

**T.C.
ADYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DELTA-FONKSİYON KATSAYILI AĞIRLIKLI
STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ İÇİN
REGÜLERİZE OLUNMUŞ İZ FORMÜLLERİ ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS

ABDULLAH KARAKUŞ

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Manaf MANAFLI**

ADYAMAN, 2023

ÖZET

DELTA-FONKSİYON KATSAYILI AĞIRLIKLIL STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ İÇİN REGÜLERİZE OLUNMUŞ İZ FORMÜLLERİ ÜZERİNE

Abdullah KARAKUŞ

Matematik Anabilim Dalı

Adıyaman Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, 01/2023

Danışman: Prof. Dr. Manaf MANAFLI

Bu çalışmanın birinci kısmında, diferansiyel operatörler, Sturm-Liouville operatörü ve ters spektral problemler ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık kullanılan temel tanım ve teoremler açıklanmıştır. Üçüncü bölümde Sturm-Liouville operatörü için spektral teoriye giriş yapılmış, spektral analizin temel problemleri anlatılmış, iz formülleri ile ilgili genel problemler verilmiş ve Sturm-Liouville operatörü için regülerize olmuş iz formülleri ile ilgili genel bilgiler açıklanmıştır. Bir diferansiyelin iz kimliği, diferansiyel operatörün spektral yapısı, öz değerlerin sayısal hesaplanması, ters problemler hakkında bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölümde Delta-Fonksiyon katsayılı ağırlıklı Sturm-Liouville problemleri için regülerize olunmuş iz formülleri üzerine operatörler tanımlanmış, spektral karakteristik özelliklerinden bahsedilmiş ve iz probleminin çözümü yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville operatörü; Özdeğer; Özfonksiyon; İz formülleri; Ağırlıklı Sturm-Liouville problemi.

ABSTRACT

ON REGULARIZED TRACE FORMULAS FOR WEIGHTED STURM-LIOUVILLE WITH COEFFICIENT DELTA-FUNCTION

Abdullah KARAKUŞ

Department of Mathematics

Adıyaman University, Graduate Education Institute, 01/2023

Supervisor: Prof. Dr. Manaf MANAFLI

In the first part of this study, information about differential operators, Sturm-Liouville operator and inverse spectral problems are given. In the second chapter, the basic definitions and theorems that are frequently used in the spectral theory of differential operators are explained. In the third chapter, the spectral theory for the Sturm-Liouville operator is introduced, the basic problems of spectral analysis are explained, the general problems about the trace formulas are given and the general information about the regularized trace formulas for the Sturm-Liouville operator is explained. Information about trace identity of a differential, spectral structure of differential operator, numerical calculation of eigenvalues, inverse problems are given. In the fourth chapter, operators are defined on the regularized trace formulas for Delta-Function coefficient weighted Sturm-Liouville problems, their spectral characteristics are mentioned and the trace problem is solved.

KeyWords: Sturm-Liouville operators; Eigenvalue; Eigenfunction; Trace formulas; Weighted Sturm-Liouville problem.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesi sırasında bilgi, öneri ve yardımını esirgemeyen, çalışmamda bana her türlü desteği veren danışman hocam sayın Prof. Dr. Manaf MANAFLI' ya en içten duygularımla teşekkür ederim.

Abdullah KARAKUŞ



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Adıyaman Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Abdullah KARAKUŞ

İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SAYFALAR VE KISALTMALAR.....	viii
1.GİRİŞ.....	1
2.TEMEL KAVRAMLAR.....	2
3.MATERYAL VE YÖNTEM	5
3.1. Sturm-Liouville Operatörü.....	5
3.2.İz Formülleri	14
4.BULGULAR VE TARTIŞMALAR.....	20
4.1 Delta-Fonksiyon Katsayılı ağırlıklı Sturm-Liouville Problemleri İçin.....	20
Regülerize İz Formülleri Üzerine.....	20
4.2.Problemle İlgili Hilbert Uzayının İnşası ve Spektral	21
Karakteristiklerin Bazı Özellikleri	21
4.3. İz problemi	27
4.4.Sonuç.....	29
KAYNAKLAR.....	30
ÖZGEÇMİŞ	

SAYFALAR VE KISALTMALAR

Simgeler

α	: Normlaştırıcı Sayılar
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$C[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında sürekli ve reel değerli tüm fonksiyonların uzayı
H	: Hilbert Uzayı
L	: Lineer Operatör
L^*	: L operatörünün eşleniği
$L^2[a, b]$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
O, o	: Asimptotik davranışları tarif etmek için kullanılan simgeler
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$W(f, g)$	: Wronskian Determinantı
$y(x, \lambda)$	: Özfonksiyon
λ	: Özdeğer
$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$	: Özdeğerlerin cümlesi

Kısaltmalar

SDP	: Sınır değer problemi
-----	------------------------

1. GİRİŞ

Sonlu boyutlu bir uzayda, bir operatörün sonlu bir izi vardır. Bir matris için özdeğerlerin toplamını, matrisin izini yani ana köşegendeki elemanların toplamını hesaplamanın kolay olduğu iyi bilinmektedir.

Ancak, sonsuz boyutlu bir uzayda, genel olarak sıradan diferansiyel operatörlerin sonlu bir izi yoktur. 1953'te Gelfand ve Levitan [1], $q(x)$ fonksiyonunun sürekli türevlenebilirliğini varsayarak, düzenleştirilmiş iz için aşağıdaki dikkate değer formülü elde ettiler:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\lambda_n - n^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) dx \right] = \frac{q(0) + q(\pi)}{4} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} q(x) dx$$

Burada, λ_n aşağıdaki operatörün özdeğerleridir:

$$-y'' + q(x) = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0.$$

Bu formül, belirli operatörlerin araştırılmasından başlayan ve ayrıca genel formda ayırık operatörlerin düzenli izlerinin analizini benimseyen büyük ve çok önemli bir teoriye yol açtı. Kısa sürede birçok yazar dikkatlerini iz teorisine çevirmiş ve ilginç sonuçlar elde etmiştir. Bu çalışma birçok yazar tarafından devam ettirilmiştir. Bu konunun mevcut durumu ve bununla ilgili çalışmalar kapsamlı bir araştırma raporunda sunulmaktadır [2]. Diferansiyel denklemler için gerekli iz formülleri [1,3,4,5,6,7]'de bulunur. Ancak, tekil potansiyele sahip Sturm-Liouville operatörleri için düzenli iz üzerine az sayıda çalışma vardır (bkz. [2,8,9,10,11,12]). Bir diferansiyel operatörün iz kimliği, diferansiyel operatörün spektral yapısını derinlemesine ortaya çıkarır ve özdeğerlerin sayısal hesaplanmasında, ters problemde, çözümler teorisinde ve integrallenebilir sistem teorisinde önemli uygulamalara sahiptir (bkz. [13,14]).

2. TEMEL KAVRAMLAR

Hilbert uzayları sonsuz boyutlu normlu uzayların en basit tipi olmak üzere Fonksiyonel Analizin teorik ve pratik uygulamalarında belli rol oynamaktadır. Euclid uzayları ile büyük benzerliğe sahip olan Hilbert uzaylarının böyle basitliği vektör cebirinde tanımlanan iç çarpım ve diklik kavramlarının bu uzaylar için genelleştirilebilmesidir.

Tanım 2.1. $K = R$ veya C olmak üzere X bir vektör uzayı olsun.

$$(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow K$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sahip ise $(\cdot, \cdot)$ 'ye X üzerinde bir iç çarpım, $(X, (\cdot, \cdot))$ ikilisine de iç çarpım uzayı (Hilbert uzayı) denir.

- i) Her $x \in X$ için $(x, x) \geq 0$ ve $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- ii) Her $x, y \in X$ için $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (kompleks eşleniği);
- iii) Her $x, y \in X$ ve $a \in K$ için $(ax, y) = a(x, y)$;
- iv) Her $x, y, z \in X$ için $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

$K = R$ halinde $(x, y) = (y, x)$ dir ve (i) ve (iv) ifadelerinden $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall a, b \in K$ için

- a) $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$;
- b) $(x, ay) = \overline{a}(x, y)$;
- c) $(x, ay + bz) = \overline{a}(x, y) + \overline{b}(x, z)$;

formüllerinin doğruluğu kolay bir şekilde gösterilebilir.

Tanım 2.2. $L^2 [a, b]$ uzayı

$$L^2[a, b] = \left\{ x(s): \int_a^b [x(s)]^2 ds < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım,

$$(f, g) = \int_a^b f(s) \overline{g(s)} ds$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3. Bir $X = (X, d)$ metrik uzayında (x_n) dizisi ele alalım. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall m, n > N$ için

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.4. $X = (X, d)$ metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise yani $x_n \rightarrow x \in X$ ise (X, d) metrik uzayına tamdır denir.

Tanım 2.5. X boş olmayan bir küme ve K cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olsun.

$$\begin{aligned} +: X \times X, & \quad (x, y) \rightarrow x + y, \\ \cdot: K \times X & \rightarrow X, \quad (m, x) \rightarrow mx, \end{aligned}$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her $x, y, z \in X$ ve $m, n \in K$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

- i. $x + y = y + x$;
- ii. $x + (y + z) = (x + y) + z$;
- iii. $\forall x \in X$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in X$ vardır;
- iv. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in X$ vardır;
- v. $\forall x \in X$ için $1 \cdot x = x$;
- vi. $m(x + y) = mx + my$;
- vii. $(m + n)x = mx + nx$;
- viii. $(mn)x = m(nx)$.

Bu durumda X 'e K üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzayı) ve elemanlarına da vektör veya nokta adı verilir. $K = \mathbb{R}$ alınırsa X 'e bir reel vektör uzayı, $K = \mathbb{C}$ alınırsa X 'e bir kompleks vektör uzayı adı verilir.

Tanım 2.6. X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D 'nin her elemanına Y 'nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D 'den Y 'ye bir operatör veya dönüşüm denir. A operatörünün x 'e karşılık getirdiği elemanı $A(x)$ ile gösterilir. A operatörünün $x \in D$ 'yi $A(x) \in Y$ 'ye götürdüğünü belirtmek için, $A: D \rightarrow Y$ gösterimi kullanılır.

Bu durumda D 'ye A operatörünün tanım kümesi denir ve genellikle $D(A)$ şeklinde gösterilir.

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A) = \{y \in Y: y = A(x), x \in D(A)\}$$

kümesine A operatörünün değer (yada görüntü) kümesi denir. A operatörünün yaptığı bu işlem

$$X \supset D(A) \xrightarrow{A} \mathfrak{R}(A) \subset Y$$

şeklinde veya kısaca $A: X \rightarrow Y$ şeklinde gösterilir. Bu gösterimde

$$D(A) \neq \mathfrak{R}(A) \neq Y$$

olabilir.

Tanım 2.7. $A: S(x, \delta) \rightarrow S(Ax, \varepsilon)$ olsun. $|x - x_0| < \delta$ için $|Ax - Ax_0| < \varepsilon$ ise A operatörüne sürekli olarak denir.

Tanım 2.8. H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $L: H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer, $L^*: H_2 \rightarrow H_1$ operatörü $\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle$ şartını sağlıyorsa L^* operatörüne L nin eşleniği denir. Eğer $L = L^*$ ise L operatörüne *öz eşlenik operatör* denir.

Tanım 2.9. $L, D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri $y(x, \lambda)$ fonksiyonuna ise λ ya karşılık gelen özfonksiyon denir.

Tanım 2.10. $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: (A - \lambda I)^{-1} \in L(X)\}$ kompleks sayılar kümesine A operatörünün regüler değerler (veya rizolventi) kümesi, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ kümesine ise A operatörünün *spektrumu* denir. $\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda I)^{-1}$ operatörüne A operatörünün rizolventisi (veya çözücü operatörü) adı verilir.

Tanım 2. 11. $x \rightarrow 0$ veya $(x \rightarrow \infty)$ iken eğer $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$ $(x) = f(x) = o(g(x))$ ve $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ sınırlı ise $f(x) = O(g(x))$ olarak gösterilir.

Bu bölümdeki tanım ve teoremler [15]' den alınmıştır.

3.MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde sonlu aralıktaki Sturm Liouville operatörleri için spektral teoriye giriş yapılacaktır. Bölüm 3.1 de spektral analizin düz problemleri anlatılacaktır. Bölüm 3.2 de ise Sturm-Liouville operatör için regülerize olmuş izin hesaplanmasından bahsedeceğiz.

3.1. Sturm-Liouville Operatörü

Aşağıdaki $L = L(q(x), h, H)$ sınır değer problemini göz önüne alalım.

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi \quad (3.1)$$

$$U(y) = y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) = y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \quad (3.2)$$

burada λ spektral parametre, $q(x)$, H , h reel sayı ve $q(x) \in L_2(0, \pi)$. Burada l Sturm-Liouville operatörüdür.

Tanım 3.1. L deki λ parametresinin değerleri, sıfırdan farklı çözümleri oluşturduğu takdirde λ 'ya özdeğerler ve bunlara karşılık gelen çözümlere de özfonksiyonlar denir. Özdeğerlerin dizisi L nin spektrumlarına denktir.

Biz bu bölümde L nin basit spektral özelliklerini elde edeceğiz ve özdeğerlerin ve özfonksiyonların asimptotik davranışlarını araştıracağız.

Başlangıç şartları altında (3.1) in çözümleri $C(x, \lambda), S(x, \lambda), \varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)$ olsun ve aşağıdaki şartları sağlasın:

$$C(0, \lambda) = 1, \quad C'(0, \lambda) = 0, \quad S(0, \lambda) = 0, \quad S'(0, \lambda) = 1$$

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h, \quad \psi(\pi, \lambda) = 1, \quad \psi'(\pi, \lambda) = -H$$

Her tespit edilmiş x için $\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda), C(x, \lambda), S(x, \lambda)$ x e bağlı fonksiyonlardır.

$$U(\varphi) = \varphi'(0, \lambda) - h\varphi(0, \lambda) = 0, \quad V(\psi) = \psi'(\pi, \lambda) + H\psi(\pi, \lambda) = 0 \quad (3.3)$$

şartları dikkate alındığında L 'nin karakteristik fonksiyonu

$$\Delta(\lambda) = \langle \psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda) \rangle \text{ ye} \quad (3.4)$$

biçiminde olur.

$\langle y(x), z(x) \rangle = y(x).z'(x) - y'(x).z(x)$ ifadesi y ve z nin Wronskianıdır.

Liouville'nin formülü $\langle \psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda) \rangle$ Wronskianı x bağılı değildir [16]. (3.4)' de $x = 0$ ve $x = \pi$ yazılırsa

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi) = -U(\psi) \quad (3.5)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1. Karakteristik fonksiyonun $\{\lambda_n\}$ sıfırları L nin sınır değer probleminin özdeğerleri ile çakışır. $\varphi(x, \lambda_n)$ ve $\psi(x, \lambda_n)$ fonksiyonları özfonksiyonlardır ve aşağıdaki şartı sağlayan bir ardışık $\{\beta_n\}$ ler vardır:

$$\Psi(x, \lambda_n) = \beta_n \varphi(x, \lambda_n) \quad \beta_n \neq 0 \quad (3.6)$$

İspat: $\lambda_0, \Delta(\lambda)$ nın bir sıfırı olsun. (3.3) ve (3.5) sayesinde $\psi(x, \lambda_0) = \beta_0 \cdot \varphi(x, \lambda_0)$ olur ve fonksiyonlar $\psi(x, \lambda_0), \varphi(x, \lambda_0)$ fonksiyonları (3.2) değer şartlarını sağlar. Bundan dolayı λ_0 bir özdeğer ve $\psi(x, \lambda_0), \varphi(x, \lambda_0)$ fonksiyonları da buna karşılık gelen özfonksiyonlardır.

λ_0 L' nin bir özdeğeri olsun ve y de buna karşılık gelen özfonksiyon olsun. $U(y_0) = V(y_0) = 0$ olur buradan $y_0(0) \neq 0$ olur. $y_0(0) = 1$ yazabiliriz. $y_0'(0) = h$ ve bu yüzden $y_0(x) = \varphi(x, \lambda_0)$ dir ve (3.5) bize $\Delta(\lambda_0) = V(\varphi(x, \lambda_0)) = V(y_0(x)) = 0$ ifadesini verir. Dolayısıyla biz her özdeğere bir özfonksiyon karşılık geldiğini kanıtlamış olduk.

Bölüm boyunca aşağıdaki gösterimleri kullanacağız:

$$a_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) \cdot dx \quad (3.7)$$

$\{a_n\}$ sayıları normlaştırıcı sayıları ve $\{a_n, \lambda_n\}$ sayıları da L nin spektral verileridir.

$$\text{Lemma 3.1. } \beta_n \cdot a_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n) \quad (3.8)$$

ifadesi (3.6) yardımıyla β_n sayıları tanımlanır ve $\dot{\Delta}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda)$

İspat: $-\psi''(x, \lambda) + q(x) \cdot \psi(x, \lambda) = \lambda \cdot \psi(x, \lambda) - \varphi''(x, \lambda_n) + q(x) \cdot \varphi(x, \lambda_n) = \lambda_n \cdot \varphi(x, \lambda_n)$ dır. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \langle \psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda_n) \rangle &= \psi(x, \lambda) \cdot \varphi''(x, \lambda_n) - \psi''(x, \lambda) \cdot \varphi(x, \lambda_n) \\ &= (\lambda - \lambda_n) \cdot \psi(x, \lambda) \cdot \varphi(x, \lambda_n) \end{aligned}$$

ifadesi ve (3.5) yardımıyla

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_n) \int_0^\pi \psi(x, \lambda) \cdot \varphi(x, \lambda_n) dx &= \langle \psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda_n) \rangle \Big|_0^\pi \\ &= \varphi'(\pi, \lambda_n) + H \cdot \varphi(\pi, \lambda_n) + \psi'(0, \lambda) - h \cdot \psi(0, \lambda) = -\Delta(\lambda) \end{aligned}$$

olur. $\lambda \rightarrow \lambda_n$ için bu terim biçiminde olur. Böylelikle

$$\int \psi(x, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_n) dx = -\dot{\Delta}(\lambda_n)$$

(3.6) ve (3.7) kullanılarak (3.8) elde edilmiş olur.

Teorem 3.2. $\{\lambda_n\}$ özdeğerleri ve $\varphi(x, \lambda_n)$ ve $\psi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonları reeldir. $\Delta(\lambda)$ nin bütün sıfırları basittir, yani $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$. $L^2(0, \pi)$ deki farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonal dir.

İspat: λ_n ve λ_k , ($k \neq n$) özdeğerler ve sırasıyla bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar $y_n(x)$ ve $y_k(x)$ olsun.

$$\int_0^\pi l y_n(x) \cdot y_k(x) dx = \int_0^\pi y_n(x) \cdot l y_k(x) dx$$

ve buradan

$$\lambda_n \cdot \int_0^\pi y_n(x) \cdot y_k(x) dx = \lambda_k \cdot \int_0^\pi y_n(x) \cdot y_k(x) dx$$

veya

$$\int_0^\pi y_n(x) \cdot y_k(x) dx = 0$$

olur. İlave olarak $\lambda^0 = u + iv$, $v \neq 0$ reel olmayan bir özdeğer ve $y^0(x) \neq 0$ dır. $q(x)$, h , H reel olduğu için $\overline{\lambda^0} = u - iv$ olur ve ayrıca $y^0(x)$ özfonksiyonunu elde ederiz. $\lambda^0 \neq \overline{\lambda^0}$ olduğu için

$$\|y^0\|_{L_2}^2 = \int_0^\pi y^0(x) \cdot \overline{y^0(x)} dx = 0$$

olur. Böylece L nin $\{\lambda_n\}$ bütün özdeğerleri ve $\varphi(x, \lambda_n)$ ve $\psi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonları da reeldir. α_n ve β_n sıfırdan farklı olduğundan (3.8) i elde ederiz, yani $\Delta(\lambda_n) \neq 0$ dır.

Lemma 3.2. $|k| \rightarrow \infty$ için aşağıdaki asimptotik formüller $x \in [0, \pi]$ için geçerlidir.

$$\varphi(x, \lambda) = \cos kx + O\left(\frac{1}{|k|} \exp(|\tau|x)\right) = O(\exp(|\tau|x))$$

$$\varphi'(x, \lambda) = -k \cdot \sin kx + O(\exp|\tau|x) = O(|k| \exp|\tau|x) \quad (3.9)$$

$$\psi(x, \lambda) = \cos k(\pi - x) + O\left(\frac{1}{|k|} \exp(|\tau|(\pi - x))\right) = O(\exp(|\tau|(\pi - x)))$$

$$\psi'(x, \lambda) = k \cdot \sin k(\pi - x) + O(\exp|\tau|(\pi - x)) = O(|k| \exp(|\tau|(\pi - x))) \quad (3.10)$$

$x \in [0, \pi]$ ile eşittir. Burada ve devamında $\lambda = k^2$ ve $\tau = \text{Imp}$, o ve O Landau sembolleridir.

İspat:

$$\varphi(x, \lambda) = \cos kx + h \cdot \frac{\sin kx}{k} + \int_0^\pi \frac{\sin k(x-t)}{k} \cdot q(t) \cdot \varphi(t, \lambda) dt \quad (3.11)$$

olduğunu gösterelim. Aslında Volterra integral denklemi

$$y(x, \lambda) = \cos kx + h \cdot \frac{\sin kx}{k} + \int_0^\pi \frac{\sin k(x-t)}{k} \cdot q(t) \cdot y(t, \lambda) dt$$

tek bir çözüme sahiptir. Öte yandan belli bir $y(x, \lambda)$ fonksiyonu bu denklemi sağlar.

Buradan türev alırsak

$$y''(x, \lambda) + k^2 \cdot y(x, \lambda) = q(x) \cdot y(x, \lambda), \quad y(0, \lambda) = 1 \quad y'(0, \lambda) = h$$

$y(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda)$ ve (3.1) sağlanır. (3.11) i şöyle hesaplayabiliriz:

$$\varphi'(x, \lambda) = -k \cdot \sin kx + h \cdot \cos kx + \int_0^x \cos k(x-t) \cdot q(t) \cdot \varphi(t, \lambda) \cdot dt \quad (3.12)$$

$$\mu(\lambda) = \max_{0 \leq x \leq \pi} (|\varphi(x, \lambda)| \exp(-|\tau|x)) \cdot |\sin kx| \leq \exp(|\tau|x) \text{ ve } |\cos kx| \leq \exp(|\tau|x)$$

olduğu için $|k| \geq 1$, $x \in [0, \pi]$ için (3.11) sağlanır.

$$|\varphi(x, \lambda)| \exp(-|\tau|x) \leq 1 + \frac{1}{|k|} \cdot (h + \mu(\lambda) \cdot \int_0^x |q(t)| \cdot dt) \leq C_1 + \frac{C_2}{|k|} \cdot \mu(\lambda)$$

ve sonuç olarak $\mu(\lambda) \leq C_1 + \frac{C_2}{|k|}$ olur.

Yeterli büyüklükte bir $|k|$ için $\mu(\lambda) = O(1)$ olur. Bu sonucun sağ tarafına (3.11) ve (3.12) konulursa (3.9)'a ve benzer şekilde (3.10) ulaşabiliriz. (3.10) doğrudan (3.9) u verir. Aslında

$$-\psi''(x, \lambda) + q(x) \cdot \psi(x, \lambda) = \lambda \cdot \psi(x, \lambda), \quad \psi(\pi, \lambda) = 1, \quad \psi'(\pi, \lambda) = -H$$

olduğundan $\tilde{\varphi}(x, \lambda) = \psi(\pi - x, \lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonu sağlar ve başlangıç koşullarına göre

$$-\tilde{\varphi}''(x, \lambda) + q(\pi - x) \cdot \tilde{\varphi}(x, \lambda) = \lambda \cdot \tilde{\varphi}(x, \lambda), \quad \tilde{\varphi}(0, \lambda) = 1, \quad \tilde{\varphi}'(0, \lambda) = H$$

Bu nedenle (3.9) asimptotik formülü $\tilde{\varphi}(x, \lambda)$ fonksiyonu için de geçerlidir. Buradan (3.10) a ulaşırız.

Teorem 3.3. L sınır değer problemi sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir. $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, $n \geq 0$ için

$$p_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{w}{\pi n} + \frac{K_n}{n}, \quad \{K_n\} \in l_2 \quad (3.13)$$

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos nx + \frac{\xi_n(x)}{n}, \quad |\xi_n(x)| \leq \mathbb{C}, \quad (3.14)$$

$$w = h + H + \frac{1}{2} \cdot \int_0^\pi q(t) \cdot dt$$

Burada ve her yerde aynı $\{K_n\}$ gibi aynı semboller l_2 deki çeşitli dizileri gösterir. $\mathcal{C}$ sembolü x, λ, n gibi bağımlı olmayan pozitif sabitleri belirtir.

İspat: (3.9) daki $\varphi(x, \lambda)$ için (3.11) ve (3.12) deki sağ tarafların asimptotlarını değiştirirsek şunu hesaplayabiliriz

$$\varphi(x, \lambda) = \cos kx + q_1(x) \cdot \frac{\sin kx}{k} + \frac{1}{2k} \cdot \int_0^x q(t) \cdot \sin k(x-2t) dt + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{p^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x, \lambda) &= -k \cdot \sin kx + q_1(x) \cdot \cos kx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^x q(t) \cdot \cos k(x-2t) dt \\ &\quad + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{p}\right) \end{aligned}$$

$\varphi(x, \lambda)$ ve $\varphi'(x, \lambda)$ ifadelerine (3.15) diyelim. Burada $q_1(x) = h + \frac{1}{2} \cdot \int_0^x q(t)dt$ olur. (3.5)

e göre ve (3.15) yardımıyla $\Delta(\lambda) = \varphi'(\pi, \lambda) + H \cdot \varphi(\pi, \lambda)$ yazılır.

$$\Delta(\lambda) = -k \cdot \sin k\pi + w \cdot \cos k\pi + K(k) \quad (3.16)$$

$$K(k) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\pi q(t) \cdot \cos k(\pi - 2t) \cdot dt + O\left(\frac{1}{p} \exp(|\tau|x)\right)$$

$$G_\delta = \{k: |k - K| \geq \delta, K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \dots \dots\}, \delta > 0$$

olsun. Yeterli büyüklükte bir $k^* = k^*(\delta)$ için

$$|\sin k\pi| \geq C_\delta \cdot |k| \cdot \exp(|\tau|\pi), k \in G_\delta, \quad (3.17)$$

$$|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta \cdot |k| \cdot \exp(|\tau|\pi), k \in G_\delta, |k| \geq k^* \quad (3.18)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$k = \sigma + i\zeta$ olsun. (3.17) i kanıtlamak yeterli olacaktır.

$$D_\delta = \{k: \sigma \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \zeta \geq 0, |k| \geq \delta\}$$

$\theta(k) = |\sin k\pi| \exp(-|\tau|\pi)$ alalım. $k \in D_\delta$ olsun. $r \leq 1$ için $\theta(k) \geq G_\delta$ olur.

$$\sin k\pi = \frac{(\exp(ik\pi) - \exp(-ik\pi))}{2i}$$

$r \geq 1$ için

$$\theta(k) = \frac{|1 - \exp(2i\sigma\pi)\exp(-2\zeta\pi)|}{2} \geq \frac{1}{4}$$

olur. Böylece (3.17) kanıtlanmış oldu. Sonuç olarak (3.16) yı kullanarak $k \in G_\delta$ için

$$\Delta(\lambda) = -k \cdot \sin k\pi (1 + O\left(\frac{1}{k}\right))$$

ve bu yüzden (3.18) geçerlidir. $\tau_n = \{\lambda: |\lambda| = (n + \frac{1}{2})^2\}$ alalım. (3.16) yardımıyla

$$\Delta(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda), f(\lambda) = -k \cdot \sin k\pi, |g(\lambda)| \leq C \exp(|\tau|\pi)$$

elde edilir. (3.17) ye göre yeterli büyüklükte bir $n(n \geq n^*)$ için $|f(\lambda)| > |g(\lambda)|$, $\lambda \in \tau_n$ olur.

Rouche teoremine [17] göre $\Delta(\lambda)$ nın τ_n içindeki sıfırlarının sayısı

$f(\lambda) = -k \cdot \sin k\pi$ sıfırlarının sayısı ile aynıdır ve $n + 1$ tanedir. Böylece

$|\lambda| < (\frac{n+1}{2})^2$ yuvarında L nin tam olarak $n + 1$ özdeğeri vardır. Şimdi Rouche teoremini

$\gamma_n(\delta) = \{k: |k - n| \leq \delta\}$ yuvarında uygulayarak $\gamma_n(\delta)$ yuvarındaki yeterince büyük bir n

için $\Delta(k^2)$ nın bir sıfırı vardır yani $k_n = \sqrt{\lambda_n}$. Keyfi bir $\delta > 0$ için

$$k = n + \varepsilon_n, \varepsilon_n = o(1), n \rightarrow \infty \quad (3.19)$$

(3.19) u (3.16) da yerine koyarsak:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(k_n^2) = -(n + \varepsilon_n) \cdot \sin(n + \varepsilon_n) \cdot \pi + w \cdot \cos(n + \varepsilon_n) \cdot \pi \\ &\quad - n \cdot \sin \varepsilon_n \pi + w \cdot \cos \varepsilon_n \pi + K_n = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde ederiz.

$$\sin \varepsilon_n \pi = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

(3.20) yi kullanarak bir kez daha

$$\varepsilon_n = \frac{w}{\pi n} + \frac{K_n}{n}$$

olduğunu buluruz. Dolayısıyla (3.13) geçerlidir. (3.13) ü (3.15) de yerine koyarsak (3.14) e ulaşırız.

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(x) &= (h + \frac{1}{2} \cdot \int_0^x q(t) \cdot dt - x \cdot \frac{w}{\pi} - x \cdot K_n) \cdot \sin nx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^x q(t) \cdot \sin n(x - \\ &\quad 2t) \cdot dt + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sonuç olarak $|\varepsilon_n(x)| \leq C$ olur ve (3.1.3) teoremi kanıtlanmış olur. (3.6) yardımıyla $x = \pi$ için $\beta_n = (\varphi(\pi, \lambda_n))^{-1}$ olur. (3.7), (3.8), (3.14) ve (3.21) kullanılarak

$$a_n = \frac{\pi}{2} + \frac{K_n}{n}, \quad \beta_n = (-1)^n + \frac{K_n}{n}, \quad \Delta(\lambda_n) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{K_n}{n} \quad (3.22)$$

elde edilir. $\Delta(\lambda)$ basit sıfırlara sahip olduğundan ve $n \geq 0$ için $\Delta(\lambda_n) = (-1)^{n+1}$ dir.

Açıklama: Eğer $q(x) \in W_2^N$ ve $N \geq 1$ olursa daha öncede hesaplandığı gibi asimptotik formüller şöyle olur.

$$\begin{cases} k_n = n + \sum_{j=1}^{N+1} \frac{w_j}{n^j} + \frac{K_n}{n^{N+1}}, & w_{2k} = 0, \quad k \geq 0, \quad w_1 = \frac{w}{\pi} \\ a_n = \frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^{N+1} \frac{w_j^+}{n^j} + \frac{K_n}{n^{N+1}}, & w_{2k+1}^+ = 0, \quad k \geq 0, \quad a_n > 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Gerçekten $q(x) \in W_2^N$ olsun.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^x q(t) \cdot \cos k(x - 2t) dt &= \frac{\sin px}{4k} (q(x) + q(0)) + \frac{1}{4k} \int_0^x q'(t) \cdot \cos k(x - 2t) dt, \\ \frac{1}{2p} \int_0^x q(t) \cdot \sin k(x - 2t) dt &= \frac{\cos px}{4k^2} (q(x) - q(0)) - \frac{1}{4k^2} \int_0^x q'(t) \cdot \cos k(x - 2t) dt \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.24)$$

(3.15) ve (3.24) den

$$\varphi(x, \lambda) = \cos kx + (h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) \cdot dt) \cdot \frac{\sin kx}{k} + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{k^3}\right)$$

olur. (3.11) ve (3.12) nin sağ taraflarında yerine koyarsak, (3.24) ve (3.16) yı kullanarak $\Delta(\lambda)$ ve $\varphi(x, \lambda)$ için asimptotlar elde edilir. (3.15) ve (3.16) denklemlerini kullanarak

$$\varphi(x, \lambda) = \cos kx + q_1(x) \cdot \frac{\sin kx}{k} + q_2(x) \cdot \frac{\cos kx}{k^2} - \frac{1}{4k^2} \cdot \int_0^x q'(t) \cdot \cos k(x-2t) \cdot dt \\ + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{k^3}\right)$$

$$\varphi'(x, \lambda) = -k \cdot \sin kx + q_1(x) \cdot \cos kx + q_{21}(x) \cdot \frac{\sin kx}{k} \\ + \frac{1}{4k} \cdot \int_0^x q_1'(t) \cdot \sin k(x-2t) \cdot dt + O\left(\frac{\exp(|\tau|x)}{k^2}\right)$$

$$\Delta(\lambda) = -k \cdot \sin k\pi + w \cdot \cos k\pi + w_0 \cdot \frac{\sin k\pi}{k} + \frac{K_0}{k} \quad (3.25)$$

elde edilir. (3.25) ifadesini kullanarak

$$q_1(x) = h + \frac{1}{2} \cdot \int_0^x q(t) \cdot dt, \quad w_0 = q_{21}(\pi) + H \cdot q_1(\pi), \\ q_{2j}(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(q(x) + (-1)^{j+1} \cdot q(0) \right) + \frac{(-1)^{j+1}}{2} \cdot \int_0^x q(t) \cdot q_1(t) \cdot dt, j = 0, 1, \\ K_0(k) = \frac{1}{4} \cdot \int_0^\pi q'(t) \cdot \sin k(\pi-2t) \cdot dt + O\left(\frac{\exp(|\tau|\pi)}{k}\right)$$

ifadelerini elde edilir.

$$k_n = n + \varepsilon_n, \quad -n \cdot \sin \varepsilon_n \cdot \pi + w \cdot \cos \varepsilon_n \pi + \frac{K_n}{n} = 0$$

şeklinde olur. Bu nedenle

$$k_n = n + \frac{w}{\pi n} + \frac{K_n}{n^2}, \quad \{K_n\} \in l_2$$

olur. Benzer şekilde (3.23) deki formüllerde hesaplanabilir.

Teorem 3.4. $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ spektrumlarının şartlarını tek başına $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu belirler. Şöyle formüle edilir.

$$\Delta(\lambda) = \pi \cdot (\lambda_0 - \lambda) \cdot \prod_0^\infty \frac{\lambda_n - \lambda}{n^2} = 0 \quad (3.26)$$

İspat: (3.16) denklemini kullanarak $\Delta(\lambda)$ nın bütün λ ları $1/2$ olarak bulunur. Sonuç olarak Hadamardın çarpanlara ayırma teoremi [17] ile $\Delta(\lambda)$ sıfırları çarpım ifadesi yardımıyla belirlenir.

$$\Delta(\lambda) = C \cdot \prod_{n=0}^\infty \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right)$$

$$\Delta(\lambda) = -p. \sin p\pi = -\lambda. \pi. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n^2}\right)$$

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\Delta(\lambda_0)} = C. \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0. \pi. \lambda} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\lambda_n} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_n - \lambda^2}{n^2 - \lambda}\right)$$

(3.13) ve (3.16) yı ele alarak hesaplırsak

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{\Delta(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = 1 \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_n - \lambda^2}{n^2 - \lambda}\right) = 1$$

olur ve bu nedenle

$$C = \pi. \lambda_0 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n^2}$$

elde edilir. Bunu (3.27) de yerine koyarsak (3.26) ya ulaşırız.

Açıklama: Benzer sonuçlar, diğer ayrılmış sınır koşulları türlerine sahip Sturm-Liouville operatörleri için de geçerlidir.

Aşağıda kullanılacak bu sonuçları kısaca özetleyelim.

Sınır koşulları $U(y) = 0, y(\pi) = 0$ ile (3.1) denklemi için sınır değer problemi

$L_1 = L_1(q(x), h)$ düşünelim. L_1 in $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ özdeğerleri basittir ve $d(\lambda) = \varphi(\pi, \lambda)$ karakteristik fonksiyonunun sıfırlarıyla çakışır.

$$d(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n - \lambda}{(n + 1/2)^2} = 0 \quad (3.28)$$

$$\{\mu_n, a_{n1}\}_{n \geq 0}, a_{n1} = \int_0^{\pi} \varphi^2(x, \mu_n). dx$$

L_1 in asimtotik formülü:

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{1}{2} + \frac{w_1}{\pi.n} + \frac{K_n}{n}, \{K_n\} \in l_2 \quad (3.29)$$

$$a_{n1} = \frac{\pi}{2} + \frac{K_{n1}}{n}, \{K_{n1}\} \in l_2 \quad (3.30)$$

$$w_1 = h + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} q(t). dt$$

“Sınır koşulları $V(y) = 0, y(0) = 0$ ile (3.1) denklemi için sınır değer problemi

$L^0 = L^0(q(x), H)$ düşünelim. L^0 in $\{\lambda_n^0\}_{n \geq 0}$ özdeğerleri basittir ve $\Delta^0(\lambda) = \psi(0, \lambda) = S'(\pi, \lambda) + H.S(\pi, \lambda)$ karakteristik fonksiyonunun sıfırlarıyla çakışır. $S(x, \lambda)$ Volterra integral denklemini sağlar.”

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin kx}{k} + \int_0^x \frac{\sin k(x - 2t)}{k} \cdot q(t). S(t, \lambda) dt \quad (3.31)$$

$|k| \rightarrow \infty$ için

$$\begin{cases} S(x, \lambda) = \frac{\sin kx}{k} + O\left(\frac{1}{|k|^2} \cdot \exp(|\tau|x)\right) = O\left(\frac{1}{|k|} \cdot \exp(|\tau|x)\right) \\ S'(x, \lambda) = \cos kx + O\left(\frac{1}{|k|} \exp(|\tau|x)\right) = O(\exp(|\tau|x)) \\ \Delta^0(\lambda) = \cos k\pi + O\left(\frac{1}{|k|} \cdot \exp(|\tau|\pi)\right) \quad \tau = \text{Imp} \end{cases} \quad (3.32)$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \Delta^0(\lambda) &= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^0 - \lambda}{(n + 1/2)^2} = 0 \\ \sqrt{\lambda_n^0} &= n + \frac{1}{2} + \frac{w_0}{\pi n} + \frac{K_n}{n}, \quad \{K_n\} \in l_2 \\ w^0 &= H + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} q(t) \cdot dt \end{aligned}$$

Sınır koşulları $y(\pi) = 0$, $y(0) = 0$ ile (3.1) denklemi için sınır değer problemi

$L_1^0 = L_1^0(q(x))$ düşünelim. L_1^0 in $\{\mu_n^0\}_{n \geq 1}$ özdeğerleri basittir ve $d^0(\lambda) = S(\pi, \lambda)$ karakteristik fonksiyonunun sıfırlarıyla çakışır ve

$$\begin{aligned} d^0(\lambda) &= \pi \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^0 - \lambda}{n^2} = 1 \\ \sqrt{\mu_n^0} &= n + \frac{w_1^0}{\pi n} + \frac{K_n}{n}, \quad \{K_n\} \in l_2 \\ w_1^0 &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} q(t) \cdot dt \end{aligned}$$

olur.

Lemma 3.3. İki sınır değer problemi L ve L_1 'in özdeğerleri $\lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1}$, $n \geq 0$ dönüşümlüdür.

İspat: Lemma (3.1) in ispatından

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \langle \varphi(x, \lambda), \varphi(x, \mu) \rangle &= (\lambda - \mu) \cdot \varphi(x, \lambda) \cdot \varphi(x, \mu) \quad (3.34) \\ (\lambda - \mu) \cdot \int_0^{\pi} \varphi(x, \lambda) \cdot \varphi(x, \mu) \cdot dx &= \langle \varphi(x, \lambda) \cdot \varphi(x, \mu) \rangle \Big|_0^{\pi} \\ &= \varphi(\pi, \lambda) \cdot \varphi'(\pi, \mu) - \varphi'(\pi, \lambda) \cdot \varphi(\pi, \mu) \\ &= d(\lambda) \cdot \Delta(\mu) - d(\mu) \cdot \Delta(\lambda) \end{aligned}$$

dır. $\mu \rightarrow \lambda$ için şunu elde ederiz.

$$\int_0^{\pi} \varphi^2(x, \lambda) \cdot dx = d(\lambda) \cdot \Delta(\lambda) - d(\lambda) \cdot \Delta(\lambda) \text{ ile } \Delta(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \cdot \Delta(\lambda),$$

$$d(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} d(\lambda)$$

Özellikle bu sonuç aşağıdaki ifadeyi verir:

$$a_n = -\Delta(\lambda_n) \cdot d(\lambda_n) \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{d^2(\lambda)} \cdot \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda) \cdot dx = -\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)} \right), \quad -\infty < \lambda < +\infty, \quad d(\lambda) \neq 0$$

Böylece $\frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)}$ fonksiyonu $R - \{\mu_n | n \geq 0\}$ üzerinde monoton azalandır.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu_n \pm 0} \frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)} = \pm \infty$$

Sonuç olarak (3.13) ve (3.29) kullanılarak (3.33) e ulaşılır. Bu bölümdeki bilgiler [18]'den alınmıştır.

3.2.İz Formülleri

Sturm-Liouville Operatör İçin Regülerize İzin Hesaplanması

1. Aşağıdaki Sturm-Liouville sınır değer problemine bakalım

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad (3.36)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (3.37)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \quad (3.38)$$

Öyle ki $q(x) \in C_1(0, \pi)$ h, H sonsuzluğa eşit olmayan gerçekte sayılardır.

(3.36),(3.37),(3.38) probleminin özdeğerlerini $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ ile işaretleyelim. Açık ki yeteri kadar büyük n ler için

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{C_0}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (3.39)$$

Burada

$$C_0 = \frac{2}{\pi} \left(h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \right), \quad (3.40)$$

dir.(3.39) denkleminde

$$\lambda_n = n^2 + C_0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

hemen çıkar. Dolayısıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - C_0) < \infty \quad (3.41)$$

serisi yakınsaktır. Bu seriye regülerize olmuş seri denir.[19] içinde (3.41) serisi $h = H = 0$ için hesaplanmıştır. Daha sonra farklı yazarlar farklı yöntemlerle (3.41) ve benzeri serilerin hesaplanması için yöntemler vermiştir [7].

Bu bölümde içinde bazı üstün yöntemler içeren bir metot verilmiştir. Öyle ki bu önceki yöntemleri kapsayıcı niteliktedir.

2. $\varphi'(x, \lambda)$ ile (3.36) denkleminin

$$\varphi(x, \lambda) = 1 \quad \varphi'_x(0, \lambda) = h ,$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü işaretleyim. Bu durumda λ_n özdeğerleri

$$\varphi'_x(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) .$$

analitik fonksiyonun özdeğerleridir. Buna göre

$$\varphi'_x(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) = A\phi(\lambda) \quad (3.42)$$

olur. Buradan

$$\phi(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right)$$

dır. Burada A sabit parametredir ve aşağıda belirlenecektir.

Şimdi yeteri kadar büyük $\lambda = -\mu$ için (3.42) eşitliğinin her iki tarafının asimptotik durumunu inceleyelim. Daha sonra μ nün aynı derecelerine göre katsayıları karşılaştırarak (3.41)serisinin toplam değerini alabilir.

$$\begin{aligned} \phi(-\mu) &= \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu}{\lambda_n}\right) = \left(1 + \frac{\mu}{\lambda_0}\right) \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu}{\lambda_n}\right) sh\pi\sqrt{\mu}}{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu}{n^2}\right) \pi\sqrt{\mu}} \\ &= C_1(\lambda_0 + \mu)\psi(\mu) \frac{sh\pi\sqrt{\mu}}{\pi\sqrt{\mu}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

burada

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\lambda_0} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\lambda_n} \\ \psi(\mu) &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n^2 - \lambda_n}{\mu + n^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

dir. Yeteri kadar büyük pozitif μ ler için $\psi(\mu)$ fonksiyonun asimptotik durumunu inceleyelim. Bu amaçla $\ln\psi(\mu)$ fonksiyonuna bakalım.

$$\ln \psi(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{n^2 - \lambda_n}{\mu + n^2} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{n^2 - \lambda_n}{\mu + n^2} \right)^j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - \lambda_n}{\mu + n^2} \right)^j$$

Bir sonraki değerlendirmeler aşağıdaki Lemma 'ya dayanmaktadır.

Lemma 3.4. Eğer $|n^2 - \lambda_n| \leq a$ ise,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n^2 - \lambda_n|^j}{(\mu + n^2)^j} \leq \frac{n}{2} \frac{a^j}{\mu^{j-\frac{1}{2}}} \quad (3.45)$$

İspat:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n^2 - \lambda_n|^j}{(\mu + n^2)^j} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu + n^2)^j} \leq a^j \int_0^{\infty} \frac{dx}{(\mu + x^2)^j} = \\ &= \frac{a^j}{\mu^{j-\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(\mu + t^2)^j} \leq \frac{\pi}{2} \frac{a^j}{\mu^{j-\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

(3.45) deęerlenmesinden elde edilir. Buradan

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n^2 - \lambda_n|^j}{(\mu + n^2)^j} \leq \frac{\pi}{2} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a^j}{\mu^{j-\frac{1}{2}}} = \frac{n}{2} \frac{a^2}{\mu^{\frac{3}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\mu} \right)^j = O \left(\mu^{-\frac{3}{2}} \right) \quad (3.46)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - \lambda_n}{\mu + n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - n^2}{\mu + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - C_0) \frac{1}{\mu + n^2} + \\ &+ C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu + n^2} = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu + n^2} + \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - C_0) - \\ &- \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - C_0) n^2 \frac{1}{\mu + n^2}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Bu durumda

$$\sup_n |(\lambda_n - n^2 - C_0) n^2| < \infty,$$

olur. Öyle ise (3.45) deęerlendirmesinden

$$\frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - C_0) n^2 \frac{1}{\mu + n^2} = O \left(\mu^{-\frac{3}{2}} \right) \quad (3.48)$$

ifadesi bulunur. (3.46), (3.47) ve (3.48) den

$$\ln \psi(\mu) = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu + n^2} + \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - C_0) + O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right). \quad (3.49)$$

ifadesi bulunur. Buna göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu + n^2} = \frac{\pi \operatorname{erf} \pi \sqrt{\mu}}{2\sqrt{\mu}} - \frac{1}{2\mu} = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}} - \frac{1}{\mu} + O(e^{-2\pi\sqrt{\mu}})$$

olur. Buna göre (3.49) den

$$\ln \psi(\mu) = \frac{C_0 \pi}{2\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\mu} \left(s_\lambda - \lambda_0 + \frac{1}{2} C_0 \right) + O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right)$$

elde edilir. Buradan

$$S_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - C_0). \quad (3.50)$$

Böylece

$$\begin{aligned} \psi(\mu) &= \exp \left\{ \frac{C_0 \pi}{2\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\mu} \left(s_\lambda - \lambda_0 + \frac{1}{2} C_0 \right) + O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right) \right\} = \\ &= 1 + \frac{C_0 \pi}{2\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\mu} \left(s_\lambda - \lambda_0 + \frac{1}{2} C_0 + \frac{C_0^2 \pi^2}{8} \right) + O\left(\mu^{-\frac{3}{2}}\right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

(3.43) ve (3.51) den

$$\phi(-\mu) = \frac{1}{2\pi} C_1 e^{\pi\sqrt{\mu}} \left\{ \sqrt{\mu} + \frac{C_0 \pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(s_\lambda + \frac{1}{2} C_0 + \frac{C_0^2 \pi^2}{8} \right) + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\} \quad (3.52)$$

sonucuna ulaşılır.

3. Yeteri kadar büyük negatif $\lambda = -\mu$ ye göre $\varphi'_x(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda)$ fonksiyonun asimptotik durumunu inceleyelim. Açıkta ki

$$\varphi(x, -\mu) = ch\sqrt{\mu x} + h \frac{sh\sqrt{\mu x}}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^\pi sh\sqrt{\mu}(x-t)q(t)\varphi(t, -\mu)dt$$

dır. Buna göre

$$\begin{aligned} \varphi(x, -\mu) &= \frac{1}{2} e^{\pi\sqrt{\mu}} \left\{ 1 + \frac{h}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^\pi sh\sqrt{\mu}(\pi-t)ch\sqrt{\mu}tq(t)dt + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} e^{\pi\sqrt{\mu}} \left\{ 1 + \frac{h}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^\pi q(t)dt + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.53)$$

elde edilir. Daha sonra

$$\varphi'_x(x, -\mu) = \sqrt{\mu}sh\sqrt{\mu}x + hch\sqrt{\mu}x + \int_0^\pi ch\sqrt{\mu}(x-t)q(t)\varphi(t, -\mu)dt$$

dır. Buna göre

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, -\mu) &= \sqrt{\mu}sh\sqrt{\mu}\pi + hch\sqrt{\mu}\pi + \\ &+ \int_0^\pi ch\sqrt{\mu}(\pi-t)q(t) \left[ch\sqrt{\mu}t + h\frac{sh\sqrt{\mu}t}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^t sh\sqrt{\mu}(t-s)q(s)ch\sqrt{\mu}sds \right] dt \\ &+ O\left(\frac{e^{\pi\sqrt{\mu}}}{\mu}\right) = \\ &= \frac{1}{2}e^{\pi\sqrt{\mu}} \left\{ \sqrt{\mu} + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t)dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{1}{4}q(0) + \frac{1}{4}q(\pi) + \frac{h}{2} \int_0^\pi q(t)dt + \frac{1}{8} \left(\int_0^\pi q(t)dt \right)^2 \right] \right\} \\ &+ O\left(\frac{1}{\mu}\right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

(3.53) ve (3.54) den elde edilir.

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, -\mu) + H\varphi(\pi, -\mu) &= \\ &= \frac{1}{2}e^{\pi\sqrt{\mu}} \left\{ \sqrt{\mu} + h + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t)dt + H \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{1}{4}q(0) + \frac{1}{4}q(\pi) + \frac{1}{2}h \int_0^\pi q(t)dt + \frac{1}{8} \left(\int_0^\pi q(t)dt \right)^2 \right] + hH \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}H \int_0^\pi q(t)dt \right\} + O\left(\frac{1}{\mu}\right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

(3.42), (3.52) ve (3.55) den

$$AC_1 = \pi,$$

bulunur.

$$A = \frac{\pi}{C_1}$$

Buna göre (3.52) ve (3.55) den

$$\begin{aligned}
& h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt \\
& + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{1}{4} q(0) + \frac{1}{4} q(\pi) \right. \\
& + \frac{1}{2} h \int_0^\pi q(t) dt + \frac{1}{2} H \int_0^\pi q(t) dt + hH + \frac{1}{8} \left(\int_0^\pi q(t) dt \right)^2 \left. \right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) = \\
& = \frac{C_0}{2} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(s_\lambda + \frac{1}{2} C_0 + \frac{\pi^2 \cdot C_0^2}{8} \right) + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \quad (3.56)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.56) deki terimleri μ nün derecelerine göre karşılaştırsak (3.40) formülünü elde ederiz. $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ ye göre katsayıları karşılaştırsak çok da zor olmayan dönüşüm sonucu

$$S_\lambda = \frac{1}{4} q(0) + \frac{1}{4} q(\pi) - \frac{h + H}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi q(t) dt - \frac{1}{2} (h^2 + H^2),$$

elde ederiz. Öyle ki S_λ (3.50) formülü ile belirlenir.

Benzer yolla $\mu^{-\frac{1}{2}}$ den daha yüksek derecelere göre katsayılar yazılarak $\sum_{n=0}^\infty \lambda_n^s$ $s = (2, 3, \dots)$ regülerize olmuş toplamalar hesaplanabilir.

4.BULGULAR VE TARTIŞMALAR

4.1 Delta-Fonksiyon Katsayılı ağırlıklı Sturm-Liouville Problemleri İçin Regülerize İz Formülleri Üzerine

Sonlu boyutlu bir uzayda, bir operatörün sonlu bir izi vardır. Bir matris için özdeğerlerin toplamını, matrisin izini yani ana köşegendeki elemanların toplamını hesaplamının kolay olduğu iyi bilinmektedir.

Ancak, sonsuz boyutlu bir uzayda, genel olarak sıradan diferansiyel operatörlerin sonlu bir izi yoktur. 1953'te Gelfand ve Levitan [1], $q(x)$ fonksiyonunun sürekli türevlenebilirliğini varsayarak, düzenleştirilmiş iz için aşağıdaki dikkate değer formülü elde ettiler:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\lambda_n - n^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) dx \right] = \frac{q(0) + q(\pi)}{4} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} q(x) dx$$

Burada, λ_n aşağıdaki operatörün özdeğerleridir:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0.$$

Bu formül, belirli operatörlerin araştırılmasından başlayan ve ayrıca genel formda ayırık operatörlerin düzenli izlerinin analizini benimseyen büyük ve çok önemli bir teoriye yol açtı. Kısa sürede birçok yazar dikkatlerini iz teorisine çevirmiş ve ilginç sonuçlar elde etmiştir. Bu çalışma birçok yazar tarafından devam ettirilmiştir. Bu konunun mevcut durumu ve bununla ilgili çalışmalar kapsamlı bir araştırma raporunda sunulmaktadır [2]. Diferansiyel denklemler için gerekli iz formülleri [1,3,4,5,6,7]'de bulunur. Ancak, tekil potansiyele sahip Sturm-Liouville operatörleri için düzenli iz üzerine az sayıda çalışma vardır (bkz. [2,8,9,10,11,12]). Bir diferansiyel operatörün iz kimliği, diferansiyel operatörün spektral yapısını derinlemesine ortaya çıkarır ve özdeğerlerin sayısal hesaplanmasında, ters problemde, çözümler teorisinde ve integrallenebilir sistem teorisinde önemli uygulamalara sahiptir (bkz. [13,14]).

$$ly := \frac{1}{r(x)} [-y'' + q(x)y] = \lambda y, \quad x \in (0, a) \cup (a, \pi) \quad (4.1)$$

$$U(y) := y'(0) = 0, \quad V(y) := y(\pi) = 0 \quad (4.2)$$

Sınır koşulları ve $x = a$ noktasındaki süreksizlik koşulları,

$$I(y) := \begin{cases} y(a+0) = y(a-0) \equiv y(a) \\ y'(a+0) - y'(a-0) = -\alpha \lambda y(a) \end{cases} \quad (4.3)$$

olan diferansiyel denklem için sınır değer problemini ele alıyoruz. Burada $\alpha > 0$, $q(x)$ $W_2^1(0, \pi)$ da gerçek değerli fonksiyon ve λ spektral parametredir.

$$r(x) := \begin{cases} r^2, & 0 \leq x < a \\ 1, & a \leq x \leq \pi, 0 < r \neq 1 \end{cases}$$

(4.1), (4.3) şartlarını incelerken anlayabiliriz ki;

$$-y'' + q(x)y = \lambda \rho(x)y, \quad x \in (0, \pi), \quad (4.4)$$

$\rho(x) = r(x) + \alpha \delta(x - a)$ olduğunda, burada $\delta(x)$ Dirac fonksiyondur (bkz. [14]).

Bu bölümde, (4.4), Hilbert uzayının oluşturulmasından sonra, δ –etkileşimli ağırlıklı Sturm-Liouville denklemi için birinci dereceden regülerize olmuş iz formülünü elde ediyoruz.

4.2. Problemle İlgili Hilbert Uzayının İnşası ve Spektral Karakteristiklerin Bazı Özellikleri

Problem (4.1)-(4.3) lineer operatör için özdeğer problemine indirgenmiştir. Hilbert uzayında $L, H = L_2(0, \pi) \oplus C$ de aşağıdaki iç çarpımı ile

$$\langle f, g \rangle_H := \langle f_1, g_1 \rangle_{L_2} + \alpha^{-1} f_2 \overline{g_2} \quad (4.5)$$

tanımlayalım. Burada

$$f = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

dir. Bu operatörün dönüşümü

$$Lf := \begin{pmatrix} lf_1 \\ f_1'(a-0) - f_1'(a+0) \end{pmatrix}$$

biçimindedir ve tanım kümesi

$$D(L) := \{f \in H \mid f_1, f_1' \in AC[(0, \pi) \setminus \{a\}], \quad lf_1 \in L_2[(0, \pi) \setminus \{a\}], f_2 = \alpha f_1(a), U(f_1) = V(f_1)0\}$$

biçimindedir. Burada $AC(\cdot)$, ilgili aralıkta tüm mutlak sürekli fonksiyonların kümesini gösterir. Özellikle, bu fonksiyonların a noktasında limitleri vardır.

Teorem 4.1. L operatörü simetriktir.

İspat. f ve $\bar{g}$ (4.2) sınır koşulunu sağladığından ve $x = a$ noktasındaki koşullardan $\langle Lf, g \rangle_H = \langle f, Lg \rangle_H$ yi elde ederiz. $f, g \in D(L)$. Yani L simetriktir.

Sonuç 4.1. $W(f, g; x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ fonksiyonu $(0, \pi)$ aralığında süreklidir.

Şimdi $\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda), C(x, \lambda), S(x, \lambda)$ aşağıdaki başlangıç koşulları altında (4.1)'in çözümleri olsun

$$C(0, \lambda) = S'(0, \lambda) = \varphi(0, \lambda) = \psi(\pi, \lambda) = 1$$

$$C'(0, \lambda) = S(0, \lambda) = \varphi'(0, \lambda) = \psi'(\pi, \lambda) = 0$$

ve (4.3) koşulları altında açıkça,

$$U(\varphi) = V(\psi) = 0.$$

ifade edilir.

$$\Delta(\lambda) = W(\varphi, \psi; x) \quad (4.6)$$

Sonuç (4.1) ve Ostrogradskii-Liouville teoremi sayesinde (bkz. [19], s.83), $\Delta(\lambda)$ x 'e bağlı değildir. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonuna L nin karakteristik fonksiyonu denir. $x = 0$ ve $x = \pi$ yi (4.6) de yazarsak şunu elde ederiz,

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi) = U(\psi) \quad (4.7)$$

$\Delta(\lambda)$ fonksiyonu λ ya göre tamdır ve en fazla sayılabilir sıfır kümesine sahiptir. $\{\lambda_n\}_{n=1,2,3,\dots}$. Şimdi, $\varphi(x, \lambda)$ çözümünü ele alalım. $C_0(x, \lambda)$ ve $S_0(x, \lambda)$ nin (4.1) in $(0, \pi)$ aralığında başlangıç koşullarındaki temel çözümleri $C_0(0, \lambda) = S'_0(0, \lambda) = 1, C'_0(0, \lambda) = S_0(0, \lambda) = 0$ dır. O halde

$$C(x, \lambda) = C_0(x, r\sqrt{\lambda}), \quad S(x, \lambda) = S_0(x, r\sqrt{\lambda}), \quad x < a \quad (4.8)$$

$$C(x, \lambda) = A_1 C_0(x, \sqrt{\lambda}) + B_1 S_0(x, \sqrt{\lambda}),$$

$$S(x, \lambda) = A_2 C_0(x, \sqrt{\lambda}) + B_2 S_0(x, \sqrt{\lambda}), \quad x > a \quad (4.9)$$

Burada

$$A_1 C_0(a, \sqrt{\lambda}) + B_1 S_0(a, \sqrt{\lambda}) = C_0(a, r\sqrt{\lambda})$$

$$A_1 C'_0(a, \sqrt{\lambda}) + B_1 S'_0(a, \sqrt{\lambda}) = C'_0(a, r\sqrt{\lambda}) - \alpha \lambda C_0(a, r\sqrt{\lambda})$$

Bu denklem sistemini Cramer yöntemi ile çözelim:

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} C_0(a, r\sqrt{\lambda}) & S_0(a, \sqrt{\lambda}) \\ C'_0(a, r\sqrt{\lambda}) - \alpha \lambda C_0(a, r\sqrt{\lambda}) & S'_0(a, \sqrt{\lambda}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_0(a, \sqrt{\lambda}) & S_0(a, \sqrt{\lambda}) \\ C'_0(a, \sqrt{\lambda}) & S'_0(a, \sqrt{\lambda}) \end{vmatrix}} =$$

$$= C_0(a, r\sqrt{\lambda})S'_0(a, \sqrt{\lambda}) - C'_0(a, r\sqrt{\lambda})S_0(a, \sqrt{\lambda}) + \alpha k^2 C_0(a, r\sqrt{\lambda})S_0(a, \sqrt{\lambda}),$$

$$B_1 = \begin{vmatrix} C_0(a, \sqrt{\lambda}) & C_0(a, r\sqrt{\lambda}) \\ C'_0(a, \sqrt{\lambda}) & C'_0(a, r\sqrt{\lambda}) - \alpha\lambda C_0(a, r\sqrt{\lambda}) \end{vmatrix} =$$

$$= C_0(a, \sqrt{\lambda})C'_0(a, r\sqrt{\lambda}) - C'_0(a, \sqrt{\lambda})C_0(a, r\sqrt{\lambda}) - \alpha k^2 C_0(a, r\sqrt{\lambda})C_0(a, \sqrt{\lambda}),$$

Benzer şekilde

$$A_2 C_0(a, \sqrt{\lambda}) + B_2 S_0(a, \sqrt{\lambda}) = S_0(a, r\sqrt{\lambda})$$

$$A_2 C'_0(a, \sqrt{\lambda}) + B_2 S'_0(a, \sqrt{\lambda}) = S'_0(a, r\sqrt{\lambda}) - \alpha\lambda S_0(a, r\sqrt{\lambda})$$

denklem sistemini de Cramer yöntemi ile çözelim:

$$A_2 = \begin{vmatrix} S_0(a, \sqrt{\lambda}) & S_0(a, r\sqrt{\lambda}) \\ S'_0(a, r\sqrt{\lambda}) - \alpha\lambda S_0(a, r\sqrt{\lambda}) & S'_0(a, \sqrt{\lambda}) \end{vmatrix} =$$

$$= S_0(a, r\sqrt{\lambda})S'_0(a, \sqrt{\lambda}) - S'_0(a, r\sqrt{\lambda})S_0(a, \sqrt{\lambda}) + \alpha k^2 S_0(a, r\sqrt{\lambda})S_0(a, \sqrt{\lambda}),$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} C_0(a, \sqrt{\lambda}) & S_0(a, r\sqrt{\lambda}) \\ C'_0(a, \sqrt{\lambda}) & S'_0(a, r\sqrt{\lambda}) - \alpha\lambda S_0(a, r\sqrt{\lambda}) \end{vmatrix} =$$

$$= C_0(a, \sqrt{\lambda})S'_0(a, r\sqrt{\lambda}) - C'_0(a, \sqrt{\lambda})S_0(a, r\sqrt{\lambda}) - \alpha k^2 C_0(a, \sqrt{\lambda})S_0(a, r\sqrt{\lambda}),$$

elde ederiz. Sonuç olarak;

$$A_1 = C_0(a, r\sqrt{\lambda})S'_0(a, \sqrt{\lambda}) - C'_0(a, r\sqrt{\lambda})S_0(a, \sqrt{\lambda}) + \alpha k^2 C_0(a, r\sqrt{\lambda})S_0(a, \sqrt{\lambda}),$$

$$B_1 = C_0(a, \sqrt{\lambda})C'_0(a, r\sqrt{\lambda}) - C'_0(a, \sqrt{\lambda})C_0(a, r\sqrt{\lambda}) - \alpha k^2 C_0(a, r\sqrt{\lambda})C_0(a, \sqrt{\lambda}),$$

$$A_2 = S_0(a, r\sqrt{\lambda})S'_0(a, \sqrt{\lambda}) - S'_0(a, r\sqrt{\lambda})S_0(a, \sqrt{\lambda}) + \alpha k^2 S_0(a, r\sqrt{\lambda})S_0(a, \sqrt{\lambda}),$$

$$B_2 = C_0(a, \sqrt{\lambda})S'_0(a, r\sqrt{\lambda}) - C'_0(a, \sqrt{\lambda})S_0(a, r\sqrt{\lambda}) - \alpha k^2 C_0(a, \sqrt{\lambda})S_0(a, r\sqrt{\lambda}), \quad (4.10)$$

bulunur.

$C_0(x, \lambda)$ fonksiyonunun aşağıdaki integral denklemini sağladığını doğrulamak kolaydır:

$$C_0(x, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t)C_0(t, \lambda)dt. \quad (4.11)$$

(4.11) denklemini ardışık yaklaşımlar yöntemi ile çözersek aşağıdaki denklemi elde ederiz,

$$\begin{aligned}
C_0(x, \lambda) &= \cos\sqrt{\lambda}x + \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^x q(t)dt + \frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{4\sqrt{\lambda}} \left\{ q(x) - q(0) - \frac{1}{2} \left[\int_0^x q(t)dt \right]^2 \right\} \\
&+ O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)\right), \tag{4.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C'_0(x, \lambda) &= -\sqrt{\lambda} \sin\sqrt{\lambda}x + \frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{2} \int_0^x q(t)dt \\
&+ \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{4\lambda} \left\{ q(x) + q(0) + \frac{1}{2} \left[\int_0^x q(t)dt \right]^2 \right\} \\
&+ O\left(\frac{1}{\lambda} \exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)\right), \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
S_0(x, \lambda) &= \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^x q(t)dt + \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{4\lambda^{\frac{3}{2}}} \left\{ q(x) + q(0) - \frac{1}{2} \left[\int_0^x q(t)dt \right]^2 \right\} \\
&+ O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)\right), \tag{4.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S'_0(x, \lambda) &= \cos\sqrt{\lambda}x + \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^x q(t)dt + \frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{4\lambda} \left\{ -q(x) + q(0) - \frac{1}{2} \left[\int_0^x q(t)dt \right]^2 \right\} \\
&+ O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)\right), \tag{4.15}
\end{aligned}$$

(4.10) ve (4.12)-(4.15) sayesinde

$$\begin{aligned}
A_1 = & \alpha\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}r\sin\sqrt{\lambda}a + \cos\sqrt{\lambda}r\cos\sqrt{\lambda}a \left[1 - \frac{\alpha}{2} \int_0^a q(t)dt \right] \\
& + \sin\sqrt{\lambda}r\sin\sqrt{\lambda}a \left[1 + \frac{\alpha}{2r} \int_0^a q(t)dt \right] \\
& + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}r\cos\sqrt{\lambda}a \left[\left(\frac{1}{r} - r \right) \int_0^a q(t)dt - \frac{\alpha}{2r} \left(\int_0^a q(t)dt \right)^2 \right] \\
& + \frac{\alpha}{4\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}r\sin\sqrt{\lambda}a \left[\left(1 + \frac{1}{r^2} \right) q(a) + \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) q(0) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \left(\int_0^a q(t)dt \right)^2 \right] + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 = & \alpha\lambda\cos\sqrt{\lambda}r\cos\sqrt{\lambda}a - \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}r\cos\sqrt{\lambda}a \left[r + \frac{\alpha}{2r} \int_0^a q(t)dt \right] \\
& + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}r\sin\sqrt{\lambda}a \left[1 - \frac{\alpha}{2} \int_0^a q(t)dt \right] \\
& + \frac{1}{2}\sin\sqrt{\lambda}r\sin\sqrt{\lambda}a \left[\left(\frac{1}{r} - r \right) \int_0^a q(t)dt - \frac{\alpha}{2r} \left(\int_0^a q(t)dt \right)^2 \right] \\
& + \frac{\alpha}{4}\cos\sqrt{\lambda}r\cos\sqrt{\lambda}a \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \left[q(a) - q(0) - \frac{1}{2} \left(\int_0^a q(t)dt \right)^2 \right] \\
& + O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & \frac{\alpha}{r}\sin\sqrt{\lambda}r\sin\sqrt{\lambda}a + \frac{1}{r\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}r\cos\sqrt{\lambda}a \left[1 - \frac{\alpha}{2} \int_0^a q(t)dt \right] \\
& - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}r\sin\sqrt{\lambda}a \left[1 + \frac{\alpha}{2r^2} \int_0^a q(t)dt \right] + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),
\end{aligned}$$

$$B_2 = -\frac{\alpha}{r}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}r\sin\sqrt{\lambda}a + \cos\sqrt{\lambda}r\cos\sqrt{\lambda}a \left[1 + \frac{\alpha}{2r^2} \int_0^a q(t)dt \right] \\ + \frac{1}{r}\sin\sqrt{\lambda}r\sin\sqrt{\lambda}a \left[1 - \frac{\alpha}{2} \int_0^a q(t)dt \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\right),$$

$\varphi(x, \lambda) = C(x, \lambda)$, olduğundan (4.8)-(4.15) kullanarak hesaplıyoruz.

$$\varphi(x, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}rx + \frac{\sin\sqrt{\lambda}rx}{2\sqrt{\lambda}r} \int_0^x q(t)dt + \frac{\cos\sqrt{\lambda}rx}{4\lambda r^2} \left\{ q(x) - q(0) - \frac{1}{2} \left(\int_0^x q(t)dt \right)^2 \right\} \\ + O\left(\frac{1}{\lambda^{3/2}} \exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)\right), \quad x < a$$

$$\varphi(x, \lambda) = -\alpha\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}r\sin\sqrt{\lambda}(x-a) \\ + \cos\sqrt{\lambda}r\cos\sqrt{\lambda}(x-a) \left[r + \frac{\alpha}{2} \int_0^a q(t)dt \right] \\ - \sin\sqrt{\lambda}r\sin\sqrt{\lambda}(x-a) \left[r + \frac{\alpha}{2r} \int_0^a q(t)dt \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}r\cos\sqrt{\lambda}(x-a) \\ \left[\frac{1}{2r} \int_0^a q(t)dt + \frac{r}{2} \int_a^x q(t)dt + \frac{\alpha}{4r} \int_0^a q(t)dt \int_a^x q(t)dt \right] \\ + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}r\sin\sqrt{\lambda}(x-a) \left\{ -\frac{q(x) + q(0)}{4} + \frac{1}{8} \left[\int_0^x q(t)dt \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2\alpha} \int_0^x q(t)dt - \frac{1}{4} \int_0^a q(t)dt \int_0^x q(t)dt \right\} \\ + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}r\sin\sqrt{\lambda}(x-a) \\ + a \left\{ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) \left[q(a) - q(0) - \frac{1}{2} \left(\int_0^a q(t)dt \right)^2 \right] \right\} \\ + O\left(\frac{1}{\lambda} \exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x)\right), \quad x > a. \quad (4.16)$$

(4.7) ve (4.16)' dan $Im\sqrt{\lambda} \rightarrow +\infty$ iken aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \varphi(\pi, \lambda) \\ &= \left[C_0\sqrt{\lambda} + \frac{1}{4}(1+r) + C_1 + C_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right] e^{-i\sqrt{\lambda}ra} \cdot e^{-i\sqrt{\lambda}(\pi-a)} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\lambda} e^{-i\sqrt{\lambda}ra} \cdot e^{-i\sqrt{\lambda}(\pi-a)}\right).\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}C_0 &= \frac{\alpha}{4i}, \quad C_1 = \frac{1}{8} \left[\frac{\alpha}{r} \int_0^a q(t) dt + \alpha \int_a^\pi q(t) dt \right], \\ C_2 &= \frac{1}{4i} \left\{ \frac{\alpha}{4} [q(\pi) + q(0)] - \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt + \frac{1}{2r} \int_0^a q(t) dt + \frac{r}{2} \int_a^\pi q(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{4} \int_0^a q(t) dt \int_0^\pi q(t) dt + \frac{\alpha}{4r} \int_0^a q(t) dt \int_a^\pi q(t) dt - \frac{\alpha}{8} \left[\int_0^\pi q(t) dt \right]^2 \right\}\end{aligned}$$

dir. $q(x) = 0$ için denklem (4.1)'in $\varphi_0(0, \lambda) = 1$, $\varphi'_0(0, \lambda) = 0$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü $\varphi_0(x, \lambda)$ ile gösterelim. $q(x) = 0$ için (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin tüm $\varphi_0(\pi, \lambda)$ kökleriyle çakıştığını net bir şekilde görebiliriz:

$$\begin{aligned}\varphi_0(x, \lambda) &= -\alpha\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}r\sin\sqrt{\lambda}(x-a) + \cos\sqrt{\lambda}r\alpha\cos\sqrt{\lambda}(x-a) \\ &\quad - r\sin\sqrt{\lambda}r\sin\sqrt{\lambda}(x-a).\end{aligned}$$

Denklem $\varphi_0(\pi, \lambda) = 0$ formunu alır.

$$\alpha\sqrt{\lambda}\tan(\pi-a) + r\tan\sqrt{\lambda}\tan\sqrt{\lambda}(\pi-a) = 1 \quad (4.17)$$

$\varphi_0(\pi, \lambda)$ fonksiyonunun kökleri ve dolayısıyla $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_n^0, \dots$ özdeğerleri (4.17) denkleminden belirlenir. Burada;

$$\varphi(\pi, \lambda) = \varphi_0(\pi, \lambda) + \left(C_1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} C_2 \right) e^{-i\sqrt{\lambda}ra} \cdot e^{-i\sqrt{\lambda}(\pi-a)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

dir.

4.3. İz problemi

Bu bölümün amacı, problem (4.1)-(4.3) için birinci dereceden regülerize olunmuş iz için bazı formüller elde etmektir.

Teorem 4.2. Varsayalım ki $q(x) \in W_2^2(0, \pi)$ ve

$$\frac{\alpha}{r} \int_0^a q(t) dt + \alpha \int_a^\pi q(t) dt = 0.$$

O zaman

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_n^0) &= \frac{1}{4} [q(0) + q(\pi)] + \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{r} - 1 \right) \int_0^a q(t) dt + \frac{1}{2\alpha} (r - 1) \int_0^\pi q(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^a q(t) dt \int_0^\pi q(t) dt + \frac{1}{4r} \int_0^a q(t) dt \int_a^\pi q(t) dt - \frac{1}{8} \left[\int_0^\pi q(t) dt \right]^2. \end{aligned}$$

İspat. $R \rightarrow +\infty$ için kalıntı teoremine göre (bkz [17], s.125) aşağıdakini elde ederiz

$$\begin{aligned} \sum_{|\lambda_n| < R} (\lambda_n - \lambda_n^0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=R} \lambda \left[\frac{\frac{d}{d\lambda} \varphi(\pi, \lambda)}{\varphi(\pi, \lambda)} - \frac{\frac{d}{d\lambda} \varphi_0(\pi, \lambda)}{\varphi_0(\pi, \lambda)} \right] d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{C_1}{C_0} \oint_{|\lambda|=R} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{2\pi i} \frac{C_2}{C_0} \oint_{|\lambda|=R} \frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=R} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) d\lambda. \end{aligned}$$

olduğundan

$$\oint_{|\lambda|=R} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = -4\sqrt{R}, \quad \oint_{|\lambda|=R} \frac{d\lambda}{\lambda} = 2\pi i, \quad \left| \oint_{|\lambda|=R} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) d\lambda \right| < O(1).$$

elde ederiz.

$$\sum_{|\lambda_n| < R} (\lambda_n - \lambda_n^0) = \frac{4\sqrt{R} C_1}{2\pi i C_0} - \frac{2\pi i C_2}{2\pi i C_0} + O(1). \quad (4.18)$$

Buradaki C_0, C_1, C_2 değerlerini $R \rightarrow +\infty$ ile değiştirirsek aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_n^0) &= \frac{1}{4} [q(0) + q(\pi)] + \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{r} - 1 \right) \int_0^a q(t) dt + \frac{1}{2\alpha} (r - 1) \int_0^\pi q(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^a q(t) dt \int_0^\pi q(t) dt + \frac{1}{4r} \int_0^a q(t) dt \int_a^\pi q(t) dt - \frac{1}{8} \left[\int_0^\pi q(t) dt \right]^2. \end{aligned}$$

(4.18)'in ispatı tamamlamış olur. $\square$

4.4.Sonuç

Bu çalışmada Delta-Fonksiyon Katsayılı ağırlıklı Sturm-Liouville Problemleri için regülerize iz formülleri hesaplamıştır. Çalışmamız önce Azerbaycan Matematik ve Mühendislik Enstitüsünde 29 Haziran-01 Temmuz tarihlerinde Uluslararası düzeyde gerçekleşen konferansta sunulmuş [20] ve çalışmamızın makalesi Bakü Matematik dergisinde yayınlanmıştır [21].



KAYNAKLAR

- [1] Gelfand, I.M., Levitan, B.M. (1953). "On a formula for eigenvalues of a differential operator of second order, Doklady Akademii Nauk SSSR", 88, 593-596.
- [2] Sadovnichii, V.A., Podolskii, V.E. (2006). Traces of operators, Uspekhi Mat. Nauk, 61(5), 89-156.
- [3] Gasymov, M.G. (1963). "On the sum of differences of eigenvalues of two self-adjoint operators, Doklady Akademii Nauk SSSR", 150, 1202-1205.
- [4] Gesztesy, F., Holden, H., Simon, B., Zhao, Z. (1996). "A trace formula for multi-dimensional Schrödinger operators, J. of Func. Analysis", 141, 449-465.
- [5] Guseinov, G.Sh., Levitan, B.M. (1978). "On trace formulas for Sturm-Liouville operators"(Russian), Vestnik Mosk. Univ., Ser. Mat. Mek., 1, 40-49.
- [6] Lax, P.D. (1994). "Trace formulas for the Schrödinger operator", Commun. Pure Appl. Math. 47, 503-512.
- [7] Levitan, B.M. (1964). "Calculation of the regularized trace for the Sturm-Liouville operator", Uspekhi Mat. Nauk, 19(1), 161-165.
- [8] Aliev, A.R., Manafov, M. Dzh. (2021). "A regularized trace formula for Sturm-Liouville operator equations with δ' -interaction", Differ. Uravneniya, 57(5), 583-589.
- [9] Savchuk, A.M. (2000). "First order regularized trace of Sturm-Liouville operator with δ -potential", Uspekhi Mat. Nauk, 55(6), 155-156.
- [10] Manafov, M.Dzh. (2021). "A regularized trace formula for weighted Sturm-Liouville equations with δ -interaction", Turkish J. of Math. 45(4), 1767-1774.
- [11] Savchuk, A.M., Shkalikov, A.A. (2001). "The trace formula for Sturm-Liouville operator with singular potentials", Math. Notes, 69(3), 387-400.
- [12] Vinokurov, V.A., Sadovnichii, V.A. (2002). "The asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions and a trace formula for a potential with delta functions", Differ. Uravneniya 38(6), 735-751.
- [13] Levitan, B. M. (1987). Inverse Sturm-Liouville Problems. Zeist: VSP.
- [14] Marchenko, V. A. (1986). "Sturm-Liouville operators and their applications". Operator Theory: Advanced and Application", Basel: Birkhauser.
- [15] Musayev, B. ve Alp, M. (2000). Foksiyonel Analiz. Kütahya: Nobel Yayınları.

- [16] Pöschel, J. ve Trubowitz, E. (1987). "Inverse Spectral Theory", New York: Academic Press.
- [17] Conway, J. B. (1995). Functions of one complex variable, (2nd edition), Springer, New York(USA): NY.
- [18] Freiling, G. ve Yurko, V. (2001). "Inverse sturm-liouville problems and their applications", Nova Science Publ. Inc., Hungtinton: NY.
- [19] Coddington, E.A., Levinson, N.(1955). Theory of Ordinary Diffeential Equations. NewYork: McGraw-Hill.
- [20] Manafov, M.Dzh., Karakush, A.(2022). "The regularized trace formula for Weighted Sturm-Liouville equation point δ -interaction", Proceedings of the International Conference devoted to the 110th anniversary of academician İ.İ.İbrahimov, Modern Problems of Mathematics and Mechonics, Baku/ Azarbaijan, 137.
- [21] Karakuş, A., Manafov, M.Dzh. (2022). "The regularized trace formula for Weighted Sturm-Liouville equation with δ -interaction, Baku Mathematical Journal, 1(2),164-171.
- [22] Hald, O. H. (1986). "Discontinuous inverse eigenvalue problems", Comm. on Pure ad Appl. Math. 37, 53-72.
- [23] Albereio, S., Gesztesy, F., Hoegh-Krohn, R., Holden, H. (with an appendix by P. Exner). (2005). "Solvable Models in Quantum Mechanics (second edition), Chelsea: AMS Publ.
- [24] Amirov, R. K. (2006). "On sturm-liouville operators with disontinuty conditions inside an interval", J. of Math. Anal. Appl. 317, 163-176.
- [25] Atkinson, J. W. (1964). An Introduction to Motivation Princeton, N. J: Van Nostrand.
- [26] Dikii, L.A. (1958). "Trace Formulas for Sturm-Liouville differential equations" (Russian), Uspekhi.Mat. Nauk.13(3), 111-143.
- [27] Guseniev, I. M. ve Mammadova, L. I.(2014). "Reconstruction of the diffusion equation with singular coefficients for two spectra", Doklady Akademii Nauk, 471(1), 13-16.
- [28] Jorgensen, P. J. (1969). "High temperature transport processes in lithium niobate", Journal of physics and chemistry of solids", December, 2639-2648.
- [29] Kablan, A. ve Manafov, M. Dzh. (2016). "Sturm-liouville problems with finitely many point δ - integrations and eigen-parameter in boundary condition", Miskole Math. Notes, 17(2) , 911-923.

- [30] Mammadova, L. I. (2010) “Representation on the solution of Sturm-Liouville equation with discontinuity conditions interior to interval”, Proceedings of IMM of NAS of Azerb. 33, 127-136.
- [31] Manafov, M. Dzh. (2016). “Inverse spectral problems for energy-dependent Sturm-Liouville equations with finitely many point δ -interactions”, Electronic Journal of Differential Equations, 11, 1–12.
- [32] Manafov, M. Dzh. (2016). “Inverse spectral problems for energy-dependent Sturm-Liouville equations with δ -interaction”, Filomat 30(11), 2935–2946.
- [33] Titchmarsh, E. C. (1962). Eigenfunction Expansions part 1. Oxford University Press (Clarendon Press).

