

DEMİRYOLU VAGONUNUN TİTREŞİM MODELİ VE ANALİZİ

125896

RAŞİT KIRIŞIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DENEYİM MERKEZİ

ŞUBAT 2002
ANKARA

Raşit KIRIşIK tarafından hazırlanan DEMİRYOLU VAGONUNUN TİTREşİM MODELİ VE ANALİZİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.



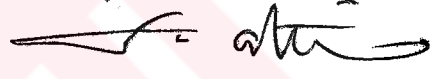
Yrd.Doç.Dr. şefaaddin YÜKSEL
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Makine Mühendisliği Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr. Yařar T. HONDUR



Üye : Doç.Dr. Nizami AKTÜRK



Üye : Yrd.Doç.Dr. şefaaddin YÜKSEL



Üye :

Üye :

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. MATEMATİKSEL MODEL VE DİNAMİK ANALİZ	9
2.1. Zemin ve Elastik Çubuk.....	9
2.1.1. Elastik çubuk	11
2.1.2. Elastik zemin	16
2.1.3. Elastik zemin ve ray denklemlerinin birleştirilmesi.....	17
2.2. Vagon	20
2.2.1. Plaka	21
2.3. Ray, Elastik Zemin ve Vagonun Beraber Modellenmesi.....	38
3. ÖRNEK SAYISAL ÇÖZÜMLER VE SONUÇLAR	43
3.1. Ray ve Zemin	43
3.1.1 Hareket ve malzemenin özellikleri	43
3.2. Vagon	51
3.3. Ray, Elastik Zemin ve Vagon.....	56

4.	SONUÇ VE ÖNERİLER	62
5.	KAYNAKLAR.....	64
6.	EKLER	69
7.	ÖZGEÇMİŞ	90



DEMİRYOLU VAGONUNUN TİTREŞİM MODELİ VE ANALİZİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Raşit KIRIŞIK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 2002

ÖZET

Bu tez çalışmasında, demiryolu vagonu ve üzerinde hareket ettiği ray modeli üç aşamada incelenmiştir. Birinci aşamada, ray ve elastik zemin birlikte ele alınıp ayırık sistem şeklinde modellenmiştir. Elde edilen ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımları şeklindeki hareket denklemleri, Runge-Kutta yöntemi ile çözülmüştür. İkinci aşamada ise vagon, basit plaka şeklinde düşünülüp hareket denklemi elde edilmiş ve Kelvin sınır şartları dahilinde analitik olarak çözülmüştür. Çalışmanın üçüncü aşamasında, ayrı ayrı modellenen ray-elastik zemin ve vagon sistemleri, aralarındaki ortak eleman olan teker sistemi yay ve sönümleyici şeklinde ele alınıp belirli bir t anı için beraberce çözülmüştür.

Elde edilen örnek sayısal sonuçlar grafikler halinde sunulmuş ve irdelenmiştir.

Bilim Kodu : 625.01.04

Anahtar : Titreşim, vagon titreşimi, ray-vagon sistemi.

Sayfa Adedi : 90

Tez Yöneticisi : Yrd.Doç.Dr. Şefaatdin YÜKSEL

VIBRATION MODEL AND ANALYSIS OF A RAILWAY WAGON
(M.Sc.Thesis)

Raşıit KIRIŞIK

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
February 2002

ABSTRACT

In this thesis, models of a railway wagon and track, on which the wagon moves, were investigated in three parts. In the first part, the track and elastic ground were considered together and modelled as a discrete system. Equations of motion were obtained as second order ordinary differential equations were solved by means of Runge-Kutta method. In the second part, the railway wagon was considered as a simple plate. Required equations of motion were derived and solved by including Kelvin type boundary conditions. In the third part of this study, the systems comprised of track-elastic ground and railway wagon, which were modelled separately, were considered together by taking into account the wheeling system represented by a spring and dashpot system and solved for a given time t .

Sample simulation results were obtained and examined in the form of graphs.

Science Code : 625.01.04

Key Words :Vibration, wagon vibration, rail-wagon system.

Page Number : 90

Tez Yöneticisi : Asst.Prof.Dr. Şefaatin YÜKSEL

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Yrd.Doç.Dr. Şefaaddin YÜKSEL 'e ve tezimin yazılmasında bana büyük sabırla destek veren eşim Mevlüde KIRIŞIK'a teşekkürü bir borç bilirim.



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Elastik ray ve zemin	2
Şekil 1.2. Vagon plakası	4
Şekil 1.3. Plaka modeli	5
Şekil 2.1. Ray, ray traversi ve balast	9
Şekil 2.2. Modellen ray ve zeminin herhangi bir elemanı	10
Şekil 2.3. Ray üzerinde ele alınan bir eleman	12
Şekil 2.4. Ele alınan vagon modeli	20
Şekil 2.5. Vagonun plaka şeklinde ele alınması	21
Şekil 2.6. Plaka üzerinde alınan bir küçük eleman	22
Şekil 2.7. Plaka ve Kelvin sınır şartları.....	28
Şekil 2.8. Ray, elastik zemin ve plaka.....	39
Şekil 2.9. Ray ve vagon plakasının ortak elemanları.....	39
Şekil 3.1. Elastik ray çubuğunun titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 108\text{km/saat}$	45
Şekil 3.2. Elastik ray çubuğunun titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 54\text{km/saat}$	46
Şekil 3.3. Elastik ray çubuğunun titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 27\text{km/saat}$	46
Şekil 3.4. Ray traversinin titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 108\text{km/saat}$	47
Şekil 3.5. Ray traversinin titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 54\text{km/saat}$	48
Şekil 3.6. Ray traversinin titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 27\text{km/saat}$	48
Şekil 3.7. Balastın titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 108\text{km/saat}$	49
Şekil 3.8. Balastın titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 54\text{km/saat}$	50
Şekil 3.9. Balastın titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 27\text{km/saat}$	50
Şekil 3.10. Plakanın $x=0, y=0$ noktasının titreşimi: $m=1$ ve $w_1=5,47 \text{ s}^{-1}$	53
Şekil 3.11. Plakanın $x=15, y=0$ noktasının titreşimi: $m=1$ ve $w_1=5,47 \text{ s}^{-1}$	54

Şekil 3.12.	Plakanın $x=30, y=0$ noktasının titreşimi: $m=1$ ve $w_1=5,47 \text{ s}^{-1}$	54
Şekil 3.13.	Plakanın $x=0, y=1,75$ noktasının titreşimi: $m=1$ ve $w_1=5,47 \text{ s}^{-1}$	54
Şekil 3.14.	Plakanın $x=15, y=1,75$ noktasının titreşimi: $m=1$ ve $w_1=5,47 \text{ s}^{-1}$	55
Şekil 3.15.	Plakanın $x=30, y=1,75$ noktasının titreşimi: $m=1$ ve $w_1=5,47 \text{ s}^{-1}$	55
Şekil 3.16.	Plakanın titreşimi : $m=1, w_1=5,47 \text{ s}^{-1}, v_{\text{vagon}} = 108 \text{ km/saat}$	56
Şekil 3.17.	Plakanın $x=0, y=0$ noktasının titreşimleri: $m=1, w_1=5,47 \text{ s}^{-1}, w_{dm1} = 5,453 \text{ s}^{-1}$ ve $\xi_{m1} = 0,078$	57
Şekil 3.18.	Plakanın $x=15, y=0$ noktasının titreşimleri: $m=1, w_1=5,47 \text{ s}^{-1}, w_{dm1} = 5,453 \text{ s}^{-1}$ ve $\xi_{m1} = 0,078$	57
Şekil 3.19.	Plakanın $x=30, y=0$ noktasının titreşimleri: $m=1, w_1=5,47 \text{ s}^{-1}, w_{dm1} = 5,453 \text{ s}^{-1}$ ve $\xi_{m1} = 0,078$	58
Şekil 3.20.	Plakanın $x=0, y=1,75$ noktasının titreşimleri: $m=1, w_1=5,47 \text{ s}^{-1}, w_{dm1} = 5,453 \text{ s}^{-1}$ ve $\xi_{m1} = 0,078$	58
Şekil 3.21.	Plakanın $x=15, y=1,75$ noktasının titreşimleri: $m=1, w_1=5,47 \text{ s}^{-1}, w_{dm1} = 5,453 \text{ s}^{-1}$ ve $\xi_{m1} = 0,078$	58
Şekil 3.22.	Plakanın $x=30, y=1,75$ noktasının titreşimleri: $m=1, w_1=5,47 \text{ s}^{-1}, w_{dm1} = 5,453 \text{ s}^{-1}$ ve $\xi_{m1} = 0,078$	59
Şekil 3.23.	Elastik ray çubuğunun titreşimi : $m=1, w_1=5,47 \text{ s}^{-1}$	60
Şekil 3.24.	Plakanın titreşimi : $m=1, w_1=5,47 \text{ s}^{-1}, v_{\text{vagon}} = 108 \text{ km/saat}$	61

SİMGELER VE KISALTMALAR

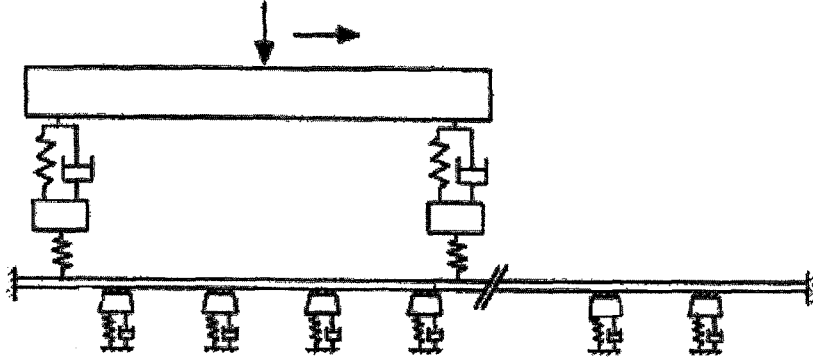
Simgeler	Açıklama
m_s	Ray traversi kütlesi,
m_B	Balast kütlesi.
k_s	Ray ile ray traversi arasındaki yay katsayısı,
c_s	Ray ile ray traversi arasındaki sönüm katsayısı,
k_B	Ray traversi ile balast arasındaki yay katsayısı,
c_B	Ray traversi ile balast arasındaki sönüm katsayısı,
k_G	Balast ile zemin arasındaki yay katsayısı,
c_G	Balast ile zemin arasındaki sönüm katsayısı.
y_1	Vagon plakasının deplasmanı.
y_2	Vagon plakasının deplasmanı.
b	Vagon boyu.
a	Vagon genişliği.
D	Eğilme rijitliği.
ν	Poisson oranı.
ρ	Birim plaka kütlesi.

1. GİRİŞ

Günümüzde, mühendislikte yapılan kabullerin fiziksel olayın gerçeklerine daha yakın olduğu gözlemlenmektedir. Geçmişte hareketli taşıtların modellenmesinde, sadece taşıta gelen etkinin sönümlenmesi göz önüne alınırken, günümüzde ise zemin ile olan etkileşiminin de hesaba katılması önem kazanmıştır. Raylı sistemlerde vagonun maruz kaldığı titreşimin azaltılması, dalganın yayıldığı ortam ile ray-vagon sisteminin birlikte değerlendirilmesi gerektirmektedir. Ray üzerinde hareket eden vagonun modellenmesinde; ray, zemin ve vagon tek bir sistem olarak ele alınmalıdır.

Bu konuda yapılan çalışmalar; vagonun dinamik davranışının ön planda olduğu, rayda meydana gelen bozulmaların ve yüzey pürüzlülüğünün ele alındığı, oluşan titreşimin çevredeki binalar üzerine etkisinin incelendiği, elastik zemin üzerinde varsayılan ray ve vagon davranışlarının araştırıldığı ve sistemi oluşturan elemanların değişik şekillerde modellenmesi olmak üzere beş alana ayrılabilir.

Literatürde, ray ve zeminin modellenmesi üzerine, elastik çubuk ve elastik zemin kabullerine dayalı çok sayıda çalışmaya rastlanmaktadır. Yapılan çalışmaların çoğu Şekil 1.1 de gösterildiği gibi elastik zemin üzerine yerleştirilen sonsuz uzunluktaki bir çubuğun üzerinde hareket eden araç kabulünden yola çıkmıştır. Ayrıca, ele alınan sistemler simetrik olduğundan, vagonun çift ray yerine tek ray üzerinde olduğu düşünülmüştür.



Şekil 1.1 Elastik ray ve zemin

Sheng et al. [1], ray ve seviyelendirilmiş zemin titreşimlerini kapsayan demiryolu - zemin titreşim modeli üzerine çalışmışlardır. Dalga yayılma hızının altındaki hızlarda hareket eden model trenin, zemini statik olarak etkilediğini göstermişlerdir. Nielsen and Igeland [2], rayın balast ve ray traversi ile desteklendiği ve ayrıca ray traversinin elastik zemin üzerinde olduğunu kabul etmişlerdir. Ele aldıkları sistemin ayırık modelini oluşturmuşlar ve yüklemenin simetrik olduğu kabulü ile düşey titreşimleri incelemişlerdir. Ray modeli, iki ucu ankastre olan bir çubuk şeklinde düşünülmüştür. Ele alınan çubuğun uzunluğu boyunca ray traversleri, 34 adet olarak modele katılmıştır. Balastın; kütsüz, viskoz ve elastik olduğu varsayılmıştır.

Başka bir çalışmada, Jones et al. [3], trenin neden olduğu zemin titreşimlerini incelemişlerdir. Titreşimin, yüzey pürüzlüğünün neden olduğu dinamik kuvvetler ile ray şeklinin yük altında bozulmasından kaynaklandığını göstermişlerdir.

Ray ve zemin malzemesinin, ele alınan sistemin titreşimleri üzerine etkisi olduğu açıktır. Çeşitli malzemelerin sönüm etkisi, Kubomura et al. [4] tarafından araştırılmıştır. Yapılan çalışmada, geri dönüşüm malzemelerinden yapılan balastın ses sönümlerme etkisinin, yüksek frekanslarda daha fazla olduğu belirlenmiştir. Benzer bir çalışmada, zemini oluşturan malzemenin

değişken bir elastik yapıya sahip olduğunu kabul eden Thambiratnam [5], çubuk üzerindeki hareketli yükün etkisi altındaki elastik çubuk ve zeminin davranışlarını incelemiştir.

Demiryolu raylarının dinamik davranışlarının incelendiği başka bir çalışmada Gry and Gontier [6], rayda yayılan dalgayı modellerine esas almışlar ve rayı, Timeshenko çubuğu olarak ele almış ve dinamik davranışlarını incelemişlerdir. Yapılan hesaplamaların deneysel sonuçlardan farklı olduğunu göstermişlerdir. Diğer bir çalışmada Gry [7], demiryolunda kullanılan ray traverslerinin detaylı şekilde incelenmesinin, titreşimlerin ve gürültünün azaltılması üzerine etkin olduğu görüşünden yola çıkıp beton ray traverslerinin dinamik modelini oluşturmuştur. Ray traverslerini, Timeshenko çubuğu olarak ele almış ve çözüm sonuçlarını ele aldığı 12 değişik ray traversinin deneysel sonuçları ile karşılaştırmıştır. Benzer bir çalışmada Grassie [8], beton ray traverslerinin kesit yapısının düzgün olmadığı durumu ele alarak ray traverslerinin bir dinamik modelini oluşturmuştur.

Andersen et al. [9], Kelvin zeminin üzerine yerleştirilen ray üzerindeki pürüzlerin hareketli araca etkisini incelemişlerdir. Bu çalışmada, ray Euler çubuk olarak ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlar neticesinde, aracın hızı arttıkça çubuk ile araç arasındaki etkileşimin ihmal edilebileceği belirlenmiştir. Rayların üzerinde oluşan aşınmalar nedeniyle raylarda oluşan titreşimleri inceleyen Bracciali et al. [10] çalışmalarında, deneysel sonuçlar ile sayısal çözümleri karşılaştırmışlardır.

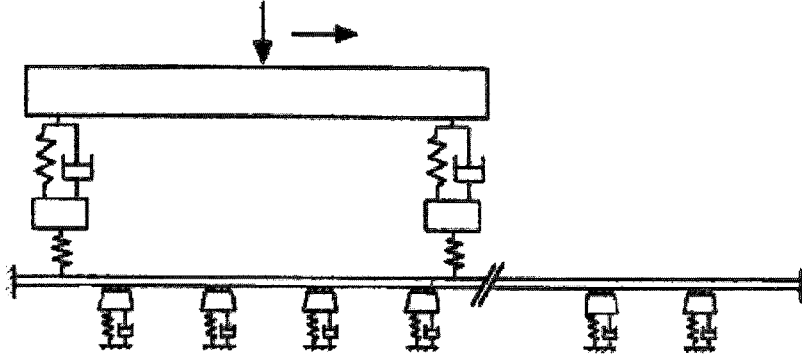
Diğer bir çalışmada Jing [11], demiryolu aracındaki doğrusal olmayan salınımları incelemiş ve doğrusal olmayan kritik hızın, araç hızı olması gerektiğini vurgulamıştır. Vagon tekeri ve ray arasındaki etkileşimi göz önünde bulundurarak oluşturduğu model ile vagonun dinamik davranışını ele almıştır.

1. GİRİŞ

Günümüzde, mühendislikte yapılan kabullerin fiziksel olayın gerçeklerine daha yakın olduğu gözlemlenmektedir. Geçmişte hareketli taşıtların modellenmesinde, sadece taşıta gelen etkinin sönümlenmesi göz önüne alınırken, günümüzde ise zemin ile olan etkileşiminin de hesaba katılması önem kazanmıştır. Raylı sistemlerde vagonun maruz kaldığı titreşimin azaltılması, dalganın yayıldığı ortam ile ray-vagon sisteminin birlikte değerlendirilmesi gerektirmektedir. Ray üzerinde hareket eden vagonun modellenmesinde; ray, zemin ve vagon tek bir sistem olarak ele alınmalıdır.

Bu konuda yapılan çalışmalar; vagonun dinamik davranışının ön planda olduğu, rayda meydana gelen bozulmaların ve yüzey pürüzlülüğünün ele alındığı, oluşan titreşimin çevredeki binalar üzerine etkisinin incelendiği, elastik zemin üzerinde varsayılan ray ve vagon davranışlarının araştırıldığı ve sistemi oluşturan elemanların değişik şekillerde modellenmesi olmak üzere beş alana ayrılabilir.

Literatürde, ray ve zeminin modellenmesi üzerine, elastik çubuk ve elastik zemin kabullerine dayalı çok sayıda çalışmaya rastlanmaktadır. Yapılan çalışmaların çoğu Şekil 1.1 de gösterildiği gibi elastik zemin üzerine yerleştirilen sonsuz uzunluktaki bir çubuğun üzerinde hareket eden araç kabulünden yola çıkmıştır. Ayrıca, ele alınan sistemler simetrik olduğundan, vagonun çift ray yerine tek ray üzerinde olduğu düşünülmüştür.



Şekil 1.1 Elastik ray ve zemin

Sheng et al. [1], ray ve seviyelendirilmiş zemin titreşimlerini kapsayan demiryolu - zemin titreşim modeli üzerine çalışmışlardır. Dalga yayılma hızının altındaki hızlarda hareket eden model trenin, zemini statik olarak etkilediğini göstermişlerdir. Nielsen and Igeland [2], rayın balast ve ray traversi ile desteklendiği ve ayrıca ray traversinin elastik zemin üzerinde olduğunu kabul etmişlerdir. Ele aldıkları sistemin ayrık modelini oluşturmuşlar ve yüklemenin simetrik olduğu kabulü ile düşey titreşimleri incelemişlerdir. Ray modeli, iki ucu ankastre olan bir çubuk şeklinde düşünülmüştür. Ele alınan çubuğun uzunluğu boyunca ray traversleri, 34 adet olarak modele katılmıştır. Balastın; kütsüz, viskoz ve elastik olduğu varsayılmıştır.

Başka bir çalışmada, Jones et al. [3], trenin neden olduğu zemin titreşimlerini incelemişlerdir. Titreşimin, yüzey pürüzlüğünün neden olduğu dinamik kuvvetler ile ray şeklinin yük altında bozulmasından kaynaklandığını göstermişlerdir.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

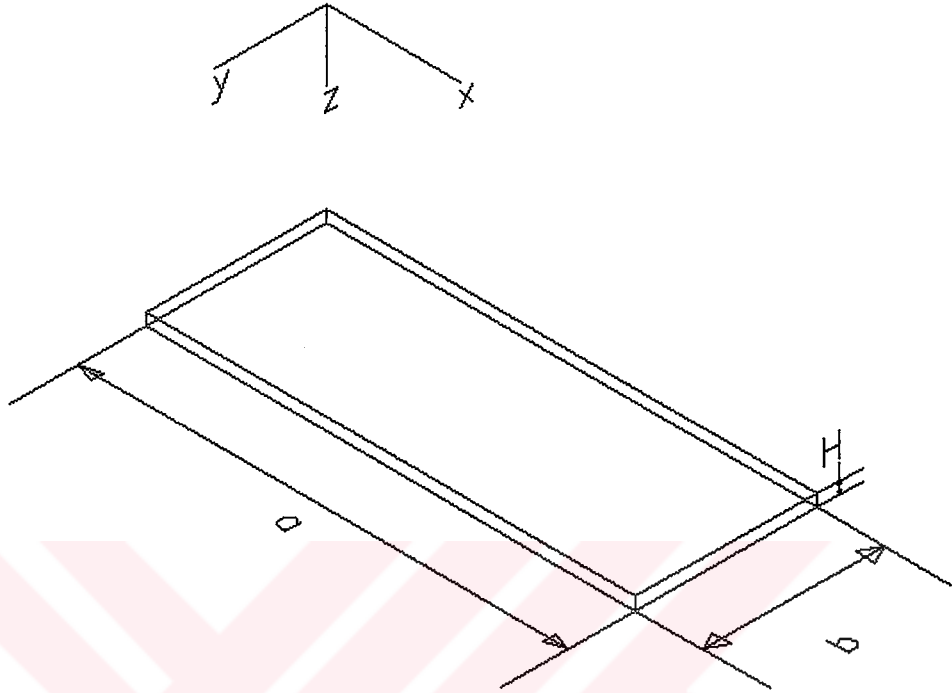
Ray ve zemin malzemesinin, ele alınan sistemin titreşimleri üzerine etkisi olduğu açıktır. Çeşitli malzemelerin sönüm etkisi, Kubomura et al. [4] tarafından araştırılmıştır. Yapılan çalışmada, geri dönüşüm malzemelerinden yapılan balastın ses sönümleme etkisinin, yüksek frekanslarda daha fazla olduğu belirlenmiştir. Benzer bir çalışmada, zemini oluşturan malzemenin

değişken bir elastik yapıya sahip olduğunu kabul eden Thambiratnam [5], çubuk üzerindeki hareketli yükün etkisi altındaki elastik çubuk ve zeminin davranışlarını incelemiştir.

Demiryolu raylarının dinamik davranışlarının incelendiği başka bir çalışmada Gry and Gontier [6], rayda yayılan dalgayı modellerine esas almışlar ve rayı, Timeshenko çubuğu olarak ele almış ve dinamik davranışlarını incelemişlerdir. Yapılan hesaplamaların deneysel sonuçlardan farklı olduğunu göstermişlerdir. Diğer bir çalışmada Gry [7], demiryolunda kullanılan ray traverslerinin detaylı şekilde incelenmesinin, titreşimlerin ve gürültünün azaltılması üzerine etkin olduğu görüşünden yola çıkıp beton ray traverslerinin dinamik modelini oluşturmuştur. Ray traverslerini, Timeshenko çubuğu olarak ele almış ve çözüm sonuçlarını ele aldığı 12 değişik ray traversinin deneysel sonuçları ile karşılaştırmıştır. Benzer bir çalışmada Grassie [8], beton ray traverslerinin kesit yapısının düzgün olmadığı durumu ele alarak ray traverslerinin bir dinamik modelini oluşturmuştur.

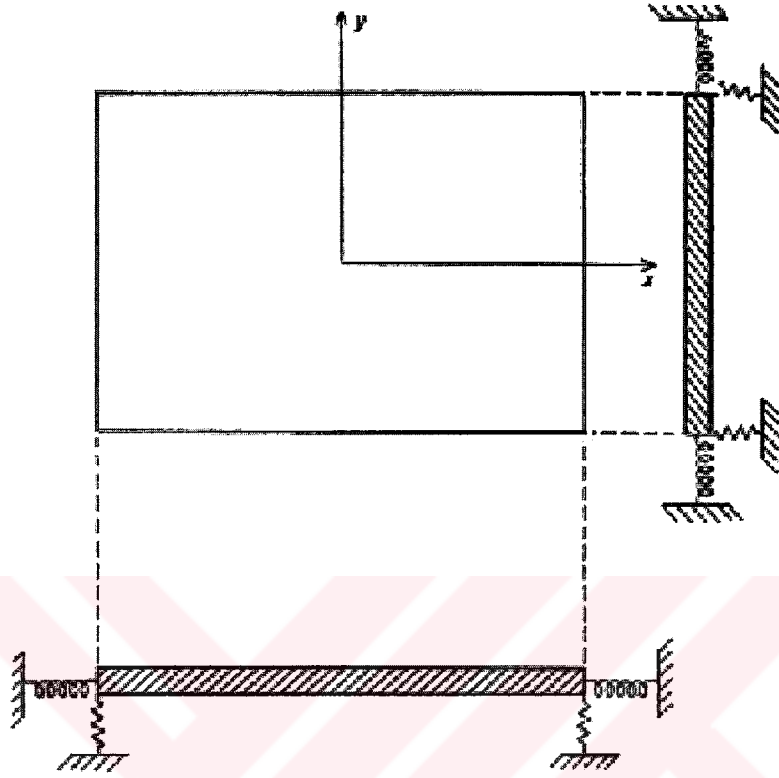
Andersen et al. [9], Kelvin zeminin üzerine yerleştirilen ray üzerindeki pürüzlerin hareketli araca etkisini incelemişlerdir. Bu çalışmada, ray Euler çubuk olarak ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlar neticesinde, aracın hızı arttıkça çubuk ile araç arasındaki etkileşimin ihmal edilebileceği belirlenmiştir. Rayların üzerinde oluşan aşınmalar nedeniyle raylarda oluşan titreşimleri inceleyen Bracciali et al. [10] çalışmalarında, deneysel sonuçlar ile sayısal çözümleri karşılaştırmışlardır.

Diğer bir çalışmada Jing [11], demiryolu aracındaki doğrusal olmayan salınımları incelemiş ve doğrusal olmayan kritik hızın, araç hızı olması gerektiğini vurgulamıştır. Vagon tekeri ve ray arasındaki etkileşimi göz önünde bulundurarak oluşturduğu model ile vagonun dinamik davranışını ele almıştır.



Şekil 1.2 Vagon plakası

Bu tez çalışmasında vagon, Şekil 1.2 de gösterilen plaka şeklinde modellenecektir. Literatürde, çok çeşitli plaka modelleri üzerine çalışmalar yapılmıştır. Laura et al. [12] nın yaptığı çalışmada, Şekil 1.3 de gösterildiği gibi bir model ele alınmıştır. Plaka yer değiştirmeye ve dönmeye karşı elastik olarak sınırlandırılmıştır. Bu modelin yaklaşık çözümü Rayleigh-Ritz metodu kullanılarak yapılmış ve temel frekansları bulunmuştur. Gorman [13], sınır şartları rastgele dağıtılmış elastik desteklerden oluşan bir plaka ele alarak serbest titreşimini incelemiştir. Elastik destekleri oluşturan yayların, seri şekilde bağlı olduğunu düşünerek sınır şartlarının parabolik dağılımını sağlamıştır.



Şekil 1.3 Plaka modeli

Leissa [14] nın çalışması, plaka titreşimi konusundaki temel çalışmalardan bir tanesidir. Bu çalışmada, çeşitli sınır şartlarına sahip plakalar ele alınarak analitik olarak çözüme ulaşılmıştır. İncelenen plakalarda, kenarların birbirine oranı 0.4, 2/3, 1.0, 1.5 ve 2.5 olarak seçilmiştir. Poisson oranındaki değişmelerin plaka titreşimi üzerindeki etkileri de incelenmiştir.

Serbest plaka titreşimini inceleyen Gorman [15], çalışmasında süperpozisyon yöntemini kullanarak plakanın tamamen serbest olduğu durum için analitik olarak çözüm elde etmiştir. Leissa et al. [16], düzgün olmayan elastik köşe destekli dikdörtgen plakanın titreşimlerini inceledikleri çalışmada, analitik yöntemle daha önce elde edilen sonuçları Ritz yönteminden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmışlardır. Prakash [17] çalışmasında, plakayı yarı

sonsuz ele alarak dikdörtgen plakanın serbest titreşimini incelemiştir. Singhal and Gorman [18], kenarları kısmi olarak basit mesnetli olan plakayı, rijit nokta destekli ve serbest olmak üzere iki aşamada ele almışlar ve analitik çalışmalarında süperpozisyon metodunu kullanmışlardır.

Plaka titreşimleri çalışıldığında, kısmi diferansiyel denklem ile karşılaşılmaktadır. Bu kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü oldukça zordur. Bu nedenle, elde edilen denklemleri adi diferansiyel denklemlere dönüştürmek uygun olmaktadır. Bu konuda yapılan bir çalışmada Rajalingham et al. [19], Rayleigh-Ritz metodunu kullanarak çeşitli kenar boyut oranlarındaki plakaların temel frekanslarını elde etmişlerdir.

Laura et al. [20] çalışmalarında, elastik desteğe ve nokta kütlelere sahip olan ince bir elastik plakayı ele alarak incelemiştir. Bu çalışmada, polinom yaklaşımı ve Galerkin yöntemi kullanılarak plaka denklemleri ankastre ve basit mesnetli sınır şartlarına sahip olduğu durumlar için çözülmüştür. Diğer bir çalışmada, aynı sınır şartlarına sahip fakat kalınlığı değişken olan bir plaka, Gutierrez et al. [21] tarafından ele alınmış ve Ritz yöntemi ile çözüme ulaşılmıştır.

Kadiri et al. [22], büyük titreşim genliğine sahip plakanın hareket denklemlerini doğrusal olmayan cebirsel denklemler haline dönüştürerek sayısal olarak çözmüşlerdir. Yaptıkları bu çalışmada; büyük genlikte ve ankastre uca yakın gerilmelerin, doğrusal teoriden elde edilenlerden daha büyük olduğunu göstermişlerdir.

Plakalar üzerinde yapılan çalışmaların bir pratik uygulaması Kato and Honma [23] nın yapmış oldukları çalışmada görülmektedir. Bu çalışmada, bina zemini plaka olarak modellenmiştir. Sınır şartlarını ise yer değiştirmeye ve dönmeye karşı elastik olarak belirlemişlerdir. 1,0 ve 1,5 kenar şekli oranlarındaki plakalar ele almışlardır.

Ray, vagon ve zemin titreşimlerinin incelendiği başka bir grup çalışmada [24-34], titreşim sonucu oluşan gürültü ve çevreye etkisi detaylı olarak incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında, vagon, ray ve elastik zemin üç aşamada incelenmiştir. Birinci aşamada; zemini oluşturan ray traversleri birbirinden bağımsız elemanlar olduğundan ray ve zemin ayırık sistem olarak modellenmiştir. Zemin; ray traversi, balast ve elastik zemin olarak üç kısma ayrılmıştır. Ray traversi ve balastın; kütle, yay ve sönümleyici elemanlardan oluştuğu kabul edilmiştir. Bu çalışmada, daha önceki çalışmalardan farklı olarak zeminin viskoz sönüm etkisi de göz önüne alınmıştır. Zeminin etkisi, kütsüz yay ve kütsüz sönümleyici olarak sisteme dahil edilmiştir. Newton'un ikinci kanunu kullanılarak ele alınan sistemin hareketi modellenmiştir.

Elastik zeminin ayırık modeli nedeniyle; sürekli bir sistem olan ray, elastik çubuk olarak ele alınıp sonlu elemanlar yöntemiyle ayırık sistem haline getirilmiştir. Burada sürekli sistemlerin ayırık olarak modellenmesinde sıkça kullanılan Hermite kübik interpolasyon fonksiyonları kullanılmıştır.

Ray ve elastik zemin modelleri birleştirilerek sistemin hareket denklemleri matris formunda, ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı halinde elde edilmiştir. Daha sonra, bu ikinci mertebe denklemler birinci mertebe denklemlere dönüştürülmüştür. Bu denklemler, sembolik ve sayısal işlemin beraber uygulanabildiği Matlab bilgisayar programlama dilinde hazırlanan bilgisayar programları ile çözülmüştür.

İkinci aşamada; zemin ile etkileşimin en çok vagon tabanında olduğu varsayılmış ve vagon, taban geometrisine benzer olan plaka şeklinde ele alınmıştır. Sistemin düşey titreşimleri incelendiğinden, vagonun yan yüzeylerinin ve tavanın titreşimleri, taban titreşimi ile benzer şekilde olacaktır. Ayrıca, vagonun tekerlek kütlelerinin etkisi plaka modelinin içinde düşünülmüştür.

Vagon, öncelikle dört kenarında yay bulunan bir basit plaka olarak incelenmiş ve sistemin doğal frekansları elde edilmiştir. Daha sonra, yay bulunan kenarlara sönümleyici konulup ve sönümleyiciler sisteme uygulanan dış kuvvetler şeklinde düşünülüp, sistemin analitik hareket denklemi elde edilmiştir. Bu denklem çözülerek plakanın çeşitli noktalarındaki elastik yer değiştirmeler bulunmuştur.

Son aşamada, daha önce ayrı ayrı çözülen ray ve elastik zemin ile vagon birlikte ele alınmıştır. Bu iki sistem arasındaki fiziksel bağlantı, tekerlek sistemindeki yay ve sönümleyicidir. Bu iki mekanik eleman vagonun sınır şartlarını oluşturmaktadır. Aynı zamanda, bu elemanlar aracılığı ile raylara kuvvet uygulanmaktadır. Bu durum, modellenmesi ve çözümü ayrı ayrı yapılan iki sistemin ortak etkileşim özelliği olup beraber çözüm için kullanılmıştır.

Çözüm yöntemi olarak; ray ve elastik zemin modeline, öncelikle vagonun dörtte bir ağırlığı kadar kuvvet uygulanıp rayın elastik yer değiştirmesi bulunmuştur. Buradan elde edilen yer değiştirme, plaka modeline giriş olarak verilmiş ve plakanın elastik yer değiştirmesi elde edilmiştir. Bu yeni veriler yardımıyla ray ve elastik zemin problemi yay ve sönümleyicinin uyguladığı kuvvet girdisi ile tekrar çözülmüştür. Bu şekilde oluşturulan döngüye, bir önceki adımda bulunan değerle bir sonraki adımda bulunan değer arasındaki fark %0,1 oluncaya kadar devam edilmiştir. Bu şekilde herhangi bir t anı için bulunan çözümün gerçeğe yakın olacağı açıktır.

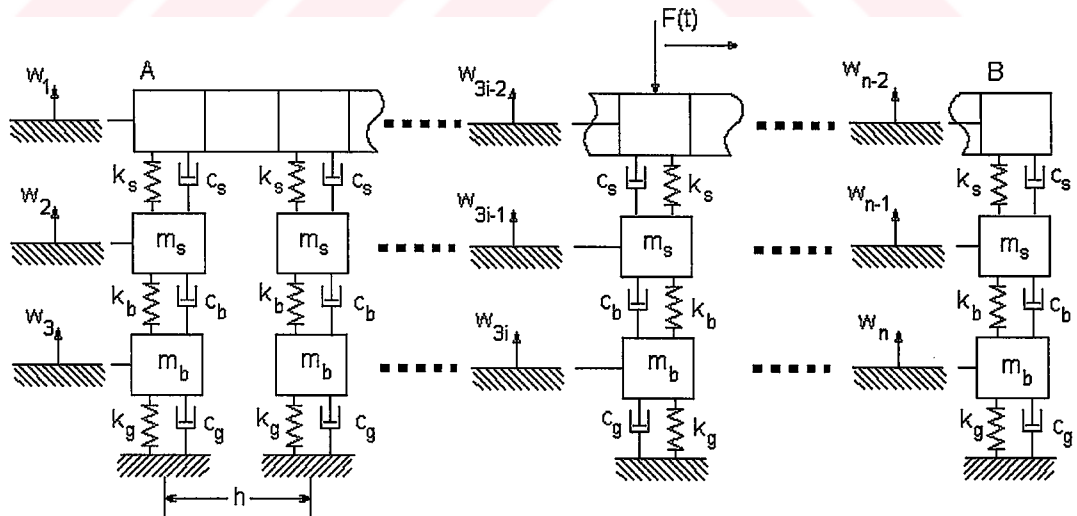
Her üç aşamada bulunan sayısal çözümler grafikler şeklinde sunulmuş ve irdelenmiştir.

2. MATEMATİKSEL MODEL VE DİNAMİK ANALİZ

Bu bölümde, iki aşamadan oluşan bir model ele alınacaktır. Birinci aşama, ray ve zemini oluşturan ray traversi ile balasttan oluşmaktadır. İkinci aşama ise vagonun plaka şeklindeki matematiksel modelini içermektedir.

2.1. Zemin ve Elastik Çubuk

Ray, ray traversi ve balast incelendiğinde, sistemin sürekli ve ayırık iki sistemden oluştuğu görülür. Burada, sürekli bir sistem olarak ele alınan elastik çubuk, sonlu elemanlar yöntemiyle ayırık şekle getirilmiştir. Şekil 2.1 de gösterildiği gibi rayın monte edildiği zemin üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısım, ray traversi olarak adlandırılan iki rayı kiriş gibi destekleyen elemandır. İkinci kısım, hem raya hem de ray traversine destek olan balasttır. Bu iki kısım; kütle, yay ve sönümleyici olarak düşünülmüştür. Üçüncü kısım olan zemin ise dolgu malzemesinden oluşmaktadır ve sistemdeki titreşimleri sönümlemek için kullanıldığından yay ve sönümleyici şeklinde modellenmiştir.



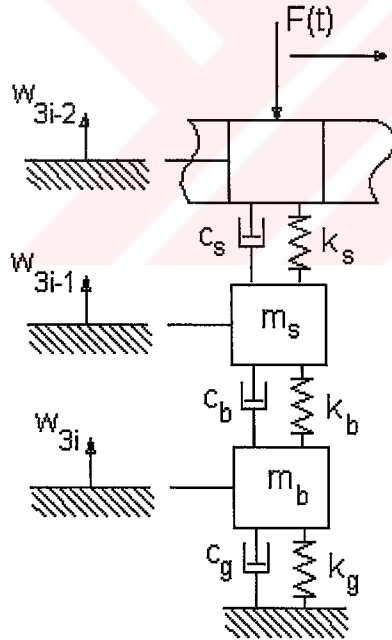
Şekil 2.1 Ray, ray traversi ve balast modeli

Şekil 2.1'de kullanılan sembollerin anlamları aşağıda açıklanmıştır:

k_s, c_s : Ray ile ray traversi arasındaki yay ve sönüm katsayıları,

- k_b, c_b : Ray traversi ile balast arasındaki yay ve sönüm katsayıları,
 k_g, c_g : Balast ile zemin arasındaki yay ve sönüm katsayıları,
 m_s : Ray traversinin bir elemanının kütlesi,
 m_b : Balastın bir elemanının kütlesi,
 w_1 : Rayın elastik yer değiştirmesi,
 w_2 : Ray traversinin elastik yer değiştirmesi,
 w_3 : Balastın elastik yer değiştirmesi,
 $F(t)$: Bu sisteme uygulanan hareketli kuvvet.

Ayrıca, Şekil 2.1 de; w_{3i-2} , w_{3i-1} ve w_{3i} olarak gösterilen semboller seçilen herhangi bir i'nci eleman grubunun elastik yer değiştirmeleridir. w_{n-2} , w_{n-1} ve w_n ise modellenen sistemin en son eleman grubunun elastik yer değiştirmeleridir.



Şekil 2.2 Modellen ray ve zeminin herhangi bir elemanı

Şekil 2.2 de gösterilen ayırık sistemin i'nci elemanına, Newton'un ikinci kanunu uygulanması sonucunda elde edilen bu bir hareket denklemi, matris formda aşağıdaki biçimde

$$EI \frac{d^4 \mathbf{w}}{dy^4} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

ifade edilir. Burada,

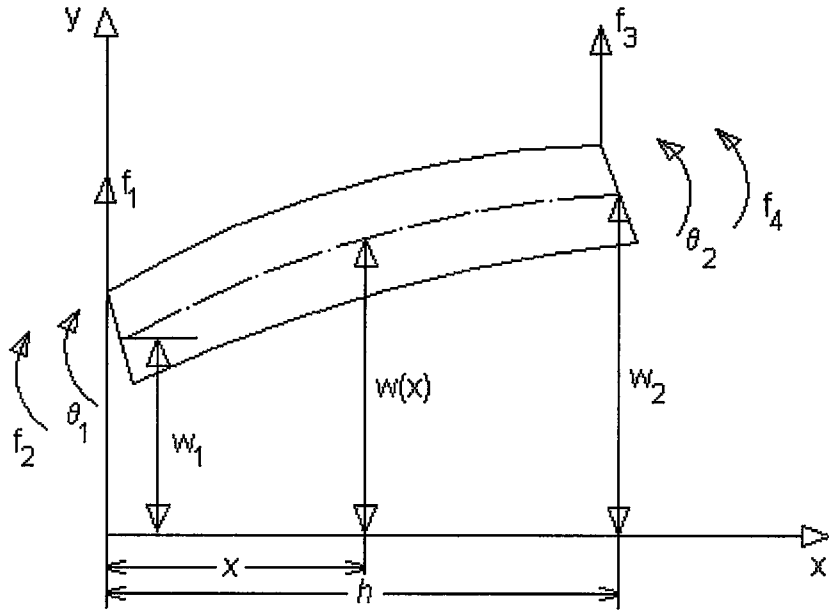
- M** : Kütle matrisi,
- C** : Sönüm matrisi,
- K** : Yay matrisi,
- F(t)** : Sisteme dışarıdan etki eden kuvvetler vektörü,
- w** : Ayrık sistemdeki her bir noktanın elastik yer değiştirmeler vektörü,
- EI** : Rayın eğilme rijitliği

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu denklemdeki elastik terim, rayın sisteme yapmış olduğu etkiyi göstermektedir. Bu terimin matris şeklinde ifade edilmesi için sonlu elemanlar yönteminden yararlanılacaktır.

2.1.1. Elastik çubuk

Elastik çubuk şeklinde düşünülen ray, ayrık elemanlara bölünmüştür. Her eleman iki uç noktasına sahiptir. Eleman sayısını; geometri, yükleme şekli ve malzeme özellikleri belirler. Elastik çubuk düzgün kesitli olup eşit uzunlukta elemanlara ayrılmıştır. Böyle bir eleman Şekil 2.3 de gösterilmiştir.



Şekil 2.3 Ray üzerinde ele alınan bir eleman

Şekil 2.3'de gösterilen semboller;

- f_1, f_3 : Kesme kuvvetleri,
- f_2, f_4 : Eğilme momentleri,
- θ_1, θ_2 : Eğilmeden kaynaklanan dönme açıları,
- w_1, w_2 : Elastik yer değiştirmeler,
- $w(x)$: Herhangi bir noktanın elastik yer değiştirmesi,
- h : Elemanın boyu

olarak tanımlanmıştır. Ele alınan düzgün kesit dağılımına sahip çubuk elemanın küçük hareketler yaptığı varsayıldığında, elastik hareketin diferansiyel denklemi

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = 0 \quad 0 < x < h \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklem, dördüncü mertebeden adi diferansiyel denklemdir. İntegrali alındığında

$$w(x) = \frac{1}{6}c_1x^3 + \frac{1}{2}c_2x^2 + c_3x + c_4 \quad (2.3)$$

elde edilir. Bu eşitlikte süreklilik şartları, $w(x)$ in ikinci türevinin sıfıra eşit olması şeklinde karşılanmış olur.

Şekil 2.3 deki sınır şartları her iki uçtaki yer değiştirme ve dönme açılarıdır. Bunlar;

$$w(0) = w_1, \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = \theta_1 \quad (2.4)$$

$$w(h) = w_2, \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=h} = \theta_2 \quad (2.5)$$

Şimdi, (2.3) ifadesine sınır şartları uygulandığında,

$$w(x) = L_1(x)w_1 + L_2(x)h\theta_1 + L_3(x)w_2 + L_4(x)h\theta_2 \quad (2.6)$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$L_i(x) ; \quad i = 1, \dots, 4$$

fonksiyonları Hermite kübik interpolasyon fonksiyonlarıdır ve

$$L_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{h}\right)^3$$

$$L_2(x) = \frac{x}{h} - 2\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{x}{h}\right)^3$$

(2.7)

$$L_3(x) = 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{h}\right)^3$$

$$L_4(x) = -\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{x}{h}\right)^3$$

şeklinde ifade edilir.

İnterpolasyon fonksiyonları ve rijitlik matrisleri, nokta kuvvetlerinin yapmış olduğu statik deformasyon prensibinden elde edilmiştir. İnterpolasyon fonksiyonları için yukarıda belirtilenlerden başka fonksiyonlar da seçilebilir. Burada oluşturulan interpolasyon fonksiyonları ikinci ve dördüncü mertebe problemler için kullanılabilecek en düşük mertebedeki polinomlardır.

Sonlu elemanlar yönteminde, yapının hareket denklemi ilk eleman için elde edildikten sonra bütün elemanların hareket denklemlerinin birleştirilmesi yöntemi kullanılır.

Şekil 2.3 deki dördüncü mertebe sistem için elastik yer değiştirme

$$w(x, t) = \mathbf{L}(\mathbf{x})^T \mathbf{x}(t) \quad (2.8)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ dört boyutlu interpolasyon vektörü ve $\mathbf{x}(t)$ ise dört boyutlu zamana bağlı yer değiştirme vektörüdür.

Şimdi, elemanın kinetik ve potansiyel enerjileri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^h m(x) \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{w}}(t)^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{w}}(t) \quad (2.8)$$

ve

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^h EI(x) \left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{w}(t)^T \mathbf{k} \mathbf{w}(t) \quad (2.9)$$

Buradaki görülen kütle ve yay matrisleri,

$$\mathbf{m} = \int_0^h m(x) \mathbf{L}(x) \mathbf{L}(x)^T dx \quad (2.10)$$

ve

$$\mathbf{k} = \int_0^h EI(x) \mathbf{L}''(x) \mathbf{L}''(x)^T dx \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Sonlu elemanlar yöntemini kullandığımızda ray çubuğunun ayırık modelinin kütle matrisi (2.10) ifadesinden

$$\mathbf{m} = \frac{m_r h}{420} \begin{bmatrix} 204 & 51 \\ 51 & 116 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ve yay matrisi ise (2.11) ifadesinden

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 28 & -16 \\ -16 & 4 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

şeklinde elde edilir.

Bu modellemede elastik çubuğun tam elastik yapıya sahip olduğu düşünüldüğünden çubuğun viskoz sönümlerme etkisi dikkate alınmamıştır.

Dinamik analiz için sabit xyz eksen takımı kullanılmaktadır. Şekil 2.3 de görülen hareket ve kuvvet durumuna sahip elastik sistemin y eksenini yönünde titreşimlere maruz kaldığı düşünülmüştür. Rayın, elastik zemin ve ray traversi ile etkileşimi kütle, yay ve sönümleyici şeklinde modellenmiştir.

2.1.2. Elastik zemin

Rayın üzerinde bulunduğu zemin, elastik kabul edilip elastik zeminin sönümleyici etkisinin olduğu varsayılmıştır. Ray traversi ve balast, iki raydan oluşan sisteme destek olduğundan, kütleleri iki eşit parça alınarak modellenmiştir. Yay ve sönümleyicilerin, iki raya olan etkilerinin eşit değerde olduğu kabul edilmiştir.

Şekil 2.2 de gösterilen ray traversi ve balast modeline, Newton'un ikinci kanunu uygulandığında (2.1) ifadesinde gösterilen kütle, sönüm ve yay matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_S & 0 \\ 0 & 0 & m_B \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -c_S & c_S + c_B & -c_B \\ 0 & -c_B & c_B + c_G \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -k_S & k_S + k_B & -k_B \\ 0 & -k_B & k_B + k_G \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Denklem (2.1) in tümüyle matris formda ifade edilebilmesi için elastik zeminin; kütle, yay ve sönümlleme matrisleri daha önce sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen rayın kütle ve yay matrisleri ile birleştirilmelidir.

2.1.3. Elastik zemin ve ray denklemlerinin birleştirilmesi

Matematiksel olarak ayrı ayrı modellenen iki sistem, süreklilik şartı için birleştirilmelidir. Şekil 2.1 de gösterilen yer değiştirmeler yardımıyla daha önce ray, ray traversi ve balast için elde edilen matrisler birleştirilecektir. Şimdi (2.12) den (2.16) ya kadar olan ifadeler kullanılarak tüm sistemin hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{F}(t) \quad (2.17)$$

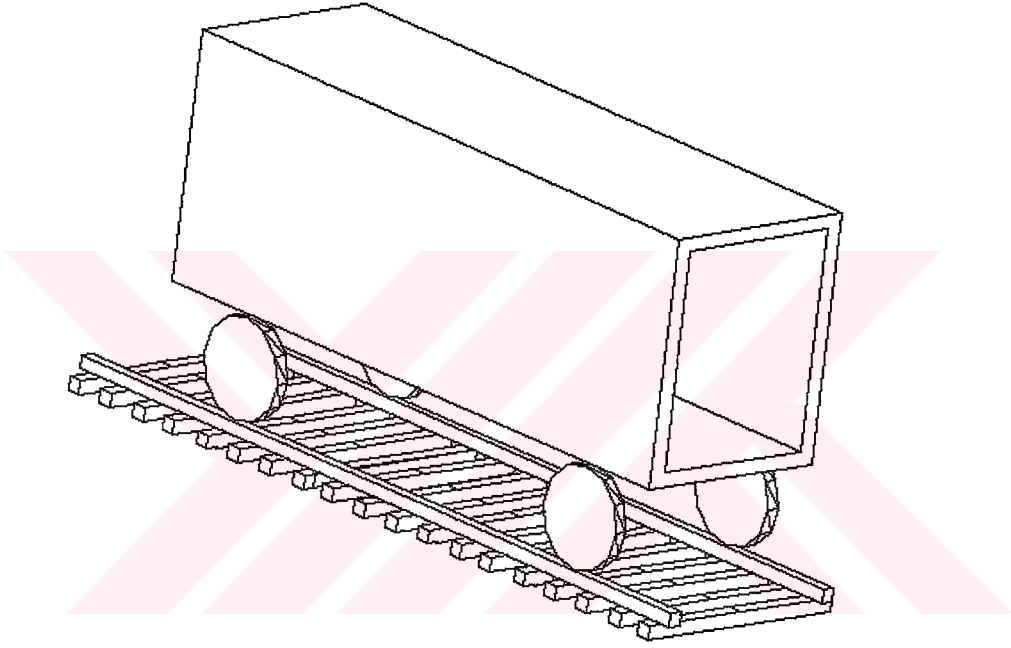
Burada; kütle, sönüm ve yay matrisleri

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{204}{420}mh & 0 & 0 & \frac{51}{420}mh & & & & \\ 0 & m_s & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & m_b & 0 & & & & \\ \frac{51}{420}mh & 0 & 0 & \frac{116}{420}mh + \frac{204}{420}mh & 0 & 0 & \frac{51}{420}mh & \\ & & & 0 & m_s & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & m_b & 0 & \\ & & & \frac{51}{420}mh & 0 & 0 & \frac{116}{420}mh + \frac{204}{420}mh & \\ & & & & & & & \dots\dots\dots \\ & & & & & & & \dots\dots\dots \\ & & & & & & \frac{204}{420}mh & 0 & 0 & \frac{52}{420}mh \\ & & & & & & 0 & m_s & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & m_b & 0 \\ & & & & & & \frac{52}{420}mh & 0 & 0 & \frac{116}{420}mh + \frac{204}{420}mh \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ -c_s & c_s + c_b & -c_b & 0 & & & & \\ 0 & -c_b & c_b + c_g & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & -c_s & c_s + c_b & -c_b & 0 & \\ & & & 0 & -c_b & c_b + c_g & 0 & \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & & \dots\dots\dots \\ & & & & & & & \dots\dots\dots \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & -c_s & c_s + c_b & -c_b & 0 \\ & & & & & & 0 & -c_b & c_b + c_g & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

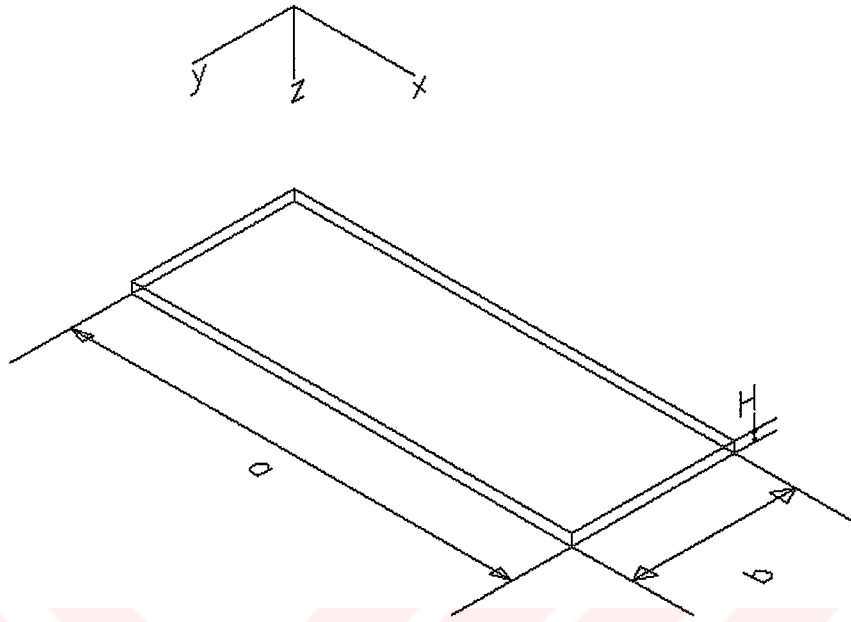
2.2. Vagon

Vagonun matematiksel modeli oluşturulurken öncelikle raya en yakın olan vagon tabanının geometrisi göz önüne alınmıştır. Bu şekilde düşünüldüğünde: Vagonun yanlarının ve tavanının titreşimleri, taban titreşimiyle aynı titreşim modlarına sahip olacaktır (Şekil 2.4).



Şekil 2.4 Ele alınan vagon modeli

Buradan hareketle vagon, Şekil 2.5 de görüldüğü gibi bir plaka şeklinde ele alınabilir. Şekilde ele alınan plakanın boyutları



Şekil 2.5 Vagonun plaka şeklinde ele alınması

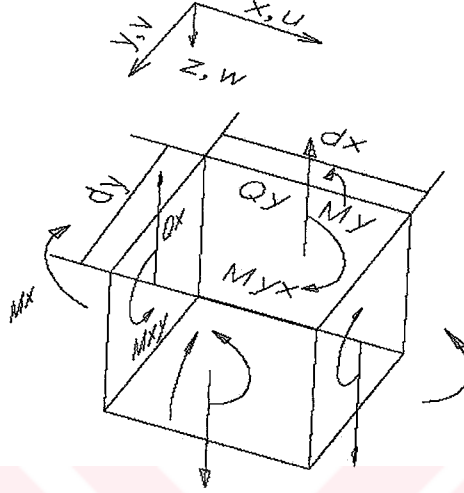
a: Vagonun boyu,
b: Vagonun genişliği,
H: Plakanın kalınlığı
olarak belirlenmiştir.

Ele alınan plakanın hareketinin diferansiyel denklemi ve belirlenen sınır şartları, vagonun hareketinin dinamik modelini oluşturur.

2.2.1. Plaka

Şekil 2.5 de ele alınan plakanın; elastik, düzgün ve izotropik olduğu düşünülmüştür. Plakanın, harekete başlamadan önce ve başladıktan sonra plaka özelliğini kaybetmediği varsayılmıştır. Bu kabuller nedeniyle, kesmenin neden olduğu yer değiştirmeler ve plakanın orta tabakasına dik gerilmeler ihmal edilmiştir. Ayrıca, plakanın düzgün ve simetrik olduğu kabul edilmiştir [37].

Hareket denklemini elde etmek amacıyla plaka üzerinde Şekil 2.6 da gösterilen bir küçük eleman ele alınsın. Burada gösterilen semboller;



Şekil 2.6 Plaka üzerinde alınan bir küçük eleman

- dx : Elemanın x eksenindeki boyu,
- dy : Elemanın y eksenindeki boyu,
- u : x eksenindeki elastik yer değiştirme,
- v : y eksenindeki elastik yer değiştirme,
- w : z eksenindeki elastik yer değiştirme,
- M_x : x eksenindeki eğilme momenti,
- M_{yx} : xy düzlemindeki kesme momenti,
- M_y : y eksenindeki eğilme momenti,
- Q_x : x eksenindeki kesme kuvveti,
- Q_y : y eksenindeki kesme kuvvetidir.

olarak tanımlanmıştır.

Küçük elemanın dinamik olarak dengede olabilmesi için x ve y eksenindeki momentlerin ve z eksenindeki dinamik kuvvetlerin toplamı sıfır olmalıdır:

$$\sum M_y = 0 \quad \sum M_x = 0 \quad (2.18)$$

$$\sum F_z + m' dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.19)$$

Burada, m' plaka kütlesinin birim alana oranıdır.

(2.18) ve (2.19) ifadeleri kullanıldığında,

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -m' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.22)$$

eşitlikleri elde edilebilir.

Şimdi (2.20) ve (2.21) ifadeleri, (2.22) ifadesinde yerine konulursa,

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -m' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.23)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin çözülebilmesi için mukavemet bilgisinden gelen gerilme, gerinme ve yer değiştirmeler arasındaki bağıntılar

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \quad (2.24)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \quad (2.25)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\gamma_{xy}) \quad (2.26)$$

kullanılacaktır. Şekil 2.6 da gösterilen eksen takımında aşağıdaki eşitlikler tanımlandığında

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.27)$$

yazılabilir. Buradan, (2.27) ifadesi (2.24), (2.25) ve (2.26) ifadelerinde yerine konulduğunda normal ve kayma gerilmeleri aşağıdaki gibi

$$\sigma_x = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.28)$$

$$\sigma_y = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.29)$$

$$\tau_{xy} = \frac{-Ez}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.30)$$

elde edilir. Plakanın düzgün ve simetrik olması nedeniyle kayma gerilmeleri birbirine eşittir:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.31)$$

Şimdi, x ve y eksenlerindeki momentler aşağıda verilen integraller

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (2.32)$$

kullanılarak bulunabilir.

(2.32) ifadesinde verilen integraller hesaplandıktan sonra (2.23) ifadesinde yerine konulduğunda, serbest plakanın hareket denklemi aşağıda verildiği şekilde

$$D\left(\frac{\partial^4 w(x,y,t)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w(x,y,t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x,y,t)}{\partial y^4}\right) = -\rho H \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} \quad (2.33)$$

elde edilir. Burada,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.34)$$

eğilme rijitliği olarak tanımlanmıştır.

Ele alınan plakanın elastik hareketinin diferansiyel denklemi olan (2.33) ifadesinin analitik olarak çözülmesi mümkündür.

Şimdi (2.33) kısmi diferansiyel denkleminin çözümü için

$$w(x,y,t) = w(x,y)f(t) \quad (2.35)$$

şeklinde biri konumun, diğeri de zamanın fonksiyonu olan iki fonksiyonun çarpımı şeklinde bir çözüm kabul edilsin. Bu yaklaşıma değişkenlere ayırma yöntemi denilmektedir. (2.35) ifadesi (2.33) ifadesinde yerine konulup düzenlenirse

$$\frac{D}{\rho H} \left(\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} \right) \frac{1}{w(x,y)} = -\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} \frac{1}{f(t)} \quad (2.36)$$

elde edilir.

Eşitliğin sol yanı yalnız konumun, sağ yanı ise yalnız zamanın fonksiyonudur. Hem konumun hem de zamanın bağımsız değişkenler olduğu göz önünde bulundurulursa, bu durum ancak her iki yanın da aynı sabite eşit olmasıyla mümkün olacaktır. Bu sabitin fiziksel varlığının olabilmesi için pozitif bir sabit olması gerekmektedir ve ω^2 olarak alınabilir. (2.36) ifadesi yeniden yazılırsa,

$$\frac{D}{\rho H} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \frac{1}{w(x, y)} = - \frac{1}{f(t)} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \omega^2 \quad (2.37)$$

elde edilir. Böylece (2.37) ifadesinden iki adet yeni denklem; biri $w(x, y)$ için kısmi diferansiyel denklem ve diğeri $f(t)$ için adi diferansiyel denklem elde edilir:

$$\frac{D}{\rho H} \left(\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} \right) = \omega^2 w(x, y) \quad (2.38)$$

$$- \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \omega^2 f(t) \quad (2.39)$$

İkinci diferansiyel denklemin çözümünün harmonik olduğu bilinmektedir. Bu durum, sabitin neden pozitif seçildiğini açıklamaktadır. Aksi takdirde (2.39) ifadesinin çözümünün üstel fonksiyon içermesi ve bunun da konservatif bir sistemde toplam enerjinin sabit kalması gerçeği ile çelişmesine neden olacaktır. Bu denklemin çözümü

$$f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2.40)$$

şeklinde ve buradaki A ve B integral sabitleri sistemin başlangıç şartlarından bulunur.

Şimdi, (2.38) ifadesinde verilen x ve y değişkenlerine bağlı kısmi diferansiyel denklemi adi diferansiyel denklemlere dönüştürmek için çözümün

$$w(x,y) = X(x)Y(y) \quad (2.41)$$

şeklinde x 'e ve y 'e bağlı iki fonksiyonun çarpımı olarak düşünölsün. Burada, klasik Voigt çözümü olarak bilinen [14]

$$Y(y) = C_1 \sin \alpha y + C_2 \cos \alpha y + C_3 \sin \gamma y + C_4 \cos \gamma y \quad (2.42)$$

şeklindedir. Bu ifadede

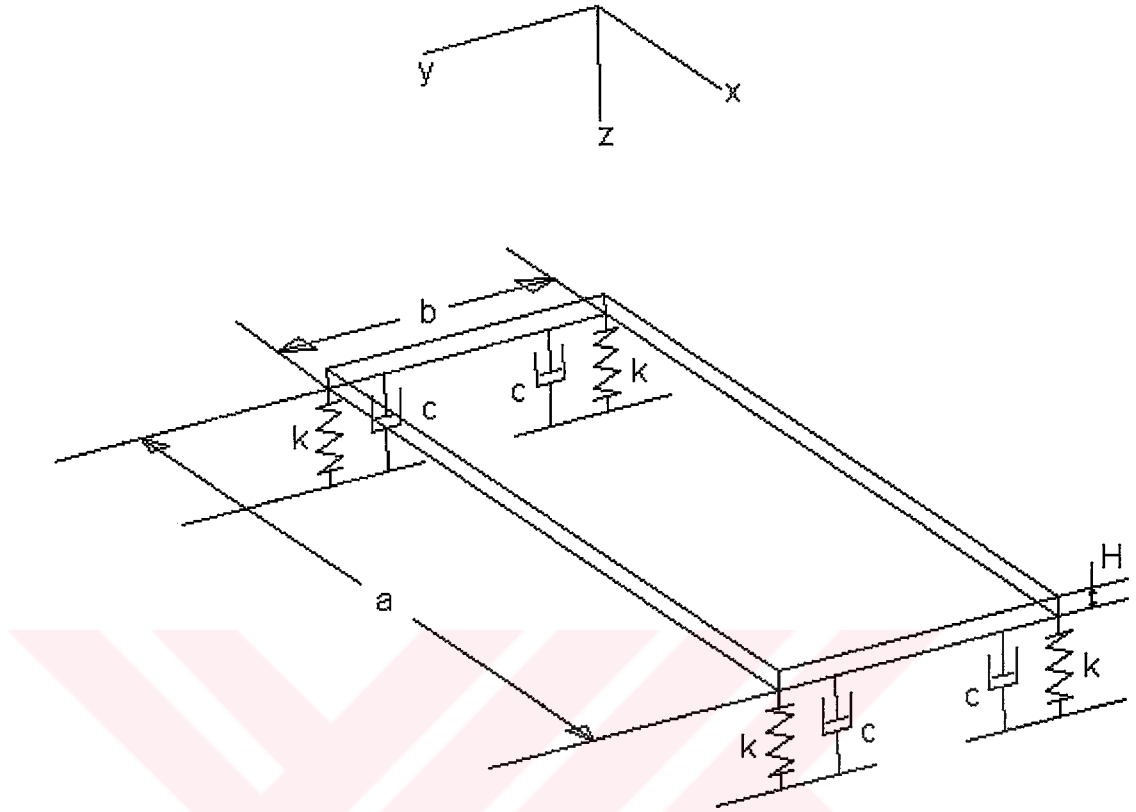
$$\alpha = \left(\omega \left(\frac{\rho}{D} \right)^{\frac{1}{2}} - m \frac{\pi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.43)$$

$$\gamma = \left(\omega \left(\frac{\rho}{D} \right)^{\frac{1}{2}} + m \frac{\pi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.44)$$

olarak tanımlanmıştır. Ayrıca, (2.44) ifadesinde $\alpha^2 > 0$ olduğu kabul edilmiştir. Burada gösterilen C_i ($i = 1,2,3,4$) integral sabitleri, sınır şartları dahilinde bulunur.

Ayrıca, $X(x)$ fonksiyonu, kaynak [16] dekine benzer şekilde geometrik sınır şartlarını sağlayan kabul edilebilir bir fonksiyon olarak seçilmiştir:

$$X(x) = C_5 \left(\cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) + 1 \right) \quad m = 1,2,3,\dots \quad (2.45)$$



Şekil 2.7 Plaka ve Kelvin sınır şartları

Şekil 2.7 , ele alınan plakada uygulanan sınır şartlarını göstermektedir. Görüldüğü gibi plakanın dört köşesinde vagonun teker ve amortisör sistemini temsil eden yay ve sönümleyiciden oluşan Kelvin model sınır şartı uygulanmıştır. Burada

k : Plaka ile ray arasındaki yay katsayısı,

c : Plaka ile ray arasındaki sönüm katsayısı

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu çalışmada, plaka öncelikle sadece yaylardan oluşan sınır şartları dahilinde çözülecektir. Daha sonra ise, sönümleyiciler hareket denkleminde dış kuvvet gibi etkililip çözüm yapılacaktır.

Mukavemet bilgisinden, kesme kuvveti ve eğilme momenti

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} \right) \quad (2.46)$$

$$V_y = -D \left(\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (2.47)$$

olarak bilinmektedir. (2.47) ifadesinde kesme gerilmesinden gelen ikinci terimin değeri küçük olduğundan ihmal edilebilir. (2.47) ifadesi bu kabul dikkate alınarak yazılırsa

$$V_y = -D \left(\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial y^3} \right) \quad (2.48)$$

şeklinde olur. Sınır şartları dikkate alındığında; (2.46) da tanımlanan y eksenindeki momentin değeri, $y=0$ ve $y=b$ değerlerinde sıfır olur. y ekseninde tanımlanan kesme kuvveti V_y ise aynı noktalarda, yaydan gelen kuvvetlerin toplamına eşit olacaktır:

$$M_{y(y=0)} = 0 \quad M_{y(y=b)} = 0 \quad (2.49)$$

$$V_{y(x=0,y=0)} = kw(x,y,t) \quad (2.50)$$

$$V_{y(x=a,y=0)} = kw(x,y,t) \quad (2.51)$$

$$V_{y(x=a,y=0)} = kw(x,y,t) \quad (2.52)$$

$$V_{y(x=a,y=b)} = kw(x,y,t) \quad (2.53)$$

(2.40) ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f(t) = B_m e^{i\omega t} \quad (2.54)$$

ve (2.35) ifadesi (2.42) ile (2.45) dikkate alınarak tekrar yazılırsa

$$w(x, y, t) = (A_1 \sin \alpha y + A_2 \cos \alpha y + A_3 \sin \gamma y + A_4 \cos \gamma y) \times \left(\cos \left(m \frac{\pi}{a} x \right) \right) e^{i\omega t} \quad (2.55)$$

elde edilir. Burada A_i ($i = 1, 2, 3, 4$)'ler yeni integral sabitleridir ve sınır şartları dahilinde bulunur.

Şimdi (2.49) ile (2.50) den (2.53) e kadar ifadelerde verilen sınır şartları, (2.55) ifadesine uygulandığında,

$$(\alpha^2 + r^2) A_2 + (r^2 - \gamma^2) A_4 = 0 \quad (2.60)$$

$$(\alpha^2 + r^2) \sin(\alpha b) A_1 + (\alpha^2 + r^2) \cos(\alpha b) A_2 + (r^2 - \gamma^2) \sinh(\gamma b) A_3 + (r^2 - \gamma^2) \cosh(\gamma b) A_4 = 0 \quad (2.61)$$

$$-D\alpha^3 A_1 + (k) A_2 + D\gamma^3 A_3 + (k) A_4 = 0 \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} & (-D\alpha^3 \cos(\alpha b) + (k) \sin(\alpha b)) A_1 \\ & + (D\alpha^3 \sin(\alpha b) + (k) \cos(\alpha b)) A_2 \\ & + (D\gamma^3 \cosh(\gamma b) + (k) \sinh(\gamma b)) A_3 \\ & + (D\gamma^3 \sinh(\gamma b) + (k) \cosh(\gamma b)) A_4 = 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

ifadeleri elde edilir. Burada,

$$r = m \frac{\pi}{a}$$

eşitliği kullanılmıştır. Elde edilen dört denklem birlikte çözüldüğünde özdeğerleri verecek olan karakteristik denklem elde edilir. Karakteristik denklem sonsuz tane birbirinden farklı ω_m ($m = 1, 2, \dots$) öz değerlerinden oluşan bir dizi verir. Bu öz değerlerin her birine bir öz fonksiyon: $w_m(x, y)$ ($m = 1, 2, \dots$) karşılık gelir ve titreşim şeklini belirleyen mod formudur.

Şimdi, sınırlarda yaylar ile birlikte sönümleyicilerinde olduğu durum ele alınsın. Sönümleyicilerin etkisi kuvvet girdisi olarak hareket denkleminde katılırsa, (2.38) ifadesi

$$\begin{aligned} & D\nabla^4 w(x, y, t) \\ & + \left(\delta(x)\delta(y)c\dot{w}(x, y, t) + \delta(x-a)\delta(y)c\dot{w}(x, y, t) + \delta(x)\delta(y-b)c\dot{w}(x, y, t) \right. \\ & \left. + \delta(x-a)\delta(y-b)c\dot{w}(x, y, t) \right) \\ & = -\rho H \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.64)$$

şeklinde elde edilir. Burada ∇^4 , biharmonik operatör olarak bilinir. Ayrıca, sönümleyicinin etkisinin kuvvet girdisi şeklinde gösterebilmek için Kronecker Delta tanımından yararlanılmıştır. Burada Kronecker Delta,

$$\delta(x-a) = 1 \quad ; \quad x = a,$$

$$\delta(x-a) = 0 \quad ; \quad x \neq a,$$

$$\delta(x-a) = \delta(x) \quad ; \quad a = 0$$

şekilinde tanımlanmıştır. Şimdi, (2.64) ile verilen hareket denkleminin çözümü

$$w(x, y, t) = \Phi(x, y) \times F(t) \quad (2.65)$$

olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} & DF(t) \nabla^4 \Phi(x, y) \\ & + \\ & (\delta(x)\delta(y) + \delta(x-a)\delta(y) + \delta(x)\delta(y-b) + \delta(x-a)\delta(y-b)) \\ & \times \\ & c\dot{F}(t)\Phi(x, y) = -\rho H\ddot{F}(t)\Phi(x, y) \end{aligned} \quad (2.66)$$

elde edilir. Bu ifadenin plaka alanında integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b DF(t) \nabla^4 \Phi(x, y) dx dy \\ & + \\ & \int_0^a \int_0^b (\delta(x)\delta(y) + \delta(x-a)\delta(y) + \delta(x)\delta(y-b) \\ & + \\ & \delta(x-a)\delta(y-b)) c\dot{F}(t)\Phi(x, y) dx dy \\ & = - \int_0^a \int_0^b \rho H\ddot{F}(t)\Phi(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (2.67)$$

olur. Buradan

$$P_1 = \int_0^a \int_0^b D \nabla^4 \Phi(x, y) dx dy \quad (2.68)$$

$$P_2 = \int_0^a \int_0^b (\delta(x)\delta(y) + \delta(x-a)\delta(y) + \delta(x)\delta(y-b) + \delta(x-a)\delta(y-b))\Phi(x,y)dxdy \quad (2.69)$$

$$P_3 = \int_0^a \int_0^b \Phi(x,y)dxdy \quad (2.70)$$

olarak tanımlanarak

$$\rho H P_3 \ddot{F}_m(t) + c P_2 \dot{F}_m(t) + P_1 F_m(t) = 0 \quad (2.71)$$

elde edilir.

Şimdi

$$\Phi(x,y) = X(x)Y(y) \quad (2.72)$$

şeklinde tanımlanarak (2.42) ve (2.45) ifadeleri tekrar ele alınırsa;

$$X(x) = \cos(rx) + 1 \quad (2.73)$$

$$Y(y) = B(B_1 \sin(\alpha y) + B_2 \cos(\alpha y) + B_3 \sinh(\gamma y) + \cosh(\gamma y)) \quad (2.74)$$

ve burada

$$\begin{aligned}
B1 = & \left\{ \frac{\left(\frac{\gamma^2 - r^2}{\gamma^2 + \alpha^2} \right) \left(\sin(\alpha b) + \sinh(\gamma b) + \frac{k}{D\alpha^3} (\cos(\alpha b) + \cosh(\gamma b)) \right)}{\frac{k}{D\alpha^3} \sin(\alpha b) + \cos(\alpha b)} \right. \\
& + \frac{\cosh(\gamma b) + \frac{k}{D\alpha^3} \sinh(\gamma b)}{\cos(\alpha b) - \frac{k}{D\alpha^3} \sin(\alpha b)} \times \\
& \left. \frac{\frac{k}{D\alpha^3} \sin(\alpha b) + \left(\frac{\gamma^2 - r^2}{\gamma^2 + \alpha^2} \right) (\cos(\alpha b) - \cosh(\gamma b))}{\frac{\gamma^3}{\alpha^3} \sin(\alpha b) - \left(\frac{\gamma^2 - r^2}{\gamma^2 + \alpha^2} \right) \sinh(\gamma b)} \right\}
\end{aligned} \tag{2.75}$$

$$B2 = \left(\frac{\gamma^2 - r^2}{\gamma^2 + \alpha^2} \right) \tag{2.76}$$

$$B3 = - \left\{ \frac{\frac{k}{D\alpha^3} \sin(\alpha b) + \left(\frac{\gamma^2 - r^2}{\gamma^2 + \alpha^2} \right) (\cos(\alpha b) - \cosh(\gamma b))}{\frac{\gamma^3}{\alpha^3} \sin(\alpha b) - \left(\frac{\gamma^2 - r^2}{\gamma^2 + \alpha^2} \right) \sinh(\gamma b)} \right\} \tag{2.77}$$

olarak elde edilir. (2.74) ifadesindeki B katsayısı ise başlangıç şartlarından bulunacaktır.

Şimdi, biharmonik operatörlü ifade ele alınsın:

$$\nabla^4 \Phi(x, y) = \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y^4} \tag{2.78}$$

burada (2.73) ve (2.74) ifadeleri kullanılarak

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = Y(y) \times (-r \sin(rx))$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} = Y(y) \times (-r^2 \cos(rx))$$

(2.79)

$$\frac{\partial^3 \Phi(x, y)}{\partial x^3} = Y(y) \times (r^3 \sin(rx))$$

$$\frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^4} = Y(y) \times (r^4 \cos(rx))$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = X(x) \times \left(\begin{array}{l} B1\alpha \cos(\alpha y) - B2\alpha \sin(\alpha y) \\ + \\ B3\gamma \cosh(\gamma y) + \gamma \sinh(\gamma y) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} = X(x) \times \left(\begin{array}{l} -B1\alpha^2 \sin(\alpha y) - B2\alpha^2 \cos(\alpha y) \\ + \\ B3\gamma^2 \sinh(\gamma y) + \gamma^2 \cosh(\gamma y) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial^3 \Phi(x, y)}{\partial y^3} = X(x) \times \left(\begin{array}{l} -B1\alpha^3 \cos(\alpha y) + B2\alpha^3 \sin(\alpha y) \\ + \\ B3\gamma^3 \cosh(\gamma y) + \gamma^3 \sinh(\gamma y) \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y^4} = X(x) \times \left(\begin{array}{l} B1\alpha^4 \sin(\alpha y) + B2\alpha^4 \cos(\alpha y) \\ + \\ B3\gamma^4 \sinh(\gamma y) + \gamma^4 \cosh(\gamma y) \end{array} \right)$$

(2.80)

$$\frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y^4} = r^2 \cos(rx) \times \begin{pmatrix} B1\alpha^2 \sin(\alpha y) + B2\alpha^2 \cos(\alpha y) \\ - \\ B3\gamma^2 \sinh(\gamma y) - \gamma^2 \cosh(\gamma y) \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

eşitlikleri elde edilir.

Buradan, (2.68) ifadesinin analitik olarak integrali alındığında

$$P_1 = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y^4} \right) dx dy \quad (2.82)$$

$$P_1 = a \left(-B1 \cos(\alpha b) + B2 \sin(\alpha b) + B3 \cosh(\gamma b) + \gamma^3 \sinh(\gamma b) \right) \quad (2.83)$$

bulunur.

Benzer şekilde (2.69) ve (2.70) ifadelerinin integralleri alındığında

$$P_2 = 4 \left(B1 \sin(\alpha b) + B2 (\cos(\alpha b) + 1) + B3 \sinh(\gamma b) + \sinh(\gamma b) + 1 \right) \quad (2.84)$$

$$P_3 = a \left(\frac{B1}{\alpha} (1 - \cos(\alpha b)) + \frac{B2}{\alpha} \sin(\alpha b) + \frac{B3}{\gamma} (\cosh(\gamma b) - 1) + \frac{1}{\gamma} \sinh(\gamma b) \right) \quad (2.85)$$

elde edilir.

Şimdi, (2.71) ifadesi yeniden yazılırsa;

$$\ddot{F}_m(t) + \frac{cP_2}{\rho HP_3} \dot{F}_m(t) + \frac{P_1}{\rho HP_3} F_m(t) = 0 \quad (2.86)$$

elde edilir. Bu ifade, sönümlü sistemin genel hareket denklemi [37]

$$\frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y^4} = r^2 \cos(rx) \times \begin{pmatrix} B1\alpha^2 \sin(\alpha y) + B2\alpha^2 \cos(\alpha y) \\ - \\ B3\gamma^2 \sinh(\gamma y) - \gamma^2 \cosh(\gamma y) \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

eşitlikleri elde edilir.

Buradan, (2.68) ifadesinin analitik olarak integrali alındığında

$$P_1 = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y^4} \right) dx dy \quad (2.82)$$

$$P_1 = a \left(-B1 \cos(\alpha b) + B2 \sin(\alpha b) + B3 \cosh(\gamma b) + \gamma^3 \sinh(\gamma b) \right) \quad (2.83)$$

bulunur.

Benzer şekilde (2.69) ve (2.70) ifadelerinin integralleri alındığında

$$P_2 = 4 \left(B1 \sin(\alpha b) + B2 (\cos(\alpha b) + 1) + B3 \sinh(\gamma b) + \sinh(\gamma b) + 1 \right) \quad (2.84)$$

$$P_3 = a \left(\frac{B1}{\alpha} (1 - \cos(\alpha b)) + \frac{B2}{\alpha} \sin(\alpha b) + \frac{B3}{\gamma} (\cosh(\gamma b) - 1) + \frac{1}{\gamma} \sinh(\gamma b) \right) \quad (2.85)$$

elde edilir.

Şimdi, (2.71) ifadesi yeniden yazılırsa;

$$\ddot{F}_m(t) + \frac{cP_2}{\rho HP_3} \dot{F}_m(t) + \frac{P_1}{\rho HP_3} F_m(t) = 0 \quad (2.86)$$

elde edilir. Bu ifade, sönümlü sistemin genel hareket denklemi [37]

$$\ddot{F}_m(t) + 2\xi_m\omega_m\dot{F}_m(t) + \omega_m^2 F_m(t) = 0 \quad (2.87)$$

ile aynı formdadır. Terimler karşılaştırılarak

$$\omega_m^2 = \frac{P_1}{\rho HP_3} \quad (2.88)$$

$$2\xi_m\omega_m = \frac{cP_2}{\rho HP_3} \quad (2.89)$$

$$\xi_m = \frac{1}{2} \frac{cP_2}{\sqrt{P_1}} \sqrt{\rho HP_3} \quad (2.90)$$

bulunur. Burada

ω_m : Doğal frekans,

ξ_m : Sönüm oranı

şeklinde tanımlanmıştır.

(2.87) ifadesinin genel çözümü

$$F_m(t) = A_m e^{-\xi_m\omega_m t} \sin(\omega_{dm} t + \Theta_m) \quad m = 1, 2, 3... \quad (2.91)$$

şeklindedir. Burada

$$\omega_{dm} = \omega_m \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.92)$$

$$A_m = \sqrt{\frac{(\dot{w}(x, y, 0) + \xi_m\omega_m w^2(x, y, 0))^2 + (w(x, y, 0)\omega_{dm})^2}{\omega_{dm}^2}} \quad (2.93)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu durumda,

$$\Theta_m = \tan^{-1} \left[\frac{w(x, y, 0) \omega_{dm}}{\dot{w}(x, y, 0) + \xi_m \omega_m w(x, y, 0)} \right] \quad (2.94)$$

(2.65) ifadesi

$$w(x, y, t) = A_m (B1 \sin(\alpha y) + B2 \cos(\alpha y) + B3 \sinh(\gamma y) + \cosh(\gamma y)) \times \cos(rx) e^{-\xi_m \omega_m t} \sin(\omega_{dm} t + \Theta_m) \quad (2.95)$$

$$m = 1, 2, 3 \dots$$

şeklinde bulunur.

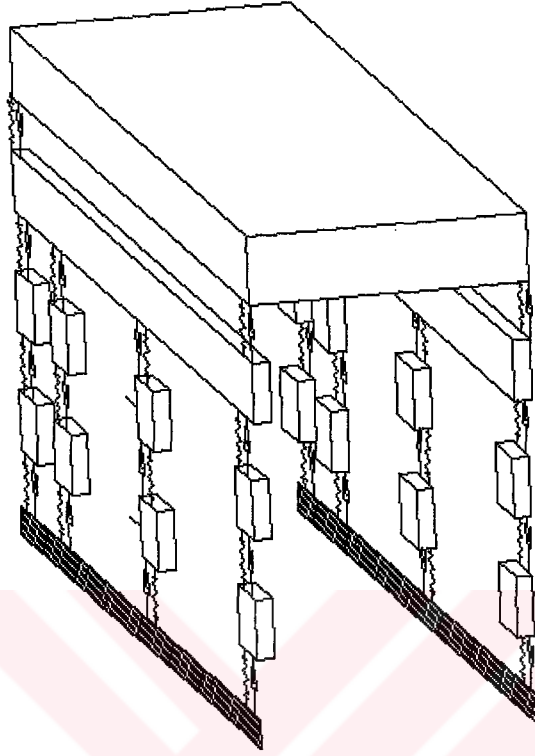
(2.95) ifadesindeki her m değerine karşılık gelen bir A_m değeri vardır ve başlangıç şartlarının yardımıyla bulunur.

Modellenen sistem daha önce bahsedildiği gibi iki aşamada ele alınmıştır. İlk aşamada ray ve elastik zeminin matematiksel modeli oluşturulmuştur.

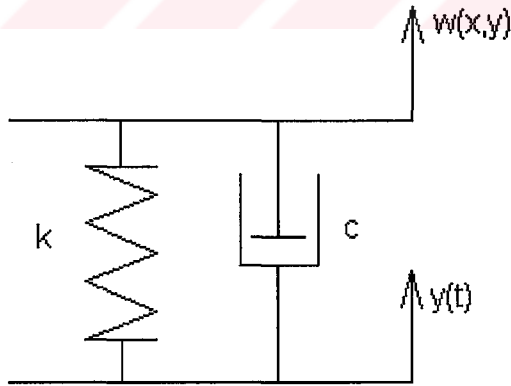
İkinci aşamada ise vagonun plaka şeklinde matematiksel modeli oluşturulmuştur. Modellenen sistemde bütünlüğün sağlanması için ayrı ayrı modellenen sistemler beraber ele alınacaktır.

2.3. Ray, Elastik Zemin ve Vagonun Beraber Modellenmesi

Ray, elastik zemin ve vagon probleminin beraber çözülmesi için sınır şartları tekrar gözden geçirilecektir. Plaka şeklinde düşünülen vagonu sınır şartlarını veren (2.50) - (2.53) ifadeleri incelendiğinde raydan gelen elastik yer değiştirme etkisinin ele alınmadığı görülmektedir.



Şekil 2.8 Ray, elastik zemin ve plaka



Şekil 2.9 Ray ve plaka arasındaki ortak elemanlar

Şekil 2.9 da, plaka ve ray arasındaki Kelvin sınır şartı gösterilmektedir. Burada

$y(t)$: Rayın yer değiştirmesi,
 $w(x,y)$: Plakanın yer değiştirmesi

şeklinde tanımlanmıştır. Bu durumda, raya uygulanan kuvvet

$$F(t) = [kw(x,y,t) + c\dot{w}(x,y,t)] - [ky(t) + c\dot{y}(t)] - R_v \quad (2.96)$$

olarak elde edilir. Burada R_v vagon ağırlığının dörtte biridir.

Plakanın elastik yer değiştirmesi (2.95) ifadesi ile verilmiştir. Bu ifadede raydan gelen etki olmadığından, modelin gerçeğe uygun olması amacıyla raydan gelen etki ile beraber ele alınması gerekir. Bu doğrultuda hareket edildiğinde (2.66) ile verilen hareket denklemi

$$\begin{aligned} & D\nabla^4\Phi(x,y,t) \\ & + \\ & \{ \delta(x)\delta(y)[k(w(x,y,t) - y(t)) + [c(\dot{w}(x,y,t) - \dot{y}(t))] \\ & + \\ & \delta(x-a)\delta(y)[k(w(x,y,t) - y(t) + c(\dot{w}(x,y,t) - \dot{y}(t))] \\ & + \\ & \delta(x)\delta(y-b)[k(w(x,y,t) - y(t) + c(\dot{w}(x,y,t) - \dot{y}(t))] \\ & + \\ & \delta(x-a)\delta(y-b)[k(w(x,y,t) - y(t) + c(\dot{w}(x,y,t) - \dot{y}(t))] \} \\ & = -\rho H \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.97)$$

şeklinde olacaktır.

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

(2.87) ifadesi ise,

$$\ddot{F}_m(t) + \frac{cP_2}{\rho HP_3} \dot{F}_m(t) + \frac{P_1}{\rho HP_3} F_m(t) = P_2 [c\dot{y}(t) + ky(t)] \quad (2.98)$$

şeklini alır. Bu homojen olmayan ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemin genel çözümü

$$F_m(t) = A_m e^{-\xi_m \omega_m t} \sin(\omega_{dm} t + \Theta_m) + \frac{1}{\omega_{dm}} e^{-\xi_m \omega_m t} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi_m \omega_m \tau} \sin(\omega_{dm}(t - \tau)) d\tau \quad (2.99)$$

şeklindedir. Burada

$$F(\tau) = F_0 = P_2(c\dot{y}(t) + ky(t)) \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad (2.100)$$

olduğundan integrali de alınırsa,

$$F_m(t) = A_m e^{-\xi_m \omega_m t} \sin(\omega_{dm} t + \Theta_m) + \frac{F_0}{\omega_{dm}} e^{-\xi_m \omega_m t} \left(\frac{-\omega_{dm} - e^{\xi_m \omega_m t} (\xi \omega_m \sin(\omega_m t) - \omega_{dm} \cos(\omega_{dm} t))}{(\xi \omega_m)^2 + (\omega_{dm})^2} \right) \quad (2.101)$$

bulunur.

Ray ve elastik zeminin plakaya olan etkisinin dahil edildiği durumda, plakanın titreşimleri

$$\begin{aligned}
w(x, y, t) = & A_m (B_1 \sin(\alpha y) + B_2 \cos(\alpha y) + B_3 \sinh(\gamma y) + \cosh(\gamma y)) \\
& \times \cos(rx) \left\{ e^{-\xi_m \omega_m t} \sin(\omega_{dm} t + \Theta_m) \right. \\
& + \\
& \frac{F_0}{\omega_{dm}} e^{-\xi_m \omega_m t} \left(\frac{1}{(\xi \omega_m)^2 + (\omega_{dm})^2} \right) \\
& \times \\
& \left. \left(-\omega_{dm} - e^{\xi_m \omega_m t} (\xi \omega_m \sin(\omega_m t) + \omega_{dm} \cos(\omega_{dm} t)) \right) \right\} ; \quad (2.102)
\end{aligned}$$

$$m = 1, 2, 3 \dots$$

şeklinde bulunur.

Ray üzerindeki vagon, ray boyunca hareket etmediği durumda, ağırlığı rayda belli miktarda yer değiştirmeye neden olur. Hareketin analizi statik denge konumundan itibaren yapıldığında bu ağırlığın rayın hareket denkleminde etkisi olmamaktadır. Halbuki, vagon ray boyunca hareket ettirildiğinde, elastik hareket nedeniyle etki eden kuvvetin yanında vagon ağırlığıda dikkate alınmalıdır.

Böylece iki kısma ayrılan sistem bir bütün hale getirilmiş olur. Sistem bir bütün olarak çalışacağından, ray ile vagon arasındaki etkileşim kuvvetleri dahili kuvvetler şeklinde düşünülmüş olur. Bu durumda yapılacak çözümler gerçeğe daha yakın çözümler olacaktır.

3. ÖRNEK SAYISAL ÇÖZÜMLER VE SONUÇLAR

Önceki bölümlerde, Şekil 2.1 ve Şekil 2.7 de görülen ray ve elastik zemin ile vagonun hareketleri tanımlanarak dinamik analizi yapılmıştır. Daha sonra bu dinamik ifadeler kullanılarak hareketin diferansiyel denklemleri elde edilmiştir. Ray, ray traversi ve balast ayrı olarak modellenmiştir. Bu modelin hareket denklemleri Newton metodu ile elde edilmiştir. Vagonun plaka şeklinde modeli oluşturulmuş ve hareket denklemleri analitik olarak elde edilmiştir. Daha sonra iki model birleştirilerek sürekli ve ayrık olan sistemler beraberce ele alınıp tek bir sistem haline getirilmiştir.

Bu bölümde, iki ayrı sistem olarak ele alınan ray ve elastik zemin ile vagon modellerinin dinamik davranışlarını karşılaştırmak için önce ayrı ayrı çözülecek sonrada beraberce ele alınacaktır. Ray ve elastik zeminin çözümü için takip edilen yöntem Ek A da geniş olarak anlatılmıştır. Çözüm için, yüksek doğruluk derecesine sahip olan 4. mertebeden Runge-Kutta integrasyon yöntemi kullanılmıştır [37]. Bu amaçla hazırlanan bilgisayar programları Matlab bilgisayar programlama dilinde yazılmış olup EK B de verilmektedir. Sembolik işlemlerin yapılmasında Matcad bilgisayar programı tercih edilmiştir.

Bu simülasyon çalışmalarında kullanılan elemanların malzeme özellikleri, daha önce bu konuda yapılan çalışmalardakine benzer olarak seçilmiştir.

3.1. Ray ve Elastik Zemin

3.1.1. Hareket ve malzeme özellikleri

Vagonun ray üzerinde hareket ettiği düşünülmüştür. Vagonun hızı 54km/saat ve vagonun uzunluğu 30 m alınırsa, vagon bu mesafeyi yaklaşık 2 saniyede geçecektir. Vagon birden fazla olduğu kabul edilirse seçilen ray uzunluğu için ray boyunca sürekli bir kuvvet uygulaması olacaktır.

Bu çalışmada, elastik ray ve elastik zemin için aşağıdaki malzeme özellikleri kullanılmıştır:

Kütleler;

Rayın bir elemanının kütlesi : $m_r = 120 \text{ kg/m}$

Ray traversinin bir elemanının kütlesi : $m_s = 490 \text{ kg/m}$

Balastın bir elemanının kütlesi : $m_b = 1200 \text{ kg/m}$

Yay sabitleri;

Eğilme rijitliği : $EI = 1.26 \times 10^7 \text{ N/m}^2$

Ray ile ray traversi arasındaki yay katsayısı : $3,15 \times 10^8 \text{ N/m}^2$

Ray traversi ile balast arasındaki yay katsayısı : $3,15 \times 10^8 \text{ N/m}^2$

Balast ile zemin arasındaki yay katsayısı : $1,5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$

Sönüm sabitleri;

Ray ile ray traversi arasındaki sönüm katsayısı : $3,2 \times 10^2 \text{ N/m}^2$

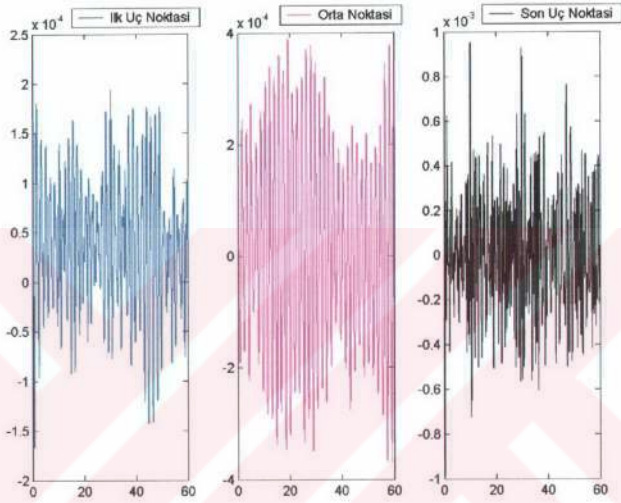
Ray traversi ile balast arasındaki sönüm katsayısı : $3,2 \times 10^2 \text{ N/m}^2$

Balast ile zemin arasındaki sönüm katsayısı : $3,2 \times 10^2 \text{ N/m}^2$

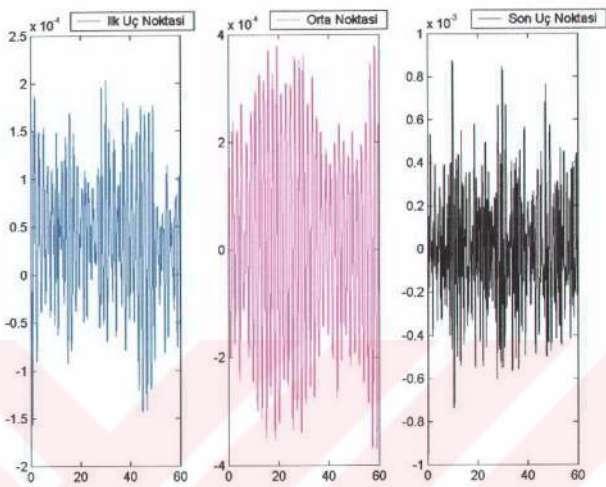
Bu değerler literatürdeki çalışmalardan alınmıştır [1]. Ray traverslerinin 30 adetini kapsayacak şekilde sistem ayırık hale getirilmiştir. Burada, ayırık sistemdeki iki elemanın ağırlık merkezleri arasındaki mesafe ray uzunluğunun otuzda biridir. Hareketli kuvvet ise vagon ağırlığının dörtte biri kadar seçilmiştir ($F = 6\,977,5 \text{ N}$).

(2.12) den (2.16) ya kadar verilen ifadeler bir elemanın hareket denkleminin matris formdaki şeklidir. Bu ifadeler kullanılarak, sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla sistemin genel hareket denklemi elde edilir. Elde edilen denklem EK A da verilen çözüm yöntemi kullanılarak EK B deki Matlab bilgisayar programının yardımıyla çözülmüştür. Elde edilen örnek çözümler Şekil 3.1

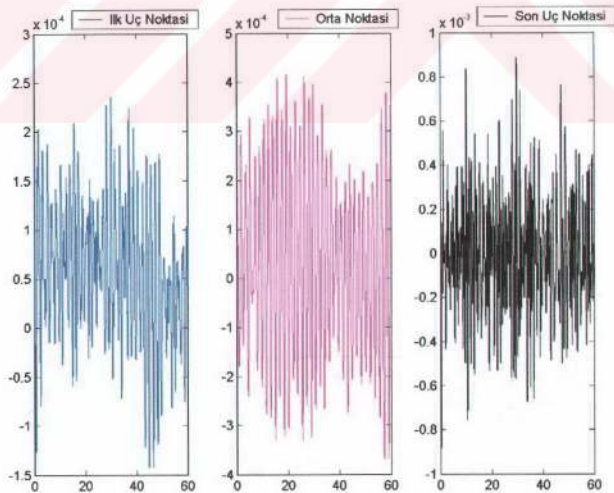
den Şekil 3.9 a kadar çeşitli vagon hızları için elde edilmiş ve grafikler halinde sunulmuştur.



Şekil 3.1 Elastik ray çubuğunun titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 108 \text{ km/saat}$

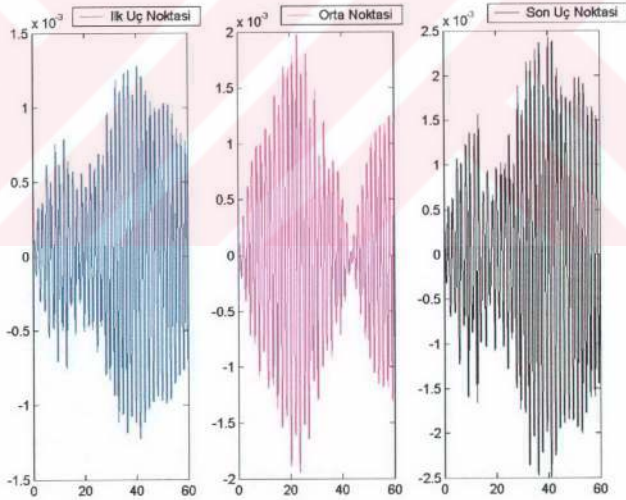


Şekil 3.2 Elastik ray çubuğunun titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 54 \text{ km/saat}$

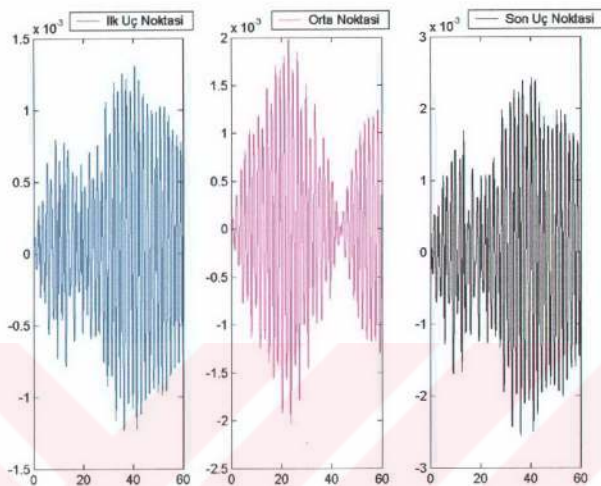


Şekil 3.3 Elastik ray çubuğunun titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 27 \text{ km/saat}$

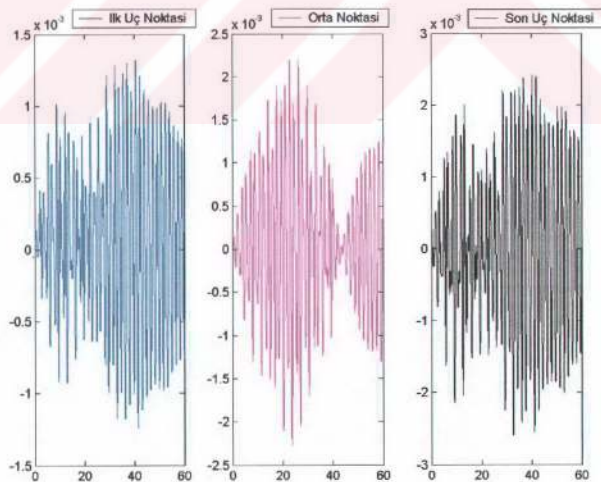
Ray üzerindeki hareketli kuvvetin üç değişik hızda (108km/saat, 54km/saat ve 27km/saat) incelenmiştir. Bu hareketli kuvvetlerin uygulama noktaları, ayrıık hale getirilen ray çubuğunun elemanlarıdır. Şekil 3.1, Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 incelendiğinde, ray titreşim modlarının benzer olduğu görölmektedir. Bu durum, titreşim modlarında rayın ve elastik zeminin malzemesinin olduğunu göstermektedir. Malzemelerin belli formdaki kuvvetler altında cevabı, şekil olarak aynı fakat genlik değeri farklı olmaktadır. Verilen örneklerde, sistem değişik bir başlangıç değeri seçilerek çözülmüştür. Bu değerin sistem üzerindeki etkisi azaltılarak daha gerçek sonuca ulaşmak için çalışma süresi uzun tutulmuştur.



Şekil 3.4 Ray traversinin titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 108\text{km/saat}$

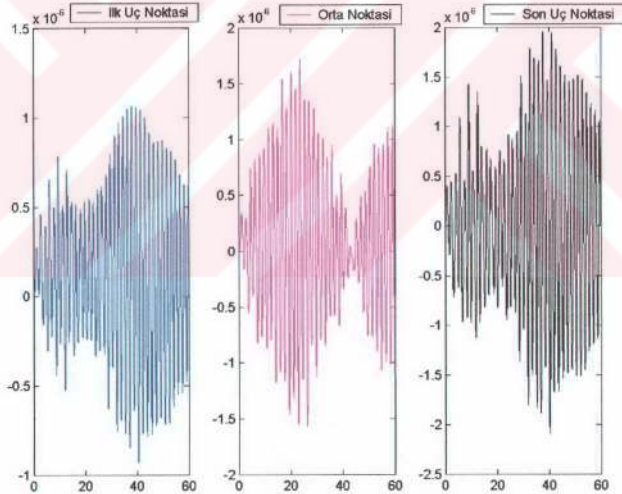


Şekil 3.5 Ray traversinin titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 54\text{km/saat}$

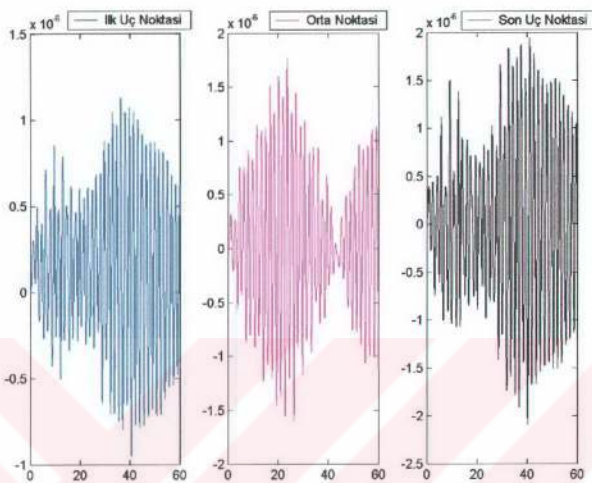


Şekil 3.6 Ray traversinin titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 27\text{km/saat}$

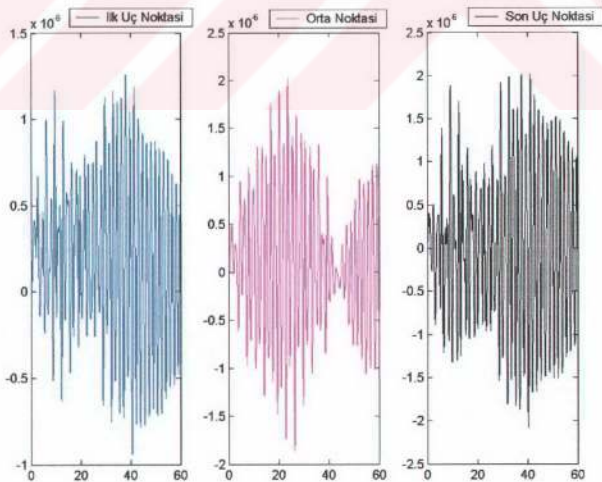
Şekil 3.4, Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 ray titreşimleri esnasında elde edilen ray traversi titreşimlerini göstermektedir. Bunlar incelendiğinde, ray traversinin titreşime ray titreşiminin etkisi ile başladığı görülmektedir. Beklenildiği gibi ray traversinin titreşimi, seçilen değişik vagon hızlarında aynı davranışı göstermektedir. Fakat genlik değerleri farklıdır. Genlik değerlerinde belirleyici olanın malzeme özelliği yanında sisteme dışarıdan etki eden kuvvet olduğu açıkça görülmektedir. Yüksek vagon hızında sistemin cevap vermesi daha yavaş olmaktadır. Hızın en yüksek olduğu Şekil 3.4 ve en düşük olduğu Şekil 3.6 da verilen ray traversinin cevabındaki farklılık açıkça görülmektedir.



Şekil 3.7 Balastın titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 108\text{km/saat}$



Şekil 3.8 Balastın titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 54 \text{ km/saat}$



Şekil 3.9 Balastın titreşimi, $v_{\text{vagon}} = 27 \text{ km/saat}$

Şekil 3.7 den Şekil 3.9 a kadar olan grafikler balast titreşimlerini aynı vagon hızları için göstermektedir. bunlar incelendiğinde, balastın titreşiminin, vagon hızı ve ray çubuğu başlangıç şartlarından, ray traversine göre daha az etkilendiği görülmektedir. Vagonun yüksek hızına ve düşük hızına cevabı ray traversine göre daha yavaştır.

Şekil 3.1 den Şekil 3.9 e kadar olan grafiklerde ray çubuğuna verilen başlangıç değerinin etkisinin kaybolması için süre uzun alınmıştır.

3.2. Vagon

Vagon gerçekte karmaşık bir yapıya sahip olduğu bilinmektedir. Plakanın kalınlığı değiştirilerek gerçek vagon verilerine yaklaşılabileceği düşünülmüştür.

Vagon olarak düşünülen plakanın malzemesi, kolaylık açısından alüminyum olarak seçilmiştir. Seçilen malzemenin için,

Elastisite Modülü : $E = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$

Yoğunluk : $\rho = 2710 \text{ kg/m}^2$

ve genel olarak dikdörtgen kesitli Şekil 2.7 deki gibi plaka ele alınarak

Plakanın boyu : $a = 30 \text{ m}$

Plakanın genişliği : $b = 3,5 \text{ m}$

Plakanın kalınlığı : $H = 0,1 \text{ m}$

Plakanın için Poisson oranı : $\nu = 0,334$

değerleri kullanılmıştır. Plakanın sınır şartlarını oluşturan elemanlar için

Yay katsayısı : $15 \times 10^5 \text{ N/m}$

Sönüm katsayısı : $32 \times 10^2 \text{ Ns/m}$

değerleri kullanılmıştır [2].

Plaka titreşimi iki kısımda incelenmiştir. Birinci kısımda plakanın raydan gelen etkisi ele alınmamıştır. İkinci kısımda bu etki katılmıştır.

Seçilen değerleri ikinci bölümde verilen ifadeler kullanılarak değişik m değerleri için bulunan doğal frekanslar aşağıda verilmiştir.

$m = 1$ için

$$w_1 = 5,47 \text{ s}^{-1}$$

$$w_2 = 14,267 \text{ s}^{-1}$$

$$w_3 = 90,533 \text{ s}^{-1}$$

$$w_4 = 253,178 \text{ s}^{-1}$$

$m = 2$ için

$$w_1 = 9,68 \text{ s}^{-1}$$

$$w_2 = 17,98 \text{ s}^{-1}$$

$$w_3 = 97,5 \text{ s}^{-1}$$

$$w_4 = 257,5 \text{ s}^{-1}$$

$m = 3$ için

$$w_1 = 16,433 \text{ s}^{-1}$$

$$w_2 = 21,67 \text{ s}^{-1}$$

$$w_3 = 101,657 \text{ s}^{-1}$$

$$w_4 = 265 \text{ s}^{-1}$$

$m = 4$ için

$$w_1 = 19,657 \text{ s}^{-1}$$

$$w_2 = 26,78 \text{ s}^{-1}$$

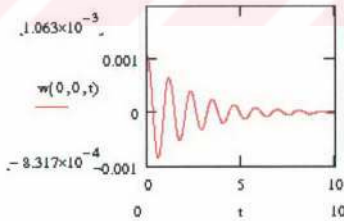
$$w_3 = 107,0625 \text{ s}^{-1}$$

$$w_4 = 268,938 \text{ s}^{-1}$$

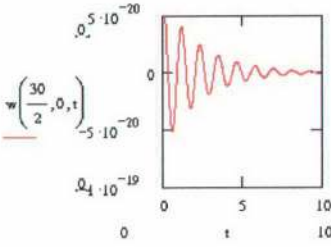
Bu değerler kaynak [12] deki değerlerle aynı bulunmuştur.

Elde edilen doğal frekans değerleri incelendiğinde, m değeri arttıkça bu değerlerin arttığı görülmektedir. Buradan, m değerinin bir malzeme özelliği olduğu söylenebilir.

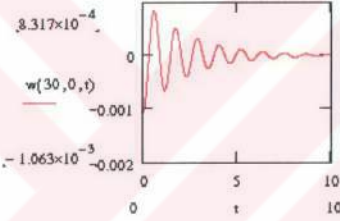
Sistemin hareket denklemin çözümü olan (2.95) ifadesini kullanabilmek için başlangıç şartları gerekmektedir. Bu şartlar $w_0 = 0,0001\text{m}$ ve $dw/dt = 0,00001\text{m/s}^2$ olarak seçilmiştir. Plakanın değişik noktalarının titreşim modları Şekil 3.10 dan Şekil 3.15 e kadar verilmektedir.



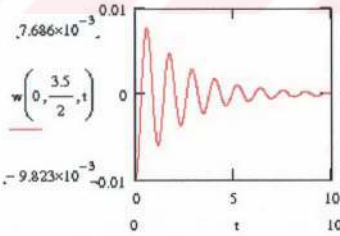
Şekil 3.10 Plakanın $x=0$, $y=0$ noktasının titreşimleri: $m=1$ ve $w_1=5,47 \text{ s}^{-1}$



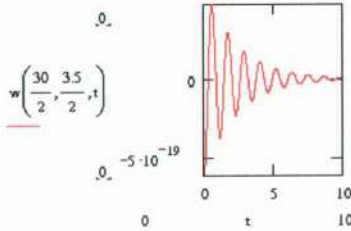
Şekil 3.11 Plakanın $x=15$, $y=0$ noktasının titreşimleri: $m=1$ ve $w_1=5,47 \text{ s}^{-1}$



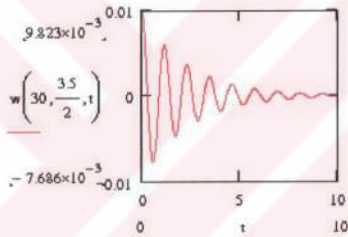
Şekil 3.12 Plakanın $x=30$, $y=0$ noktasının titreşimleri: $m=1$ ve $w_1=5,47 \text{ s}^{-1}$



Şekil 3.13 Plakanın $x=0$, $y=1,75$ noktasının titreşimleri: $m=1$ ve $w_1=5,47 \text{ s}^{-1}$

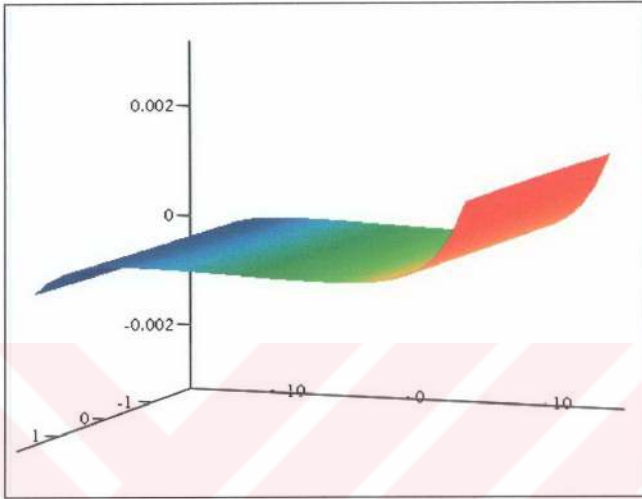


Şekil 3.14 Plakanın $x=15$, $y=1,75$ noktasının titreşimleri: $m=1$ ve $w_1=5,47s^{-1}$



Şekil 3.15 Plakanın $x=30$, $y=1,75$ noktasının titreşimleri: $m=1$ ve $w_1=5,47s^{-1}$

Şekil 3.10 dan Şekil 3.15 e kadar verilen sonuçlar plakanın raydan gelen bir etkinin olmadığı durumda elde edilmiştir. Bu şekiller incelendiğinde, plaka belirlenen başlangıç şartlarına göre titreşime başladıktan sonra sönümlerinin etkisi nedeniyle bir süre sonra sönümlenmiştir. Söz konusu şekillerden anlaşılacağı gibi plakanın orta noktasının titreşim genliği diğer noktalara göre oldukça düşüktür.



w1

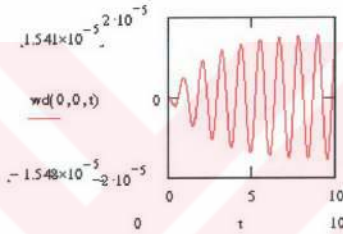
Şekil 3.16 Plakanın titreşimi : $m=1$ $w_1=5,47s^{-1}$, $v_{\text{vagon}} = 108\text{km/saat}$

Şekil 3.16 de plaka titreşimlerini üç boyutlu olarak verilmiştir. Bu şekillerdeki $m=1$ olduğu durum plakanın titreşimi birinci moddaki titreşimi olarak adlandırılır. Şekilden de açıkça görüleceği gibi bu modda orta noktaların titreşimi diğer noktalara göre oldukça düşüktür.

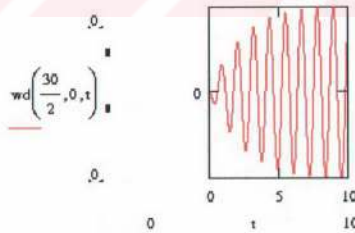
3.3. Ray, Elastik Zemin ve Vagon

Elastik zemin, ray ve vagonun beraberce ele alınarak modellenmesinin daha gerçekçi sonuçlar vereceği açıktır. Bu nedenle, önceki iki bölümde seçilen sayısal değerler kullanılarak; daha önce ayrı ayrı çözülen ray ve elastik zemin modeli ile plaka şeklinde çözülen vagon modeli bu bölümde beraber çözülmüştür. Öncelikle, ray ve elastik zemin modeline, vagonun dörtte bir ağırlığı kadar kuvvet uygulanıp rayın elastik yer değiştirmesi bulunmuştur. Buradan elde edilen elastik yer değiştirme, plaka modeline giriş olarak

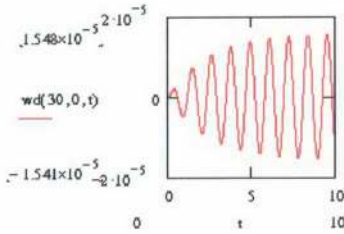
verilmiş ve plakanın elastik yer değiştirmesi elde edilmiştir. Bu veriler yardımıyla Şekil 2.8 ve (2.96) ifadesi dikkate alınarak ray ve elastik zemin tekrar çözülmüştür. Bu şekilde oluşturulan döngüye devam edilerek, bir önceki adımda bulunan değerle bir sonraki adım arasında bulunan değerlerin arasındaki fark %0,1 oluncaya kadar devam edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Şekil 3.16 dan itibaren sunulmuştur. Burada vagonun hızı 108km/saat olarak alınmıştır.



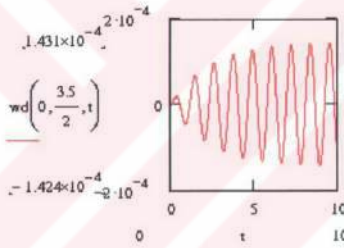
Şekil 3.17 Plakanın $x=0$, $y=0$ noktasının titreşimleri: $m=1$, $w_f=5,47s^{-1}$, $w_{dm1}=5,453 s^{-1}$ ve $\xi_{m1}=0,078$



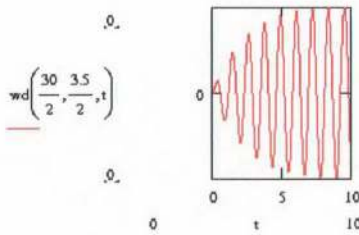
Şekil 3.18 Plakanın $x=15$, $y=0$ noktasının titreşimleri: $m=1$, $w_f=5,47s^{-1}$, $w_{dm1}=5,453 s^{-1}$ ve $\xi_{m1}=0,078$



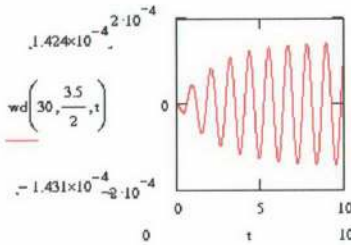
Şekil 3.19 Plakanın $x=30$, $y=0$ noktasının titreşimleri: $m=1$, $w_I=5,47s^{-1}$,
 $w_{dm1}=5,453 s^{-1}$ ve $\xi_{m1}=0,078$



Şekil 3.20 Plakanın $x=0$, $y=1,75$ noktasının titreşimleri: $m=1$, $w_I=5,47s^{-1}$,
 $w_{dm1}=5,453 s^{-1}$ ve $\xi_{m1}=0,078$

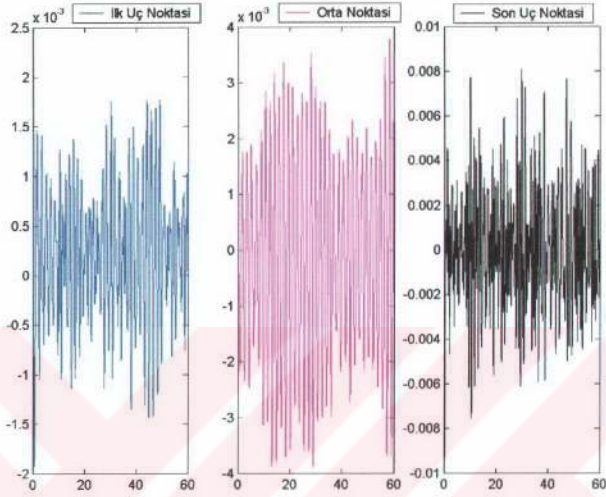


Şekil 3.21 Plakanın $x=15$, $y=1,75$ noktasının titreşimleri: $m=1$, $w_I=5,47s^{-1}$,
 $w_{dm1}=5,453 s^{-1}$ ve $\xi_{m1}=0,078$



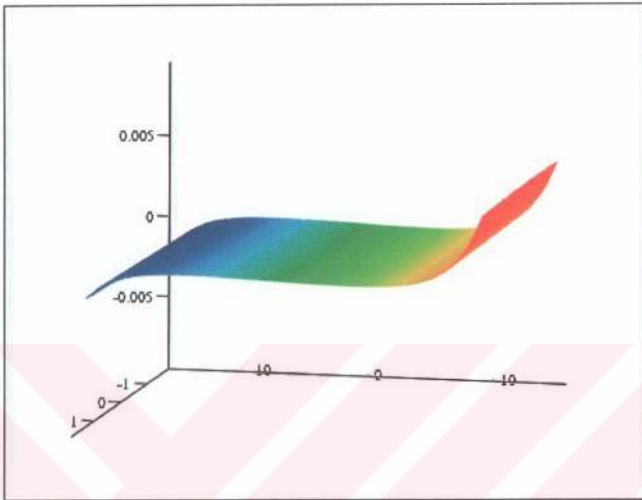
Şekil 3.22 Plakanın $x=30$, $y=1,75$ noktasının titreşimleri: $m=1$ $w_t=5,47s^{-1}$, $w_{dm1}=5,453 s^{-1}$ ve $\xi_{m1}=0,078$

Şekil 3.17 dan Şekil 3.22 e kadarki grafikler incelendiğinde, plaka için belirlenen başlangıç şartları etkisinin $t=5s$ den sonra azalmaya başladığı görülmektedir. Plakanın en yüksek salınım yaptığı noktalar şekillerden de görüldüğü gibi uç noktalardır. Buna karşılık en az salınım yaptığı noktalar, plakanın orta noktalarıdır.



Şekil 3.23 Elastik ray çubuğunun titreşimi : $m=1$ $w_f=5,47s^{-1}$

Şekil 3.23 de elastik ray, elastik zemin ve vagonun birlikte ele alındığı durumdaki elastik ray çubuğunun titreşimi gösterilmektedir. Bu şekilde elastik ray çubuğunun en yüksek yer değıştirmesi $8,1006 \times 10^{-3}$ m ve en yüksek hızı $7,601 \times 10^{-5}$ m/s olarak elde edilmiştir. Dinamik sistemin ayrı ayrı çözüldüğü durumu gösteren şekillerden biri olan Şekil 3.4 ile karşılaştırıldığında, titreşim modlarının birbirlerine benzediği görülmektedir. Her iki durumda, titreşimin genlikleri farklıdır.



W2

Şekil 3.24 Plakanın titreşimi : $m=1$ $w_f=5,47s^{-1}$, $V_{vagon} = 108km/saat$

Şekil 3.24 de, plaka titreşimleri, raydan gelen etki de dahil edilerek üç boyutlu olarak verilmiştir. Burada, dinamik sisteme uygulanan kuvvet veya kuvvetler, titreşim genliğindeki önemli etkenlerden biridir. Bu şekil, Şekil 3.16 ile karşılaştırıldığında her iki durumdaki plakanın titreşimleri aynı modda ve farklı genliklerde görülmektedir.

Plakanın raydan gelen etkinin olmadığı durumu ile raydan gelen etkinin olduğu durumu birlikte incelendiğinde, sistemin cevabının şekilce birbirine benzediği görülmektedir. Bu, titreşim analizinde malzeme özelliklerinin önemini ortaya koymaktadır. Daha önce bahsedildiği gibi plakanın hareket denklemini elde etmek için kullanılan m değeri, plakanın rijitliğini ve titreşim modunu göstermektedir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Demiryolu vagonunun titreşim modeli ve analizi konusunun incelendiği bu tez çalışmasında; ray, elastik zemin ve vagon üç aşamada ele alınmıştır. İlk aşamada, ray ve elastik zemin birlikte düşünülüp, literatürden elde edilen sayısal değerler kullanılarak çözülmüştür. İkinci aşamada, vagon plaka olarak modellenmiş ve analitik çözüm yoluna gidilmiştir. Üçüncü aşamada, vagon ile ray arasındaki teker sistemi, yay ve sönümleyici olarak düşünülüp vagon ve ray üzerine etkisi yardımıyla her iki model beraberce ele alınıp çözülmüştür. Çözüm için Matlab bilgisayar dilinde yazılmış bilgisayar programları kullanılmıştır. Elde edilen değerler, kaynaklarda verilen diğer çalışmalar ile karşılaştırılıp sonuçların doğruluğu teyit edilmiştir. Bu örnekler EK B deki verilen bilgisayar programlarında yeni değerler kullanılarak artırılabilir.

Bu çalışmada, daha önce bu konuda yapılmış olan çalışmalardan farklı olarak aşağıdaki hususlar göz önüne alınmıştır:

- a) Önceki çalışmalarda elastik zeminin, ray traversi ve balastan oluştuğu varsayılırken, bu çalışmada ise zemin üç kısımdan oluşmuştur. Bunlar, ray traversi, balast ve elastik zemin şeklindedir. Burada, ray titreşimini sönümlemesi için kullanılan zemin dolgu malzemesi, kütsüz yay ve kütsüz sönümleyici olarak sisteme dahil edilmiş olmaktadır.
- b) Literatürde genel olarak; sistemin simetrik olduğu varsayımı yapılarak tek ray üzerinde hareket eden araç şeklinde matematiksel model çalışılmıştır. Bu yöntemde, vagon ya çubuk ya da konsantre kütle olarak ele alınmıştır. Burada ise sistemin simetrik olduğu, plaka şeklinde düşünülen vagonun sınır şartları belirlenirken kullanılmıştır. Ayrıca burada literatürden farklı olarak, vagonun plaka şeklinde ele alınması sonuçların gerçek durumu daha iyi yansıtmasını sağlamaktadır

- c) Literatürde ayrı ayrı ele alınıp modellenen ray-zemin ve vagon sistemleri, bu çalışmada hem ayrı ayrı modellenmiş ve çözülmüş ve ayrıca iki sistem arasındaki etkileşim dikkate alınarak herhangi bir t anı için beraberce çözülmüştür. Böyle bir çözümün fiziksel gerçeklere daha yakın sonuç vereceği açıktır.

Gelecekteki çalışmalarda; bu çalışmada denklemler elde edilirken dikkate alınmayan ray, elastik zemin ve vagonun yatay titreşimleri de dikkate alınabilir ve alınmalıdır. Yatay titreşimlerin düşey titreşimlere etkisi olacağı da açıktır. Bu durum; ray, elastik zemin ve vagonun üç boyutlu olarak modellenmesi ile daha da genişletilebilir.

KAYNAKLAR

1. Sheng, X. and Jones, C.J.C, Petyt, M., 1999, Ground Vibration Generated by a Harmonic Load Acting on a Railway Track, **Journal of Sound and Vibration**, 225(1), 3-28.
2. Nielsen, J.C.O. Igeland, A., 1995, Vertical Dynamic Interaction Between Train and Track-Influence of Wheel and Track Imperfections, **Journal of Sound and Vibration**, 187(5), 825-839.
3. Jones, C. J. C. and Block, J. R., 1996, Prediction of Ground Vibration from Freight Trains, **Journal of Sound and Vibration**, 193(1), 205-213.
4. Kubomura, K., Ando, K., Hansaka, M. and Mifune, N., Development of Noise Absorbing Material for Track.
5. Thambiratnam, D. and Zhugh, Y., 1996, Dynamic Analysis of Beams on an Elastic Foundation Subjected to Moving Loads, **Journal of Sound and Vibration**, 198(2), 149-169.
6. Gry, L. and Gontier, C., 1997, Dynamic Modelling of Railway Track a Periodic Model Based on a Generalized Beam Formulation, **Journal of Sound and Vibration**, 179(4), 531-558.
7. Gry, L., 1996, Dynamic Modelling of Railway Track Based on Wave Propagation, **Journal of Sound and Vibration**, 477-501.
8. Grassie, S. L., 1995, Dynamic Modelling Concrete Railway Sleepers, **Journal of Sound and Vibration**, 187(5), 799-813.

9. Andersen, L., Nielsen, S. R. K. and Ivankiewicz, R., 2000, Vehicle Moving Along an Infinite Beam with Random Surface Irregularities on a Kelvin Foundation, **Aalborg University, Structural Dynamics**, Paper No. 21.
10. Bracciali, A., Cascini, G. and Ciuffi, R., 1998, Time Domain Model of The Vertical Dynamic of a Railway Track up to 5 kHz, **Vehicle System Dynamics**, 30(1), 1-15.
11. Jing, Z., 1998, Nonlinear Oscillations and Chaos in a Railway Vehicle System, **Chinese Journal of Mechanical Engineering**, No. 3.
12. Laura, P. A. A. and Grossi, R. O., 1981, Transverse Vibrations of Rectangular Plates with Edges Elastically Restrained Against Translation and Rotations, **Journal of Sound and Vibration**, 75(1), 101-107.
13. Gorman, D. J., 1994, A General Solution for The Free Vibration of Rectangular Plates with Arbitrarily Distributed Lateral and Rotational Elastic Edge Support, **Journal of Sound and Vibration**, 174(4), 451-459.
14. Leissa, A. W., 1973, The Free Vibration of Rectangular Plates, **Journal of Sound and Vibration**, 31(3), 257-293.
15. Gorman, D. J., 1978, Free Vibration Analysis of the Completely Free Rectangular Plate by The Method of Superposition, **Journal of Sound and Vibration**, 57(3), 437-447.
16. Leissa, A. W., Laura, P. A. A. and Gutierrez, R. H., 1980, Vibrations of Rectangular Plates with Nonuniform Elastic Edge Supports, **Journal of Applied Mechanics**, Vol. 47., 891-895.

17. Prakash, B. G., 1980, Free Vibration of Rectangular Plates, **Journal of Sound and Vibration**, 70(2), 303-305.
18. Singhal, R. K. and Gorman, D. J., 1997, Free Vibration of Partially Clamped Rectangular Plates with and without Rigid Point Supports, **Journal of Sound and Vibration**, 203(2), 181-192.
19. Rajalingham, C., Bhat, R. B. and Xistris, G. D., 1997, Vibration of Rectangular Plates by Reduction of the Plate Partial Differential Equations into Simultaneous Ordinary Differential Equations, **Journal of Sound and Vibration**, 203(1), 169-180.
20. Laura, P. A. A. and Gutierrez, R. H., 1981, Transverse Vibrations of Thin , Elastic Plates with Concentrated Masses and Internal Elastic Supports, **Journal of Sound and Vibration**, 75(1), 135-143.
21. Gutierrez, R. H., Laura, P. A. A. and Grossi, R. O., 1981, Vibrations of Rectangular Plates of Bilinearly Varying Thickness and with General Boundary Conditions, **Journal of Sound and Vibration**, 75(3), 323-328.
22. El Kadiri, M. and Benamar, R., 1999, The Non-Linear Free Vibration of Fully Clamped Rectangular Plates: Second Non-Linear Mode for Various Plates Aspect Ratios, **Journal of Sound and Vibration**, 228(2), 333-358.
23. Kato, Y. and Honma, T., 1998, The Rayleigh-Ritz Solution to Estimate Vibration Characteristics of Building Floors, **Journal of Sound and Vibration**, 211(2), 195-206.

24. Heckl, M., Hauck, G. and Wettschureck, R., 1996, Structure-Borne Sound and Vibration from Rail Traffic, **Journal of Sound and Vibration**, 193(1), 175-184.
25. Madshus, C., Bessason, B. and Harvik, L., 1996, Prediction Model for Low Frequency Vibration from High Speed Railways on Soft Ground, **Journal of Sound and Vibration**, 193(1), 195-203.
26. Janssen, G., 1996, Monitoring and Predicting Railway Noise and Its Large-Scale Impact on The Environment; A Tool for Policy-Makers, **Journal of Sound and Vibration**, 193(1), 253-260.
27. Kurze, U. J., 1996, Tools for Measuring Predicting and Producing Environmental Impact from Railway Noise and Vibration, **Journal of Sound and Vibration**, 193(1), 237-251.
28. Odebrant, T., 1996, Noise from Steel Railway Bridges: A Systematic Investigation on Methods for Sound Reduction, **Journal of Sound and Vibration**, 193(1), 227-233.
29. Hood, R. A., Greer, R. J., Breslin, M. and Williams, P. R., 1996, The Calculation and Assessment of Ground-Borne Noise and Perceptible Vibration from Trains in Tunnels, **Journal of Sound and Vibration**, 193(1), 215-225.
30. Kuppelwieser, H. and Ziegler, A., 1996, A Tool for Predicting Vibration and Structure-Borne Noise Immissions Caused by Railways, **Journal of Sound and Vibration**, 193(1), 261-267.
31. Leeuwen, J. J. A. Van, 1996, Noise Prediction Models to Determine the Effect of Barriers Placed Alongside Railway Lines, **Journal of Sound and Vibration**, 193(1), 269-276.

32. Ringheim, M., 1996, The New Nordic Prediction Method for Railway Noise, **Journal of Sound and Vibration**, 193(1), 277-282.
33. Barskow, B., 1996, Experiences with Various Configurations of Microphone Arrays Used to Locate Sound Sources on Railway Trains Operated by The DB AG, **Journal of Sound and Vibration**, 193(1), 283-293.
34. Janssens, M. H. A. and Thompson, D. J., 1996, A Calculation Model for The Noise from Steel Railway Bridges, **Journal of Sound and Vibration**, 193(1), 295-305.
35. Yüksel, Ş., 1995, Prizmatik Mafsal İçinden Kayan Elastik Çubukların Dinamiği, **Doktora Tezi**, İTÜ.
36. Gürgöze, M., 1984, Analitik Metolarla Titreşim Etüdü, **İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü**, Yayın No. 1, İstanbul.
37. Meirovitch, L., Elements of Vibration Analysis, Second Edition, **McGraw-Hill Inc.**, ISBN 0-07-100271-5.
38. Timoshenko, S. Vibration Problems in Engineering, Third Edition, **D. Van Nostrand Company Inc.**



EKLER

EK A

KATSAYILARI ZAMANA BAĞLI, İKİNCİ MERTEBE ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM TAKIMLARININ ÇÖZÜLMESİ

Diferansiyel denklemlerinin çözülmesinde kullanılan sayısal yöntemlerin çoğu 1. mertebeden diferansiyel denklemleri veya denklem takımlarını çözmek için geliştirilmiştir. Daha yüksek mertebeye sahip diferansiyel denklemlerin bu yöntemlerden biri ile çözülebilmesi için 1. mertebeden diferansiyel denklemlere dönüştürülmesi gerekmektedir.

İkinci mertebeden, katsayıları zamana bağlı ve birbirine bağımlı n adet adi diferansiyel denklemlerden oluşan bir diferansiyel denklem takımı (2.18) dekine benzer şekilde matris formda yazılırsa

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (\text{A.1})$$

olur. Burada $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{K}$, $n \times n$ boyutunda olup sırayla sistemin kütle, sönüm ve rijitlik matrislerini göstermektedir. $\mathbf{f}(t)$ sisteme etkiyen tahrik kuvvetlerini ve $\mathbf{q}$ de genelleştirilmiş koordinatları göstermekte olup her ikisi de n boyutunda sütun vektörlerdir.

Aşağıda yapılan

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} & -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

tanımlarını yardımıyla (A.1) de matris formunda verilen 2.mertebeden n adet diferansiyel denklem 1.mertebeden $2n$ adet diferansiyel denklem şekline

dönüştürülebilir. Yukarıda $Q(t)$ ve $F(t)$ n boyutunda vektörler olup A ve B ise $2n \times 2n$ boyutunda matrislerdir. Elde edilecek yeni denklem takımının matris formda ifadesi

$$Q(t) = A \dot{Q}(t) + B F(t) \quad (A.4)$$

şeklindedir.

Elde edilen 1. mertebeden, birbirine bağımlı $2n$ adet diferansiyel denklem, bilinen sayısal yöntemlerden biri kullanılarak çözülebilir. Böyle denklemlerin sayısal çözümleri, aritmetik işlemlerin çokluğu nedeniyle ancak bilgisayar ile yapılabilir.

Elde edilen (B.1) denklem takımına bakıldığında, eşitliğin sağ tarafında bulunan $f(t)$ vektörü zamana bağlı bir fonksiyon şeklinde, sisteme uygulanan sürekli bir girişi göstermektedir. Sürekli bir fonksiyonun bilgisayarlarda işlem görmesi ise imkansızdır. Bu nedenle, işlem zamanı eşit aralıklara bölünür. Her adım başındaki fonksiyonun değeri o adım için sisteme bir impuls giriş gibi kabul edilir. Katsayı matrislerinin adım başındaki değerleri ise, adım süresince sabitmiş gibi işlem görür. Seçilen aralık sayısı artırılarak giriş fonksiyonunun sürekli haline yaklaşık bir hal elde edilebilir.

Sistemin (B.4) de verilen 1.mertebeden diferansiyel denklemleri, şimdi giriş fonksiyonunu impulslar şeklinde kabul edilerek bilinen bir sayısal yöntemle kolayca çözülebilir. Burada, en çok kullanılan yöntemlerden biri olan 4. mertebeden Runge-Kutta integrasyon yöntemi kullanılacaktır [37].

EK B BİLGİSAYAR PROGRAMLARI

% Bu program Elastik ray ve elastik zemin titreşiminin çözümüne temel olan katsayı
% matrislerini oluşturur.

```
function kisim;
%matris boyutlari
nk=30;%küt, yay ve damping matris oluşturma boyutu
%n=91; %küt, yay ve damping matris boyutu
n=4+(nk-1)*3;
boy=10;
h=boy/nk;
%küt
mr=120;
ms=490;
mb=1200;
%spring
EI=1.26e7;
ks=3.15e8;
kb=3.15e8;
kg=1e5;
%damping
cs=3.15e8;
cb=3.15e8;
cg=1e5;

% function yay
tmp=zeros(4,4);
tmp(1,1)=28*EI/h^3;tmp(1,4)=-10*EI/h^3;
```

```

tmp(2,1)=-ks;tmp(2,2)=ks+kb;tmp(2,3)=-kb;
tmp(3,2)=-kb;tmp(3,3)=kb+kg;
tmp(4,1)=tmp(1,4);tmp(4,4)=4*EI/h^3;
%
%tmp=tmp/1e10
%
save birim_yay.txt tmp -ASCII

```

```

spring=zeros(n,n);
l=-3;
for k=1:nk,
    l=l+3;
    for i=1:4,
        for j=1:4,
            spring(i+l,j+l)=tmp(i,j);
        end
    end
end
l=-3;
for k=1:nk-1,
    l=l+3;
    for i=1:4,
        for j=1:4,
            if j==4 & i==4, spring(i+l,j+l)=tmp(1,1)+tmp(4,4);
            end
        end
    end
end
save spring.txt spring -ASCII

```

```

%function kutle;
mass=zeros(n,n);

```

```

tmp=zeros(4,4);
tmp(1,1)=(204/420)*mr*h;
tmp(1,4)=(51/420)*mr*h;
tmp(4,1)=tmp(1,4);
tmp(4,4)=(116/420)*mr*h;
tmp(2,2)=ms;
tmp(3,3)=mb;
%
%
save birim_kutle.txt tmp -ASCII

```

```

l=-3;
for k=1:nk,
    l=l+3;
    for i=1:4,
        for j=1:4,
            mass(i+l,j+l)=tmp(i,j);
        end
    end
end
end

```

```

l=-3;
for k=1:nk-1,
    l=l+3;
    for i=1:4,
        for j=1:4,
            if j==4 & i==4, mass(i+l,j+l)=tmp(1,1)+tmp(4,4);
            end
        end
    end
end
end

```

```
save kotle.txt mass -ASCII
```

```
%function damp;
damp=zeros(n,n);
tmp=zeros(4,4);
tmp(2,1)=-cs;
tmp(2,2)=cs+cb;
tmp(2,3)=-cb;
tmp(3,2)=-cb;
tmp(3,3)=cb+cg;
%
%
```

```
save birim_damp.txt tmp -ASCII
```

```
l=-3;
for k=1:nk,
    l=l+3;
    for i=1:4,
        for j=1:4,
            damp(i+l,j+l)=tmp(i,j);
        end
    end
end
l=-3;
for k=1:nk-1,
    l=l+3;
    for i=1:4,
        for j=1:4,
            if j==4 & i==4, damp(i+l,j+l)=tmp(1,1)+tmp(4,4);
            end
        end
    end
end
```

end

save damp.txt mass -ASCII

massinv=inv(mass);

save massinv.txt massinv -ASCII

%cat(1,a,a) martisleri alt alta birlestirir

%cat(2,a,a) martisleri yan yana birlestirir

g1=-massinv*spring;

g2=-massinv*damp;

%

%

g11=cat(2,zeros(n,n),eye(n,n));

g12=cat(2,g1,g2);

A_mat=cat(1,g11,g12);

save A_mat.txt A_mat -ASCII

%

%

g11=cat(2,zeros(n,n),zeros(n,n));

g12=cat(2,zeros(n,n),massinv);

%g12=cat(2,zeros(n,n),mi);

B_mat=cat(1,g11,g12);

save B_mat.txt B_mat -ASCII

% Bu program rayın çözümünü Runge-Kutta metodu ile yapar

function beam_with_time;

clear all

clc

```
nk=30;%kütleye, yay ve damping matris oluşturma boyutu
n=4+(nk-1)*3-1;
```

```
%tspan=[0 tfin];
tspan=[0 4];
A=load('A_mat.txt');
B=load('B_mat.txt');
a=180;
```

```
%başlangıç yerdeğiştirme
ini_disp=zeros(n*2,1);
for i=1:3:nk*3,
    ini_disp(i,1)=0.002;
end;
```

```
%kuvvet
vagon=9.81*30*3.5*0.1*2710 %yerçekim ivmesi*hacim*yoğunluk
tim=1/30
kuv=zeros(n*2,1);
kuv(n+1,1)=vagon/4;
%
%
[t,y]=ode45(@f,tspan,ini_disp,0.03,A,B,kuv);
[m1 n1]=size(y)
y1=y;
t1=t;
save y_out.txt y -ASCII
```

```
kuv=zeros(n*2,1);
kuv(n+4,1)=vagon/4;
%
%
```

```

[t,y]=ode45(@f,tspan,ini_disp,0.03,A,B,kuv);
[m1 n1]=size(y)
for i=1:m1,
    for j=1:n1,
        y1(i,j)=y1(i,j)+y(i,j);
    end;
end;
end;

```

```

for i=3:30,
    qq=n+(3*i-2)
    kuv=zeros(n*2,1);
    kuv(n+(3*i-2),1)=vagon/4;
    %
    %

```

```

[t,y]=ode45(@f,tspan,ini_disp,0.03,A,B,kuv);
[m1 n1]=size(y)

```

```

for i=1:m1,
    for j=1:n1,
        y1(i,j)=y1(i,j)+y(i,j);
    end;
end;
end;

```

```

L=1;
for m=1:size(t1),
    for k=1:3:a,
        if k==1
            L=k;
        else L=k-3;

```

```

        ssa1(m,L)=y1(m,k);
    end
end
end

```

```

h=figure(1);
set(h);
h1=subplot(1,3,1);plot(t1,ssa1(:,1),'b-');
h2=subplot(1,3,2);plot(t1,ssa1(:,43),'m-');
h3=subplot(1,3,3);plot(t1,ssa1(:,88),'k-');
%legend
legend(h1,'İlk Uç Noktası');
legend(h2,'Orta Noktası');
legend(h3,'Son Uç Noktası');

```

```

function dydt=f(t,y,A,B,kuv);
dydt=[A*y+B*kuv];

```

% Bu program balastın çözümünü Runge-Kutta metodu ile yapar

```
function sleeper_with_time;
```

```
clear all
```

```
clc
```

```
nk=30;%kütlev, yay ve damping matris oluşturma boyutu
```

```
n=4+(nk-1)*3-1;
```

```
%tspan=[0 tfin];
```

```
tspan=[0 4];
```

```
A=load('A_mat.txt');
```

```
B=load('B_mat.txt');
```

```
%kuv=load('force.txt');
```

```
%n=length(kuv)
```

```
%a=n
```

```
a=180;
```

```
%başlangıç yerdeğiştirme
```

```
ini_disp=zeros(n*2,1);
```

```
for i=1:3:nk*3,
```

```
    ini_disp(i,1)=0.002;
```

```
end;
```

```
%kuvvet
```

```
vagon=9.81*30*3.5*0.1*2710 %yerçekim ivmesi*hacim*yoğunluk
```

```
tim=1/30
```

```
kuv=zeros(n*2,1);
```

```
kuv(n+1,1)=vagon/4;
```

```
%
```

```
%
```

```
[t,y]=ode45(@f,tspan,ini_disp,0.03,A,B,kuv);
```

```
[m1 n1]=size(y)
```

```
y1=y;
```

```
t1=t;
```

```
save y_out.txt y -ASCII
```

```
kuv=zeros(n*2,1);
```

```
kuv(n+4,1)=vagon/4;
```

```
%
```

```
%
```

```
[t,y]=ode45(@f,tspan,ini_disp,0.03,A,B,kuv);
```

```
[m1 n1]=size(y)
```

```
for i=1:m1,
```

```
    for j=1:n1,
```

```
        y1(i,j)=y1(i,j)+y(i,j);
```

```
    end;
```

```

    end;
end;

for i=3:30,
    qq=n+(3*i-2)
    kuv=zeros(n*2,1);
    kuv(n+(3*i-2),1)=vagon/4;
    %
    %

[t,y]=ode45(@f,tspan,ini_disp,0.03,A,B,kuv);
[m1 n1]=size(y)

for i=1:m1,
    for j=1:n1,
        y1(i,j)=y1(i,j)+y(i,j);
    end;
end;
end;

L=1;
for m=1:size(t1),
    for k=1:3:a,
        if k==1
            L=k;
        else L=k-3;
            ssa1(m,L)=y1(m,k);
        end
    end
end

h=figure(1);

```

```

set(h);
h1=subplot(1,3,1);plot(t1,ssa1(:,2),'b-');
h2=subplot(1,3,2);plot(t1,ssa1(:,44),'m-');
h3=subplot(1,3,3);plot(t1,ssa1(:,89),'k-');
%legend
legend(h1,'İlk Uç Noktası');
legend(h2,'Orta Noktası');
legend(h3,'Son Uç Noktası');

```

```

function dydt=f(t,y,A,B,kuv);
dydt=[A*y+B*kuv];

```

```

% Bu program balastın çözümünü Runge-Kutta metodu ile yapar

```

```

function ballast_with_time;

```

```

clear all

```

```

clc

```

```

nk=30;%kütlev, yay ve damping matris oluşturma boyutu

```

```

n=4+(nk-1)*3-1;

```

```

%tspan=[0 tfin];

```

```

tspan=[0 4];

```

```

A=load('A_mat.txt');

```

```

B=load('B_mat.txt');

```

```

%kuv=load('force.txt');

```

```

%n=length(kuv)

```

```

%a=n

```

```

a=180;

```

```

%başlangıç yerdeğiştirme

```

```

ini_disp=zeros(n*2,1);

```

```

for i=1:3:nk*3,

```

```

    ini_disp(i,1)=0.002;

```

```
end;
```

```
%kuvvet
```

```
vagon=9.81*30*3.5*0.1*2710 %yerçekim ivmesi*hacim*yoğunluk
```

```
tim=1/30
```

```
kuv=zeros(n*2,1);
```

```
kuv(n+1,1)=vagon/4;
```

```
%
```

```
%
```

```
[t,y]=ode45(@f,tspan,ini_disp,0.03,A,B,kuv);
```

```
[m1 n1]=size(y)
```

```
y1=y;
```

```
t1=t;
```

```
save y_out.txt y -ASCII
```

```
kuv=zeros(n*2,1);
```

```
kuv(n+4,1)=vagon/4;
```

```
%
```

```
%
```

```
[t,y]=ode45(@f,tspan,ini_disp,0.03,A,B,kuv);
```

```
[m1 n1]=size(y)
```

```
for i=1:m1,
```

```
    for j=1:n1,
```

```
        y1(i,j)=y1(i,j)+y(i,j);
```

```
    end;
```

```
end;
```

```
end;
```

```
for i=3:30,
```

```
    qq=n+(3*i-2)
```

```
    kuv=zeros(n*2,1);
```

```
    kuv(n+(3*i-2),1)=vagon/4;
```

```

%
%

[t,y]=ode45(@f,tspan,ini_disp,0.03,A,B,kuv);
[m1 n1]=size(y)

for i=1:m1,
    for j=1:n1,
        y1(i,j)=y1(i,j)+y(i,j);
    end;
end;
end;

L=1;
for m=1:size(t1),
    for k=1:3:a,
        if k==1
            L=k;
        else L=k-3;
            ssa1(m,L)=y1(m,k);
        end
    end
end

h=figure(1);
set(h);
h1=subplot(1,3,1);plot(t1,ssa1(:,3),'b-');
h2=subplot(1,3,2);plot(t1,ssa1(:,45),'m-');
h3=subplot(1,3,3);plot(t1,ssa1(:,90),'k-');
%legend
legend(h1,'İlk Uç Noktasi');
legend(h2,'Orta Noktasi');

```

```
legend(h3,'Son Uç Noktası');
```

```
function dydt=f(t,y,A,B,kuv);
```

```
dydt=[A*y+B*kuv];
```

```
function plaka_son_1;
```

```
clear all;
```

```
clc;
```

```
%format rat
```

```
%%%%%%%%%
```

```
% Plaka titreşimi %
```

```
%%%%%%%%%
```

```
%
```

```
% Plaka malzemesi olarak Alüminyum
```

```
%
```

```
E=71*10^9 %Elastisite modülü Pa
```

```
mu=0.334 %Poisson oranı
```

```
ro=2.71*10^3 %yoğunluğu kg/m^2
```

```
a=30 %Vagon boyu m
```

```
b=3.5 %Vagon eni m
```

```
H=0.1 %Vagonun kalınlığı m
```

```
g=9.81 % yerçelim ivmesi
```

```
Gp=a*b*H*ro*g % Plakanın ağırlığı N
```

```
D=(1/12)*E*H^3/(1-mu^2) % rijitlik elastisitesi
```

```
K=15*10^5 % Vagon Uçlarındaki yay
```

```
C=3200 % Vagon Uçlarındaki sönümleyici
```

```
%%%%%%%%%
```

```
%Başlangıç şartları
```

```
%%%%%%%%%
```

```
w0=0.001; %Başlangıç yer değiştirmesi
```

```
dwdt=0.0001;%Başlangıç hızı
```

```
%%%%%%%%%
```

```

%Karakteristik Denklem%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D
ro
syms x y t a1 a2 wm wdm% x y

m=1
r = m*pi/a
%x=0
%y=3.5/2
wm=5.47
%
a1 = sqrt(wm*sqrt(ro/D)-m*pi/a); %alfa
a2 = sqrt(wm*sqrt(ro/D)+m*pi/a);%gama
%
%      (a2^2-r^2)
%r1=-----
%      (a2^2+a1^2)

r1=(a2^2-r^2*mu)/(a2^2+a1^2);

%
%r2=sin(a1*b)+sinh(a2*b)
%
r2=sin(a1*b)+(a1/a2)^3*sinh(a2*b);

%
%
%      K
%r3=-----*(cos(a1*b)+cosh(a2*b))
%      D*a1^3

```

```

%
r3=(K/(D*a1^3))*(cos(a1*b)+cosh(a2*b));
%
%          K
%r4=-----*sin(a1*b)-cos(a1*b)
%      D*a1^3
%
r4=(K/(D*a1^3))*sin(a1*b)-cos(a1*b);
%
%      cosh(a2*b)+(K/(D*a1^3))*sinh(a2*b)
%r5=-----
%
%          K
%      (cos(a1*b) - ----- *sin(a1*b)
%          D*(a1^3)
r5=(cosh(a2*b)+(K/(D*a1^3))*sinh(a2*b))/(cos(a1*b)-(K/(D*a1^3))*sin(a1*b));
%
%      K
%      ----- *sin(a1*b) +r1*(cos(a1*b)-cosh(a2*b))
%      (D*a1^3)
%r6=-----
%
%      a2^3
%      -----*sin(a1*b)-r1*sinh(a2*b)
%      a1^3
r6=((K/(D*a1^3))*sin(a1*b)+r1*(cos(a1*b)-cosh(a2*b)))/((a2/a1)^3*sin(a1*b)-
r1*sinh(a2*b) );

%%%%%%%%%%
B1=(r1*(r2+r3))/r4+r5*r6;
B2=r1;
B3=r6;
%%%%%%%%%%
P1=a*( -B1*a1^3*cos(a1*b) + B2*a1^3*sin(a1*b) + B3*a2^3*cosh(a2*b) +
a2^3*sinh(a2*b));

```

```

P2=4*( B1*sin(a1*b) + B2*(cos(a1*b)+1) + B3*sinh(a2*b) + cosh(a2*b) + 1 );
P3=a*((B1/a1)*(1-cos(a1*b)) + (B2/a1)*sin(a1*b) + (B3/a2)*(cosh(a2*b)-1) +
(1/a2)*sinh(a2*b));
%%%%%%%%%%
%wm=sqrt(P1/(ro*H*P3))
sm=(C*P2/(ro*H*P3))*(1/(2*wm))
wdm=wm*(1-sm)^0.5
An=((dwdt+sm*wm*w0^2)^2+(w0*wdm)^2)^0.5;
theta=atan((w0*wdm)/(dwdt*sm*wm*w0));

```

```

%%%%%%%%%%
%% w(x,y,t)=w(x)*w(y)*Fm(t)
%%%%%%%%%%
% t=2.2
% h=get(gcf)
% set(gcf, 'Visible', 'off' )
% Fmt=An*exp(-sm*wm*t)*sin(wdm*t+theta);
% wy=(B1*sin(a1*y)+B2*cos(a1*y)+B3*sinh(a2*y)+cosh(a2*y));
% wx=cos(r*x);
% wz=wx*wy*Fmt;
% ezsurf(wz,[0,30,0,3.5]);
% view(45,45);
% h=get(gcf)
%set(gcf,'interpreter','none')
% dt=4/40
% t=-dt
%aviobj=avifile('mymovie1.avi','colormap',[2552], 'compression' , 'Cinepak' ,
'fps' , 5);
% aviobj.Quality = 100;
% for i=1:40;
% t=t+dt

```

```

% Fmt=An*exp(-sm*wm*t)*sin(wdm*t+theta);
% wy=(B1*sin(a1*y)+B2*cos(a1*y)+B3*sinh(a2*y)+cosh(a2*y));
% wx=cos(r*x);
% %wz=wx*wy*Fmt;
% %
% wz=wy*wx*Fmt;
%
% dosya=['free',num2str(i),'.jpg']
% ezsurf(wz,[0,30,0,3.5]);
% view(45,45);
% %
% frame = getframe(gcf);
% aviobj = addframe(aviobj,frame);
% %
% end;
% aviobj = close(aviobj);
%

% t=3
% set(gcf, 'Visible', 'off')
% Fo=P2/(ro*H*P3)*(-Gp/4+K*4*10^(-4)+C*4*10^(-4))/10^6;
% Fdmt=An*exp(-sm*wm*t)*sin(wdm*t+theta)-Fo*(-wdm+exp(-t*sm*wm)*
wdm * cos(wdm*t)+exp(-t*sm*wm)*sm*wm*sin(wdm*t));
% wy=(B1*sin(a1*y)+B2*cos(a1*y)+B3*sinh(a2*y)+cosh(a2*y));
% wx=cos(r*x);
% wz=wx*wy*Fdmt;
% ezsurf(wz,[0,30,0,3.5]);
% %view(-45,45);

Fo=P2/(ro*H*P3)*(-Gp/4+K*4*10^(-4)+C*4*10^(-4))/10^3;
%t=0

```

```
dt=4/40
```

```
t=-dt
```

```
aviobj=avifile('mymovie2.avi','colormap',[25 5 2] , 'compression' , 'Cinepak' ,  
'fps' ,5);
```

```
aviobj.Quality = 100;
```

```
for i=1:40;
```

```
t=t+dt
```

```
Fdmt=An*exp(-sm*wm*t)*sin(wdm*t+theta)-Fo*(-wdm+exp(-  
t*sm*wm)*wdm*cos(wdm*t)+exp(-t*sm*wm)*sm*wm*sin(wdm*t))
```

```
wy=(B1*sin(a1*y)+B2*cos(a1*y)+B3*sinh(a2*y)+cosh(a2*y));
```

```
wx=cos(r*x);
```

```
wzdm=wx*wy*Fdmt/100;
```

```
ezsurf(wzdm)%,[0 30,0,3.5]);
```

```
view(45,45);
```

```
% dosya=['free',num2str(i),'.jpg']
```

```
% %saveas(gcf,dosya);close;
```

```
% %
```

```
frame = getframe(gcf);
```

```
aviobj = addframe(aviobj,frame);
```

```
% %
```

```
%
```

```
end;
```

```
aviobj = close(aviobj);
```

ÖZGEÇMİŞ

Raşit KIRIŞIK 1964 yılında Kırşehir’de doğdu. İlkokulu Kocaeli’nde, orta öğrenimini Ankara’da bitirdi. Yenimahalle Halide Edip Lisesi’nde lise öğrenimini tamamladı. 1989 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü’nden mezun oldu. Aynı yıl Türkiye Atom Enerjisi Kurumu’nun açmış olduğu sınavı kazanarak işe başladı. İnşaat Kontrol Şubesi’nde Kontrolörlük görevi yaptı. Türkiye Atom Enerjisi Kurumu Çekmece Nükleer Eğitim ve Araştırma Merkezi’nde uluslararası standartlara göre eğitimi verilen tahribatsız muayene yöntemlerinden Radyografi Seviye II belgesine sahiptir. Halen Türkiye Atom Enerjisi Kurumu Teknoloji Dairesi Kalite Temini ve Denetimi Şubesi’nde Makina Mühendisi olarak çalışmakta olan Raşit KIRIŞIK evli ve iki çocuk babasıdır.

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMENTASYON MERKEZİ**