



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**DENGE VE SABİT NOKTA ARASINDAKİ İLİŞKİNİN
İNCELENMESİ VE VERİ BAĞLILIĞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra ÇETİN

DANIŞMAN

Doç. Dr. Samet MALDAR

AKSARAY, 2025

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 222342709 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Esra ÇETİN tarafından hazırlanan “**DENGE VE SABİT NOKTA ARASINDAKİ İLİŞKİNİN İNCELENMESİ VE VERİ BAĞLILIĞI**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Samet MALDAR

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi

Bu tezin kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 25 / 04 / 2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Fazlıye KARABÖRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Esra ÇETİN

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında bilgisini, tecrübesini ve en önemlisi desteğini hiç esirgemeyen her daim yanımda olan danışmanım Doç. Dr. Samet MALDAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, yüksek lisans tezimin yazım aşamasında yaşadığım sıkıntılarda ve zorluklarda her zaman yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen özellikle ikiz kardeşim Buşra ÇETİN'e ve aileme içtenlikle teşekkür ederim.

Esra ÇETİN
AKSARAY, 2025

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1.GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER.....	3
3. ARAŞTIRMA BULGULARI	17
3.1 Denge Problemin Sabit Nokta İterasyonun Viskozite Yaklaşımıyla Çözümü	17
3.2 Denge Problemin Yeni Sabit Nokta İterasyon Yöntemiyle Çözümü.....	37
3.3 Veri Bağlılığı.....	45
4.SONUÇLAR VE ÖNERİLER	49
KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ.....	54

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DENGE VE SABİT NOKTA ARASINDAKİ İLİŞKİNİN İNCELENMESİ VE VERİ BAĞLILIĞI

Esra ÇETİN

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Samet MALDAR

ÖZET

Sabit nokta teorisi disiplinler arası bir teori olmasından dolayı ekonominin temel konularından biri olan denge problemleriyle ilişkilidir. Ekonomik denge problemlerini hesaplamak, analiz etmek ve elde edilen çözümleri formülleştirmek için sabit nokta teoreti kullanılmaktadır. Denge problemleri optimizasyon ve varyasyonel eşitsizliklerin genelleştirilmesi olarak literatüre girmiştir. Birçok yazar tarafından farklı yapılarda çalışılmıştır. Bunlar arasında viskozite yaklaşım yöntemi de bulunmaktadır.

Bu tez çalışmasında viskozite yaklaşım yöntemi kullanılarak Hilbert uzayında relaxed (a, b) -cocoersive dönüşüm ve genişlemeyen bir dönüşüm sınıfının sabit nokta kümesinin, bir denge probleminin çözüm kümesinin ayrıca varyasyonel eşitsizliğin çözüm kümesinin ortak bir elemanını bulmak amacıyla yeni iterasyon yöntemi tanıtılmıştır. Bu iterasyon yönteminin bazı koşullar altında yukarıdaki üç kümenin ortak bir elemanına güçlü bir şekilde yakınsadığı ispat edilmiştir. Yakınsama teorisini destekleyen uygulamaya da yer verilmiştir. Son olarak denge problemin çözümü için tanımlanan iterasyon yöntemi kullanılarak veri bağıllığı kavramı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit Nokta, Denge Problemi, Veri Bağıllığı, Viskozite Yaklaşım Yöntemi, Varyasyonel Eşitsizlik.

Nisan, 2025; 54 sayfa

M.Sc. THESIS

**INVESTIGATION OF THE RELATIONSHIP BETWEEN EQUILIBRIUM
AND FIXED POINT AND DATA DEPENDENCE**

Esra ÇETİN

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Samet MALDAR

ABSTRACT

Since fixed point theory is an interdisciplinary theory, it is related to equilibrium problems, which is one of the main topics of economics. Fixed point theory is used to calculate, analyze and formulate solutions to economic equilibrium problems. Equilibrium problems have entered the literature as generalizations of optimization and variational inequalities. It has been studied by many authors in different structures. Among them is the viscosity approximation method.

In this thesis, using the viscosity approximation method, a new iteration method is introduced to find a common element of the set of fixed point of a class of relaxed (a, b) - cocoersive mapping and nonexpansive mapping in Hilbert space, the solution set of an equilibrium problem and the solution set of a variational inequality. It is proved that this iteration method converges strongly to a common element of the above three sets under some conditions. An application supporting the convergence theory is also given. Finally, the concept of data dependency is examined using the defined iteration method for solving the equilibrium problem.

Keywords: Fixed Point, Equilibrium Problem, Data Dependence, Viscosity Approximation Method, Variational Inequality.

April, 2025; 54 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. A'nın relaxed cocoercive dönüşüm olduğunu gösteren grafik. 36



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. $x_1 = 1$ başlangıç noktası için (3.1) ile verilen iterasyon yönteminin yakınsama davranışı.....	37
---	----



SİMGELER VE KISALTMALAR

$EP(F)$	Denge Problemi
$F(T)$	T Dönüşümünün Sabit Noktalarının Kümesi
$GEP(F, A)$	Genelleştirilmiş Denge Problemi
$GMEP(F, \varphi, A)$	Genelleştirilmiş Karışık Denge Problemi
$MEP(F, \varphi)$	Karışık Denge Problemi
$N_C(v)$	C Kümesinde Tanımlı Normal Koni
P_C	Metrik İzdüşüm Operatörü
$VI(C, A)$	Varyasyonel Eşitsizlik
$(X, \ \cdot \)$	X Normlu Uzay
(X, d)	X Metrik Uzay
$x_n \xrightarrow{k} x$	Kuvvetli Yakınsak
$x_n \rightharpoonup x$	Zayıf Yakınsak
$F \cap VI(C, A) \cap EP(F)$	Ψ
$F \cap VI(C, B) \cap EP(F)$	Ψ'

1.GİRİŞ

Sabit nokta teorisi birçok disiplinle bağlantılı önemli bir teoridir. Bu nedenle, birçok alanda geniş uygulama alanına sahiptir. Bu alanlara örnek olarak denge problemleri verilebilir. Sabit nokta teorisi denge probleminin çözümü ve çözüm için gerekli parametrelerin ve koşulların belirlenmesine etkin bir şekilde katkı sağlayan tekniklerden biridir. Denge problemi, ekonomi, optimizasyon ve finans gibi birçok uygulama alanı olan güncel ve etkileyici bir konudur. Tarihsel olarak, Muu ve Oettli [1] denge problemi fikrini ilk kez 1992 yılında ortaya atmışlardır. Blum ve Oettli [2] 1994 yılında bu fikri genişleterek optimizasyon ve varyasyonel eşitsizlik problemlerinin bir genellemesi olarak sunmuşlardır. Birçok araştırmacı tarafından farklı yapılarda çalışılmıştır. Bunlar arasında Hilbert uzayında bir denge probleminin viskozite sabit nokta yaklaşımı yöntemi ile çözümü de bulunmaktadır. Bu bağlamda 2007 yılında Takahashi ve diğerleri [3] bir denge probleminin çözüm kümesinin ortak bir elemanını ve genişlemeyen bir dönüşüm sınıfının sabit noktalarını bulmak için viskozite yaklaşım yöntemini kullanan bir iterasyon metodu tanıtmışlardır. Qin ve diğerleri [4], genişlemeyen ve relaxed cocoercive dönüşümlerinin sabit noktalar kümelerinin ve bir denge probleminin çözümler kümesinin ortak bir elemanını bulmak için bir viskozite iterasyon yöntemine güçlü yakınsamasını incelemişlerdir. Chang ve diğerleri [5], aynı yıl içinde benzer hedefler doğrultusunda farklı bir iterasyon üzerinde çalışmışlardır. Ceng ve Wong [6], 2009 yılında Takashashi ve diğerleri [3] ile aynı amaç için farklı iterasyon metodu ile çalışmışlardır. Chang ve diğerleri [7], Hilbert uzayında bir denge probleminin çözüm kümesini elde etmek için yeni bir viskozite iterasyon yöntemi tanıtmışlardır. Bu çalışmada genişlemeyen dönüşüm ve α – ters güçlü monoton dönüşüm sınıflarını kullanmışlardır. Yao ve diğerleri [8] 2009 yılında karışık denge probleminin çözüm kümesini elde etmek için bir viskozite iterasyon yöntemi tanımlamıştır. Bazı yazarlar tarafından 2009 yılında yapılan çalışmalara atıfta bulunulmuştur [9,10]. 2010 yılında ise Qin ve diğerleri [11] genelleştirilmiş bir denge probleminin kümesinin, bir varyasyonel eşitsizlikler sisteminin çözüm kümesinin ve kesin - pseudo contraction sabit noktalar kümesinin ortak bir elemanını bulmak için bir iterasyon yöntem sunmuşlardır. Aynı yıl Katchang ve Kumam [12] bir denge probleminin çözüm kümesinin, β - ters-kuvvetli monoton dönüşüm ve varyasyonel eşitsizliğin çözüm kümesinin ortak bir elemanını bulmak için bir projeksiyon operatörü ile yeni bir iterasyon yöntemi tanıtmışlardır. 2012 yılında Piri [13], diğer

araştırmacılar gibi, yeni bir iterasyon yöntemi tanımlayarak bir denge problemi sisteminin çözüm kümesini araştırmıştır. Wen ve Chen [14], genelleştirilmiş denge problemlerinin çözüm kümesinin ortak elemanına ve k – kesin pseudo- contraction dönüşümlerin ortak sabit noktalarının kümesine ulaşmak için bir iterasyon yöntemini modifiye ederek genelleştirmişlerdir. Cho ve Qin [15] 2014 yılında hibrit iterasyon yöntemi ile denge ve sabit nokta problemlerini incelemişlerdir. 2016 yılında, Yu ve diğerleri [16] Brouwer ve Kakutani sabit nokta teoremlerinin doğrudan Nash denge teoremi kullanılarak elde edilebileceğini göstermişlerdir. Aynı yıl Karahan [17], genelleştirilmiş karışık denge problemleri için zayıf ve güçlü yakınsama teoremleri elde etmiştir. Son iki yılda yapılan bazı çalışmalar ise sırasıyla aşağıdaki gibidir. Hieu ve diğerleri [18], Hilbert uzayında monoton ve Lipschitz tipi bir çift fonksiyon içeren bir denge probleminin çözümünü, viskozite -regülasyon iterasyon yöntemleri ile elde etmişlerdir. Ndlovu ve diğerleri [19], Hadamard manifoldunda denge problemlerinin ve sabit nokta problemlerinin çözümünü, viskozite ekstragradientini kullanarak ortak çözüme ulaşmışlardır.

Bu tez çalışmasında Hilbert uzaylarında denge probleminin çözüm kümesinin, relaxed (a, b) -cocoersive dönüşüm ve genişlemeyen dönüşüm sınıflarının sabit noktalar kümesinin ve varyasyonel eşitsizliğin çözüm kümesinin ortak bir elemanını bulmak amaçlanmıştır. Viskozite yaklaşım metodundan yararlanarak yeni iterasyon yöntemi tanımlanmıştır. Bu iterasyonun yöntemi kullanılarak veri bağlı sonucuna varılmıştır. Daha sonra üç kümenin ortak bir elemanına yaklaşmak için güçlü yakınsama teoremleri ortaya konularak ispatları yapılmıştır. Ayrıca güçlü yakınsama teoremini destekleyen uygulamaya yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde tez için gerekli olan temel tanımlar, lemmalar, teorem ve sonuçlardan bahsedilecektir.

Tanım 2.1 $X \neq \emptyset$ iken $p, q, r \in X$ noktaları için

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q \\ \text{(ii)} \quad & d(p, q) = d(q, p) \\ \text{(iii)} \quad & d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q) \end{aligned} \tag{2.1}$$

koşullarını sağlayan $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna X üzerinde bir uzaklık fonksiyonu, ayrıca (X, d) ifadesine de metrik uzay adı verilir [20].

Tanım 2.2 X , bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için,

$$\begin{aligned} N_1. \quad & \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta \\ N_2. \quad & \text{Her } \alpha \in \mathbb{R} \text{ ve her } x \in X \text{ için } \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \\ N_3. \quad & \text{Her } x, y \in X \text{ için } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{aligned} \tag{2.2}$$

şartları sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [21].

Tanım 2.3 $\{x_n\}, (X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ mevcutsa bu halde $\{x_n\}$ dizisi x 'e kuvvetli yakınsar (veya norma göre yakınsaktır) denir ve kısaca $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir [22].

Tanım 2.4 X lineer uzayında tanımlı skaler değerli fonksiyona fonksiyonel denir.

Eğer f fonksiyoneli aynı zamanda lineer ise f ye lineer fonksiyonel denir [23].

Tanım 2.5 X normlu uzayı üzerinde tanımlı bütün lineer ve sürekli fonksiyonellerden oluşan uzaya X vektör uzayının dual uzayı denir ve X^* ile gösterilir [23].

Tanım 2.6 $\{x_n\}, (X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve X^*, X' in dual uzayı olsun. Eğer $f \in X^*$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa $\{x_n\}$ dizisi x_0 'a zayıf yakınsıyor denir ve $x_n \rightharpoonup x_0$ ile gösterilir [23].

Tanım 2.7 $\{x_n\}, (X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $n, m \geq n_0$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε' a bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir [20].

Tanım 2.8 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Bu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X 'e tam normlu uzay veya Banach uzayı denir [20].

Tanım 2.9 $\{x_n\}, (X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her n için $\|x_n\| \leq K$ olacak şekilde bir $K \geq 0$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine sınırlı dizi denir [20].

Tanım 2.10 X ve Y aynı cisim üzerindeki vektör uzayları ve $T: D_T \subset X \rightarrow Y$ bir operatör olmak üzere her $x, y \in D_T$ ve her $\alpha, \beta \in F$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad (2.3)$$

şartını sağlayan bir T operatörüne lineer operatör denir [24].

Tanım 2.11 X reel bir vektör uzayı ve $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

- (i) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 - (ii) $\langle x, y \rangle \geq 0$
 - (iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
 - (iv) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
 - (v) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- (2.4)

şartlarını sağlayan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ye X de iç çarpım ve $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine ise iç çarpım uzayı adı verilir [22].

Tanım 2.12 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayı bir Banach uzay ise, bu uzaya Hilbert uzayı denir [22].

Tanım 2.13 $(X, \|\cdot\|)$ ve $(X', \|\cdot\|')$ normlu iki uzay, $f: X \rightarrow X'$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. f dönüşümüne x_0 noktasında süreklidir denir eğer, $\forall \varepsilon > 0$ için $\|x - x_0\| < \delta$ iken $\|f(x) - f(x_0)\|' < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa, f dönüşümü X in her noktasında sürekli ise f dönüşümüne X uzayında süreklidir denir [25].

Tanım 2.14 Bir x_0 noktasında reel f fonksiyonunun süreklilik koşulu reel doğru üzerinde ikiye ayrılabilir.

- i. $|x - x_0| < \delta$ ise $f(x_0) - \varepsilon < f(x)$
 - ii. $|x - x_0| < \delta$ ise $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$
- (2.5)

Böylece (i) ye göre f, x_0 da alttan yarı süreklidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $|x - x_0| < \delta$ iken $f(x_0) - \varepsilon < f(x)$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır.

Benzer şekilde (ii) ye göre f, x_0 da üstten yarı süreklidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $|x - x_0| < \delta$ iken $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır [26].

Tanım 2.15 X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T 'nin sabit noktası denir ve T 'nin tüm sabit noktalarının kümesi F_T ve $F(T)$ ile gösterilir [27].

Tanım 2.16 L bir reel vektör uzay ve $A \subseteq L$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A \quad (2.6)$$

ise A kümesine konvektir denir [28].

Teorem 2.17 X bir Banach uzayı ve $T: X \rightarrow X$ contraction bir dönüşüm olsun. Bu durumda T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir. Bu teorem Banach contraction prensibi olarak adlandırılır [29].

Tanım 2.18 Aşağıda literatürde bulunan birkaç dönüşüm sınıfının tanımları verilmiştir. $\mathbb{H}$, iç çarpımı $\langle ., . \rangle$ ve normu $\| . \|$ olan reel bir Hilbert uzayı, $C, \mathbb{H}$ 'nin boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi ve $A: C \subseteq \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ bir dönüşüm olsun.

1. Her $x, y \in C$ için

$$\|Ax - Ay\| \leq \mu \|x - y\| \quad (2.7)$$

olacak şekilde bir $\mu > 0$ sabiti varsa μ – Lipschitzian dönüşüm denir.

2. Her $x, y \in C$ için

$$\|Ax - Ay\| \leq \mu \|x - y\| \quad (2.8)$$

olacak şekilde bir $\mu \in [0,1)$ sabiti varsa, contraction (daraltan) dönüşüm denir.

3. Her $x, y \in C$ için

$$\|Ax - Ay\| \leq \|x - y\| \quad (2.9)$$

nonexpansive (genişlemeyen) dönüşüm denir.

4. Her $x, y \in C$ için

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq 0, \quad (2.10)$$

ise monoton olarak adlandırılır.

5. Her $x, y \in C$ için

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2 \quad (2.11)$$

olacak şekilde pozitif bir reel α sayısı varsa α -ters-kuvvetli monoton olarak adlandırılır.

6. Her $x, y \in C$ için

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq -\alpha \|Ax - Ay\|^2 \quad (2.12)$$

olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sabiti varsa, relaxed α -cocoersive dönüşüm denir.

7. Her $x, y \in C$ için

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq -a \|Ax - Ay\|^2 + b \|x - y\|^2 \quad (2.13)$$

olacak şekilde iki $a, b > 0$ sabiti varsa, relaxed (a, b) -cocoersive dönüşüm denir.

8. Her $x, y \in C$ için

$$\|Ax - Ay\|^2 \leq \|x - y\|^2 + k \|(I - A)x - (I - A)y\|^2 \quad (2.14)$$

olacak şekilde $k \in [0,1)$ sabiti varsa, k - kesin pseudo-contraction denir.

Tanım 2.19 Literatürde, denge problemi ile ilgili birçok tanım bulunmaktadır. Aşağıda bunlardan birkaçının tanımları verilmiştir. $\mathbb{H}$, iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ve normu $\| \cdot \|$ olan bir reel Hilbert uzayı, $C, \mathbb{H}$ 'nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi, $A: C \rightarrow \mathbb{H}$ doğrusal olmayan bir dönüşüm, $\varphi: C \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $F: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ bir çift fonksiyon olsun, burada $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesidir.

1. Peng ve Yao [30] tarafından aşağıdaki genelleştirilmiş karışık denge problemini tanıtılmıştır.

$$F(x, y) + \varphi(y) - \varphi(x) + \langle Ax, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C \quad (2.15)$$

olacak şekilde bir $x \in C$ 'nin bulunması problemidir. (2.15)'nin çözüm kümesi $GMEP(F, \varphi, A)$ ile gösterilir.

2. Eğer $A = 0$ ise, genelleştirilmiş karışık denge problemi (2.15) aşağıdaki karışık denge problemine indirgenir.

$$F(x, y) + \varphi(y) - \varphi(x) \geq 0 \quad \forall y \in C \quad (2.16)$$

olacak şekilde $x \in C$ 'nin bulunması problemidir. Ceng ve Yao [31] tarafından ele alınmıştır. Bu problemin çözüm kümesi $MEP(F, \varphi)$ ile gösterilir.

3. Eğer $\varphi = 0$ ise, genelleştirilmiş karışık denge problemi (2.15) aşağıdaki genelleştirilmiş denge problemine indirgenir.

$$F(x, y) + \langle Ax, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C \quad (2.17)$$

olacak şekilde $x \in C$ 'nin bulunması problemidir. Takashashi ve Takahashi [32] tarafından tanıtılmış ve çalışılmıştır. Problem (2.17)'in çözüm kümesi $GEP(F, A)$ ile gösterilir.

4. Eğer $A = 0$ ise, (2.17) problemi normal denge problemine indirgenir.

$$F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C \quad (2.18)$$

olacak şekilde $x \in C$ 'nin bulunması problemidir. (2.18) probleminin çözüm kümesi $EP(F)$ ile gösterilir [2].

Genelleştirilmiş denge problemi (2.17), özel durum olarak optimizasyon problemlerini, minimum-maksimum problemlerini, işbirlikçi olmayan oyunlardaki Nash denge problemini ve diğerlerini ayrıca, varyasyonel eşitsizlikleri içermesi açısından çok geneldir.

Tanım 2.20 Literatürde, varyasyonel eşitsizlik ile ilgili birçok tanım bulunmaktadır. Aşağıda bunlardan birkaçının tanımları verilmiştir. $\mathbb{H}$, iç çarpımı $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ve normu $\| \cdot \|$ olan bir reel Hilbert uzayı, $C, \mathbb{H}$ 'nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi ve $T, g: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ doğrusal olmayan operatörler olsun.

1. Noor [33] tarafından 1988 yılında tanıtılan ve incelenen genel varyasyonel eşitsizlik tanımı aşağıdaki gibidir.

$$\langle Tx, g(y) - g(x) \rangle \geq 0 \quad \forall g(y) \in C \quad (2.19)$$

olacak şekilde $x \in \mathbb{H}$ ve $g(x) \in C$ bulma problemidir.

2. Özdeşlik operatörü olan $g \equiv I$ için, genel varyasyonel eşitsizlik (2.19) aşağıdaki standart varyasyonel eşitsizliğe indirgenir.

$$\langle Tx, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C \quad (2.20)$$

olacak şekilde $x \in C$ bulunmasıdır. Bu eşitsizlik, ilk olarak 1964 yılında Stampacchia [34] tarafından tanıtılmış ve çalışılmıştır.

3. $C(x), \mathbb{H}$ 'de kapalı bir konveks değerli küme olsun. C kümesi çözüme açık veya örtük olarak bağlıysa varyasyonel eşitsizlik (2.20) yarı varyasyonel eşitsizlik olarak adlandırılır.

$$\langle Tx, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C(x) \quad (2.21)$$

olacak şekilde $x \in C(x)$ bulma problemidir [35].

4. Genelleştirilmiş denge problemi (2.17)'de eğer $F = 0$ ise (2.17) problemi klasik varyasyonel eşitsizlik problemine indirgenir. Klasik varyasyonel eşitsizlik,

$$\langle Ax, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C \quad (2.22)$$

olacak şekilde $x \in C$ bulmaktır. Klasik varyasyonel eşitsizlik (2.22)'nin çözüm kümesi $VI(C, A)$ ile gösterilir [36].

Tanım 2.21 $\mathbb{H}$ bir reel Hilbert uzayı olsun, herhangi bir $\lambda \in [0,1]$ için

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1 - \lambda)\|y\|^2 - \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2 \quad (2.23)$$

olduğu bilinmektedir.

$C, \mathbb{H}$ 'nin boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi olsun. Her $x \in \mathbb{H}$ için C 'de $P_C x$ ile gösterilen benzersiz bir en yakın nokta vardır, öyle ki

$$\|x - P_C x\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x \in C. \quad (2.24)$$

P_C , $\mathbb{H}$ 'nin C üzerine metrik izdüşümü olarak adlandırılır. P_C genişlemeyem bir dönüşüm olduğu ve aşağıdaki koşulları sağladığı bilinmektedir:

$$\|P_C x - P_C y\|^2 \leq \langle P_C x - P_C y, x - y \rangle, \quad \forall x, y \in C \quad (2.25)$$

Ayrıca, $P_C x$ aşağıdaki özellik ile karakterize edilir:

$$P_C x \in C \text{ ve } \langle x - P_C x, P_C x - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \quad (2.26)$$

Varyasyonel eşitsizlik problemi bağlamında, bu

$$u \in VI(C, A) \Leftrightarrow u = P_C(u - \lambda Au), \quad \forall \lambda > 0 \quad (2.27)$$

anlamına gelmektedir.

Tanım 2.22 Bir Banach uzayı X 'in, X 'te bir $x \in X$ noktasına zayıf bir şekilde yakınsayan her $\{x_n\}$ dizisi için

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|, \quad \forall y \in X, y \neq x \quad (2.28)$$

olması durumunda Opial koşulu sağladığı söylenir [37].

Tanım 2.23 Her $x, y \in \mathbb{H}, f \in Tx$ ve $g \in Ty$ için $\langle f - g, x - y \rangle \geq 0$ anlamına geliyorsa, küme değerli bir $T: \mathbb{H} \rightarrow 2^{\mathbb{H}}$ dönüşümün monoton olduğu söylenir. Bir

monoton dönüşüm $T: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, eğer T 'nin $G(T)$ grafiği başka bir monoton dönüşümün grafiğinde düzgün bir şekilde yer almıyorsa, maksimal olarak adlandırılır. Bir monoton dönüşümün maksimal olduğu, ancak ve ancak $x, f \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}, \langle f - g, x - y \rangle \geq 0, \forall (y, g) \in G(T)$ için $f \in Tx$ anlamına geliyorsa bilinmektedir. $A: C \rightarrow \mathbb{H}$ ters-güçlü monoton bir dönüşüm ve $N_C v$ $v \in C$ 'den C 'ye normal koni olsun, yani

$$N_C v = \{w \in \mathbb{H}: \langle v - u, w \rangle \geq 0, \quad \forall u \in C\}, \quad (2.29)$$

ve

$$Tv = \begin{cases} Av + N_C v, & v \in C \\ \emptyset, & v \notin C. \end{cases} \quad (2.30)$$

olarak tanımlanır. $0 \in Tv$ ancak ve ancak $v \in VI(C, A)$ ise T maksimal monotondur [38-39].

Tanım 2.24 Çift fonksiyonlu $F: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ denge problemini çözmek için F 'nin aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım:

(A1) Her $x \in C$ için $F(x, x) = 0$

(A2) F monotondur, yani her $x, y \in C$ için $F(x, y) + F(y, x) \leq 0$

(A3) Her $x, y, z \in C$ için $\limsup_{t \rightarrow 0} F(tz + (1 - t)x, y) \leq F(x, y)$

(A4) Her $x \in C$, $y \mapsto F(x, y)$ konveks ve alt yarı süreklidir.

Lemma 2.25 $C, \mathbb{H}'$ nin boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi ve $F, (A1)-(A4)$ 'ü sağlayan $C \times C$ 'nin $\mathbb{R}'$ ye bir çift fonksiyonu olsun. $r > 0$ ve $x \in \mathbb{H}$ olsun. O halde her $y \in C$ için

$$F(z, y) + \frac{1}{r} \langle y - z, z - x \rangle \geq 0 \quad (2.31)$$

olacak şekilde $z \in C$ vardır [2].

Lemma 2.26 $F: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ 'nin (A1)-(A4)'ü sağladığını varsayalım. $r > 0$ ve $x \in \mathbb{H}$ için aşağıdaki gibi bir $T_r: \mathbb{H} \rightarrow C$ dönüşümünü tanımlayın: Her $z \in \mathbb{H}$ için

$$T_r(x) = \left\{ z \in C : F(z, y) + \frac{1}{r} \langle y - z, z - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \right\} \quad (2.32)$$

O halde, aşağıdakiler geçerlidir:

1. T_r tek değildir;
2. T_r kesinlikle genişlemez, yani herhangi bir $x, y \in \mathbb{H}$ için

$$\|T_r x - T_r y\|^2 \leq \langle T_r x - T_r y, x - y \rangle; \quad (2.33)$$

Bu, $\|T_r x - T_r y\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{H}$, yani T_r 'nin genişlemeyen bir dönüşüm olduğu anlamına gelir.

3. $F(T_r) = EP(F)$
4. $EP(F)$ kapalı ve konveks bir yapıdadır [40].

Lemma 2.27 X bir Banach uzayı, $\{x_n\}, \{y_n\}$ dizileri X 'te iki sınırlı dizi ve $\{\beta_n\} [0,1]$ 'de $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1$ koşulunu sağlayan bir dizi olsun.

Kabul edelim ki $x_{n+1} = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) y_n, \forall n \geq 1$ ve $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|\} \leq 0$ ise bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = 0$ olur [41].

Lemma 2.28 $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ negatif olmayan bir dizi, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu_n \in (0,1), \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \infty$ ve $\eta_n \geq 0$ olsun. Her $n \geq n_0$ için $\sigma_{n+1} \leq (1 - \mu_n) \sigma_n + \mu_n \eta_n$ eşitsizliğinin sağlayacağı şekilde bir n_0 sayısı mevcut olsun. Bu durumda $0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \eta_n$ eşitsizliği sağlanır [41].

Lemma 2.29 $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ aşağıdaki koşulları sağlayan negatif olmayan iki reel dizi olsun. n_0 negatif olmayan bir tamsayısı $\{\gamma_n\} \in (0,1)$ dizisi ve $\{b_n\} \in \mathbb{R}$ için $a_{n+1} \leq (1 - \gamma_n) a_n + b_n, \forall n \geq n_0$, olacak biçimde

$$i. \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty; \quad (2.34)$$

$$ii. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\gamma_n} \leq 0 \text{ ya da } \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty.$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ olur [42].

Tanım 2.30 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ C 'nin kendi içinde genişlemeyen bir dönüşüm ve $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} [0,1]$ içinde negatif olmayan sayıların dizisi olsun. Her $n \geq 1$ için, C 'nin kendisine W_n dönüşümünün aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{cases} U_{n,n+1} = I, \\ U_{n,n} = t_n T_n U_{n,n+1} + (1 - t_n)I, \\ U_{n,n-1} = t_{n-1} T_{n-1} U_{n,n} + (1 - t_{n-1})I, \\ \vdots \\ U_{n,k} = t_k T_k U_{n,k+1} + (1 - t_k)I, \\ U_{n,k-1} = t_{k-1} T_{k-1} U_{n,k} + (1 - t_{k-1})I, \\ \vdots \\ U_{n,2} = t_2 T_2 U_{n,3} + (1 - t_2)I, \\ W_n = U_{n,1} = t_1 T_1 U_{n,2} + (1 - t_1)I, \end{cases} \quad (2.35)$$

Böyle bir W_n C 'den C 'ye genişlemeyen bir dönüşümdür ve $T_n, T_{n-1}, \dots, T_1$ ve $t_n, t_{n-1}, \dots, t_1$ tarafından oluşturulan W - dönüşüm olarak adlandırılır [43].

Lemma 2.31 C , bir reel $\mathbb{H}$ Hilbert uzayının boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi, $\{S_i: C \rightarrow C\}$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i) \neq \emptyset$ ile sonsuz genişlemeyen dönüşümler ailesi, $\{\mu_i\}, 0 < \mu_i \leq b < 1, \forall i \geq 1$ olacak şekilde reel bir dizi olsun. Sonra:

(1) Her $n \geq 1$ için W_n genişlemeyendir ve $F(W_n) = \bigcap_{i=1}^n F(S_i)$.

(2) Her $x \in C$ ve her pozitif tamsayı için limit $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,k} x$ vardır.

(3) $Wx := \lim_{n \rightarrow \infty} W_n x = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,1} x, x \in C$ (2.36)

ile tanımlanan $W: C \rightarrow C$ dönüşümü $F(W) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i)$ 'yi sağlayan genişlemeyen bir dönüşümdür ve $S_1, S_2, \dots$ ve $\mu_1, \mu_2, \dots$ tarafından türetilen W - dönüşümü olarak adlandırılır [43].

Lemma 2.32 C , bir reel $\mathbb{H}$ Hilbert uzayının boş olmayan kapalı bir konveks alt kümesi, $\{S_i: C \rightarrow C\} \cap_{i=1}^{\infty} F(S_i) \neq \emptyset$ ile sonsuz genişlemeyen dönüşümler ailesi, $\{\mu_i\}, 0 < \mu_i \leq b < 1, \forall i \geq 1$ olacak şekilde reel dizi olsun. Eğer K, C 'nin herhangi bir sınırlı alt kümesi ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \|Wx - W_n x\| = 0. \quad (2.37)$$

anlamına gelir [44].

Literatürde bulunan bazı sabit nokta iterasyon yöntemleri hakkında kısaca bilgi verilecektir.

Tanım 2.33 (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun $x_0 \in X$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ için

$$\{x_n = f(T, x_n) = Tx_n \quad (2.38)$$

şeklinde elde edilen iterasyon yöntemine Picard iterasyon yöntemi denir [27].

Tanım 2.34 X keyfi bir Banach uzayı, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm, $x_0 \in X$ keyfi bir nokta, her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan bir reel sayı dizisi olmak üzere

$$\{x_{n+1} = f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n \quad (2.39)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine Mann iterasyon yöntemi denir [45].

Tanım 2.35 X keyfi bir Banach uzayı, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm, $x_0 \in X$ keyfi bir nokta, her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan bir reel sayı dizisi olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n \end{cases} \quad (2.40)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine Ishikawa iterasyon yöntemi denir [46].

Tanım 2.36 X keyfi bir Banach uzayı, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm, $x_0 \in X$ keyfi bir nokta, her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan bir reel sayı dizisi olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tz_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n \end{cases} \quad (2.41)$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine Noor iterasyon yöntemi denir [47].

Şimdide literatürde bulunan viskozite yaklaşım yöntemiyle elde edilen iterasyon yöntemleri hakkında bilgi verilecektir.

Tanım 2.37 Takahashi ve Takahashi [3] denge probleminin çözüm kümesi ile Hilbert uzayında genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktalar kümesinin ortak elemanını bulmak için viskozite yaklaşımı yöntemiyle aşağıdaki iterasyon yöntemini tanıtmışlardır:

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, & \forall y \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) S u_n, & \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (2.42)$$

Tanım 2.38 Qin ve diğerleri [4] genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktalar kümesinin, relaxed cocoersive dönüşüm için varyasyonel eşitsizliğin çözüm kümesinin ve bir denge probleminin çözüm kümesinin ortak bir elemanını bulmak için aşağıdaki iterasyon yöntemini tanıtmışlardır:

$$\begin{cases} F(y_n, \eta) + \frac{1}{r_n} \langle \eta - y_n, y_n - x_n \rangle \geq 0, & \forall \eta \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n \gamma f(x_n) + (1 - \alpha_n A) S P_C (1 - s_n B) y_n, \end{cases} \quad (2.43)$$

Tanım 2.39 Chang ve diğerleri [5] viskozite yaklaşım yöntemi kullanılarak bir denge probleminin çözümler kümesi ile Hilbert uzayında genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktalar kümesinin ortak elemanını bulmak için aşağıdaki iterasyon yöntemini tanıtmışlardır:

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, & \forall y \in C \\ x_{n+1} = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) z_n, \\ z_n = \alpha_n f(u_n) + (1 - \alpha_n) T u_n, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (2.44)$$

Tanım 2.40 Ceng ve Wong [6] denge probleminin çözüm kümesi ile Hilbert uzayında genişlemeyen dönüşümün sabit noktalar kümesinin ortak elemanını bulmak için viskozite yaklaşımı yöntemiyle aşağıdaki iterasyon yöntemini tanıtmışlardır:

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, & \forall y \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n T_{l_n} u_n, & \forall n \geq 0, \end{cases} \quad (2.45)$$

Tanım 2.41 Cang ve diğerleri [7] bir denge probleminin çözüm kümesinin ortak bir elemanını, sonsuz genişlemeyen dönüşüm ailesi için ortak sabit nokta kümesini ve bir Hilbert uzayında α – ters-kuvvetli monoton dönüşüm için varyasyonel eşitsizliğin çözüm kümesini bulmak için aşağıdaki iterasyon yöntemini tanıtmışlardır:

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, & \forall y \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n W_n k_n, & \forall n \geq 1, \\ k_n = P_C(y_n - \lambda_n A y_n), \\ y_n = P_C(u_n - \lambda_n A u_n), \end{cases} \quad (2.46)$$

Tanım 2.42 Yao ve diğerleri [8] karışık bir denge probleminin, sonsuz bir genişlemeyen dönüşüm ailesinin sabit noktalar kümesinin ve bazı varyasyonel eşitsizliklerin çözüm kümesinin ortak bir elemanını bulmak için aşağıdaki iterasyon yöntemini tanıtmışlardır: $\forall x \in C$ ve $\forall n \geq 0$ için

$$\begin{cases} \Theta(y_n, x) + \varphi(x) - \varphi(y_n) + \frac{1}{r} \langle K'(y_n) - K'(x_n), \eta(x, y_n) \rangle \geq 0, \\ x_{n+1} = \alpha_n \gamma f(x_n) + \beta_n x_n + [(1 - \beta_n)I - \alpha_n A] W_n P_C(I - \gamma_n B) y_n, \end{cases} \quad (2.47)$$

Tanım 2.43 Su ve diğerleri [48] genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktalar kümesinin ortak elemanını, reel Hilbert uzayında bir denge probleminin çözümler kümesini ve α – ters-kuvvetli monoton dönüşüm için bir varyasyonel eşitsizliğin çözümler kümesini bulmak için aşağıdaki iterasyon yöntemini tanıtmışlardır:

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, & \forall y \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) S P_C(u_n - \lambda_n A u_n), & \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (2.48)$$

Tanım 2.44 Ceng ve Yao [49] tarafından viskozite yaklaşım yöntemi kullanılarak bir denge probleminin çözümler kümesinin ve Hilbert uzayında sonsuz sayıda genişlemeyen dönüşümün ortak sabit noktaları kümesinin ortak bir elemanını bulmak için aşağıdaki iterasyon yöntemini tanıtmışlardır:

$$\begin{cases} F(u_n, x) + \frac{1}{r_n} \langle x - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, & \forall x \in C \\ y_n = (1 - \gamma_n) x_n + \gamma_n W_n u_n, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n - \beta_n) x_n + \alpha_n f(y_n) + \beta_n W_n y_n. \end{cases} \quad (2.49)$$

Tanım 2.45 Katchang ve Kuman [12] bir denge probleminin çözüm kümesinin, β –ters-kuvvetli monoton dönüşümler için varyasyonel eşitsizliğin çözüm kümesinin ve bir Hilbert uzayında genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının kümesinin ortak bir elemanını bulmak için aşağıdaki iterasyon yöntemini tanıtmışlardır:

$$\begin{cases} F(u_n, x) + \frac{1}{r_n} \langle x - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n T(\delta_n v + (1 - \delta_n) P_C(u_n - \lambda_n A u_n)). \end{cases} \quad (2.50)$$

Tanım 2.46 When ve Chen [14] genelleştirilmiş denge problemlerinin çözüm kümesinin ve k –kesin pseudo- contraction dönüşümlerin sonlu bir ailesinin sabit noktalarının kümesinin ortak bir elemanını bulmak için aşağıdaki iterasyon yöntemini tanıtmışlardır:

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \langle A x_n, y - u_n \rangle + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall y \in K, \\ y_n = \beta_n u_n + (1 - \beta_n) \sum_{i=1}^N \eta_i^{(n)} T_i u_n, \\ x_{n+1} = \alpha_n \gamma f(x_n) + (I - \alpha_n B) y_n, \quad n \geq 1, \end{cases} \quad (2.51)$$

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Denge Problemin Sabit Nokta İterasyonun Viskozite Yaklaşımıyla Çözümü

Teorem 3.1.1 C , bir reel Hilbert uzayı $\mathbb{H}$ 'nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi, $F: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ (A1)-(A4) şartlarını sağlayan bir çift fonksiyon, bazı pozitif L, c ve w sabitleri için $A: C \rightarrow \mathbb{H}$ relaxed (c, w) -cocoersive dönüşüm ve L -Lipschitzian dönüşümü olsun. $\{S_i: C \rightarrow C\}$ $F \cap VI(C, A) \cap EP(F) \neq \emptyset$ olacak şekilde genişlemeyen dönüşümler ailesi, burada $F := \bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i)$ ve $f: C \rightarrow C$ $\xi \in (0,1)$ sabiti ile bir contraction dönüşümü olsun. $\{x_n\}$ ve $\{u_n\}$, $x_1 \in \mathbb{H}$ ve

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \forall y \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n f(y_n) + \beta_n x_n + \gamma_n SP_C(I - \lambda_n A)y_n \\ y_n = P_C(I - \lambda_n A)z_n \\ z_n = (1 - \theta_n)x_n + \theta_n P_C(I - \lambda_n A)u_n \end{cases} \quad (3.1)$$

tarafından oluşturulan ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\theta_n\} \subset [0,1]$ ve $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ olan diziler olsun. Kontrol dizilerin aşağıdaki koşulları sağladığı kabul edilsin:

- (i) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$,
- (iii) $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1$,
- (iv) $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$,
- (v) $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| = 0$, $\lambda_n \in [a, b]$, burada $0 < a \leq b < \frac{2(w-cL^2)}{L^2}$,
- (vi) $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \theta_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \theta_n < \frac{1}{2}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} |\theta_{n+1} - \theta_n| = 0$

o zaman $\{x_n\}$, $z \in \Psi$ 'ye güçlü yakınsar, burada $z = P_{\Psi}f(z)$ 'dir.

İspat: İspat altı adıma ayrılarak yapılacaktır:

(I) İlk olarak $z = P_{\Psi}f(z)$ olacak şekilde $z \in C$ 'nin var olduğu ispatlanacaktır.

$f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ sabiti ξ olan bir contraction olduğundan $P_{\Psi}f: \mathbb{H} \rightarrow C$ 'de contraction ve

$$\|P_{\Psi}f(x) - P_{\Psi}f(y)\| \leq \xi \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{H}. \quad (3.2)$$

Banach teoremine göre, öyle tek bir $z \in C$ vardır ki $z = P_\Psi f(z)$ 'dır.

(II) Şimdi $\{x_n\}$ ve $\{u_n\}$ dizilerinin sınırlı olduğu gösterilsin.

Herhangi bir $x, y \in C$ için $A: C \rightarrow \mathbb{H}$ relaxed (c, w) -cocoersive dönüşümü ve L - Lipschitzian dönüşümüdür ve $\lambda_n \leq \frac{2(w-cL^2)}{L^2}$ dir.

$$\begin{aligned}
\|(I - \lambda_n A)x - (I - \lambda_n A)y\|^2 &= \|x - y - \lambda_n(Ax - Ay)\|^2 \\
&= \|x - y\|^2 - 2\lambda_n \langle x - y, Ax - Ay \rangle + \lambda_n^2 \|Ax - Ay\|^2 \\
&\leq \|x - y\|^2 - 2\lambda_n \{-c\|Ax - Ay\|^2 + w\|x - y\|^2\} \\
&\quad + \lambda_n^2 \|Ax - Ay\|^2 \\
&\leq (1 - 2\lambda_n w)\|x - y\|^2 + \lambda_n(2c + \lambda_n)\|Ax - Ay\|^2 \\
&\leq (1 - 2\lambda_n w + \lambda_n L^2(2c + \lambda_n))\|x - y\|^2 \\
&\leq \|x - y\|^2
\end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. Bu da $I - \lambda_n A$ nin genişlemeyen olduğunu gösterir. $\{T_{r_n}\}$ Lemma 2.26 daki gibi tanımlanan bir dönüşüm dizisi ve $p \in \Psi$ olsun. Burada $p = P_C(I - \lambda_n A)p = T_{r_n}p$ ve $u_n = T_{r_n}x_n$ dir. $v_n = P_C(I - \lambda_n A)y_n$ olacak şekilde iterasyonda yerine yazılırsa ve (3.1)'den

$$\begin{aligned}
\|v_n - p\| &= \|P_C(I - \lambda_n A)y_n - p\| \\
&= \|P_C(I - \lambda_n A)y_n - P_C(I - \lambda_n A)p\| \\
&\leq \|y_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \|P_C(I - \lambda_n A)z_n - p\| \\
&= \|P_C(I - \lambda_n A)z_n - P_C(I - \lambda_n A)p\| \\
&\leq \|z_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.5}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\| &= \|(1 - \theta_n)x_n + \theta_n P_C(I - \lambda_n A)u_n - (1 - \theta_n + \theta_n)p\| \\
&\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\| + \theta_n \|P_C(I - \lambda_n A)u_n - p\| \\
&\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\| + \theta_n \|u_n - p\|
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \theta_n)\|x_n - p\| + \theta_n\|T_{r_n}x_n - T_{r_n}p\| \\
&\leq (1 - \theta_n)\|x_n - p\| + \theta_n\|x_n - p\| \\
&= \|x_n - p\|
\end{aligned}$$

olur. (3.4), (3.5) ve (3.6) eşitsizliklerinden

$$\|v_n - p\| \leq \|y_n - p\| \leq \|z_n - p\| \leq \|x_n - p\| \quad (3.7)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.4),(3.5), (3.6) ve (3.7)'yi (3.1)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|\alpha_n f(y_n) + \beta_n x_n + \gamma_n S v_n - (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n)p\| \\
&\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\| + \beta_n \|x_n - p\| + \gamma_n \|S v_n - p\| \\
&\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\| + \beta_n \|x_n - p\| + \gamma_n \|v_n - p\| \\
&\leq \alpha_n \|f(y_n) - f(p)\| + \alpha_n \|f(p) - p\| + \beta_n \|x_n - p\| \\
&\quad + \gamma_n \|P_C(I - \lambda_n A)y_n - P_C(I - \lambda_n A)p\| \\
&\leq \alpha_n \xi \|y_n - p\| + \alpha_n \|f(p) - p\| + \beta_n \|x_n - p\| \\
&\quad + \gamma_n \|y_n - p\| \\
&= (\alpha_n \xi + \gamma_n) \|y_n - p\| + \alpha_n \|f(p) - p\| + \beta_n \|x_n - p\|
\end{aligned} \quad (3.8)$$

ve

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq (\alpha_n \xi + \gamma_n) \|x_n - p\| + \alpha_n \|f(p) - p\| + \beta_n \|x_n - p\| \\
&= (\alpha_n \xi + \gamma_n + \beta_n) \|x_n - p\| + \alpha_n \|f(p) - p\| \\
&= (1 - \alpha_n(1 - \xi)) \|x_n - p\| + \alpha_n \|f(p) - p\| \\
&= (1 - \alpha_n(1 - \xi)) \|x_n - p\| \\
&\quad + (1 - \xi) \alpha_n \frac{1}{(1 - \xi)} \|f(p) - p\| \\
&\leq \max \left\{ \|x_n - p\|, \frac{1}{(1 - \xi)} \|f(p) - p\| \right\} \\
&\leq \dots \\
&\leq \max \left\{ \|x_1 - p\|, \frac{1}{(1 - \xi)} \|f(p) - p\| \right\} \quad \forall n \geq 1.
\end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı olduğunu gösterir. (3.7)'den $\{z_n\}, \{y_n\}, \{v_n\}, \{u_n\}, \{Sv_n\}$ ve $\{Ay_n\}$ dizileride sınırlıdır.

(III) $n \rightarrow \infty$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ olduğu ispatlanacaktır. $\{a_n\}$ dizisini $x_{n+1} = \beta_n x_n + (1 - \beta_n)a_n$, $\forall n \geq 1$ ile tanımlansın. Böylece $a_n = \frac{x_{n+1} - \beta_n x_n}{1 - \beta_n}$ olur.

Dolayısıyla

$$a_n = \frac{\alpha_n f(y_n) + \beta_n x_n + \gamma_n S v_n - \beta_n x_n}{1 - \beta_n} = \frac{\alpha_n f(y_n) + \gamma_n S v_n}{1 - \beta_n} \quad (3.10)$$

ve

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{\alpha_{n+1} f(y_{n+1}) + \gamma_{n+1} S v_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n f(y_n) + \gamma_n S v_n}{1 - \beta_n} \\ &= \frac{\alpha_{n+1} f(y_{n+1}) + \gamma_{n+1} S v_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n f(y_n) + \gamma_n S v_n}{1 - \beta_n} \\ &\quad + \frac{\alpha_{n+1} f(y_n)}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_{n+1} f(y_n)}{1 - \beta_{n+1}} + \frac{\gamma_{n+1} S v_n}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\gamma_{n+1} S v_n}{1 - \beta_{n+1}} \\ &= \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} (f(y_{n+1}) - f(y_n)) + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} (S v_{n+1} - S v_n) \\ &\quad + f(y_n) \left(\frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \right) + S v_n \left(\frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\gamma_n}{1 - \beta_n} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

olur. Teorem 3.1.1'in (i) koşulundan,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\gamma_n}{1 - \beta_n} &= \frac{1 - \alpha_{n+1} - \beta_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{1 - \alpha_n - \beta_n}{1 - \beta_n} \\ &= \frac{1 - \beta_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{1 - \beta_n}{1 - \beta_n} + \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \\ &= \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} - \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

ve burada

$$\begin{aligned} \|a_{n+1} - a_n\| &\leq \xi \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \|y_{n+1} - y_n\| + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \|S v_{n+1} - S v_n\| \\ &\quad + \left| \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \right| \{ \|f(y_n)\| + \|S v_n\| \} \end{aligned} \quad (3.13)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1} - y_n\| &= \|P_C(I - \lambda_{n+1}A)z_{n+1} - P_C(I - \lambda_nA)z_n\| \\
&\leq \|(I - \lambda_{n+1}A)z_{n+1} - (I - \lambda_nA)z_n\| \\
&= \|(z_{n+1} - \lambda_{n+1}Az_{n+1}) - (z_n + \lambda_{n+1}Az_n - \lambda_{n+1}Az_n \\
&\quad - \lambda_nAz_n)\| \\
&= \|(z_{n+1} - \lambda_{n+1}Az_{n+1}) - (z_n - \lambda_{n+1}Az_n)\| \\
&\quad + |\lambda_n - \lambda_{n+1}|\|Az_n\| \\
&\leq \|z_{n+1} - z_n\| + |\lambda_n - \lambda_{n+1}|\|Az_n\|
\end{aligned} \tag{3.14}$$

olur ve

$$\begin{aligned}
\|z_{n+1} - z_n\| &= \|(1 - \theta_{n+1})x_{n+1} + \theta_{n+1}P_C(I - \lambda_{n+1}A)u_{n+1} \\
&\quad - (1 - \theta_n)x_n - \theta_nP_C(I - \lambda_nA)u_n\| \\
&= \|(1 - \theta_{n+1})x_{n+1} + \theta_{n+1}P_C(I - \lambda_{n+1}A)u_{n+1} \\
&\quad - \theta_{n+1}P_C(I - \lambda_nA)u_n + \theta_{n+1}P_C(I - \lambda_nA)u_n \\
&\quad - \theta_nP_C(I - \lambda_nA)u_n - (1 - \theta_{n+1} + \theta_{n+1} - \theta_n)x_n\| \\
&\leq \theta_{n+1}\|(I - \lambda_{n+1}A)u_{n+1} - (I - \lambda_nA)u_n\| \\
&\quad + |\theta_{n+1} - \theta_n|(\|(I - \lambda_nA)u_n\| + (1 - \theta_{n+1})\|x_{n+1} - x_n\| \\
&\quad + |\theta_{n+1} - \theta_n|\|x_n\|) \\
&= \theta_{n+1}\|(u_{n+1} - \lambda_{n+1}Au_{n+1}) - (u_n - \lambda_{n+1}Au_n + \lambda_{n+1}Au_n \\
&\quad - \lambda_nAu_n)\| + (1 - \theta_{n+1})\|x_{n+1} - x_n\| \\
&\quad + |\theta_{n+1} - \theta_n|(\|x_n\| + \|(I - \lambda_nA)u_n\|) \\
&\leq \theta_{n+1}\|(u_{n+1} - \lambda_{n+1}Au_{n+1}) - (u_n - \lambda_{n+1}Au_n)\| \\
&\quad + \theta_{n+1}|\lambda_n - \lambda_{n+1}|\|Au_n\| + (1 - \theta_{n+1})\|x_{n+1} - x_n\| \\
&\quad + |\theta_{n+1} - \theta_n|(\|x_n\| + \|u_n\| + \lambda_n\|Au_n\|) \\
&\leq \theta_{n+1}\|u_{n+1} - u_n\| + (1 - \theta_{n+1})\|x_{n+1} - x_n\| \\
&\quad + \theta_{n+1}|\lambda_n - \lambda_{n+1}|\|Au_n\| \\
&\quad + |\theta_{n+1} - \theta_n|(\|x_n\| + \|u_n\| + \lambda_n\|Au_n\|)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.15) eşitsizliği (3.14) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1} - y_n\| &\leq \theta_{n+1}\|u_{n+1} - u_n\| + (1 - \theta_{n+1})\|x_{n+1} - x_n\| \\
&\quad + \theta_{n+1}|\lambda_n - \lambda_{n+1}|\|Au_n\| \\
&\quad + |\theta_{n+1} - \theta_n|(\|x_n\| + \|u_n\| + \lambda_n\|Au_n\|) \\
&\quad + |\lambda_n - \lambda_{n+1}|\|Az_n\|
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \theta_{n+1}\|u_{n+1} - u_n\| + (1 - \theta_{n+1})\|x_{n+1} - x_n\| \\
&\quad + |\lambda_n - \lambda_{n+1}|(\|Az_n\| + \theta_{n+1}\|Au_n\|) \\
&\quad + |\theta_{n+1} - \theta_n|M
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $M = \sup\{\|x_n\| + \|u_n\| + \lambda_n\|Au_n\|\}$ olacak şekilde (3.16) eşitsizliği elde edilir. Öte yandan Lemma 2.26 , $u_n = T_{r_n}x_n, u_{n+1} = T_{r_{n+1}}x_{n+1}$ den

$$F(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C \quad (3.17)$$

ve

$$F(u_{n+1}, y) + \frac{1}{r_{n+1}}\langle y - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C \quad (3.18)$$

olur. Burada (3.17) de $y = u_{n+1}$ ve (3.18) de $y = u_n$ yazılırsa,

$$F(u_n, u_{n+1}) + \frac{1}{r_n}\langle u_{n+1} - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0 \quad (3.19)$$

ve

$$F(u_{n+1}, u_n) + \frac{1}{r_{n+1}}\langle u_n - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1} \rangle \geq 0 \quad (3.20)$$

elde edilir. Daha sonra (3.19) ve (3.20) eşitsizlikleri toplanır.

$$\begin{aligned}
F(u_n, u_{n+1}) + F(u_{n+1}, u_n) + \frac{1}{r_n}\langle u_{n+1} - u_n, u_n - x_n \rangle \\
+ \frac{1}{r_{n+1}}\langle u_n - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1} \rangle \geq 0
\end{aligned} \quad (3.21)$$

(A2) koşulundan ve iç çarpım özelliğinden

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_n}\langle u_{n+1} - u_n, u_n - x_n \rangle + \frac{1}{r_{n+1}}\langle u_n - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1} \rangle &\geq 0 \\
\frac{1}{r_n}\langle u_{n+1} - u_n, u_n - x_n \rangle - \frac{1}{r_{n+1}}\langle u_{n+1} - u_n, u_{n+1} - x_{n+1} \rangle &\geq 0
\end{aligned} \quad (3.22)$$

ve

$$\langle u_{n+1} - u_n, \frac{u_n - x_n}{r_n} - \frac{u_{n+1} - x_{n+1}}{r_{n+1}} \rangle \geq 0 \quad (3.23)$$

elde edilir. Eşitsizlikte her iki tarafı r_n ile çarpalım ve iç çarpım özelliğinden,

$$\begin{aligned} \langle u_{n+1} - u_n, u_n - x_n - \frac{r_n}{r_{n+1}}(u_{n+1} - x_{n+1}) \rangle &\geq 0 \\ \langle u_{n+1} - u_n, u_n - u_{n+1} + u_{n+1} - x_n - \frac{r_n}{r_{n+1}}(u_{n+1} - x_{n+1}) \rangle &\geq 0 \\ \langle u_{n+1} - u_n, u_n - u_{n+1} \rangle + \langle u_{n+1} - u_n, u_{n+1} - x_n - \frac{r_n}{r_{n+1}}(u_{n+1} - x_{n+1}) \rangle &\quad (3.24) \\ &\geq 0 \\ -\|u_{n+1} - u_n\|^2 & \\ + \langle u_{n+1} - u_n, u_{n+1} - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n - \frac{r_n}{r_{n+1}}(u_{n+1} - x_{n+1}) \rangle &\geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|^2 &\leq \langle u_{n+1} - u_n, x_{n+1} - x_n + \left(1 - \frac{r_n}{r_{n+1}}\right)(u_{n+1} - x_{n+1}) \rangle \\ &\leq \|u_{n+1} - u_n\| \left\{ \|x_{n+1} - x_n\| + \left|1 - \frac{r_n}{r_{n+1}}\right| \|u_{n+1} - x_{n+1}\| \right\} \quad (3.25) \\ \|u_{n+1} - u_n\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{r_{n+1}} |r_{n+1} - r_n| \|u_{n+1} - x_{n+1}\| \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.1.1'in (iv) koşulundan ve genelliği kaybetmeden $\forall n \geq 1$ için $r_n > d$ olacak şekilde reel d sayısının var olduğunu varsayabilir. Buradan

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{d} |r_{n+1} - r_n| K \quad (3.26)$$

$K = \sup\{\|u_n - x_n\| : n \geq 1\}$ olacak şekilde eşitsizliği elde edilir. (3.26) eşitsizliği (3.16) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - y_n\| &\leq \theta_{n+1} \left(\|x_{n+1} - x_n\| + \frac{K}{d} |r_{n+1} - r_n| \right) \\ &\quad + (1 - \theta_{n+1}) \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\quad + |\lambda_n - \lambda_{n+1}| (\|Az_n\| + \theta_{n+1} \|Au_n\|) + |\theta_{n+1} - \theta_n| M \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}
&= \|x_{n+1} - x_n\| + \theta_{n+1} \frac{K}{d} |r_{n+1} - r_n| \\
&\quad + |\lambda_n - \lambda_{n+1}| (\|Az_n\| + \theta_{n+1} \|Au_n\|) + |\theta_{n+1} - \theta_n| M
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Daha sonra

$$\begin{aligned}
\|Sv_{n+1} - Sv_n\| &\leq \|P_C(y_{n+1} - \lambda_{n+1}Ay_{n+1}) - P_C(y_n - \lambda_nAy_n)\| \\
&\leq \|(y_{n+1} - \lambda_{n+1}Ay_{n+1}) - (y_n - \lambda_{n+1}Ay_n + \lambda_{n+1}Ay_n - \lambda_nAy_n)\| \quad (3.28) \\
&\leq \|y_{n+1} - y_n\| + |\lambda_n - \lambda_{n+1}| \|Ay_n\|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.28) eşitsizliği (3.13) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\|a_{n+1} - a_n\| &\leq \xi \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \|y_{n+1} - y_n\| \\
&\quad + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \{\|y_{n+1} - y_n\| + |\lambda_n - \lambda_{n+1}| \|Ay_n\|\} \\
&\quad + \left| \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \right| \{\|f(y_n)\| + \|Sv_n\|\} \\
&= \frac{\xi\alpha_{n+1} + \gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \|y_{n+1} - y_n\| \\
&\quad + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} |\lambda_n - \lambda_{n+1}| \|Ay_n\| \\
&\quad + \left| \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \right| \{\|f(y_n)\| + \|Sv_n\|\} \quad (3.29)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.27) eşitsizliği (3.29) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\|a_{n+1} - a_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \left(\frac{\xi\alpha_{n+1} + \gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - 1 \right) \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\quad + \frac{\xi\alpha_{n+1} + \gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \left\{ \begin{aligned} &\theta_{n+1} \frac{K}{d} |r_{n+1} - r_n| \\ &+ |\lambda_n - \lambda_{n+1}| (\|Az_n\| + \theta_{n+1} \|Au_n\|) \\ &+ |\theta_{n+1} - \theta_n| M \end{aligned} \right\} \quad (3.30) \\
&\quad + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} |\lambda_n - \lambda_{n+1}| \|Ay_n\|
\end{aligned}$$

$$+ \left| \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \right| \{ \|f(y_n)\| + \|Sv_n\| \}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{\xi\alpha_{n+1} + \gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - 1 &= \frac{\xi\alpha_{n+1} + 1 - \alpha_{n+1} - \beta_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - 1 \\ &= \frac{(\xi - 1)\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

eşitliğinde $\xi \in (0,1)$ olduğundan dolayı $\frac{\xi\alpha_{n+1} + \gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - 1 < 0$ olur ve (i)-(vi) koşullarından (3.30) eşitsizliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{ \|a_{n+1} - a_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \} \leq 0 \quad (3.32)$$

elde edilir. Böylece Lemma 2.27 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - x_n\| = 0 \quad (3.33)$$

olur. Sonuç olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta_n) \|a_n - x_n\| = 0 \quad (3.34)$$

olur.

(IV) Şimdi $n \rightarrow \infty$ için $\|Sv_n - v_n\| \rightarrow 0$ olduğu ispatlanacaktır. Bu amaç için $\|Sv_n - v_n\| \leq \|Sv_n - x_n\| + \|x_n - u_n\| + \|u_n - v_n\|$ olduğundan, $n \rightarrow \infty$ için $\|Sv_n - x_n\| \rightarrow 0$, $\|x_n - u_n\| \rightarrow 0$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

(a) İlk olarak $n \rightarrow \infty$ için $\|Sv_n - x_n\| \rightarrow 0$ olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} \|x_n - Sv_n\| &\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - Sv_n\| \\ &= \|x_n - x_{n+1}\| + \|\alpha_n f(y_n) + \beta_n x_n + \gamma_n Sv_n - Sv_n\| \\ &\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \alpha_n \|f(y_n) - Sv_n\| + \beta_n \|x_n - Sv_n\| \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\|x_n - Sv_n\| \leq \frac{1}{1 - \beta_n} \|x_n - x_{n+1}\| + \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \|f(y_n) - Sv_n\|$$

(ii) koşulundan ve $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$ olduğundan buradan $\|Sv_n - x_n\| \rightarrow 0$ olur.

(b) Şimdi de $n \rightarrow \infty$ için $\|x_n - u_n\| \rightarrow 0$ olduğu ispatlansın. Aslında Lemma 2.26 dan herhangi bir $p \in \Psi$ için

$$\begin{aligned} \|u_n - p\|^2 &= \|T_{r_n}x_n - T_{r_n}p\|^2 \\ &= \langle T_{r_n}x_n - T_{r_n}p, x_n - p \rangle \\ &= \langle u_n - p, x_n - p \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\|u_n - p\|^2 + \|x_n - p\|^2 - \|u_n - x_n\|^2) \end{aligned} \tag{3.36}$$

ve dolayısıyla

$$\|u_n - p\|^2 \leq \|x_n - p\|^2 - \|u_n - x_n\|^2 \tag{3.37}$$

değerine sahip olduğu sonucu ortaya çıkar. Daha sonra

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &= \|\alpha_n f(y_n) + \beta_n x_n + \gamma_n Sv_n - (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n)p\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + \beta_n \|x_n - p\|^2 + \gamma_n \|Sv_n - p\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + \beta_n \|x_n - p\|^2 + \gamma_n \|v_n - p\|^2 \end{aligned} \tag{3.38}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.38) eşitsizliğinde $v_n = P_C(I - \lambda_n A)y_n$ yazılırsa (3.37) ve (3.7) den

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + \beta_n \|x_n - p\|^2 + \gamma_n \|P_C(I - \lambda_n A)y_n - p\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + \beta_n \|x_n - p\|^2 + \gamma_n \|y_n - p\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + \beta_n \|x_n - p\|^2 + \gamma_n \|z_n - p\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + \beta_n \|x_n - p\|^2 \\ &\quad + \gamma_n \|(1 - \theta_n)x_n + \theta_n P_C(I - \lambda_n A)u_n - p\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + \beta_n \|x_n - p\|^2 \\ &\quad + \gamma_n \{(1 - \theta_n)\|x_n - p\|^2 + \theta_n \|u_n - p\|^2\} \\ &\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + \beta_n \|x_n - p\|^2 \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma_n\{(1-\theta_n)\|x_n-p\|^2 + \theta_n\|x_n-p\|^2 - \theta_n\|u_n-x_n\|^2\} \\
& = \alpha_n\|f(y_n)-p\|^2 + (\beta_n+\gamma_n)\|x_n-p\|^2 - \gamma_n\theta_n\|u_n-x_n\|^2 \\
& \leq \alpha_n\|f(y_n)-p\|^2 + \|x_n-p\|^2 - \gamma_n\theta_n\|u_n-x_n\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\gamma_n\theta_n\|u_n-x_n\|^2 & \leq \alpha_n\|f(y_n)-p\|^2 + \|x_n-p\|^2 - \|x_{n+1}-p\|^2 \\
& \leq \alpha_n\|f(y_n)-p\|^2 \\
& \quad + (\|x_n-p\| + \|x_{n+1}-p\|)(\|x_n-p\| - \|x_{n+1}-p\|) \\
& \leq \alpha_n\|f(y_n)-p\|^2 + (\|x_n-p\| + \|x_{n+1}-p\|)\|x_n-x_{n+1}\|
\end{aligned} \tag{3.40}$$

olur. O zaman Teorem 3.1.1'nin (i), (ii) ve (iii) koşullarından $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_n < 1$ olduğundan dolayı $n \rightarrow \infty$ için $\liminf_{n \rightarrow \infty} \theta_n > 0$, $\alpha_n \rightarrow 0$ ve $\|x_{n+1}-x_n\| \rightarrow 0$ dan $\|x_n-u_n\| \rightarrow 0$ olduğu görülür.

Aslında $A: C \rightarrow \mathbb{H}$ relaxed (c, w) -cocoersive dönüşümü ve L - Lipschitzian dönüşümü olduğundan $\{\lambda_n\}$ ve (3.7) uygulanan varsayımlarla verilen $p \in \Psi$ için

$$\begin{aligned}
\|v_n-p\|^2 & = \|P_C(I-\lambda_n A)y_n - P_C(I-\lambda_n A)p\|^2 \\
& \leq \|(I-\lambda_n A)y_n - (I-\lambda_n A)p\|^2 \\
& = \|y_n-p-\lambda_n(Ay_n-Ap)\|^2 \\
& = \|y_n-p\|^2 - 2\lambda_n\langle y_n-p, Ay_n-Ap \rangle + \lambda_n^2\|Ay_n-Ap\|^2 \\
& \leq \|y_n-p\|^2 - 2\lambda_n\{-c\|Ay_n-Ap\|^2 + w\|y_n-p\|^2\} \\
& \quad + \lambda_n^2\|Ay_n-Ap\|^2 \\
& = \|x_n-p\|^2 + 2\lambda_n c\|Ay_n-Ap\|^2 - 2\lambda_n w\|y_n-p\|^2 \\
& \quad + \lambda_n^2\|Ay_n-Ap\|^2
\end{aligned} \tag{3.41}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\|Ay_n-Ap\|^2 & \leq L^2\|y_n-p\|^2 \\
\frac{-2\lambda_n w\|Ay_n-Ap\|^2}{L^2} & \geq \frac{-2\lambda_n wL^2\|y_n-p\|^2}{L^2} \\
\frac{-2\lambda_n w\|Ay_n-Ap\|^2}{L^2} & \geq -2\lambda_n w\|y_n-p\|^2
\end{aligned} \tag{3.42}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\|v_n - p\|^2 &\leq \|x_n - p\|^2 + 2\lambda_n c \|Ay_n - Ap\|^2 - \frac{2\lambda_n w \|Ay_n - Ap\|^2}{L^2} \\
&\quad + \lambda_n^2 \|Ay_n - Ap\|^2 \\
&= \|x_n - p\|^2 + \left\{ 2\lambda_n c + \lambda_n^2 - \frac{2\lambda_n w}{L^2} \right\} \|Ay_n - Ap\|^2
\end{aligned} \tag{3.43}$$

sonucu elde edilir. (3.43) eşitsizliğini (3.38) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\|^2 &\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + \beta_n \|x_n - p\|^2 \\
&\quad + \gamma_n \left(\|x_n - p\|^2 + \left\{ 2\lambda_n c + \lambda_n^2 - \frac{2\lambda_n w}{L^2} \right\} \|Ay_n - Ap\|^2 \right) \\
&= \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + (\gamma_n + \beta_n) \|x_n - p\|^2 \\
&\quad + \gamma_n \left\{ 2\lambda_n c + \lambda_n^2 - \frac{2\lambda_n w}{L^2} \right\} \|Ay_n - Ap\|^2
\end{aligned} \tag{3.44}$$

ve

$$\begin{aligned}
& -\gamma_n \left\{ 2\lambda_n c + \lambda_n^2 - \frac{2\lambda_n w}{L^2} \right\} \|Ay_n - Ap\|^2 \\
& \leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2 \\
& \leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 \\
& \quad + (\|x_n - p\| + \|x_{n+1} - p\|)(\|x_n - p\| - \|x_{n+1} - p\|) \\
& \leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 \\
& \quad + (\|x_n - p\| + \|x_{n+1} - p\|)(\|x_n - x_{n+1}\|)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

elde edilir. Burada $n \rightarrow \infty$ için $\alpha_n \rightarrow 0$ ve $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$ dan dolayı $\|Ay_n - Ap\| \rightarrow 0$ olur. (2.25) den

$$\begin{aligned}
\|v_n - p\|^2 &= \|P_C(I - \lambda_n A)y_n - P_C(I - \lambda_n A)p\|^2 \\
&\leq \langle (I - \lambda_n A)y_n - (I - \lambda_n A)p, v_n - p \rangle \\
&= \frac{1}{2} \{ \| (I - \lambda_n A)y_n - (I - \lambda_n A)p \|^2 + \|v_n - p\|^2 \} \\
&\quad - \frac{1}{2} \| (I - \lambda_n A)y_n - (I - \lambda_n A)p - (v_n - p) \|^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \{ \|y_n - p\|^2 + \|v_n - p\|^2 \} \\
&\quad - \frac{1}{2} \| (y_n - v_n) - \lambda_n (Ay_n - Ap) \|^2 \\
&= \frac{1}{2} \{ \|y_n - p\|^2 + \|v_n - p\|^2 - \|y_n - v_n\|^2 \} \\
&\quad + 2\lambda_n \langle y_n - v_n, Ay_n - Ap \rangle - \lambda_n^2 \|Ay_n - Ap\|^2
\end{aligned} \tag{3.46}$$

olur. Buradan (3.7) den

$$\begin{aligned}
\|v_n - p\|^2 &\leq \|y_n - p\|^2 - \|y_n - v_n\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_n \langle y_n - v_n, Ay_n - Ap \rangle - \lambda_n^2 \|Ay_n - Ap\|^2 \\
&\leq \|x_n - p\|^2 - \|y_n - v_n\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_n \langle y_n - v_n, Ay_n - Ap \rangle - \lambda_n^2 \|Ay_n - Ap\|^2
\end{aligned} \tag{3.47}$$

elde edilir. (3.46) eşitsizliğini (3.38) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\|^2 &\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + \beta_n \|x_n - p\|^2 \\
&\quad + \gamma_n \left\{ \|x_n - p\|^2 - \|y_n - v_n\|^2 \right. \\
&\quad \left. + 2\lambda_n \langle y_n - v_n, Ay_n - Ap \rangle - \lambda_n^2 \|Ay_n - Ap\|^2 \right\} \\
&\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + \|x_n - p\|^2 - \gamma_n \|y_n - v_n\|^2 \\
&\quad + 2\gamma_n \lambda_n \langle y_n - v_n, Ay_n - Ap \rangle - \gamma_n \lambda_n^2 \|Ay_n - Ap\|^2
\end{aligned} \tag{3.48}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\|^2 &\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + \|x_n - p\|^2 - \gamma_n \|y_n - v_n\|^2 \\
&\quad + 2\gamma_n \lambda_n \|y_n - v_n\| \|Ay_n - Ap\|
\end{aligned} \tag{3.49}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\gamma_n \|y_n - v_n\|^2 &\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2 \\
&\quad + 2\gamma_n \lambda_n \|y_n - v_n\| \|Ay_n - Ap\| \\
&\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + 2\gamma_n \lambda_n \|y_n - v_n\| \|Ay_n - Ap\| \\
&\quad + (\|x_n - p\| + \|x_{n+1} - p\|)(\|x_n - p\| - \|x_{n+1} - p\|) \\
&\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + 2\gamma_n \lambda_n \|y_n - v_n\| \|Ay_n - Ap\| \\
&\quad + (\|x_n - p\| + \|x_{n+1} - p\|)(\|x_n - x_{n+1}\|)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

eşitsizliği elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için $\alpha_n \rightarrow 0$, $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$ ve $\|Ay_n - Ap\| \rightarrow 0$ dan dolayı $\|y_n - v_n\| \rightarrow 0$ olur. Aynı işlem adımları takip edilerek $n \rightarrow \infty$ için $\|z_n - y_n\| \rightarrow 0$ olduğu bulunur. O zaman

$$\begin{aligned}
\|x_n - z_n\| &= \|(1 - \theta_n)x_n + \theta_n P_C(I - \lambda_n A)u_n - x_n\| \\
&\leq \theta_n \|P_C(I - \lambda_n A)u_n - P_C(I - \lambda_n A)y_n + P_C(I - \lambda_n A)y_n - x_n\| \\
&\leq \theta_n \|u_n - y_n\| + \theta_n \|v_n - x_n\| \\
&\leq \theta_n \|u_n - y_n\| + \theta_n \|v_n - Sv_n\| + \theta_n \|Sv_n - x_n\|
\end{aligned} \tag{3.51}$$

elde edilir. (3.51) eşitsizliği $\|u_n - y_n\| \leq \|u_n - x_n\| + \|x_n - z_n\| + \|z_n - y_n\|$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|u_n - y_n\| &\leq \|u_n - x_n\| + \|z_n - y_n\| \\
&\quad + \theta_n \|u_n - y_n\| + \theta_n \|v_n - Sv_n\| + \theta_n \|Sv_n - x_n\| \\
\|u_n - y_n\| &\leq \frac{1}{1 - \theta_n} \|u_n - x_n\| + \frac{1}{1 - \theta_n} \|z_n - y_n\| \\
&\quad + \frac{\theta_n}{1 - \theta_n} \|v_n - Sv_n\| + \frac{\theta_n}{1 - \theta_n} \|Sv_n - x_n\|
\end{aligned} \tag{3.52}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada (3.52) deki eşitsizliği $\|u_n - v_n\| \leq \|u_n - y_n\| + \|y_n - v_n\|$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|u_n - v_n\| &\leq \|y_n - v_n\| + \frac{1}{1 - \theta_n} \|u_n - x_n\| + \frac{1}{1 - \theta_n} \|z_n - y_n\| \\
&\quad + \frac{\theta_n}{1 - \theta_n} \|v_n - Sv_n\| + \frac{\theta_n}{1 - \theta_n} \|Sv_n - x_n\|
\end{aligned} \tag{3.53}$$

elde edilir. (3.53) deki eşitsizlik $\|Sv_n - v_n\| \leq \|Sv_n - x_n\| + \|x_n - u_n\| + \|u_n - v_n\|$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|Sv_n - v_n\| &\leq \|Sv_n - x_n\| + \|x_n - u_n\| + \|y_n - v_n\| \\
&\quad + \frac{1}{1 - \theta_n} \|u_n - x_n\| + \frac{1}{1 - \theta_n} \|z_n - y_n\| \\
&\quad + \frac{\theta_n}{1 - \theta_n} \|v_n - Sv_n\| + \frac{\theta_n}{1 - \theta_n} \|Sv_n - x_n\| \\
&\leq \frac{1}{1 - \theta_n} \|Sv_n - x_n\| + \frac{2 - \theta_n}{1 - \theta_n} \|u_n - x_n\| + \|y_n - v_n\| \\
&\quad + \frac{1}{1 - \theta_n} \|z_n - y_n\| + \frac{\theta_n}{1 - \theta_n} \|v_n - Sv_n\|
\end{aligned} \tag{3.54}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
\frac{1 - 2\theta_n}{1 - \theta_n} \|Sv_n - v_n\| &\leq \frac{1}{1 - \theta_n} \|Sv_n - x_n\| + \frac{2 - \theta_n}{1 - \theta_n} \|u_n - x_n\| \\
&\quad + \|y_n - v_n\| + \frac{1}{1 - \theta_n} \|z_n - y_n\|
\end{aligned} \tag{3.55}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla Teorem 3.1.1'deki koşul (vi) dan ve $n \rightarrow \infty$ için $\|Sv_n - x_n\| \rightarrow 0$, $\|u_n - x_n\| \rightarrow 0$, $\|y_n - v_n\| \rightarrow 0$, $\|z_n - y_n\| \rightarrow 0$ olduğundan $\|Sv_n - v_n\| \rightarrow 0$ olur.

(V) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, x_n - z \rangle \leq 0$ olduğu gösterilsin. Burada $z = P_\Psi$ dir. Bunu göstermek için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, Sv_n - z \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, Sv_{n_i} - z \rangle \quad (3.56)$$

olacak şekilde (v_n) 'nin bir (v_{n_i}) alt dizisi seçilir. (v_{n_i}) sınırlı olduğundan bu dizinin bir k noktasına zayıf yakınsayan $(v_{n_{i_j}})$ alt dizisi seçilebilir. Genelliği bozmadan (v_{n_i}) 'nin k noktasına zayıf yakınsadığını kabul edilir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, Sv_n - z \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, Sv_{n_i} - z \rangle \\ &= \langle f(z) - z, k - z \rangle \end{aligned} \quad (3.57)$$

dir. Şimdi $k \in \Psi$ 'nin olduğunu gösterilsin.

(a) İlk olarak $k \in EP(F)$ olduğu ispatlanacaktır. Aslında $u_n = T_{r_n}x_n$ 'den

$$F(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C$$

var. (A2)' den

$$\frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq F(y, u_n)$$

ve dolayısıyla

$$\langle y - u_{n_i}, \frac{u_{n_i} - x_{n_i}}{r_{n_i}} \rangle \geq F(y, u_{n_i}) \quad (3.58)$$

olur. Böylece $\|u_n - x_n\| \rightarrow 0$, $\|Sv_n - x_n\| \rightarrow 0$, $\|Sv_n - v_n\| \rightarrow 0$ ve $v_{n_i} \rightarrow k$ olduğundan $u_{n_i} \rightarrow k$ olur. Buradan $\frac{u_{n_i} - x_{n_i}}{r_{n_i}} \rightarrow 0$ olur. (A4) ve (3.58) den

$$F(y, k) \leq 0 \quad \forall y \in C$$

elde edilir. Herhangi bir $t \in (0,1]$ ve $y \in C$ için $y_t = ty + (1-t)k$ olsun. $y_t \in C$ ve dolayısıyla $F(y_t, k) \leq 0$ vardır. (A1) ve (A4) den

$$0 = F(y_t, y_t) \leq tF(y_t, y) + (1-t)F(y_t, k) \leq tF(y_t, y)$$

elde edilir ve dolayısıyla $0 \leq F(y_t, y)$ olur. (A3)'den $F(k, y) \geq 0$ olur. Yani $k \in EP(F)$ 'dir.

(b) Şimdi de $k \in VI(C, A)$ olduğu gösterilmelidir. Bu amaçla, T , (2.30) ile tanımlanan maksimal monoton dönüşüm olsun:

$$Tx = \begin{cases} Ax + N_C x, & x \in C; \\ \emptyset, & x \notin C. \end{cases}$$

Herhangi bir $(x, u) \in G(T)$ için dolayısıyla $u - Ax \in N_C x$ dir. N_C 'nin tanımı gereği $v_n \in C$ olduğundan,

$$\langle x - v_n, u - Ax \rangle \geq 0 \quad (3.59)$$

Öte yandan $v_n = P_C(I - \lambda_n A)y_n$ den, $\langle x - v_n, v_n - (y_n - \lambda_n A y_n) \rangle \geq 0$ dir. Bu nedenle

$$\langle x - v_n, \frac{v_n - y_n}{\lambda_n} + A y_n \rangle \geq 0$$

olur. (3.59) dan ve $A: C \rightarrow \mathbb{H}$ relaxed (c, w) -cocoersive dönüşümü ve L – Lipschitzian dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} \langle x - v_{n_i}, u - Ax \rangle &\geq 0 \\ \langle x - v_{n_i}, u \rangle - \langle x - v_{n_i}, Ax \rangle &\geq 0 \\ \langle x - v_{n_i}, u \rangle &\geq \langle x - v_{n_i}, Ax \rangle \\ &\geq \langle x - v_{n_i}, Ax \rangle - \langle x - v_{n_i}, \frac{v_{n_i} - y_{n_i}}{\lambda_{n_i}} + A y_{n_i} \rangle \\ &= \langle x - v_{n_i}, Ax \rangle - \langle x - v_{n_i}, A y_{n_i} \rangle - \langle x - v_{n_i}, \frac{v_{n_i} - y_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \rangle \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned}
&= \langle x - v_{n_i}, Ax - Ay_{n_i} \rangle - \langle x - v_{n_i}, \frac{v_{n_i} - y_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \rangle \\
&= \langle x - v_{n_i}, Ax - Av_{n_i} \rangle + \langle x - v_{n_i}, Av_{n_i} - Ay_{n_i} \rangle \\
&\quad - \langle x - v_{n_i}, \frac{v_{n_i} - y_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \rangle
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\langle x - v_{n_i}, Ax - Av_{n_i} \rangle &\geq -c \|Ax - Av_{n_i}\|^2 + w \|x - v_{n_i}\|^2 \\
&\geq -cL^2 \|x - v_{n_i}\|^2 + w \|x - v_{n_i}\|^2 \\
&= (w - cL^2) \|x - v_{n_i}\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\langle x - v_{n_i}, Ax - Av_{n_i} \rangle \geq 0$ olur. Bu yüzden (3.60) daki eşitsizlik şu şekilde yazılarak

$$\begin{aligned}
\langle x - v_{n_i}, u \rangle &\geq \langle x - v_{n_i}, Ax - Av_{n_i} \rangle \\
&\quad + \langle x - v_{n_i}, Av_{n_i} - Ay_{n_i} \rangle \\
&\quad - \langle x - v_{n_i}, \frac{v_{n_i} - y_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \rangle \\
&\geq \langle x - v_{n_i}, Av_{n_i} - Ay_{n_i} \rangle - \langle x - v_{n_i}, \frac{v_{n_i} - y_{n_i}}{\lambda_{n_i}} \rangle
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. $\|v_n - y_n\| \rightarrow 0, v_{n_i} \rightarrow k$ ve A Lipschitz sürekli olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x - v_{n_i}, u \rangle = \langle x - k, u \rangle \geq 0$$

olur. T maksimal monoton olduğundan dolayı $0 \in Tk$ dir. Böylece $k \in VI(C, A)$ dir.

(c) Son olarak $k \in F(S) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n)$ olduğu ispatlanmalıdır. Bunun tersini olduğu kabul edilirse, $k \neq F(S)$ yani $Sk \neq k$ dir. $v_{n_i} \rightarrow k$ 'den, opial koşuluna göre

$$\begin{aligned}
\liminf_{i \rightarrow \infty} \|v_{n_i} - k\| &< \lim_{i \rightarrow \infty} \|v_{n_i} - Sk\| \\
&\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \{\|v_{n_i} - Sv_{n_i}\| + \|Sv_{n_i} - Sk\|\} \\
&= \liminf_{i \rightarrow \infty} \{\|v_{n_i} - Sv_{n_i}\| + \|v_{n_i} - k\|\} \\
&\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \|v_{n_i} - k\|
\end{aligned}$$

olur. Bu bir çelişkidir ve buradan $k \in F(S) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n)$ olduğu görülür.

Sonuç olarak $k \in \Psi$ olduğu kanıtlanmıştır.

$z = P_{\Psi}f(z)$ olduğundan, (2.26), $\|Sv_n - x_n\| \rightarrow 0$ ve (3.57)'den

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \langle f(z) - z, x_n - z \rangle \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \langle f(z) - z, (x_n - Sv_n + Sv_n - z) \rangle \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \langle f(z) - z, Sv_n - z \rangle \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, Sv_{n_i} - z \rangle \\
&= \langle f(z) - z, k - z \rangle \leq 0
\end{aligned} \tag{3.61}$$

sonucu çıkarılır.

(VI) Son olarak $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow z$ olduğu kanıtlanacaktır. (3.7), (3.61) den

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - z\|^2 &= \langle \alpha_n f(y_n) + \beta_n x_n + \gamma_n Sv_n - z, x_{n+1} - z \rangle \\
&= \alpha_n \langle f(y_n) - z, x_{n+1} - z \rangle + \beta_n \langle x_n - z, x_{n+1} - z \rangle \\
&\quad + \gamma_n \langle Sv_n - z, x_{n+1} - z \rangle \\
&\leq \alpha_n \langle f(y_n) - z, x_{n+1} - z \rangle + \frac{1}{2} \beta_n (\|x_n - z\|^2 + \|x_{n+1} - z\|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \gamma_n (\|v_n - z\|^2 + \|x_{n+1} - z\|^2) \\
&= \alpha_n \langle f(y_n) - f(z), x_{n+1} - z \rangle + \alpha_n \langle f(z) - z, x_{n+1} - z \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \beta_n (\|x_n - z\|^2 + \|x_{n+1} - z\|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \gamma_n (\|v_n - z\|^2 + \|x_{n+1} - z\|^2) \\
&\leq \frac{1}{2} \alpha_n (\xi \|y_n - z\|^2 + \|x_{n+1} - z\|^2) + \alpha_n \langle f(z) - z, x_{n+1} - z \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \beta_n (\|x_n - z\|^2 + \|x_{n+1} - z\|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \gamma_n (\|x_n - z\|^2 + \|x_{n+1} - z\|^2) \\
&\leq \frac{1}{2} \alpha_n (\xi \|x_n - z\|^2 + \|x_{n+1} - z\|^2) + \alpha_n \langle f(z) - z, x_{n+1} - z \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} (1 - \alpha_n) (\|x_n - z\|^2 + \|x_{n+1} - z\|^2) \\
&\leq \frac{1}{2} [1 - (1 - \xi) \alpha_n] \|x_n - z\|^2 + \frac{1}{2} \|x_{n+1} - z\|^2
\end{aligned}$$

$$+\alpha_n \langle f(z) - z, x_{n+1} - z \rangle$$

sonucu ortaya çıkar.

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq [1 - (1 - \xi)\alpha_n] \|x_n - z\|^2 + 2\alpha_n \langle f(z) - z, x_{n+1} - z \rangle$$

Buradan $a_n = \|x_{n+1} - z\|^2$, $\gamma_n = (1 - \xi)\alpha_n$, $b_n = 2\alpha_n \langle f(z) - z, x_{n+1} - z \rangle$ alınırsa Lemma 2.29'in tüm koşullarını sağlar. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|^2 = 0$ olur ve Teorem 3.1.1'in ispatı tamamlanır.

Aşağıdaki Örnek 3.1.2, [50]'deki Örnek 1'e göre bazı koşullar kullanılarak yeniden oluşturulursa;

Örnek 3.1.2 $\mathbb{H} = \mathbb{R}$, $C = [0,1]$ olsun. Açıkçası $\mathbb{H} = \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = x \cdot y$ iç çarpımı tarafından oluşturulan $\|x\| = |x|$ normuna sahip bir Hilbert uzayıdır. $S: C \rightarrow C$, $f: C \rightarrow C$, $A: C \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$,

$$Sx = \begin{cases} \frac{7x}{20}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3x}{10}, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

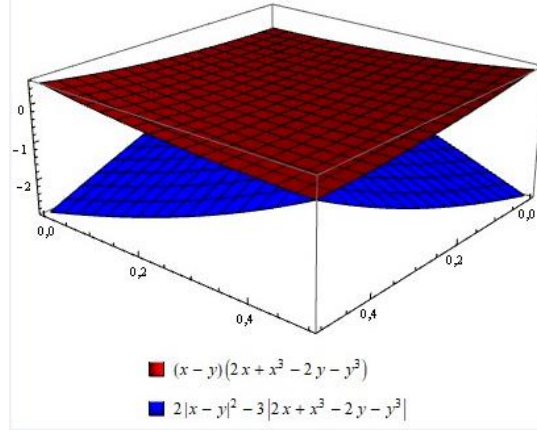
$fx = \frac{1}{3}x$ ve $Ax = x^3 + 2x$ ile tanımlansın. O halde

$$\begin{aligned} |Ax - Ay| &= |x^3 + 2x - y^3 - 2y| \\ &\leq |x^2 + xy + y^2||x - y| + 2|x - y| \\ &\leq 5|x - y| \end{aligned}$$

elde edilir ve dolayısıyla A bir 5-Lipschitzidir. Her $x, y \in C$ için

$$\begin{aligned} \langle Ax - Ay, x - y \rangle &= \langle x^3 + 2x - y^3 - 2y, x - y \rangle \\ &= \langle (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 2(x - y), x - y \rangle \\ &= (x - y)^2(x^2 + xy + y^2 + 2) \\ &\geq 2|x - y|^2 - 3|Ax - Ay|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $A(3,2)$ relaxed cocoercive dönüşümüdür. Ayrıca, Mathematica 9 kullanılarak, Şekil 3.1'den A dönüşümünün aşağıdaki gibi relaxed cocoercive dönüşüm olduğu görülür:



Şekil 3.1. A'nın relaxed cocoercive dönüşüm olduğunu gösteren grafik.

Projeksiyon dönüşümü $P_C: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ aşağıdaki gibi tanımlansın

$$P_C x = \begin{cases} x; & x \in [0,1] \\ 0; & x \in (-\infty, 0) \\ 1; & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

Bu durumda

$$SP_C x = \begin{cases} S(x); & x \in [0,1] \\ 0; & x \in (-\infty, 0) \\ S(1); & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

olur. $\alpha_n = \frac{1}{2(n+1)}, \beta_n = \frac{1}{2(n+1)}, \gamma_n = \frac{n}{n+1}, \theta_n = \frac{1}{2(n+1)}, \lambda_n = \frac{1}{n+1}, r_n = \frac{n}{n+2}$ ve

$F(x, y) = y^2 - x^2$ seçilir. $r > 0$ ve $x \in [0,1]$ için, Lemma 2.26'ya göre, her $y \in [0,1]$

$$F(u, y) + \frac{1}{r} \langle y - u, u - x \rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - u^2 + \frac{1}{r} \langle y - u, u - x \rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ry^2 + (u - x)y + ux - u^2 - ru^2 \geq 0$$

için $u \in [0,1]$ vardır. $G(y) = ry^2 + (u - x)y + ux - u^2 - ru^2$ koyulur. O halde $a = r, b = u - x$ ve $c = ux - u^2 - ru^2$ sabiti ile y 'nin ikinci dereceden fonksiyonudur. Daha sonra G 'nin Δ diskriminantını aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (u - x)^2 - 4r(ux - u^2 - ru^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u^2 - 2ux + x^2 - 4rux + 4ru^2 + 4r^2u^2 \\
&= x^2 - 2ux(1 + 2r) + (1 + 2r)^2u^2 \\
&= [x - (1 + 2r)u]^2
\end{aligned}$$

Her $y \in [0,1]$ için $G(y) \geq 0$ olduğu bilinir. Eğer $[0,1]$ 'de tek bir çözümü varsa, $\Delta = 0$ ve dolayısıyla $x = u + 2ru$. O halde $u = T_r x = \frac{x}{1+2r}$ vardır.

Seçilen parametreler, dönüşüm ve modifikasyonlar kullanılarak (3.1) ile verilen iterasyon yöntemi yeniden yazılır.

$$\begin{cases}
x_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} \frac{1}{3} y_n + \frac{1}{2(n+1)} x_n + \frac{n}{n+1} \frac{7}{20} \left(y_n - \frac{1}{n+1} [(y_n)^3 + 2y_n] \right) \\
y_n = z_n - \frac{1}{n+1} [(z_n)^3 + 2z_n] \\
z_n = \left(1 - \frac{1}{2(n+1)} \right) x_n + \frac{1}{2(n+1)} \left[\frac{x_n}{1+2r_n} - \frac{1}{n+1} \left(\left(\frac{x_n}{1+2r_n} \right)^3 + 2 \left(\frac{x_n}{1+2r_n} \right) \right) \right] \\
F(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \forall y \in [0,1]
\end{cases}$$

Çizelge 3.1. $x_1 = 1$ başlangıç noktası için (3.1) ile verilen iterasyon yönteminin yakınsama davranışı.

İterasyon Adımları	İterasyon Yöntemi (3.1)
x_1	1.0000000000000000
x_2	0.23484321116064
x_3	0.04773630095536
x_4	0.00969143775459
x_5	0.00205286327947
$\vdots$	$\vdots$
x_{25}	0.000000000000015
x_{26}	0.000000000000004
x_{27}	0.000000000000001
x_{28}	0.000000000000000

Çizelge 3.1, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin 0 noktasına yakınsadığını ve ayrıca bir denge problemini hem de sabit nokta problemini çözdüğünü göstermektedir.

3.2 Denge Problemin Yeni Sabit Nokta İterasyon Yöntemiyle Çözümü

Teorem 3.2.1 C , bir reel Hilbert uzayı $\mathbb{H}$ 'nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi, $F: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ (A1)-(A4) şartlarını sağlayan bir çift fonksiyon, bazı pozitif

L, c ve w sabitleri için $A: C \rightarrow \mathbb{H}$ relaxed (c, w) -cocoersive dönüşümü ve L – Lipschitzian dönüşümü olsun. $\{S_i: C \rightarrow C\}$ $\Psi \neq \emptyset$ olacak şekilde genişlemeyen dönüşümler ailesi, burada $F := \cap_{i=1}^{\infty} F(S_i)$ ve $f: C \rightarrow C$ $\xi \in (0,1)$ sabiti ile bir contraction dönüşümü olsun. $\{x_n\}$ ve $\{u_n\}$, $x_1 \in \mathbb{H}$ ve

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \forall y \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n f(y_n) + \beta_n x_n + \gamma_n W_n P_C(I - \lambda_n A)y_n \\ y_n = P_C(I - \lambda_n A)z_n \\ z_n = (1 - \theta_n)x_n + \theta_n P_C(I - \lambda_n A)u_n \end{cases} \quad (3.62)$$

tarafından oluşturulan, burada $\{W_n: C \rightarrow C\}$, (2.35) ile tanımlanan dizi ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\theta_n\} \subset [0,1]$ ve $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ olan diziler olsun. Kontrol dizilerin aşağıdaki koşulları sağladığı kabul edilsin:

- (i) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$,
- (iii) $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1$,
- (iv) $\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$,
- (v) $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| = 0$, $\lambda_n \in [a, b]$, burada $0 < a \leq b < \frac{2(w-cL^2)}{L^2}$,
- (vi) $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \theta_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \theta_n < \frac{1}{2}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} |\theta_{n+1} - \theta_n| = 0$

o zaman $\{x_n\}$, $z \in \Psi$ 'ye güçlü yakınsar, burada $z = P_{\Psi}f(z)$ 'dir.

İspat: İspat altı adıma ayrılarak yapılacaktır:

(I) İlk olarak $z = P_{\Psi}f(z)$ olacak şekilde $z \in C$ 'nin var olduğu kanıtlanacaktır. Teorem 3.1.1 deki birinci adımda yapılan işlemlerin aynısı burada da yapılacağından birinci adımın ispatı tamamlanmış olunur.

(II) Şimdi $\{x_n\}$ ve $\{u_n\}$ dizilerinin sınırlı olduğu gösterilecektir.

Teorem 3.1.1 deki ikinci adımda elde edilen (3.3) ve (3.7) eşitsizlikleri bu adımda da elde edilir. Lemma 2.31 ile, $p = W_n p$, dolayısıyla (3.3)'den

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &= \|\alpha_n f(y_n) + \beta_n x_n + \gamma_n W_n v_n - (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n)p\| \\ &\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\| + \beta_n \|x_n - p\| + \gamma_n \|W_n v_n - p\| \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\| + \beta_n \|x_n - p\| + \gamma_n \|v_n - p\| \\
&\leq \alpha_n \|f(y_n) - f(p)\| + \alpha_n \|f(p) - p\| + \beta_n \|x_n - p\| \\
&\quad + \gamma_n \|P_C(I - \lambda_n A)y_n - P_C(I - \lambda_n A)p\| \\
&= (\alpha_n \xi + \gamma_n) \|y_n - p\| + \alpha_n \|f(p) - p\| + \beta_n \|x_n - p\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.7) eşitsizliği (3.63) eşitsizliğinde yerine yazılırsa Teorem 3.1.1 deki (3.9) eşitsizliğine ulaşılır. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı olduğunu gösterir. (3.7)'den $\{z_n\}, \{y_n\}, \{v_n\}, \{u_n\}, \{W_n v_n\}$ ve $\{Ay_n\}$ dizileri de sınırlıdır. Genelliği kaybetmeden,

$$v_n, y_n, z_n \in D, \quad \forall n \geq 1 \quad (3.64)$$

olacak şekilde gibi sınırlı bir $D \subset C$ kümesinin var olduğu varsayılabilir.

(III) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ olduğu ispatlanacaktır. $\{b_n\}$ dizisini $x_{n+1} = \beta_n x_n + (1 - \beta_n)b_n$, $\forall n \geq 1$ ile tanımlanacaktır. Böylece $b_n = \frac{x_{n+1} - \beta_n x_n}{1 - \beta_n}$ olur. Dolayısıyla

$$b_n = \frac{\alpha_n f(y_n) + \beta_n x_n + \gamma_n W_n v_n - \beta_n x_n}{1 - \beta_n} = \frac{\alpha_n f(y_n) + \gamma_n W_n v_n}{1 - \beta_n} \quad (3.65)$$

ve

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n &= \frac{\alpha_{n+1} f(y_{n+1}) + \gamma_{n+1} W_{n+1} v_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n f(y_n) + \gamma_n W_n v_n}{1 - \beta_n} \\
&= \frac{\alpha_{n+1} f(y_{n+1}) + \gamma_{n+1} W_{n+1} v_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n f(y_n) + \gamma_n W_n v_n}{1 - \beta_n} \\
&\quad + \frac{\alpha_{n+1} f(y_n)}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_{n+1} f(y_n)}{1 - \beta_{n+1}} + \frac{\gamma_{n+1} W_n v_n}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\gamma_{n+1} W_n v_n}{1 - \beta_{n+1}} \\
&= \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} (f(y_{n+1}) - f(y_n)) + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} (W_{n+1} v_{n+1} - W_n v_n) \\
&\quad + f(y_n) \left(\frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \right) + \left(\frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\gamma_n}{1 - \beta_n} \right) W_n v_n
\end{aligned} \quad (3.66)$$

olur. Koşul (i) den

$$\frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\gamma_n}{1 - \beta_n} = \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} - \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \quad (3.67)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\|b_{n+1} - b_n\| &\leq \xi \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \|y_{n+1} - y_n\| \\
&\quad + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \|W_{n+1}v_{n+1} - W_nv_n\| \\
&\quad + \left| \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \right| \{\|f(y_n)\| + \|W_nv_n\|\}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bundan sonra Teorem 3.1.1 deki aynı adımlar takip edilerek (3.27) deki eşitsizlik elde edilir. Daha sonra

$$\begin{aligned}
\|W_{n+1}v_{n+1} - W_nv_n\| &\leq \|W_{n+1}v_{n+1} - Wv_{n+1}\| + \|Wv_{n+1} - Wv_n\| \\
&\quad + \|Wv_n - W_nv_n\| \\
&\leq \sup_{x \in D} \{\|Wx - W_{n+1}x\| + \|Wx - W_nx\|\} \\
&\quad + \|v_{n+1} - v_n\|
\end{aligned} \tag{3.69}$$

elde edilir. Burada D (3.64) ile tanımlanan C 'nin sınırlı alt kümesidir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|v_{n+1} - v_n\| &= \|P_C(y_{n+1} - \lambda_{n+1}Ay_{n+1}) - P_C(y_n - \lambda_nAy_n)\| \\
&\leq \|(y_{n+1} - \lambda_{n+1}Ay_{n+1}) - (y_n - \lambda_{n+1}Ay_n + \lambda_{n+1}Ay_n - \lambda_nAy_n)\| \\
&\leq \|(y_{n+1} - \lambda_{n+1}Ay_{n+1}) - (y_n - \lambda_{n+1}Ay_n)\| + |\lambda_n - \lambda_{n+1}| \|Ay_n\| \\
&\leq \|y_{n+1} - y_n\| + |\lambda_n - \lambda_{n+1}| \|Ay_n\|
\end{aligned} \tag{3.70}$$

eşitsizliği ulaşılır. (3.70) eşitsizliği (3.69) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|W_{n+1}v_{n+1} - W_nv_n\| &\leq \sup_{x \in D} \{\|Wx - W_{n+1}x\| + \|Wx - W_nx\|\} \\
&\quad + \|y_{n+1} - y_n\| + |\lambda_n - \lambda_{n+1}| \|Ay_n\|
\end{aligned} \tag{3.71}$$

elde edilir. (3.71) eşitsizliği (3.68) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|b_{n+1} - b_n\| &\leq \xi \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \|y_{n+1} - y_n\| \\
&\quad + \left| \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \right| \{\|f(y_n)\| + \|W_nv_n\|\} \\
&\quad + \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \left\{ \sup_{x \in D} \{\|Wx - W_{n+1}x\| + \|Wx - W_nx\|\} \right. \\
&\quad \left. + \|y_{n+1} - y_n\| + |\lambda_n - \lambda_{n+1}| \|Ay_n\| \right\}
\end{aligned} \tag{3.72}$$

sonucuna ulaşılır. Düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\|b_{n+1} - b_n\| &\leq \frac{\xi\alpha_{n+1} + \gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \|y_{n+1} - y_n\| \\
&+ \left| \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \right| \{\|f(y_n)\| + \|W_n v_n\|\} \\
&+ \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \left\{ \sup_{x \in D} \{\|Wx - W_{n+1}x\| + \|Wx - W_nx\|\} \right. \\
&\quad \left. + |\lambda_n - \lambda_{n+1}| \|Ay_n\| \right\}
\end{aligned} \tag{3.73}$$

elde edilir. (3.27) deki eşitsizliği (3.73) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|b_{n+1} - b_n\| &\leq \frac{\xi\alpha_{n+1} + \gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \left\{ \|x_{n+1} - x_n\| + \theta_{n+1} \frac{K}{d} |r_{n+1} - r_n| \right. \\
&\quad \left. + |\lambda_n - \lambda_{n+1}| (\|Az_n\| + \theta_{n+1} \|Au_n\|) \right. \\
&\quad \left. + |\theta_{n+1} - \theta_n| M \right\} \\
&+ \left| \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \right| \{\|f(y_n)\| + \|W_n v_n\|\} \\
&+ \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \left\{ \sup_{x \in D} \{\|Wx - W_{n+1}x\| + \|Wx - W_nx\|\} \right. \\
&\quad \left. + |\lambda_n - \lambda_{n+1}| \|Ay_n\| \right\}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

eşitsizliği elde edilir.(3.74)'den

$$\begin{aligned}
\|b_{n+1} - b_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \left(\frac{\xi\alpha_{n+1} + \gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - 1 \right) \|x_{n+1} - x_n\| \\
&+ \frac{\xi\alpha_{n+1} + \gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \left\{ \theta_{n+1} \frac{K}{d} |r_{n+1} - r_n| \right. \\
&\quad \left. + |\lambda_n - \lambda_{n+1}| (\|Az_n\| + \theta_{n+1} \|Au_n\|) \right. \\
&\quad \left. + |\theta_{n+1} - \theta_n| M \right\} \\
&+ \left| \frac{\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \right| \{\|f(y_n)\| + \|W_n v_n\|\} \\
&+ \frac{\gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} \left\{ \sup_{x \in D} \{\|Wx - W_{n+1}x\| + \|Wx - W_nx\|\} \right. \\
&\quad \left. + |\lambda_n - \lambda_{n+1}| \|Ay_n\| \right\}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

elde edilir. Lemma 2.32'dan $n \rightarrow \infty$ için $\sup_{x \in D} \|Wx - W_nx\| \rightarrow 0$ olduğu bilinmektedir.

(i)-(vi) koşullarına göre, $\frac{\xi\alpha_{n+1} + \gamma_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} - 1 = \frac{(\xi-1)\alpha_{n+1}}{1 - \beta_{n+1}} < 0$ olduğundan (3.75)

eşitsizliğinde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{\|b_{n+1} - b_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|\} \leq 0.$$

elde edilir. Böylece Lemma 2.27'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|b_n - x_n\| = 0$$

olur. Sonuç olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \beta_n) \|b_n - x_n\| = 0 \quad (3.76)$$

olur.

(IV) Şimdi $n \rightarrow \infty$ için $\|W_n v_n - v_n\| \rightarrow 0$ olduğu ispatlanacaktır. Bu amaç için ilk olarak $\|W_n v_n - x_n\| \rightarrow 0$ olduğu kanıtlanacaktır. (ii), (iii) koşullarından ve $n \rightarrow \infty$ için $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} \|W_n v_n - x_n\| &\leq \|W_n v_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &= \|W_n v_n - \alpha_n f(y_n) - \beta_n x_n - \gamma_n W_n v_n\| + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq \alpha_n \|W_n v_n - f(y_n)\| + \beta_n \|W_n v_n - x_n\| + \|x_{n+1} - x_n\| \quad (3.77) \\ \|W_n v_n - x_n\| &\leq \frac{\alpha_n}{1 - \beta_n} \|W_n v_n - f(y_n)\| + \frac{1}{1 - \beta_n} \|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de $n \rightarrow \infty$ için $\|x_n - u_n\| \rightarrow 0$ olduğu ispatlanır. Aslında Lemma 2.26 dan herhangi bir $p \in \Psi$ için Teorem 3.1.1 deki (3.37) eşitsizliği elde edilir. Daha sonra

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|^2 &= \|\alpha_n f(y_n) + \beta_n x_n + \gamma_n W_n v_n - (\alpha_n + \beta_n + \gamma_n)p\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + \beta_n \|x_n - p\|^2 + \gamma_n \|W_n v_n - p\|^2 \quad (3.78) \\ &\leq \alpha_n \|f(y_n) - p\|^2 + \beta_n \|x_n - p\|^2 + \gamma_n \|v_n - p\|^2 \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (3.78) eşitsizliğinde Teorem 3.1.1 deki aynı adımlar takip edilerek (3.40) eşitsizliği elde edilir. Buradan $n \rightarrow \infty$ için $\|x_n - u_n\| \rightarrow 0$ olduğu ispatlanır. (3.78) eşitsizliğini Teorem 3.1.1 deki adımlarda kullanılarak $n \rightarrow \infty$ için $\|y_n - v_n\| \rightarrow 0$ ve $\|z_n - y_n\| \rightarrow 0$ olduğu bulunur. O zaman

$$\begin{aligned} \|x_n - z_n\| &= \|(1 - \theta_n)x_n + \theta_n P_C(I - \lambda_n A)u_n - x_n\| \\ &\leq \theta_n \|P_C(I - \lambda_n A)u_n - P_C(I - \lambda_n A)y_n + P_C(I - \lambda_n A)y_n - x_n\| \quad (3.79) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \theta_n \|u_n - y_n\| + \theta_n \|v_n - x_n\| \\
&\leq \theta_n \|u_n - y_n\| + \theta_n \|v_n - W_n v_n\| + \theta_n \|W_n v_n - x_n\|
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.79) eşitsizliği $\|u_n - y_n\| \leq \|u_n - x_n\| + \|x_n - z_n\| + \|z_n - y_n\|$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|u_n - y_n\| &\leq \|u_n - x_n\| + \|z_n - y_n\| \\
&\quad + \theta_n \|u_n - y_n\| + \theta_n \|v_n - W_n v_n\| + \theta_n \|W_n v_n - x_n\| \\
\|u_n - y_n\| &\leq \frac{1}{1 - \theta_n} \|u_n - x_n\| + \frac{1}{1 - \theta_n} \|z_n - y_n\| \\
&\quad + \frac{\theta_n}{1 - \theta_n} \|v_n - W_n v_n\| + \frac{\theta_n}{1 - \theta_n} \|W_n v_n - x_n\|
\end{aligned} \tag{3.80}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada (3.80)'deki eşitsizliği $\|u_n - v_n\| \leq \|u_n - y_n\| + \|y_n - v_n\|$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|u_n - v_n\| &\leq \|y_n - v_n\| + \frac{1}{1 - \theta_n} \|u_n - x_n\| + \frac{1}{1 - \theta_n} \|z_n - y_n\| \\
&\quad + \frac{\theta_n}{1 - \theta_n} \|v_n - W_n v_n\| + \frac{\theta_n}{1 - \theta_n} \|W_n v_n - x_n\|
\end{aligned} \tag{3.81}$$

elde edilir. (3.81)'deki eşitsizlik $\|W_n v_n - v_n\| \leq \|W_n v_n - x_n\| + \|x_n - u_n\| + \|u_n - v_n\|$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|W_n v_n - v_n\| &\leq \|W_n v_n - x_n\| + \|x_n - u_n\| + \|y_n - v_n\| \\
&\quad + \frac{1}{1 - \theta_n} \|u_n - x_n\| + \frac{1}{1 - \theta_n} \|z_n - y_n\| \\
&\quad + \frac{\theta_n}{1 - \theta_n} \|v_n - W_n v_n\| + \frac{\theta_n}{1 - \theta_n} \|W_n v_n - x_n\| \\
&\leq \frac{1}{1 - \theta_n} \|W_n v_n - x_n\| + \frac{2 - \theta_n}{1 - \theta_n} \|u_n - x_n\| + \|y_n - v_n\| \\
&\quad + \frac{1}{1 - \theta_n} \|z_n - y_n\| + \frac{\theta_n}{1 - \theta_n} \|v_n - W_n v_n\| \\
\frac{1 - 2\theta_n}{1 - \theta_n} \|W_n v_n - v_n\| &\leq \frac{1}{1 - \theta_n} \|W_n v_n - x_n\| + \frac{2 - \theta_n}{1 - \theta_n} \|u_n - x_n\| \\
&\quad + \|y_n - v_n\| + \frac{1}{1 - \theta_n} \|z_n - y_n\| \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{3.82}$$

elde edilir. Dolayısıyla koşul (vi) den ve $n \rightarrow \infty$ için $\|W_n v_n - x_n\| \rightarrow 0, \|u_n - x_n\| \rightarrow 0, \|y_n - v_n\| \rightarrow 0, \|z_n - y_n\| \rightarrow 0$ olduğundan $\|W_n v_n - v_n\| \rightarrow 0$ olduğu görülür.

(V) $z = P_\Psi$ için $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, x_n - z \rangle \leq 0$ olduğu gösterilsin. Bu amaçla,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, W_n v_n - z \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, W_{n_i} v_{n_i} - z \rangle \quad (3.83)$$

olacak şekilde bir alt dizi $\{v_{n_i}\} \subset \{v_n\}$ seçilecektir. $\{v_{n_i}\}$ C 'de sınırlı olduğu için, genelliği kaybetmeden $v_{n_i} \rightarrow k \in C$ olduğu varsayılabilir. $\|W_{n_i} v_{n_i} - v_{n_i}\| \rightarrow 0$ olduğundan, bu $W_{n_i} v_{n_i} \rightarrow k$ anlamına gelir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, W_n v_n - z \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, W_{n_i} v_{n_i} - z \rangle \\ &= \langle f(z) - z, k - z \rangle \end{aligned} \quad (3.84)$$

elde edilir. Şimdi $k \in \Psi$ 'nin olduğu gösterilecektir.

(a) İlk olarak $k \in EP(F)$ olduğu ispatlansın. Teorem 3.1.1 deki adımlar takip edilerek (3.58) eşitsizlik elde edilir. Öyleyse $\|u_n - x_n\| \rightarrow 0, \|W_n v_n - x_n\| \rightarrow 0, \|W_n v_n - v_n\| \rightarrow 0$ ve $v_{n_i} \rightarrow k$ olduğundan $u_{n_i} \rightarrow k$ olur. Burada Teorem 3.1.1 deki aynı işlemler yapılarak $k \in EP(F)$ olduğu sonucuna ulaşılır.

(b) Şimdi de $k \in VI(C, A)$ olduğu ispatlansın. Teorem 3.1.1 deki işlemler gerçekleştirilerek $k \in VI(C, A)$ olduğu görülür.

(c) Son olarak $k \in F(W) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n)$ olduğu kanıtlanacaktır. Bunun tersini varsayarak $k \notin F(W)$ yani $Wk \neq k$ dir. $v_{n_i} \rightarrow k$ 'den, opial koşuluna göre,

$$\begin{aligned} \liminf_{i \rightarrow \infty} \|v_{n_i} - k\| &< \lim_{i \rightarrow \infty} \|v_{n_i} - Wk\| \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \{\|v_{n_i} - W v_{n_i}\| + \|W v_{n_i} - Wk\|\} \\ &= \liminf_{i \rightarrow \infty} \{\|v_{n_i} - W v_{n_i}\| + \|v_{n_i} - k\|\} \end{aligned} \quad (3.85)$$

eşitsizliği elde edilir. (2.37) ve (3.82)'den

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \|W v_{n_i} - v_{n_i}\| &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \{\|W v_{n_i} - W_{n_i} v_{n_i}\| + \|W_{n_i} v_{n_i} - v_{n_i}\|\} \\ &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in K} \|Wx - W_{n_i} x\| \right\} + \lim_{i \rightarrow \infty} \|W_{n_i} v_{n_i} - v_{n_i}\| = 0 \end{aligned} \quad (3.86)$$

elde edilir. (3.86)'dan dolayı (3.85)'i

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \|v_{n_i} - k\| < \liminf_{i \rightarrow \infty} \|v_{n_i} - k\|$$

şeklinde elde edilir. Bu bir çelişkidir ve buradan $k \in F(W) = F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n)$ olduğu görülür. Sonuç olarak $k \in \Psi$ olduğu kanıtlanmıştır.

$z = P_{\Psi}f(z)$ olduğundan, (2.26), $\|W_n v_n - x_n\| \rightarrow 0$ ve (3.84)'ten

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, x_n - z \rangle &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, (x_n - W_n v_n + W_n v_n - z) \rangle \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, W_n v_n - z \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(z) - z, W_{n_i} v_{n_i} - z \rangle \\ &= \langle f(z) - z, k - z \rangle \leq 0 \end{aligned} \tag{3.87}$$

sonuç çıkarılır.

(VI) Son olarak $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow z$ olduğu ispatlanacaktır. Teorem 3.1.1 de S yerine W_n yazılarak aynı adımlar takip edilir. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|^2 = 0$ olduğu görülür ve Teorem 3.2.1'in ispatı tamamlanır.

3.3 Veri Bağlılığı

Teorem 3.3.1 F, A, S_i, f Teorem 3.1.1'de olduğu gibi tanımlansın. $z_2 = P_{\Psi'}f(z_2)$ olacak şekilde sabit noktaya sahip B operatörü, $z_1 = P_{\Psi}f(z_1)$ olacak şekilde sabit noktaya sahip A 'nın yaklaşım operatörü olsun. A operatörü (3.1) ile verilen yeni iterasyon yönteminden elde edilen dizi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin. B operatörü için aşağıda verilen iterasyondan elde edilen dizi $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin:

$$\begin{cases} F(e_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - e_n, e_n - c_n \rangle \geq 0, & \forall y \in C \\ c_{n+1} = \alpha_n f(d_n) + \beta_n c_n + \gamma_n SP_C(I - \lambda_n B)d_n \\ d_n = P_C(I - \lambda_n B)w_n \\ w_n = (1 - \theta_n)c_n + \theta_n P_C(I - \lambda_n B)e_n \end{cases} \tag{3.88}$$

burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\beta_n\}_{n=0}^\infty, \{\gamma_n\}_{n=0}^\infty, \{\theta_n\}_{n=0}^\infty \in [0,1]$, $\lambda_n \in [a,b]$, $0 < a \leq b < \frac{2(w-cL^2)}{L^2}$ ve $\frac{1}{2} \leq \alpha_n$ dir. Eğer $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ $z_2 = P_{\Psi'} f(z_2)$ yakınsıyorsa, o zaman

$$\|z_1 - z_2\| \leq \frac{[2(\gamma_n + \alpha_n \xi)(1 + \theta_n)\lambda_n + 2\gamma_n \lambda_n]\varepsilon}{(1 - \xi)} \quad (3.89)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: İterasyon yöntemleri (3.1) ve (3.88)'den takip edilir:

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - c_{n+1}\| &= \|\alpha_n f(y_n) + \beta_n x_n + \gamma_n SP_C(I - \lambda_n A)y_n - \alpha_n f(d_n) \\ &\quad - \beta_n c_n - \gamma_n SP_C(I - \lambda_n B)d_n\| \\ &\leq \alpha_n \|f(y_n) - f(d_n)\| + \beta_n \|x_n - c_n\| \\ &\quad + \gamma_n \|SP_C[(I - \lambda_n A)y_n - (I - \lambda_n B)d_n]\| \\ &\leq \alpha_n \xi \|y_n - d_n\| + \beta_n \|x_n - c_n\| \\ &\quad + \gamma_n \|(I - \lambda_n A)y_n - (I - \lambda_n B)d_n\| \\ &\leq \alpha_n \xi \|y_n - d_n\| + \beta_n \|x_n - c_n\| \\ &\quad + \gamma_n \|(I - \lambda_n A)y_n - (I - \lambda_n A)d_n + (I - \lambda_n A)d_n \\ &\quad - (I - \lambda_n B)d_n\| \\ &\leq \alpha_n \xi \|y_n - d_n\| + \beta_n \|x_n - c_n\| \\ &\quad + \gamma_n \|(I - \lambda_n A)y_n - (I - \lambda_n A)d_n\| \\ &\quad + \gamma_n \|(I - \lambda_n A)d_n - (I - \lambda_n B)d_n\| \\ &\leq \alpha_n \xi \|y_n - d_n\| + \beta_n \|x_n - c_n\| \\ &\quad + \gamma_n \|y_n - d_n\| + \gamma_n \lambda_n \varepsilon \\ &\leq (\gamma_n + \alpha_n \xi) \|y_n - d_n\| + \beta_n \|x_n - c_n\| + \gamma_n \lambda_n \varepsilon \end{aligned} \quad (3.90)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|y_n - d_n\| &= \|P_C(I - \lambda_n A)z_n - P_C(I - \lambda_n B)w_n\| \\ &= \|P_C(I - \lambda_n A)z_n - P_C(I - \lambda_n A)w_n + P_C(I - \lambda_n A)w_n \\ &\quad - P_C(I - \lambda_n B)w_n\| \\ &\leq \|P_C(I - \lambda_n A)z_n - P_C(I - \lambda_n A)w_n\| \\ &\quad + \|P_C(I - \lambda_n A)w_n - P_C(I - \lambda_n B)w_n\| \\ &\leq \|z_n - w_n\| + \lambda_n \varepsilon \end{aligned} \quad (3.91)$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\|z_n - w_n\| &= \|(1 - \theta_n)x_n + \theta_n P_C(I - \lambda_n A)u_n - (1 - \theta_n)c_n \\
&\quad - \theta_n P_C(I - \lambda_n B)e_n\| \\
&\leq (1 - \theta_n)\|x_n - c_n\| \\
&\quad + \theta_n\|P_C(I - \lambda_n A)u_n - P_C(I - \lambda_n B)e_n\| \\
&= (1 - \theta_n)\|x_n - c_n\| \\
&\quad + \theta_n\|P_C(I - \lambda_n A)u_n - P_C(I - \lambda_n A)e_n + P_C(I - \lambda_n A)e_n \\
&\quad - P_C(I - \lambda_n B)e_n\| \quad (3.92) \\
&\leq (1 - \theta_n)\|x_n - c_n\| \\
&\quad + \theta_n\|P_C(I - \lambda_n A)u_n - P_C(I - \lambda_n A)e_n\| \\
&\quad + \theta_n\|P_C(I - \lambda_n A)e_n - P_C(I - \lambda_n B)e_n\| \\
&\leq (1 - \theta_n)\|x_n - c_n\| + \theta_n\|u_n - e_n\| + \theta_n\lambda_n\varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. $\{T_{r_n}\}$ Lemma 2.26'daki gibi tanımlanan bir dönüşüm dizisidir. Burada $u_n = T_{r_n}x_n$ ve $e_n = T_{r_n}c_n$ olacak şekilde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\|u_n - e_n\| &= \|T_{r_n}x_n - T_{r_n}c_n\| \\
&\leq \|x_n - c_n\| \quad (3.93)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizlik (3.93)'ü (3.92)'deki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\|z_n - w_n\| &\leq (1 - \theta_n)\|x_n - c_n\| + \theta_n\|x_n - c_n\| + \theta_n\lambda_n\varepsilon \\
&= \|x_n - c_n\| + \theta_n\lambda_n\varepsilon \quad (3.94)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan (3.94) eşitsizliğini (3.91) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\|y_n - d_n\| &\leq \|x_n - c_n\| + \theta_n\lambda_n\varepsilon + \lambda_n\varepsilon \\
&= \|x_n - c_n\| + (1 + \theta_n)\varepsilon\lambda_n \quad (3.95)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.95) eşitsizliği (3.90) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - c_{n+1}\| &\leq (\gamma_n + \alpha_n\xi)\|x_n - c_n\| + (\gamma_n + \alpha_n\xi)(1 + \theta_n)\varepsilon\lambda_n \\
&\quad + \beta_n\|x_n - c_n\| + \gamma_n\lambda_n\varepsilon \\
&= (\gamma_n + \beta_n + \alpha_n\xi)\|x_n - c_n\| \quad (3.96) \\
&\quad + [(\gamma_n + \alpha_n\xi)(1 + \theta_n)\lambda_n + \gamma_n\lambda_n]\varepsilon \\
&= (1 - \alpha_n(1 - \xi))\|x_n - c_n\|
\end{aligned}$$

$$+[(\gamma_n + \alpha_n \xi)(1 + \theta_n)\lambda_n + \gamma_n \lambda_n]\varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \|x_n - c_n\| \\ \mu_n &= \alpha_n(1 - \xi) \\ \eta_n &= \frac{2[(\gamma_n + \alpha_n \xi)(1 + \theta_n)\lambda_n + \gamma_n \lambda_n]\varepsilon}{(1 - \xi)}\end{aligned}\tag{3.97}$$

şeklinde seçilirse Lemma 2.28'den

$$\begin{aligned}0 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \eta_n \\ 0 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - c_n\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{[2(\gamma_n + \alpha_n \xi)(1 + \theta_n)\lambda_n + 2\gamma_n \lambda_n]\varepsilon}{(1 - \xi)}\end{aligned}\tag{3.98}$$

sonuç olarak

$$\|z_1 - z_2\| \leq \frac{[2(\gamma_n + \alpha_n \xi)(1 + \theta_n)\lambda_n + 2\gamma_n \lambda_n]\varepsilon}{(1 - \xi)}\tag{3.99}$$

elde edilir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada viskozite yaklaşım yöntemi kullanılarak yeni iterasyon yöntemleri tanımlanmıştır. Bu iterasyon yöntemle oluşturulan dizinin denge probleminin çözüm kümesinin, relaxed (a, b) –cocoersive dönüşümü ve genişlemeyen bir dönüşüm sınıfının sabit noktaları kümesinin ve varyasyonel eşitsizliğin çözüm kümesinin ortak bir elemanını bulmak, ayrıca uygun koşullar altında söz konusu problemin çözümüne yaklaşmak için iki güçlü yakınsama teoremleri kanıtlanmıştır. Yakınsama teoremin koşulları göz önüne alınarak sayısal bir örnek ile Teorem 3.1.1. teoreminin uygulamasına yer verilmiştir. Yeni tanımlanan iterasyon yöntemini kullanarak, sabit nokta teoreminin etkili ve ilginç bir kavramı olan veri bağıllığı sonucu elde edilmiştir.

Literatürde bulunan güçlü yakınsama teoremlerini genişleten ve geliştiren yeni güçlü yakınsama teoremleri ispatlanarak literatüre katkı sağlanılmıştır. Böylece alana olan katkı genişleyerek devam etmektedir. Gelecekteki olası bir çalışmada, veri bağıllığı teoremindeki parametreler değiştirilerek, modifiye edilerek veya yeniden düzenlenerek alternatif veya daha uygun sonuçlar bulunabilir.

KAYNAKLAR

1. Muu, L. ve Oettli, W., 1992. Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 18, 12, 1159-1166.
2. Blum, E., 1994. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, *Math. Student*, 63, 123-145.
3. Takahashi, S. ve Takahashi, W., 2007. Viscosity approximation methods for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 331,1, 506-515.
4. Qin, X. Shang, M., ve Su, Y., 2008. A general iterative method for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 69,11, 3897-3909.
5. Chang, S. S., Cho, Y. J. ve Kim, J. K., 2008. Approximation methods of solutions for equilibrium problem in Hilbert spaces, *Dynamic Systems and Applications*, 17, 3-4, 503-513.
6. Ceng, L. C. ve Wong, N. C., 2009. Viscosity approximation methods for equilibrium problems and fixed point problems of nonlinear semigroups, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 13,5, 1497-1513.
7. Chang, S. S., Lee, H. J. ve Chan, C. K., 2009. A new method for solving equilibrium problem fixed point problem and variational inequality problem with application to optimization, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 70,9, 3307-3319.
8. Yao, Y., Cho, Y. J. ve Chen, R., 2009. An iterative algorithm for solving fixed point problems, variational inequality problems and mixed equilibrium problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71,7-8, 3363-3373.
9. Zhao, J. ve He, S., 2009. A new iterative method for equilibrium problems and fixed point problems of infinitely nonexpansive mappings and monotone mappings, *Applied Mathematics and Computation*, 215, 2, 670-680.
10. Iiduka, H. ve Yamada, I., 2009. A subgradient-type method for the equilibrium problem over the fixed point set and its applications, *Optimization*, 58, 2, 251-261.
11. Qin, X., Chang, S. S. ve Cho, Y. J., 2010. Iterative methods for generalized equilibrium problems and fixed point problems with applications, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11, 4, 2963-2972.
12. Katchang, P. ve Kumam, P., 2010. A new iterative algorithm of solution for equilibrium problems, variational inequalities and fixed point problems in a Hilbert space, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 32, 1, 19-38.

13. Piri, H., 2012. A general iterative method for finding common solutions of system of equilibrium problems, system of variational inequalities and fixed point problems, *Mathematical and Computer Modelling*, 55, 3-4, 1622-1638.
14. Wen, D. J. ve Chen, Y. A., 2012. General iterative methods for generalized equilibrium problems and fixed point problems of k -strict pseudo-contractions, *Fixed Point Theory and Applications*, 1-15.
15. Cho, S. Y. ve Qin, X., 2014. On the strong convergence of an iterative process for asymptotically strict pseudocontractions and equilibrium problems, *Applied Mathematics and Computation*, 235, 430-438.
16. Yu, J., Wang, N. F. ve Yang, Z., 2016. Equivalence results between Nash equilibrium theorem and some fixed point theorems, *Fixed Point Theory and Applications*, 1-10.
17. Karahan, I., 2016. Strong and weak convergence theorems for split equality generalized mixed equilibrium problem, *Fixed Point Theory and Applications*, 1-19.
18. Van Hieu, D., Reich, S. ve Kim Quy, P., 2023. Viscosity-regularization iterative methods for solving equilibrium problems in Hilbert space, *Optimization*, 1-28.
19. Ndlovu, P. V., Jolaoso, L. O., Aphane, M. ve Abass, H. A., 2024. Viscosity extragradient with modified inertial method for solving equilibrium problems and fixed point problem in Hadamard manifold, *Journal of Inequalities and Applications*, 1, 21.
20. Bayraktar, M., 2006. *Fonksiyonel Analiz*, Gazi Kitap Evi, Ankara.
21. Moore, R.E. ve Cloud, M.J., 2007. *Computational Functional Analysis*, Elsevier.
22. Somasundaram, D., 2006. *A First Course in Functional Analysis*, Alpha Science, India.
23. Özdemir, M. F., 2017. Sabit nokta ve denge problemlerinin ortak çözümleri için iteratif metotlar, *Yüksek Lisans Tezi*, Erzurum Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
24. Kreyszig, E., 1989. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons Inc, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 688.
25. Çakar Ö., 2007. *Fonksiyonel Analize Giriş 1*, Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Yayın no 13, Ankara.
26. Maddox, I.J., 1994. *Elements of functional analysis*, Cambridge University Press, Second Edition, Reprinted.
27. Berinde, V., 2007. *Iterative Approximation of Fixed Points*, Springer, Berlin.

28. Brown, A.L. ve Page, A., 1970. Elements of Functional Analysis, Van Nostrand-Reinhold.
29. Banach, S., 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fundamenta mathematicae*, 3, 1, 133-181.
30. Peng, J. W. ve Yao, J. C., 2008. A new hybrid-extragradient method for generalized mixed equilibrium problems, fixed point problems and variational inequality problems, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 12, 6, 1401-1432.
31. Ceng, L. C. ve Yao, J. C., 2008. A hybrid iterative scheme for mixed equilibrium problems and fixed point problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 214, 1, 186-201.
32. Takahashi, S. ve Takahashi, W., 2008. Strong convergence theorem for a generalized equilibrium problem and a nonexpansive mapping in a Hilbert space, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 69, 3, 1025-1033.
33. Noor, M. A., 1988. General variational inequalities, *Applied mathematics letters*, 1, 2, 119-122.
34. Stampacchia, G., 1964. Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes, *Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances De L Academie Des Sciences*, 258, 18, 4413.
35. Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and applications*, 251, 1, 217-229
36. Cai, G. ve Bu, S., 2011. Strong convergence theorems based on a new modified extragradient method for variational inequality problems and fixed point problems in Banach spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 6, 2567-2579.
37. Opial, Z., 1967. Weak convergence of these quence of successive approximations for nonexpansive mappings, *Bull. Am. Math. Soc.* 73, 591-597.
38. Iiduka, H. ve Takahashi, W., 2005. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and inverse-strongly monotone mappings, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 61, 3, 341-350.
39. Rockafellar, R. T., 1970. On the maximality of sums of nonlinear monotone operators, *Transactions of the American Mathematical Society*, 149, 1, 75-88.
40. Flâm, S. D. ve Antipin, A. S., 1996. Equilibrium programming using proximal-like algorithms, *Mathematical Programming*, 78, 1, 29-41.
41. Soltuz, S.M. ve Grosan, T., 2008. Data dependence for Ishikawa iteration when dealing with contractive-like operators, *Fixed Point Theory Applications*, 1-7.

42. Xu, H. K., 2004. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 298, 1, 279-291.
43. Shimoji, K. ve Takahashi, W., 2001. Strong convergence to common fixed points of infinite nonexpansive mappings and applications, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 5, 2, 387-404.
44. Yao, Y., Liou, Y. C. ve Yao, J. C., 2007. Convergence theorem for equilibrium problems and fixed point problems of infinite family of nonexpansive mappings, *Fixed Point Theory and Applications*, 1-12.
45. Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4, 3, 506-510.
46. Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44, 1, 147-150.
47. Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251, 1, 217-229.
48. Su, Y., Shang, M. ve Qin, X., 2008. An iterative method of solution for equilibrium and optimization problems, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 69, 8, 2709-2719.
49. Ceng, L. C. ve Yao, J. C., 2008. Hybrid viscosity approximation schemes for equilibrium problems and fixed point problems of infinitely many nonexpansive mappings, *Applied Mathematics and Computation*, 198, 2, 729-741.
50. Maldar, S., 2022. Iterative algorithms of generalized nonexpansive mappings and monotone operators with application to convex minimization problem, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 1-28.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Esra ÇETİN

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Aksaray Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik
Öğretmenliği Programı, 2011-2015

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2022-2025

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Çetin, E. ve Maldar, S., 2024. Solution of equilibrium problems with fixed point iteration method under W-mapping condition in hilbert spaces, Uluslararası Bilimsel Araştırma ve İnovasyon Kongresi -II 2024, 16-18 Aralık 2024, Adana.