar{x}} - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - V_{\bar{x}} \right) \right]_{i=n} = 0$$

koşullarını sağladığı kolayca gösterilebilir.

(3.21) eşitliği sınır noktalarında aşağıdaki formu alır. Bu durumda $i = 1$ için

$$\hat{\rho}_1 - \rho = \frac{\tau}{h} K'(s_1) \left[\sigma'(s_2) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i=1} - \frac{\hat{V}_2 - \hat{V}_1}{h} \right) \right] + v_{1,k}^{(3)} - A'_t$$

ve $i = n$ için

$$\hat{\rho}_n - \hat{\rho}_{n-1} = \frac{\tau}{h} K'(s_n) \left[\sigma'(s_n) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i=n} - \frac{\hat{V}_{n+1} - \hat{V}_n}{h} \right) \right] + v_{n,k}^{(3)} - A'_t$$

olur.

Eğer $A(t_k)$, $A(t_k) + \max_{i,k} |v_{i,k}^{(2)}| < 0$ olacak şekilde seçilirse (örneğin, $A(t_k) = -2t_k \max_{i,k} |v_{i,k}^{(2)}|$), bu taktirde maksimum kuralını uygulayabiliriz. Böylece, herhangi bir k için

$$|\rho_{i,k}| \leq \max_i |\Delta_{i,k}^{(0)}|$$

olur ve ayrıca, $v - V$ için

$$|v - V| \leq |\rho_{i,k}| + |A(t_k)| \leq \max_i |\Delta_{i,k}^{(0)}| + 2T \max_{i,k} |v_{i,k}^{(3)}|$$

geçerlidir.

Şimdi (3.20) eşitsizliğini kanıtlayacağız. Bu amaç için

$$J = \tau h \sum_{i,k} \{ [\sigma(\hat{u}) - \sigma(\hat{U})](\hat{u} - \hat{U}) + (Q(\hat{u}) - Q(\hat{U}))(\hat{v} - \hat{V}) \}$$

ifadesini gözönüne alacağız. Son bağıntıyı aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} J &= \tau h \sum_{i,k} \{ [\sigma(\hat{u}) - \sigma(\hat{U})] \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \hat{V}_{\bar{x}} \right) + (Q(\hat{u}) - Q(\hat{U}))(\hat{v} - \hat{V}) \} = -\tau h \sum_{i,k} \{ [\sigma(\hat{u}) - \sigma(\hat{U})]_x \\ &\quad - (Q(\hat{u}) - Q(\hat{U})) \} (\hat{v} - \hat{V}) + \tau h \sum_{i,k} [\sigma(\hat{u}) - \sigma(\hat{U})] \eta_{i,k} = J_1 + J_2 + J_3 \end{aligned}$$

olarak tekrar yazabiliriz. Burada

$$J_1 = -\tau h \sum_{i,k} [\sigma_x(\hat{u}) - Q(\hat{u})](\hat{v} - \hat{V})$$

$$J_2 = -\tau h \sum_{i,k} [\sigma_x(\hat{U}) - Q(\hat{U})](\hat{v} - \hat{V})$$

$$J_3 = -\tau h \sum_{i,k} [\sigma(\hat{U}) - Q(\hat{U})]\eta_{i,k}$$

olmaktadır.

Şimdi $\Omega_{\tau h}$ ağını, $\Omega_{\tau h}^{(1)}$ ve $\Omega_{\tau h}^{(2)}$ olarak iki alt ağa ayırılım öyle ki $\Omega_{\tau h}^{(1)} = \{(x_i, t_k) \mid \sigma_x(\hat{u}) - Q(\hat{u}) \leq 1\}$, $\Omega_{\tau h}^{(2)} = \{(x_i, t_k) \mid \sigma_x(\hat{u}) - Q(\hat{u}) > 1\}$ olsun. Bu durumda $|J_1|_{\Omega_{\tau h}^{(1)}} \leq \tau h \sum_{i,k} |v - V|$ dir. $\Omega_{\tau h}^{(2)}$ ağı üzerinde J_1 'i değerlendirelim. Bunun için, $|s| > 1$ ve $|K(s) - K(0)| \geq m_0 > 0$ varsayımları altında

$$|J_1|_{\Omega_{\tau h}^{(2)}} \leq \frac{1}{2} \tau h \sum_{i,k} |\sigma_x(u)[K(\sigma_x(u)) - K(0) - Q(u)](v - V)| \leq \frac{c_1}{m_0} \max_{i,k} |v - V|$$

değerlendirmesini alırız. Benzer şekilde, $J_2|_{\Omega_{\tau h}^{(1)}}$ ve $J_2|_{\Omega_{\tau h}^{(2)}}$ ifadeleri de tahmin edilebilir.

Sonuç olarak, J ifadesi için c_j , ($j=1,2$) ler sabitler olmak üzere

$$|J| \leq c_1 \max_{i,k} |\eta_{i,k}| + 2\tau h \sum_{i,k} |v - V| + c_2 \max_{i,k} |v - V|$$

elde ederiz. Bu son bağıntıdan da (3.21) eşitsizliğinin geçerliliği görülmektedir.

3.3 Birinci Deney ve Sayısal Çözümü

Önerililen metodun verimliliğini göstermek için, verilen algoritmayı aşağıda verilen deneye uyarlayalım.

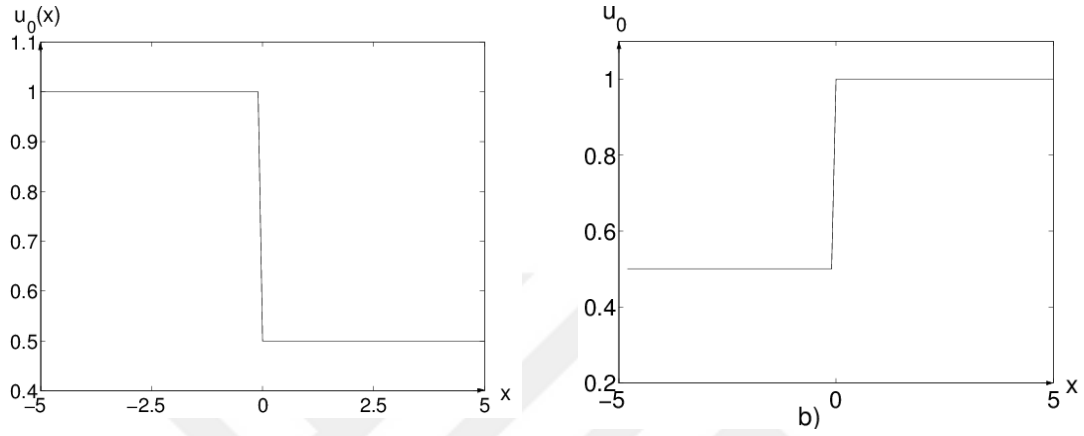
v verilen herhangi bir pozitif sayı olmak üzere, $K(s) = vs$, $\sigma(u) = u$, $Q(u) = 0.5u^2$ olması durumunu gözönüne alalım. Bu durumda (2.1) denklemi Burgers denkleminde indirgenir. Bu denklemi aşağıdaki

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1, & x < 0 \\ u_2, & x > 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

başlangıç koşuluyla birlikte çözelim. Burada iki durum söz konusu olabilir:

- i) $u_1 > u_2$,
- ii) $u_1 < u_2$.

Başlangıç fonksiyonunun grafiği Şekil 1’de gösterilmiştir.



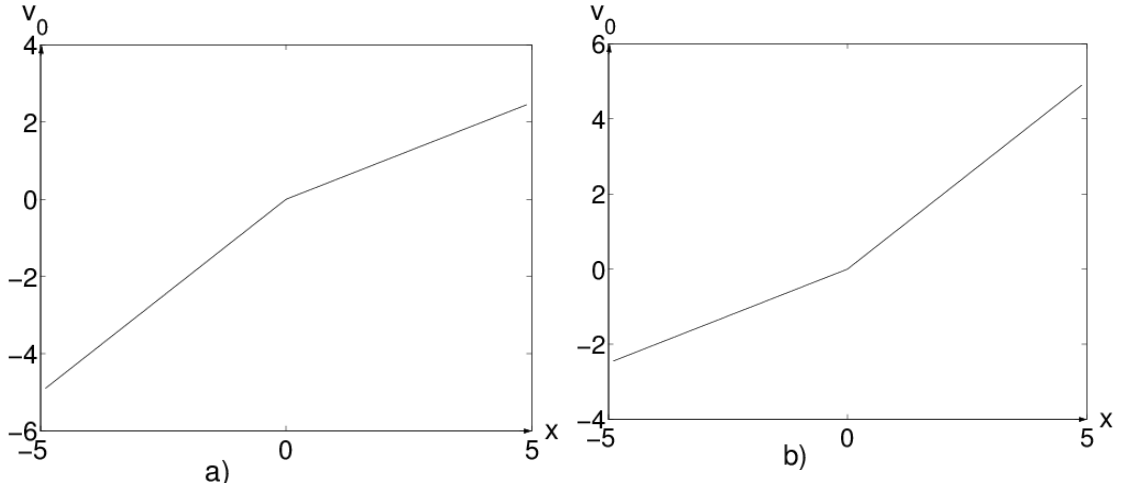
Şekil 1. a) Esas problemin başlangıç fonksiyonu; **b)** Yardımcı problemin başlangıç fonksiyonu

Bu problem için yardımcı denklem aşağıdaki gibi yazılır

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{u^2(x,t)}{2} = v \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad (4.2)$$

$$v_0(x) = \begin{cases} u_1 x, & x < 0 \\ u_2 x, & x > 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

$v_0(x)$ fonksiyonunun grafiği Şekil 2’de gösterilmiştir.



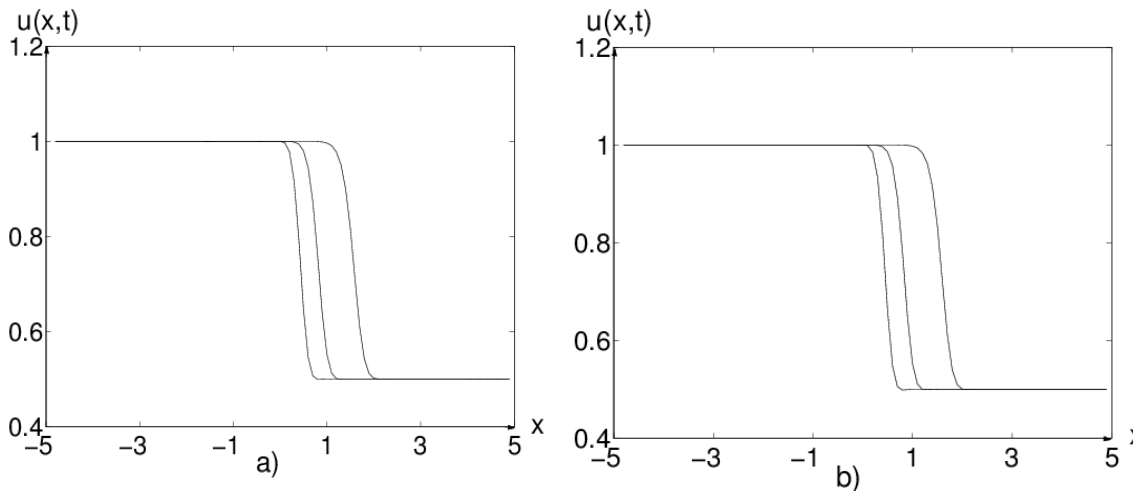
Şekil 2. $v_0(x)$ fonksiyonunun grafiği a) $u_1 > u_2$ durumu; b) $u_1 < u_2$ durumu

(4.2), (4.3) problemini aşağıdaki sonlu fark şeması ile

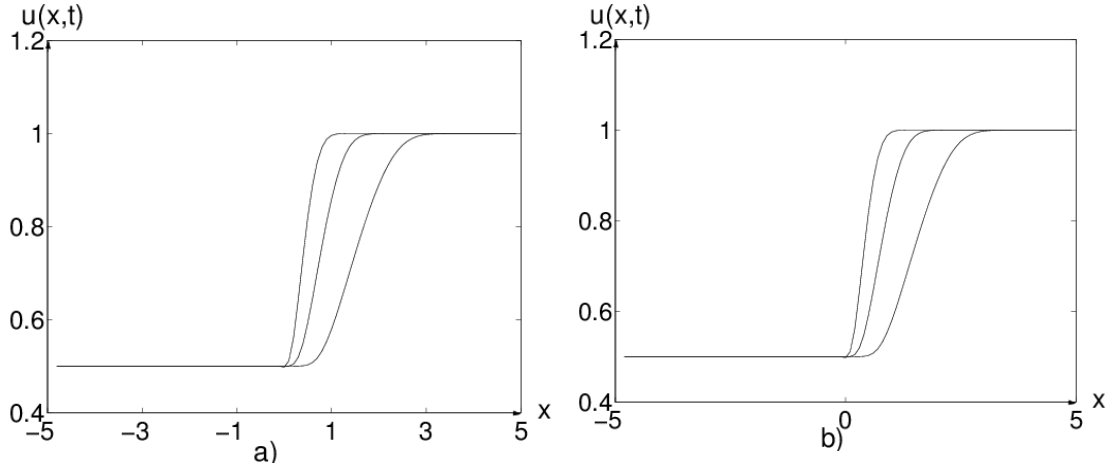
$$\frac{V_{i,k+1} - V_{i,k}}{\tau} = \frac{U_{i,k}^2}{2} + \left(\frac{U_{i,k} - U_{i-1,k}}{h} \right),$$

$$V_{i,0} = v_0(x_i)$$

biçiminde sonlu farklara ayrıklaştıralım. Bu algoritmayı kullanarak elde edilen problemin çözüm grafikleri sırasıyla Şekil 3 ve Şekil 4’de gösterilmiştir.



Şekil 3. a) $T = 0.5, T = 1.0, T = 2.0, \nu = 0.007, ht = 0.001$; b) $T = 0.5, T = 1.0, T = 2.0, \nu = 0.01, ht = 0.01$



Şekil 4. a) $T = 0.5, T = 1.0, T = 2.0, \nu = 0.01, ht = 0.01$; b) $T = 0.5, T = 1.0, T = 2.0, \nu = 0.001, ht = 0.01$

3.4 İkinci Deney ve Sayısal Çözümü

Şimdi de ikinci bir deney olarak, $K(s) = s^2$, $\sigma(u) = u$, $Q(u) = u$ olduğu durumu gözönüne alalım. Bu taktirde (2.1) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 - \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.4)$$

şekline dönüşür. Bu durumda (4.4) denkleminin aşağıdaki başlangıç koşulu

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

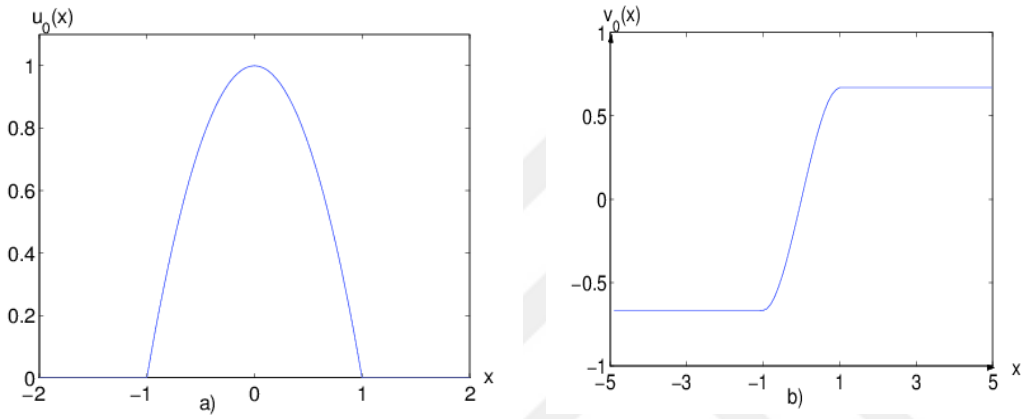
ile birlikte çözümünü araştıracağız. Bu durum için yardımcı denklem

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - u \quad (4.6)$$

dır. (4.6) denklemi için başlangıç koşulu

$$v_0(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}, & x \leq -1, \\ x - \frac{x^3}{3}, & -1 < x < 1, \\ \frac{2}{3}, & x \geq 1 \end{cases}$$

dır. $u_0(x)$ ve $v_0(x)$ fonksiyonlarının grafikleri Şekil 5 de gösterilmiştir.

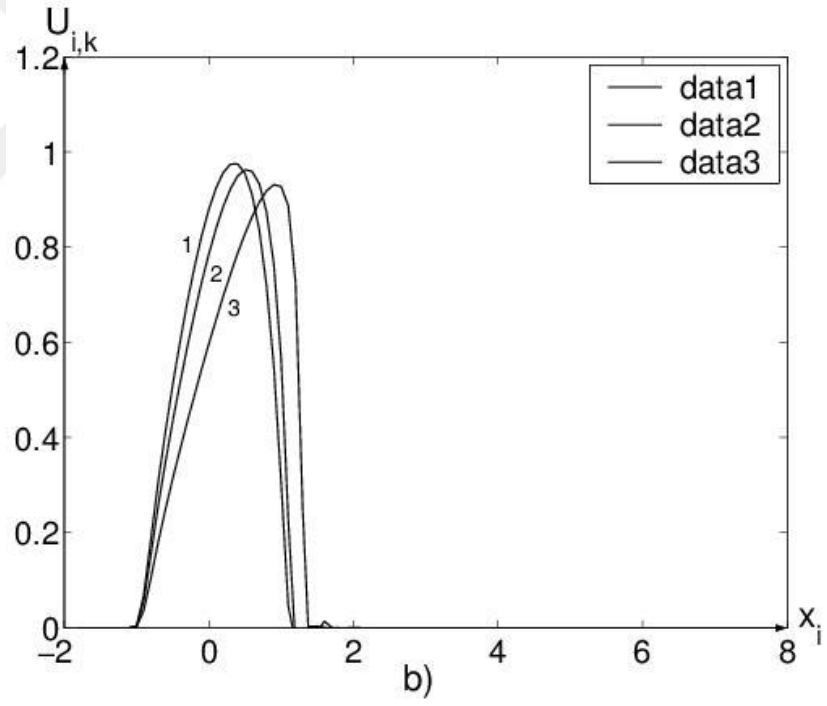
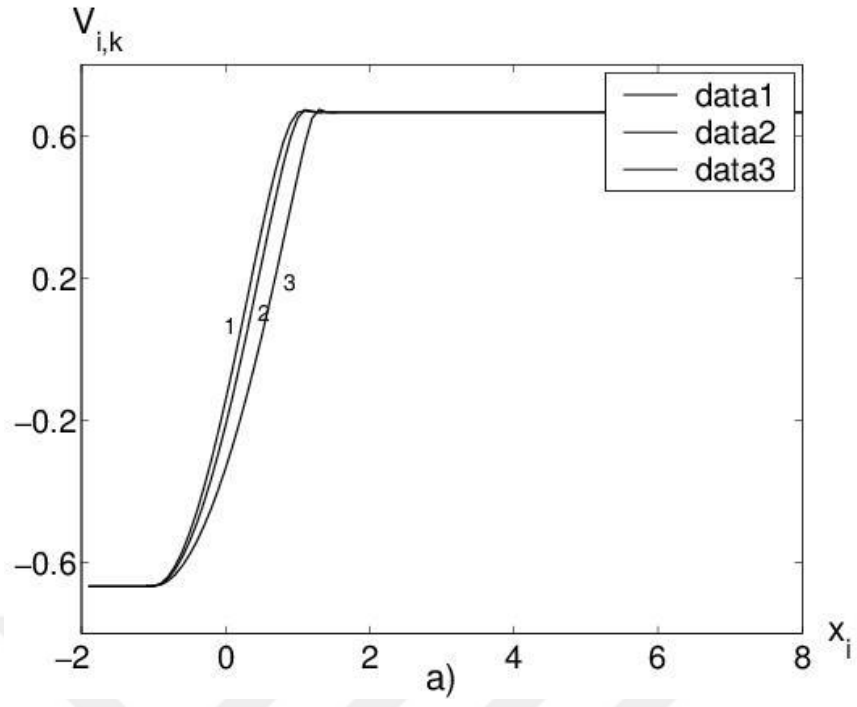


Şekil 5. a) $u_0(x)$ fonksiyonunun grafiği; b) $v_0(x)$ fonksiyonunun grafiği

(4.6) denklemine denk sonlu farklar

$$\frac{V_{i,k+1} - V_{i,k}}{\tau} = \left(\frac{U_{i,k} - U_{i-1,k}}{h} \right)^2 - U_{i,k} \quad (4.7)$$

şeması ile verilir. (4.7) algoritması kullanılarak elde edilen çözümlerin grafikleri sırasıyla Şekil 6'da gösterilmiştir.



Şekil 6. a) $V_{i,k}$ nin grafiği; b) $U_{i,k} = V_{\bar{x}}$ nin grafiği

4. SONUÇLAR

- Nonlinear kaynak fonksiyonuna sahip bir skaler denklemin gerçek çözümü elde edilmiştir.
- Burgers denkleminin gerçek çözümü için Cole-Hopf dönüşümü uygulanarak, denklem lineer ısı denklemine dönüştürülmüş ve elde edilen denklemin gerçek çözümü bulunmuştur.
- İki kez dejenere olan denklem için sonlu farklar yöntemi incelenmiş ve yaklaşık çözümün gerçek çözüme yakınsaklığı problemi de incelenmiştir.
- Esas problem üzerinde bulunmayan bazı avantajları olan yardımcı problem önerilmiş ve söz konusu yardımcı problem kullanılarak göz önüne alınan problemin bütün fiziksel özelliklerini düzgün ifade eden çözümler bulunmuştur.

KAYNAKLAR

- [1] Anderson, D. A., Tannehill, J. C., Pletcher, R. H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Vol 1,2, Hemisphere Publishing Corporation, 1984.
- [2] Fokas A. S., Yortsos Y. C., On the Exactly Solvable Equation $S_t = [(\beta S + \gamma)^{-2} S_x]_x + (\beta S + \gamma)^{-2} S_x$ Occurring in two-phase flow in porous media, SIAM, J. Appl. Math., Vol. 42, No 2, 318-332, 1982.
- [3] Baklanovskaya, V. F., A study of the method of nets for parabolic equations with degeneracy, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 17:6 (1977), pp. 1458–1473.
- [4] Barenblatt G.,I., Entov, V., M., Pijik, V., M., Motions of Fluids and Gases in Reservoirs, Moskow, Nedra, 1984.
- [5] Barenblatt G.,I., Bertsch, M., Dal Passo, R., Prostokishin, V., M., and Ughi, M., A Mathematical Model of Turbulent Heat and Mass Exchange in Stratified Turbulent Shear Flow, Journal Fluid Mechanics, 253, 341-358, Moskow, Nedra, 1984.
- [6] Buckley, S. E., Leverett, M. C., Mechanism of Fluid Displacement in Sands, Trans. AIME, 146, 1942, pp. 107-116.
- [7] Collins, R.E., Flow of Fluids Through Porous Materials, Penn-Well, Tulsa, UK, 1976.
- [8] Houghton D. D., Kasahara A., Nonlinear shallow Fluid Flow an Isolated Ringe, Comm. Pure Appl. Math., 21 (1968), pp 1-23.
- [9] Debnath, L., Nonlinear Partial Differential Equations. Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 1997.
- [10] Hopf E., The Partial Differential Equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, Comm. Pure Applied Mathematics, 3, 1950, pp. 201-230.
- [11] Gelfant I. M., Shilov G. E., Generalized Functions, Vol. 1: Properties and Operations, Academic Press, New York, 1964.
- [12] Godunov, S. K., Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moskow, 1979.
- [13] Goritski, A. Y., Krjukov, S. N. Chechkin, G. A., First Order Quazi Linear Equations with Partial Derivatives, Pub. of Moskow University, Moskow, 1997.
- [14] Lax, P. D., Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computations, Comm. of Pure and App. Math, Vol. VII, pp. 159-193, 1954.

- [15] Lax, P. D., Hyperbolic Systems of Conservation Laws II, Comm. of Pure and App. Math., vol. X, pp. 537-566, 1957.
- [16] Lax, P. D. and Wendroff, B., Systems of Conservation Laws, Los Alamos Scientific Laboratory, LA-2285, 1959.
- [17] Lions, J., L., Some methods of solutions of nonlinear boundary problem, Moskow. 1972.
- [18] Liu, Y., On a Nonlinear Heat Equation With a Time Delay, Euro. Jnl of Applied Mathematics, 2002, vol. 13, pp 321-335.
- [19] Petrovsky, I. G., Lectures on Partial Differential Equations, Int. Pub., 1954.
- [20] Rasulov, M. A., On a Method of Solving the Cauchy Problem for a First Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition, Soviet Math. Dok. 43, No.1, 1991.
- [21] Rasulov, M. A., Finite Difference Scheme for Solving of Some Nonlinear Problems of Mathematical Physics in a Class of Discontinuous Functions. Baku, 1996, (in Russian).
- [22] Rasulov, M. A., Ragimova, T. A., A Numerical Method of the Solution of one Nonlinear Equation of a Hyperbolic Type of the First –Order, Dif. Equations, Minsk, Vol. 28, No.7, pp. 2056-2063, 1992.
- [23] Rasulov, M. A., A Numerical Method of Solving a Parabolic Equation with Degeneration, Dif. Equations, Minsk, Vol. 18, No.8, pp. 1418-1427, 1992.
- [24] Rasulov, M., Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Korunum Kuralları, Seçkin Yayınevi, İstanbul, 2011.
- [25] Rasulov, M., Sinsoysal, B., Diferansiyel Denklemler Teorisine Giriş, Çağlayan Kitabevi, İstanbul, 2014.
- [26] Richmyer, R. D., Morton, K. W., Difference Methods for Initial Value Problems, New York, Wiley, Int., 1967.
- [27] Samarskii, A. A., Duty with peaking in problems for Quasi Linear Equations of Parabolic Type, Nauka, Moskow, 1987.

- [28] Sinsoysal, B., The Analytical and a Higher-Accuracy Numerical Solution of a Free Boundary Problem in a Class of Discontinuous Functions, *Mathematical Problems in Physics*, vol. 2012, 2012.
- [29] Sinsoysal, B., Coruhlu, T., Finite Differences Method for One Dimensional Nonlinear Parabolic Equation with Double Nonlinearity, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol 8236, Springer, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [30] Smoller, J. A., *Shock Wave and Reaction Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York Inc., 1983.
- [31]. Sobolev, S. L., *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, 3rd. ed., Nauka, Moscow, 1988; English Transl., Amer. Math. Soc., Providence, R. L., 1991.
- [32] Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley Int., New York, 1974.

ÖZGEÇMİŞ

29. 10. 1988 tarihinde ZONGULDAK' ta doğdu. 1999 yılında Coburlar İlkokulu' ndan, 2002 yılında Atatürk Ortaokulu' ndan, 2005 yılında Kırmılı İsmail Rüstü Olcay Lisesi' nden, 2010 yılında K.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik ve Bilgisayar Bilimi Bölümü' nden mezun oldu. 2014 yılında Beykent Üniversitesi Uygulamalı Matematik Bölümünde yüksek lisansa başladı.2016 yılında Marmara Üniversitesi Matematik Bölümünde ikinci lisans bölümüne başladı.

Erdinç KILIÇ

