

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DELTA ASALIMSİ İDEALLER
VE
ASALIMSİ ALT MODÜLLER**

AYŞE NUR TOMRUK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. GÜRSEL YEŞİLOT**

İSTANBUL, 2015

ÖNSÖZ

Bu çalışma, delta asalımsı idealleri ve asalımsı alt modülleri incelemeye yönelik bir çalışmadır.

Öncelikle tez çalışmam süresince beni yönlendiren, yardımlarını benden esirgemeyen, motive eden danışman hocam Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT 'a çok teşekkür ederim.

Yine bu süreçte ihtiyacım olduğunda bana yardımcı olan arkadaşlarım Arş. Gör. Deniz GÜL SÖNMEZ'e ve Gizem TEMELCAN'a teşekkür ederim. Son olarak; bu süreci benimle birlikte yaşayan kızım Yağmur'a; eşime ve tez çalışmam dâhil hayatımda her zaman yanımda olan, bana güvenen ve beni destekleyen aileme teşekkür ederim.

Kasım, 2015

Ayşe Nur TOMRUK

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DELTA ASALIMSİ İDEALLER VE ASALIMSİ ALT MODÜLLER

Ayşe Nur TOMRUK tarafından hazırlanan tez çalışması 13.11.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ünsal TEKİR

Marmara Üniversitesi

Doç. Dr. Murat ALAN

Yıldız Teknik Üniversitesi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
HALKALAR VE MODÜLLER	3
2.1 Halkalar	3
2.2 Modül ve Alt Modüller	15
2.3 Modüllerde Kısıtlama ve Genişlemeler	19
BÖLÜM 3	
DEĞİŞMELİ HALKALARIN δ -ASALIMSIZ İDEALLERİ	22
3.1 İdealler ve δ -Asalımsız İdeallerin Genişlemeleri	22
3.2 Genişlemelerin Ek Özellikleri	27
BÖLÜM 4	
ASALIMSIZ ALT MODÜLLER	31
4.1 Asalımsız Alt Modüller	31
4.2 Asalımsız Ayrışım	38
4.3 R^n de Asalımsız Ayrışım	47

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER	50
KAYNAKLAR.....	51
ÖZGEÇMİŞ.....	52

SİMGE LİSTESİ

$\text{Çek}f$	f fonksiyonunun çekirdeği
$\oplus$	Direkt toplam
$\odot$	Direkt çarpım
$\sqrt{I}$	I idealinin radikali
$\leq$	ideal
$\cong$	İzomorfizma
$Id(R)$	R halkasının idealleri
$\langle m \rangle$	m elemanı ile üretilmiş alt modül
$\Rightarrow$	Gerekliklik
$\Leftarrow$	Yeterlilik
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi

DELTA ASALIMSİ İDEALER VE ASALIMSİ ALT MODÜLER

Ayşe Nur TOMRUK

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Bu çalışmada; öncelikle halka ve modül teorisi kısaca anlatılmıştır. Sonraki bölümde değişmeli halkalarda delta asalımsı idealleri incelemek için öncelikle ideal genişlemesi ve buradan yola çıkarak delta asalımsı idealler tanımlanmıştır. Bu tanımlar örneklerle açıklandıktan sonra genişlemelere ait bazı ek özellikler verilmiştir. Sonrasında asalımsı alt modüller incelenmiştir. Son olarak asalımsı ayrışım ve asalımsı ayrışımın modülün değişik kuvvetlerindeki durumu incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Asalımsı alt modüller, delta asalımsı idealler, halka teorisi, modül teorisi, asalımsı ayrışım, ideal, genişlemeler

ABSTRACT

DELTA PRIMARY IDEALS AND PRIMARY SUBMODULES

Ayşe Nur TOMRUK

Department of Mathematic

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Gürsel YEŞİLOT

In this study, firstly ring and module theory were described shortly. In the next part for explain delta primary ideals in commutative rings, firstly ideal expansion and from this delta primary ideals were defined. After these definitions explained with some examples, some features about expansions were given. After that primary submodules were examined. Finally, in this part, primary decomposition and tatus of primary decomposition with its different powers were examined.

Keywords: primary submodules, delta primary ideals, ring theory, module theory, primary decomposition, ideal, expansions

1.1 Literatür Özeti

Gün geçtikçe matematiğin dalları arasındaki sınırlar zayıflamakta ve bağlantılar artmaktadır. Özellikle Cebir, diğer dallar arasındaki fonksiyonu dolayısıyla her gün biraz daha önem kazanmaktadır. Bilindiği gibi Cebir ilminin adı Cardan'ın Dünyanın en büyük on iki dehası arasında saydığı ve Orta Çağda matematik alanındaki fikir ve faaliyetleri en çok etkilemiş olan Muhammed Bin El Harizmi'nin "El Cebr v'el Muakala" adlı kitabının birinci kelimesinden gelmiştir. Carard de Cremon tarafından tercüme edilen bu eser matematiğin köşe taşlarından biri olmuş ve bir zaman sonra batılı matematikçilerin cebiri geliştirmelerini sağlamıştır[1].

Asal idealler ve asalımsı idealler değişmeli cebirin önemli iki yapısıdır. Bu yapılar birçok farklı özelliğe sahip görünmelerine rağmen oldukça sayıda benzer özelliğe sahiplerdir[2]. Zhao Dongsheng 2000 yılında yayımladığı makalesinde bu özellikleri birleştiren idealleri incelemiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez, modül ve halka teorisi alanında çalışan veya çalışmaya başlayan herkesin yararlanması amacıyla hazırlanmıştır. Bu amaçla öncelikle halkalar teorisi kısaca anlatılacak ve modül teorisinin temel kavramları verilecektir. Daha sonra ise delta asalımsı idealler ve asalımsı alt modüller ayrıntılı bir şekilde incelenecektir. Bu çalışmada halkalarda idealler ve delta asalımsı idealler arasındaki bazı ilişkiler verilerek delta asalımsı ideallerin genişlemeleri incelenmeye çalışılacaktır. Asalımsı alt modüllerin ve asalımsı ayrışımın incelenmesi amaçlanmaktadır.

1.3 Hipotez

Delta asalımsı idealler ile idealler arasında benzerlikler vardır. Bazı durumlarda bir idealin delta asalımsı olması idealin asallığıyla veya asalımsılığıyla ilişkilidir. Asalımsı alt modüllerde tanımlanan asalımsı ayrışım, temel özelliklerini koruyarak modülün ikinci ve n yinci kuvvetleri için de tanımlanabilir.

BÖLÜM 2

HALKALAR VE MODÜLLER

2.1 Halkalar

Bu bölümde gelecek bölümlerde kullanılacak bazı temel kavramlar tanıtılacaktır.

Tanım 2.1 R boş olmayan bir küme ve R de toplama (+) ve çarpma ($\cdot$) denilen iki tane ikili işlem verilmiş olsun. Bu $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa $(R, +, \cdot)$ ye **halka** denir. [3]

H1 $(R, +)$ değişmeli bir gruptur.

H2 $(R, +, \cdot)$ deki çarpma işlemi birleşme özelliğine sahiptir. Yani $\forall a, b, c \in R$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ dir.

H3 $(R, +, \cdot)$ deki çarpma işlemi toplama işlemi üzerine dağılma özelliğine sahiptir. Yani $\forall a, b, c \in R$ için $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ ve $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dir.

R halkasındaki çarpma işleminde, $\forall a \in R$ için $1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$ olacak şekilde R de 1_R ile gösterilen bir eleman varsa $(R, +, \cdot)$ ye **birimli halka** denir. Bu $(R, +, \cdot)$ halkası çarpma işlemine göre değişmeli ise yani her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ oluyorsa $(R, +, \cdot)$ ye **değişmeli halka** adı verilir.[3]

Örnek 2.1 Tam sayılar kümesi olan $\mathbb{Z}$, tamsayılar üzerinde bilinen toplama ve çarpma göre birimli ve değişmeli bir halkadır.

H1) $(\mathbb{Z}, +)$ değişmeli bir gruptur.

H2) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ deki çarpma işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ olur.

H3) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ deki çarpma işlemi toplama işlemi üzerine dağılma özelliğine sahiptir.

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ için $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ ve $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dir.

Tanım 2.2 (POLİNOM HALKASI) R değişmeli bir halka, x bir bilinmeyen ve $a_0, a_1, \dots, a_k$ lar R nin elemanları olmak üzere; $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$ şeklindeki ifadeye R den katsayılı bir polinom denir. R den katsayılı tüm polinomların kümesi $R[x]$ ile gösterilir.

Önerme 2.1 R bir halka ve $R[x]$ polinom halkası olsun.

- (i) R değişmeli ise $R[x]$ değişmelidir.
- (ii) R birimli ise $R[x]$ birimlidir.
- (iii) R tamlık bölgesi ise $R[x]$ tamlık bölgesidir.
- (iv) R cisim ise $R[x]$ tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölgedir.
- (v) R cisim ise $R[x]$ temel ideal bölgesidir.

Tanım 2.3 R bir değişmeli ve birimli halka, I da R nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun.

i. $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$,

ii. $\forall a \in I$ ve $\forall r \in R$ için $ra \in I$ ve $ar \in I$ ise I ya R nin bir **ideali** denir.[8]

Örnek 2.2 $R = \mathbb{Z}$ olsun. $I = n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ halkasının bir idealidir.

$k, l \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;

- i. $\forall a, b \in I = n\mathbb{Z}$ için $a - b = nk - nl = n(k - l) \in n\mathbb{Z}$ bulunur.
- ii. $\forall a \in n\mathbb{Z}$ ve $\forall r \in \mathbb{Z}$ için $ar = (nk)r = n(kr) = nl \in n\mathbb{Z}$ bulunur.

Bu durumda i ve ii şartları sağlandığından $I = n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ halkasının bir idealidir.

Tanım 2.4 R değişmeli, birimli bir halka ve I , R nin bir ideali olsun.

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I$$

ile tanımlanan " $\sim$ " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bir $a \in R$ nin denklik sınıfı $\bar{a}$ veya $a + I$ ile gösterilir. Bu durumda,

$$a + I = \{a + x | x \in I\} \text{ olur. [8]}$$

Önerme 2.2 R halkasının, bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıfları arasında;

$$(a + I) \oplus (b + I) = (a + b) + I$$

$$(a + I) \odot (b + I) = (ab) + I$$

olarak $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri tanımlandığında R/I bir halka olur. Bu halkaya R nin I idealine göre **bölüm halkası** denir.

İspat. Önce $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerinin iyi tanımlı olduğunu göstermek gerekir. Yani,

$$a \equiv a' \pmod{I} \text{ ve } b \equiv b' \pmod{I} \text{ ise } a + b \equiv a' + b' \pmod{I} \text{ ve } ab \equiv a'b' \pmod{I} \text{ dir.}$$

Buna göre R/I nin bir halka (bölüm halkası) olduğunu gösterelim.

H1) $R/I, R$ nin I toplamsal alt grubuna göre denklik sınıfları olduğundan $(R/I, \oplus)$ bir gruptur.

$(a + I) \oplus (b + I) = (a + b) + I = (b + a) + I = (b + I) \oplus (a + I)$ olduğundan $(R/I, \oplus)$ değişmeli bir gruptur.

H2) $(R/I, \oplus, \odot)$ deki $\odot$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir. Yani, $\forall a, b, c \in R/I$ için

$$a \odot (b \odot c) = a \odot ((bc) + I) = (a(bc)) + I = ((ab)c) + I = (a \odot b) \odot c \text{ dir.}$$

H3) $(R/I, \oplus, \odot)$ deki $\odot$ işlemi $\oplus$ işlemi üzerine dağılma özelliğine sahiptir. Yani,

$\forall a, b, c \in R/I$ için

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \odot c &= ((a + b) + I)c + I = ((a + I) + (b + I))c + I \\ &= (((ac) + I) + (bc + I)) + I = (a \odot c) \oplus (b \odot c) \end{aligned} \quad \text{ve}$$

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= (a((b + c) + I)) + I = (a((b + I) + (c + I))) + I \\ &= (((ab) + I) + ((ac) + I)) + I = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \end{aligned} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 2.3 $\mathbb{Z}$ halkasının $n\mathbb{Z}$ idealine göre bölüm halkası $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dir.

Bu kümenin elemanları şunlardır: $0 + n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, \dots, (n - 1) + n\mathbb{Z}$

Hatırlatma 2.1 R ve S iki halka olsunlar.

i. $f: R \rightarrow S$ bir fonksiyon olsun. Her $a, b \in R$ için,

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b)$$

koşullarını sağlıyorsa, f ye bir halka homomorfizması denir.

ii. $f: R \rightarrow S$ bir homomorfizma ise f nin çekirdeği,

$$\text{Çek}f = \{a \in R \mid f(a) = 0_S\} = f^{-1}(0_S) \quad \text{ile tanımlanır.}$$

iii. $R/\text{Çek}f \cong f(R)$ dir.

1. İzomorfizma Teoremi R bir halka ve S de R nin bir alt halkası olsun. I , R nin bir ideali ise $S + I = \{s + a \mid a \in I\}$ halkası R nin I idealini kapsayan alt halkasıdır. Ayrıca

$$(S + I)/I \cong S/(S \cap I)$$

izomorfizması mevcuttur.

2. İzomorfizma Teoremi $f: R \rightarrow S$ bir örten homomorfizma ve $\text{Çek}f = K$ olsun. S nin idealleri ile R nin K yı kapsayan idealleri arasında birebir bir eşleme yapılabilir. Bu eşleme S nin bir I ideali verildiğinde I ya; R nin K yı kapsayan,

$$J = \{x \in R \mid f(x) \in I\} = f^{-1}(I)$$

idealini karşılık getirmekle yapılabilir. Bu takdirde, $R/J \cong S/I$ olur.

Tanım 2.5 I ve J bir R halkasının idealleri olsun.

$$I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$$

kümesine I ve J **ideallerinin toplamı** denir. Bu küme de bir ideal olur.

Tanım 2.6 A , R halkasının bir alt kümesi olsun. R nin, A yı kapsayan bütün ideallerinin arakesitine A nın ürettiği ideal denir ve (A) ile gösterilir. Eğer $A = (a)$ tek elemanlı bir küme ise A nın ürettiği ideale **temel ideal** denir ve (a) ile gösterilir.

Örnek 2.4

i. $\mathbb{Z}$ halkasında $\{5\}$ ile üretilen ideal, $\langle \{5\} \rangle = (5) = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 5\mathbb{Z}$ olur ve bu bir temel idealdir.

ii. $\mathbb{Z}[x]$ halkasında $\{2, x\}$ ile üretilen ideal,

$\langle \{2, x\} \rangle = (2, x) = \{2f(x) + xg(x) \mid f, g \in \mathbb{Z}[x]\}$ dir. Bu ideal 2 ve x tarafından üretildiğinden bu idealin bir temel ideal olmadığı söylenebilir.

Tanım 2.7 R değişmeli, birimli bir halka ve P de R nin $R = (1)$ den farklı bir ideali olsun. $a, b \in R$; $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P ye R nin bir **asal ideal** denir. R halkasının tüm asal ideallerinin kümesi $\text{Spec}(R)$ ile gösterilir.

Örnek 2.5 p bir asal sayı olsun. O zaman $p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin bir asal idealidir. $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ yi bulalım.

$p\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ olduğu açıktır. $m, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $mn \in p\mathbb{Z}$ olsun.

Buna göre, $mn = pt$ olacak şekilde $t \in \mathbb{Z}$ vardır. Burada $p|mn$ olduğundan $p|m$ ya da $p|n$ dir.

Dolayısıyla $m \in p\mathbb{Z}$ ya da $n \in p\mathbb{Z}$ bulunur.

$\text{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(0)\} \cup \{(p): p \in \mathbb{Z} \text{ asal}\}$ dir.

Önerme 2.3 P değişmeli ve birimli bir R halkasının (1) den farklı bir ideali olsun. P nin asal olması için gerek ve yeter koşul R/P bölüm halkasının bir tamlık bölgesi olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$: P bir asal ideal olsun. R değişmeli ve birimli bir halka olduğundan, R/P de değişmeli ve birimli bir halkadır. R/P nin bir tamlık bölgesi olduğunu göstermek için, içinde hiçbir sıfır bölen olmadığını göstermek yeterlidir.

$a + P, b + P \in R/P$ ve $(a + P)(b + P) = ab + P = 0 + P$ olsun. Buradan $ab \in P$ olduğu anlaşılır. P yi bir asal ideal olarak aldığımız için, $a \in P$ ve $b \in P$, yani

$a + P = P$ veya $b + P = P$ bulunur. Şu halde, R/P de sıfır bölen yoktur.

$\Leftarrow$: R/P nin bir tamlık bölgesi olduğunu kabul edelim. $a, b \in R$ için $ab \in P$ olsun. R/P de sıfır bölen olmadığından;

$$P = ab + P = (a + P)(b + P) \Rightarrow a + P = P \text{ veya } b + P = P \\ \Rightarrow a \in P \text{ veya } b \in P$$

elde edilir. Şu halde, P bir asal idealdir.

Örnek 2.6 $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bir halka ve $P = \mathbb{Z} \times (0)$ ideali olsun.

$R/P = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \times (0) \cong \mathbb{Z} / (0) \cong \mathbb{Z}$ tamlık bölgesidir. Dolayısıyla P asal idealdir.

Tanım 2.8 R bir halka olsun. $S \subseteq R$ alt kümesi için, $1 \in S$ ve her $s_1, s_2 \in S$ için, $s_1 s_2 \in S$ ise R nin S alt kümesine bir **çarpımsal kapalı alt küme** veya kısaca **çarpımsal alt küme** denir.

Önerme 2.4 I , R halkasının bir ideali, S çarpımsal bir alt kümesi ve $I \cap S = \emptyset$ olsun.

$$\Omega = \{J \in \mathcal{I}(R) | J \cap S = \emptyset \text{ ve } I \subseteq J\}$$

kümesinin en az bir maksimal elemanı vardır ve bu maksimal elemanlar R nin maksimal idealleridir.

İspat. $I \cap S = \emptyset$ olduğundan, $I \in \Omega \neq \emptyset$ dır. $(\Omega, \subseteq)$ sıralı kümesinin herhangi bir tam sıralı alt kümesi (zincir) olarak, $\{I_i\}$ alalım. $J = \bigcup I_i$ de R nin bir has ideali ve $J \cap S = \bigcup (I_i \cap S) = \emptyset$ dir. Gerçekten, $1_R \in S$ olduğundan $1_R \notin J$ dir. Her $a, b \in J$ için, $a \in I_k$ ve $b \in I_t$ olacak şekilde $k, t \geq 1$ tam sayıları bulunabilir. $\max(k, t) = k$ dersek, $a, b \in I_k$ ve $a - b \in I_k$ yani, $a - b \in I$ elde edilir. Ayrıca her $a \in I$ ve her $r \in R$ için, $a \in I_k$ olacak şekilde bir $k \geq 1$ vardır ve $ra \in I_k$ olduğundan, $ra \in J$ elde edilir. Şu halde J alınan zincirin Ω da bir üst sınırıdır. Zorn Lemmaya göre, Ω nın da en az bir maksimal elemanı vardır. Şimdi bu maksimal idealin bir asal ideal olduğunu gösterelim.

Bunun için, $a, b \notin J$ ise $ab \notin J$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a \notin J$ ise $I \subseteq J \subset J + Ra$ ve J, Ω nın bir maksimal elemanı olduğundan, $(J + Ra) \cap S \neq \emptyset$ olur. Şu halde, $s = x + ra$ olacak şekilde $s \in S, x \in J$ ve $r \in R$ vardır. Benzer şekilde, $b \notin J$ ise $I \subseteq J \subset J + Rb$ ve J, Ω nın bir maksimal elemanı olduğundan, $(J + Rb) \cap S \neq \emptyset$ olur. Şu halde, $s' = y + r'b$ olacak şekilde $s' \in S, y \in J$ ve $r' \in R$ vardır. Bu iki eşitlikten,

$$\begin{aligned} ss' &= (x + ra)(y + r'b) \\ &= xy + xr'b + ray + rr'ab \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $ab \in J$ olsaydı, $ss' \in S \cap J = \emptyset$ çelişkisi ortaya çıkacaktı. Şu halde J asaldır.

Tanım 2.9 R değişmeli, birimli bir halka ve I da R nin bir öz ideali olsun. I idealinin radikali, $\sqrt{I}$ ile gösterilir ve

$$\sqrt{I} := \{r \in R: \text{en az bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } r^n \in I\}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.7 $R = \mathbb{Z}$ alındığında $I = 3\mathbb{Z}$, $J = 8\mathbb{Z}$, $K = 6\mathbb{Z}$ ideallerinin radikallerini bulalım.

$\sqrt{I} = \sqrt{3\mathbb{Z}} = 3\mathbb{Z}$ dir, $x \in \sqrt{I}$ ise en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in I$ olur. Bu da $3|x^n$ i gerektirir. Bunun sonucu olarak da $3|x$ elde edilir. Yani $x \in I$ olur.

$\sqrt{J} = \sqrt{8\mathbb{Z}} = 2\mathbb{Z}$ dir, $x \in \sqrt{J}$ ise en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in J$ olur. Bu da $8|x^n$ i gerektirir. Bunun sonucu olarak da $2|x$ elde edilir. Yani, $x \in J$ olur.

$\sqrt{K} = \sqrt{6\mathbb{Z}} = 6\mathbb{Z}$ dir, $x \in \sqrt{K}$ ise en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in K$ olur. Bu da $6|x^n$ i gerektirir. Bunun sonucu olarak da $6|x$ elde edilir. Yani $x \in K$ olur.

Özellik 2.1 R değişmeli, birimli bir halka ve P de R nin bir asal ideali olsun. P asal idealleri için $\sqrt{P} = P$ eşitliği sağlanır.

Önerme 2.5 R değişmeli, birimli bir halka ve I da R nin bir öz ideali olsun. Bu durumda, $\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P} P$ ($P \in \text{Spec}(R)$) elde edilir.

İspat. $a \in \sqrt{I}$ olduğundan $a^n \in I$ dir. ($n \in \mathbb{N}$)

Öyleyse; $a^n \in P$ ve $a \in \sqrt{P} = P$ dir. Bu durumda $\sqrt{I} \subseteq \bigcap_{I \subseteq P} P$ dir.

$b \in \bigcap_{I \subseteq P} P$ ve $b \notin \sqrt{I}$ olsun.

$S = \{b^n | n \in \mathbb{N}\}$ çarpımsal kapalı alt küme olduğundan $S \cap I = \emptyset$ dir.

I yı kapsayan asal ideal P' olmak üzere $S \cap P' = \emptyset$ dir.

$b \in \bigcap_{I \subseteq P} P$ ve $b \notin \sqrt{I}$ olduğundan $b^n \notin P$ dir. Buradan; $\sqrt{I} \supseteq \bigcap_{I \subseteq P} P$ dir.

Sonuç olarak $\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P} P$ bulunur.

Önerme 2.6 R değişmeli, birimli bir halka olsun. R nin **nil radikali**;

$N(R) = \sqrt{0} = \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P$ olarak tanımlanır. Bu ideal tüm nilpotent elemanların kümesidir.

İspat. $a \in \sqrt{0}$ olsun. O zaman $a^n = 0 \in \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P$ dir.

Her $P \in \text{Spec}(R)$ için $a^n \in P$ dir. O halde $a \in P$ elde edilir.

Dolayısıyla $\forall P \in \text{Spec}(R)$ için $a \in \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P$ olduğundan $\sqrt{0} \subseteq \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P$ dir.

$b \in \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P$ ve $b \notin \sqrt{0}$ olsun.

$S = \{b^n | n \in \mathbb{N}\}$ çarpımsal kapalı alt küme olduğundan $S \cap (0) = \emptyset$ dir.

(0) her $P \in \text{Spec}(R)$ tarafından kapsandığından $S \cap P = \emptyset$ dir.

$b \in \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P$ ve $b \notin \sqrt{0}$ olduğundan $b^n \notin P$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

Buradan; $\sqrt{0} \supseteq \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P$ dir.

Sonuç olarak $\sqrt{0} = \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P$ bulunur.

Tanım 2.10 R değişmeli ve birimli bir halka ve M de R nin bir öz ideali olsun. Eğer R nin M yi içeren her I ideali için $M = I$ ya da $I = R$ ise M ye R nin bir **maksimal ideali** denir.

Örnek 2.8 p bir asal sayı olsun. O zaman $p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin bir maksimal idealidir. J , $\mathbb{Z}$ nin bir ideali olmak üzere $p\mathbb{Z} \subseteq J$ olsun. J temel ideal olduğundan $J = t\mathbb{Z}$ olacak biçimde $t \in \mathbb{Z}$ vardır. Ayrıca $p \in t\mathbb{Z}$ olduğundan $p = tk$ olacak biçimde $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece $t|p$ olduğundan $t = 1$ ya da $t = p$ dir. Birinci halde $J = \mathbb{Z}$ ve ikinci halde ise $J = M$ dir. Böylece M maksimal idealdir.

Önerme 2.7 Birimli ve değişmeli bir R halkasının bir M idealinin maksimal olması için gerek ve yeter koşul R/M bölüm halkasının bir cisim olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$: M , R nin bir maksimal ideali olsun. $M \neq R$ olduğundan, $R/M \neq \{0 + M\}$ dir. $0 + M$ den farklı $\forall x + M \in R/M$ nin tersinin varlığı gösterilirse, R/M birimli ve değişmeli bölüm halkasının bir cisim olduğu anlaşılabacaktır.

$x + M \neq 0 + M \Rightarrow x \in R - M$ ve $M + (x) = R$ olduğundan, $m + ax = 1$ olacak şekilde $\exists m \in M$ ve $\exists a \in R$ bulunabilir. Şu halde

$m = 1 - ax \in M$ ve $(a + M)(x + M) = ax + M = 1 + M$ den $x + M$ nin tersinin $a + M$ olduğu görülür.

$\Leftarrow$: R/M bir cisim olsun. Şu halde $R/M \neq (0 + M)$ yani, $M \neq R$ dir. $\forall x \in R - M$ için, $x + M \neq 0 + M$ ve R/M bir cisim kabul ettiğimizden,

$$(a + M)(x + M) = ax + M = 1 + M \Rightarrow a - ax \in M$$

olacak şekilde $\exists a \in R$ bulunabilir. Şu halde, $1 \in M + (x)$ ve birimi kapsayan bir ideal R nin kendisi olduğundan $M + (x) = R$ elde edilir. Dolayısıyla M ideali maksimal bulunur.

Önerme 2.8 Her maksimal ideal, bir asal idealdir.

İspat. M maksimal ise R/M bir cisim, dolayısıyla bir tamlık bölgesi olacağından M asaldır.

Örnek 2.9 $\mathbb{Z}[x]$ halkasının bir maksimal idealini bulunuz.

$$\mathbb{Z}[x]/(p, x) \cong \frac{\mathbb{Z}[x]/(x)}{(p, x)/(x)} \cong \mathbb{Z}/(p) \cong \mathbb{Z}_p : \text{cisim} \Rightarrow (p, x) \text{ maksimaldir}$$

Tanım 2.11 Tek bir maksimal ideali olan halkaya **lokal (yerel) halka** denir.

Örnek 2.10 K bir cisim olmak üzere $K[[x]] = \{\sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i \mid r_i \in K\}$ halkası (x) maksimal idealiyle bir yerel halkadır.

Örnek 2.11 p bir asal tamsayı ve $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid (m, n) = 1 \text{ ve } p \nmid n \right\}$ olsun.

Bu durumda $\mathbb{Z}_{(p)}$ bir yerel halkadır. Tek maksimal ideali de $p\mathbb{Z}_{(p)}$ idealidir.

Önerme 2.9 R halkasının bir yerel halka olması için gerek ve yeter koşul R nin birimsel olmayan elemanlarının bir ideal oluşturmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$: R nin tek maksimal ideali M olsun. $a \in R$ elemanının birimsel olması için gerek ve yeter koşul a nın R nin hiçbir maksimal idealinde bulunmaması olduğundan, M ideali halkanın birimsel olmayan elemanlarından oluşur.

$\Leftarrow$: R nin birimsel olmayan elemanlarının kümesi I bir ideal oluştursun. $0 \in I$ birimsel değildir, $0 \neq 1_R$ yani R trivial halka değildir. R nin en az bir M maksimal ideali vardır ve M de birimsel eleman bulunmadığından, $M \subseteq I$ dır. Fakat M maksimal ideal olduğundan $M = I$ tek maksimal idealdir.

Önerme 2.10 M, R nin tek maksimal idealiyse, $\forall a \notin M$ terslenebilir.

İspat. $a \notin M \Rightarrow (a) \not\subseteq M$ tek maksimal

$$\Rightarrow (a) = R$$

$$\Rightarrow \{ra \mid r \in R\} = R$$

$$\Rightarrow ra = 1_R \text{ olacak şekilde } r \in R \text{ vardır.}$$

Tanım 2.12 R değişmeli, birimli bir halka; Q, R nin bir ideali ve $Q \neq R$ olsun. $a, b \in R$ ve bir $n \in \mathbb{N}$ için $a \cdot b \in Q$ olması $a \in Q$ veya $b^n \in Q$ ($n \in \mathbb{N}$) olmasını gerektiriyorsa Q ya R nin **asalımsı ideali** denir.

Örnek 2.12 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere, $\mathbb{Z}[X]$ polinomlar halkasında $(X^2, 4)$ idealinin $(X, 2)$ –asalımsı ideal olduğunu gösterelim.

$(X, 2) \subseteq \sqrt{(X^2, 4)}$ olduğu açıktır. $\mathbb{Z}[X]/(X, 2) \cong \mathbb{Z}_2$ olduğundan $(X, 2)$ maksimal ideal ve

böylece $(X, 2) = \sqrt{(X^2, 4)}$ olduğu görülür.

$(X^2, 4)$, $\mathbb{Z}$ halkasının bir ideali ve $\sqrt{(X^2, 4)} = M$ de $\mathbb{Z}$ nin maksimal ideali olduğundan $(X^2, 4)$ idealinin $(X, 2)$ -asalımsı ideal elde edilir.

Önerme 2.11 R değişmeli, birimli bir halka ve M maksimal ideali olsun. $\sqrt{Q} = M$ maksimal ideal ise Q asalımsı idealdir.

İspat.

i. $Q \neq R$ olduğunu gösterelim.

$$Q \subseteq \sqrt{Q} = M \neq R \quad \Rightarrow \quad Q \neq R$$

ii. $a, b \in R$ olsun. $ab \in Q$ ve $b^n \notin Q$ ($b \notin \sqrt{Q}$) olsun. $a \in Q$ olduğunu göstermeliyiz.

$$b \notin \sqrt{Q} = M \text{ (M: maksimal)}$$

$$\Rightarrow M + (b) = R$$

$$\Rightarrow \sqrt{Q} + (b) = R$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sqrt{Q}} + \sqrt{(b)} = R$$

$$\Rightarrow \sqrt{Q} + \sqrt{(b)} = R$$

$$\Rightarrow Q + (b) = R$$

$$\Rightarrow d + rb = 1_R \text{ olacak şekilde } d \in Q, r \in R \text{ vardır.}$$

$$\Rightarrow ad + arb = a \in Q$$

Hatırlatma 2.2 $I + J = R \Leftrightarrow \sqrt{I} + \sqrt{J} = R$ ve $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ dir

Önerme 2.12 $\sqrt{Q} = P$ ise Q asalımsı olmak zorunda değildir.

İspat. K bir cisim olmak üzere,

$$R = K[x_1, x_2, x_3] / (x_1x_3 - x_2^2) \text{ halkasında } P = (x_1, x_2) / (x_1x_3 - x_2^2) \text{ asaldir}$$

fakat P^2 asalımsı değildir.

$\sqrt{P^2} = P$ dir. Dolayısıyla $P^2 \subseteq P$ dir. $P^2 \subseteq P$ olduğundan $\sqrt{P^2} \subseteq \sqrt{P}$ dir.

$a \in P \Rightarrow a^2 \in P^2 \Rightarrow a \in \sqrt{P^2}$ dir. Şu halde $\sqrt{P^2} = P$ dir.

$x_1, x_2 \in (x_1, x_2) \Rightarrow \begin{cases} x_2^2 \in (x_1, x_2) \\ x_1 x_3 \in (x_1, x_2) \end{cases}$ taraf tarafa çıkarırsak

$x_2^2 - x_1 x_3 \in (x_1, x_2)$ ise $(x_1 x_3 - x_2^2) \subseteq (x_1, x_2)$

$$R/P = \frac{K[x_1, x_2, x_3]/(x_1 x_3 - x_2^2)}{(x_1, x_2)/(x_1 x_3 - x_2^2)} \cong \frac{K[x_1, x_2, x_3]/(x_1, x_2)}{(x_1 x_3 - x_2^2)} \cong K[x_3]$$

tamlık bölgesi olduğundan P asal idealdir.

$$(x_1, x_2)/(x_1 x_3 - x_2^2) = (x_1, x_2)$$

$x_2 \in P \Rightarrow x_2^2 \in P \Rightarrow x_1 x_3 = x_2^2 \in P^2 = (x_1^2, x_1 x_2, x_2^2)$

$x_1 \notin P^2$ ve $x_3 \notin P = \sqrt{P^2} \Rightarrow P^2$ asalımsı değildir.

Tanım 2.13 R değişmeli, birimli bir halka olsun. $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ polinomunda $a_m \neq 0_R$ olsun. a_m baş katsayı olmak üzere $a_m = 1_R$ ise $f(x)$ e **monik polinom** denir.

Örnek 2.13 p asal tamsayı olmak üzere, $\mathbb{Z}[x]$ de

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$$

polinomu bir monik polinomdur.

Tanım 2.14 R değişmeli, birimli bir halka olsun. $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \in R[x]$ polinomunun katsayılarının en büyük ortak bölenine f nin kapsamı denir ve $c(f)$ ile gösterilir. Eğer $c(f) = 1_R$ ise yani, polinomun katsayıları aralarında asal iseler f ye **ilkel polinom** denir.

Örnek 2.14 $f = 3x^5 + 5x^3 + 14x^2 + 11x + 17 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomu ilkel polinomdur.

Önerme 2.13 R değişmeli, birimli bir halka olsun. $f \in R[x]$ ve $f \neq \emptyset$ ise $f = c(f)f^*$ olacak şekilde bir $f^* \in R[x]$ ilkel polinomu bulunabilir. Bu yazılış, aritmetik birimle çarpım düşünülmeksizin tek türdür.

İspat. $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in R[x]$ ve $c = c(f) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ olsun. Şu halde $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ için $a_i = ck_i$ ve $(k_0, k_1, k_2, \dots, k_n) = 1$ olacak şekilde $\exists k_i \in R$ bulunabilir.

$f^*(x) = k_0 + k_1x + k_2x^2 + \dots + k_nx^n$ istenen özelliktedir.

$f \in R[x]$ in R deki bir elemanla $R[x]$ deki ilkel polinomun çarpım olarak $f = cf^* = dg^*$ şeklinde iki yazılışı olsun. $c(f^*) = c(g^*) = 1$ olduğundan her iki tarafın kapsamı düşünülürse, $c(f) = c$ ve $c(f) = d$ olur. En büyük ortak bölenler dolayısıyla kapsam ilgililik farkı ile tek olduğundan istenen elde edilir.

Tanım 2.15 R değişmeli, birimli bir halka olsun. $p(x) \in R[x]$ olsun. Eğer;

$p(x)$ her birinin derecesi $p(x)$ inkinden daha küçük olan iki polinomun çarpımı olarak yazılamazsa o zaman $p(x)$ e bir **indirgenemez polinom** denir.

Yani, $p(x)$ in indirgenemez olması için gerek ve yeter şart $p(x) = r(x)s(x)$ iken $r(x)$ ya da $s(x)$ den birinin birimsel olmasıdır.

Tanım 2.16 R değişmeli, birimli bir halka olsun. $p(x) \in R[x]$ olsun.

$p(x) = s(x)r(x)$ ise $s(x) \in R[x]$ veya $r(x) \in R[x]$ oluyorsa $p(x)$ e **asal polinom** denir.

Önerme 2.14 R değişmeli, birimli bir halka olsun. $f \in R[x]$ ilkel bir polinom olsun. f nin $R[x]$ de asal olması için gerek ve yeter koşul F, R nin kesir cismi olmak üzere f nin $F[x]$ de asal olmasıdır.

Tanım 2.17 R değişmeli, birimli bir halka olsun. $p(x) \in R[x]$ olsun. $(p(x))^n = 0_R$ oluyorsa $p(x)$ e **nilpotent polinom** denir.

Tanım 2.18 R değişmeli, birimli bir halka olsun. $p(x) \neq 1_{R[x]}$ olsun.

$p(x) \in R[x]$, $r(x) \in R[x]$ olmak üzere $p(x)r(x) = r(x)p(x) = 1_{R[x]}$ ise $p(x)$ e **birimsel polinom** denir.

2.2 Modül ve Alt Modüller

Tanım 2.19 $(M, +)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. M deki elemanların, R deki elemanlarla skaler çarpımı olan $R \times M \rightarrow M$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, M ye R üzerinde bir modül veya kısaca, R – modül denir. [6]

1. Her $r \in R$, her $m, m' \in M$ için, $r(m + m') = rm + rm'$,
2. Her $r, r' \in R$, her $m \in M$ için, $(r + r')m = rm + r'm$,
3. Her $r, r' \in R$, her $m \in M$ için, $(rr')m = r(r'm)$,
4. Her $m \in M$ için, $1_R m = m$.

Önerme 2.15 R bir halka ve M bir R – modül olsun. Her $m \in M$ için,

1. $(0_R)m = 0_M$ ve
2. $(-1_R)m = -m$ dir. [6]

İspat.

1. $(0_R)m = (0_R + 0_R)m = 0_R m + 0_R m \Rightarrow (0_R)m = 0_M$
2. $0_M = (0_R)m = (1_R + (-1_R))m = m + (-1_R)m \Rightarrow (-1_R)m = -m$ elde edilir.

Örnek 2.15 I, R halkasının bir ideali ise I bir R – modüldür.

Tanım 2.20 R bir halka, M bir R – modül ve $N \subseteq M$ boş olmayan bir alt küme olsun. N kendi başına bir R – modül ise N ye M nin bir alt modülü veya R – alt modülü denir. M nin tüm alt modüllerinin ailesi S_M ile gösterilir.

Önerme 2.16 R – modül M nin, boş olmayan bir $N \subseteq M$ alt kümesinin alt modül olması için gerek ve yeter koşul her $r, r' \in R$, her $m, m' \in N$ için, $rm + r'm' \in N$ olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$: N bir alt modül ise kendi başına bir modüldür.

$\Leftarrow$: Her $m, m' \in N$ için, $r = 1$ ve $r = -1$ alarak, $m - m' \in N$ olacağından N, M nin bir alt grubudur. Ayrıca, her $r \in R$, $m \in M$ için, $rm \in N$ dir. M nin tüm elemanları için skaler çarpım özellikleri sağlandığından, N deki elemanlar için de sağlanır. Şu halde N bir R – alt modüldür.

Örnek 2.16 R halkası R – modül olarak düşünülürse, alt modüller R nin idealleridir.

Önerme 2.17 I, R halkasının bir ideali ve M bir R -modül olsun.

$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i m_i : r_i \in I \text{ ve } m_i \in M, i = 1, 2, \dots, n \text{ ve } n \in \mathbb{N} \right\}$$

olmak üzere,

1. IM, M nin bir R - alt modülüdür.
2. I ve I' , R nin iki ideali ise $I(I'M) = (II')M$
3. $I = Ra$ temel ideal ise $IM = (Ra)M = \{am : m \in M\}$ dir.

Önerme 2.18 R bir halka, M bir R – modül, N bir alt modülü ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ bir alt küme olsun.

$$(N:X) = (N:{}_R X) = \{r \in R : rX \subseteq N\}$$

ile gösterelim.

1. $(N:X)$, R nin bir idealidir.
2. $(N:X) = (N:(X))$ dir.

İspat.

1. Her $r, s \in (N:X)$ ve her $x \in X$ için, $(r-s)x = rx - sx \in N$ olduğundan, $r-s \in (N:X)$ ve her $r \in (N:X)$ ve her $a \in R$ için, $(ar)X = a(rX) \subseteq N$ olduğundan $ar \in (N:X)$ olur.
2. $(N:(X)) \subseteq (N:X)$ olduğu açıktır. Tersine, $r \in (N:X)$ ise, (X) in her elemanı

$$\sum_{i=1}^n r_i x_i \quad (r_i \in R \text{ ve } x_i \in X)$$

şeklinde ve $rX \subseteq N$ olduğundan,

$$r \left(\sum_{i=1}^n r_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n r_i (rx_i) \in N$$

bulunur. Buradan istenen elde edilir.

Tanım 2.21 R bir halka, M bir R – modül ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ bir alt küme olsun.

$$(0:X) = \{r \in R : rX = 0\}$$

idealine X in sıfırlayıcısı denir ve $\text{Ann}(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.22 R bir halka ve M bir R – modül olsun.

$$(0: M) = \{r \in R : rM = 0\}$$

idealine M modülünün sıfırlayıcısı denir ve $\text{Ann}(M)$ ile gösterilir. Eğer $\text{Ann}(M) = 0$ ise M modülüne sadık (faithful) modül denir.

$$\text{Ann}(M) = \bigcap_{m \in M} \text{Ann}(m)$$

olduğu açıktır.

Örnek 2.17 Bir değişmeli grubun $\mathbb{Z}$ – modül olarak sadık (faithful) olması için gerek ve yeter koşul grupta sonsuz mertebeli bir elemanın mevcut olması veya sonlu mertebeden elemanların mertebelerinin bir üst sınırının olmamasıdır. Çünkü m mertebeli bir elemanın sıfırlayıcısı $m\mathbb{Z}$ dir.

Önerme 2.19 R bir halka ve M bir R – modül, I da R nin bir ideali olsun. $I \subseteq \text{Ann}(M)$ ise,

$$R/I \times M \rightarrow M$$

skaler çarpımını $(r + I, m) \mapsto rm$ ile tanımlayarak, R – modül M bir R/I – modül yapılabilir. Ayrıca M nin bir alt kümesinin, R – alt modül olması için gerek ve yeter koşul bir R/I – alt modülünün olmasıdır.

İspat. Tanımlanan skaler çarpım iyi tanımlıdır. Çünkü, $I \subseteq \text{Ann}(M)$ olduğundan,

$$r - r' \in I \Leftrightarrow \forall m \in M \text{ için, } rm = r'm$$

dir. M nin elemanlarının, R deki elemanlarla skaler çarpımı ile R/I daki elemanlarla skaler çarpımı aynı olduğundan, bunun skaler çarpım özelliklerini sağladığı ve önermedeki son ifadenin de doğruluğu anlaşılır.

Önerme 2.20 R bir halka, M bir R – modül ve N de M nin bir alt modülü olsun.

$$R \times M/N \rightarrow M/N$$

skaler çarpımını $(r, m + N) \mapsto rm + N$ ile tanımlayarak, M/N toplamsal bölüm grubu, bir R – modül yapılabilir. M/N ye bölüm modülü denir.

İspat. $(r, m + N) \mapsto rm + N$ ile tanımlı fonksiyon iyi tanımlıdır. Çünkü, N bir alt modül olduğundan,

$$m - m' \in N \Leftrightarrow \text{her } r \in R \text{ için, } rm - rm' \in N$$

dür.

Sonuç 2.1 M/N aynı zamanda bir $R/(N:M) - \text{modüldür.}$

$$\begin{aligned} \text{İspat. } \text{Ann}(M/N) &= \{r \in R : \text{her } m \in M \text{ için, } r(m + N) = N\} \\ &= \{r \in R : rm \subseteq N\} \\ &= (N:M) \end{aligned}$$

olduğundan Önerme 2.20 den istenen elde edilir.

Örnek 2.18 R bir halka, N_1 ve N_2 , $R - \text{modül } M$ nin iki alt modülü olsunlar.

$$\text{Ann}((N_1 + N_2)/(N_1:N_2))$$

dir. Çünkü,

$$\text{Ann}((N_1 + N_2)/N_1) = (N_1:N_1 + N_2) = (N_1:N_2)$$

dir.

2.3 Modüllerde Kısıtlama ve Genişlemeler

Bu bölümde halkalardakine benzer olarak modüllerde kısıtlama ve genişlemelere dair temel tanım ve sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.23 R bir halka S bir çarpımsal alt kümesi, M bir R -modül olsun.

1. $S^{-1}M$ nin bir alt modülü $\mathcal{W}$ nin, $\pi: M \rightarrow S^{-1}M$ doğal homomorfizması altındaki ters görüntüsüne, $\mathcal{W}$ nin M ye kısıtlanması denir ve $\mathcal{W}^c$ ile gösterilir.
2. M nin bir alt modülü K nin, $\pi: M \rightarrow S^{-1}M$ doğal homomorfizması altındaki görüntüsünün, $S^{-1}M$ de ürettiği $S^{-1}R$ -alt modüle de K nin $S^{-1}M$ ye genişlemesi denir ve K^e ile gösterilir.[6]

Örnek 2.19 Yukarıdaki gösterimler altında, $K^e = S^{-1}K$ dir.

Tanım 2.24 R bir halka, S çarpımsal bir alt kümesi, M bir R -modül ve K bir alt modülü olsun.

$$K^S = \{m \in M: \text{bir } s \in S \text{ için, } sm \in K\}$$

M nin bir R -alt modülüdür. M nin K^S alt modülüne, K nin M içindeki S -bileşeni denir.[6]

Önerme 2.21 R bir halka, S çarpımsal bir alt kümesi, M bir R -modül ve K , M nin bir alt modülü olsun. K nin M içindeki S -bileşeni K^S , $S^{-1}M$ nin alt modülü $S^{-1}K$ nin $\pi: M \rightarrow S^{-1}M$ doğal homomorfizmasına göre, M ye kısıtlaması $(S^{-1}K)^c$ dir. Yani

$$K^{ec} = (S^{-1}K)^c = K^S \text{ dir.}$$

İspat. $m \in K^S$ ise $sm \in K$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır.

Şu halde;

$$\pi(m) = \frac{m}{1} = \frac{sm}{s} \in S^{-1}K$$

yani, $m \in (S^{-1}K)^c$ bulunur.

Tersine, $m \in (S^{-1}K)^c$ yani, $\pi(m) \in S^{-1}K$ alalım.

$$\pi(m) = \frac{m}{1} = \frac{k}{s}$$

olacak şekilde bir $k \in K$ ve bir $s \in S$ bulunabilir. Şu halde bir $t \in S$ için, $(st)m = tk \in K$ yani, $m \in K^S$ dir.

Önerme 2.22 Önceki önermenin gösterimleri ile $S^{-1}M$ nin bir alt modülü $\mathcal{W}$ için, $\mathcal{W}^{ce} = \mathcal{W}$ dir. Yani, $S^{-1}M$ nin her alt modülü M nin bir alt modülünün genişlemesidir.

İspat. $\mathcal{W}^c = \pi^{-1}(\mathcal{W})$ ve $\mathcal{W}^{ce} = S^{-1}\mathcal{W}^e$ dir.

$S^{-1}\mathcal{W}^c$ nin herhangi bir elemanı, $\pi(u) \in \mathcal{W}$ ve $s \in S$ olmak üzere, $\frac{u}{s}$ şeklindedir.

$$\frac{u}{s} = \frac{1}{s} \frac{u}{1} = \frac{1}{s} \pi(u) \in \mathcal{W}$$

olduğundan, $S^{-1}\mathcal{W}^c \subseteq \mathcal{W}$ bulunur. Tersine, her $\frac{u}{s} \in \mathcal{W}$ ($u \in M, s \in S$) için,

$\frac{s}{1} \frac{u}{s} = \frac{u}{1} = \pi(u) \in \mathcal{W}$ olduğunda $u \in \mathcal{W}^c$ olduğundan, $\frac{u}{s} \in S^{-1}\mathcal{W}^c$ elde edilir.

Not 2.1 R bir halka ve M bir R -modül olsun. Halkalarda olduğu gibi, S çarpımsal kümesi, R nin bir P asal idealinin tümleyeni olarak alındığında, elde edilen $S^{-1}M$ kesir modülüne M nin P deki yerelleştirmesi denir ve M_P ile gösterilir.

Önerme 2.23 R bir halka, M bir R -modül ve K bir alt modülü olsun. R nin her Q maksimal idealindeki yerelleştirmesi için tanımlanan doğal homomorfizma altında, K nin genişlemelerinin kısıtlanışlarının arakesiti K^S dir. Yani;

$$K = \bigcap_{S=R \setminus Q} K^S$$

dir.

İspat. Her Q maksimal ideali için, $S = R \setminus Q$ alınarak elde edilen doğal homomorfizmaya göre genişleme ve kısıtlama altında

$$K \subseteq K^{ec} = K^S$$

olduğundan, $K \subseteq \bigcap K^{ec} = \bigcap K^S$ kapsaması açıktır.

Tersine, $x \in \bigcap K^S$ alalım.

Şu halde K^S nin tanımına göre, her Q maksimal ideali için, $c_Q x \in K$, $c_Q \notin Q$ olacak şekilde bir $c_Q \in R$ bulunabilir. Böylece, bulunan tüm c_Q elemanlarının ürettiği ideal I ise $I = R$ olur

ve $x \in K$ kabul edilir. Çünkü, $I \subset R$ has ideal olsa idi, I yı kapsayan bir Q' maksimal ideali bulunabilir ve $c_Q \notin Q'$ olur; buradan da $c_Q \in I$ olduğundan çelişki elde edilirdi.

Sonuç 2.2 R bir halka, M bir R -modül ve K ile L iki alt modülü olsun. R nin her Q maksimal idealindeki yerelleştirmesi için tanımlanan doğal homomorfizma altında, K nın genişlemeleri aynı, yani $K^e = L^e$ iken $K = L$ dir.

İspat. Her Q maksimal idealindeki yerelleştirme için tanımlanan doğal homomorfizma altında, K ve L alt modülleri için,

$K^e = L^e$ ise $K^{ec} = L^{ec}$ olduğundan, önermeden

$$K = \bigcap K^{ec} = \bigcap L^{ec} = L$$

bulunur.

DEĞİŞMELİ HALKALARIN δ -ASALIMSIZ İDEALLERİ

Bu bölümdeki halkaların birimli ve değişmeli olduğu kabul edilecektir.

3.1 İdealler ve δ –Asalimsız İdeallerin Genişlemeleri

Asal ve asalimsız idealler kabaca sayılar teorisinde asal ve asalın kuvveti olan sayıların oynadığı rolü oynarlar. Değişmeli Noetherian halkaların bilinen özelliklerinden biri; bu halkaların her has idealinin sonlu sayıda asalimsız idealin toplamı olarak ayrışabilmesidir([6],(5.1.26)).

Her asal ideal asalımsızdır ve bunun tersi doğru değildir, yani her asalımsız ideal asal ideal olmayabilir.

Örnek 3.1 $\mathbb{Z}$ de $(4) = (2^2)$ ideali bir asalımsız idealdir ancak asal ideal değildir.

Tanım 3.1 R halkasının her I idealini yine R nin bir $\delta(I)$ idealine eşleyen ve aşağıdaki E1 koşulunu sağlayan δ fonksiyonuna bir **ideal genişlemesi** denir.[2]

(E1) $I \subseteq \delta(I)$ dir ve $P \subseteq Q$ olması $\delta(P) \subseteq \delta(Q)$ olmasını gerektirir.

Örnek 3.2

1. Her $I \in \text{Id}(R)$ için $\delta_0(I) = I$ i sağlayan δ_0 birim fonksiyonu ideallerin bir genişlemesidir.

$$I = \delta_0(I) \Rightarrow I \subseteq \delta_0(I)$$

$P, Q \in \text{Id}(R)$ ve $P \subseteq Q$ olsun.

$\delta_0(P) = P \subseteq Q = \delta_0(Q)$ dolayısıyla $\delta_0(P) \subseteq \delta_0(Q)$ olur.

2. Her I ideali için, I nin radikalini $\delta_1(I) = \sqrt{I}$ ile tanımlayalım. Bu takdirde δ_1 ideallerin bir genişlemesidir.

$$I \subseteq \sqrt{I} = \delta_1(I)$$

$P, Q \in \text{Id}(R)$ ve $P \subseteq Q$ olsun.

O zaman; $\sqrt{P} \subseteq \sqrt{Q}$ dur.

3. R nin her idealini en büyük ideal olan R ye eşleyen $\mathcal{B}$ fonksiyonu bir genişlemedir.
4. Her P ideali için $M(P)$; P, R nin bir öz ideali olmak üzere P yi içeren tüm maksimal ideallerin kesişimi ve $M(R) = R$ olsun. Bu takdirde; M ideallerin bir genişlemesidir.

Uyarı 3.1 Şimdiye kadar verdiğimiz ideal genişlemeleri için $\delta^2 = \delta$ dır. Yani her I ideali için $\delta(\delta(I)) = \delta(I)$ dır.

Tanım 3.2 İdeallerin bir δ genişlemesi verilsin. I, R nin bir ideali olsun.

Her $a, b \in R$ için $ab \in I$ ve $a \notin I$ olması $b \in \delta(I)$ yı gerektiriyorsa I idealine δ -asalımsı denir.

Buradan δ -asalımsı idealler aşağıdaki biçimde de tanımlanabilir:

$ab \in I$ ve $a \notin \delta(I)$ olması $b \in I$ yı gerektirir.

Örnek 3.3

1. Herhangi bir I idealinin δ_0 -asalımsı olması için gerek ve yeter koşul I idealinin asal ideal olmasıdır.

δ_0 -asalımsı ideal ise; genel olarak;

$ab \in I$ ve $a \notin I \Leftrightarrow b \in \delta_0(I) = I$ dır. Bu da asal idealin tanımıdır.

I asal ideal ve $ab \in I, a \notin I$ olsun. O zaman $b \in I = \delta_0(I)$ dır.

2. Herhangi bir I idealinin δ_1 -asalımsı olması için gerek ve yeter koşul I idealinin asalımsı olmasıdır.

δ_1 -asalımsı ise;

$ab \in I$ ve $a \notin I \Leftrightarrow b \in \delta_1(I) = \sqrt{I}$ dır. Bu da asalımsı idealin tanımıdır.

3. Örnek 3.1.2 (3) te tanımlanan $\mathcal{B}$ fonksiyonu için her I ideali $\mathcal{B}$ -asalımsıdır.

$$\mathcal{B}(I) = R$$

$ab \in I$ ve $a \notin I$ olsun. $b \in R = \mathcal{B}(I)$ olduğundan her I ideali $\mathcal{B}$ -asalımsıdır.

Uyarı 3.2

1. δ ve γ iki ideal genişlemesi ve her I ideali için $\delta(I) \subseteq \gamma(I)$ olsun. Bu takdirde; her δ -asalımsı ideal aynı zamanda γ -asalımsıdır. Böylece özel olarak bir asal ideal her δ için δ -asalımsıdır.

Gerçekten;

I asal ideal ve $ab \in I$, $a \notin I$ ise $b \in I \subseteq \delta(I)$ dır. Böylece her asal ideal δ -asalımsıdır.

2. Verilen iki δ_1 ve δ_2 ideal genişlemeleri $\delta(I) = \delta_1(I) \cap \delta_2(I)$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde; δ da bir ideal genişlemesidir. Genel olarak; ideal genişlemelerinin keyfi bir topluluğunun arakesiti de bir ideal genişlemesidir.

$$\delta(I) = \delta_1(I) \cap \delta_2(I)$$

$$\left. \begin{array}{l} I \subseteq \delta_1(I) \\ I \subseteq \delta_2(I) \end{array} \right\} \Rightarrow I \subseteq \delta_1(I) \cap \delta_2(I) = \delta(I) \Rightarrow I \subseteq \delta(I)$$

$$P, Q \in \text{Id}(R) \text{ olsun. } P \subseteq Q \text{ ise } \left. \begin{array}{l} \delta_1(P) \subseteq \delta_1(Q) \\ \delta_2(P) \subseteq \delta_2(Q) \end{array} \right\} \Rightarrow \delta_1(P) \cap \delta_2(P) \subseteq \delta_1(Q) \cap \delta_2(Q) \Rightarrow \delta(P) \subseteq \delta(Q)$$

δ bir ideal genişlemesidir.

3. δ bir ideal genişlemesi olsun.

$$E_\delta(P) = \bigcap \{J \in \text{Id}(R) | P \subseteq J, J \text{ } \delta\text{-asalımsı ideal}\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde; E_δ da bir ideal genişlemesidir.

Önerme 3.1 $\{J_i | i \in D\}$ R nin δ -asalımsı ideallerinin direkt topluluğu olsun. Bu takdirde; $J = \bigcup_{i \in P} J_i$ ideali δ -asalımsıdır.

İspat. $ab \in J$ ve $a \notin J$ olsun. Bu takdirde; $ab \in J_i$ ve $a \notin J_i$ olacak şekilde J_i mevcuttur. Bu nedenle; $b \in \delta(J_i)$ ve $\delta(J_i) \subseteq \delta(J)$ olması $b \in \delta(J)$ yi gerektirir. Bundan dolayı; J , δ -asalımsıdır.

Böylece tüm δ -asalımsı ideallerin kümesi, içerme bağıntısına göre ilgili bir “tam sıralı küme”dir.

Genel olarak; iki δ -asalımsı idealin kesişimi δ -asalımsı değildir.

Lemma 3.1 Bir P idealinin δ -asalımsı olması için gerek ve yeter koşul herhangi iki I ve J idealleri için $IJ \subseteq P$ ve $I \not\subseteq P$ iken $J \subseteq \delta(P)$ olmasıdır.

İspat.

($\Rightarrow$): P bir δ -asalımsı ideal olsun. $IJ \subseteq P$ ve $I \not\subseteq P$ ancak $J \not\subseteq \delta(P)$ olması durumunu ele alalım. Bu takdirde; $a \in I - P$ ve $b \in J - \delta(P)$ seçebiliriz.

Bu durumda; $ab \in IJ \subseteq P$ dir. Ancak; $a \notin P$ ve $b \notin \delta(P)$ dir.

Bu; P nin δ -asalımsı olmasıyla çelişir.

($\Leftarrow$): Tersine; $ab \in P$ ve $a \notin P$ yi göz önüne alalım. Bu takdirde;

$(a)(b) \subseteq P$ ve $(a) \not\subseteq P$ dir.

Bu nedenle; $(b) \subseteq \delta(P)$ dir.

Bundan dolayı; $b \in (b) \subseteq \delta(P)$ olması $b \in \delta(P)$ yi gerektirir.

Böylece; P , δ -asalımsıdır.

Uyarı 3.3 δ -asalımsı ideallerin tanımında olduğu gibi; Lemma 3.1 deki

" $IJ \subseteq P$ ve $I \not\subseteq P$ olsun. Bu takdirde $J \subseteq \delta(P)$ dir." ifadesi yerine;

" $IJ \subseteq P$ ve $I \not\subseteq \delta(P)$ olsun. Bu takdirde $J \subseteq P$ dir." ifadesi de yazılabilir.

Not 3.1 Bir R halkasının iki ideali P ve Q için

$P:Q = \{x \in R \mid xy \in P, \text{ her } y \in Q \text{ için}\}$ idealini tanımlayalım.

Bu ideale **kalan ideal** denir.

Teorem 3.1 δ bir ideal genişlemesi olsun. bu takdirde;

1. P bir δ -asalımsı ideal ve $I, I \not\subseteq \delta(P)$ olacak şekilde bir ideal ise $P:I = P$ dir.
2. Bir R halkasının herhangi bir δ -asalımsı P ideali ve N alt kümesi için $P:N$ de δ -asalımsıdır.

İspat.

$$1. P:I = \{x \in Rxy \in P, \text{ her } y \in I \text{ için}\}$$

Açıkça $P \subseteq P:I$ dir. Aynı zamanda $P:I$ nin tanımından; $I(P:I) \subseteq P$

($y \in I$ ve $x \in P:I$ ise $yx \in I(P:I)$ dir. R değişmeli halka olduğundan $yx = xy \in P$ dir.)

$I \not\subseteq \delta(P)$ olduğunda, Lemma 3.1 den ($IJ \subseteq P$ ve $I \not\subseteq \delta(P) \Rightarrow J \subseteq P$) $P:I \subseteq P$ yi elde ederiz.

Buradan; $P = P:I$ olur.

$$2. ab \in P:N \text{ ve } a \notin P \text{ olsun. bu takdirde; } an \notin P \text{ olacak şekilde bir } n \in N \text{ vardır. Ancak;} \\ anb = abn \in P \text{ dir. Dolayısıyla;}$$

$b \in \delta(P) \subseteq \delta(P:N)$ dir.

Bundan dolayı; $P:N$, δ -asalımsıdır.

Teorem 3.2 δ , her I ideali için $\delta(I) \subseteq \delta_1(I)$ yı sağlayan bir ideal genişlemesi olsun. Bu takdirde; herhangi bir P δ -asalımsı ideali için $\delta(P) = \delta_1(P)$ dir.

İspat. $a \in \delta_1(P)$ olsun. Bu takdirde; $a^k \in P$ olacak şekilde en küçük bir k pozitif tam sayısı mevcuttur. $k = 1$ ise $a \in P \subseteq \delta(P)$ dir.

$k > 1$ ise $a^{k-1}a \in P$ dir. Ancak $a^{k-1} \notin P$ dir. Dolayısıyla $a \in \delta(P)$ dir.

Bundan dolayı; $\delta_1(P) \subseteq \delta(P)$ ve $\delta(P) = \delta_1(P)$ dir.

3.2 Genişlemelerin Ek Özellikleri

Bu kısımda; δ nın ek koşulları sağladığı δ -asalımsı idealler incelenecek ve bu genişlemelere uyan daha çok sonuç ispatlanacaktır.

Tanım 3.3

- i. δ bir ideal genişlemesi olsun. Her $I, J \in \text{Id}(R)$ için aşağıdaki E2 koşulu sağlanıyorsa δ ideal genişlemesine kesişimi koruyor denir.

(E2) Herhangi bir $I, J \in \text{Id}(R)$ için $\delta(I \cap J) = \delta(I) \cap \delta(J)$ dir.

- ii. Herhangi bir halka homomorfizması $f: R \rightarrow S$ için

(E3) Her $I \in \text{Id}(S)$ için $\delta(f^{-1}(I)) = f^{-1}(\delta(I))$ yı sağlayan bir genişlemeye “global” denir.[2]

Örnek 3.4 $\delta_0, \delta_1, \mathcal{B}$ genişlemeleri kesişimi korur ve globaldir.

- i. $I, J \in \text{Id}(R)$ olsun.

$$\delta_0(I \cap J) = I \cap J = \delta_0(I) \cap \delta_0(J)$$

$$\delta_1(I \cap J) = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \delta_1(I) \cap \delta_1(J)$$

$$\mathcal{B}(I \cap J) = R = R \cap R = \mathcal{B}(I) \cap \mathcal{B}(J)$$

- ii. $f: R \rightarrow S$ herhangi bir halka homomorfizması olsun. Her $I \in \text{Id}(S)$ için;

$$\delta_0(f^{-1}(I)) = f^{-1}(I) = f^{-1}(\delta_0(I))$$

$$\delta_1(f^{-1}(I)) = \sqrt{f^{-1}(I)} = f^{-1}(\sqrt{I}) = f^{-1}(\delta_1(I))$$

$$\mathcal{B}(f^{-1}(I)) = R = f^{-1}(S) = f^{-1}(\mathcal{B}(I))$$

Lemma 3.2 Her I ideali için $M(I) = \bigcap \{H | I \subseteq H, H \text{ bir maksimal ideal}\}$ olsun.

Bu takdirde; $M(I \cap J) = M(I) \cap M(J)$ herhangi iki I ve J idealleri için de geçerlidir.

İspat. $\mathcal{H}_1 = \{H | I \cap J \subseteq H, H \text{ bir maksimal ideal}\}$ ve

$\mathcal{H}_2 = \{H | I \subseteq H \text{ ya da } J \subseteq H, H \text{ bir maksimal ideal}\}$ olsun.

Bu takdirde;

$$\bigcap \mathcal{H}_1 = M(I \cap J) \text{ ve } \bigcap \mathcal{H}_2 = M(I) \cap M(J)$$

olacaktır. Buradan açıkça $\mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_1$ dir.

Şimdi; $H \in \mathcal{H}_1$ ise $I \cap J \subseteq H$ dir. Ancak H maksimal ve dolayısıyla asaldir.

Bundan dolayı $I \subseteq H$ ya da $J \subseteq H$ dir. Bu da $H \in \mathcal{H}_2$ olmasıdır.

Öyle ki $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ ve $M(I \cap J) = M(I) \cap M(J)$ dir.

Örnek 3.2 (4) te tanımlanan M ideal genişlemesi ile kesişim korunur.

Global olmadığı örnek 3.4 de görülmektedir.

Lemma 3.3 δ kesişimi koruyan bir ideal genişlemesi olsun. $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ R nin δ -asalımsı idealleri ve her i için $P = \delta(Q_i)$ olsun. bu takdirde;

$$Q = \bigcap_{i=1}^n Q_i$$

δ -asalımsıdır.

İspat. $xy \in Q$ ve $x \notin Q$ ise bir k için $x \notin Q_k$ dır.

Ancak; $xy \in Q \subseteq Q_k$ ve Q_k δ -asalımsıdır, bu nedenle $y \in \delta(Q_k)$ dır.

Ancak; $\delta(Q) = \delta(\bigcap_{i=1}^n Q_i) = \bigcap_{i=1}^n \delta(Q_i) = P = \delta(Q_k)$ dır.

Böylece $y \in \delta(Q)$ dur. Dolayısıyla Q , δ -asalımsıdır.

Not 3.2 R halkasının bir a elemanı $a \in \delta(\{0\})$ ise δ -nilpotent olarak adlandırılır. Böylece δ_0 -nilpotent eleman sıfır eleman olur. Aynı zamanda; δ_1 -nilpotent elemanlar kesinlikle normal nilpotent elemanlardır.

Teorem 3.3 δ bir global genişleme olsun. R halkasının bir I idealinin δ -asalımsı olması için gerek ve yeter koşul R/I bölüm halkasının her sıfır böleninin δ -nilpotent olmasıdır.

İspat.

($\Rightarrow$): I , δ -asalımsı olsun.

$\bar{r} = r + I$, R/I nin sıfır böleni olsun. bu durumda $\bar{r}\bar{s} = rs + I = I$ ile $\bar{s} = s + I \neq I$ olur.

Bu da $rs \in I$ ve $s \notin I$ demektir. Kabulden; I , δ -asalımsıydı; dolayısıyla $r \in \delta(I)$ dır. Öyleyse, $\bar{r} \in \delta(I)/I$ dır.

$q: R \rightarrow R/I$ bir doğal homomorfizma olsun. δ nın globalliğinden;

$$\delta(I) = \delta\left(q^{-1}(\{0_{R/I}\})\right) = q^{-1}(\delta(\{0_{R/I}\}))$$

elde edilir.

q örten olduğunda, $\delta(I)/I = q(\delta(I)) = \delta(\{0_{R/I}\})$ dır.

Bu durumda; $\bar{r} \in \delta(\{0_{R/I}\})$ elde edilir; yani $\bar{r}$ δ -nilpotenttir.

($\Leftarrow$;) Tersine; R/I nın tüm sıfır bölenlerinin δ -asalımsı olduğunu kabul edelim. $r, s \in R$ için $rs \in I$ ve $r \notin I$ olsun.

Bu takdirde; $\bar{r}\bar{s} = 0_{R/I}$ ve $\bar{r} \neq 0_{R/I}$ dır. Dolayısıyla; $\bar{s}$ R/I nın bir sıfır bölenidir.

Kabulümüzden; $\bar{s} \in \delta(\{0_{R/I}\}) = \delta(I)/I$ dır.

Bu durumda; $s - s' \in I$ olacak şekilde bir $s' \in \delta(I)$ vardır.

Dolayısıyla $s - s' \in \delta(I)$ dır. Bu $s = (s - s') + s' \in \delta(I)$ şeklinde devam eder.

Bu durumda; I δ -asalımsıdır.

Sonuç 3.1 R nin bir I idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul R/I nın tek sıfır böleninin $0_{R/I}$ olması yani R/I nın bir tamlık bölgesi olmasıdır.

Aynı zamanda; I idealinin asalımsı olması için gerek ve yeter koşul R/I nın her sıfır böleninin nilpotent olmasıdır.

Lemma 3.4 δ global ve $f: R \rightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun.

Bu takdirde; S nin herhangi bir I δ -asalımsı ideali için $f^{-1}(I)$ da R nin bir δ -asalımsı idealidir.

İspat. $a, b \in R$ için $ab \in f^{-1}(I)$ olsun.

$a \notin f^{-1}(I)$ ise $f(a)f(b) \in I$ ancak $f(a) \notin I$ dır.

Dolayısıyla; I nın δ -asalımsılığından $f(b) \in \delta(I)$ dır.

Bu nedenle; $b \in f^{-1}(\delta(I)) = \delta(f^{-1}(I))$ dır. Bundan dolayı; $f^{-1}(I)$ δ -asalımsıdır.

Not 3.3 $f: R \rightarrow S$ halka homomorfizması ise R nin $\text{çek}(f)$ yi içeren bir I ideali için $f^{-1}(f(I)) = I$ dır.

Önerme 3.2 $f: R \rightarrow S$ bir örten halka homomorfizması olsun. Bu takdirde; R nin $\text{çek}(f)$ yi içeren bir I idealinin δ -asalımsı olması için gerek ve yeter koşul $f(I)$ nin S nin δ -asalımsı bir ideali olmasıdır.

İspat. $f(I)$ δ -asalımsı ise $I = f^{-1}(f(I))$ ve Lemma 2.6 dan I δ -asalımsıdır.

Şimdi I nin δ -asalımsılığını göz önüne alalım.

$a, b \in S$ için $ab \in f(I)$ ve $a \notin f(I)$ olsun. Bu takdirde; $f(x) = a$, $f(y) = b$ olacak şekilde $x, y \in R$ vardır.

Bu durumda; $f(xy) = f(x)f(y) = ab \in f(I)$ olması $xy \in f^{-1}(f(I)) = I$ yi gerektirir ve

$f(x) = a \notin f(I)$ olması da $x \notin I$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $y \in \delta(I)$ ve bundan dolayı $b = f(y) \in f(\delta(I))$ dır.

Şimdi sadece; $f(\delta(I)) = \delta(f(I))$ olduğunu ispatlamamız gerekmektedir.

Ancak; bu $\delta(I) = \delta(f^{-1}(f(I))) = f^{-1}(\delta(f(I)))$

dolayısıyla; $f(\delta(I)) = f(f^{-1}(\delta(f(I)))) = \delta(f(I))$ ve f nin örtenliğinden direkt olarak çıkar.

Uyarı 3.4 $f: R \rightarrow S$ örten bir homomorfizma ve $\text{çek}(f) \subseteq I$ olsun.

Bu takdirde; $f(\delta(I)) = \delta(f(I))$ dır. Özel olarak, f bir izomorfizma ise $f(\delta(I)) = \delta(f(I))$, R nin her I ideali için sağlanır.

Sonuç 3.2 I , R nin herhangi bir ideali ve J de R nin I yi kapsayan bir ideali olsun. Bu takdirde;

J/I nin R/I nin δ -asalımsı ideali olması için gerek ve yeter koşul J nin R nin δ -asalımsı ideali olmasıdır.

BÖLÜM 4

ASALIMSIZ ALT MODÜLLER

Bu bölümde asalımsız alt modüllerle ilgili temel tanım ve sonuçlar verilecektir. Bu tanım ve sonuçlar ; [6],[7],[8] de mevcuttur.

4.1 Asalımsız Alt Modüller

Tanım 4.1 R bir halka, M bir R -modül ve N, M nin bir öz alt modülü olsun. Her $r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in N$ ve $m \notin N$ olması bir $t > 0$ tam sayısı için $r^t \in (N:M)$ olmasını gerektiriyorsa, yani, $r \in R, m \in M$ için, $rm \in N$ olduğunda $r \in \sqrt{(N:M)}$ veya $m \in N$ ise N ye asalımsız alt modül denir.

Örnek 4.1 R bir halka olsun. Her R – modül R nin asalımsız alt modülleri, R nin asalımsız idealleridir.

Önerme 4.1 M bir R – modül ve N, M nin bir asalımsız alt modülü olsun. Şu halde

$$(N:M) = \text{Ann}(M/N)$$

R nin bir asalımsız idealidir.

İspat. N, M nin bir asalımsız alt modülü olsun. $a, b \in R$ olmak üzere, $ab \in (N:M)$ ve $b \notin (N:M)$ kabul edelim. Şu halde $abM \subseteq N$ ve $bM \not\subseteq N$ dir. Böylece $abm \in N$ ve $bm \notin N$ olacak şekilde en az bir $m \in M$ bulunabilir. N asalımsız alt modül olduğundan $a^k \in (N:M)$ olacak şekilde bir k tam sayısı vardır. Böylece $(N:M)$ bir asalımsız ideal olur.

Sonuç 4.1 R bir halka, M bir R – modül ve N, M nin bir asalımsız alt modülü olsun. Bu durumda $\sqrt{(N:M)}$ bir asal idealdir.

İspat. N, M nin bir asalımsı alt modülü olsun. O zaman $(N: M)$ bir asalımsı idealdir. $(N: M)$ asalımsı ideal olduğundan $\sqrt{(N: M)}$ de asal idealdir.

Tanım 4.2 R bir halka, M bir R – modül ve N, M nin bir asalımsı alt modülü olsun.

$\sqrt{(N: M)} = P$ ise N ye P asal idealine ilişkin asalımsı alt modül veya kısaca P – asalımsı alt modül denir.

Önerme 4.2 R bir halka, M bir R – modül ve N, M nin bir öz alt modülü olsun. R nin bir P ideali için, aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa, P bir asal ideal ve N de M nin bir P -asalımsı alt modülüdür.

- i. Her $r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in N$ ve $m \notin N$ olması $r \in P$ olmasını gerektirir.
- ii. $r \in P$ ise bir k pozitif tam sayısı için $r^k M \subseteq N$ dir.

İspat. (i) Bu iki koşul sağlanıyorsa N nin asalımsı alt modül olduğu açıktır. $\sqrt{(N: M)} = P$ olduğunu gösterelim. (ii) den $P \subseteq \sqrt{(N: M)}$ dir. Ters kapsama için, $r \in \sqrt{(N: M)}$ alalım. Bir pozitif s tam sayısı için $r^s \in (N: M)$ ve böylece $r^s M \subseteq N$ dir. s yi bu şekildeki en küçük pozitif tam sayı olarak seçelim. Şu halde $s \geq 1$ ve $r^{s-1} M \not\subseteq N$ dir. Şu halde $r^{s-1} m \notin N$ olacak şekilde en az bir $m \in M$ vardır. Böylece $r(r^{s-1} m) \in N$ ve $r^{s-1} m \notin N$ olduğundan, (i) den $r \in P$ yani $\sqrt{(N: M)} \subseteq P$ elde edilir.

Sonuç 4.2 R bir halka, M bir R – modül ve N, M nin bir P -asalımsı alt modülü olsun.

$r \in R, m \in M$ ve $rm \in N$ ise $r \in P$ veya $m \in N$ dir.

İspat. P -asalımsı alt modülün tanımından istenen elde edilir.

Sonuç 4.3 R bir halka, M bir R – modül olsun. N, M nin bir P -asalımsı alt modülü; I, R nin bir ideali ve K, M nin bir alt modülü olsun.

$$IK \subseteq N \Rightarrow I \subseteq P \text{ veya } K \subseteq N$$

dir.

İspat. $K \not\subseteq N$ olsa, bir $m \in K \setminus N$ vardır ki her $r \in I$ için, $rm \in IK \subseteq N$ olur. $m \notin N$ ve N asalımsı alt modül olduğundan $r \in P$ elde edilir.

Sonuç 4.4 R bir halka, M bir R – modül ve N, M nin bir P -asalımsı alt modülü olsun. X, R halkasının $X \not\subseteq P$ olacak şekilde bir alt kümesi ise $(N:_{\mathcal{M}} X) = N$ dir.

İspat. $(N:_M X) = (N:_M (X))$ olduğundan, X alt kümesini bir ideal kabul edebiliriz. $X(N:_M X) \subseteq N$ ve $X \not\subseteq P$ dir. Önceki sonuçtan $(N:_M X) \subseteq N$ dir. $N \subseteq (N:_M X)$ olduğu açıktır. Şu halde $(N:_M X) = N$ dir.

Önerme 4.3 R bir halka, M bir R – modül; N, M nin bir P -asalımsı alt modülü ve K da M nin herhangi bir alt modülü olsun.

1. $K \subseteq N$ ise $(N:K) = R$,
2. $K \not\subseteq N$ ise $(N:K)$, R nin bir P -asalımsı idealidir.

İspat.

1. $K \subseteq N$ ise $(N:K) = R$ olduğu açıktır.
2. $K \not\subseteq N$ ise $(N:K) \subset R$ has bir idealdir. Şimdi; $(N:K)$ nin bir asalımsı ideal olduğunu gösterelim.

$ab \in (N:K)$, fakat $b \notin (N:K)$ olsun. Şu halde $bk \notin N$ olacak şekilde bir $k \in K$ vardır.

Böylece $abk \in N$ ve $bk \notin N$ olduğundan, $a \in P$ dir.

$r \in P = \sqrt{(N:_M M)}$ olsun. Bir t tam sayısı için $r^t M \subseteq N$ ve böylece $r^t \in (N:_M M) \subseteq (N:K)$ ve $r^t R \subseteq (N:K)$ dir. Önerme4.2 nin (ii) şıkkı da sağlanır. Şu halde $(N:K)$ alt modülü bir P -asalımsı alt modül; yani $(N:K)$, R nin bir P -asalımsı idealidir.

Önerme 4.4 R bir halka; M bir R – modül; N, M nin bir P -asalımsı alt modülü ve I, R nin herhangi bir ideali olsun.

1. $I \subseteq (N:_M M)$ ise $(N:_M I) = M$ ve
2. $I \not\subseteq (N:_M M)$ ise $(N:_M I)$, M nin bir P -asalımsı alt modülüdür.

İspat.

1. $I \subseteq (N:_M M)$ ise $(N:_M I) = M$ olduğu açıktır.
2. $I \not\subseteq (N:_M M)$ olsun. Şu halde $(N:_M I)$, M nin has bir alt modülüdür. Önerme4.2 yi kullanarak $(N:_M I)$ nin M nin P -asalımsı alt modülü olduğunu gösterelim. $r \in R$ ve $x \in M$ olmak üzere $rx \in (N:_M I)$ ve $x \notin (N:_M I)$ olsun. $ax \notin N$ olduğundan $r \in P$ dir.

$r \in P$ olsun. Şu halde bir k pozitif tam sayısı için $r^k M \subseteq N \subseteq (N :_M I)$ dir. Önerme 4.2 den $(N :_M I)$, M nin bir P -asalımsı alt modülüdür.

Önerme 4.5 R bir halka; N, R – modül M nin bir P asalımsı alt modülü ve K, M nin $K \not\subseteq N$ olacak şekilde herhangi bir alt modülü olsun. Şu halde $K \cap N$ de K nin bir P -asalımsı alt modülüdür.

İspat. $K \cap N$ alt modülünün K nin has bir alt modülü olduğu açıktır. $r \in R$ ve $x \in K$ olmak üzere $rx \in K \cap N$ fakat $x \notin K \cap N$ olsun. Şu halde $rx \in N$ fakat $x \notin N$ olduğundan, $r \in P$ dir.

$r \in P$ olsun. Şu halde $r^k M \subseteq N$ olacak şekilde bir k tam sayısı vardır. Böylece $r^k K \subseteq N \cap K$ dir. Önerme 4.2 den $K \cap N, K$ nin bir P -asalımsı alt modülüdür.

Önerme 4.6 R bir halka olsun. $N_1, N_2, \dots, N_s$ ler ($s \geq 1$), R – modül M nin P -asalımsı alt modülleri ise

$$N = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_s$$

de M nin bir P -asalımsı alt modülüdür.

İspat. N, M nin bir has alt modülü olduğu açıktır. $r \in R$ ve $x \in M$ olmak üzere $rx \in N$ ve $x \notin N$ olsun. Şu halde bir $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ için $rx \in N_j$ ve $x \notin N_j$ dir. Buradan, $r \in P$ bulunur.

$r \in P$ olsun. Her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $r^k M \subseteq N$ dir. Önerme 4.2 den N, M nin bir P -asalımsı alt modülüdür.

Önerme 4.7 R bir halka, M ve M^*, R – modüller ve $f: M \rightarrow M^*$ bir örten R – modül homomorfizması olsun. N^*, M^* nin bir alt modülü ise, $f^{-1}(N^*) = N$ de M nin bir alt modülüdür.

N^* in M^* in bir asalımsı alt modülü olması için gerek ve yeter koşul N nin, M nin bir asalımsı alt modülü olmasıdır.

Ayrıca, N ve N^* asalımsı alt modül olduğunda, ilişkili olduğu asal idealler aynıdır.

İspat. N^*, M^* in bir asalımsı alt modülü ve $f^{-1}(N^*) = N$ ise Önerme 4.5 ten, N nin de M nin bir has alt modülü olduğunu biliyoruz. $r \in R$ ve $x \in M$ olmak üzere $rx \in N$ ve $x \notin N$ olduğunu kabul edelim. Şu halde; $rf(x) = f(rx) \in N^*$ ve $f(x) \notin N^*$ olur. N^*, M^* nin bir asalımsı alt modülü olduğundan, $r^m M^* \subseteq N^*$ olacak şekilde bir m tam sayısı vardır. Buradan, $f(r^m M) = r^m M \subseteq N^*$ ve $r^m M \subseteq N$ bulunur. Yani N nin, M nin bir asalımsı alt modülü olduğu anlaşılır.

Benzer şekilde N, M nin bir asalımsı alt modülü ise $f(N) = N^*$ in da, M^* in bir asalımsı alt modülü olduğu gösterilebilir.

([6],(6.2.11)) den R – modül olarak $M/N \cong M^*/N^*$ olduğundan $(N:M) = (N^*:M^*)$ ve $\sqrt{(N:M)} = \sqrt{(N^*:M^*)}$ dir.

Böylece N, N^* asalımsı alt modüller olduğunda, aynı asal ideal ile ilişkilidirler.

Sonuç 4.5 P, R halkasının bir asal ideali, M bir R – modül ve $K \subseteq N$ olacak şekilde M nin iki alt modülü K ve N olsun.

N nin, M nin bir P -asalımsı alt modülü olması için gerek ve yeter koşul N/K nin, M/K nin bir P -asalımsı alt modülü olmasıdır.

([6],(4.2.21)) de yapıldığı gibi, bir modülün asalımsı alt modülleriyle kesir modülünün asalımsı alt modülleri arasındaki ilişkiyi kuralım.

R bir halka, S çarpımsal bir alt kümesi ve M bir R – modül olsun. Genişleme ve kısıtlamaları, doğal homomorfizmaya göre tanımlayalım.

Önerme 4.8 K, M nin bir alt modülü ve $K = K^{ec}$ ise

$$(K:_R M)^e = (K^e:_{S^{-1}R} S^{-1}M)$$

dir.

İspat. $\frac{r}{s} \in (K:_R M)^e$, ($r \in (K:_R M), s \in S$) alalım. $rM \subseteq K$ olduğundan,

$$\frac{r}{s} S^{-1}M \subseteq S^{-1}K = K^e$$

olduğu kolayca görülebilir. Tersine, $\frac{r}{s} \in (K^e:_{S^{-1}R} S^{-1}M)$ alalım.

Her $m \in M$ ve $t \in S$ için,

$$\frac{r}{s} \frac{m}{t} = \frac{rm}{st} \in K^e$$

ve

$$\frac{st}{1} \frac{rm}{st} = \frac{rm}{1} = \pi(rm) \in K^e \Rightarrow rm \in K^{ec} = K$$

olduğundan, $rM \subseteq K$ dir. Böylece, $r \in (K:_R M)$ ve $\frac{r}{s} \in (K:_R M)^e$ elde edilir.

Teorem 4.1 Önerme 4.8 deki gösterimler altında M ve $S^{-1}M$ nin alt modüllerinin genişleme ve kısıtlamaları için şu özellikler vardır:

1. K, M nin bir P -asalımsı alt modülü olsun.

$$K^e = S^{-1}M \Leftrightarrow P \cap S \neq \emptyset$$

dir.

2. K, M nin bir P -asalımsı alt modülü ve $P \cap S = \emptyset$ ise K^e de $S^{-1}M$ nin bir P^e -asalımsı alt modülüdür. Ayrıca, $K = K^{ec}$ dir.
3. $W, S^{-1}M$ nin bir P -asalımsı alt modülü ise W^c de, M nin $P^c \cap S \neq \emptyset$ olacak şekilde bir P^c -asalımsı alt modülüdür. Ayrıca, $W^{ce} = W$ dur.
4. $\{Q: Q, R \text{ nin } P - \text{asalımsı ideali, } P \cap S = \emptyset\}$ kümesiyle $\{Q: Q, S^{-1}R \text{ nin } P^e - \text{asalımsı ideali}\}$ kümesi arasında birebir eşleme vardır.

İspat.

1. K, M nin bir P -asalımsı alt modülü, $P = \sqrt{(K: M)}$ olsun.

$s \in P \cap S$ ise bir $n \in \mathbb{N}$ için, $s^n M \subseteq K$ olur. Her $m \in M$ ve $s' \in S$ için,

$$\frac{m}{s'} = \frac{s^n m}{s^n s'} \in S^{-1}K = K^e$$

dir. Tersine, $m \in M \setminus K, s \in S$ alalım. $\frac{m}{s} \in S^{-1}M = S^{-1}K$ ise $\frac{m}{s} = \frac{k}{s'}$ olacak şekilde $k \in K$ ve $s' \in S$ bulunabilir ve böylece bir $t \in S$ için

$$(ts')m = (ts)k \in K$$

ve K bir P -asalımsı alt modül olarak kabul edildiğinden, $P \cap S = \emptyset$ olursa $m \in K$ çelişkisi elde edilecekti.

2. K, M nin bir P -asalımsı alt modülü ve $P \cap S = \emptyset$ ise yukarıdaki ispattan, K^e nin $S^{-1}M$ nin bir has alt modülü olduğu anlaşılır. Önce, $K = K^{ec}$ olduğunu gösterelim. ([6], (8.1.27)) de $K \subseteq K^{ec} = K^s$ olduğu gösterilmişti. Bir $m \in K^s \setminus K$ olsa, bir $s \in S$ için $sm \in K$ olur. $P \cap S = \emptyset$ ve K alt modülü P -asalımsı olduğundan, $m \in K$ çelişkisi elde edilirdi. Şu halde, $K = K^{ec}$ dir.

Şimdi K^e nin bir P^e -asalımsı alt modül olduğunu gösterelim. $s, t \in S, r \in R$ ve $m \in M$ olsun.

$\frac{r m}{s t} = \frac{r m}{s t} \in K^e$ ve $\frac{m}{t} \notin K^e$ kabul edelim. Şu halde $m \notin K$ dir. $\frac{r m}{s t} = \frac{r m}{s t} \in K^e$ ise

$$\frac{st}{1} \frac{rm}{st} = \frac{rm}{1} = \pi(rm) \in K^e$$

olduğundan, $rm \in K^{ec} = K$ dir. K bir P -asalımsı alt modül ve $m \notin K$ olduğundan,

$$r \in P = \sqrt{(K:M)}$$

yani Önerme 4.8 e göre

$$\frac{r}{s} \in P^e = \left(\sqrt{(K:M)} \right)^e = \sqrt{(K:M)^e} = \sqrt{(K^e:_{S^{-1}R} S^{-1}M)}$$

elde edilir.

- 3.** $W, S^{-1}M$ nin bir P -asalımsı alt modülü olsun. $S^{-1}R$ nin P -asal ideali P, R nin $P \cap S = \emptyset$ olacak şekilde bir asal ideali olmak üzere, $P = P^e$ şeklindedir. $W^c = K$ dersek, ([6],(8.1.28)) den

$$W^{ce} = W = K^e$$

olur. Önerme 4. 8 den;

$$P^e = \sqrt{(K^e:_{S^{-1}R} S^{-1}M)} = \sqrt{(K:M)^e} = \left(\sqrt{(K:M)} \right)^e$$

yani, $P = \sqrt{(K:M)}$ dir. Şimdi, $K = W^c$ nin bir P -asalımsı alt modül olduğunu gösterelim.

$rm \in K = W^c$, $m \notin K = W^c$ olsun.

$$\pi(m) = \frac{m}{1} \notin K^e = W, \quad \frac{r}{1} \frac{m}{1} = \frac{rm}{1} \in K^e$$

ve W bir P -asalımsı alt modül olduğundan;

$$\frac{r}{1} = \pi(r) \in P^e = \sqrt{(K^e:_{S^{-1}R} S^{-1}M)} \Rightarrow r \in P = \sqrt{(K:M)} \text{ bulunur.}$$

- 4.** 2 ve 3 teki eşleme kullanılarak istenen elde edilir.

4.2 Asalımsı Ayrışım

Bu kısımda asalımsı alt modüller için birinci teklik ve ikinci teklik teoremleri verildikten sonra $R \times R$ ve R^n de asalımsı ayrışım incelenecektir.

Tanım 4.3 R bir halka, M bir R – modül ve K , M nin bir alt modülü olsun. K , M nin sonlu sayıda asalımsı alt modüllerinin kesişimi olarak yazılabiliyorsa K , M de asalımsı ayrışımaya sahiptir veya K ye ayrışabilir bir alt modül denir. [6]

Önerme 4.9 R bir halka, M bir R – modül ve K , M nin asalımsı ayrışımaya sahip bir alt modülü olsun. Yani, her $i = 1, 2, \dots, s$ için; N_i bir P_i -asalımsı alt modül olmak üzere ,

$$K = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_s$$

olsun. Şu halde;

$$\sqrt{(K:M)} = P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_s$$

dir. Ayrıca bir P asal ideali için,

$$(K:M) \subseteq P \Leftrightarrow P_i \subseteq P, \quad \exists i \in \{1, 2, \dots, s\}$$

sağlanır. Şu halde $(K:M)$ nin sonlu tane minimal asal ideali vardır ve bu minimal asal idealler; $P_1, P_2, \dots, P_s$ ler arasındadır. Gerçekten, $1 \leq i \leq s$ için, P_i asal idealinin $(K:M)$ nin bir minimal asal ideali olması için gerek ve yeter koşul P_i nin $\{P_1, P_2, \dots, P_s\}$ de bir minimal eleman olmasıdır. $P_1, P_2, \dots, P_s$ lerin farklı olması gerekmez.

İspat. K nin verilen asalımsı ayrışımından,

$$(K:M) = (N_1:M) \cap (N_2:M) \cap \dots \cap (N_s:M)$$

dir. Her $i = 1, 2, \dots, s$ için $\sqrt{(N_i:M)} = P_i$ olduğundan,

$$(K:M) \subseteq \sqrt{(K:M)} = P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_s$$

bulunur. P asal ideali, $P_1, P_2, \dots, P_s$ lerden birini kapsarsa $(K:M)$ idealini de kapsayacağı açıktır.

Tersine, $(K:M) = P$ olsun. Bu durumda;

$$v((K:M)) = v(\sqrt{(K:M)})$$

olduğundan;

$$\sqrt{(K:M)} = P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_s$$

dir. Şu halde bir $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ için $P_i \subseteq P$ dir. Ayrıca P , $(K:M)$ nin bir minimal asalı ise $P = P_i$ olur ve kendinde farklı hiçbir P_j kapsamaz. Tersine, kendinden farklı hiçbir P_j idealini kapsamayan P_i de $(K:M)$ nin bir minimal asalıdır.

Sonuç 4.6 R bir halka, M bir R -modül ve K , M nin bir alt modülü olsun.

$$K = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_s$$

K nin bir asalımsı ayrışımı ise

$$(K:M) = (N_1:M) \cap (N_2:M) \cap \dots \cap (N_s:M)$$

de $(K:M)$ nin bir asalımsı ayrışımıdır.

Önerme 4.10 R bir halka, M bir R -modül ve K , M nin bir alt modülü olsun. Her $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ için, N_i bir P_i asalımsı alt modülü olmak üzere,

$$K = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_t$$

Ve S, R nin bir çarpımsal alt kümesi olsun. $P_1, P_2, \dots, P_m$ lerin $(1 \leq m \leq t)$ hiçbirisi S ile kesişmeyecek ve geri kalanlar ise S ile kesişecek şekilde $P_1, P_2, \dots, P_t$ sıralansın. Şu halde K^S , K nin S bileşeni olmak üzere,

$$K^S = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_m$$

dir.

İspat. Her $j \in \{m+1, \dots, t\}$ için, $s_j \in S \cap P_j$ olsun.

$$a = s_{m+1} s_{m+2} \dots s_t$$

diyelim.

Böylece $a \in S$ ve her $j \in \{m+1, \dots, t\}$ için

$$a \in P_j = \sqrt{(N_j:M)}$$

olduğundan, $j = m+1, m+2, \dots, t$ için $a^v \in (N_j:M)$ olacak şekilde bir v tam sayısı bulunabilir. $s = a^v \in S$ için,

$$sM \subseteq N_{m+1} \cap N_{m+2} \cap \dots \cap N_t$$

olur.

Her $x \in N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_m$ için,

$$sx \in N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_m \cap N_{m+1} \cap N_{m+2} \cap \dots \cap N_t = K$$

ve böylece $x \in K^s$ bulunur. Yani, $N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_m \subseteq K^s$ dir.

Ters kapsamayı göstermek için, $y \in K^s$ alalım. $s^*y \in K$ olacak şekilde bir $s^* \in S$ vardır. Şu halde her bir $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ için,

$S \cap P_i = \emptyset$ olduğu göz önüne alınarak; $s^*y \in N$ ve $s^* \notin P_i$ bulunur. N_i , bir P_i -asalımsı modül olduğundan, her $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ için $y \in N_i$ dir. Böylece, $y \in N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_m$ dir. Şu halde,

$$K^s \subseteq N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_m$$

dir. Her iki kapsamadan istenen eşitlik elde edilir.

Tanım 4.4 R bir halka, M bir R -modül ve K da M nin asalımsı ayrışımına sahip bir alt modülü olsun. Yani, her $i = 1, 2, \dots, s$ için N_i bir P_i -asalımsı alt modül olmak üzere,

$$K = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_m$$

olsun. Eğer; aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa bu ayrışımaya bir **minimal asalımsı ayrışım** denir.

1. $P_1, P_2, \dots, P_s$ ler R nin farklı asal idealleri ve
2. Her $j = 1, 2, \dots, s$ için $\bigcap_{i \neq j}^s N_i \not\subseteq N_j$ dir.

2. deki ifade; her $j = 1, 2, \dots, s$ için $K \neq \bigcap_{i \neq j}^s N_i$ olarak da ifade edilebilir. Yani N_i lerin hiçbirisi, $K = \bigcap_{i=1}^s N_i$ ayrışımı için gereksiz değildir.

K nin herhangi bir asalımsı ayrışımını, gereksiz terimleri atarak ve ([6], önerme 9.1.13)e göre P -asalımsı alt modüllerin arakesiti de P -asalımsı olduğundan, P_j leri farklı yaparak minimal asalımsı ayrışımı elde etmek her zaman mümkündür.

Teorem 4.2 (Birinci Teklik Teoremi) R bir halka, M bir R -modül ve K, M nin bir alt modülü olsun.

$$K = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_r$$

ve

$$K = N_1^* \cap N_2^* \cap \dots \cap N_q^*$$

K nin iki minimal asalımsı ayrışımı olsun. Her $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ için N_i bir P_i -asalımsı ve her $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ için N_j^* bir P_j^* -asalımsı alt modül olsunlar. Şu halde $r = q$ ve

$$\{P_1, P_2, \dots, P_r\} = \{P_1^*, P_2^*, \dots, P_q^*\}$$

dir.[6]

İspat. İki kümenin rolü simetrik olduğundan, ispatı tamamlamak için,

$P \in \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ ise $P \in \{P_1^*, P_2^*, \dots, P_q^*\}$ olduğunu göstermek yeter. Gerekirse asal idealleri yeniden sıralayarak genelliği bozmadan, $P = P_m$ ve

$$\begin{aligned} P_1 \subseteq P, P_2 \subseteq P, \dots, P_m \subseteq P; P_{m+1} \not\subseteq P, P_{m+2} \not\subseteq P, \dots, P_r \not\subseteq P; \\ P_1^* \subseteq P, P_2^* \subseteq P, \dots, P_n^* \subseteq P; P_{n+1}^* \not\subseteq P, P_{n+2}^* \not\subseteq P, \dots, P_q^* \not\subseteq P \end{aligned}$$

kabul edilebilir. $S = R \setminus P$ alalım. ([2], Önerme 9.2.4) ten

$$K^S = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_m K = N_1^* \cap N_2^* \cap \dots \cap N_n^*$$

dir. P nin $P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*$ den hiçbirini olmadığını kabul edelim ve çelişki oluşturalım. P asal ideali $P_1, P_2, \dots, P_{m-1}$ veya $P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*$ den hiçbirinde kapsanmadığından, ([6], sonuç 2.2.8) e göre, P de olan fakat, $P_1, P_2, \dots, P_{m-1}, P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*$ lerin hiçbirinde olmayan bir $a \in R$ bulunabilir.

$$a \in \sqrt{(N_m : M)} = P$$

olduğundan, bir v tam sayısı için $a^v \in (N_m : M)$ dır. Böylece $(N_m : M a^v) = M$ dir.

Her $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ için, $(N_i : M a^v) = N_i$ ve her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için, $(N_i^* : M a^v) = N_i^*$ dir. Şu halde

$$\begin{aligned} (K^S : M a^v) &= (N_1 : M a^v) \cap \dots \cap (N_{m-1} : M a^v) \cap (N_m : M a^v) \\ &= N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{m-1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (K^S : M a^v) &= (N_1^* : M a^v) \cap \dots \cap (N_{n-1}^* : M a^v) \cap (N_n^* : M a^v) \\ &= N_1^* \cap N_2^* \cap \dots \cap N_n^* \\ &= N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_m \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{m-1} \cap N_{m+1} \cap N_{m+2} \cap \dots \cap N_r \subseteq N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{m-1} \cap N_m$$

olurdu. Bu ise $K = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_r$ nin minimal asalımsı ayrışım olmasıyla çelişirdi.

R bir halka, M bir R -modül ve Kasalımsı ayrışımı mevcut olan bir alt modül olsun. Her $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ için P_i ler farklıdır. Ayrıca $P_1, P_2, \dots, P_s$ asal idealleri K tarafından tek türlü belirlidir. $P_1, P_2, \dots, P_s$ asal ideallerine M nin K modülüne ilişkin asal idealleri denir ve

$$A(K) = \{P_1, P_2, \dots, P_s\}$$

ile gösterilir. Özel olarak, sıfır alt modülüne ilişkin asal ideallerin kümesine de, M ye ilişkin asallar denir ve $A(M)$ ile gösterilir.

Önerme 4.11 R bir halka, M bir R -modül ve K asalımsı ayrışımı mevcut olan bir alt modül olsun.

$$A(M/K) = A(K)$$

dır.

İspat. K nın minimal asalımsı ayrışımı N_i ler bir P_i -asalımsı alt modül olmak üzere, $K = \bigcap_{i=1}^s N_i$ ise M/K bölüm modülünün alt modülleri ile M nin K yı kapsayan alt modülleri arasındaki bire bir eşlemeden, M/K nın sıfır alt modülünün minimal asalımsı ayrışımı da,

$$0 = \bigcap_{i=1}^s (N_i/K)$$

olur. N_i/K ler de bir P_i -asalımsı alt modül olduğundan istenen elde edilir.

Sonuç 4.7 R bir halka ve M alt modüllerinin asalımsı ayrışimleri mevcut olan bir R -modül olsun. N alt modülünün P -asalımsı olması için gerek ve yeter koşul $A(M/N) = \{P\}$ olmasıdır.

Tanım 4.5 R bir halka M bir R -modül ve K da bir alt modülü olsun. Bir $P_i \in A(K)$ ideali, K ya ilişkin hiçbir asal ideali kapsamıyorsa, yani $A(K)$ nın bir minimal elemanı ise, P_i ye K alt modülünün bir minimal ya da izole asal ideali denir. Minimal asalların dışında; $P_1, P_2, \dots, P_s$ den geri kalanlara da K nın **gömülmüş asal idealleri** denir.[6]

Sonuç 4.8 M bir R -modül ve K asalımsı ayrışımı mevcut olan bir alt modül olsun. K nın minimal asal idealleri ile $(K: M)$ nin minimal asal idealleri aynıdır.

M bir R -modül ve K, M nin asalımsı ayrışımına sahip bir alt modülü ve her $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ için, N_i bir P_i -asalımsı alt modül olmak üzere,

$$K = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_s$$

K nın bir minimal asalımsı ayrışımı olsun. Şu halde

$$A(K) = \{P_1, P_2, \dots, P_s\}$$

dir. Bu kümenin minimal elemanları kümesi

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_v \leq s$$

olmak üzere, $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_v}\}$ de minimal asal ideallerin kümesidir.

$$N_{i_1}, N_{i_2}, \dots, N_{i_v}$$

ye K nın minimal bileşeni değildir.

Şimdi, bir alt modülün asalımsı ayrışımında, ikinci teklik teoremini gösterelim.

Teorem 4.3 (İkinci Teklik Teoremi) R bir halka, M bir R -modül ve K, M nin bir alt modülü olsun. Her $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ için N_j ve N_j^* ler P_j -asalımsı alt modüller olmak üzere K nın iki minimal asalımsı ayrışımı

$$K = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_s = N_1^* \cap N_2^* \cap \dots \cap N_s^*$$

olsun. $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_v}\}$ minimal asalların kümesi ise,

$$N_{i_1} \cap N_{i_2} \cap \dots \cap N_{i_v} = N_{i_1}^* \cap N_{i_2}^* \cap \dots \cap N_{i_v}^*$$

dir.[6]

İspat. R halkasının, $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_v}$ asal idealler kümesinde içermeyen elemanlarını S ile gösterelim. S çarpımsal kapalı bir kümedir. P, K alt modülüne ilişkin bir asal ideal ve $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_v}$ asal ideallerinden farklı ise P asal ideali $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_v}$ asal ideallerinin hiçbirisi tarafından içerilmez. Şu halde ([6], Sonuç 2.2.8) e göre, $a \notin P_{i_1}, a \notin P_{i_2}, \dots, a \notin P_{i_v}$ ve $a \in P$ olacak şekilde bir $a \in R$ vardır. Yani, $S \cap P \neq \emptyset$ dir. ([6], Önerme 9.2.4) den,

$$K^S = N_{i_1} \cap N_{i_2} \cap \dots \cap N_{i_v}$$

dir. Benzer şekilde,

$$K^S = N_{i1}^* \cap N_{i2}^* \cap \dots \cap N_{iv}^*$$

dir. Sonuç olarak

$$N_{i1} \cap N_{i2} \cap \dots \cap N_{iv} = N_{i1}^* \cap N_{i2}^* \cap \dots \cap N_{iv}^*$$

dir.

Sonuç 4.9 R bir halka, M bir R -modül ve K , M nin bir alt modülü olsun. Her $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ için N_j ve N_j^* ler P_j -asalımsı alt modüller olmak üzere, K nin iki minimal asalımsı ayrışımı

$$K = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_s = N_1^* \cap N_2^* \cap \dots \cap N_s^*$$

olsun.

$P_j \in A(K)$ bir minimal elaman ise $N_j = N_j^*$ dir.

Şimdi; yukarıda yaptığımız asalımsı ayrışımı bir uygulama olsun diye R bir temel ideal bölgesi olmak üzere M yi $R \times R$ olarak M nin alt modüllerinin asalımsı ayrışımını inceleyelim:

Tanım 4.6 N , M nin bir öz alt modülü olsun. M içindeki N nin yine M içindeki P_i asalımsı Q_i

$(1 \leq i \leq n)$ olacak şekildeki $N = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ asalımsı ayrışımına aşağıdaki koşullar sağlanırsa minimal tam (precisely) denir.

i. $P_1, P_2, \dots, P_n$; R nin n farklı asal idealidir ve

ii. Tüm $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$Q_j \not\subseteq \bigcap_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n Q_i$$

dir.[9]

Uyarı 4.1 N, M nin bir öz alt modülü olsun. ([7] 9.27 ve 9.31 den)

N, M de minimal asalımsı ayrışımı sahiptir. M deki N nin bir minimal asalımsı ayrışımı olsun.

Bu takdirde, ([7] 9.31den) R nin bir P -asal ideali için

$$P \in \{P_1, P_2, \dots, P_n\} \Leftrightarrow P \in \text{Ass}_R(M/N)$$

dir.

Lemma 4.1 p , R nin bir asal elemanı olsun. Bu takdirde; r pozitif tam sayı olmak üzere $p^r M$, M nin bir asalımsı alt modülüdür.

Şimdi; a ve b nin en büyük ortak böleni 1 den farklı olduğunda M nin alt modüllerinin asalımsı ayrışımı $(a, b)R$ formunda verilebilir.

Önerme 4.12 Üreteçlerinin en büyük ortak böleni 1 den farklı olan N , M nin devirli alt grubu olsun. Bu takdirde, $p_1, p_2, \dots, p_s$ ler R nin ayrık asal elemanları ve N_1 , N yi içeren M nin bir asal alt modülüdür.

İspat. $N = (a, b)R$ olsun ve a ile b nin en büyük ortak böleninin d olduğunu ve bu d nin farklı asal çarpanlarının $p_1, p_2, \dots, p_s$ olduğunu göz önüne alalım. Bu takdirde; $d = p_1^{r_1} \dots p_s^{r_s}$ olur. Şimdi; $a = da_1$ ve $b = db_1$ olduğunda N nin asalımsı ayrışımı için

$$(p_1^{r_1} M) \cap \dots \cap (p_s^{r_s} M) \cap ((a_1, b_1)R)$$

diyebiliriz.

$$(x, y) \in (p_1^{r_1} M) \cap \dots \cap ((a_1, b_1)R)$$

olsun.

Bu takdirde; $u_1, u_2, \dots, u_s, v_1, v_2, \dots, v_s \in R$ olduğunda

$$\begin{aligned} x &= p_1^{r_1} u_1 = p_2^{r_2} u_2 = \dots = p_s^{r_s} u_s = a_1 t_1, \\ y &= p_1^{r_1} v_1 = p_2^{r_2} v_2 = \dots = p_s^{r_s} v_s = b_1 t_1 \end{aligned}$$

dir.

Böylece $(x, y) \in (a, b)R = N$ elde ederiz. Bu da ispatın tersini içerdiğinde açık olarak tamamlar.

Sonuç 4.10 N , Önerme 4.1 deki gibi tanımlansın. Yani; üreteçlerinin en büyük ortak böleni 1 den farklı olan N , M nin devirli alt grubu olsun.

Bu takdirde; P_i , R de ki asal eleman p_i ile üretilen asal ideal olmak üzere, (Her $i = 1, 2, \dots, n$) $\text{Ass}_R(M/N) = \{0, p_1, \dots, p_n\}$ olur.

İspat. Önerme 4.12 ve $\sqrt{(a_1, b_1)R} : M = 0$ olmasından ([7] 9.33(ii))

Şimdi N yi 2 üreteçli alalım ve N nin asalımsı ayrışımını elde etmek için şu lemmayı verelim:

Lemma 4.2 $N = (a, b)R + (c, d)R$, $a, b, c, d \in R$ M nin bir öz alt modülü olsun. $\Delta = ad - bc$ de R nin sıfırdan farklı bir elemanı olsun. Bu takdirde; $r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere Δ nın herhangi bir p^r çarpanı için;

$$Q = \{(x, y): p^r | ay - bx \text{ ve } p^r | cy - dx\}$$

M nin bir asalımsı alt modülüdür.

Bu bölümle ilgili ana teoremi verebiliriz:

Teorem 4.4 (Asalımsı Ayrışım)

Durum Lemma 4.2 dekiyle aynı olsun. $r_1, r_2, \dots, r_t \in \mathbb{Z}^+$ ve $p_1, \dots, p_t$ ler R de ayrık asal elemanlar olduğunda $\Delta = p_1^{r_1} \dots p_t^{r_t}$ ise

$$K_i = \{(x, y): p_i^{r_i} | ay - bx \text{ ve } p_i^{r_i} | cy - dx\} \quad \forall i \quad (1 \leq i \leq t)$$

için N ,

$$N = \bigcap_{i=1}^t K_i$$

biçiminde bir asalımsı ayrışımına sahiptir.[9]

İspat.

$K = \bigcap_{i=1}^t K_i$ alalım. Bu takdirde $N \subseteq K$ açıktır.

$(x, y) \in K$ olsun. Bu takdirde; $1 \leq i \leq t$ olacak şekilde

$\forall i$ için $ay - bx = p_i^{r_i} t_i$ ve $cy - dx = p_i^{r_i} s_i$ olacak şekildeki $t_i, s_i \in R$ mevcuttur.

Bu takdirde; bir $t, s \in R$ için $ay - bx = \Delta t$ ve $cy - dx = \Delta s$ elde ederiz.

Şimdi sonucumuz önerme 4.13 le devam eder:

Önerme 4.13 $N = (a, b)R + (c, d)R$ $a, b, c, d \in R$ olmak üzere M nin bir öz alt modülü olsun. $\Delta = ad - bc$ olarak tanımlayalım ve $\Delta M \subseteq N$ kabul edelim.

Bir asal p elemanı için $pM \subseteq N$ ve p ile q aralarında asal olmak üzere $\Delta = pq$ kabul edelim. Bu takdirde; N nin asal olması için gerek ve yeter koşul

$$N = \{(x, y): p|ay - bx \text{ ve } p|cy - dx\}$$

olmasıdır.

Sonuç 4.11 N , Teorem 4.4 deki gibi tanımlansın. Bu takdirde; $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için R nin p_i asal elemanı ile üretilen asal ideal P_i ile gösterilmek üzere;

$$\text{Ass}_R(M/N) = \{p_1, \dots, p_t\}$$

dir.

İspat. ([7], (9.33) (ii))

4.3 R^n de Asalımsı Ayrışım

M bazı $n \geq 2$ tam sayıları için temel ideal bölgesi R üzerinde serbest bir R^n modül olsun.

[7] den bir Noetherian modülün her alt modülü bir asalımsı ayrışımına sahiptir ve aynı zamanda M bir Noetherian R -modüldür.

Teorem 4.5 $N = Ra_1 + Ra_2 + \dots + Ra_n$ M nin bir öz alt modülü olsun. Bazı farklı asal $p_k \in R$ elemanları; α_k pozitif tam sayıları ve $u \in R$ birim elemanı için $A = (a_{ij})$ ve $\Delta = up_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ olsun.

Bu takdirde; N ,

$$Q_k = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M \mid p_k^{\alpha_k}, \sum_{i=1}^n x_i a'_{ij} \ (1 \leq j \leq n) \text{ yi böler} \right\}$$

olacak şekilde $N = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_s$ minimal asalımsı ayrışımına sahiptir.

Not 4.1 $A' = (a'_{ij})$ A nın ek matrisidir.

İspat. $1 \leq k \leq s$ için $\sqrt{(Q_k: M)} = R_{p_k}$ ile Q_k nin M nin bir asalımsı alt modülü olduğunu kontrol etmek kolaydır.

([10], Önerme 2.2) den, $N \subseteq Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_s$ dir.

Şimdi; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_s$ olsun. Bu takdirde; her $1 \leq k \leq s$ için $p_k^{\alpha_k}$, $\sum_{i=1}^n x_i a'_{ij}$ ($1 \leq j \leq n$) yi böler. Yine ([10], Önerme 2.2) den $x \in N$ dir.

Sonuç 4.12 $\Delta \neq 0$ ile N , M nin bir öz alt modülü olsun. bu takdirde N nin M nin bir asalımsı alt modülü olması için gerek ve yeter koşul bir $u \in R$ birim, $p \in R$ asal elemanı ve α pozitif tam sayısı için $\Delta = up^\alpha$ olmasıdır.

$\Delta = 0$ ile $N \neq 0$ in M nin bir alt modülü olduğunu göz önüne alalım. M nin bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bazı ve R nin $N = Rd_1x_1 + \dots + Rd_rx_r$ olacak şekildeki sıfırdan farklı $d_1, \dots, d_r$ ($r \leq n$) elemanları vardır.

$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ olsun.

Bu takdirde ([10], Sonuç 2.3) ten R nin bir u birimi için $\det(x_{ij}) = u$ dur.

$\Delta = 0$ olduğunda $r < n$ dir. R nin bir u birimi, p_k asal elemanı ve $\alpha_{ik} \geq 0$ ($1 \leq k \leq s$) için $d_i = up_1^{\alpha_{i1}} \dots p_s^{\alpha_{is}}$ ($1 \leq i \leq r$) olduğunu göz önüne alalım. $Q = Rx_1 + \dots + Rx_r$ olsun.

([10], Teorem 2.5) ten Q asaldır ve böylece M nin bir asalımsı alt modülüdür.

Şimdi; $Q_k = Rp_k^{\alpha_{1k}}x_1 + \dots + Rp_k^{\alpha_{rk}}x_r + Rx_{r+1} + \dots + Rx_n$ ($1 \leq k \leq s$) olsun. Bu takdirde; Sonuç 4.12 den Q_k M nin bir asalımsı alt modülüdür. $N \subseteq Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_s$ olduğu açıktır.

Şimdi $y \in Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_s$ olsun ve $a_i \in R$ için $y = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ olduğunu göz önüne alalım. $y \in Q$ olduğunda $a_{r+1} = \dots = a_n = 0$ elde ederiz.

Ayrıca; $y \in Q_k$ ($1 \leq k \leq s$) olduğunda her $1 \leq i \leq s$ için $p_k^{\alpha_{ik}}$ yi böler ve böylece d_i, a_i yi böler diyebiliriz. Bu nedenle $y \in N$ dir.

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 4.6 $\Delta = 0$ ile $N \neq 0$ M nin bir alt modülü olsun. Bu takdirde; $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ yukarıdaki gibi tanımlandığında $N = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_s$ N nin bir minimal asalımsı ayrışımıdır.

Sonuç 4.13 $\Delta = 0$ ile N, M nin bir alt modülü ve $A = (a_{ij})$ olsun. Bu takdirde;

$N = M$ olması için gerek ve yeter koşul N nin asal olmasıdır.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada delta asalımsı idealler anlatılarak görünüşte aralarında çok farklar var gibi görünen asal ve asalımsı ideallerin benzer özelliklerde tanımlanabileceği gösterilmiştir.

Asalımsı alt modüller ve asalımsı ayrışım incelenmiş, bunlara ait temel tanım ve teoremler verilmiştir. Aynı zamanda asalımsı ayrışımın modülün değişik kuvvetlerindeki özellikleri incelenmiştir.

Bundan sonra yapılacak çalışmalarda delta asalımsı ideallerdeki genişlemelerin farklı özellikleri araştırılabilir ve asalımsı ayrışımın modülün sonsuz kuvvetinde de tanımlanabilmesi araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Asar, A.O., Arıkan, A. ve Arıkan, A., (2009). Cebir, Eflatun Yayınevi, Ankara.
- [2] Dongsheng, Z., “ δ - Primary Ideals of Commutative Rings”, (2000). Mathematics Subject Classification, 13C12.
- [3] Çallıalp, F., (2001). Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [4] Ağargün, G., Aygör, N., Ersoy, B. ve Alan, M., (2002). Soyut Cebir, Y.T.Ü. Vakfı Yayınları, İstanbul.
- [5] Bayraktar, M., (2006). Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Gazi Kitapevi, Ankara.
- [6] Tekir, Ü. ve Çallıalp, F., (2009). Değişmeli Halkalar ve Modüller, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [7] Sharp, R. Y., (1990). Steps in Commutative Algebra, Cambridge University Press, New York.
- [8] Northcott, D.F., (1968). Lessons on Rings, Modules and Multiplicity, Cambridge University Press, New York.
- [9] Tıraş, Y., Harmancı, A., (2000). “On Prime Submodules and Primary Decomposition”, Czechlovak Mathematical Journal, 50 (125):83-90.
- [10] Amini, A., Amini, B., Sharif, H., (2006). “Prime and Primary Submodules of Certain Modules”, Czechlovak Mathematical Journal, 56(131):641-648.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Ayşe Nur TOMRUK
Doğum Tarihi ve Yeri :23.02.1989 FATİH
Yabancı Dili :İngilizce
E-posta :a.nurtomruk@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2015
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2012
Lise	Fen Bilimleri	Pertevniyal Anadolu Lisesi	2007