

**DESTEKLENMİŞ KOMPOZİT PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR
YÖNTEMİ İLE BURKULMA ANALİZİ**

Yunus Onur YILDIZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MART 2007
ANKARA**

**DESTEKLENMİŞ KOMPOZİT PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR
YÖNTEMİ İLE BURKULMA ANALİZİ**

Yunus Onur YILDIZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MART 2007
ANKARA**

Yunus Onur YILDIZ tarafından hazırlanan "DESTEKLENMİŞ KOMPOZİT
PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE BURKULMA ANALİZİ"
adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.



Yrd. Doç. Dr. Ezgi GÜNAY
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oybirliği ile Makine Mühendisliği Anabilim
Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

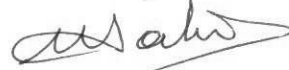
Başkan : Prof. Dr. Müfit GÜLGEÇ



Üye : Yrd. Doç. Dr. Ezgi GÜNAY



Üye : Prof. Dr. Polat SAKA



Üye : Doç. Dr. M. Hüsnü DİRİKOLU



Üye : Yrd. Doç. Dr. Selim TÜRKBAŞ



Tarih : 09 / 03 / 2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına
uygundur.



TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Yunus Onur YILDIZ

DESTEKLENMİŞ KOMPOZİT PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE BURKULMA ANALİZİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Yunus Onur YILDIZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mart 2007

ÖZET

Bu çalışmada, basit mesnetli ve eksenel basma yükü altında enine desteklenmiş izotropik ve fiber kompozit plakların, ANSYS® sonlu elemanlar yazılımı kullanılarak burkulma analizleri yapılmıştır. Kritik burkulma ve adım adım artırılan gerilmelere karşılık gelen birim deformasyon ve sehim değerleri, 100 farklı desteklenmemiş / desteklenmiş plak geometrilerinde, toplam 200 adet burkulma analizi yapılarak elde edilmiştir. Burkulma analizleri, izotropik (yumuşak çelik) ve genel ortotropik (Bor - fiber / alüminyum - matris) olmak üzere iki malzeme grubu için ayrı ayrı yapılmıştır. İzotropik ve genel ortotropik plakların kritik burkulma gerilmeleri elde edilmiş ve bu değerler desteklenmemiş plak analiz sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Bu plaklar dikdörtgen ve aynı çeşit malzemelerden yapıli takviye elemanlarınca enine desteklenmiştir. ANSYS® ile modelleme ve analiz aşamalarında, çelik plak ve takviye elemanları Shell63, Bor-Al fiber kompozit plaklar ve takviye elemanları ise Shell91 tipindeki kabuk elemanlar kullanılarak çözümler yapılmıştır. Özdeğer problem çözümleri sonucunda, farklı Φ (boy / en) oranlarındaki plakların $(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des} / \sigma_{kr,\text{çelik}}$ karşılık $1 / \Phi$ oranı ile değişimleri tablo ve grafikler aracılığıyla verilmiştir. Desteklenmemiş ve desteklenmiş genel ortotropik plaklarda 4 farklı

fiber diziliş açısı grubu için çözümler yapılmış ve burkulma gerilme dağılımları, tablo ve grafikler yardımıyla açıklanmıştır. Geometrik olarak lineer olmayan analizlerin sonuçları; $\sigma / \sigma_{kr} - \varepsilon / \varepsilon_{kr}$, $\sigma - u$ ve $\sigma - \delta_{max}$ karşılıklı değişimleri gösterilerek, farklı Φ oranına sahip plaklar için açıklanmış ayrıca özdeğer problem çözümlerinden elde edilen sonuçlarla da karşılaştırılmıştır.

Bilim Kodu : 914.1.073

Anahtar Kelimeler : plak, basma yükleme, fiber kompozit, destek eleman, plak özdeğer problemi, geometrik olarak lineer olmayan analiz, kritik burkulma gerilmesi

Sayfa Adedi : 198

Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Ezgi GÜNAY

BUCKLING ANALYSIS OF STIFFENED COMPOSITE PLATES WITH FINITE ELEMENT METHOD

(M.Sc. Thesis)

Yunus Onur YILDIZ

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

March 2007

ABSTRACT

In this study, buckling analysis of simply supported, axially loaded transversely stiffened isotropic and fiber composite plates, were performed by finite element analysis software called ANSYS®. Critical buckling and incrementally increased stresses corresponding to strain and deflection values were calculated by using 100 different stiffened / unstiffened plate geometries during 200 buckling analyses. Buckling analyses were performed for two material groups; separately isotropic (mild steel), generally orthotropic composite (Boron – fiber / aluminum - matrix). Critical buckling stresses were held on and these values were compared with the unstiffened plate analysis results by using isotropic and generally orthotropic plates. These plates were transversely stiffened by rectangular members made of from the same type of materials. Modelling and analysis steps by ANSYS® were performed by using Shell63, Shell91 meshing elements for steel, Boron-Al fiber composite plates and their stiffened elements correspondingly. At the end of eigenvalue problem solutions, the relative changes; $(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des} / \sigma_{kr,\text{çelik}}$, $1 / \Phi$ of different Φ (width / depth) ratios of plates were given with the help of tables and graphics. Stiffened and unstiffened generally orthotropic plates were analized with four different sets of fiber

orientation angles and then buckling stress distributions were explained with the help of tables and graphics. Results of geometrically nonlinear analyses were explained for plates which have different Φ ratios by showing their relative variances of $\sigma / \sigma_{kr} - \epsilon / \epsilon_{kr}$, $\sigma - u$ and $\sigma - \delta_{max}$, furthermore these results were compared with the results of eigenvalue problem solutions.

Science Code	: 914.1.073
Key Words	: plate, compressive loading, fiber composite, stiffener, plate eigenvalue problem, geometrically nonlinear analysis, critical buckling stress
Page Number	: 198
Adviser	: Asist. Prof. Dr. Ezgi GÜNAY

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardımlarıyla beni yönlendiren ve bana bilimsel çalışma disiplini veren danışman hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Ezgi GÜNAY 'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmam süresince bana çeşitli konularda yardımcı olan ve desteklerini esirgemeyen, babam Üzeyir YILDIZ'a, arkadaşlarım Orkun SUNAR ve Halil AKYOL'a teşekkür ederim.

Öğrenim hayatımda bana emeği geçen tüm hocalarıma minnettar olduğumu belirtirim.

Hayatım boyunca bana maddi ve manevi olarak en büyük desteği sağlayan saygıdeğer aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	xii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xiv
SİMGELER ve KISALTMALAR	xxvi
1. GİRİŞ	1
2. PLAKLAR VE PLAKLARDA GENEL BURKULMA DENKLEMLERİ	6
2.1. Plak ve Çeşitleri	6
2.1.1. Plak tanımı ve kullanım yerleri	6
2.1.2. Plak çeşitleri	7
2.2. Plaklarda Burkulma	8
2.2.1. Burkulmanın tanımı ve çeşitleri	8
2.2.2. Burkulma analizi	13
2.2.3. Küçük deformasyon ifadeleri	14
2.2.4. Büyük deformasyon ifadeleri	26
2.2.5. Şekil değiştirme enerji ifadeleri	30
2.3. Fiber Kompozit Plakların Burkulması	40
2.3.1. Fiber takviyeli kompozit malzemeler	40
2.3.2. Fiber kompozit plakların teorisi	41

	Sayfa
3. SAYISAL METOTLARLA BURKULMA ANALİZLERİ	49
3.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi	49
3.2. ANSYS Programı ve Çözümleme Seçenekleri	49
3.3. Statik Analiz Kısımının İncelenmesi	50
3.4. Özdeğer Probleminin Çözüm Kısımının İncelenmesi	51
3.5. Lineer Olmayan Analiz Kısımının İncelenmesi	54
3.5.1. Newton-Raphson metodu	54
3.5.2. Yay uzunluk metodu	56
4. BAZI LİTERATÜR ÇALIŞMALARININ SAYISAL İNCELEMELERİ	58
4.1. Özdeğer Problem Çözümlerinin Doğrulamaları	58
4.1.1. Desteksiz plaklar	58
4.1.2. Destek elemanlı plaklar	61
4.2. Lineer Olmayan Analizlerin Doğrulamaları	69
4.2.1. Desteksiz plaklar	70
4.2.2. Destek elemanlı plaklar	75
5. BURKULMA ANALİZLERİ YAPILACAK OLAN İNCE PLAKLARIN SINIR ŞARTLARI, GEOMETRİ VE MALZEMELERİNİN TANIMLAMALARI	92
5.1. Geometrinin Belirlenmesi	92
5.2. Malzemenin Belirlenmesi	94
5.3. Sınır Şartlarının Belirlenmesi	98
6. İNCE PLAKLARIN DESTEKLİ VE DESTEKSİZ HALLERİNİN ANSYS PROGRAMI İLE BURKULMA ANALİZLERİ	103
6.1. Özdeğer Problem Çözümlerinin Sonuçları	103

	Sayfa
6.2. Lineer Olmayan Analiz Sonuçları	117
7. SONUÇLAR	163
KAYNAKLAR	166
EKLER	169
EK - 1 Fiber kompozit plakların ve takviye elemanların rijitlik matrisleri	170
EK - 2 Özdeğer probleminin çözümleri için ANSYS® programının çalışma prensipleri	179
EK - 3 Lineer olmayan analiz için ANSYS® programının çalışma prensipleri	188
EK - 4 Lineer olmayan analiz sonuçlarından bazıları	194
ÖZGEÇMİŞ	198

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.1. $\sigma_{Analitik}$ ve σ_{ANSYS} arasındaki (%) relatif hata oranı	61
Çizelge 4.2. 300x300x1 boyutlarındaki tek destek elemanlı plağın $\sigma_{Analitik}$ ve σ_{ANSYS} arasındaki (%) relatif hata oranı	64
Çizelge 4.3. Basit mesnetli destek elemanlı plaklar için, Alinia'nın ve ANSYS® programından elde edilen sonuçlar	69
Çizelge 4.4. Basit mesnetli desteksiz kare plak için, Hu, vd.'nin ve ANSYS® programından elde edilen sonuçlar	72
Çizelge 4.5. Plağın ve destek elemanın geometrisi (cm, kgf/cm ²).....	79
Çizelge 4.6. Eksenel ve yanal yüklemelere ait ANSYS® programından elde edilen sonuçlar	81
Çizelge 4.7. Plağın ve "T" tipli destek elemanın geometrisi (cm, kgf/cm ²).....	85
Çizelge 4.8. ANSYS® programından elde edilen lineer olmayan analiz sonuçları	87
Çizelge 5.1. Plak ve destek eleman geometrisi	93
Çizelge 5.2. Kalınlığı t = 8 cm olan plakların geometrisi	94
Çizelge 5.3. Bor-Al malzemesinin mühendislik sabitleri.....	95
Çizelge 5.4. Analizi yapılan plakların sayısı	102
Çizelge 6.1. Çelik plakların özdeğer probleminin çözüm sonuçları ve aynı plaklar için Sanal'ın elde ettiği kritik kayma gerilmeleri	104
Çizelge 6.2. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al plakların özdeğer probleminin çözüm sonuçları	107
Çizelge 6.3. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al plakların özdeğer probleminin çözüm sonuçları	108
Çizelge 6.4. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al plakların özdeğer probleminin çözüm sonuçları	109

Çizelge	Sayfa
Çizelge 6.5. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al plakların özdeğer probleminin çözüm sonuçları	110
Çizelge 6.6. Bor-Al plaklarda Sanal'ın elde ettiği kritik kayma gerilmeleri ile ANSYS® programından elde ettiğimiz kritik basma gerilmeleri	111
Çizelge 6.7. Plak boyutlarına göre desteksiz plakların mod değerleri	124

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Takviye eleman tipleri	6
Şekil 2.2. Membran geometrisi ve taşıdığı yükler.....	7
Şekil 2.3. İnce plak geometrisi	7
Şekil 2.4. Kalın plak geometrisi	8
Şekil 2.5. Kararlı ve kararsız sistem	8
Şekil 2.6. Burkulmaya ilişkin özdeğer probleminin çözümünün ve lineer olmayan analizlerin davranış grafiğini	9
Şekil 2.7. Rijitliği sabit olan sistemlerin F - u eğrisi	10
Şekil 2.8. Rijitliği değişken olan sistemlerin F - u eğrisi	10
Şekil 2.9. Rijitliği uygulanan kuvvetle artan balık oltası	11
Şekil 2.10. Tek destek elemanlı plağın bölgesel burkulma modu	12
Şekil 2.11. Tek destek elemanlı plağın genel burkulma modu	13
Şekil 2.12. Plak denklemlerinin ayrım cetveli	13
Şekil 2.13. Sabit kalınlıktaki bir plak eleman	14
Şekil 2.14. Plağın bir parçasının eğilmeden önceki ve sonraki durumu	15
Şekil 2.15. Bir plak elemanında eğilme momentleri, burulma momentleri ve kesme kuvvetleri	16
Şekil 2.16. Bir plak elemanında eksenel kuvvetler ve merkezi kayma kuvvetleri	18
Şekil 2.17. Eğilme ve burulma momentlerine ilişkin normal ve kayma gerilmeleri	21
Şekil 2.18. İki yönde basma kuvvetine maruz kalan plağın geometrisi	23
Şekil 2.19. Burkulma katsayısının, ϕ oranına bağlı değişimi	25

Şekil	Sayfa
Şekil 2.20. Plak diferansiyel elemanı	27
Şekil 2.21. Kayma açıları	28
Şekil 2.22. Hooke eğrisi	30
Şekil 2.23. Destek elemanlı plak geometrisi	37
Şekil 2.24. Burkulma katsayısının eğilme rijitliğine göre değişimi	38
Şekil 2.25. Bölgesel burkulmada deformasyon ifadelerinin geçiş şartı	39
Şekil 2.26. Fiber takviyeli lamina	41
Şekil 2.27. x-z düzlemindeki deformasyon geometrisi	43
Şekil 2.28. Düzgün laminada düzlem-içi kuvvetler	46
Şekil 2.29. Düzgün laminaya etkiyen momentler	46
Şekil 2.30. N katlı lamina geometrisi	47
Şekil 3.1. Burkulma analizlerinin ANSYS® programı ile çözümleme basamakları	50
Şekil 3.2. Statik analiz seçenekleri	51
Şekil 3.3. Özdeğer burkulma seçenekler sekmesi	52
Şekil 3.4. Alt bölge iterasyon seçenekler sekmesi	53
Şekil 3.5. Mod genişletme sekmesi	53
Şekil 3.6. Temel çözümleme seçenekleri	55
Şekil 3.7. Newton-Raphson lineer olmayan analiz tipleri	56
Şekil 3.8. İleri düzey lineer olmayan çözümleme seçenekleri	57
Şekil 4.1. Düz plakların burkulma modlarının grafiksel resmi	59
Şekil 4.2. Düz plak geometrisi	60
Şekil 4.3. Destek eleman yüksekliğine bağlı genel kritik burkulma gerilmesinin değişimi	64

Şekil	Sayfa
Şekil 4.4. 300x300x2 boyutlarındaki ve sabit 0,5 cm kalınlıktaki destek elemanlı plağın takviye eleman yüksekliğine bağlı kritik burkulma modlarının değişimleri	66
Şekil 4.5. Eğilme ve burulma rijitliğine bağlı mod şekilleri	67
Şekil 4.6. Takviye eleman tipleri	68
Şekil 4.7. Desteksiz izotropik plağın relatif gerilmesinin, relatif gerinmeye göre değişim grafiği	71
Şekil 4.8. Desteksiz izotropik plağın relatif gerilmesinin, δ_o / t oranına göre değişim grafiği	71
Şekil 4.9. Plağın relatif gerilmesinin, δ_o / t oranına göre değişim grafiği	74
Şekil 4.10. Plağın relatif gerilmesinin, relatif gerinmeye göre değişim grafiği	75
Şekil 4.11. Analizi yapılan destek elemanlı plağın genel görünümü	76
Şekil 4.12. ABAQUS® ve ANSYS® için yanal yüklemeye maruz kalan plağın sınır şartları	77
Şekil 4.13. ABAQUS® ve ANSYS® için eksenel yüklemeye maruz kalan plağın sınır şartları	77
Şekil 4.14. Eksenel yükleme altında Byklum'un bölgesel burkulma durumu için elde ettiği lineer olmayan analiz sonuçları	79
Şekil 4.15. Yanal yükleme altında Byklum'un bölgesel burkulma durumu için elde ettiği lineer olmayan analiz sonuçları	80
Şekil 4.16. Eksenel yüklemeye ait relatif gerilmenin, relatif gerinmeye oranının lineer olmayan çözüm sonuçları	83
Şekil 4.17. Yanal yüklemeye ait relatif gerilmenin, relatif gerinmeye oranının lineer olmayan çözüm sonuçları	84
Şekil 4.18. Eksenel yükleme altında Byklum'un genel burkulma durumu için elde ettiği lineer olmayan analiz sonuçları	86
Şekil 4.19. Yanal yükleme altında Byklum'un genel burkulma durumu için elde ettiği lineer olmayan analiz sonuçları	86

Şekil	Sayfa
Şekil 4.20. Eksenel yüklemeye ait relatif gerilmenin, relatif gerinmeye oranının lineer olmayan çözüm sonuçları	88
Şekil 4.21. Yanal yüklemeye ait relatif gerilmenin, relatif gerinmeye oranının lineer olmayan çözüm sonuçları	90
Şekil 5.1. Takviye elemanlarının plak üzerindeki yerleşimi	92
Şekil 5.2. Shell63 kabuk elemanı	95
Şekil 5.3. K1 fiber diziliş konfigürasyonu	96
Şekil 5.4. K2 fiber diziliş konfigürasyonu	96
Şekil 5.5. K3 fiber diziliş konfigürasyonu	96
Şekil 5.6. K4 fiber diziliş konfigürasyonu	97
Şekil 5.7. Shell91 kabuk elemanı	97
Şekil 5.8. Basma yüklerinin düğüm noktalarına dağılımı	98
Şekil 5.9. Düzgün yayılı yükün düğüm noktalarına dağılımı	99
Şekil 5.10. Basit mesnet sınır şartı uygulaması	100
Şekil 5.11. Birbirine bağlanan düğüm noktaları	101
Şekil 6.1. Relatif gerilme artışının, $1/\phi$ 'ye göre değişim grafiği	106
Şekil 6.2. Tek takviye elemanlı fiber kompozit plakların relatif gerilme artışının, $1/\phi$ 'ye göre değişim grafiği	112
Şekil 6.3. İki takviye elemanlı fiber kompozit plakların relatif gerilme artışının, $1/\phi$ 'ye göre değişim grafiği	112
Şekil 6.4. Üç takviye elemanlı fiber kompozit plakların relatif gerilme artışının, $1/\phi$ 'ye göre değişim grafiği	113
Şekil 6.5. Fiber kompozit plakların relatif gerilme artışının, $1/\phi$ 'ye göre değişim grafiği	114
Şekil 6.6. Kompozit plakların çelik plaklara göre relatif gerilme değerinin, $1/\phi$ 'ye göre değişim grafiği	116

Şekil	Sayfa
Şekil 6.7. 200x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	118
Şekil 6.8. 200x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	118
Şekil 6.9. 200x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	119
Şekil 6.10. 250x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	119
Şekil 6.11. 250x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	120
Şekil 6.12. 250x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	120
Şekil 6.13. 332x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	121
Şekil 6.14. 332x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	121
Şekil 6.15. 332x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	122
Şekil 6.16. 500x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	122
Şekil 6.17. 500x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	123

Şekil	Sayfa
Şekil 6.18. 500x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	123
Şekil 6.19. 500x200x2-1R boyutlarındaki çelik plağa ait lineer olmayan çözümlemesi a) $\sigma - u$ değişim grafiği b) kararlı ve kararsız durumlardan geçişin 55 ara adım ile detaylı gösterimi	126
Şekil 6.20. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	127
Şekil 6.21. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	128
Şekil 6.22. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	128
Şekil 6.23. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	129
Şekil 6.24. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	129
Şekil 6.25. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	130
Şekil 6.26. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	130
Şekil 6.27. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	131

Şekil	Sayfa
Şekil 6.28. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	131
Şekil 6.29. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	132
Şekil 6.30. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	132
Şekil 6.31. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	133
Şekil 6.32. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	133
Şekil 6.33. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	134
Şekil 6.34. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	134
Şekil 6.35. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	135
Şekil 6.36. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	135
Şekil 6.37. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	136
Şekil 6.38. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	136

Şekil	Sayfa
Şekil 6.39. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	137
Şekil 6.40. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	137
Şekil 6.41. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	138
Şekil 6.42. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	138
Şekil 6.43. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	139
Şekil 6.44. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	139
Şekil 6.45. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	140
Şekil 6.46. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	140
Şekil 6.47. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	141
Şekil 6.48. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	141

Şekil	Sayfa
Şekil 6.49. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	142
Şekil 6.50. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	142
Şekil 6.51. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	143
Şekil 6.52. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	143
Şekil 6.53. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	144
Şekil 6.54. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	144
Şekil 6.55. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	145
Şekil 6.56. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	145
Şekil 6.57. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	146
Şekil 6.58. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	146
Şekil 6.59. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	147

Şekil	Sayfa
Şekil 6.60. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	147
Şekil 6.61. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	148
Şekil 6.62. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	148
Şekil 6.63. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	149
Şekil 6.64. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	149
Şekil 6.65. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	150
Şekil 6.66. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	150
Şekil 6.67. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	151
Şekil 6.68. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren noktanın yer değişimine göre ayrıntılı grafiği	154
Şekil 6.69. 200x200x8 boyutlarındaki çelik plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	155
Şekil 6.70. 200x200x8 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	155

Şekil	Sayfa
Şekil 6.71. 200x200x8 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	156
Şekil 6.72. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	156
Şekil 6.73. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	157
Şekil 6.74. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	157
Şekil 6.75. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	158
Şekil 6.76. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	158
Şekil 6.77. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	159
Şekil 6.78. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	159
Şekil 6.79. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	160
Şekil 6.80. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	160
Şekil 6.81. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri	161

Şekil	Sayfa
Şekil 6.82. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri	161
Şekil 6.83. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri	162

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
a, b, t	Plakların boyutları (boy, en, kalınlık)
D	Plâğın eğilme rijitliği [$D = Et^3 / 12(1 - \nu^2)$]
$[D]$	Elastisite matrisi
d	Takviye elemanlar arası uzaklık
E	Elastisite modülü
$\{F\}$	Yük vektörü
G	Kayma modülü
h, t_s	Takviye elemanın boyutları (yükseklik, kalınlık)
I_x, I_y	Kesit atalet momentleri
J	Polar atalet momenti
$[K_B], [K]$	Rijitlik matrisi
$[K_G], [M]$	Gerilme (stabilite katsayı) matrisi
$[K^T]$	Tanjant rijitlik matrisi
M_x, M_y, M_{xy}	Moment ifadeleri
m, n	x ve y eksenini boyunca oluşan yarım sinüzoidal dalga sayısı
N	Destek elemanlar arasındaki boşluk sayısı
N_x, N_y, N_{xy}	Bir birim uzaklık için yükleme değeri
Q_x, Q_y	Kesme kuvvet ifadeleri
T_p	Plâğın kenarlarına yapılan yüklemenin potansiyel enerjisi

Simgeler**Açıklamalar**

U_p	Plağın şekil değiştirme enerjisi
U_d	Takviye elemanın şekil değiştirme enerjisi
u	Basma yükü altında plak boyunda meydana gelen kısalma
v	Takviye elemanın deformasyon ifadesi
w	z - yönünde oluşan sehim değeri
x, y, z	Kartezyen koordinat sisteminin eksenleri
α	Nümerik faktör
$\delta, \delta_{\max}$	Kronecker delta, yer değiştirme, maksimum yer değiştirme
$[\delta]$	Düğüm noktalarının yer değiştirme vektörü
ϵ, ϵ_{kr}	Birim deformasyon, kritik birim deformasyon
ϵ_f	Kabul edilen kırılmanın olduğu birim deformasyon değeri
κ	Eğrilik yarıçapı
η	Takviye eleman sayısı
ν	Poisson oranı
Π	Toplam potansiyel enerji
σ, σ_{kr}	Gerilme, kritik burkulma gerilmesi
σ_f	Kabul edilen kırılmanın olduğu gerilme değeri
τ_{xy}	x - y düzleminde kayma gerilmesi
Φ	Gerilme fonksiyonu (Airy's stres function)
ϕ	Plak boyunun enine oranı [$\phi = a / b$]
$\{\phi_i\}$	Özvektör
λ	Özdeğer

Kısaltmalar**Açıklamalar****B.M.**

Basit mesnet

S.S.Ş.

Simetri sınır şartı

0R, 1R, 2R, 3RDesteksiz plak ve bir, iki, üç dikdörtgen kesitli
takviye elemanınca desteklenmiş plak

1. GİRİŞ

Plak elemanları başta uçak sanayi olmak üzere gemi, inşaat gibi pek çok sektörlerde yapı malzemesi olarak kullanılmaktadır. Fakat bu yapılar burkulmaya çok elverişli olduğundan kullanılmadan önce iyi etüt edilmelidir. Bu özelliğinden dolayı; plakları takviye elemanları ile desteklemek ve malzeme türlerini değiştirerek kullanmak gerekir. Tez çalışmasının amacı ise; izotropik ve kompozit plakların takviye elemanları ile desteklenmiş ve desteklenmemiş hallerinin eksenel yayılı yük karşısındaki tepkilerini araştırmaktır. Ayrıca burkulma analizi dikkate alınarak analitik formülasyonlarını oluşturmak, ANSYS® çözümlerini bulmak ve çalışmalardan çıkan sonuçları da karşılaştırılmalı olarak incelemektir.

Çalışmamıza esas olacak bilgileri edinmek için önce literatür taraması yapılmıştır. Bu tarama sonucunda konumuzun temelini oluşturacak plağın elastik yüzeyinin diferansiyel denklemi ve plak elemanına ait enerji denklemlerine ulaşılmıştır. Bu denklemlerden yararlanarak burkulmanın tanımı ve analitik formülasyonları elde edilişi gözden geçirilmiştir.

ANSYS® programı sonlu elemanlar yöntemini kullanan bir bilgisayar yazılımı olup, elde edilen analitik formülasyonları karşılaştırmak maksadıyla; program ve kullanımı hakkında bilgi edinilmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi yaklaşık çözüm metodu olduğundan, yaptığımız çalışmaların doğruluğunu tespit etmek için; bu konuda daha önceden yapılmış olan çalışmalar incelenmiş ve elde ettiğimiz sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Yukarıda anlatılan esaslar altında *Desteklenmiş Kompozit Plakların Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Burkulma Analizi* yapılmış ve çıkan sonuçlar değerlendirilerek optimum tasarım kuralları için gerekli parametrik değerler belirlenmeye çalışılmıştır.

Literatür Taraması

Burkulma konusu hakkındaki ilk orijinal plak diferansiyel denklemi, Lagrange (1811) ve Navier (1823) tarafından bulunmuştur. Bulunan orijinal plak diferansiyel denklemine, plak kenarlarından yapılan yükleme ifadelerini Saint Venant (1883) eklemiştir.

Elastik plak yüzeyinin şekil değiştirme enerjisi üzerine Rayleigh (1877) çalışmış, Bryan (1891) ise enerji denklemini ilk çıkaran olmuştur [1].

Timoshenko (1907) ve (1913) elastik plak yüzeyinin şekil değiştirme enerjisinde ve genel plak diferansiyel denklemlerinde çift Fourier serisini kullanarak ilk kritik burkulma gerilme ifadesini elde etmişlerdir [2].

Destek elemanlı plakların kritik burkulma katsayısına olan etkisini Cox ve Riddell (1949) tespit etmiş, bunlar hakkındaki ilk yaklaşık çözümü ise Seide (1953) gerçekleştirmiştir [3-4].

Plakların burkulmasının, sonlu elemanlar yöntemiyle analizine Kapur ve Hartz (1966) ile Zienkiewicz'in (1967) çalışmalarında rastlanmaktadır. Bathe (1996), ANSYS® sonlu elemanlar programının da burkulma analizi sırasında kullandığı; alt bölge iterasyon metodunu geliştirmiş ve bu çözüm yöntemine ismini vermiştir [5-7].

Günümüzde plakların kritik burkulma gerilmelerini yükseltmeyi amaçlayan çalışmalara sık rastlanmaktadır. Bu amaç doğrultusunda son zamanlarda yapılan çalışmalara bakarsak;

Alinia (2004), eksenel yüklemeli ve izotropik malzemeli destek elemanlı plakların burkulma davranışlarını incelemiştir. Ayrıca uygun destek elemanını ve geometrisini belirlemeye çalışmıştır [8].

Alinia (2005), izotropik malzemeli destek elemanlı plakların kayma gerilmesi altındaki burkulma davranışlarını da incelemiştir [9].

Mallela ve Upadhyay (2006) ortotropik malzemeli destek elemanlı plakların burkulmasını ANSYS® sonlu elemanlar programı ile incelemiş, 450 adet model ile farklı plak ve destek eleman kombinasyonu yaparak, uygun olan modeli aramıştır [10].

Sanal (2006) ANSYS® sonlu elemanlar programı kullanarak basit mesnetli ve kayma yüklemesi altındaki enine desteklenmiş izotropik ve ortotropik dikdörtgen ince plakların, kritik burkulma gerilmesini elde etmek için özdeğer problem çözümlerini yapmıştır. İzotropik ve ortotropik plaklar, dikdörtgen ve aynı çeşit malzemelerden yapıli takviye elemanlarınca enine desteklenerek kritik burkulma gerilmeleri elde edilmiş ve bu değerler desteklenmemiş plak analiz sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır [11].

Yıldız ve Günay (2006) izotropik ve fiber takviyeli kompozit plakların takviye elemanlarla desteklenmiş hallerinin, ANSYS® sonlu elemanlar programı ile özdeğer problem çözümlerini yapmışlardır. Böylece, takviye elemanlarının kritik burkulma gerilmesi üzerindeki etkilerini araştırmışlardır [12].

Bunların dışında, Paik ve Kim (2002) ile Paik ve Thayamballi (2003) çalışmalarında destek elemanlı plakların burkulma modlarını isimlendirerek kategorilere ayırmıştır [13-14].

Satish Kumar ve Mukhopadhyay (1999) ile Guo, Harik ve Ren (2002), ortotropik destek elemanlı plakların burkulmasında kullanılacak yeni eleman tiplerini geliştirmişlerdir [15-16].

Plaklardaki burkulmanın lineer olmayan analizlerine bakıldığında ise; ilk teoriyi ortaya koyan von Kàrmàn (1910) karşımıza çıkar [17]. von Kàrmàn

plak orta düzleminde meydana gelen değişimleri de hesaba katmış ve burkulma problemlerini başka bir boyuta taşımıştır.

Hu vd. (1946) desteksiz plakların, lineer olmayan çözümleri için analitik bir formülasyon geliştirmişlerdir. Kare plak için yapılan analizlerde plak boyutundan bağımsız kenar yüklemesinin, plak boyunda meydana gelen kısılmaya ilişkin grafiklerini elde etmişlerdir [18].

Byklum (2002) araştırmasında yarı analitik ve ABAQUS® sonlu elemanlar programı ile çelik destek elemanlı plakların bölgesel burkulması üzerine çalışmıştır [19]. Ayrıca, Byklum (2004) diğer bir araştırmasında ise; alüminyum destek elemanlı plakların genel burkulması üzerine çalışmalar yapmıştır [20].

Daha önceden Sanal'ın yaptığı kayma ve bu tez çalışmasındaki basma yüklemelerinin destek eleman sayısına bağlı kritik burkulma gerilmesine olan etkileri karşılaştırmalı olarak hem izotropik hem de genel ortotropik plaklar için araştırılmıştır. Ayrıca, Byklum'un çalışmalarına ek olarak takviye elemanın kesiti değiştirilmiş ve elde edilen değerlerle de bu konudaki son çalışmaların irdellemeleri yapılmıştır. Bu arada, geometrik olarak lineer olmayan analizlerde karşımıza çıkan kritik mod şekilleri de detaylı olarak grafiklerle incelenmiştir.

Sonuç olarak bu tez çalışmasında bütün sayısal çözümler ANSYS® v10 programında makrolar yazılmak suretiyle kullanılmıştır. Her bir plak geometrisi ve malzemesi için ayrı ayrı makro yazılmasıyla 400'den fazla analiz yapılarak 250 civarında elde edilen sonuç değerleri tablo ve grafikler haline getirilerek yorumlanmıştır.

Yapılan analiz grupları aşağıda verilmiştir.

- Özdeğer problem çözümleri
 - I. Timoshenko analitik çözümleri
 - II. Seide analitik çözümleri
 - III. Alinia ANSYS® çözümleri
 - IV. Bu tez çalışmasındaki ANSYS® çözümleri (t/a oranı 0,010 , 0,008, 0,006, 0,004 olan plaklar)
 - a. Desteksiz çelik plaklar
 - b. Destekli çelik plaklar (1R, 2R ve 3R)
 - c. Desteksiz Bor-Al fiber kompozit plaklar
 - d. Destekli Bor-Al fiber kompozit plaklar (1R, 2R ve 3R)
- Lineer olmayan analizler
 - I. Hu vd. analitik çözümleri
 - II. Byklum ABAQUS® SEY çözümleri
 - III. Bu tez çalışmasındaki ANSYS® çözümleri (t/a oranı 0,040 , 0,010 , 0,008, 0,006, 0,004 olan plaklar)
 - a. Desteksiz çelik plaklar
 - b. Destekli çelik plaklar (1R, 2R ve 3R)
 - c. Desteksiz Bor-Al fiber kompozit plaklar
 - d. Destekli Bor-Al fiber kompozit plaklar (1R, 2R ve 3R)

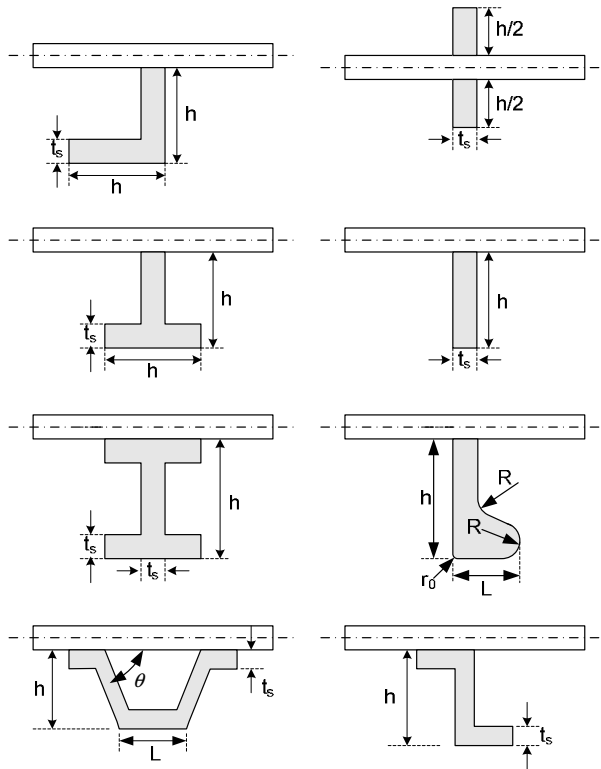
2. PLAKLAR VE PLAKLARDA GENEL BURKULMA DENKLEMLERİ

Bu bölümde, plak ve çeşitleri hakkında bilgi verilecektir. Ayrıca plaklarda burkulma ve burkulma denklemlerinin çıkarımı yapılacaktır.

2.1. Plak ve Çeşitleri

2.1.1. Plak tanımı ve kullanım yerleri

Plak, bir boyutu diğer iki boyutuna göre çok küçük olan yapı elemanlarıdır. Bu yapı elemanlarına mühendislik uygulamalarında sıkça rastlanılmaktadır. mimari yapılarda, köprülerde, uçaklarda ve gemilerde kullanılmaktadır. Yapının dayanıklılığını artırmak amacıyla destek elemanlı plaklar kullanılır. Destek elemanlı plaklar; plak üzerine takviye elemanları sonradan eklenerek üretilbileceği gibi, yekpare olarak da üretilmektedir. Literatürden elde ettiğimiz takviye eleman tiplerinden bazıları Şekil 2.1'de görülmektedir.

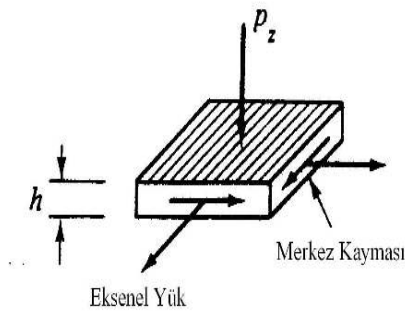


Şekil 2.1. Takviye eleman tipleri

2.1.2. Plak çeşitleri

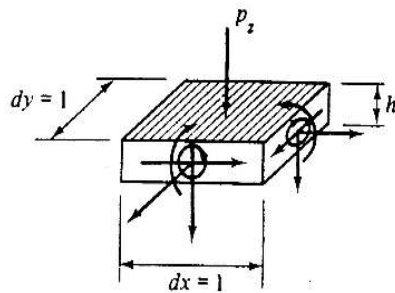
Plaklar genel olarak membran, ince ve kalın olmak üzere üç grupta incelenmektedir.

Membranlar : Eğilme rijitliğine sahip olmadan yanal yükleri aksenal ve merkez kayma yükleri ile taşıyabilen ince plaklardır. Membran geometrisi ve taşıdığı yükler Şekil 2.2'de gösterilmiştir.



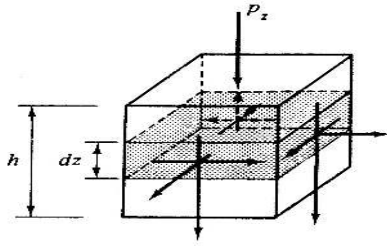
Şekil 2.2. Membran geometrisi ve taşıdığı yükler [21]

İnce Plaklar : Bu plaklar, dış yüklemeleri; eğilme ve burulma momentleri ile kesme, merkezi kayma ve aksenal kuvvetler ile taşıyan ince plaklardır. İnce plağa ait gösterim Şekil 2.3'de verilmiştir.



Şekil 2.3. İnce plak geometrisi [21]

Kalın Plaklar : Bu plaklarda isminden de anlaşılacağı gibi kalınlıkları diğer ölçüleri yanında ihmal edilemeyecek olan plaklardır. İç gerilme durumu üç boyutlu davranış gösterir. Kalın plak gösterimi Şekil 2.4'te verilmiştir.

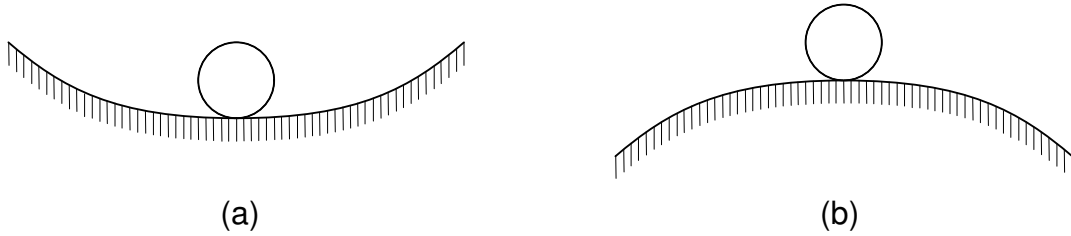


Şekil 2.4. Kalın plak geometrisi [21]

2.2. Plaklarda Burkulma

2.2.1. Burkulmanın tanımı ve çeşitleri

Burkulmanın tanımından önce, kararlı ve kararsız sistem konusunu incelemekte fayda vardır. Bir sistemin kararlı hali, sistem cevabının bilinen sabit bir değer vermesi şeklinde açıklanabilir. Bu duruma Şekil 2.5.a'da gösterilen bilyanın hareketi örnek verilebilir. Şekil 2.5.b'de kararsız sisteme bir örnek olup, sistemin nasıl davranacağı belirsizdir.



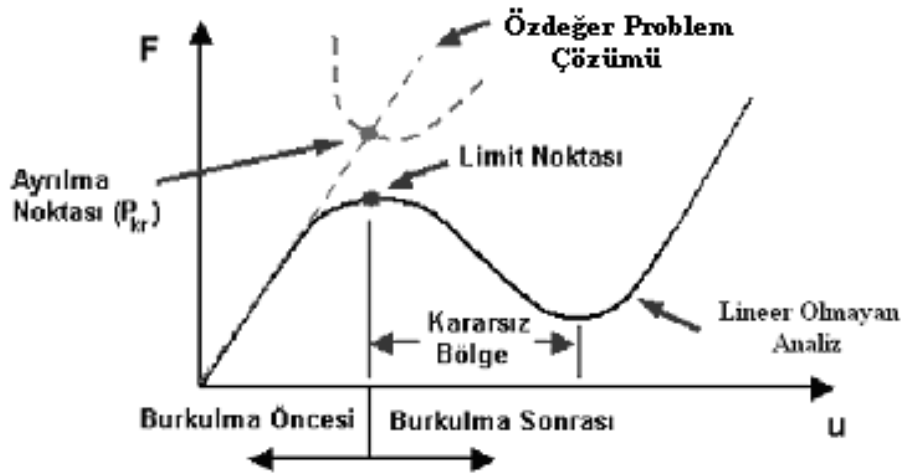
Şekil 2.5. a) Kararlı ve b) kararsız sistem

Yüklemeye maruz pek çok elemanın deformasyon karakteristiklerinde değişiklik meydana gelir. Bunun bir sonucu olarak da deformasyon modunun kararsız hale geçip, sistemin başka bir kararlı durumu aramasıyla sonuçlanan bu olaya *burkulma* denir.

Şekil 2.6'daki burkulmaya ilişkin özdeğer problem çözümünün ve lineer olmayan analizlerin davranış grafiğini inceleyelim. Grafikte özdeğer problem

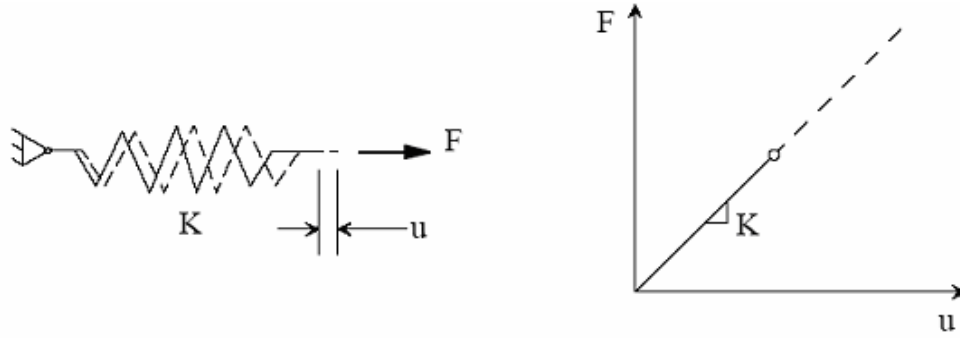
çözümünden elde edilen kritik yükleme değeri, ayrılma noktasını (bifurcation point) verir. Yani bu noktadan sonra, sistem kararsız duruma geçer ve sistemin nasıl davranacağı bilinemez.

Sistemin burkulma öncesi (pre-buckling) ve sonrasının (postbuckling) incelenmesi isteniyorsa; sistemin lineer olmayan analizinin yapılması gerekmektedir. Özdeğer probleminin çözümlerinde ayrılma noktasına doğru geldikçe, bu metodun verdiği sonuçlar yetersiz kalmaktadır. Çünkü; Özdeğer probleminin çözümleri, sistemin mükemmel (perfect) olduğu durum için yapılmaktadır. Oysa ki; yapılar mükemmel olmayan (imperfect) davranış içindedirler.



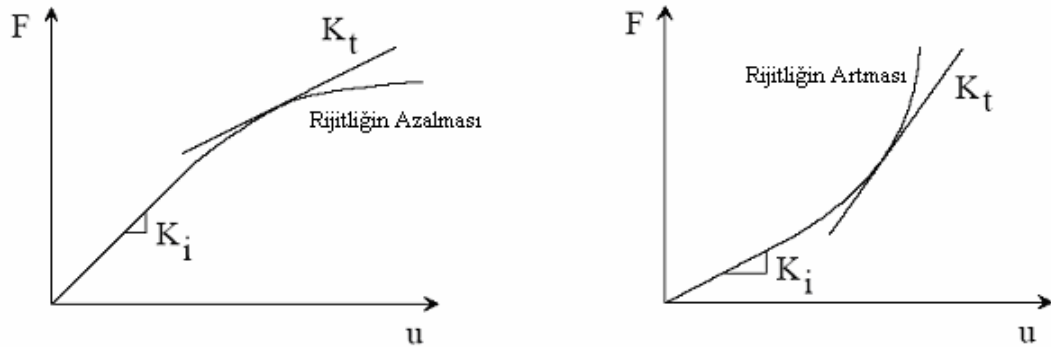
Şekil 2.6. Burkulmaya ilişkin özdeğer probleminin çözümünün ve lineer olmayan analizlerin davranış grafiğini [22]

Mükemmel ve mükemmel olmayan yapıları açıklamak için öncelikle lineer olmayan geometri (geometric nonlinearity) terimini açıklamak gerekir. Bunu açıklamanın en güzel yolu ise; sonlu elemanların da basit eşitliği olan $\{F\} = [K] \cdot \{u\}$ 'dur, burada; $[K]$ rijitliği, $\{u\}$ yerdeğişim vektörünü ve $\{F\}$ uygulanan kuvvet vektörünü gösterir. Bu basit bir yay eşitliğidir ve küçük deformasyon teorisini (small deflection theory) açıklamaktadır (Bkz. Şekil 2.7).



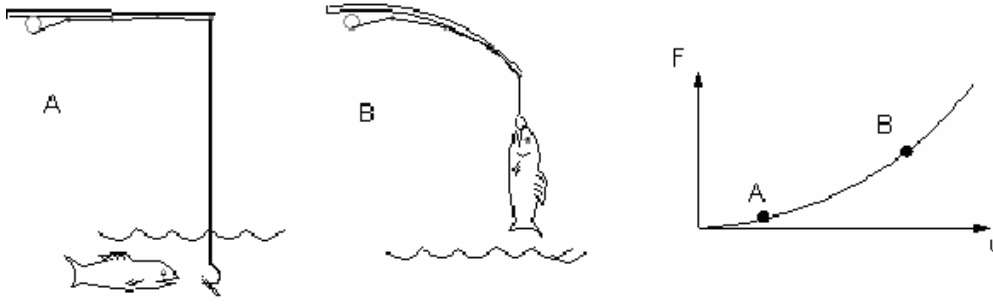
Şekil 2.7. Rijitliği sabit olan sistemlerin F - u eğrisi [23]

Bu teoriye uygun hareket eden yapılara, mükemmel yapılar denir. Mükemmel olmayan yapılarda ise; sistemin rijitliği $[K]$ sabit değildir. Çünkü yapı, kuvvet ile birlikte geometrisi değişir ve doğal olarak rijitlik de değişir (Bkz. Şekil 2.8).



Şekil 2.8. Rijitliği değişken olan sistemlerin F - u eğrisi [23]

Rijitlik, kuvvet artmasıyla birlikte artabilir ya da azalabilir. Rijitliğin azalmasına burkulan yapılar örnek verilebilir. Burada; burkulma noktasına yaklaştıkça artan kuvvetle birlikte yapıda daha fazla deformasyon olacaktır. Burkulma yükünden sonra çok küçük kuvvet artışlarında bile yapının çok büyük deformasyon verdiği görülür, bu da yapının rijitliğinin azaldığını gösterir.



Şekil 2.9. Rijitliği uygulanan kuvvetle artan balık oltası [23]

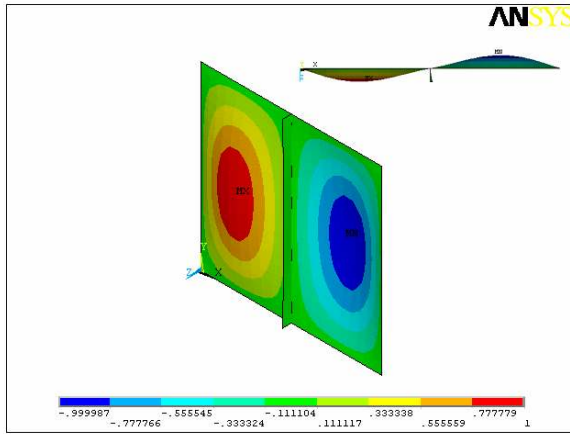
Rijitliğin giderek artmasına ise; Şekil 2.9'daki uzun balık oltası örnek verilebilir. Burada; küçük deformasyonlarla birlikte uygulanan kuvvetin arttığı gözlemlenir. Çünkü uygulanan kuvvetle birlikte kuvvetin yönü de değişir ve yönü değişen kuvvetin oluşturduğu eğilme momenti azalır, bu da yapının rijitliğinin arttığını gösterir. Bu şekilde rijitliği, uygulanan kuvvete bağlı olarak değişen yapılara mükemmel olmayan yapılar denir.

Mükemmel plak (perfect plate), daha sonra geniş bir şekilde anlatılacak olan küçük deformasyon teorisinde (small displacement theory) ele alınacaktır. Burada diferansiyel plak elemanının orta düzleminde, yüklemeye bağlı deformasyon olmadığı kabul edilerek analiz yapılır. Mükemmel olmayan plaklarda (imperfect plate) ise; büyük deformasyon teorisinde (large displacement theory) incelenmiş olup, plak diferansiyel elemanın orta düzleminde meydana gelen şekil değişimi hesaba katılır.

Plaklarda rastlanılan burkulma mod(şekillerini; bölgesel burkulma (local buckling) ve genel burkulma (global buckling) olmak üzere iki başlık altında toplayabiliriz.

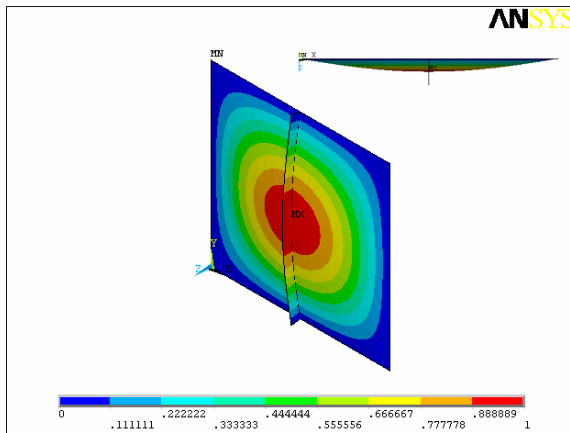
Kritik burkulma mod şeklinin, hangi çeşitte olacağı sınır şartları, plak ve destek elemanın eğilme ve burulma rijitliği ile destek elemanın sayısına bağlıdır. Bu kadar değişik parametreye bağlı olan bu durumda, aşağıda belirtilen her iki burkulma çeşidini içeren geçiş burkulma tiplerine de rastlanılmaktadır.

Bölgesel Burkulma: Destek elemanının eğilme rijitliği, plağın eğilme rijitliğinden büyük olması ve destek elemanın burulma rijitliğinin küçük olması durumunda burkulma plak üzerinde gözükmemektedir. Destek elemanı sadece plağa uygun olarak dönme yapar ve enerji absorbe eder. Şekil 2.10'da bir destek elemanlı plağın bölgesel burkulma durumu gösterilmiştir.



Şekil 2.10. Tek destek elemanlı plağın bölgesel burkulma modu

Genel Burkulma: Plak ve destek elemanın bir bütün olarak burkulduğu ve destek elemanın eğilme rijitliğinin, plağın eğilme rijitliğine göre çok küçük olduğu durumlarda gözlenen bir olaydır. Şekil 2.11'de bir destek elemanlı plağın genel burkulma hali gözükmemektedir.

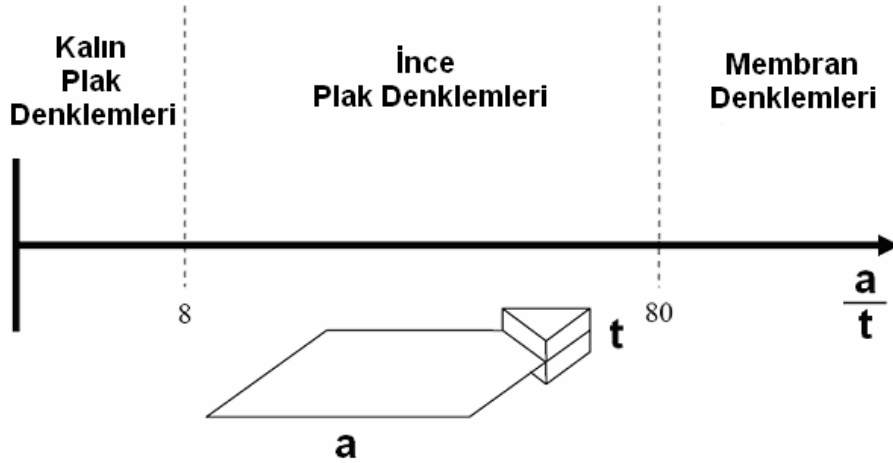


Şekil 2.11. Tek destek elemanlı plağın genel burkulma modu

2.2.2. Burkulma analizi

Burkulma analizi; sistemin kararlı halinden, kararsız haline geçtiği yükleme değeri “kritik değer” ile tanımlanarak bu değerin hesaplanmasını içermektedir.

Analizi yapılacak probleme uygun plak denklemlerini, plak boyunun kalınlığına olan oranı belirlemektedir. Buna göre oluşturulan ayırım cetveli Şekil 2.12’de görülmektedir.

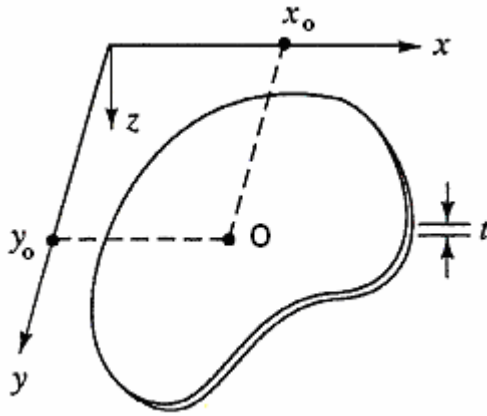


Şekil 2.12. Plak denklemlerinin ayırım cetveli [24]

Çalışmamızda plak geometrisine de uygun olan ince plak denklemleri incelenmiş ve buna uygun kritik burkulma yükleri araştırılmıştır. İnce plak denklemleri iki başlık altında incelenmektedir. Bunlar, “Plakların Küçük Deformasyon İfadeleri” ve “Plakların Büyük Deformasyon İfadeleri”dir. Bu iki ifadeyi birbirinden ayıran temel özellik, deformasyon denklemlerinin farklılığıdır. Deformasyon denklemlerinin farklılığı, birinde plak orta düzlemi şekil değiştirirken, diğesinde ise; değiştirmemesidir.

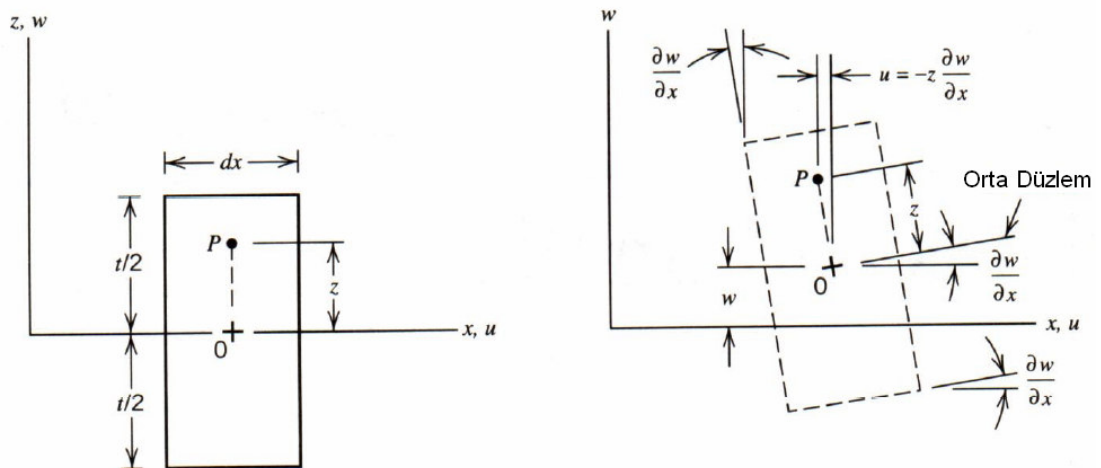
2.2.3. Küçük deformasyon ifadeleri

Şekil 2.13'de gösterilen, x-y düzlemi plağın orta düzlemi ile çakışık olan ve yük uygulanmamış bir plağı ele alalım. Plağın herhangi bir noktasında sırayla x, y ve z yönlerindeki yer değişimleri u, v ve w olduğu kabul edilmiştir.



Şekil 2.13. Sabit kalınlıktaki bir plak eleman [25]

Yükleme sonucu deformasyon oluştuğunda, O (x_0, y_0) noktasının z yönündeki yer değişimi Şekil 2.14'de görüldüğü gibi w kadar olacaktır.



Şekil 2.14. Plağın bir parçasının eğilmeden önceki ve sonraki durumu [25]

“Kirchhoff Plak Teorisi” diye de adlandırılan “Plakların Küçük Deformasyon Teorisi”nde plakların eğilmesindeki ana kabuller aşağıdaki şekilde açıklanabilir.

1. Orta düzlemde meydana gelen sehim, plağın kalınlığına oranla çok küçüktür. Bu yüzden; bu sehim ihmal edilerek hesaba katılmaz.
2. Plağın orta düzlemi eğilmeden etkilenmeyerek deforme olmaz, yani konumunu korur.
3. Düzlem kesitler orta düzleme dik kalabilmek için eğilme sırasında döner ve bozulmazlar. Böylelikle γ_{xz} ve γ_{yz} dik kayma gerilmeleri ile ε_z normal gerilmesi ihmal edilir.
4. Orta düzleme dik olan σ_z gerilmesi, diğer gerilme elemanlarına göre çok küçük olduğundan ihmal edilebilir.

Yapılan bu kabuller sayesinde üç boyutlu plak problemimiz, iki boyutta incelenebilecek duruma gelir. Plak diferansiyel denkleminin çıkarımına, ince plakların taşıdığı yükleri gruplayarak başlayabiliriz.

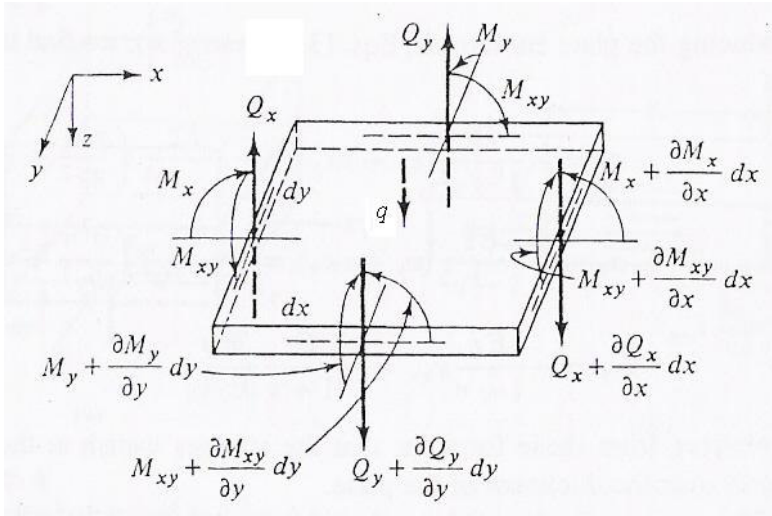
Bunlar;

- 1 - İç momentler ve kesme kuvvetleri
- 2 - Eksenel ve merkezi kayma kuvvetleri

Bu tür bir grupta bize diferansiyel plak eleman üzerindeki kuvvet ve moment dengelerini daha kolay görmemizi ve anlamamızı sağlar.

İç momentlerin ve kesme kuvvetlerinin dengesi

Eğilme ve burulma momentleri ile xy düzlemine dik kesme kuvvetleri Şekil 2.15’de gösterilmiştir.



Şekil 2.15. Bir plak elemanında eğilme momentleri, burulma momentleri ve kesme kuvvetleri [25]

Plak diferansiyel elemana etkiyen kuvvet ve moment dengelerini şu şekilde yazabiliriz.

- 1 - $\sum F_x = 0$ 'dan kesme kuvvetlerinin içinde bulunduğu ifade bulunur,
- 2 - $\sum M_x = 0$ ve $\sum M_y = 0$ 'dan da kesme kuvvetlerini, moment cinsinden ifadeleri bulunur ve (1)'de elde edilen ifade de yerine konulur.

$$\sum F_x = 0$$

$$-Q_x dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + q_z dx dy = 0$$

ifadesinde gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra Eş. 2.1 elde edilir. Burada; Q_x , Q_y ve q_z sırasıyla diferansiyel elemanın kenarlarında oluşan net kesme kuvvetleri ve diferansiyel denkleme gelen dik yüklemeleri göstermektedir.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0 \quad (2.1)$$

$$\sum M_x = 0 \quad // y$$

$$Q_y dx \frac{dy}{2} + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dy}{2} + M_y dx - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - M_{xy} dy + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy = 0$$

ifadesinde gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra Eş. 2.2 elde edilir. Burada; M_y ve M_{xy} , diferansiyel elemanın kenarlarında oluşan net eğilme momentleridir.

$$Q_y - \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$\sum M_y = 0 \quad // x$$

$$-Q_x dy \frac{dx}{2} - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dx}{2} - M_x dy + \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_{yx} dx + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \right) dx = 0$$

ifadesinde gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra Eş. 2.3 elde edilir.

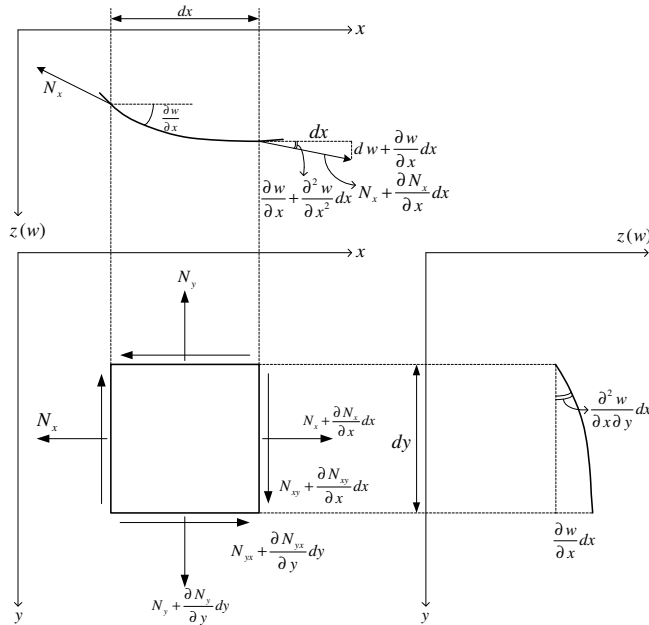
$$Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

Eş. 2.2 ve Eş. 2.3'ü, Eş. 2.1'de yerine yazarak, Eş. 2.4 elde edilir.

$$\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) + q_z = 0 \quad (2.4)$$

Eksenel ve merkezi kayma kuvvetlerin dengesi

Şekil 2.16'da plak elemanına gelen eksenel ve merkezi kayma kuvvetleri görülmektedir.



Şekil 2.16. Bir plak elemanında eksenel kuvvetler ve merkezi kayma kuvvetleri [26]

Plak elemanına gelen x yönündeki kuvvetlerin $\sum F_x = 0$ eşitliğinden;

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

olacaktır. y yönündeki kuvvetlerin eşitliğinden de;

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

bulunur. Burada; N_x , N_y ve N_{xy} , plağın bir birim uzunluğundaki net kuvvetleri tanımlamaktadır. Şekil 2.16'da verilen diferansiyel elemanın statik dengesini sağlamak için, üzerine etkiyen aynı yöndeki kuvvetleri ele alacağız.

x yönündeki N_x ve $N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx$ kuvvetleri, x-y düzlemi ile yaptığı açılarla çarpılarak z yönündeki bileşenlerini veren aşağıdaki ifade yazılır.

$$-N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy$$

ifade sadeleştirilerek Eş. 2.7 elde edilir.

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (2.7)$$

Aynı şekilde, y yönündeki kuvvetlerinde, aynı yöntemle z yönündeki bileşenleri Eş. 2.8'deki gibi bulunur.

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (2.8)$$

N_{xy} kesme kuvvetlerinin z yönündeki bileşenine bakılınca, elemanın iki karşılıklı yüzünde, elastik yüzeyin y doğrultusundaki eğiminin $\frac{\partial w}{\partial y}$ ve

$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx$ olduğu anlaşılır. O zaman kesme kuvvetlerinin z yönündeki

bileşeni Eş. 2.9'daki gibi olur.

$$N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (2.9)$$

$N_{xy} = N_{yx}$ eşitliğinden yararlanarak, bütün kesme kuvvetlerinin z yönündeki bileşenlerini yazarsak Eş. 2.10 elde edilir.

$$2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (2.10)$$

Yukarıda elde edilen Eş. 2.8 - Eş. 2.10'daki elemana tesir eden z yönündeki $q_z dx dy$ 'ye ekleyerek, Eş.2.4'de yerine yazıp, Eş. 2.11'i elde ederiz.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left(q_z + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.11)$$

Burada, moment ifadelerini w (z yönündeki yer değişim) cinsinden yazmak için, ilk önce; plağın eğilmeden sonraki yer değişimlerini *Plakların Küçük Deformasyon Teorisinde* belirtilen kabullere uygun biçimde yazılması ile Eş. 2.12 elde edilir.

$$\begin{aligned} w &= w(x, y) \\ u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Daha sonra yer değiştirme ifadelerinden gerinmeler elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

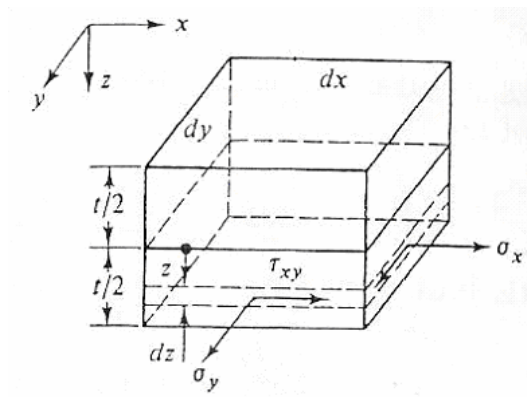
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Burada; ε_z , γ_{xz} ve γ_{yz} ifadeleri kabüller nedeniyle sıfırdır. Elde edilen gerilmelerden de gerilme-genleme (bünye) denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{E z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{E z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = -\frac{E z}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{2.14}$$

Normal ve kayma gerilmelerinden dolayı oluşan M_x , M_y ve M_{xy} ifadelerinin büyüklükleri, bahsedilen gerilmelerin orta düzleminden olan uzaklıklarıyla doğru orantılıdır. Şekil 2.17’de eğilme ve burulma momentlerine ilişkin normal ve kayma gerilmeleri gösterilmiştir.



Şekil 2.17. Eğilme ve burulma momentlerine ilişkin normal ve kayma gerilmeleri [25]

Bir birim uzunluktaki net moment ifadeleri aşağıdaki eşitliklerde verilmektedir [26].

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \quad (2.15)$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \quad (2.16)$$

$$M_{xy} = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \quad (2.17)$$

Elde edilen moment ifadelerinde gerilmelerin yerine w cinsinden değerleri yazılarak integrali alınırsa aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = \int_{-t/2}^{t/2} \left(-\frac{E z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) z dz$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.18)$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz = \int_{-t/2}^{t/2} \left(-\frac{E z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) z dz$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.19)$$

$$M_{xy} = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz = - \int_{-t/2}^{t/2} \left(-\frac{E z}{(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right) z dz$$

$$M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.20)$$

Bu eşitliklerde geçen D ifadesi, plağın eğilme rijitliğidir.

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.21)$$

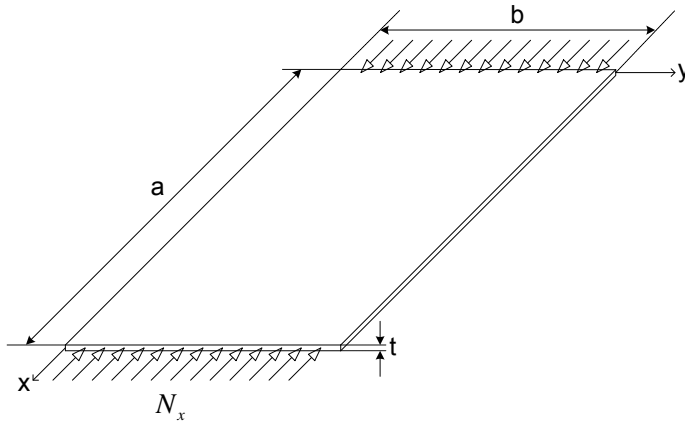
Eş. 2.11'deki moment ifadeleri yerine, Eş. 2.18 - Eş. 2.20'deki karşılıklarını yazarsak;

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(q_z + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.22)$$

plağın burkulma analizinde kullanacağımız genel plak denklemini [26] elde etmiş oluruz.

İki yönden basma kuvvetine maruz plağın kritik yük hesabı

Elde edilen Eş. 2.22'deki plak denkleminin uygulaması olarak iki yönden basma kuvvetine maruz bir plağın kritik yük hesabını inceleyelim.



Şekil 2.18. İki yönde basma kuvvetine maruz kalan plağın geometrisi

Şekil 2.18'de gösterilen, uzunluğu a , eni b olan basit mesnetli dikdörtgen bir plağı ele alalım. Plak, iki kenarından düzgün yayılı N_x basma kuvveti altında kalsın. Bu durumda, N_y , N_{xy} ve q_z sıfır alınacaktır.

Böylece, Eş. 2.22'de, $N_x = \sigma t$, $N_y = 0$, $N_{xy} = 0$ ve $q_z = 0$ yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\sigma t}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.23)$$

elde ederiz. Basit mesnet sınır şartlarının gereği, Eş. 2.24 ve Eş. 2.25'de verilmiştir.

$$x = 0 \text{ ve } x = a \text{ 'da } w = 0 \text{ ve } M_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.24)$$

$$y = 0 \text{ ve } y = b \text{ 'de } w = 0 \text{ ve } M_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.25)$$

Çözüm için, $w(x, y)$ deformasyon ifadesini, basit mesnet sınır şartlarını sağlayan bir çift Fourier serisi şeklinde yazılmaktadır.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad \begin{matrix} m = 1, 2, 3... \\ n = 1, 2, 3... \end{matrix} \quad (2.26)$$

$w(x, y)$ fonksiyonumuzu Eş. 2.23'de yerine yazar ve gerekli kısmi türevler alınırsa denklemimiz aşağıdaki hale gelir.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{\sigma t}{D} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0 \quad (2.27)$$

Eş. 2.27'deki eşitliği sağlayan denklemdeki ifadenin sıfıra eşit olabilmesi için aşağıdaki sadeleştirilmiş çarpanın sıfıra eşit olması gerekmektedir.

$$\left[\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\sigma t}{D} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] = 0 \quad (2.28)$$

Bu eşitlikten σ_{kr} kritik burkulma gerilmesi bulunur.

$$\sigma = \frac{D \pi^2}{t b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2 \quad (2.29)$$

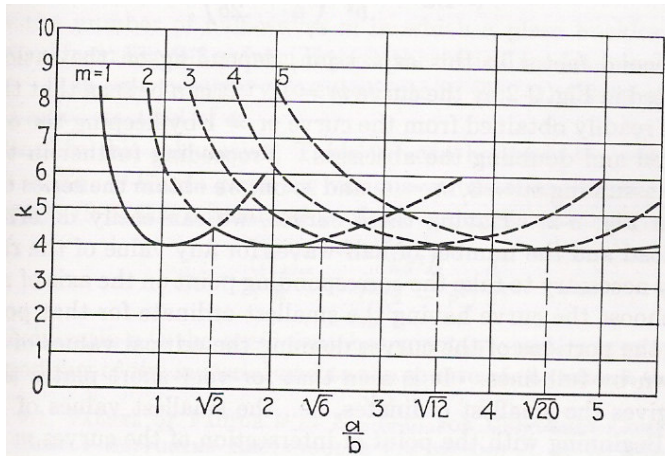
Bu eşitlikteki parantez içindeki ifade burkulma katsayısı $K = \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2$ olarak tanımlanmıştır. Plâğın eğilme rijitliği D 'nin karşılığı ile birlikte Eş. 2.29'da yerine yazılarak;

$$\sigma_{kr} = \frac{K \pi^2 D}{t b^2} = \frac{K \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (2.30)$$

elde edilir. $\phi = a/b$, plak boyunun enine oranı olup, K ve ϕ arasındaki ilişkiyi $m=1$ ve $n=1$ için çözersek, Eş. 2.31'i elde ederiz.

$$K = \frac{1}{\phi^2} + \phi^2 + 2 \quad (2.31)$$

Burkulma katsayısının, ϕ oranına bağlı değişimi Şekil 2.19'da görülmektedir.



Şekil 2.19. Burkulma katsayısının, ϕ oranına bağlı değişimi [26]

Eş. 2.30'da bulunan kritik burkulma gerilmesini veren ifadeye ilişkin sayısal örnekler, 4. bölümde ayrıntılı olarak verilmiştir. Ayrıca bu bölümde bulunan sonuçlar ANSYS® sonlu elemanlar programı ile karşılaştırmalı olarak da incelenmiştir.

2.2.4. Büyük deformasyon ifadeleri

Hatırlanacağı gibi “Plakların Küçük Deformasyon Teorisi”nde orta düzleminde bir şekil değişiminin olmadığı kabulü vardı. Oysa ki; burkulma problemlerinde kenar yüklemelerinin sonucunda plak elemanı eğilir ve bunun bir sonucu olarak da orta düzlemde bir uzama meydana gelir. “Plakların Büyük Deformasyon Teorisi”, orta düzlemde meydana gelen bu uzamayı da hesaba katmaktadır. Bu teori von Kàrmàn tarafından geliştirilmiştir [17].

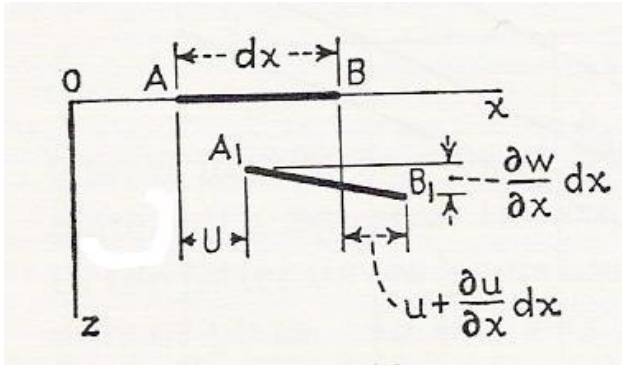
Plak kenarlarından uygulanabilecek gerilmelerin fonksiyonunu veren ifadeler, gerinme formüllerinde yerine koymak için aşağıda verilmiştir. Burada, “Airy’s Stress Function” diye bilinen Φ , x ve y ifadelerine bağlı bir yerdeğiştirme fonksiyonudur [27].

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.32)$$

Eş. 2.32'daki ifadeler, elastisiteden bilinen ve aşağıda verilen gerinme ifadelerinde yerine yazılırsa aşağıdaki ϵ_x , ϵ_y ve γ_{xy} eşitlikleri bulunur.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Yanal yükleme sonucu; plağın orta düzlemi eğilir ve eğilmenin sonucu orta düzlemde uzama veya kısalma meydana gelir. Bu yüzden Şekil 2.20'de gösterilen AB elemanının, x yönündeki yer değiştirmesine bağlı olarak boyununun $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$ kadar uzadığı kabul edilmektedir.



Şekil 2.20. Plak diferansiyel elemanı [26]

z yönündeki yer değiştirmesi şöyle açıklanabilir, Şekil 2.16'daki AB elemanın şekil değiştirerek A1B1 olduğunu ve elemanın uzunluğunun da dx' olduğunu düşünürsek, x eksenini üzerindeki izdüşümü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\varepsilon_{x,w} = \frac{dx' - dx}{dx} = \left(\frac{dx'}{dx}\right) - 1 = \left[\frac{\sqrt{(dx)^2 + \left(\frac{dw}{dx}dx\right)^2}}{dx} \right] - 1$$

Bu ifade de gerekli düzenlemeler yaparsak;

$$\varepsilon_{x,w} = \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} - 1 \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \quad (2.34)$$

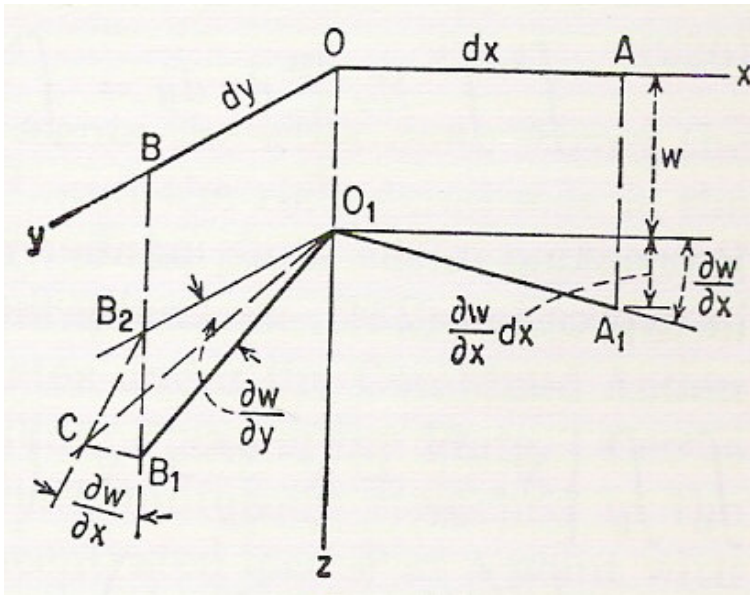
sonucuna ulaşılır. O zaman x eksenini boyunca meydana gelen birim uzama;

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2.35)$$

olur. Aynı şekilde y doğrultusundaki şekil değiştirme de;

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (2.36)$$

olmaktadır. Kayma şekil değiştirmesi için Eş. 2.13'e bakarsak, x-y yönünde meydana gelen kayma şekil değiştirmesinin $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$ olduğunu görürüz. z yönünde meydana gelen yer değiştirme sonucunda oluşan kayma şekil değiştirmesi için Şekil 2.21'e bakarsak;



Şekil 2.21. Kayma açıları [26]

OA ve OB elemanları yer değiştirme sonucunda O_1A_1 ve O_1B_1 durumunu alır. Burada OB 'ye paralel $B_2O_1A_1$ düzlemini O_1A_1 ekseninde $\frac{\partial w}{\partial y}$ açısı kadar döndürürsek, B_2 noktası C noktasının üzerine gelir. Bu dönme sırasında; B_2C

arasındaki yer deęiřtirme $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy$ kadardır ve B_2B_1 dūřeyi ile de $\frac{\partial w}{\partial x}$ kadar açı yapar. O zaman CB_1 uzunluęu $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy$ kadar olur. Būylelikle meydana gelen CO_1B_1 kayma açısı $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$ olarak bulunur. Genel kayma açısı ise;

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.37)$$

ifadesi ile bulunur. Eř. 2.35 - Eř. 2.37'de verilen gerinme ifadelerinin, Eř. 2.38'deki gibi kısmi tūrevlerini alırsak;

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.38)$$

elde edilir. Eř. 2.33'daki gerilme fonksiyonuna bağlı elde edilen gerinme ifadelerini Eř. 2.38'de yerine yazılırsa,

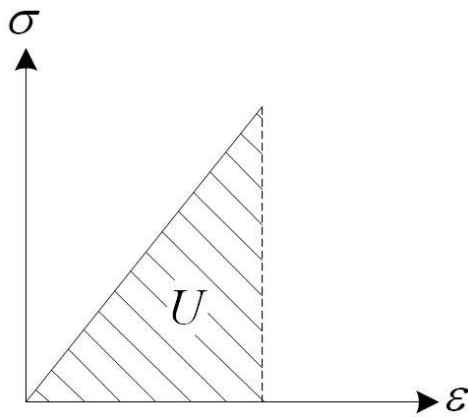
$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (2.39)$$

bulunur. Φ ve w ifadelerini tayin etmek için gerekli olan ikinci denklem Eř. 2.32'nin, Eř. 2.22'de yerine konulması ile Eř. 2.40 elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{t}{D} \left[\frac{q_z}{t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Eş. 2.39 ve Eş. 2.40'daki ifadeler, ince plakların büyük deformasyonları için (governing differential equations) genel diferansiyel denklem takımlarıdır [27]. Bu denklemlerin çözümü, sınır şartlarını sağlayan Φ ve w fonksiyonlarına ihtiyaç duyar.

2.2.5. Şekil değiştirme enerji ifadeleri



Şekil 2.22. Hooke eğrisi

Elastik bölge için gerilme - gerinme eğrisinin altındaki alan şekil değiştirme enerjisini vermektedir (Bkz. Şekil 2.22). Buna göre, şekil değiştirme enerjisini

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$$

şeklinde yazılır. Bu ifadeyi 3 boyutlu bir problem için aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V [\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}] dx dy dz \quad (2.41)$$

Ele aldığımız plak problemi için $\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{yz} = 0$ ve $\gamma_{xz} = 0$ olduğunu Eş. 2.13'den biliyoruz. Buna göre; Eş. 2.41'in sadeleştirilmiş hali aşağıdaki gibidir.

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}] dx dy dz \quad (2.42)$$

Eş. 2.42'deki gerilme ifadeleri yerine, Eş. 2.14'de verilen karşılıkları yazıldığında denklem;

$$U = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \iiint_V \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{(1-\nu)}{2} \gamma_{xy}^2 \right] dx dy dz \quad (2.43)$$

şeklinde olur. Eş. 2.43'de yer alan gerilme ifadeleri yerine, plakların küçük deformasyon teorisinde sözü edilen ve Eş. 2.13'deki gerilme karşılığı yazılarak, şekil değiştirme enerjisini, w cinsinden aşağıda belirtildiği gibi elde edilir.

$$U = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (2.44)$$

Plağın orta düzlemine etkiyen kuvvetlerin oluşturduğu potansiyel enerjiyi hesaplamak için Eş. 2.42'deki denklemden yararlanılır. Bu denklemde, gerilmenin eşiti olan $\sigma_{ij} = N_{ij} / t$ ifadesi yerine konur ve sonuçta Eş. 2.45'deki ifadesi elde edilir.

$$U = \iint (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \quad (2.45)$$

Eş. 2.35 - Eş. 2.37'de belirtilen ifadeler, yukarıdaki Eş. 2.45'de yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
U = \iint \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy \\
+ \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy
\end{aligned} \quad (2.46)$$

elde edilir. Eşitliğin sağında yer alan ilk çift katlı integral, plağın orta düzlemine tesir eden kuvvetlerin, eğilme esnasında yaptıkları işe eşittir. İkinci çift katlı integral ise, plağın orta düzlemine etkiyen tüm yanal yüklerin ortak tesiri sonucunda, plakta oluşan eğilmeyi sağlayan toplam şekil değiştirme enerjisini vermektedir. Eşitliğin sağında yer alan ilk çift katlı integrali ele alınırsa;

$$T = \iint \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy \quad (2.47)$$

bulunur. Eş. 2.35 -Eş. 2.37'de yer alan gerinme ifadeleri plak kenarlarında sıfır olacaktır. Buna göre;

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = 0 &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\
\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = 0 &\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\
\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned} \quad (2.48)$$

elde edilir. Eş. 2.48'deki ifadeler, Eş. 2.47'de yerlerine yazılırsa;

$$T = \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad (2.49)$$

bulunur. Destek elemanlı plaklarda, bahsedilmiş bulunan enerji denklemlerine, destek elemanının şekil değiştirmesi ve dönmesine bağlı olarak absorbe ettiği enerji ifadesi eklenir. Eklenecek olan bu ifade Eş. 2.50'de görülmektedir.

$$U_d = \frac{EI_d}{2} \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx + \frac{GJ_d}{2} \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right) dx \quad (2.50)$$

Burada; $v(x, z)$, destek elemanının deformasyonunu gösteren bir fonksiyondur.

Bahsedilen tüm bu enerji ifadelerinin toplamına “Toplam Potansiyel Enerji” denilmektedir. Bu enerji denklemi Eş. 2.51’de verilmiştir.

$$\Pi = U + U_d + T$$

Burada; Π , U , U_d ve T sırasıyla toplam potansiyel enerjiyi, elastik yüzeyin şekil değiştirme enerjisini, destek elemanının şekil değiştirme ve burulma enerjisini ve dış yüklemenin potansiyelini göstermektedir.

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \\ & + \frac{EI_d}{2} \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx + \frac{GJ_d}{2} \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right) dx \\ & + \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \end{aligned} \quad (2.51)$$

İki yönden basma kuvvetine maruz plağın kritik yük hesabı

İki yönden basma kuvvetine maruz bir plağın kritik yük hesabını, elde edilen Eş. 2.51'deki toplam potansiyel enerji denklemin de uygulanması ile yeniden incelenebilir.

Şekil 2.18'de gösterilen, uzunluğu a , eni b olan basit mesnetli dikdörtgen bir plağı tekrar ele alalım. Yine; plak, iki kenarından düzgün yayılı N_x basma kuvveti altında kalsın ve bu durumda, N_y , N_{xy} ve q_z sıfır olduğu daha önceden belirtilmişti.

Kritik yük hesabı; plak yüzeyinin şekil değiştirme enerjisi ile plak kenarından yapılan yüklemenin potansiyelinin toplamını sıfır yapan yükleme değeri kritik yüklemeyi verecektir. Bunun hesabı, Eş. 2.52'deki formül ile yapılacaktır.

$$\Pi = U + T = 0$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \\ & + \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \end{aligned} \quad (2.52)$$

Eş. 2.44'de de bahsedilen plağın şekil değiştirme sırasında depoladığı enerji ifadesi aşağıda tekrar verilmiştir.

$$U = \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

Eş. 2.26'da verilen w plak deformasyon ifadesi yukarıdaki denklemde yerine yazılarak Eş. 2.53 bulunur.

$$U = \frac{1}{2} D \iint \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{b}\right) \right\}^2 dx dy \quad (2.53)$$

Burada;

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]$$

ifadesi ihmal edilmiştir. Eş. 2.53'de yer alan integral alınır;

$$U = \frac{D a b}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \quad (2.54)$$

bulunur.

Eş. 2.49'ta da bahsedilen plağa etkiyen dış yüklemenin potansiyelinde, N_y ve N_{xy} ifadeleri sıfıra eşitliği dikkate alınarak ve gerekli sadeleştirmeler yapılarak, Eş. 2.55 elde edilir.

$$T = \frac{1}{2} \sigma t \iint \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (2.55)$$

Eş. 2.26'da verilen w plak deformasyon ifadesi yukarıdaki denklemde yerine yazılır ve ifadenin integrali alınarak Eş. 2.56 bulunur.

$$T = \frac{\pi^2 b}{8 a} \sigma t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 A_{mn}^2 \quad (2.56)$$

Eş. 2.52'de belirtilen toplam potansiyel enerjinin sıfıra eşitliğinden aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$\frac{D a b}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 = \frac{\pi^2 b}{8 a} \sigma t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 A_{mn}^2 \quad (2.57)$$

Eş. 2.57'de gerekli sadeleştirmeler yapılır ve σ ifadesi çekilirse;

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2 t} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \left(\frac{1}{\phi^2} + \phi^2 + 2 \right) \quad (2.58)$$

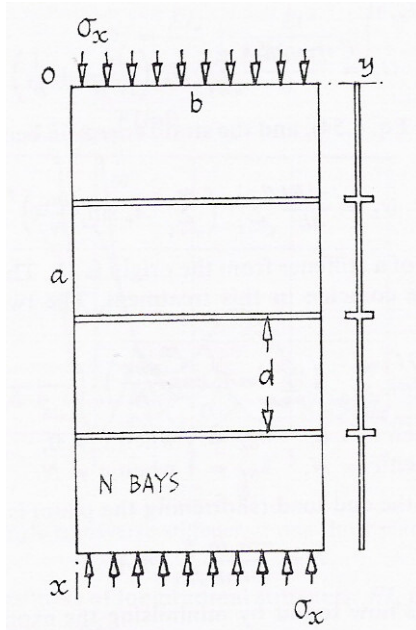
bulunur. Denklemden gerekli düzenlemeler yapılarak, kritik basma gerilmesi aşağıdaki gibi bulunur (Eş. 2.30).

$$\sigma_{kr} = \frac{K \pi^2 D}{t b^2} = \frac{K \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2$$

Böylece; plak denklemleri ile hesaplanan kritik gerilme ifadesi ile toplam potansiyel enerji denklemlerinden hesaplanan kritik gerilme ifadelerinin aynı olduğu görülmüştür.

İki yönden basma kuvvetine maruz destek elemanlı plağın kritik yük hesabı

Bu konuda ilk çalışmayı Seide yapmıştır [4]. Yaptığı çalışma, Şekil 2.23'de gösterilen destek elemanlı plağın genel burkulma hali için ortaya koyduğu bir analitik formülasyondur. Bu formülasyonda çözüm için kullanılan plak deformasyon ifadesi w , Eş. 2.59'da gösterilmiştir. Bu deformasyon ifadesi ile Eş. 2.26'daki deformasyon ifadesi aynı olup, sadece y eksenini boyunca bir yarım sinüs dalgasına izin verilmiştir.



Şekil 2.23. Destek elemanlı plak geometrisi [28]

$$w = \sin \frac{\pi y}{b} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n \pi x}{N d} \quad (2.59)$$

Burada; N ve d, sırasıyla destek elemanlar arasındaki boşluk sayısı ve destek elemanlar arasındaki uzaklığı göstermektedir.

Eş. 2.59'daki deformasyon ifadesi sırasıyla plağın şekil değiştirme enerjisi için Eş. 2.44'de ve dış yüklemelerin potansiyeli için de Eş. 2.49'da yerine yazılıp, gerekli işlemler yapılır ve aşağıdaki ifadeler bulunur.

$$U = \frac{D N d b \pi^4}{8} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \left(\frac{n^2}{N^2 d^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \quad (2.60)$$

$$T = \frac{\pi^2 \sigma_x t b}{8 N d} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2 \quad (2.61)$$

Seide, destek elemanın şekil değiştirme ve burulma enerjisine ait ifadeyi Eş. 2.62'deki gibi tanımlamıştır [4].

$$U_d = \frac{\pi^4 EI}{4b^3} \sum_{c=1}^{N-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi c}{N} \right)^2 + \frac{\pi^4 GJ}{4N^2 d^2 b} \sum_{c=0}^N \left(\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cos \frac{n\pi c}{N} \right)^2 \left(\frac{1}{1 + \delta_i + \delta_{ii}} \right) \quad (2.62)$$

Burada; G , kayma modülünü, c ifadesi ise; formüldeki toplam işleminin başlangıç sayı değeri olup, bu değer alabileceği maksimum sayı değeri destek elemanlar arasındaki boşluk sayısı ile sınırlıdır. c 'nin değerine bağlı olarak aşağıda Kronecker Deltanın (δ) alabileceği değerler gösterilmiştir.

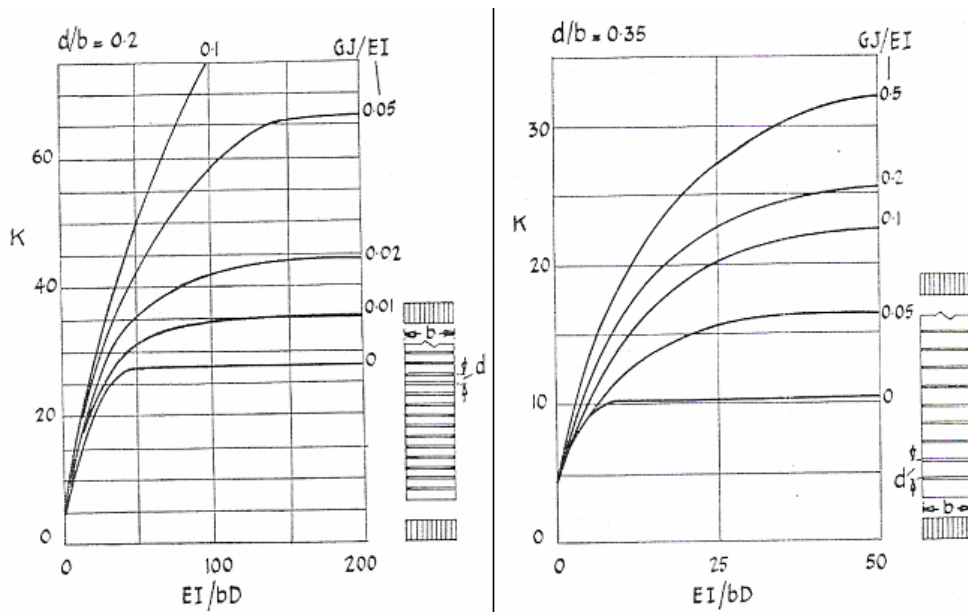
$$c = 0 \Rightarrow \delta_i = 0$$

$$c \neq 0 \Rightarrow \delta_i = 1$$

$$c = N \Rightarrow \delta_{ii} = 0$$

$$c \neq N \Rightarrow \delta_{ii} = 1$$

Seide'nin yaptığı parametrik çalışmada elde ettiği sonuçlara bağlı olarak ortaya koyduğu burkulma katsayısının eğilme rijitliğine göre gösteren grafikler Şekil 2.24'de açıklama amacıyla verilmiştir [4]. Bu grafikler, iki destek eleman arasındaki uzaklığın, plak enine oranının (d/b) değeri; 0,2 ve 0,35 için ayrı ayrı vermiştir.

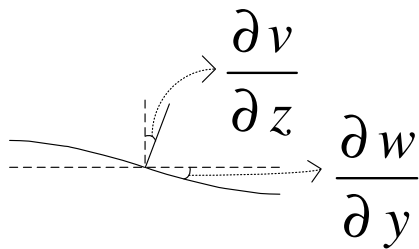


Şekil 2.24. Burkulma katsayısının eğilme rijitliğine göre değişimi [28]

Destek elemanın eğilme (EI) ve burulma (GJ) rijitliğinin artmasıyla genel burkulma durumunun değişeceği 4. Bölümde anlatılacaktır. Değişen bu durum, bölgesel burkulma ile açıklanabilir. Genel burkulma hali için verilen yukarıdaki denklemler, destek elemanlı plakların bölgesel burkulma halini karşılayamaz. Bunun bir sonucu olarak, destek elemanlı plakların bölgesel burkulma hali için yeni formülasyonlar geliştirilmiştir. Bu çalışmada bu konunun detayına inilmemiştir, sadece izlenilen yollardan kısaca bahsedilmiştir.

Bu konuda yapılan çalışmalarda [29-31] plak ve destek elemanı için ayrı ayrı deformasyon ifadeleri belirlenmiştir. Plakın deformasyon ifadesi $w(x, y)$ ve destek elemanın deformasyon ifadesi $v(x, z)$, problem için belirlenen sınır şartlarını sağlamalıdır.

Şekil 2.25'de destek elemanlı plakın deformasyon hallerinden birini vermektedir. Şekilde gösterilen açılar, plak ile destek elemanın deformasyon ifadelerinin birinci kısmi türevleriyle bulunur. Plak ile destek eleman arasında bütünlüğü sağlamak için bu açıların Eş. 2.63'de olduğu gibi birbirine eşit olması gerekmektedir.



Şekil 2.25. Bölgesel burkulmada deformasyon ifadelerinin geçiş şartı

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.63)$$

Daha sonra bu fonksiyonlar Eş. 2.51'de yer alan toplam potansiyel enerji denkleminde yerine konularak kritik gerilme değeri elde edilmeye çalışılır.

Destek elemanlı plakların analizine ilişkin sayısal örnekler, 4. bölümde ayrıntılı olarak verilmiştir. Ayrıca bu bölümde bulunan sonuçlar ANSYS® sonlu elemanlar programı ile karşılaştırmalı olarak da incelenmiştir.

2.3. Fiber Kompozit Plakların Burkulması

2.3.1. Fiber takviyeli kompozit malzemeler

Birbirlerinin zayıf yönünü düzelterek üstün özellikler elde etmek amacıyla bir araya getirilmiş değişik tür malzemelerden veya fazlardan oluşan malzeme sistemine kompozit malzeme denir.

Fiber takviyeli kompozit yapılar, en eski ve en yaygın kullanım alanına sahip olan kompozit malzemedir. Fiber takviyeli kompozit malzemeler, çok farklı elyaf yönlenmelerine sahip tabakaların bileşimi ile üretilir. Korozyon direnci zayıf metaller üzerine, daha yüksek dirençli metallerin veya plastiklerin kaplanmasıyla korozyon özelliğinin, yumuşak metallerin sert malzemelerle birleştirilmesiyle sertlik ve aşınma direncinin, farklı fiber yönlenmesine sahip tek tabakaların birleştirilmesiyle çok yönlü yük taşıma özelliğinin geliştirilmesi mümkün olmaktadır.

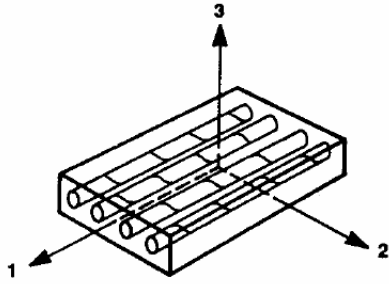
Özellikle fiber takviyeli kompozit malzemelerin uzay ve havacılık sanayinde kullanımı başta hafiflik ve sağlamlık nitelikleri sayesinde. Amaç daha az yakıt harcamak, daha yüksek hıza ulaşmak ve verimliliği sağlamaktır. Bu kullanımda sadece maddi kazanç düşünülmeyp stratejik performanslarda dikkate alınmıştır. Özellikle titreşim, yorulma ve ısı dayanımı gibi nitelikler uzay ve havacılık sanayinde birleşik malzemelerin önde gelen avantajlarıdır. Bugün bir av bombardıman uçağında kompozit malzeme kullanımı toplam uçak ağırlığının yarısına ulaşmış bulunmaktadır.

2.3.2. Fiber kompozit plakların teorisi

Bilindiği gibi izotropik malzemenin tüm yönlerde elastik özellikleri aynıdır. Ağaç, kontraplak ve fiber takviyeli kompozitler anizotropik malzemedir. Eğer bir homojen malzemenin, elastik özelliklerinin birbirine dik 3 simetri eksenini varsa, bu malzemeye ortotropik malzeme denir. Analizini yapacağımız fiber takviyeli kompozit plaklar, ortotropik plakların bir araya gelerek oluşturduğu genel ortotropik plak olarak da isimlendirilmektedir.

Bu çalışmada ANSYS®’de yapılan analizlerde çok katlı kompozit yapılarla çalışıldığından, çok katlı laminaların mekanik davranışlarının incelenmesinde fayda görülmüştür. Bunun için klasik lamina teorisinde; tek katmana ait gerilmeler ve deformasyonlar hesaplanır. Bu sayede lamina katmanlarından oluşan fiber kompozit yapıların mekaniksel özellikleri de incelenebilir.

Laminanın Gerilme-Gerinme Davranışı



Şekil 2.26. Fiber takviyeli lamina [32]

Düzlem gerilme altındaki ortotropik malzeme için asal eksenlerdeki gerilme-gerinme bağıntısı Eş. 2.64’deki gibi verilebilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Q_{ij} indirgenmiş rijitlikler olup, mühendislik sabitleri (E : elastisite modülü, G : kayma modülü, ν : Poisson oranı) cinsinden ise ifadeleri Eş. 2.65'de verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{66} &= G_{12} \\
 \frac{\nu_{12}}{E_1} &= \frac{\nu_{21}}{E_2}
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Lamina düzleminde başka bir x-y koordinat sistemindeki gerilmeler, $\bar{Q}_{ij}$ terimleri dönüştürülmüş azaltılmış rijitlikler (transformed reduced stiffnesses) ile şu şekilde ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

Bu matristeki, $\bar{Q}_{ij}$ terimleri dönüştürülmüş azaltılmış rijitliklerin Q_{ij} 'ler cinsinden eşitliği Eş. 2.67'de gösterilmiştir.

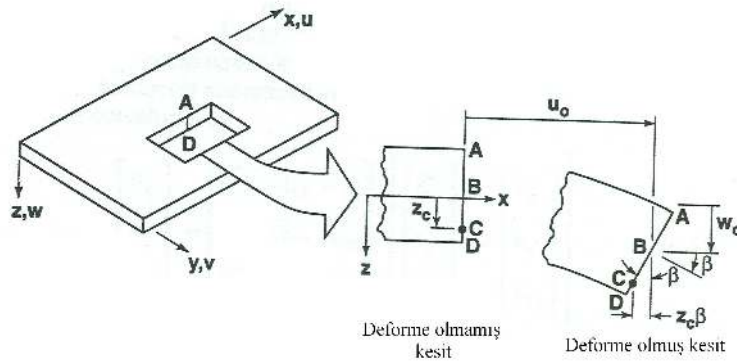
$$\left. \begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)
 \end{aligned} \right\} \tag{2.67}$$

Burada, θ fiber açısını göstermektedir. Keyfi koordinatlardaki gerilme-gerinme bağıntıları, yani Eş. 2.64'deki laminate rijitliklerini tanımlar. Eş. 2.66 ve Eş. 2.67 k.ncı lamina için gerilme-gerinme bağıntılarını verir. Bu yüzden Eş. 2.64'ü şu şekilde de yazabiliriz.

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k \{\epsilon\}_k \quad (2.68)$$

Laminadaki gerinme-gerilme değişimi

Gerilmelerin ve gerinmelerin çok katlı lamina kalınlığı boyunca değişiminin nasıl olacağı, ancak; çok katlı laminanın uzama ve eğilme rijitliklerinin tanımlanması ile olur. Laminanın kalınlığı eğer ince ise, orta düzleme dik ve düzgün olan bir çizgi, eğilmeden sonra da düz ve dik konumu koruduğu kabulü yapılır.



Şekil 2.27. x-z düzlemindeki deformasyon geometrisi [32]

ABCD çizgisi deformasyondan sonra da düz kaldığından C noktasının yer değiştirmesi Eş. 2.69'daki gibi olur.

$$u_c = u_o - z_c \beta \quad (2.69)$$

Ancak deformasyon altında ABCD orta düzleme dik kalacak ve β lamine orta düzleminin eğimi şu şekilde tanımlanır.

$$\beta = \frac{\partial w_o}{\partial x} \quad (2.70)$$

Buradan lamina kalınlığınca herhangi bir noktadaki yer değıştirmesi u , Eş. 2.71'deki gibi ifade edilir.

$$u = u_o - z \frac{\partial w_o}{\partial x} \quad (2.71)$$

Aynı şekilde y yönündeki v yer değışimi ise Eş. 2.72'de verilmiştir.

$$v = v_o - z \frac{\partial w_o}{\partial y} \quad (2.72)$$

Laminat gerinmeleri Kirchoff hipotezine bağılı olarak ε_x , ε_y ve γ_{xy} haline dönüşmüştür. Yani; $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ 'dır. Küçük gerinmeler için (Lineer elastiklik için) diğer gerinmeler Eş. 2.73'de verilmiştir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Eş. 2.71 ve Eş. 2.72, Eş. 2.73'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.74)$$

elde edilir. Aynı eşitlikleri matris cinsinden yazımı ise Eş. 2.75'de verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Bu eşitlikteki orta düzlem gerinimleri şu şekilde tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} \\ \frac{\partial v_o}{\partial y} \\ \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Orta düzlem eğilmeleri ise;

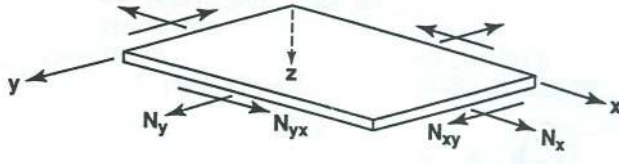
$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\ \frac{2\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

şeklindedir. Kalınlık boyunca gerinme değişimlerinin yerine koyulması ile Eş. 2.75'i, Eş. 2.66'da yerine yazarak, k.ncı tabakadaki gerilmeler, çok katlı laminanın orta düzlem gerinimleri ve eğilmeleri cinsinden Eş. 2.78'deki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Çok katlı lamina kuvvetleri ve momentleri

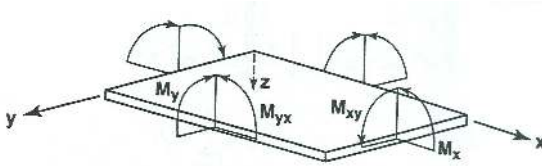
Laminaya etkiyen sonuç kuvvetleri ve momentleri her katmandaki gerilmeleri kalınlık boyunca integrasyonu alınarak bulunur.



Şekil 2.28. Düzgün laminada düzlem-içi kuvvetler [32]

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz \\ M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \end{aligned} \quad (2.79)$$

Burada N_x laminadaki birim genişlik için kuvvet olup, aynı şekilde M_x 'de birim uzunluk başına düşen moment değeridir.

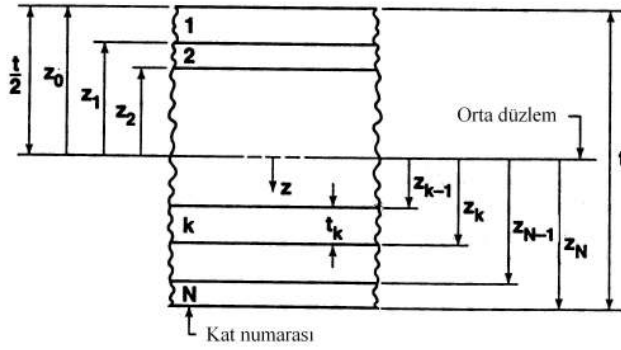


Şekil 2.29. Düzgün laminaya etkiyen momentler [32]

Eş. 2.79'daki ifadeler, şu şekilde yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z(k-1)}^{z(k)} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (2.80)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (2.81)$$



Şekil 2.30. N katlı lamina geometrisi [32]

Eş. 2.80 ve Eş. 2.81 rijitlik matrisinin lamina boyunca sabit kaldığı kabulü ile yeniden düzenlenebilir. $[\bar{Q}_{ij}]_k$ terimleri katman boyunca sabittir. Böylelikle; rijitlik matrisi integrasyon dışına çıkabilir. Lamina gerilme-gerinme eşitlikleri Eş. 2.78'de yerine yazarsak, kuvvetler ve momentler şu hali alır.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left[\int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \begin{bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} dz + \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z dz \right] \quad (2.82)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left[\int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \begin{bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} z dz + \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right] \quad (2.83)$$

ϵ_x^o , ϵ_y^o , γ_{xy}^o , κ_x , κ_y ve κ_{xy} değerlerinin orta düzlemin fonksiyonudur. Fakat z ifadesine bağlı bir fonksiyonu olmadığı bilinmelidir. Bu sayede Eş. 2.82 ve Eş. 2.83, aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$\text{Uzama rijitlikleri} \quad : A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (2.86)$$

$$\text{Eğilme-uzama rijitlikleri} \quad : B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (2.87)$$

$$\text{Eğilme rijitlikleri} \quad : D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (2.88)$$

Bu şekilde genel rijitlik matrisini Eş. 2.89'daki gibi elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

3. SAYISAL METOTLARLA BURKULMA ANALİZİ

Sonlu elemanlar yöntemi ve söz konusu analizler için ANSYS® programının çözümleme seçenekleri ve çalışma prensipleri bu bölümde anlatılacaktır.

3.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi, fizik ve mühendislikte karşılaşılan bir çok problemin çözümünde kullanılan en yaygın ve etkin sayısal yöntemlerden biridir. Bu yöntemde yapı, davranışı daha önce belirlenmiş olan bir çok elemana bölünür. Elemanlar düğüm noktası (node) adı verilen noktalarla birleştirilirler. Bu şekilde bir denklem takımı elde edilir. Gerilme analizinde bu denklemler düğüm noktalarındaki denge denklemleridir. Bu şekilde, incelenen probleme bağlı olarak yüzlerce hatta binlerce denklem elde edilir. Bu denklem takımının çözümü ise; yapının davranışını verir. Çok sayıdaki denklemlerin çözümü yerine, bu konuyu kolaylaştırmak için geliştirilen ANSYS®, ABAQUS®, NASTRAN®, PATRAN® gibi bilgisayar programlarından yararlanılır. Bu tez çalışmasında ANSYS® v10 programı kullanılmış olup, kullanım esasları bu bölümde açıklanmıştır.

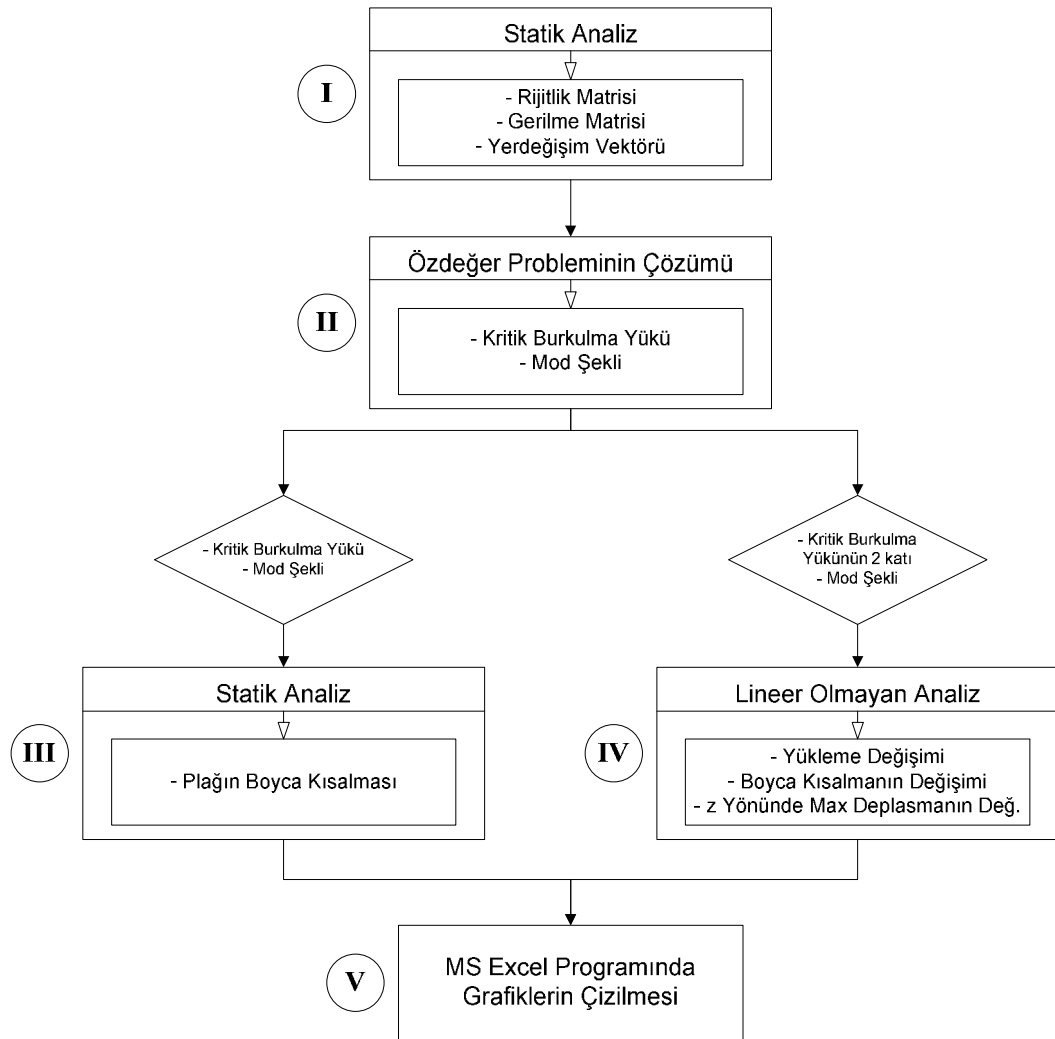
3.2. ANSYS Programı ve Çözümleme Seçenekleri

ANSYS® programında çözüm safhasına geçilmeden önce yapılması gereken bazı hususlar vardır. Bunlar probleme uygun eleman tipinin seçilerek modelin oluşturulması ve kullanılan malzemeye ait özellikler ile sınır şartlarının da girilmesidir.

ANSYS®, burkulma analizini iki grup altında ele alır. Bunlar;

- 1 – Özdeğer probleminin çözümü
- 2 – Lineer olmayan (geometrik olarak) analizdir.

Bu analizlere ait çözümleme basamakları Şekil 3.1'de verilmiştir. Bu kısımda yer alan analizlerin çözümleme seçenekleri tek tek ele alınarak incelenecektir.

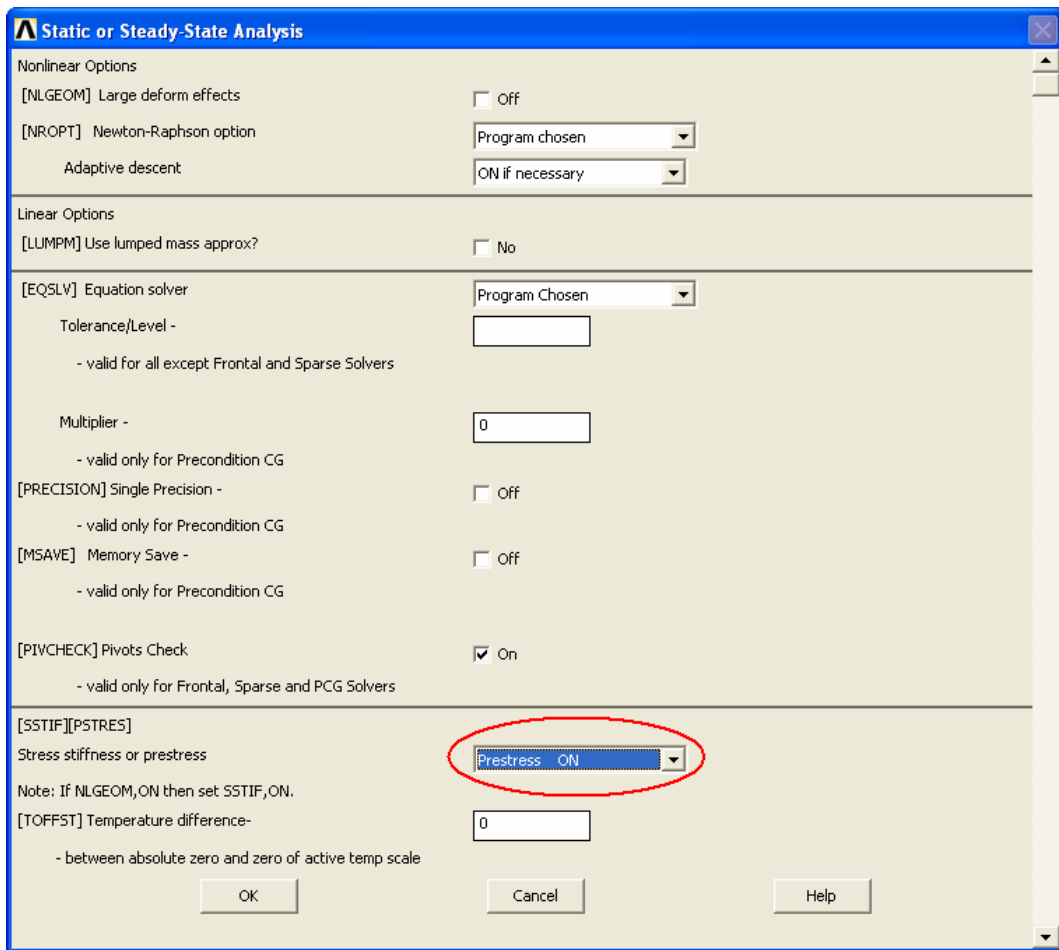


Şekil 3.1. Burkulma analizlerinin ANSYS® programı ile çözümleme basamakları

3.3. Statik Analiz Kısımının İncelenmesi

Özdeğer probleminin çözümü esnasında kullanılacak bazı değerler, I kısımda belirtilen statik analiz yapılarak elde edilir (Bkz. Şekil 3.1). Bu nedenle; özdeğer probleminin çözümünü yapmadan önce statik analiz yapılmalıdır. Statik analiz, sistemin yükleme altında verdiği cevabı yani her bir düğüm

noktasında meydana gelen deformasyon miktarını bulmak için yapılır. Çözüm sırasında seçilen eleman tipine ve malzeme özelliklerine göre sistemin rijitlik matrisi oluşturulur. Sisteme dışardan uygulanan kuvvetleri barındıran gerilme matrisi de statik analiz esnasında hesaplanır. Gerilme matrisinin hesaplanması için ön gerilme etkilerinin (prestress effects) hesaba katılması gerekmektedir. Bu yüzden statik çözümü yaptırılmadan önce ANSYS® programında Şekil 3.2’de gösterilen kısım aktif hale getirilmelidir.



Şekil 3.2. Statik analiz seçenekleri

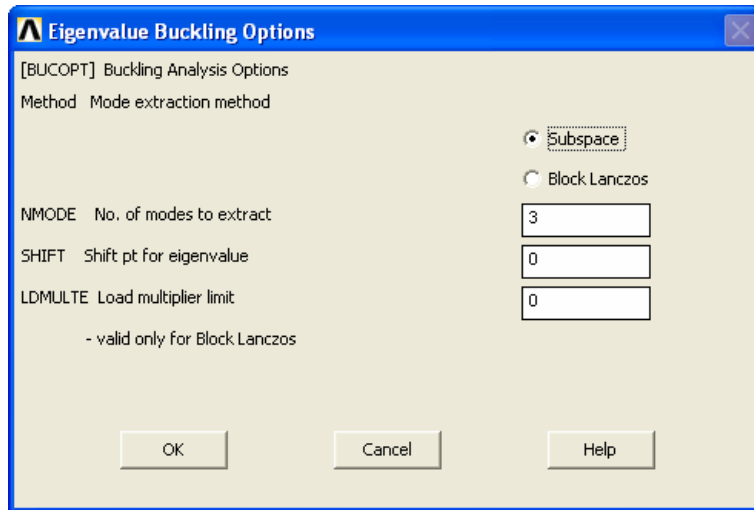
3.4. Özdeğer Probleminin Çözüm Kısımının İncelenmesi

II kısım olan özdeğer probleminin çözümünde, statik analiz sonucu elde edilen matrisler kullanılarak, Eş. 3.1’de yer alan özdeğer problemine çözüm

aranmaktadır (Bkz. Şekil 3.1). Çözüm sonucunda elde edilen özdeğer (λ_i), sisteme ait kritik burkulma gerilmesini verecektir.

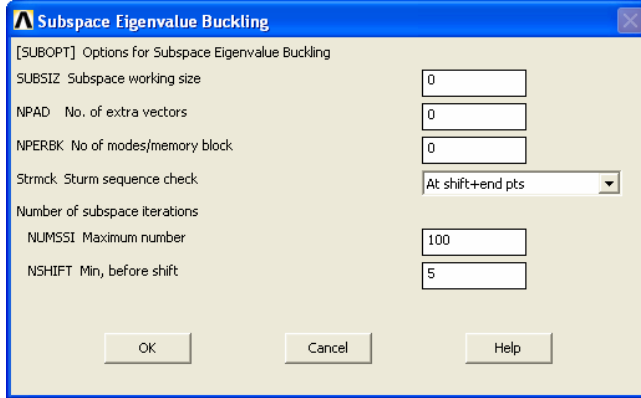
$$[K_B]\{\phi_i\} = \lambda_i [K_G]\{\phi_i\} \quad (3.1)$$

Burada; $[K_B]$, $[K_G]$, $\{\phi_i\}$ ve λ_i , sırasıyla plağın rijitlik matrisini, gerilme matrisini, öz vektörü ve özdeğeri göstermektedir. Bu özdeğer probleminin çözülmesinde kullanılan metotlar EK-2’de verilmiştir. ANSYS® programında özdeğer problem çözümü için belirlenen seçenekler aşağıda sırasıyla anlatılmıştır.



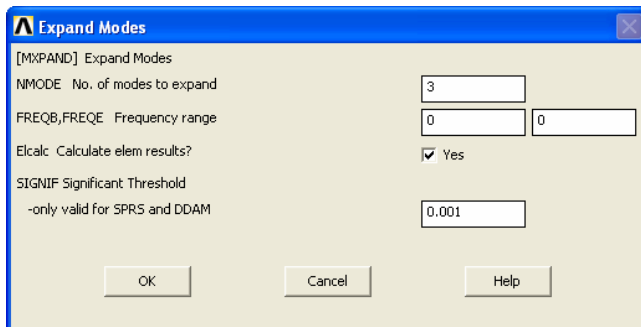
Şekil 3.3. Özdeğer burkulma seçenekler sekmesi

Şekil 3.3’de verilen “Eigenvalue Buckling Options” sekmesinden, iterasyon yönteminin belirlenmesi için karşımıza iki seçenek çıkmaktadır. Bunlardan biri, “Block Lanczos” olup titreşim problemlerinde kullanılmaktadır. Diğeri ise; analizlerde kullandığımız “Subspace” olup, burkulma problemleri için önerilen bir iterasyon yöntemidir. Ayrıca, aynı sekmede yer alan “NMODE” seçeneğine kaç tane özdeğer istenildiği girilir. “SHIFT” seçeneğine ise; özdeğerin ötelenmesi istenildiğinde, öteleme miktarının yazılacağı kısımdır.



Şekil 3.4. Alt bölge iterasyon seçenekler sekmesi

Şekil 3.4’de verilen “Subspace Eigenvalue Buckling” sekmesindeki seçeneklerden, “SUBSIZ” seçeneği, alt bölge iterasyon sisteminin kullanacağı başlangıç vektörünün sayısını belirlemek için kullanılır. Analizlerimizde varsayılan değeri “NMODE + 4” olarak alınır. “NPAD” seçeneği, başlangıç vektör sayısını artırmak için kullanılan diğer bir kısım olup, “0” değeri kullanılır. “NPERBK” seçeneğinde, hafızada tutulacak mod sayısını belirtir, analizde “0” değeri kullanılır ve bu durumda bütün mod bilgileri hafızada tutulur. “Strmck” seçeneği, yakınsamanın ve kontrolün yapılma aralığını belirler. Analizlerde “At shift+end pts” ifadesi, her öteleme sonrasında yakınsamanın ölçülmesi için seçilmiştir. “Number of subspace iterations” seçeneğinde ise; minimum ve maksimum iterasyon sayısı belirlenir. Analiz için; “NUMSSI” 100, “NSHIFT” 5 varsayılan değerleri alınmıştır.



Şekil 3.5. Mod genişletme sekmesi

Şekil 3.5’de verilen “Expand Modes” sekmesindeki seçeneklerden, “NMODE” seçeneğine, kaç modun genişletileceği girilmelidir. Bu değer, analizler için “3” alınmıştır. “FREQB, FREQE” seçeneği, titreşim problemleri için kullanılan bir kısımdır. “Ecalc” seçeneği ile elemansal (gerilme, gerinme) sonuçlar da elde edilir. Belirlenen bu seçeneklerin ANSYS® programına girilmesinden sonra ilgili çözüm yapılarak sonuçlar alınır. Bu sonuçlar kullanılarak III ve IV kısımda belirtilen analizlere başlanır (Bkz. Şekil 3.1).

3.5. Geometrik Olarak Lineer Olmayan Analiz Kısımının İncelenmesi

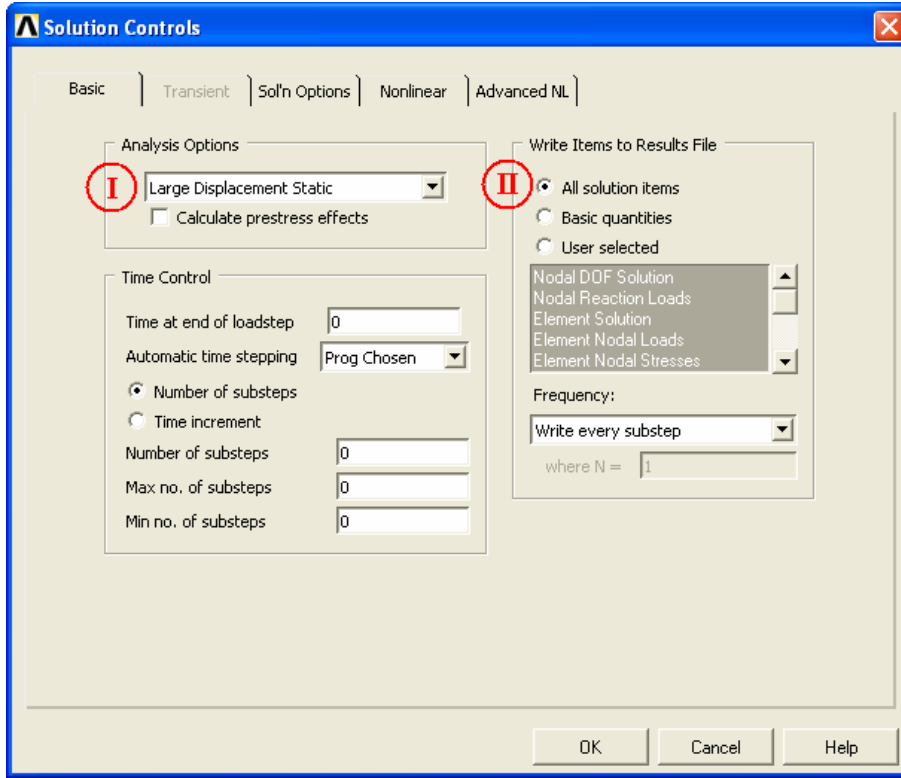
Geometrik olarak lineer olmayan analizine başlamadan önce III kısımda belirtilen statik analiz, kritik burkulma gerilmesi altında plakta meydana gelen daralmayı belirlemek amacıyla yapılır (Bkz. Şekil 3.1). Daha sonra IV kısımda belirtilen lineer olmayan analize başlanır. ANSYS® programı, geometrisi doğrusal olmayan sistemlerin çözümünde Newton-Raphson ve Arc-Length yöntemlerini kullanmaktadır. Bu kısma ait çözümleme seçenekleri ise; aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

3.5.1. Newton-Raphson metodu

Sonlu elemanlar yöntemi ile yapılan lineer olmayan analizlerinde, Newton-Raphson metodu kullanılmaktadır.

$$[K_i^T] \{\Delta u_i\} = \{F_{i+1}^a\} - \{F_{i+1}^{nr}\} \quad (3.2)$$

Burada; $[K_i^T]$ tanjant rijitlik matrisini, $\{\Delta u_i\}$ yerdeğiştirme vektöründeki artışı, $\{F_{i+1}^a\}$ plak üzerine uygulanan kuvveti, $\{F_{i+1}^{nr}\}$ elemanlar üzerindeki gerilmeyi oluşturan iç kuvveti göstermektedir. Bu iki kuvvet vektörü arasındaki fark denge dışında kalan yük vektörü ve tanjant matrisi yardımıyla analiz yapılmaktadır. Bu metodun detayları EK-3’de verilmiştir. ANSYS® programında bu metoda ilişkin seçenekler aşağıda verilmiştir.

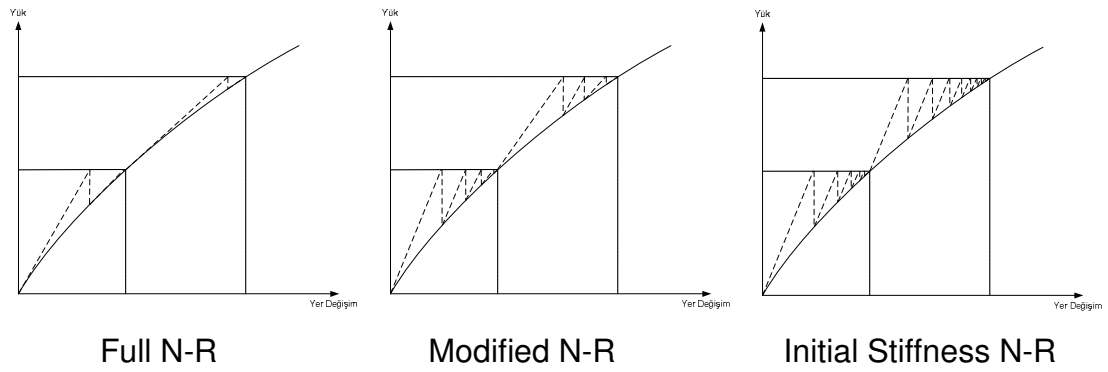


Şekil 3.6. Temel çözümleme seçenekleri

Şekil 3.6’da verilen temel çözümleme seçenekler sekmesinde I kısımda belirtilen “Analysis Options” bölümünde “Large displacement Static” seçilerek, Newton Raphson metodu aktif hale getirilmiş olunur. II kısımda ise; sonuç dosyalarına yazılacak bilgiler ve yazılma sıklığı burada belirtilir. “All solution items” ve “write every substep” seçilerek, her adımda bütün çözüm sonuçlarının dosyalanması sağlanır.

Ayrıca ANSYS® programında hesaplanan tanjant rijitlik matrisinin güncellenme sıklığı seçilebilmektedir. Tanjant rijitlik matrisinin güncellenme sıklığı için sunulan seçenekler aşağıda verilmiştir (Bkz. Şekil 3.7). Yapılan tüm analizlerde güncellenme sıklığı varsayılan değer olan “full” seçilmiştir. Diğer iterasyon sıklıkları, komut satırına “nropt, modified” ya da “nropt, init” yazılarak aktif hale getirilebilir.

- 1- Full – tangent stiffness matrix (tam) (tam – her iterasyon aşamasında) N-R
- 2- Modified (yenileme – her alt adım aşamasında) N-R
- 3- Initial Stiffness (başlangıç rijitlikli – sabit eğimli iterasyon) N-R



Şekil 3.7. Newton-Raphson lineer olmayan analiz tipleri [23]

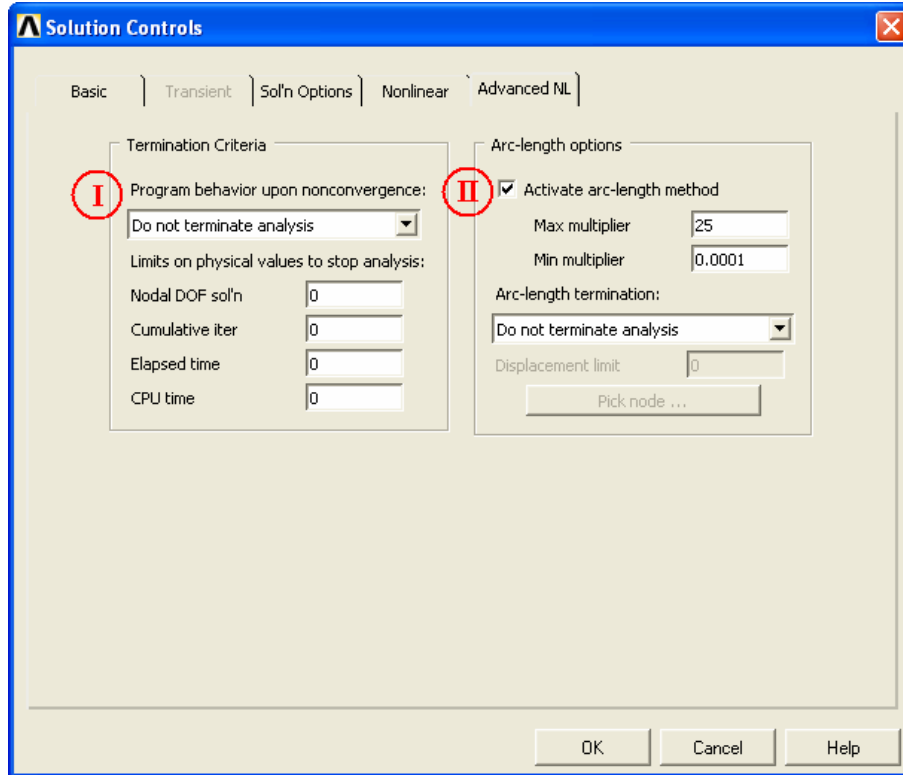
Newton-Raphson metodu, rijitliği sıfır veya eksi işaretli olan sistemlerde yetersiz kalmaktadır. Yay uzunluk (Arc-Length) metodu, bu gibi durumlarda da çözüm üretebilmektedir. Bu nedenle; yapılacak olan plak analizlerinde yay uzunluk metodu kullanılmıştır.

3.5.2. Yay uzunluk (Arc-Length) metodu

Yay uzunluk metodunda, yapıların sıfır ve/veya eksi rijitlik gösterdiği hallerde de analizleri yapılabilir. Bu metotta, Newton-Raphson metoduna ilave olarak λ şeklinde bir sabit gelir.

$$[K_i^T] \{\Delta u_i\} = \lambda \{F^a\} - \{F_i^{nr}\} \quad (3.3)$$

Bu sabit $-1,0 \leq \lambda \leq 1,0$ arasında bir değerdir. n adım sayısını, i ise; iterasyon sayısını göstermektedir. Bu değerın hesaplanmasına ilişkin formüller EK-3'te verilmiştir.



Şekil 3.8. İleri düzey lineer olmayan çözümleme seçenekleri

Şekil 3.8’de verilen ileri düzey lineer olmayan çözümleme seçenekler sekmesinde, I kısım olan çözümün kesilme kriterleri belirlenmekte olup, “Do not terminate analysis” seçeneği seçilerek çözümleme esnasında programın durması engellenmiş olunur. II kısımda ise “Arc-length” metodu aktif hale getirilerek sistemin kararsız hallerinin de analizini yapmak mümkün olmaktadır. Burada; maksimum ve minimum çarpanlar, “max multiplier” ve “min multiplier” değerleri, 25 ve 0,0001 varsayılan değerleri seçilmiştir. Aynı şekilde arc-length metodunun kesilme kriteri de “Do not terminate analysis” seçeneği seçilerek çözümleme esnasında programın durması engellenmiş olur.

Yukarıda belirlenen seçenekler ışığında yapılan analizden elde edilen sonuçlar, V kısımda belirtilen Microsoft Excel® programı yardımıyla grafik ve tablo haline getirilmiştir (Bkz. Şekil 3.1).

4. BAZI LİTERATÜR ÇALIŞMALARININ SAYISAL İNCELEMELERİ

Plakların burkulmasının, özdeğer probleminin çözümleri ve lineer olmayan analizleri ile ilgili olarak literatürde yer alan bazı çalışmalar, çözümlemeleri yapılarak incelenmiş ve iki ana başlık altında toplanmıştır. Bunlardan biri olan özdeğer probleminin çözümleri kısmında, 2. bölümde formüllerinin çıkarımı da yapılan desteksiz plakların burkulmasına ilişkin Timoshenko'nun ve destek elemanlı plakların burkulma analizini inceleyen Seide ve Alinia'nın çalışmaları incelenmiştir [4, 8, 26]. Diğer bir kısım olan lineer olmayan analiz kısmında ise, desteksiz plaklar için Hu, vd. ve destek elemanlı plakların bölgesel ve genel burkulmalarını incelediği Byklum'un çalışmalarına yer verilmiştir [18-20].

4.1. Özdeğer Problem Çözümlerinin Doğrulamaları

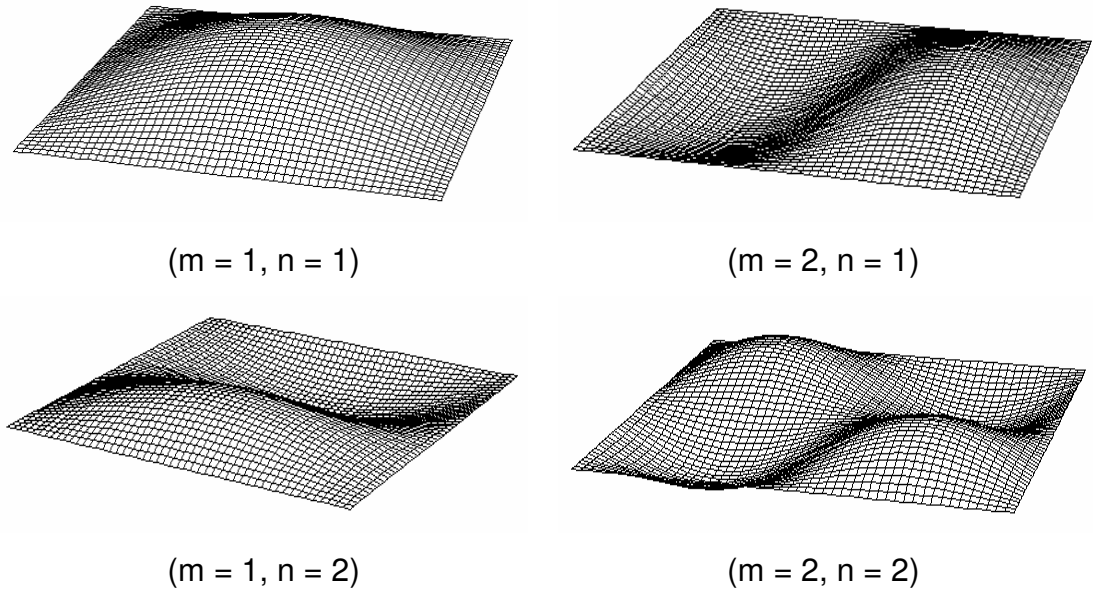
Desteksiz ve destek elemanlı plakların burkulma analizi ile ilgili yukarıda bahsedilen çalışmalar ANSYS® programı ile çözümlemeleri yapılarak incelenmiştir. Bu çalışmalardan elde edilen sonuçlar, grafik ve tablolar ile açıklanmıştır.

4.1.1. Desteksiz plaklar

Timoshenko'nun, iki yönden basınç kuvvetine maruz ve dört kenarı da basit mesnetli bir plağın burkulma analizine ilişkin analitik formülasyonlar 2. Bölümde incelenmiş ve elde edilen Eş. 2.29'daki kritik gerilme formülü, aşağıda Eş. 4.1'de tekrar verilmiştir [26].

$$\sigma = \frac{D \pi^2}{t b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2 \quad (4.1)$$

Formülde gösterilen m ifadesi, x eksenini boyunca oluşan yarım sinüzoidal dalga sayısını, n ifadesi ise; y eksenini boyunca oluşan yarım sinüzoidal dalga sayısını göstermektedir. Burkulmada istenen karakteristikteki mod belli ise, buna göre; m ve n ifadelerinin değerleri yerine yazılarak, burkulma gerilmesi bulunur. Burkulma karakteristikleri değiştirilerek çok sayıda burkulma gerilme değerleri hesaplanabilir. m ve n değerlerine bağlı olarak örnek burkulma modlarının grafiksel resimleri Microsoft Excel®'de çizilmiş ve Şekil 4.1'de gösterilmiştir.

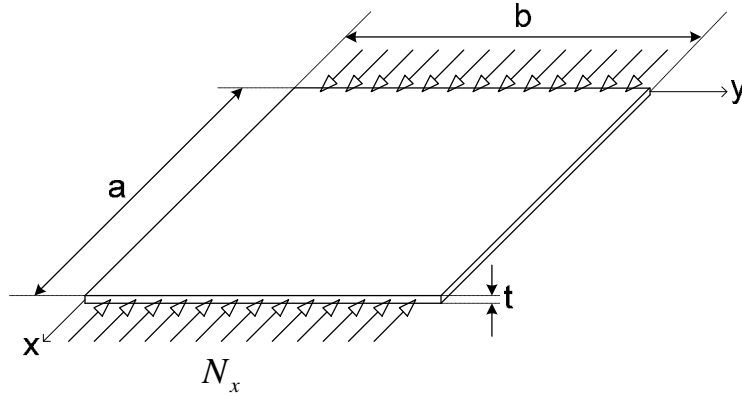


Şekil 4.1. Düz plakların burkulma modlarının grafiksel resmi

Yukarıda belirtilen açıklamaların sayısal uygulaması olarak, herhangi bir 300x300x1 (cm) (boy x en x kalınlık) boyutlarındaki yumuşak çelikten yapılmış bir plak ele alalım ve kritik burkulma gerilmesini hesaplamaya çalışalım.

Yumuşak çeliğin, elastisite modülü ile Poisson oranı Eş. 4.2'de verilmiştir [8].

$$E = 2,1.10^6 \text{ kgf / cm}^2 \quad \text{ve} \quad \nu = 0,3 \quad (4.2)$$



Şekil 4.2. Düz plak geometrisi

Şekil 4.2’de gösterilen 300x300x1 boyutlarındaki desteksiz yumuşak çelik plağın, $m = 1$ ve $n = 1$ için Eş. 4.1’e göre elde edilen; MathCad® programı ile çözümü aşağıda verilmiştir.

$$m := 1$$

$$n := 1$$

$$a := 300 \text{ cm} \quad E := 2.1 \cdot 10^6 \text{ kgf} / \text{cm}^2$$

$$b := 300 \text{ cm} \quad \nu := 0.3$$

$$t := 1 \text{ cm}$$

$$D := \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)}$$

$$\sigma_{kr} := \frac{D \cdot \pi^2}{t \cdot b^2} \cdot \left(\frac{m \cdot b}{a} + \frac{n^2 \cdot a}{m \cdot b} \right)^2$$

$$\sigma_{kr} = 84.35559 \text{ kgf} / \text{cm}^2$$

Yukarıda bahsedilen plağın, ANSYS® programı ile çözümleme aşamaları EK-4’te verilmiş olup, σ_{ANSYS} değerinin nasıl bulunduğu “6.1. Özdeğer Problem Çözümlerinin Sonuçları” adlı başlık altında detaylı olarak

incelenmektedir. Çizelge 4.1’de değişik m ve n değerleri için Eş. 4.1 ve ANSYS® programı kullanılarak hesaplanan σ değerleri, (%) relatif hata oranları ile birlikte gösterilmiştir.

Çizelge 4.1. $\sigma_{Analitik}$ ve σ_{ANSYS} arasındaki (%) relatif hata oranı

m	n	$\sigma_{Analitik}$ kgf / cm ²	σ_{ANSYS} kgf / cm ²	(%) Relatif Hata Oranı
1	1	84,356	84,233	0,145
2	1	131,806	131,460	0,262
3	1	234,321	233,480	0,359
4	1	380,918	379,173	0,458
1	2	527,222	525,833	0,263
2	2	337,422	335,493	0,572
3	2	396,003	392,813	0,805
4	2	527,222	522,080	0,975

Belirtilen plak için kritik burkulma gerilme değeri, Çizelge 4.1’deki en küçük σ , m = 1 ve n = 1 için hesaplanmış olan 84.356 kgf / cm² değeri olduğu sonucuna varılır. ANSYS® ile aynı mod için, bulunan σ kritik değeri 84.233 kgf / cm² olup, (%) relatif hata oranının % 0,145 olarak bulunmuştur.

4.1.2. Destek elemanlı plaklar

Bu bölümde, destek elemanlı plakların burkulma analizini inceleyen Seide ve Alinia’nın çalışmaları, ANSYS® programı ile karşılaştırmalı olarak tekrar çözümlere incelenecektir [4, 8].

Seide’nin potansiyel enerji denklemlerinden yararlanarak ayrıca burulma rijitliğini de dikkate alarak, dört kenarı da basit mesnetli destek elemanlı plak için geliştirdiği formülasyonlardan, 2. bölümde geniş olarak bahsedilmişti [4]. Bahsedilen bu formüllerin sayısal bir uygulaması olarak, 300 x 300 x 1 (cm) boyutlarındaki ve enine bir takviye elemanı ile desteklenmesi ile oluşan plağın kritik burkulma gerilmesi (σ_{kr}) hesaplanacaktır. Bu hesaplamada daha

önceden Eş. 2.55 - Eş 2.57’de verilmiş olan sırasıyla destek elemanlı plağın şekil değiştirme enerjisi (U), destek elemanlı plağa dışarıdan yapılan yüklemenin potansiyeli (T) ve destek elemanın şekil değiştirme ve burulma enerjisine ait ifade (U_d) ifadeleri kullanılacaktır.

Plak malzemesi olarak yine yumuşak çelik seçelim ve destek elemanın yüksekliği 5 cm, kalınlığı ise; 0,5 cm olsun. Bu değerlere göre MathCad® programı ile yapılan örnek çözüm aşağıda verilmiştir. Kronecker deltanın (δ) hangi değerleri alabileceği 2. bölümde daha önce anlatılmıştı.

Daha önce anlatılan formülasyonlar destek elemanın orta düzlemi ile plağın orta düzlemi ile çakışık olduğu durumlara aittir. Oysa ki; bizim incelediğimiz destek elemanlı plakta bu durum söz konusu değildir. Bunun gibi destek elemanın orta düzleminin, plağın orta düzleminden kayık olduğu durumlarda (plağın yalnızca tek tarafından destek verildiyse) burkulmaya karşı direncin arttığı da bilinmektedir. Bunun nedeni; atalet momentinin plak orta düzlemine göre alındığından değerinin yüksek çıkmasıdır. Burada bu değişiklik, formülasyonda destek elemanın EI eğilme rijitliğinin yerine, efektif eğilme rijitliğinin ikinci terimde eklenmesiyle sağlanmaktadır [26].

$$\frac{(EI)_f}{dD} = \frac{EI}{dD} + \frac{E \bar{A} z^2}{dD}$$

Burada; d , $\bar{A}$, z , $(EI)_f$ ve D , sırasıyla plak enin yarısını, destek elemanın kesit alanı destek elemanın orta düzlemi ile plak orta düzlemi arasındaki uzaklığını, destek elemanın efektif eğilme rijitliğini ve plağın eğilme rijitliğini göstermektedir.

$$\begin{aligned}
 E &:= 2.1 \cdot 10^6 & a &:= 300 & N &:= 2 \\
 \nu &:= 0.3 & b &:= 300 & d &:= 150 \\
 t &:= 1 & h &:= 10 & n &:= 1 \\
 & & ts &:= 0.5
 \end{aligned}$$

$$D := \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)}$$

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$$I_x := \frac{1}{3} \cdot ts \cdot h^3$$

$$I_y := \frac{1}{12} \cdot ts^3 \cdot h$$

$$I_o := I_x + I_y$$

$$J := \sqrt{\frac{I_o}{h \cdot ts}}$$

$$U := \frac{D \cdot N \cdot d \cdot b \cdot \pi^4}{8} \cdot \left(\frac{n^2}{N^2 \cdot d^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2$$

$$Ud1 := \frac{\pi^4 \cdot E \cdot I_o}{4 \cdot b^3} \cdot \sum_{c=1}^N \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot c}{N}\right)^2 + \left[\frac{\pi^4 \cdot G \cdot J}{4 \cdot N^2 \cdot d^2 \cdot b} \cdot \left[\left(n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot 0}{N}\right) \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \right] \right]_{c=0}$$

$$Ud2 := \left[\frac{\pi^4 \cdot G \cdot J}{4 \cdot N^2 \cdot d^2 \cdot b} \cdot \left[\left(n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot 1}{N}\right) \right)^2 \cdot \frac{1}{3} \right] \right]_{c=1} + \left[\frac{\pi^4 \cdot G \cdot J}{4 \cdot N^2 \cdot d^2 \cdot b} \cdot \left[\left(n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot 2}{N}\right) \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \right] \right]_{c=2}$$

$$T := \frac{\pi^2 \cdot t \cdot b}{8 \cdot N \cdot d} \cdot n^2$$

$$\sigma_{kr} := \frac{U + Ud1 + Ud2}{T}$$

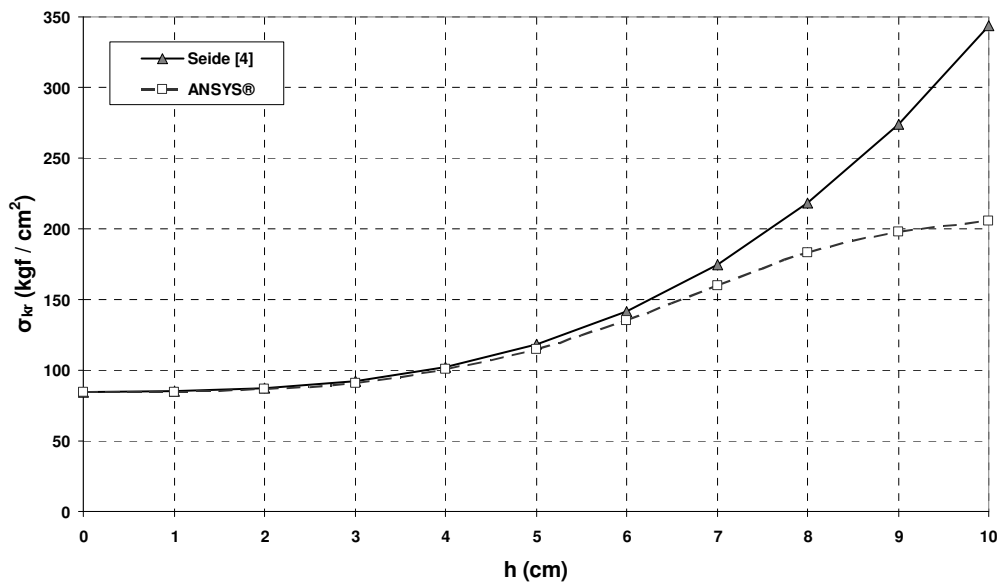
$$\sigma_{kr} = 343.804 \text{ kgf} / \text{cm}^2$$

Yukarıda sözü edilen formülasyonlarla, belirtilen destek elemanlı plağın, destek eleman yüksekliği değiştirilerek, kritik burkulma gerilmeleri hesaplanmış ve ANSYS® sonuçları ile karşılaştırmalı olarak Çizelge 4.2’de verilmiştir.

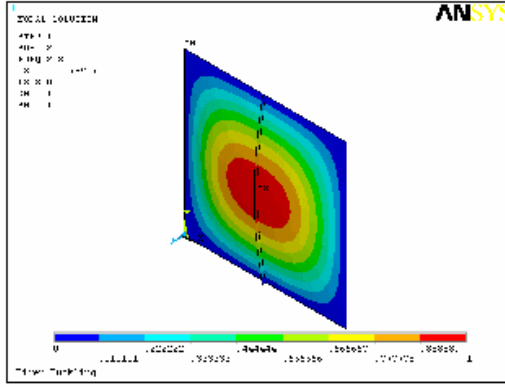
Çizelge 4.2. 300x300x1 boyutlarındaki tek destek elemanlı plağın $\sigma_{Analitik}$ ve σ_{ANSYS} arasındaki (%) relatif hata oranı [4]

h (cm)	t_s (cm)	$\sigma_{Analitik}$ <i>kgf / cm²</i>	σ_{ANSYS} <i>kgf / cm²</i>	(%) Relatif Hata Oranı
0	0,5	84,356	84,233	0,146
1	0,5	84,979	84,527	0,532
2	0,5	87,122	86,347	0,890
3	0,5	92,339	91,173	1,262
4	0,5	102,162	100,360	1,764
5	0,5	118,127	114,967	2,675
6	0,5	141,769	135,307	4,558
7	0,5	174,622	159,747	8,519
8	0,5	218,222	182,747	16,257
9	0,5	274,105	197,880	27,809
10	0,5	343,804	205,780	40,146

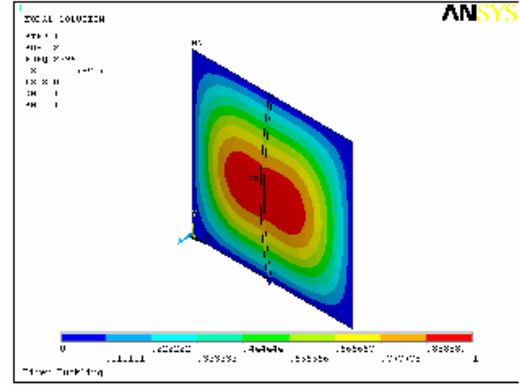
Burada; h ve t_s, sırasıyla destek elemanın boyu ve kalınlığıdır. Çizelge 4.2’de verilen değerlere göre; Şekil 4.3’deki grafik elde edilmiştir.



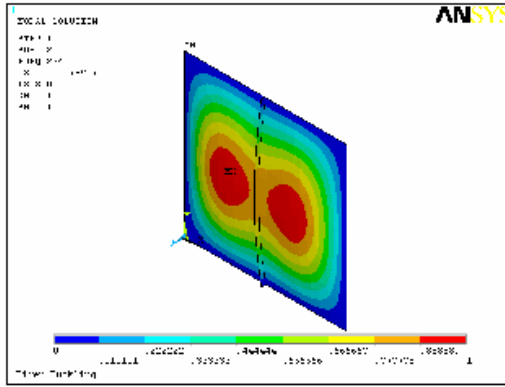
Şekil 4.3. Destek eleman yüksekliğine bağlı genel kritik burkulma gerilmesinin değişimi



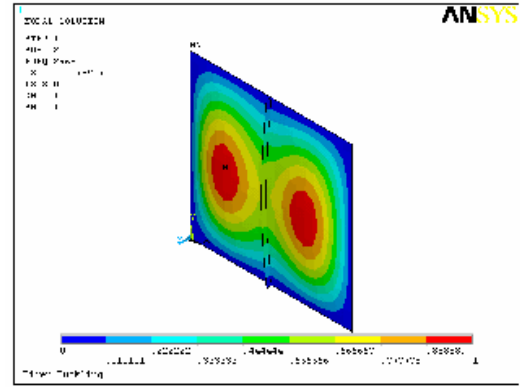
(g)



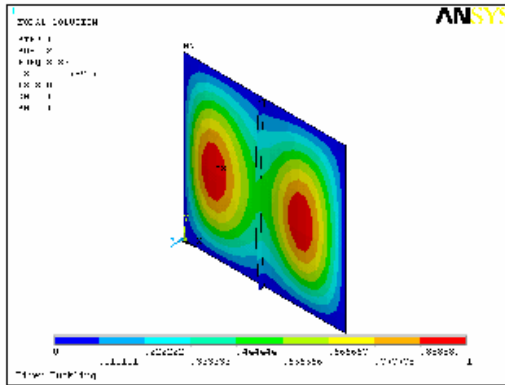
(h)



(i)



(j)

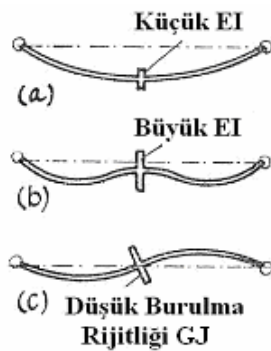


(k)

Şekil 4.4. (Devam) 300x300x2 boyutlarındaki ve sabit 0,5 cm kalınlıktaki destek elemanlı plağın takviye eleman yüksekliğine bağlı kritik burkulma modlarının değişimleri
a) $h = 0$ b) $h = 1$ c) $h = 2$ d) $h = 3$ e) $h = 4$ f) $h = 5$
g) $h = 6$ h) $h = 7$ i) $h = 8$ j) $h = 9$ k) $h = 10$ (cm)

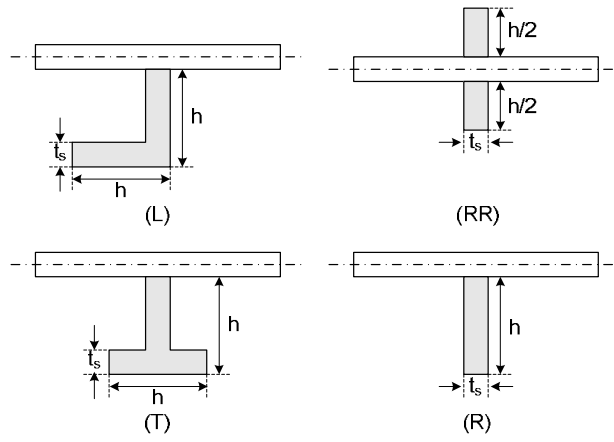
Şekil 4.3’de verilen grafiğe göre destek eleman yüksekliği artıkcça Seide ile ANSYS® çözümleri arasındaki (%) relatif hata oranı %0,146 değeriinden % 40,146 değeriine kadar artış göstermektedir [4]. Bunun nedeni de şu şekilde açıklanabilir. Destek elemanlı plakların analitik çözümünde, plak deformasyonu çift Fourier serisi ile temsil edilmektedir. Bu nedenle burkulma modları sinüs eğrileri şeklinde olmaktadır. Halbuki ANSYS® sayısal çözümlerinde kullanılan yerdeğişimi fonksiyonlarında, destek elemanlar ve plak ana gövdesi için ayrı ayrı sinüs ve / veya cosinüs eğrilerinin incelenme durumu olmadığından farklılıklar görülmektedir (Bkz. Şekil 4.4). Çünkü; sonuçlar “süperpozisyon edilmiş alt rijitlik matrislerinin” genel çözümü şeklindedir. Analitik ifadeler ile çözümlerlerde ise, destek elemanın eğilme (EI) ve burulma (GJ) rijitliğinin genel burkulma hallerine olan etkileri, denklemlere sinüs ve / veya cosinüs eğrilerinin genel formu şeklinde ayrı ayrı terimler halinde eklenmesiyle oluşmaktadır. Bu ifadeler, yer değışimi fonksiyonlarının çarpımları şeklinde görülmektedir [12].

Eğilme rijitliğinin değeriine bağıli olarak değışen örnek burkulma modları Şekil 4.5.a ve Şekil 4.5.b ‘de gösterilmiştir. Burulma rijitliğine bağıli olarak da ortaya çıkan simetrik olmayan mod şekli Şekil 4.5.c ‘de görüldüğü gibidir. Çalışmalar, hangi modun plak geometrilerine ve seçilen malzeme özelliklerine bağıli bir unsur olarak ortaya çıkacağı dikkate alınarak yapılmalıdır.



Şekil 4.5. Eğilme ve burulma rijitliğine bağıli mod şekilleri [28]

Alinia'nın yapmış olduğu çalışma, destek elemanlı çelik plaklarla ilgili incelenen diğer bir çalışmadır [8]. Alinia, iki tarafından basma kuvvetine maruz bırakılan, Şekil 4.6'da gösterilen dört değişik takviye elemanı ile desteklenmiş plaklarda burkulma analizini ANSYS® v5.4 sonlu elemanlar programı ile yapmıştır [8]. Shell 63 tip kabuk elemanı kullanılmış ve plağın 4 kenarı da basit mesnetli olarak kabul edilmiştir.



Şekil 4.6. Takviye eleman tipleri [8]

Alinia, plağın ve destek elemanın malzemesi olarak $E = 2,1.10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ve $\nu = 0,3$ olan yumuşak çelik seçmiştir [8]. Değişik kalınlıkta, 300x300, 500x500, 200x100 ve 600x200 boyutlarında ve farklı sayıda takviye elemanlarla desteklenmiş plaklar için kritik burkulma gerilmeleri bulunmuş ve sonuçları tablolarda göstermiştir.

Bulunan bu kritik burkulma gerilmelerine göre; flanşlı destek eleman tiplerinin (T ya da L) daha etkili bir güçlendirme yapacağı kanısına varılmıştır. Alinia, ayrıca destek elemanın optimum boyutlandırılması üzerine de çalışmıştır [8]. Örneğin; optimum boyutlandırılmış 300x300x1 boyutundaki plaklar için destek eleman yüksekliğini 0,5 cm olarak, destek eleman kalınlığını ise; 8,74 cm olarak bulmuştur. Destek elemanın optimum boyutlandırması için destek eleman kalınlığı ile yüksekliği arasındaki bağıntıyı veren grafiği de elde etmiştir.

Alinia'nın yapmış olduğu çalışmalardan bazıları seçilerek ANSYS® programında özdeğer problemlerinin çözümleri tarafımızca da yapılarak karşılaştırmalı olarak Çizelge 4.3'de verilmiştir. ANSYS® programında yapılan analizlerin detayları 3. Bölümde anlatılmıştır.

Çizelge 4.3. Basit mesnetli destek elemanlı plaklar için, Alinia'nın ve ANSYS® programından elde edilen sonuçlar [8]

Plak			Destek Eleman			Alinia [8] $\sigma_{kr} (kgf / cm^2)$	ANSYS® $\sigma_{kr} (kgf / cm^2)$	(%)Relatif Hata Oranı
a	b	t	η	h	t_s			
500	500	1,5	3	8	2,4	238	237,84	0,07
				10	2,4	390	387,04	0,76
			4	8	2,4	279	278,44	0,20
				10	2,4	469	463,63	1,15

Çizelge 4.3'de verilen tabloda, η destek eleman sayısını göstermekte olup, 500x500x1,5 boyutundaki plak için 3 ve 4 takviye elemanınca desteklenmiş plakların analiz sonuçlarına yer verilmiştir. Alinia ile ANSYS® sonuçları karşılaştırıldığında ortalama % 0,545 oranında bir hata olduğu görülmüştür [8]. Hata oranlarının makul değerlerde olmasından dolayı, analizlerde kullanılan yöntemlerin doğru olduğu kanısına varılmıştır.

4.2. Lineer Olmayan Analiz Doğrulamaları

Özdeğer problem çözümlerinin yanı sıra, lineer olmayan analizler de bu araştırmada incelenmiştir. Bu araştırma içerisinde desteksiz ve destekli plakların lineer olmayan analizi ile ilgili Hu, vd, Bulson'un ve Byklum'un yapmış olduğu çalışmalar dikkate alınmıştır [18-20, 28]. Bu çalışmaların sonuçları, aynı problemler için ANSYS® programından alınan değerlerle karşılaştırılmıştır. İleriki bölümlerde; yapılan çalışmalar desteksiz ve destekli plaklar için ayrı ayrı başlıklarda gösterilecektir.

4.2.1. Desteksiz plaklar

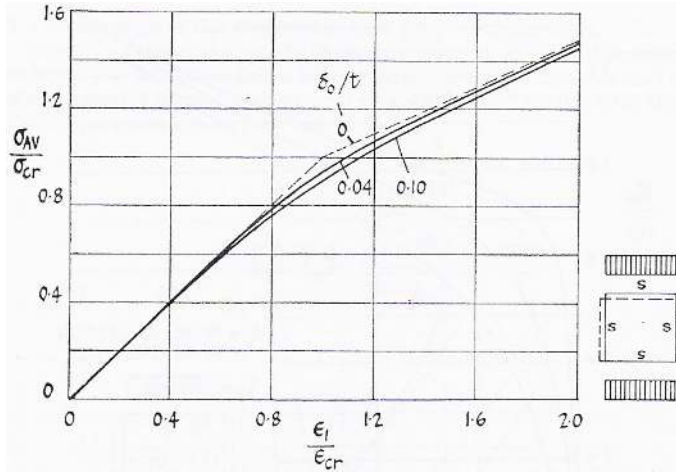
Hu vd. çalışmalarında, iki yönden basma kuvvetine maruz kalan, desteksiz kare plakların basit mesnet sınır şartı altındaki lineer olmayan analizine ait sayısal testlerini yapmışlardır [18]. Kare plaklara yapılan yükleme sonucunda tüm kenarların x-y düzlemi içinde eğilmediği, yani düz kaldığını kabul edilmiştir. Ayrıca analizi yapılacak plakların tam merkezinden, z yönünde ilk başlangıç sehiminin (δ_o) olduğunu kabul etmişler ve bu ilk sehim değeri ile plak kalınlığı arasında (δ_o/t) oranını oluşturmuşlardır. Daha sonra δ_o/t oranı; (0,0), (0,01), (0,04) ve (0,1) olan plaklar için analizler yapmışlardır. Plak analizinde kullanılacak olan plağın ilk sehimini ile plak deformasyon ifadeleri Eş. 4.4'de sırasıyla verilmiştir. Örneğin; $\delta_o/t = 0,0$ olması durumunda, $w_o = 0,0$ olacaktır.

$$w_o = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{o mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}$$

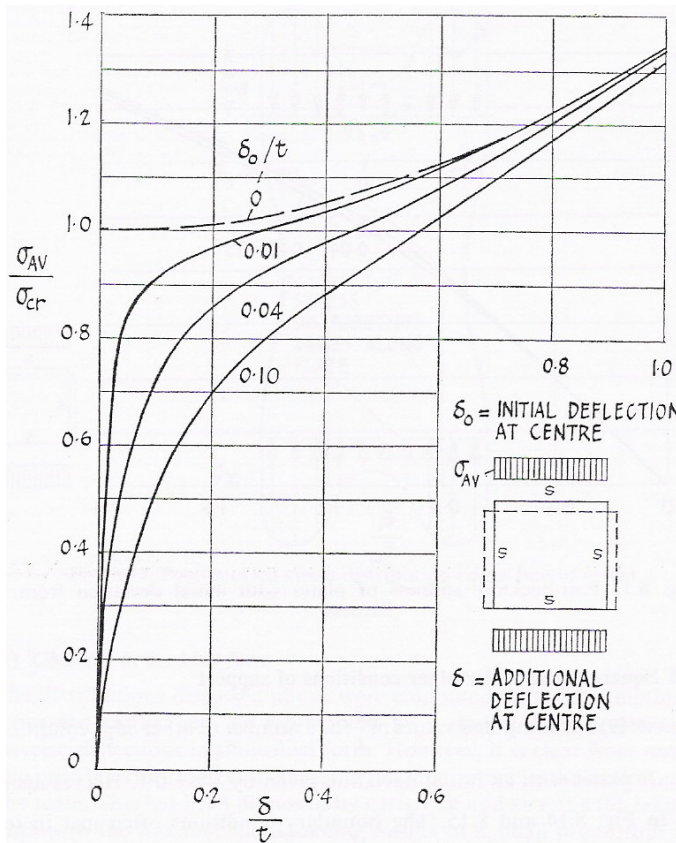
$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \quad (4.4)$$

Bu ifadeler, plakların lineer olmayan analizinde kullanılan ve aşağıda verilen Eş. 2.63'de verilen denklemde yerine konularak Şekil 4.7 ve Şekil 4.8'de gösterilen grafikler çizmişlerdir. Bu denklemde yer alan F gerilme fonksiyonu, w ve w_o deformasyon ifadelerine bağlıdır.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{t}{D} \left[\frac{q_z}{t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]$$



Şekil 4.7. Desteksiz izotropik plağın relatif gerilmesinin, relatif gerinmeye göre değişim grafiği [28]



Şekil 4.8. Desteksiz izotropik plağın relatif gerilmesinin, δ_o/t oranına göre değişim grafiği [28]

Yukarıda sonuçları verilen bu analitik çalışmaya göre; aynı şartlarda ele alınan her kare plak için, aynı sonuçların elde edileceği görülmüştür. Sayısal

bir uygulama için ele alacağımız, 200x200x2 boyutundaki kare bir plağın, uygulaması 6. bölümde anlatılacak olan, ANSYS® programından elde edilen lineer olmayan analiz sonuçları ise Çizelge 4.4'te H_u , vd. analitik sonuçları ile karşılaştırılmalı olarak verilmiştir [18].

δ_o / t oranına bağlı olarak düzenlenen bu çizelgede, ANSYS® programından elde edilen relatif gerilmeye ($\sigma_{ort} / \sigma_{kr}$) göre; plak merkezinde meydana gelen z yönündeki deformasyonun plak kalınlığına oranının (δ / t) değişimi ve relatif gerinmenin ($\varepsilon / \varepsilon_{kr}$) değişimine yer verildi. Ayrıca H_u , vd.'nin elde ettiği sonuçlarla, ANSYS® programından elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak, (%) relatif hata oranları da belirtilmiştir [18].

Çizelge 4.4. Basit mesnetli desteksiz kare plak için, H_u , vd.'nin ve ANSYS® programından elde edilen sonuçlar [18]

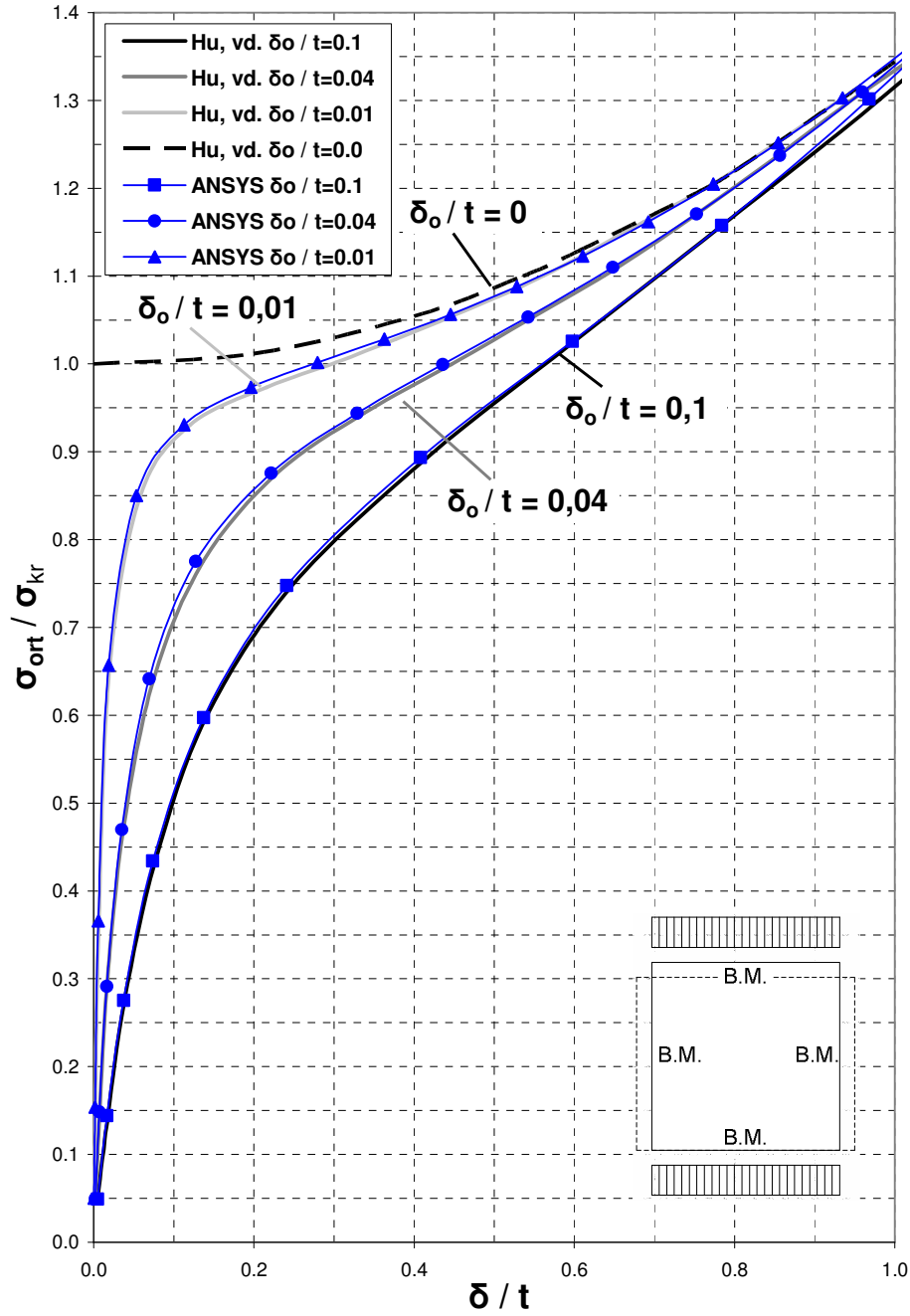
$\delta_o / t = 0.1$						
$\sigma_{ort} / \sigma_{kr}$	δ / t ANSYS®	δ / t H_u [18]	(%) Relatif Hata Oranı	$\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ ANSYS®	$\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ H_u [18]	(%) Relatif Hata Oranı
0,049	0,005	0,005	0,000	0,049	0,049	0,049
0,144	0,017	0,018	7,097	0,144	0,144	0,166
0,275	0,037	0,039	3,576	0,276	0,275	0,395
0,434	0,074	0,077	4,148	0,438	0,437	0,273
0,597	0,137	0,140	2,209	0,608	0,612	0,613
0,748	0,241	0,248	2,707	0,777	0,785	1,034
0,894	0,408	0,416	1,973	0,968	0,998	2,936
1,026	0,597	0,600	0,493	1,175	1,186	0,932
1,158	0,784	0,785	0,052	1,405	1,444	2,656
1,302	0,968	0,982	1,464	1,671	1,700	1,734
1,461	1,148	1,181	2,773	1,975	1,996	1,033

Çizelge 4.4. (Devam) Basit mesnetli desteksiz kare plak için, H_u , $vd.$ 'nin ve ANSYS® programından elde edilen sonuçlar [18]

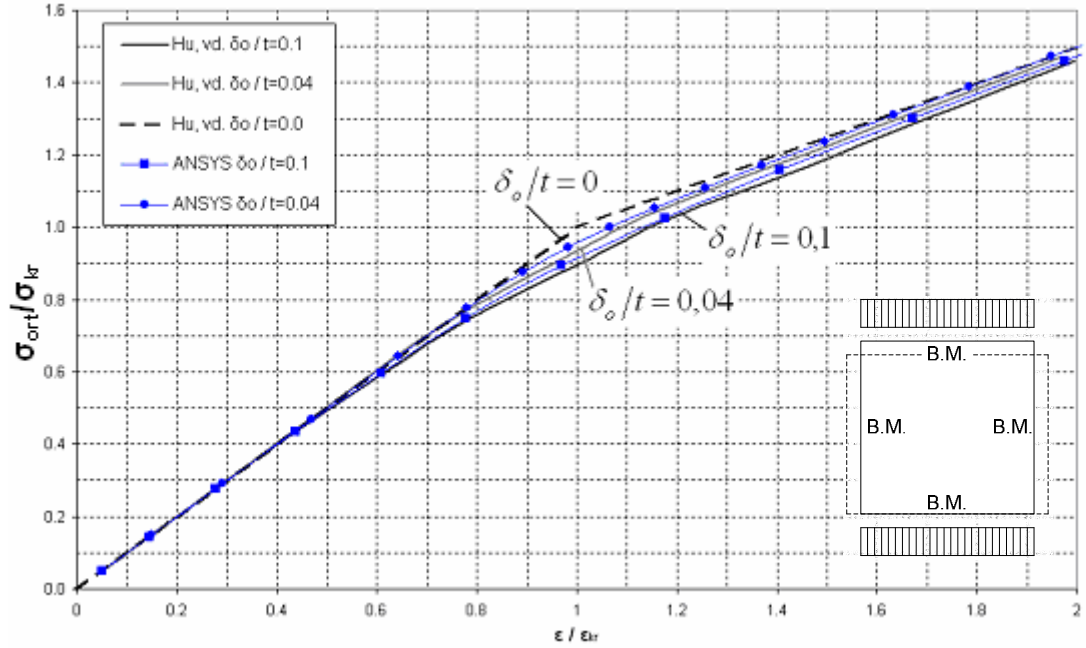
$\delta_o / t = 0.04$						
$\sigma_{ort} / \sigma_{kr}$	δ/t ANSYS®	δ/t Hu [18]	(%) Relatif Hata Oranı	$\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ ANSYS®	$\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ Hu [18]	(%) Relatif Hata Oranı
0,049	0,002	0,002	0,000	0,049	0,049	0,530
0,148	0,007	0,007	7,455	0,148	0,148	0,510
0,291	0,016	0,017	1,817	0,290	0,291	0,467
0,470	0,035	0,037	5,499	0,468	0,467	0,228
0,642	0,069	0,075	7,582	0,641	0,638	0,476
0,775	0,128	0,137	6,789	0,779	0,785	0,769
0,876	0,222	0,229	3,294	0,892	0,919	2,959
0,944	0,329	0,337	2,547	0,981	1,014	3,205
0,999	0,436	0,446	2,362	1,066	1,091	2,318
1,053	0,542	0,548	1,176	1,156	1,176	1,633
1,110	0,648	0,654	0,992	1,257	1,278	1,630
1,171	0,753	0,753	0,087	1,369	1,393	1,737
1,238	0,857	0,854	0,262	1,494	1,522	1,815
1,310	0,960	0,960	0,087	1,633	1,662	1,763
1,388	1,062	1,087	2,373	1,784	1,811	1,468
1,472	1,162	1,224	5,034	1,949	1,971	1,109
$\delta_o / t = 0.01$						
$\sigma_{ort} / \sigma_{kr}$	δ/t ANSYS®	δ/t Hu [18]	(%) Relatif Hata Oranı	$\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ ANSYS®		
0,050	0,001	0,00	0,000	0,050		
0,154	0,002	0,00	9,732	0,153		
0,366	0,006	0,01	9,392	0,364		
0,657	0,019	0,02	6,489	0,653		
0,850	0,053	0,06	8,396	0,846		
0,931	0,113	0,12	6,535	0,930		
0,974	0,196	0,216	8,937	0,981		
1,002	0,280	0,302	7,375	1,022		
1,028	0,363	0,377	3,694	1,066		
1,057	0,446	0,452	1,399	1,117		
1,088	0,528	0,533	0,967	1,175		
1,123	0,610	0,609	0,280	1,241		
1,162	0,692	0,687	0,767	1,315		
1,205	0,774	0,772	0,139	1,398		
1,252	0,854	0,852	0,219	1,490		
1,303	0,935	0,936	0,117	1,589		

Plâğın relatif gerilmesinin, relatif gerinmesine göre değişim grafiğinde ve plâğın relatif gerilmesinin, δ_o / t oranına göre değişim grafiğinde verilen

sonuçlar, ANSYS® programı yardımıyla bulunan sonuçlarla karşılaştırmak için, Şekil 4.9 ve Şekil 4.10'daki grafikler birlikte çizilerek gösterilmiştir (Bkz. Şekil 4.7 - Şekil 4.8).



Şekil 4.9. Plağın relatif gerilmesinin, δ_o / t oranına göre değişim grafiği



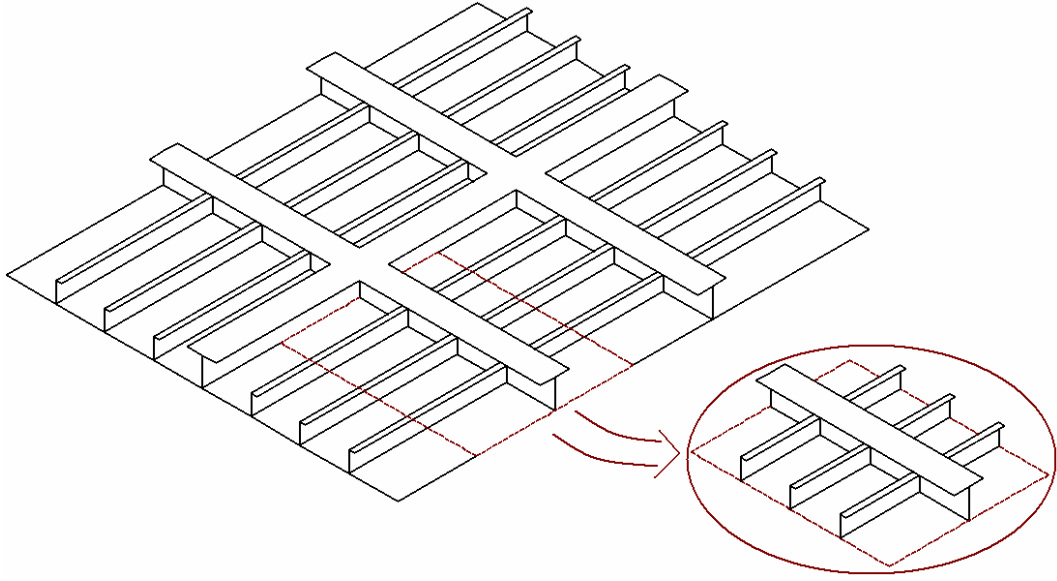
Şekil 4.10. Plâğın relatif gerilmesinin, relatif gerinmeye göre değişim grafiği

Şekil 4.9 ve Şekil 4.10'da verilen grafikler ve Çizelge 4.4'de verilen (%) relatif hata oranları incelendiğinde; ANSYS® programıyla bulunan sonuçların, Hu, vd.'nin sonuçlarıyla olan uygunluğu görülmektedir [18]. Destek elemanlı plaklar için uygulanan lineer olmayan çözümleme adımlarının doğruluğunu göstermek amacıyla da Byklum'un çalışmaları da ayrıca incelenmiştir [19-20].

4.2.2. Destek elemanlı plaklar

Byklum tarafından yapılan çalışmalarda gemi gövdelerindeki destek elemanlı alüminyum ve çelik plakların lineer olmayan analizleri incelenmiştir [19-20]. Analizler, yazar tarafından geliştirilen yarı analitik bir yöntem ile ve ABAQUS® sonlu elemanlar programı kullanılarak yapılmıştır.

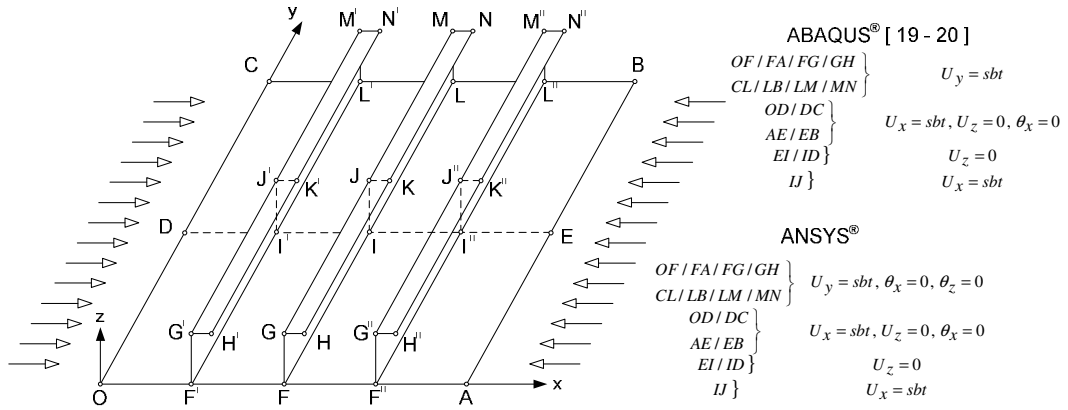
Byklum çalışmalarını, 2. Bölümde açıklamaları yapılan bölgesel (local buckling) ve genel (global buckling) olmak üzere iki burkulma tipine göre sınıflandırmıştır. Yazarın bölgesel burkulmayı ele aldığı ilk çalışması incelenerek, aşağıdaki çözüm aşamaları ve sonuçlar elde edildi.



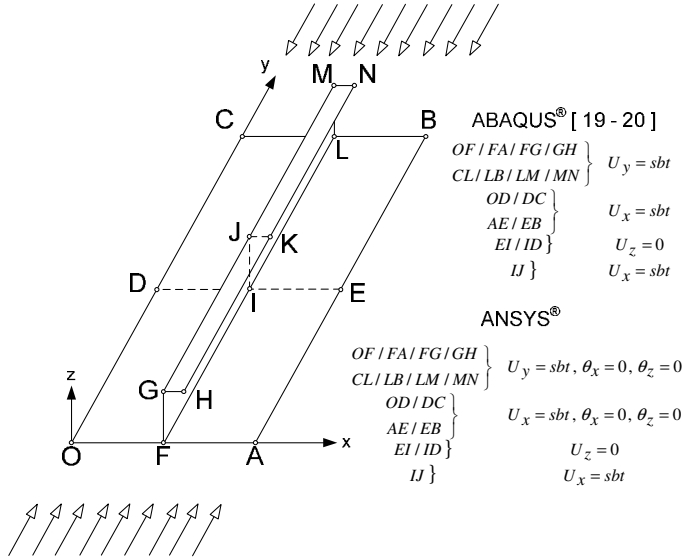
Şekil 4.11. Analizi yapılan destek elemanlı plağın genel görünümü [19]

Enine ve boyuna destek elemanlı plağın, tamamını ele almak yerine, Şekil 4.11’de gösterildiği gibi enine 3 takviye elemanlı boyuna da tek takviye elemanlı olarak tekrarlanan kısımlardan sadece birini ele alarak, plağın lineer olmayan analizi yapılmıştır. Ele alınan bu kısım bir bütünden çıkarıldığı için, sınır şartları Şekil 4.12’de gösterildiği gibi uygulanmıştır. Burada; yanal yüklemenin yapıldığı kenarlarda, büyük boyutlu “T” destek elemanlardan dolayı basit mesnetli sınır şartlarını, diğer kenarlarda da plağın devamlılığını sağlamak için simetri sınır şartları seçilmiştir. Plağın ortasında bulunan büyük boyuttaki “T” destek elemanını modellemek yerine, Şekil 4.12’de gösterilen sınır şartları ile bu destek elemanın etkisini ortaya koymaya çalışmış ve sonlu eleman modelini buna göre oluşturmuştur.

Eksenel yüklemede ise; söz konusu analizi, Şekil 4.12 ve Şekil 4.13’den anlaşılacağı gibi bütün plaktan çıkarttığı bu kısmın, birbirine benzeyen üç bölümünden, sadece birini kullanarak oluşturduğu sonlu elemanlar modeliyle yapmıştır. Bu plağa uygulanan sınır şartları ise; Şekil 4.13’te gösterilmiş olup, plağın devamlılığını sağlamak amacıyla tüm kenarlarında simetri sınır şartlarını uygulamıştır.



Şekil 4.12. ABAQUS® ve ANSYS® için yanal yüklemeye maruz kalan plağın sınır şartları [19-20]



Şekil 4.13. ABAQUS® ve ANSYS® için eksenel yüklemeye maruz kalan plağın sınır şartları [19-20]

Şekil 4.12 ve Şekil 4.13'deki sınır şartları aşağıda sırasıyla açıklanmaktadır.

1 – Şekil 4.11'deki ana gövdeden tekrarlanan kısımlarına göre çıkarılan desteklenmiş plak elemanın tanımlanması dört kenarına simetri sınır şartlarının uygulanması ile yapılmıştır. Şekil 4.11'de plağın ortasında bulunan büyük boyuttaki "T" destek elemanını geometri ve ağ sistemi ile modellemek yerine, Şekil 4.12'de gösterilmekte olan sınır şartları ile tanımlanmıştır. Bu kısım iki alt başlıkta kısaca özetlenebilir;

a) Noktalı çizgiyle gösterilen DI / IE kenarlarında $U_z = 0$, IJ kenarında ise $U_x = sbt$ ve JK kenarı da serbest olarak tanımlanmıştır. Böylece IJK destek elemanı deformasyondan önce ve sonra ana gövdeyle olan dikliğini korumaktadır.

b) OF / FA / FG / GH ve CL / LB / LM / MN kenarlarında plağın devamlılığını sağlamak için simetri sınır şartı kullanılmıştır. Bu iki kenarda çarpılmaya izin verilmediği gibi karşılıklı kenarların birbirine paralel kalması sağlanmıştır.

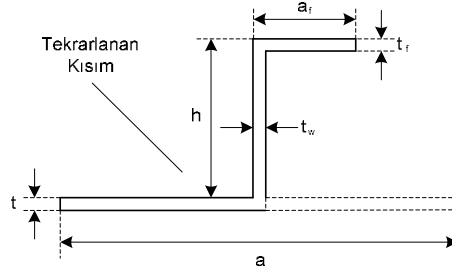
Bu şekilde eksenel yükleme altında yalnızca bölgesel burkulma analizinin oluşumu incelenmiştir (ANSYS® ve ABAQUS®).

2 – Şekil 4.11'deki ana gövdedeki üç tekrarlanan kısımdan çıkarılan desteklenmiş plak elemanın tanımlanması iki kenarına simetri, diğer iki kenarına da basit mesnet sınır şartının uygulanması ile yapılmıştır. Büyük "T" destek elemanı yukarıda tanımlandığı gibi burada da kullanılmıştır. AB ve OC kenarları basit mesnet sınır şartları ile tanımlanmıştır. Diğer karşılıklı iki kenarda da 2-b'de anlatılan sınır şartları kullanılmıştır.

Bu şekilde yanal yükleme altında genel ve bölgesel burkulma analizleri ve eksenel yükleme altında genel burkulma analizleri incelenmiştir (ANSYS® ve ABAQUS®).

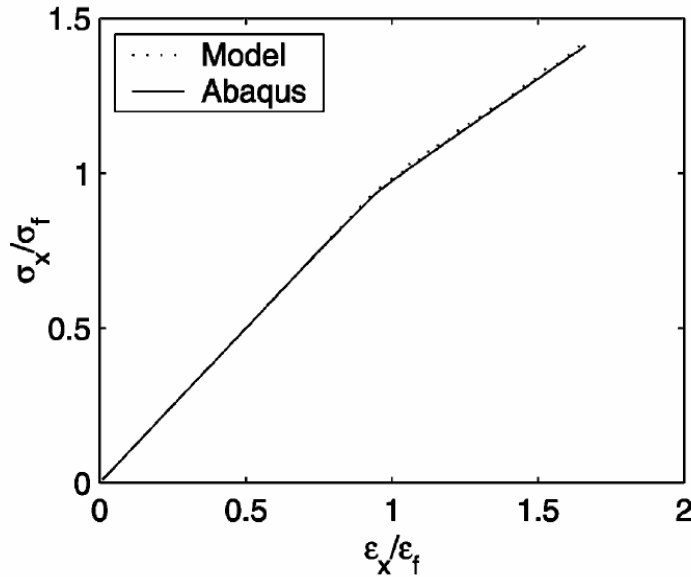
Sınır şartları belirlenen plağın ve destek elemanın geometrisi ise; Çizelge 4.5'de verilmiştir. Kullandığı çelik malzemenin, elastisite modülü $E = 2,08 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ve Poisson oranı $\nu = 0,3$ olarak verilmektedir.

Çizelge 4.5. Plağın ve destek elemanın geometrisi (cm, kgf/cm²) [19]

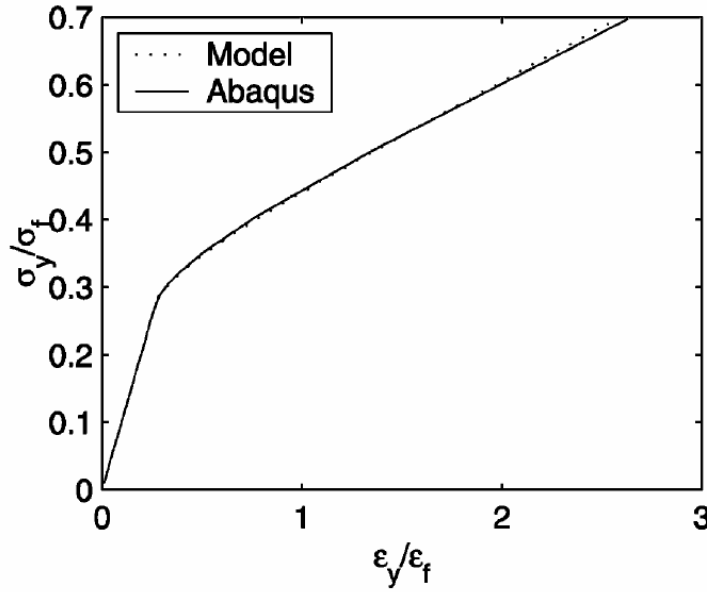


a	b	t	h	t_w	a_f	t_f	σ_f
85	273	1,65	35	1,2	10	1,7	3550

Byklum lineer olmayan analizinden önce, özdeğer probleminin çözümünü gerçekleştirmiştir [19]. Bu analizin sonucunda; σ_{kr} ve ilgili burkulma modunu elde etmiş ve daha sonra da lineer olmayan analizine geçmiştir. Özdeğer problemin çözümünden elde ettiği bu burkulma modundaki deformasyonun 1,0 mm olması durumundaki şartlar için analizi yapmış ve analiz sonuçlarından elde ettiği grafikleri, Şekil 4.14 ve Şekil 4.15’de görüldüğü gibi vermektedir.



Şekil 4.14. Eksenel yükleme altında Byklum’un bölgesel burkulma durumu için elde ettiği lineer olmayan analiz sonuçları [19]



Şekil 4.15. Yanal yükleme altında Byklum'un bölgesel burkulma durumu için elde ettiği lineer olmayan analiz sonuçları [19]

Aynı plak geometrisi için, analize ANSYS® sonlu elemanlar programında plak modellerine uygulanan sınır şartlarında bazı ufak değişiklikler yapılarak başlanır. Yapılan bu değişikliklerin nedeni; ANSYS® sonlu elemanlar programındaki simetri sınır şartı uygulamasının farklı olarak tanımlanmasından kaynaklanmaktadır. ANSYS® programında, plağa uygulanan yer değişim sınır şartları Şekil 4.12 ve Şekil 4.13'de detaylı bir şekilde yer almaktadır.

ANSYS® programında yapılan analiz sonuçları, Byklum'un sonuçlarıyla karşılaştırmalı olarak Çizelge 4.6'da verilmiştir [19].

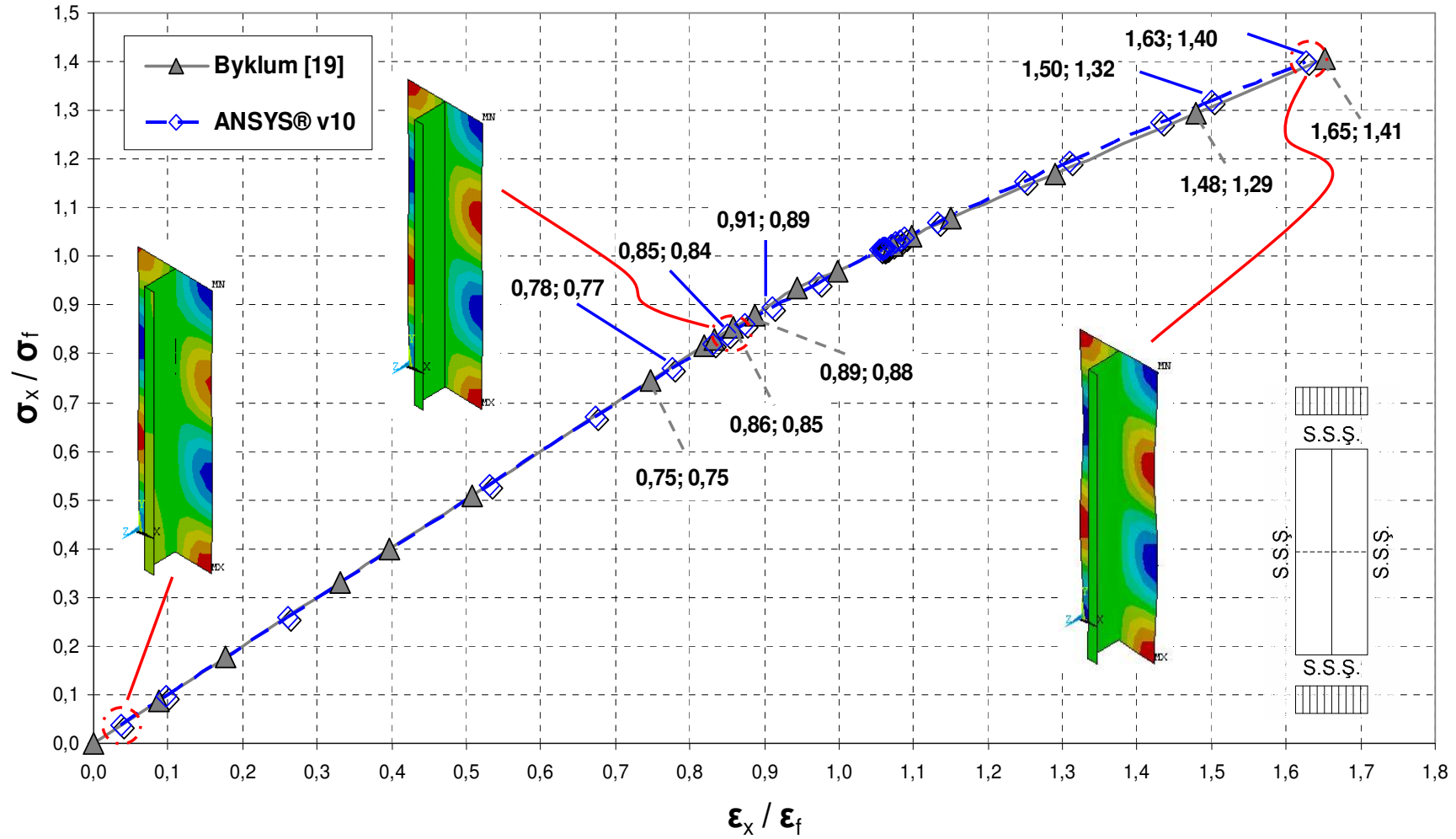
Çizelge 4.6. Eksenel ve yanal yüklemelere ait ANSYS® programından elde edilen sonuçlar

(I) Eksenel Yükleme							
σ_x / σ_f	$\varepsilon_x / \varepsilon_f$ ANSYS®	$\varepsilon_x / \varepsilon_f$ Byklum [19]	(%) Relatif Hata Oranı	σ_x / σ_f	$\varepsilon_x / \varepsilon_f$ ANSYS®	$\varepsilon_x / \varepsilon_f$ Byklum [19]	(%) Relatif Hata Oranı
0,038	0,038	0,037	0,463	1,016	1,061	1,062	0,140
0,097	0,097	0,096	0,479	1,016	1,060	1,062	0,141
0,260	0,260	0,259	0,536	1,016	1,061	1,062	0,143
0,530	0,531	0,530	0,201	1,017	1,062	1,064	0,155
0,670	0,674	0,672	0,276	1,017	1,062	1,064	0,155
0,770	0,777	0,773	0,566	1,016	1,061	1,063	0,145
0,821	0,831	0,824	0,826	1,016	1,060	1,062	0,140
0,839	0,851	0,844	0,862	1,015	1,059	1,061	0,131
0,860	0,874	0,866	0,934	1,024	1,071	1,074	0,246
0,894	0,912	0,901	1,128	1,028	1,077	1,080	0,284
0,946	0,973	0,962	1,192	1,037	1,088	1,092	0,369
1,012	1,055	1,056	0,094	1,032	1,082	1,085	0,323
1,014	1,058	1,059	0,115	1,069	1,132	1,138	0,595
1,014	1,058	1,059	0,116	1,152	1,250	1,264	1,149
1,014	1,058	1,060	0,120	1,193	1,310	1,327	1,247
1,016	1,060	1,062	0,139	1,274	1,431	1,449	1,233
1,016	1,060	1,062	0,138	1,319	1,500	1,518	1,147
1,016	1,061	1,062	0,143	1,401	1,627	1,642	0,916

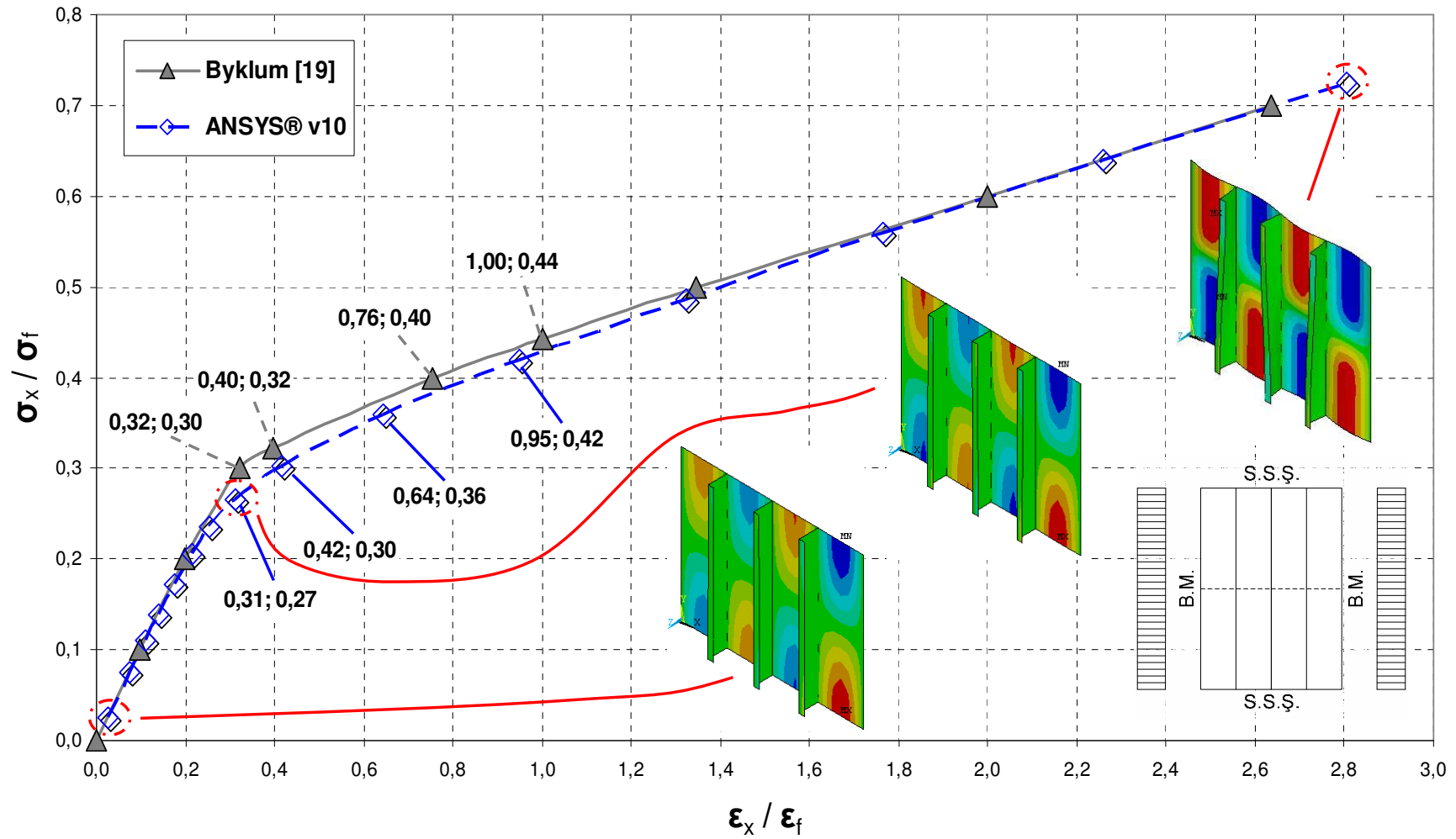
Çizelge 4.6. (Devam) Eksenel ve yanal yüklemelere ait ANSYS® programından elde edilen sonuçlar

(II) Yanal Yükleme							
σ_x / σ_f	$\varepsilon_x / \varepsilon_f$ ANSYS®	$\varepsilon_x / \varepsilon_f$ Byklum [19]	(%) Relatif Hata Oranı	σ_x / σ_f	$\varepsilon_x / \varepsilon_f$ ANSYS®	$\varepsilon_x / \varepsilon_f$ Byklum [19]	(%) Relatif Hata Oranı
0,025	0,025	0,025	1,174	0,359	0,644	0,565	13,902
0,074	0,075	0,074	1,389	0,419	0,948	0,867	9,433
0,111	0,111	0,109	1,663	0,485	1,324	1,259	5,129
0,138	0,139	0,137	2,011	0,559	1,764	1,731	1,890
0,172	0,175	0,170	2,808	0,639	2,260	2,248	0,510
0,206	0,213	0,205	3,889	0,725	2,803	2,798	0,204
0,236	0,255	0,243	4,839	0,817	3,388	3,381	0,196
0,266	0,312	0,280	11,470	0,913	4,007	3,994	0,335
0,303	0,417	0,332	25,788	1,001	4,579	4,555	0,525

Şekil 4.14 ve Şekil 4.15’de grafiklerle verilen sonuçları, ANSYS® programı yardımıyla bulunan sonuçlarla karşılaştırmak için, Şekil 4.16 ve Şekil 4.17’deki grafiklerde birlikte gösterilmiştir.



Şekil 4.16. Eksenel yüklemeye ait relatif gerilmenin, relatif gerinmeye oranının lineer olmayan çözüm sonuçları



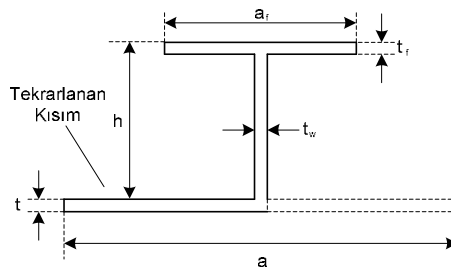
Şekil 4.17. Yanal yüklemeye ait relatif gerilmenin, relatif gerinmeye oranının lineer olmayan çözüm sonuçları

Her iki grafikte incelendiğinde; Byklum'un bulduğu sonuçlarla ANSYS® sonlu elemanlar programı ile elde ettiğimiz sonuçlar arasındaki uyumluluk görülmüştür [19]. Çizelge 4.6'da da her iki çözüm arasındaki (%) relatif hata oranları verilmiştir. Eksenel yüklemde bu hata oranları % 0,094 - %1,247 arasında değişirken, yanal yüklemde ise; %0,196 - %25,788 aralığında değişmiştir. Yanal yüklemde görülen $\sigma_x / \sigma_f = 0,303$ ve $\varepsilon_x / \varepsilon_f = 0,417$ için ortaya çıkan %25,788 relatif hata en büyük değer olarak görülmüştür.

Byklum diğer bir çalışmasında ise; destek elemanlı plakların genel burkulma halini incelemiştir [20]. Bir önceki çalışmada bahsedilen plak modelleri, bu çalışmada aynen alınmış olup, sadece plak malzemesi ve geometrisi değişmiştir. Bu değişikliğe bağlı olarak plağın eğilme rijitliği, destek elemanının eğilme rijitliğine göre artmış ve plağın burkulma şekli; bölgesel burkulmadan genel burkulma haline geçmiştir.

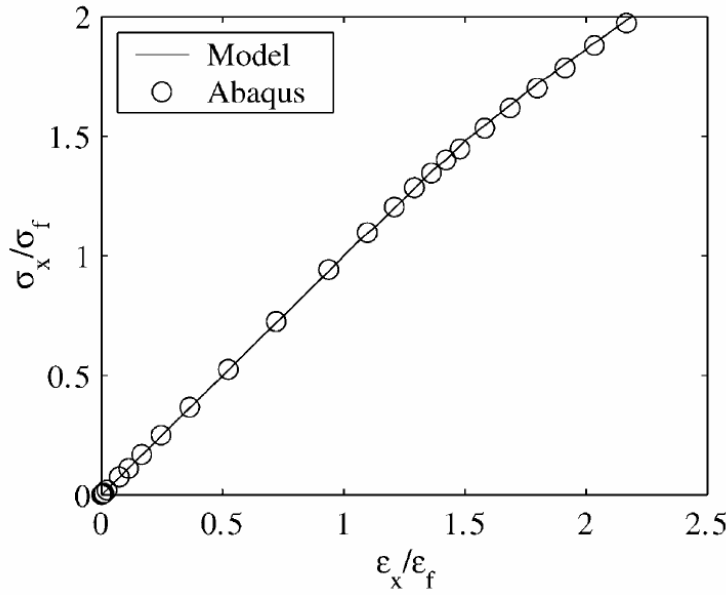
Plak geometrisinde yapılan değişiklikler şunlardır; "L" tipi takviye eleman yerine "T" tipi takviye eleman kullanılmış, plağın ve destek elemanın kalınlığı da 0,005 m'den 0,05 m'ye artırılmıştır. Böylece; t/a oranı 0,016'dan 0,156'ya çıkmıştır. Buna göre; Byklum'un ele aldığı plağın geometrisi Çizelge 4.7'de verilmiştir [20]. Kullanıldığı alüminyum malzemenin, elastisite modülü $E = 0,7 \text{ kgf/cm}^2$ ve Poisson oranı $\nu = 0,3$ 'tür.

Çizelge 4.7. Plağın ve "T" tipli destek elemanın geometrisi (cm, kgf/cm²) [20]

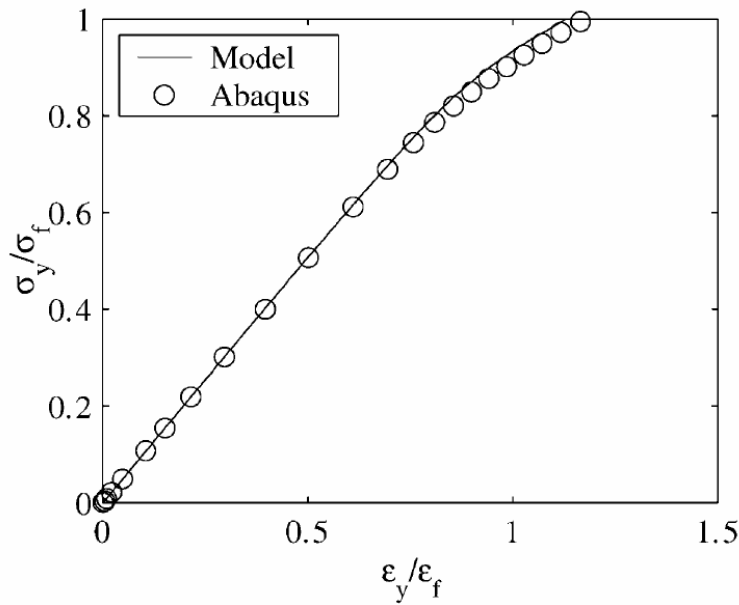


a	b	t	h	t_w	a_f	t_f	σ_f
32	240	5	7,5	5	4	5	2400

Yazar, daha önceki çalışmasında 1,0 mm olarak aldığı burkulma modundaki deformasyon değerini, bu çalışmasında 3,6 mm olarak almış ve analizini buna göre yapmıştır. Elde ettiği sonuçlar Şekil 4.18 ve Şekil 4.19'da verilen grafiklerde gösterilmiştir.



Şekil 4.18. Aksel yüklemesinde Byklum'un genel burkulma durumu için elde ettiği lineer olmayan analiz sonuçları [20]



Şekil 4.19. Yanal yüklemesinde Byklum'un genel burkulma durumu için elde ettiği lineer olmayan analiz sonuçları [20]

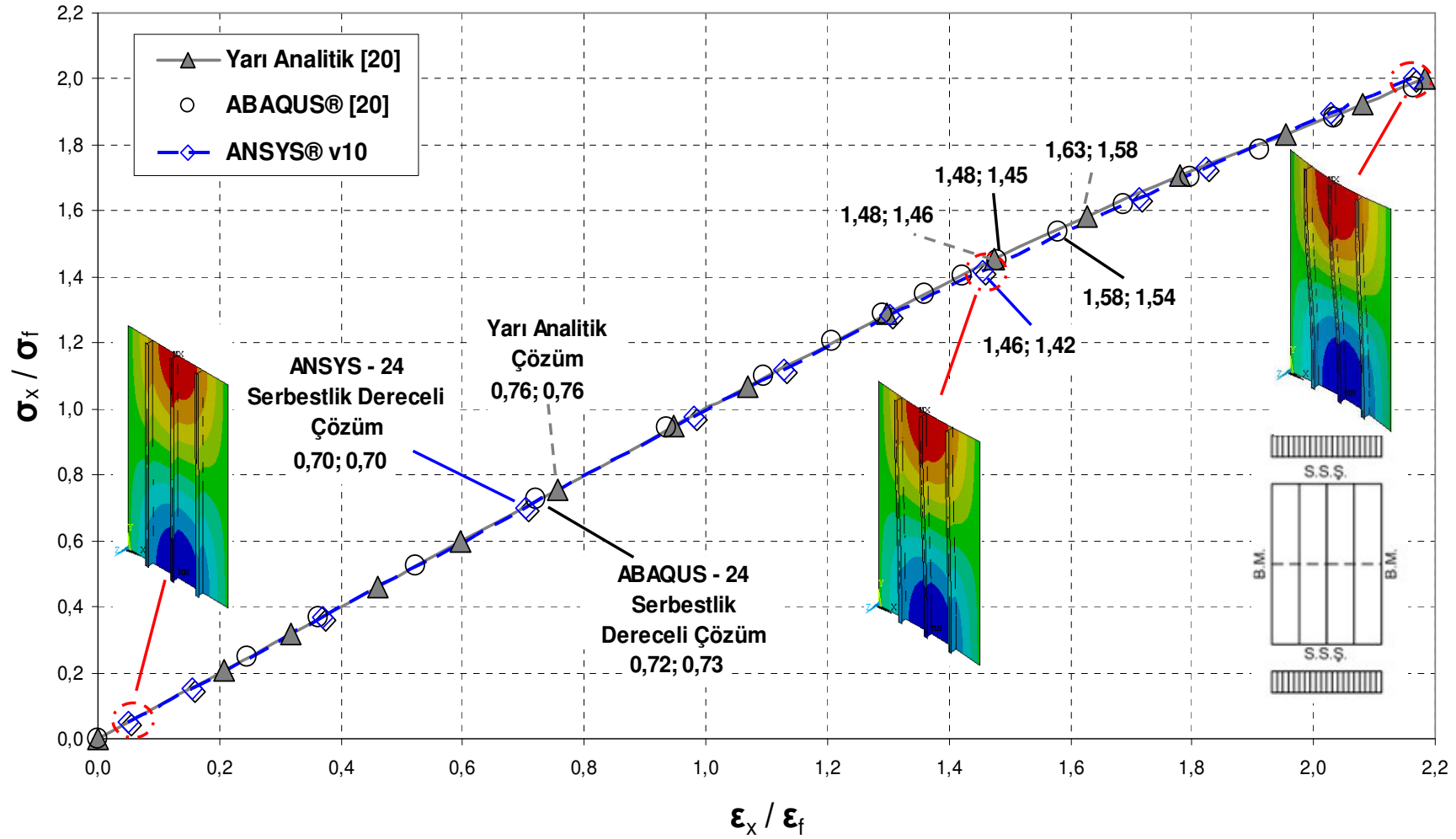
Şekil 4.18 ve Şekil 4.19'da grafiklerle verilen sonuçları, karşılaştırılmak için aynı problemin ANSYS® programında analizleri yapılmış ve sonuçları Çizelge 4.8'de, % hata oranlarıyla birlikte verilmiştir. ANSYS® programı yardımıyla bulunan sonuçlar, Byklum'un sonuçlarıyla karşılaştırmak için, Şekil 4.20 ve Şekil 4.21'deki grafiklerde birlikte gösterilmiştir [20].

Çizelge 4.8. ANSYS® programından elde edilen lineer olmayan analiz sonuçları

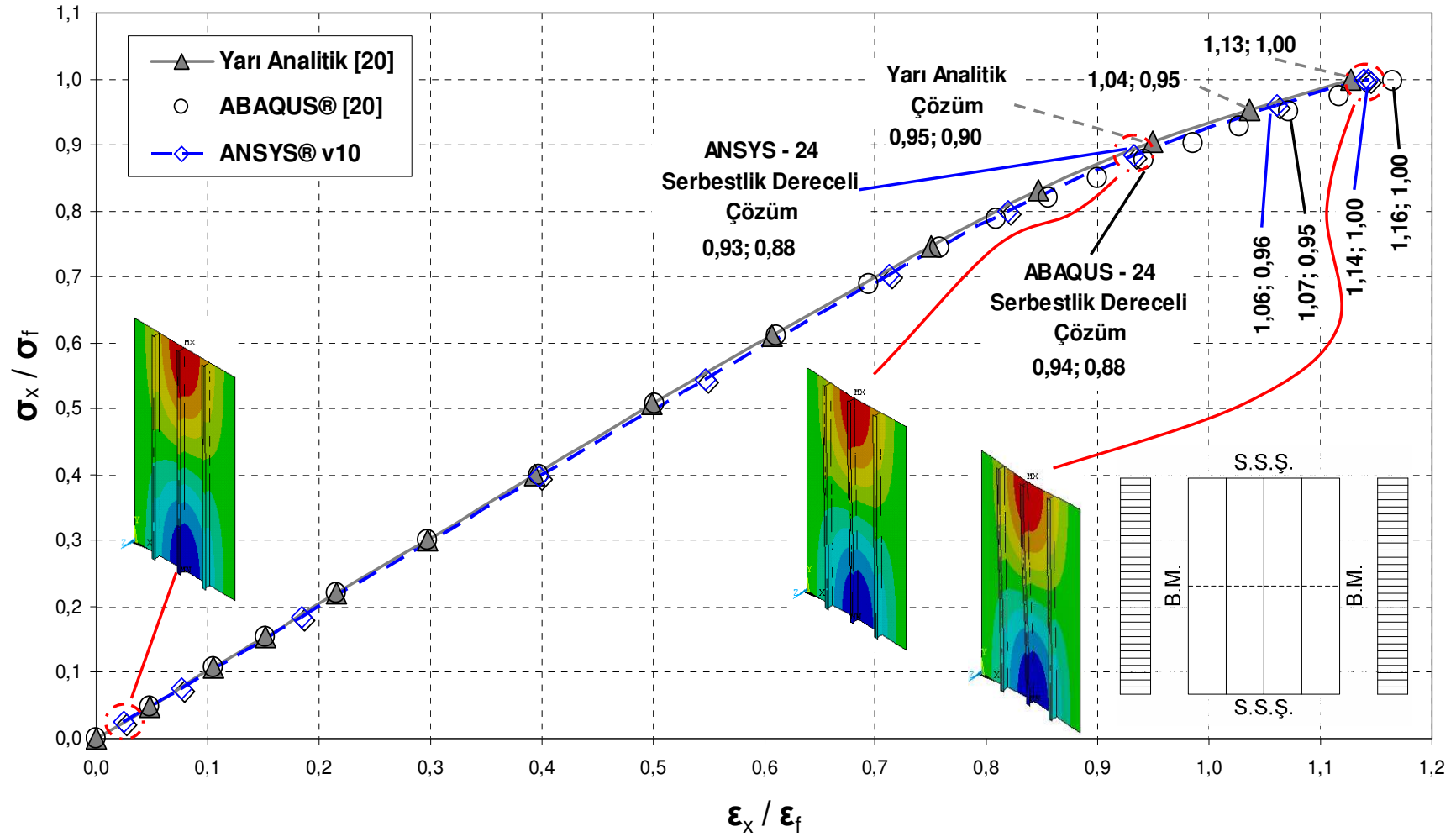
(I) Eksenel Yükleme					
σ_x / σ_f	$\varepsilon_x / \varepsilon_f$ ANSYS®	$\varepsilon_x / \varepsilon_f$ MODEL [20]	(%) Relatif Hata Oranı	$\varepsilon_x / \varepsilon_f$ ABAQUS® [20]	(%) Relatif Hata Oranı
0,050	0,050	0,050	0,228	0,049	1,543
0,154	0,154	0,154	0,216	0,152	1,555
0,370	0,370	0,368	0,352	0,365	1,248
0,702	0,703	0,703	0,006	0,697	0,856
0,977	0,981	0,977	0,386	0,971	1,052
1,121	1,129	1,122	0,679	1,119	0,917
1,283	1,303	1,291	0,967	1,286	1,322
1,419	1,456	1,436	1,434	1,442	0,986
1,639	1,713	1,695	1,066	1,711	0,144
1,730	1,824	1,813	0,592	1,833	0,507
1,895	2,028	2,040	0,596	2,052	1,146

Çizelge 4.8. (Devam) ANSYS® programından elde edilen lineer olmayan analiz sonuçları

(II) Yanal Yükleme					
σ_x / σ_f	$\varepsilon_x / \varepsilon_f$ ANSYS®	$\varepsilon_x / \varepsilon_f$ MODEL [20]	(%) Relatif Hata Oranı	$\varepsilon_x / \varepsilon_f$ ABAQUS® [20]	(%) Relatif Hata Oranı
0,025	0,025	0,025	0,622	0,025	0,622
0,077	0,077	0,076	1,362	0,076	1,362
0,184	0,184	0,181	1,630	0,181	1,630
0,397	0,398	0,391	1,806	0,394	0,989
0,544	0,547	0,538	1,741	0,540	1,297
0,704	0,713	0,704	1,288	0,710	0,384
0,799	0,819	0,809	1,252	0,825	0,723
0,885	0,932	0,922	1,095	0,955	2,328
0,960	1,061	1,048	1,158	1,090	2,682
0,998	1,139	1,124	1,356	1,165	2,218
1,000	1,143	1,127	1,392	1,165	1,880



Şekil 4.20. Eksenel yüklemeye ait relatif gerilmenin, relatif gerinmeye oranının lineer olmayan çözüm sonuçları



Şekil 4.21. Yanal yüklemeye ait relatif gerilmenin, relatif gerinmeye oranının lineer olmayan çözüm sonuçları

Elde edilen grafikler incelendiğinde ANSYS® programı ile yapılan analizin sonuçları ile Byklum'un elde ettiği sonuçlarının birbirine yakın olduğu görülmektedir [20]. Eksenel yüklemde bu oranlar %0,384 - %2,682 arasında değişirken, yanal yüklemde ise; bu oranlar %0,144 - %1,555 arasında değişmiştir.

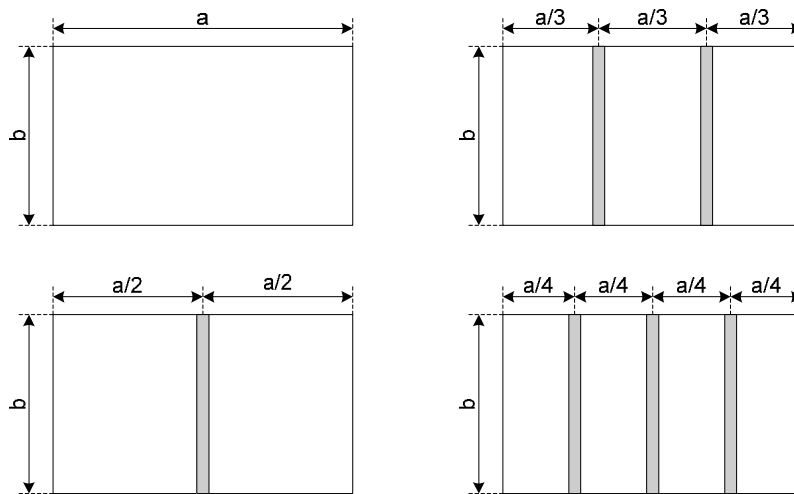
Şekil 4.17, Şekil 4.18, Şekil 4.20 ve Şekil 4.21'deki karşılaştırmalı grafikler incelediğimizde; hata oranlarının maksimum %2,682 (bölgesel burkulmadaki yanal yüklemeye ait relatif hatalar hariç) olduğu görülmüştür.

5. BURKULMA ANALİZLERİ YAPILACAK OLAN İNCE PLAKLARIN SINIR ŞARTLARI, GEOMETRİ VE MALZEMELERİNİN TANIMLAMALARI

ANSYS® programında özdeğer problem çözümünü ve lineer olmayan analizlerini yapacağımız plakların geometrisini, malzemesini ve sınır şartlarını bu bölümde belirleyeceğiz.

5.1. Geometrinin Belirlenmesi

Analizi yapılacak plakların boyutunun belirlenmesinde $\phi = a/b$ oranı dikkate alınmıştır. Belirtilen bu oranın 1 ile 2,5 arasındaki değerlerinden bazıları seçilerek, plaklar buna göre boyutlandırılmıştır. Burada; a plağın boyu, b ise; plağın enidir. Amacımız $\phi = a/b$ oranına bağlı, kritik burkulma gerilmesini gözlemlemek ve böylece analizini yapamadığımız diğer plak boyutlarına ilişkin kritik burkulma değerlerinin oluşumları ve değerleri hakkında fikir yürütebilmektir. Buna göre; Alinia ve Sanal'ın çalışmalarında kullandığı plak boyutları ve destek eleman özellikleri seçilmiş ve Çizelge 5.1'de gösterilmiştir [8, 11]. Plak boyutlarının bu şekilde seçilmesiyle; eksenel ve kayma gerilmelerinin oluşturduğu burkulma davranışlarının karşılaştırılmasını yapılabilir [11].



Şekil 5.1. Takviye elemanlarının plak üzerindeki yerleşimi

Destek elemanları Şekil 5.1’de gösterildiği gibi düz plağın üzerine eşit aralıklarla yerleştirilmiştir.

Çizelge 5.1. Plak ve destek eleman geometrisi

Plak						Destek Eleman		
Plak Tipi	Boy (a) cm	En (b) cm	Kalınlık (t) cm	t/a	$1/\phi$	Sayısı	Yükseklik (h) cm	Kalınlık (t_s) cm
A	200	200	2	0,010	1	-	-	-
						1	10	6
						2	10	6
B	250	200	2	0,008	0,8	3	10	6
						-	-	-
						1	10	6
C	332	200	2	0,006	0,6	2	10	6
						3	10	6
						-	-	-
D	500	200	2	0,004	0,4	1	10	6
						2	10	6
						3	10	6

Ayrıca, plakların genel burkulma analizleri konusunda fikir edinmek amacıyla 200x200x2’lik plağın kalınlığı 8 cm çıkarılarak, t/a oranı 0,010 değerinden 0,040 değerine yükseltilmiştir. Buna göre lineer olmayan analizleri yapılacak olan plak geometrileri Çizelge 5.2’de verilmiştir.

Çizelge 5.2. Kalınlığı $t = 8$ cm olan plakların geometrisi

Plak						Destek Eleman		
Plak Tipi	Boy (a) cm	En (b) cm	Kalınlık (t) cm	t/a	$1/\phi$	Sayısı	Yükseklik (h) cm	Kalınlık (t_s) cm
E	200	200	8	0,040	1	-	-	-
						1	10	6
						2	10	6
						3	10	6

5.2. Malzemenin Belirlenmesi

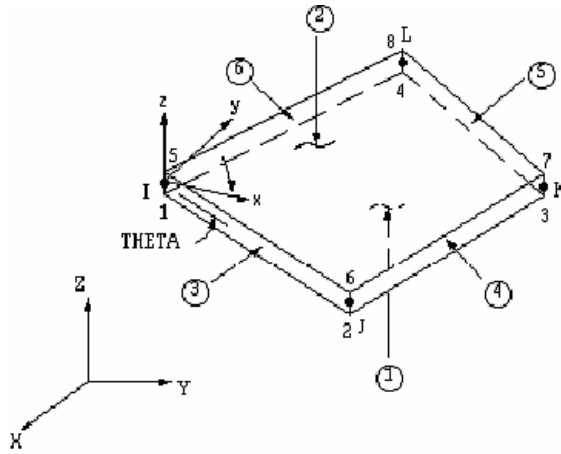
Analizini yapacağımız plaklar, iki malzeme türünden oluşacaktır. Bunlardan birincisi, Alinia'nın çalışmasında kullandığı yumuşak çelik olup, malzemenin özellikleri aşağıda verilmiştir [8].

$$\rho = 7,85 \text{ gr/cm}^3$$

$$E = 2,1 \times 10^6 \text{ kgf / cm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

ANSYS® programında çelik plak gibi izotropik malzemelerin davranışına uygun olan Shell63 kabuk elemanı seçilmiş ve model bu eleman yardımıyla oluşturulmuştur. Shell63, eğilme ve membran kapasitesine sahip bir kabuk elemanı olup, 4 düğüm noktalı (I, J, K, L) ve her bir düğüm noktası 6 serbestlik dereceli (UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ) lineer bir elemandır (Bkz. Şekil 5.2).



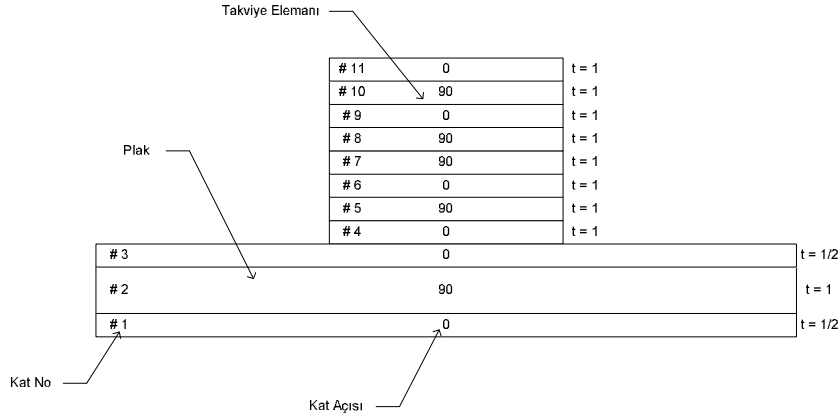
Şekil 5.2. Shell63 kabuk elemanı

İkinci malzeme türümüz ise; Sanal'ın çalışmasında kullandığı Bor-Al olup, malzeme özellikleri Çizelge 5.3'de verilmiştir [11]. Seçilen Bor / Al, matris / fiber kompozitinde, matris malzemesi olarak alüminyum, fiber olarak ise Bor kullanılmıştır. Bor'la güçlendirilmiş alüminyum MMK (Metal Matrisli Kompozit), yüksek mukavemet özelliğinin yanı sıra düşük yoğunluğa ve alüminyum alaşımının yüksek güvenilirliğine sahiptir. Modül / yoğunluk oranı; çelik, alüminyum ve magnezyum gibi herhangi bir diğer mühendislik malzemesinden neredeyse altı kat daha yüksektir.

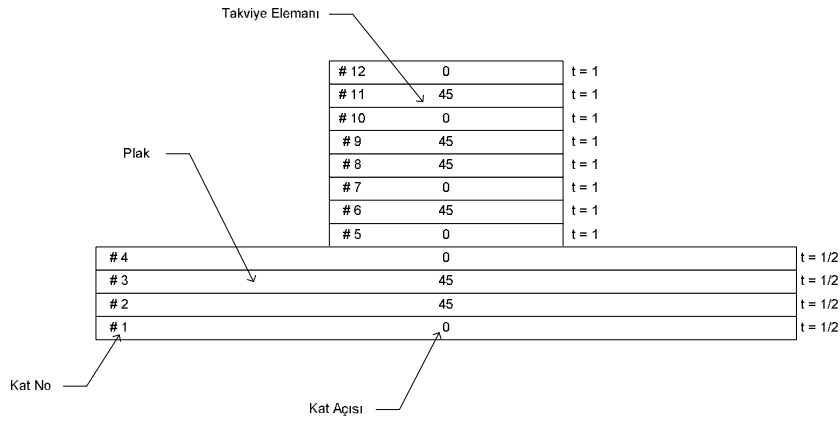
Çizelge 5.3. Bor-Al malzemesinin mühendislik sabitleri [33]

Bor-Al	
Yoğunluk : ρ (gr/cm ³)	2,65
E_1 (GPa) / (10 ⁶ kgf/cm ²)	227 / 2,27
E_2 (GPa) / (10 ⁶ kgf/cm ²)	139 / 1,39
Poisson oranı : (ν_{12})	0,24
Poisson oranı : (ν_{23})	0,36
Kayma Modülü : G_{12} (GPa) / (10 ⁶ kgf/cm ²)	57,6 / 0,576
Kayma Modülü : G_{23} (GPa) / (10 ⁶ kgf/cm ²)	49,1 / 0,491
Modül Oranı : E_1 / E_2	1,6
Hacimsel fiber oranı : V_f	0,46

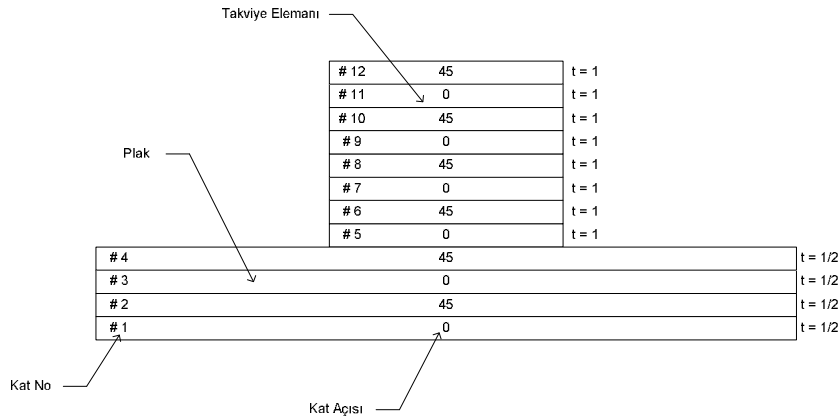
Malzemesi belirlenen ve boyutları Çizelge 5.1'de verilen kompozit plakların, fiber diziliş konfigürasyonları ise aşağıda şekillerde gösterilmiştir (Bkz. Şekil 5.3 - Şekil 5.6).



Şekil 5.3. K1 fiber diziliş konfigürasyonu



Şekil 5.4. K2 fiber diziliş konfigürasyonu

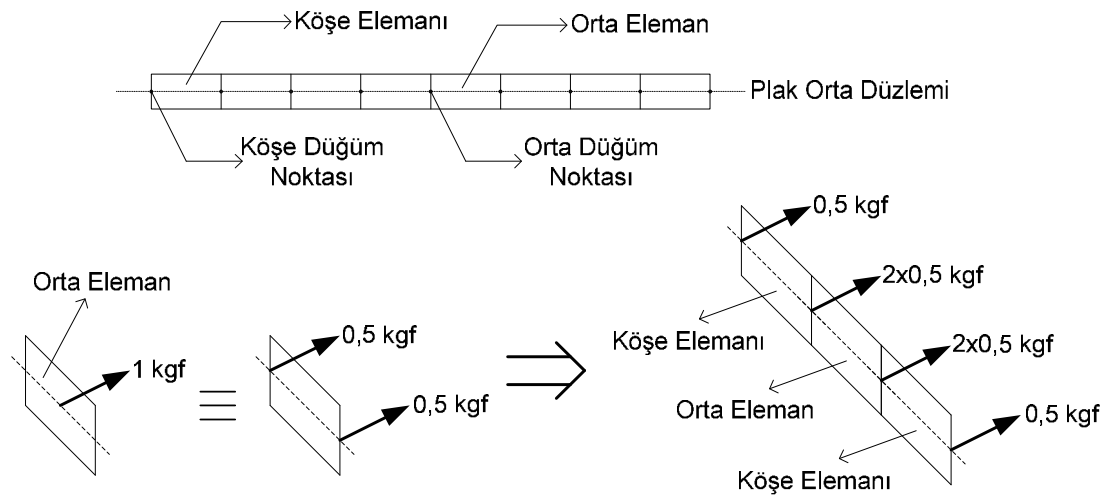


Şekil 5.5. K3 fiber diziliş konfigürasyonu

5.3. Sınır Şartlarının Belirlenmesi

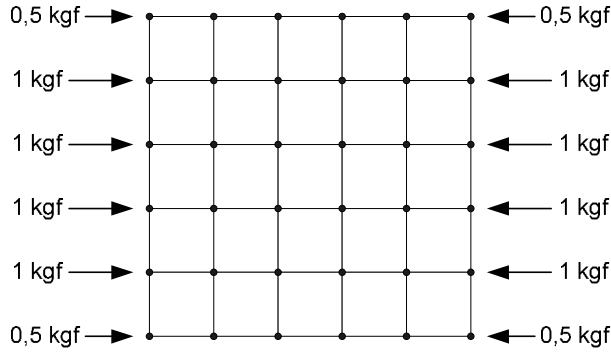
Bu bölümde, plak kenarına yapılacak yüklemeler ve plak kenarlarını oluşturan düğüm noktalarının nasıl yer değiştireceği belirlenecektir. Bu kısımdan sonraki analizlerde incelenen tüm plakların yalnızca kısa kenarına düzgün yayılı yük uygulanacaktır. Uzun kenarlarına ise herhangi bir yükleme yapılmayacaktır. Plâğın dört kenarını oluşturan düğüm noktalarının, basit mesnet sınır şartına uygun olarak yer değiştireceği kabulü yapılmıştır.

Plâğın kısa kenarına yapılan düzgün yayılı yükün, ANSYS® programındaki uygulanış yöntemi şu şekildedir; plak kenarındaki bir ara elemanına 1 kgf basma yükü uygulandığında, bu yük; plak elemanının sağ ve solundaki komşu iki ağ noktasına eşit olarak paylaştırılır. Böylelikle bu iki ağ noktasının her birine 0,5 kgf'lik basma yükü düşmüş olur. Ancak ara elemanın yanında bir komşu eleman daha bulunduğundan, 0,5 kgf'lik yük ikiye katlanarak 1 kgf olarak gösterilir. Ancak, plâğın 4 köşesindeki her bir elemanın, yük uygulanabilecek komşu yan elemanlara sahip değildir. Bu nedenle; bu elemanların köşede kalan düğüm noktalarına sadece 0,5 kgf basma yükü düşer. Bu gösterim Şekil 5.8'de verilmiştir.



Şekil 5.8. Basma yüklerinin düğüm noktalarına dağılımı

Bu metodla; düzgün yayılı yükün plağa düğüm noktalarına dağılımı Şekil 5.9'da gösterilmiştir.



Şekil 5.9. Düzgün yayılı yükün düğüm noktalarına dağılımı

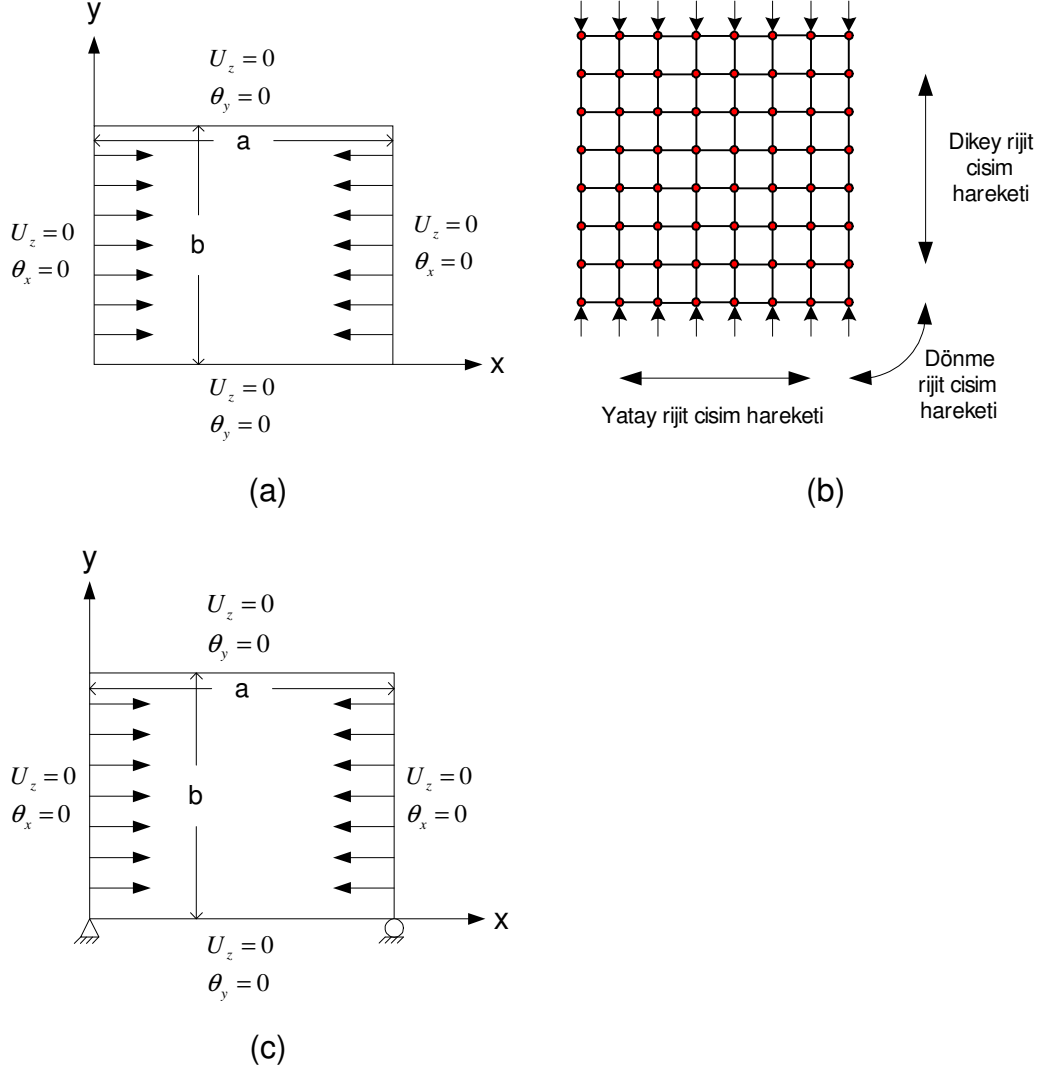
Plağın dört kenarını oluşturan düğüm noktaları, basit mesnet sınır şartına uygun olarak yer değiştireceğini kabul etmiştik. Buna göre; basit mesnet sınır şartı ise; Eş. 5.1 ve Eş. 5.2'deki ifadelerle verilmektedir.

$$(w)_{x=0,a \text{ ve } y=0,b} = 0 \quad (5.1)$$

$$M_x = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0,a} = 0, \quad M_y = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0,b} = 0 \quad (5.2)$$

Sonlu elemanlar yönteminde belirtilen basit mesnet sınır şartının tanımı, literatürde Şekil 5.8.a'daki gibi gösterilmiştir [34]. Bu sınır şartlarına göre; plağın x-y düzleminde serbest hareketini engelleyen bir sınırlama olmaması durumu; plağın, rijit cisim hareketi (rigid body motion) yapmasına neden olur. Rijit cisim hareketini anlamak için; Sonlu elemanlar çözümlerine tekrar geri dönmemiz gerekmektedir. Sonlu elemanlar çözümlerinde, ana rijitlik matrisi, sınır şartlarını hesaba katmadan önce tekil (singular) bir matristir. Problemden tanımlanan düğüm noktalarına uygulanan yer değişim sınır şartlarıyla beraber ortaya çıkan yer değişim vektörünün, ana rijitlik matrisine uygulanması sonucunda rijitlik matrisi tekil olmayan (nonsingular) durumuna

gelir. Bu duruma göre; hesaplanan özdeğerlerden bir kısmı sıfır olacaktır. Sıfır çıkan bu mod, rijit cisim modu (rigid body mode) olarak isimlendirilmektedir [7].



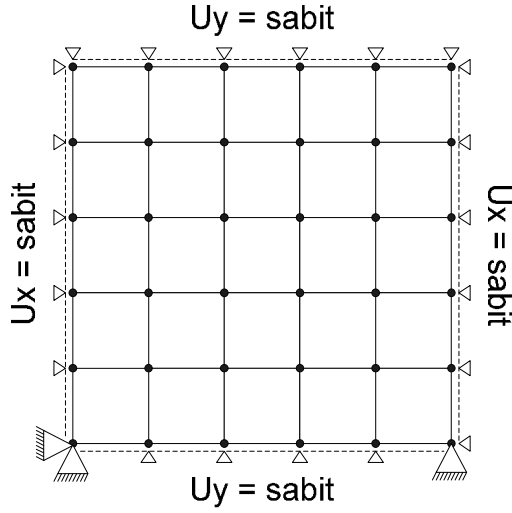
Şekil 5.10. Basit mesnet sınır şartı uygulaması

- a) Literatürde yer alan sınır şartı [34] b) Rijit cisim hareket şekilleri
c) Çalışmada uygulanan sınır şartı

Bu rijit cisim hareketini engellemek için kullanılan değişik yer değişim sınır şartı uygulamaları literatürde görülmektedir. Bunlardan birincisi; plağın sadece yarısı modellenerek, simetri sınır şartlarının uygulanmasıdır [35]. İkincisi ise; plağın yükleme yapılmayan kenarlardan birisine ait iki köşesine,

bahsedeceğimiz yer değişim sınır şartlarının uygulanmasıdır; bir köşede U_x ve U_y yönündeki hareketin, diğer köşede ise; U_y yönündeki hareketin sınırlandırılmasıdır [36]. Bunun açıklayıcı gösterimi Şekil 5.10.c'de verilmiş olup, yapılacak olan analizlerde bu yöntem uygulanacaktır. Bu sayede Şekil 5.10.b'de gösterilen üç çeşit rijit cisim hareketi engellenmiş olur.

Ayrıca; lineer olmayan analizde, plak kenarların deformasyondan sonrada düz kalması için kenardaki düğüm noktaların kenara dik eksen boyunca yer değişimleri de sabit tutulmuştur. Bu sayede kenarların düzlem içinde eğilmesi engellenir. ANSYS® programında, bu durum “Couple DOFs” komutu kullanılarak yapılır. Adında da anlaşılacağı gibi düğüm noktalarını birbirine bağlayarak, düğüm noktalarının belirlenen yönde eşit değerde yer değiştirmesini sağlar. Plak kenarlarının düz kalmasını sağlayan sınır şartlarının gösterimi Şekil 5.11’de verilmiştir.



Şekil 5.11. Birbirine bağlanan düğüm noktaları

Şekildeki plağın sol ve sağ alt köşe düğüm noktalarının bağlanmamasının nedeni; bu düğüm noktalarının, rijit cisim hareketini engellemek amacıyla belirtilen yöndeki sınırlandırılmanın zaten yapılmış olmasıdır.

Çizelge 5.4. Analizi yapılan plakların sayısı

Malzemesi Plak Tipi	izotropik		K1		K2		K3		K4	
	Öz değer	Lineer Olm.	Öz değer	Lineer Olm.	Öz değer	Lineer Olm.	Öz değer	Lineer Olm.	Öz değer	Lineer Olm.
A	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
B	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
C	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
D	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
E	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
TOPLAM	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
GENEL TOPLAM	200									

Sonuç olarak; geometrisi, malzemesi ve sınır şartları belirlenmiş olan bu plakların, hangi sayıda özdeğer ve lineer olmayan analizlerinin yapılacağı Çizelge 5.4’de verilmiştir. Söz konusu bu plakların analiz sonuçları 6. Bölümde anlatılacaktır.

6. İNCE PLAKLARIN DESTEKLİ VE DESTEKSİZ HALLERİNİN ANSYS PROGRAMI İLE BURKULMA ANALİZLERİ

Geometri, malzeme ve sınır şartları 5. Bölümde belirlenmiş olan plakların, özdeğer ve lineer olmayan analizlerinden elde edilen sonuçlar bu bölümde anlatılacaktır. Ayrıca; bu bölümde alınan analiz sonuçlarının karşılaştırmalı değerlendirilmesine de yer verilecektir.

6.1. Özdeğer Problem Çözümlerinin Sonuçları

ANSYS® programında, 2. Bölümde anlatılan çözümleme seçenekleri kullanılarak yapılan analizlerden elde edilen sonuçlar, ANSYS®’de “Postprocessor” menüsünden okunur. ANSYS® programı ile hesaplanan kritik burkulma gerilmesi, birinci yük değeri için aşağıdaki yöntemden faydalanarak hesaplanır. Bu yöntemde kritik yük değerinin, plak elemanının yüklemenin yapıldığı yüzeyin alanına bölünerek, kritik burkulma gerilmesinin bulunmasıdır. Buna ilişkin bir örnek aşağıda gösterilmiştir.

Kritik basma yükü : $F = 15161,6 \text{ kgf}$

Ağ Eleman Alanı (AEA) = Ağ Eleman Boyu x Plak kalınlığı

$$AEA = 10 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \Rightarrow AEA = 20 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{kr,\text{çelik}} = \frac{F}{AEA} \Rightarrow \sigma_{kr,\text{çelik}} = \frac{15161,6 \text{ kgf}}{20 \text{ cm}^2} \Rightarrow \sigma_{kr,\text{çelik}} = 758,08 \text{ kgf / cm}^2$$

Yapılan bu hesaplamalardan sonra, öz vektörlere karşılık gelen burkulmuş plak şekilleri incelenebilir. Burkulan plak şekillerinden her biri normalize edildiğinden dolayı, plağın üç eksen boyunca (x, y ve z) yaptığı yer değiştirme değerlerinden maksimum olanı, 1,0’e eşitlenmiştir.

Yukarıda bahsedilen esaslar dahilinde elde edilen tüm özdeğer problem çözümlerinin sonuçları Çizelge 6.1 - Çizelge 6.5'de verilmiştir. Bunlardan; Çizelge 6.1'de çelik plakların özdeğer problemin çözüm sonuçları, Sanal'ın aynı plaklar için elde ettiği kritik kayma gerilme değerleri ile birlikte verilmiştir [11].

Çizelge 6.1. Çelik plakların özdeğer probleminin çözüm sonuçları ve aynı plaklar için Sanal'ın elde ettiği kritik kayma gerilmeleri [11]

Desteklenmemiş plaklar						
Plak No	$1/\phi$	a cm	b cm	t cm	$\tau_{kr,\text{çelik}}$ kg/cm ²	$\sigma_{kr,\text{çelik}}$ kg/cm ²
1	0,4	500	200	2	1142,5	783,35
2	0,6	332	200	2	1294,9	782,15
3	0,8	250	200	2	1468,9	796,43
4	1	200	200	2	1762,1	758,08

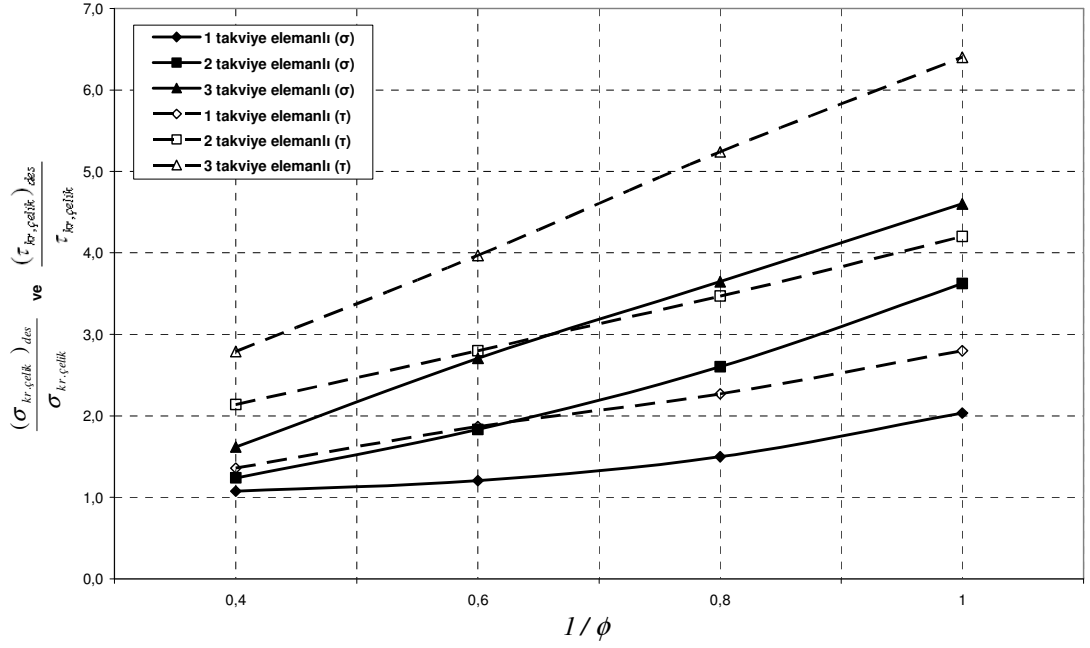
1 enine takviye elemanı : $h = 10 \text{ cm}$ $t_s = 6 \text{ cm}$								
Plak No	$1/\phi$	a cm	b cm	t cm	$(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kg/cm ²	$\frac{(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des}}{\tau_{kr,\text{çelik}}}$	$(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kg/cm ²	$\frac{(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}}{\sigma_{kr,\text{çelik}}}$
1	0,4	500	200	2	1556,9	1,36	842,47	1,08
2	0,6	332	200	2	2433,9	1,87	943,09	1,21
3	0,8	250	200	2	3344,2	2,27	1194,01	1,50
4	1	200	200	2	4951,0	2,80	1542,22	2,03

2 enine takviye elemanı : $h = 10 \text{ cm}$ $t_s = 6 \text{ cm}$								
Plak No	$1/\phi$	a cm	b cm	t cm	$(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kg/cm ²	$\frac{(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des}}{\tau_{kr,\text{çelik}}}$	$(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kg/cm ²	$\frac{(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}}{\sigma_{kr,\text{çelik}}}$
1	0,4	500	200	2	2451,9	2,14	970,04	1,24
2	0,6	332	200	2	3631,0	2,80	1434,60	1,83
3	0,8	250	200	2	5100,0	3,47	2073,30	2,60
4	1	200	200	2	7414,0	4,20	2747,34	3,62

Çizelge 6.1. (Devam) Çelik plakların özdeğer probleminin çözüm sonuçları ve aynı plaklar için Sanal'ın elde ettiği kritik kayma gerilmeleri [11]

3 enine takviye elemanı : $h = 10 \text{ cm}$ $t_s = 6 \text{ cm}$								
Plak No	$1/\phi$	a cm	b cm	t cm	$(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kg/cm ²	$\frac{(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des}}{\tau_{kr,\text{çelik}}}$	$(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kg/cm ²	$\frac{(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}}{\sigma_{kr,\text{çelik}}}$
1	0,4	500	200	2	3193,1	2,79	1266,47	1,62
2	0,6	332	200	2	5150,0	3,97	2117,38	2,71
3	0,8	250	200	2	7700,0	5,24	2904,97	3,65
4	1	200	200	2	11288,0	6,40	3488,60	4,60

Çizelge 6.1'de görüldüğü gibi yükleme çeşidinin burkulmaya olan etkisini τ_{kr}/σ_{kr} oranlarından görebilmekteyiz. Desteksiz plaklarda mukavemeti düşük olan grup 500x200x2 boyutundaki geometri olup τ_{kr}/σ_{kr} oranı 1,46'dır. τ_{kr}/σ_{kr} oranının en yüksek olduğu geometri ise 200x200x2 boyutundaki plak için 2,32 olduğu görülmektedir. Destek elemanlı plak gruplarında ise mukavemeti düşük olan grup tek takviyeli 500x200x2 boyutundaki geometri olup τ_{kr}/σ_{kr} oranı 1,85'dir. τ_{kr}/σ_{kr} oranının en yüksek olduğu geometri ise üç takviye elemanlı 200x200x2 boyutundaki plak için 3,24 olduğu görülmektedir. Ayrıca, takviye elemanının kritik burkulma gerilmesine olan etkisini görebilmek için $(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des}/\tau_{kr,\text{çelik}}$, $(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}/\sigma_{kr,\text{çelik}}$ oranlarının, $1/\phi$ 'ye göre değişimlerini gösteren grafik Şekil 6.1'de verilmektedir.



Şekil 6.1. Relatif gerilme artışının, $1/\phi$ 'ye göre değişim grafiği

Şekil 6.1'de verilen $(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des} / \sigma_{kr,\text{çelik}}$ oranının, $1/\phi$ oranına göre değişim grafiğinden de görüleceği gibi kritik burkulma gerilmeleri parabolik bir artış göstermektedir. Diğer bir deyişle, destek elemanlı plakların kritik burkulma gerilme değerinin yükselmesi, takviye eleman sayısının artırılmasıyla mümkün olmaktadır. Bu da takviye eleman sayısının artırılmasıyla, plağın burkulmasının zorlaştırılması anlamına gelmektedir.

Çizelge 6.2 - Çizelge 6.5'de ise; 64 adet kompozit plağın analizinin yapıldığı ve her bir analizde kritik burkulma gerilmelerinin hesaplandığı görülmektedir. Aynı şekilde destekli plakların kritik burkulma gerilmelerinin, desteklenmemiş plakların gerilmelerine oranına ait çözümlemelere de çizelgede yer verilmiştir.

Çizelge 6.2. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al plakların özdeğer probleminin çözüm sonuçları

200x200x2					
1 enine takviye elemanı : $h = 10 \text{ cm}$ $t_s = 6 \text{ cm}$					
Kon. No	$\sigma_{kr,Bor-Al}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kgf/cm ²	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{\sigma_{kr,Bor-Al}}$	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}}$
K1	462,06	785,27	1542,22	1,70	0,51
K2	461,14	795,54	1542,22	1,73	0,52
K3	467,32	770,89	1542,22	1,65	0,50
K4	461,04	748,54	1542,22	1,62	0,49
2 enine takviye elemanı : $h = 10 \text{ cm}$ $t_s = 6 \text{ cm}$					
Kon. No	$\sigma_{kr,Bor-Al}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kgf/cm ²	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{\sigma_{kr,Bor-Al}}$	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}}$
K1	462,06	1324,14	2747,34	2,87	0,48
K2	461,14	1254,09	2747,34	2,72	0,46
K3	467,32	1217,13	2747,34	2,60	0,44
K4	461,04	1208,44	2747,34	2,62	0,44
3 enine takviye elemanı : $h = 10 \text{ cm}$ $t_s = 6 \text{ cm}$					
Kon. No	$\sigma_{kr,Bor-Al}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kgf/cm ²	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{\sigma_{kr,Bor-Al}}$	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}}$
K1	462,06	1695,76	3488,60	3,67	0,49
K2	461,14	1568,12	3488,60	3,40	0,45
K3	467,32	1528,20	3488,60	3,27	0,44
K4	461,04	1512,28	3488,60	3,28	0,43

Çizelge 6.3. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al plakların özdeğer probleminin çözüm sonuçları

250x200x2					
1 enine takviye elemanı : $h = 10 \text{ cm}$ $t_s = 6 \text{ cm}$					
Kon. No	$\sigma_{kr,Bor-Al}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kgf/cm ²	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{\sigma_{kr,Bor-Al}}$	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}}$
K1	454,78	627,32	1194,01	1,38	0,53
K2	446,84	631,20	1194,01	1,41	0,53
K3	459,81	624,97	1194,01	1,36	0,52
K4	459,41	612,38	1194,01	1,33	0,51
2 enine takviye elemanı : $h = 10 \text{ cm}$ $t_s = 6 \text{ cm}$					
Kon. No	$\sigma_{kr,Bor-Al}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kgf/cm ²	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{\sigma_{kr,Bor-Al}}$	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}}$
K1	454,78	1006,93	2073,30	2,21	0,49
K2	446,84	1017,92	2073,30	2,28	0,49
K3	459,81	972,97	2073,30	2,12	0,47
K4	459,41	940,52	2073,30	2,05	0,45
3 enine takviye elemanı : $h = 10 \text{ cm}$ $t_s = 6 \text{ cm}$					
Kon. No	$\sigma_{kr,Bor-Al}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kgf/cm ²	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{\sigma_{kr,Bor-Al}}$	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}}$
K1	454,78	1360,77	2904,97	2,99	0,47
K2	446,84	1312,52	2904,97	2,94	0,45
K3	459,81	1256,36	2904,97	2,73	0,43
K4	459,41	1235,85	2904,97	2,69	0,43

Çizelge 6.4. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al plakların özdeğer probleminin çözüm sonuçları

332x200x2					
1 enine takviye elemanı : $h = 10 \text{ cm}$ $t_s = 6 \text{ cm}$					
Kon. No	$\sigma_{kr,Bor-Al}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kgf/cm ²	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{\sigma_{kr,Bor-Al}}$	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}}$
K1	454,40	529,33	943,09	1,16	0,56
K2	449,24	524,58	943,09	1,17	0,56
K3	458,58	533,49	943,09	1,16	0,57
K4	454,68	529,90	943,09	1,17	0,56
2 enine takviye elemanı : $h = 10 \text{ cm}$ $t_s = 6 \text{ cm}$					
Kon. No	$\sigma_{kr,Bor-Al}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kgf/cm ²	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{\sigma_{kr,Bor-Al}}$	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}}$
K1	454,40	714,16	1434,60	1,57	0,50
K2	449,24	720,12	1434,60	1,60	0,50
K3	458,58	704,80	1434,60	1,54	0,49
K4	454,68	687,97	1434,60	1,51	0,48
3 enine takviye elemanı : $h = 10 \text{ cm}$ $t_s = 6 \text{ cm}$					
Kon. No	$\sigma_{kr,Bor-Al}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kgf/cm ²	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{\sigma_{kr,Bor-Al}}$	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}}$
K1	454,40	1027,75	2117,38	2,26	0,49
K2	449,24	1037,22	2117,38	2,31	0,49
K3	458,58	994,45	2117,38	2,17	0,47
K4	454,68	963,74	2117,38	2,12	0,46

Çizelge 6.5. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al plakların özdeğer probleminin çözüm sonuçları

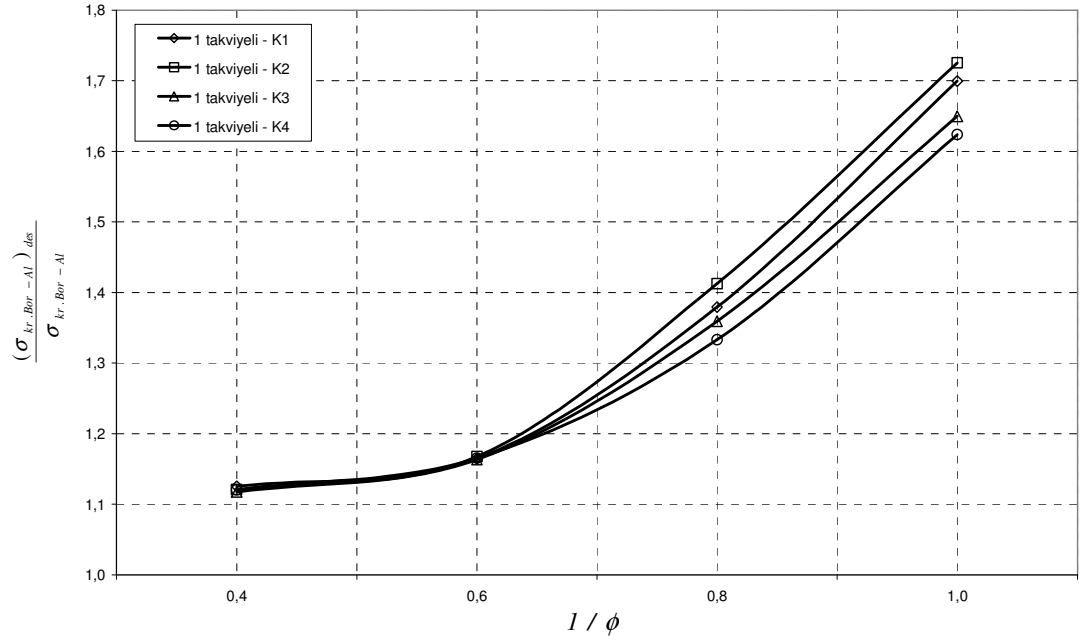
500x200x2					
1 enine takviye elemanı : $h = 10 \text{ cm}$ $t_s = 6 \text{ cm}$					
Kon. No	$\sigma_{kr,Bor-Al}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kgf/cm ²	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{\sigma_{kr,Bor-Al}}$	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}}$
K1	417,77	470,22	842,47	1,13	0,56
K2	414,02	464,09	842,47	1,12	0,55
K3	424,89	474,87	842,47	1,12	0,56
K4	422,19	473,02	842,47	1,12	0,56
2 enine takviye elemanı : $h = 10 \text{ cm}$ $t_s = 6 \text{ cm}$					
Kon. No	$\sigma_{kr,Bor-Al}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kgf/cm ²	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{\sigma_{kr,Bor-Al}}$	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}}$
K1	417,77	523,74	970,04	1,25	0,54
K2	414,02	520,17	970,04	1,26	0,54
K3	424,89	528,61	970,04	1,24	0,54
K4	422,19	525,51	970,04	1,24	0,54
3 enine takviye elemanı : $h = 10 \text{ cm}$ $t_s = 6 \text{ cm}$					
Kon. No	$\sigma_{kr,Bor-Al}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}$ kgf/cm ²	$(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kgf/cm ²	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{\sigma_{kr,Bor-Al}}$	$\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}}$
K1	417,77	645,11	1266,47	1,54	0,51
K2	414,02	647,99	1266,47	1,57	0,51
K3	424,89	643,40	1266,47	1,51	0,51
K4	422,19	632,43	1266,47	1,50	0,50

Sanal'ın elde ettiği desteklenmemiş kompozit plakların, kritik kayma gerilmeleri ile ANSYS® programından elde ettiğimiz aynı plakların, kritik basma gerilmeleri Çizelge 6.6'da verilmiştir [11].

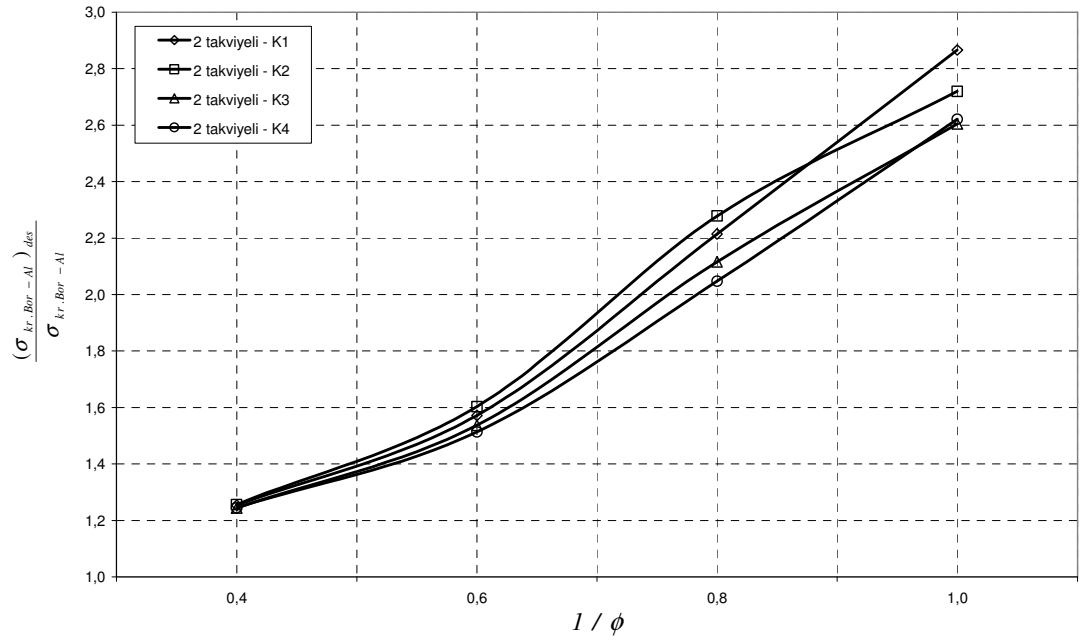
Çizelge 6.6. Bor-Al plaklarda Sanal'ın elde ettiği kritik kayma gerilmeleri ile ANSYS® programından elde ettiğimiz kritik basma gerilmeleri

K1							
Plak No	$1/\phi$	ϕ	a cm	b cm	t cm	$\sigma_{kr,\text{çelik}}$ kg/cm ²	$\tau_{kr,Bor-Al}$ kg/cm ²
1	0,4	2,5	500	200	2	417,77	784,0
2	0,6	1,66	332	200	2	454,40	888,0
3	0,8	1,25	250	200	2	454,78	1040,0
K2							
Plak No	$1/\phi$	ϕ	a cm	b cm	t cm	$\sigma_{kr,\text{çelik}}$ kg/cm ²	$\tau_{kr,Bor-Al}$ kg/cm ²
1	0,4	2,5	500	200	2	414,02	847,0
2	0,6	1,66	332	200	2	449,24	961,0
3	0,8	1,25	250	200	2	446,84	1160,0
K3							
Plak No	$1/\phi$	ϕ	a cm	b cm	t cm	$\sigma_{kr,\text{çelik}}$ kg/cm ²	$\tau_{kr,Bor-Al}$ kg/cm ²
1	0,4	2,5	500	200	2	424,89	838,0
2	0,6	1,66	332	200	2	458,58	953,0
3	0,8	1,25	250	200	2	459,81	1140,0
K4							
Plak No	$1/\phi$	ϕ	a cm	b cm	t cm	$\sigma_{kr,\text{çelik}}$ kg/cm ²	$\tau_{kr,Bor-Al}$ kg/cm ²
1	0,4	2,5	500	200	2	422,19	865,0
2	0,6	1,66	332	200	2	454,68	983,0
3	0,8	1,25	250	200	2	459,41	1170,0

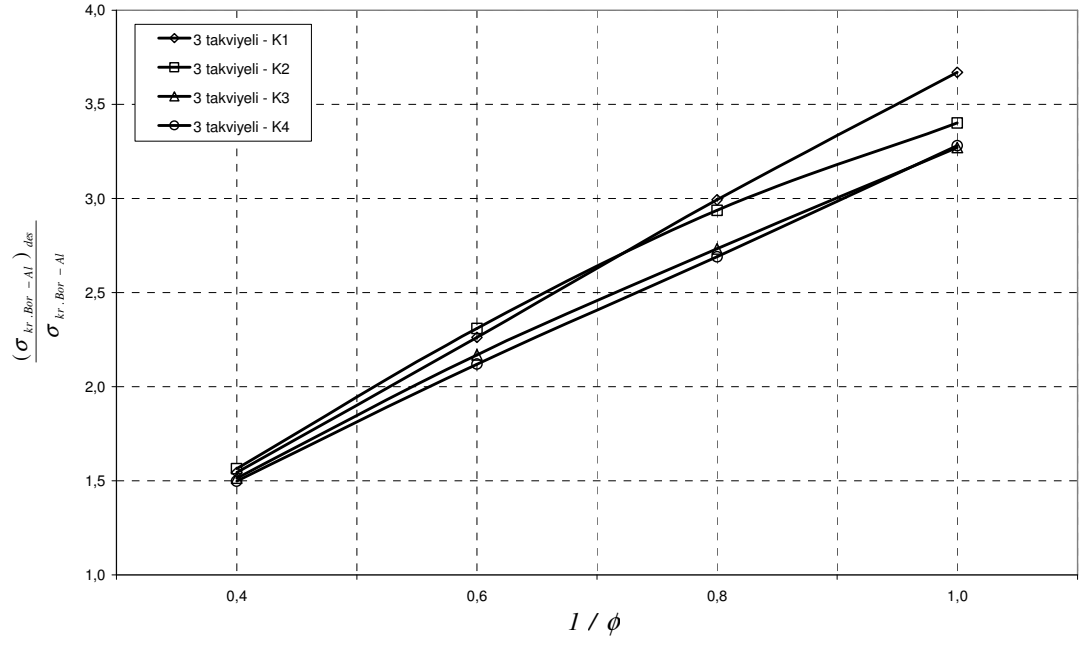
Çizelge 6.6'da görüldüğü gibi desteksiz fiber kompozit plaklarda yükleme çeşidinin burkulmaya olan etkisini τ_{kr}/σ_{kr} oranlarından görebilmekteyiz. Mukavemeti düşük olan grup K1 konfigürasyonuna sahip olan 500x200x2 boyutundaki geometri olup τ_{kr}/σ_{kr} oranı 1,88'dir. τ_{kr}/σ_{kr} oranının en yüksek geometri ise K2 konfigürasyonuna sahip olan 250x200x2 boyutundaki plak için 2,59 olduğu görülmektedir. Çizelge 6.2 - Çizelge 6.5'de belirtilen sonuçlar esas alınarak çizilen $(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}/\sigma_{kr,Bor-Al}$ oranının, $1/\phi$ oranına göre değişimini gösteren grafikler, Şekil 6.2 - Şekil 6.4'de verilmiştir.



Şekil 6.2. Tek takviye elemanlı fiber kompozit plakların relatif gerilme artışının, $1/\phi$ 'ye göre değişim grafiği

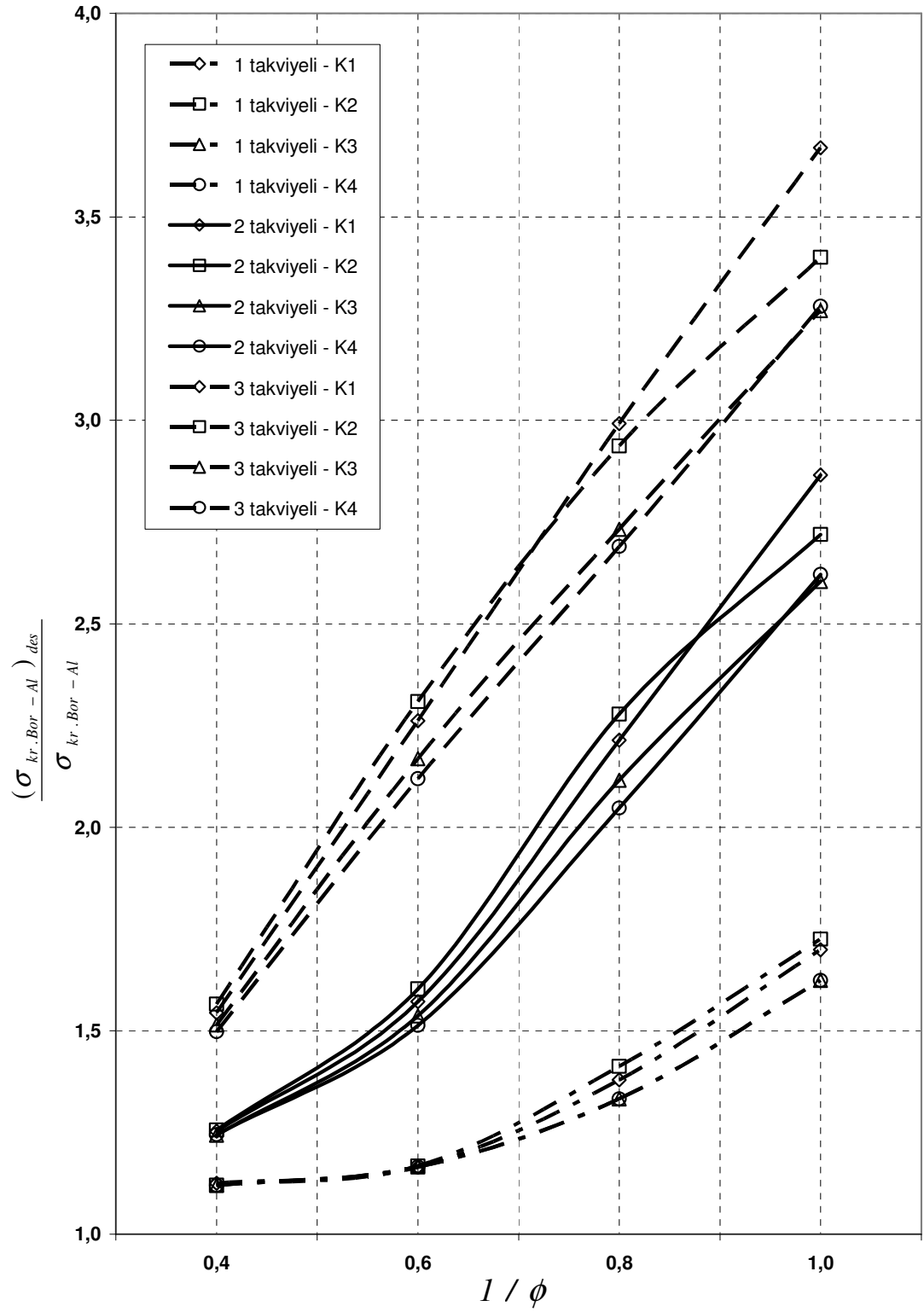


Şekil 6.3. İki takviye elemanlı fiber kompozit plakların relatif gerilme artışının, $1/\phi$ 'ye göre değişim grafiği



Şekil 6.4. Üç takviye elemanlı fiber kompozit plakların relatif gerilme artışının, $1/\phi$ 'ye göre değişim grafiği

Bu üç grafiğin bir arada görebilmek için; Şekil 6.5'deki grafik düzenlenmiştir.



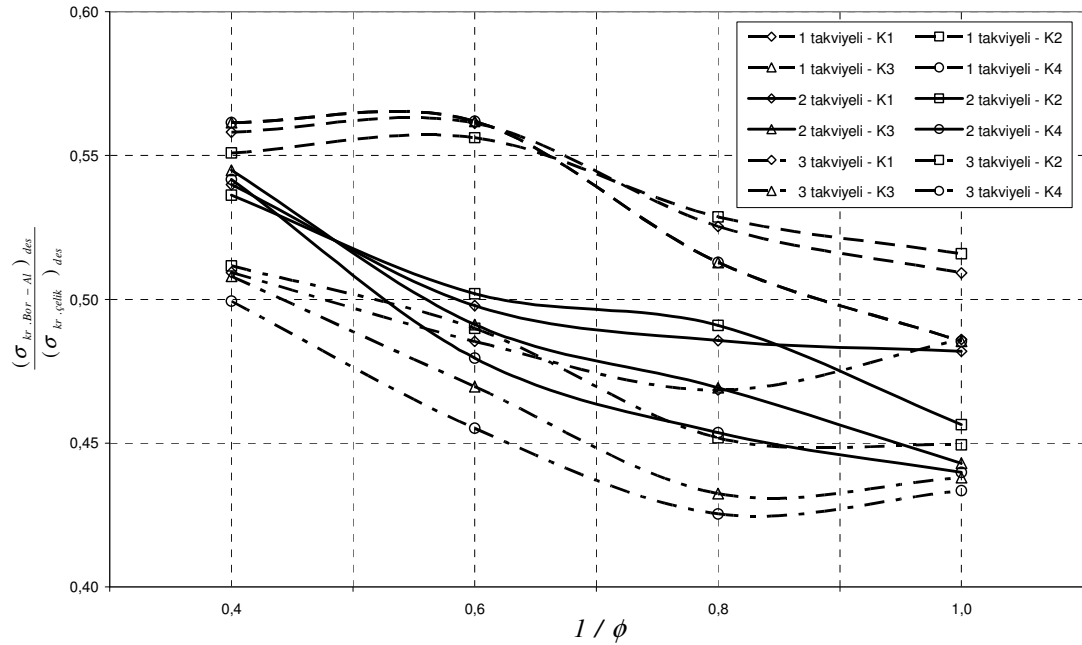
Şekil 6.5. Fiber kompozit plakların relatif gerilme artışının, l/ϕ 'ye göre değişim grafiği

Desteklenmiş genel ortotropik plakların, takviye eleman sayısına bağlı olarak kritik burkulma gerilmesinde meydana gelen değişimler Şekil 6.5'deki grafik üzerinde incelenmiştir. Yapılan incelemelerde desteklenmiş izotropik plaklarda olduğu gibi; takviye eleman sayısı arttıkça desteklenmemiş ortotropik plaklara oranla relatif artışın yükseldiği ve $1/\phi$ oranı ile kritik burkulma değerlerinin de arttığı görülmüştür. Şekil 6.1 ve Şekil 6.5'deki grafikleri karşılaştırıldığında malzemenin kritik burkulma gerilmesi üzerindeki etkisi görülür, örneğin; $1/\phi$ oranı 1 olan ve 3 takviye elemanlı izotropik ve

kompozit plakların relatif gerilmelerini birbirine $\left(\frac{(\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}}{\sigma_{kr,\text{çelik}}} \right) / \left(\frac{(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des}}{\sigma_{kr,Bor-Al}} \right)$

oranladığımızda değerinin 4,47/3,67 olduğu görülür. Buna göre; çelik kompozit malzemenin seçilen bu geometri için daha iyi relatif artış gösterdiği anlaşılmaktadır.

Ayrıca, kompozit plaklarda fiber diziliş konfigürasyonun, kritik burkulma gerilmesine olan etkileri de Şekil 6.5'de görülmektedir. Örneğin; üç destekli 200x200x2 boyutundaki fiber kompozit plaklar karşılaştırıldığında, relatif gerilmeleri $((\sigma_{kr,Bor-Al})_{des} / \sigma_{kr,Bor-Al})$ $K1 > K2 > K4 > K3$ şeklinde sıralanmaktadır. Buna göre; $[0/90/0]^{gövde} + [(0/90)_2]_s^{takviye}$ beraberce en yüksek kritik burkulma gerilmesini vermiştir.



Şekil 6.6. Kompozit plakların çelik plaklara göre relatif gerilme değerinin, $1/\phi$ 'ye göre değişim grafiği

Çizelge 6.2 - Çizelge 6.5'de belirtilen sonuçlar esas alınarak; $(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des} / (\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ oranının, $1/\phi$ oranına göre değişimini gösteren grafik, Şekil 6.6'da verilmiştir. Bu grafiğe göre; desteksiz plakların, $\sigma_{kr,Bor-Al} / \sigma_{kr,\text{çelik}}$ oranının ortalama değeri 0,57, destekli plakların ise; $(\sigma_{kr,Bor-Al})_{des} / (\sigma_{kr,\text{çelik}})_{des}$ oranının ortalama değeri de 0,50 olarak hesaplanmıştır. Bu oranların değerinin 1'in altında olmasına karşı, Bor-Al ait yoğunluk değeri ise; yaklaşık olarak yumuşak çeliğin 1/3 katıdır. Yani, kritik burkulma gerilmesinde meydana gelen %43'lük azalmaya karşı; birim hacimde oluşan ağırlıktaki kazanç yaklaşık %66 oranında olur.

Böylelikle belirlediğimiz tüm plakların, ANSYS® programında özdeğer problem çözümleri yapılarak, alınan sonuçlarının değerlendirilmesi tamamlanmıştır. Aynı plakların lineer olmayan analizleri ise; bir sonraki bölümde detaylı olarak anlatılacaktır.

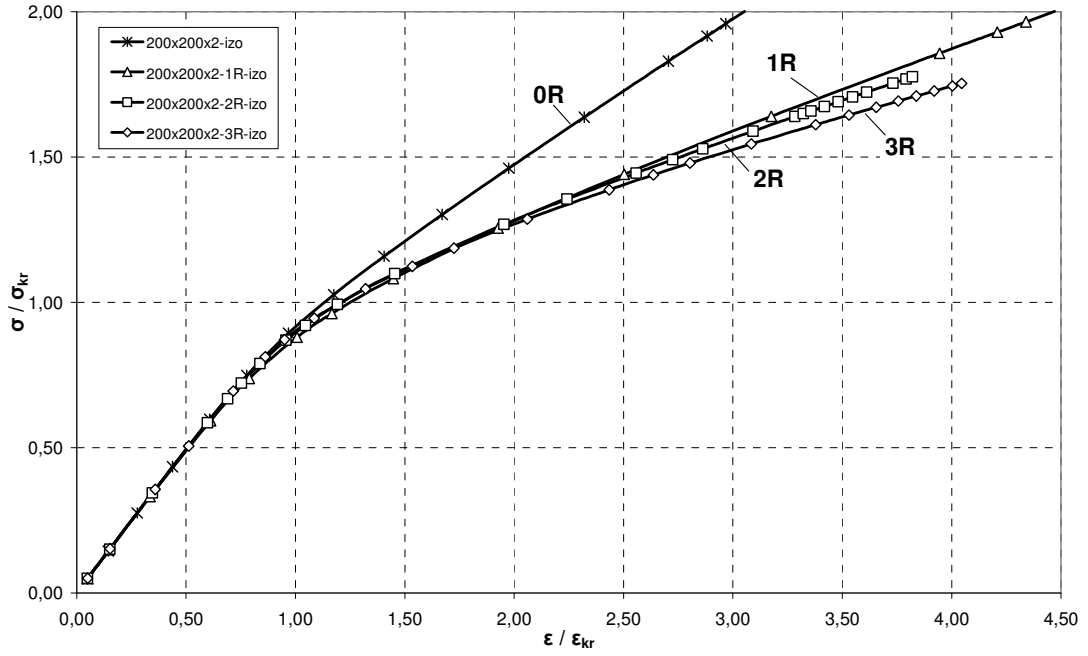
6.2. Lineer Olmayan Analiz Sonuçları

Özdeğer problemin çözümlerinden elde edilen kritik burkulma yükü ve mod şekli dikkate alınarak; kritik burkulma yükü altında plağın boyunda meydana gelen daralmayı hesaplamak amacıyla statik analiz yapılır. Daha sonra geometrik olarak lineer olmayan analize başlanır. Analize plağın geometrisi güncellenerek başlanır, yani özdeğer problemin çözümünden elde edilen mod şekline uygun ilk deformasyon değeri, plak boyunun % 0,1 oranında tarafımızdan verilir. Verilen bu değerini seçimi daha önceki çalışmalardan [37-38] faydalanılarak yapılmıştır.

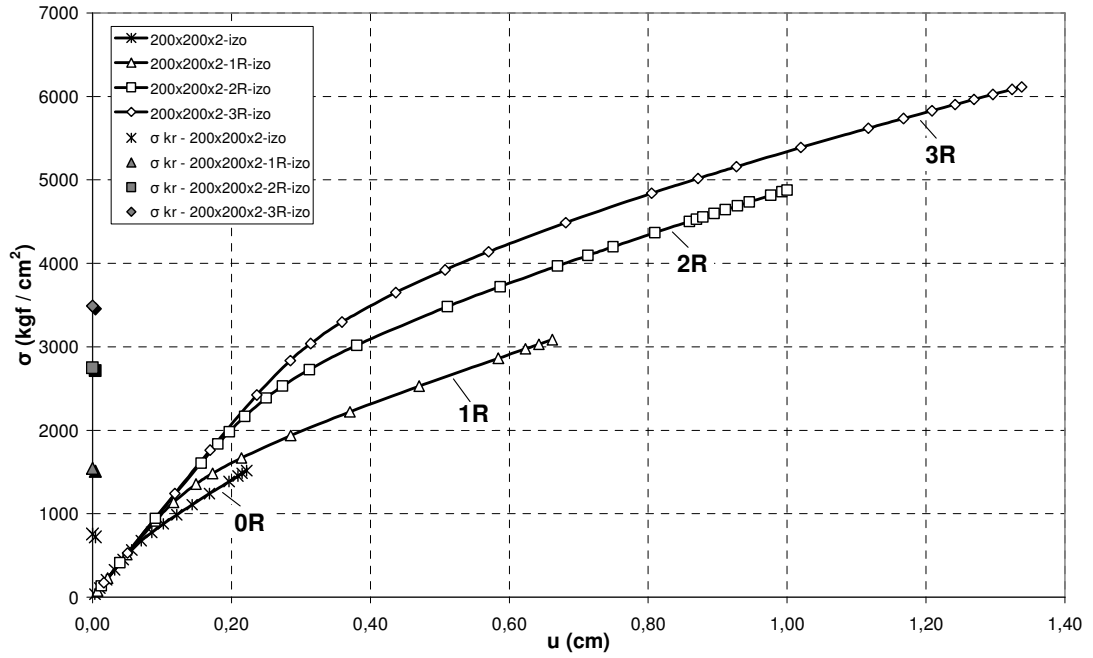
Özdeğer probleminin çözümünden bulunan kritik burkulma gerilmesinin iki katı kadar bir yük ile plak kenarına yükleme yapılır. Söz konusu analize ilişkin çözümleme seçenekleri 2. Bölümde verilmiş olup, bu değerlerin belirlenmesinde Ünsoy'un çalışmasından da faydalanılmıştır [39].

Lineer olmayan analiz sonuçları grafikler şeklinde aşağıda verilmiştir. Bazı analiz sonuçlarının değerleri, ileride yapılacak olan çalışmalara yol göstermesi amacıyla EK-4'de verilmiştir.

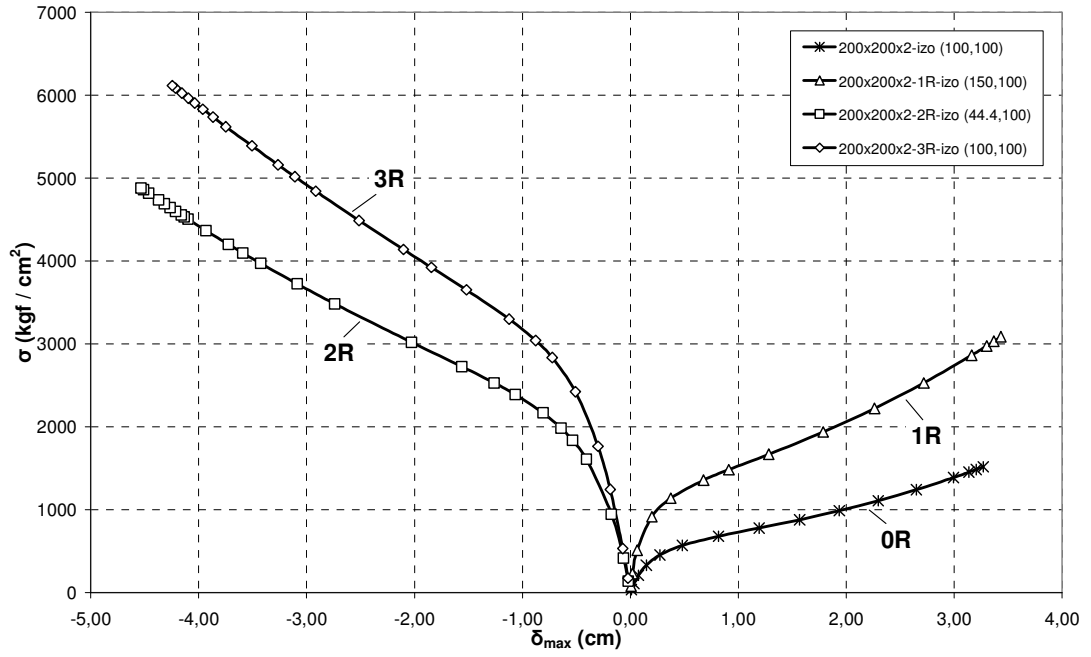
Çelik plakların lineer olmayan analiz sonuçları



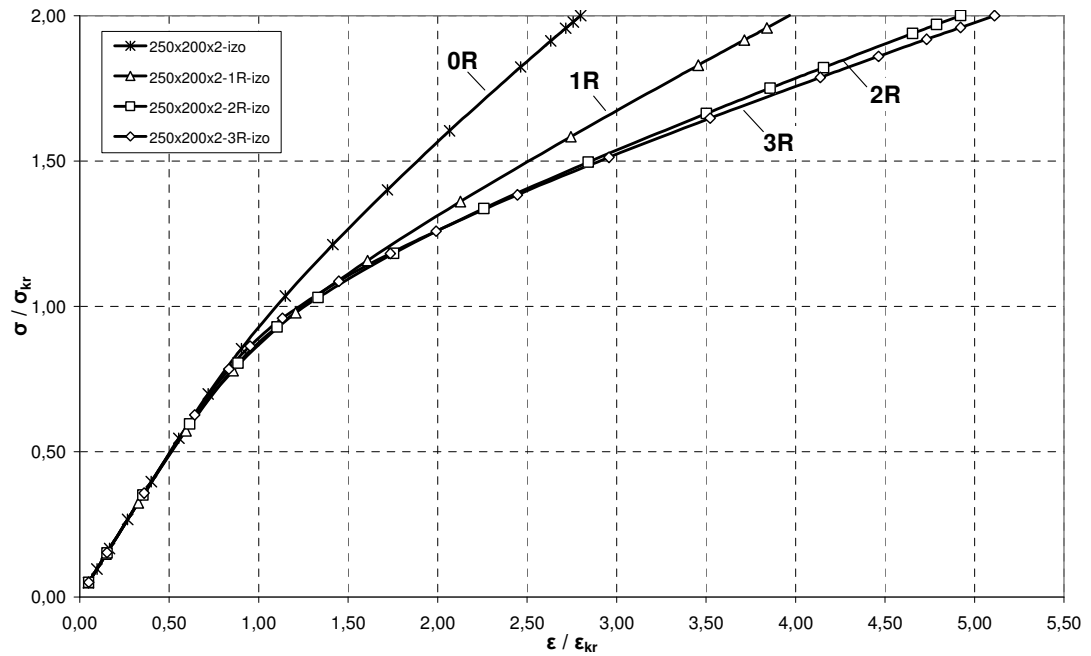
Şekil 6.7. 200x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda σ/σ_{kr} 'in $\varepsilon/\varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri



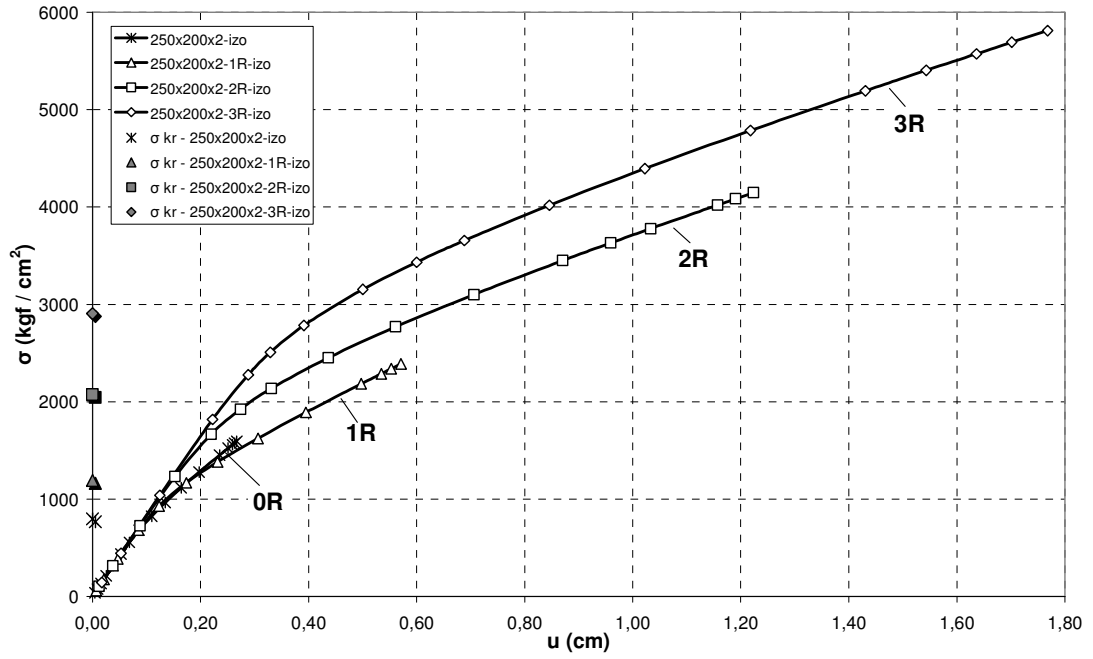
Şekil 6.8. 200x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



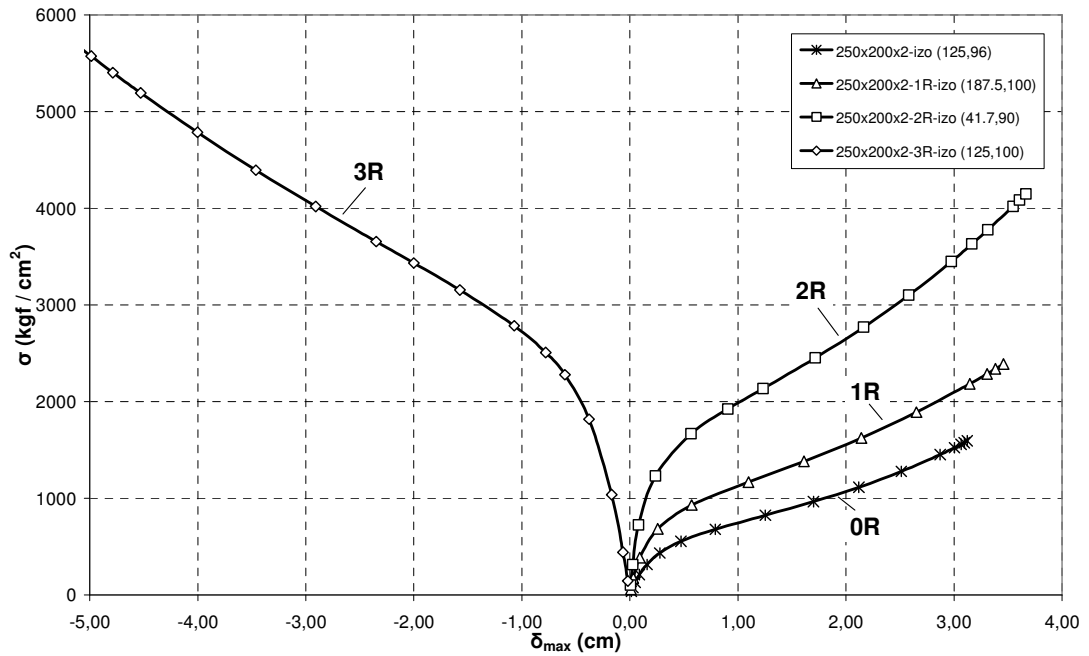
Şekil 6.9. 200x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



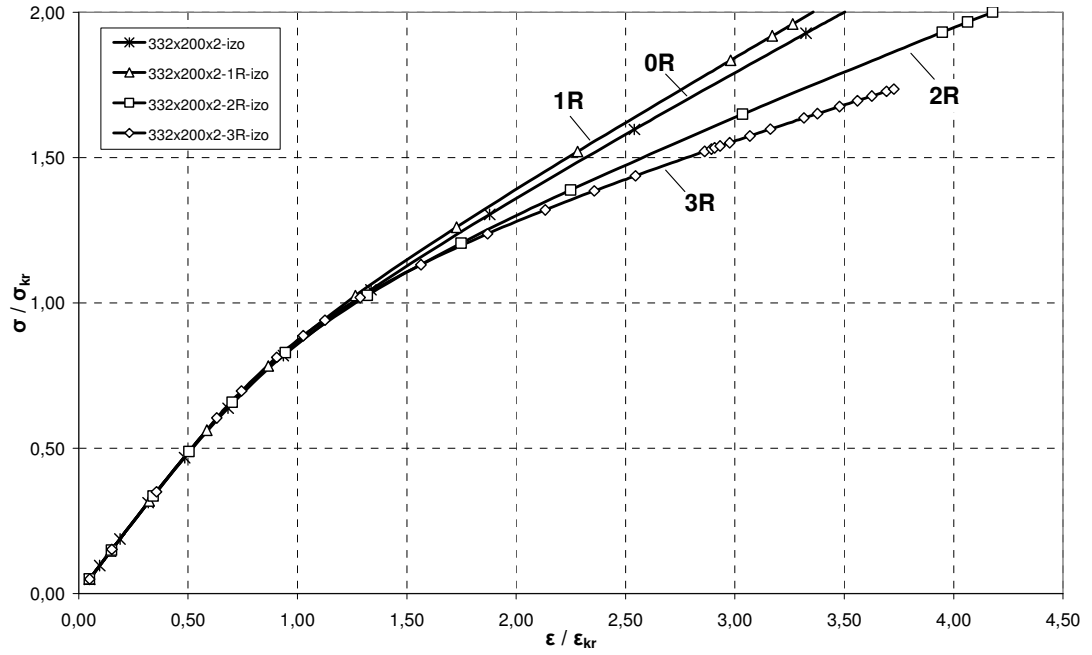
Şekil 6.10. 250x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda σ/σ_{kr} 'in ϵ/ϵ_{kr} 'e göre değişim grafikleri



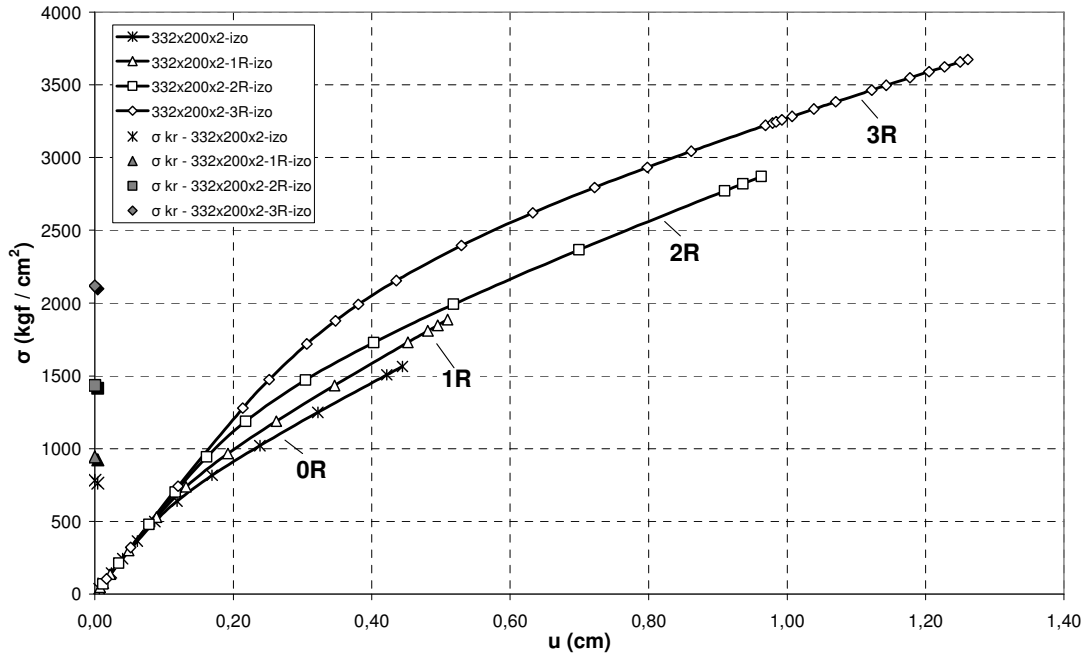
Şekil 6.11. 250x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



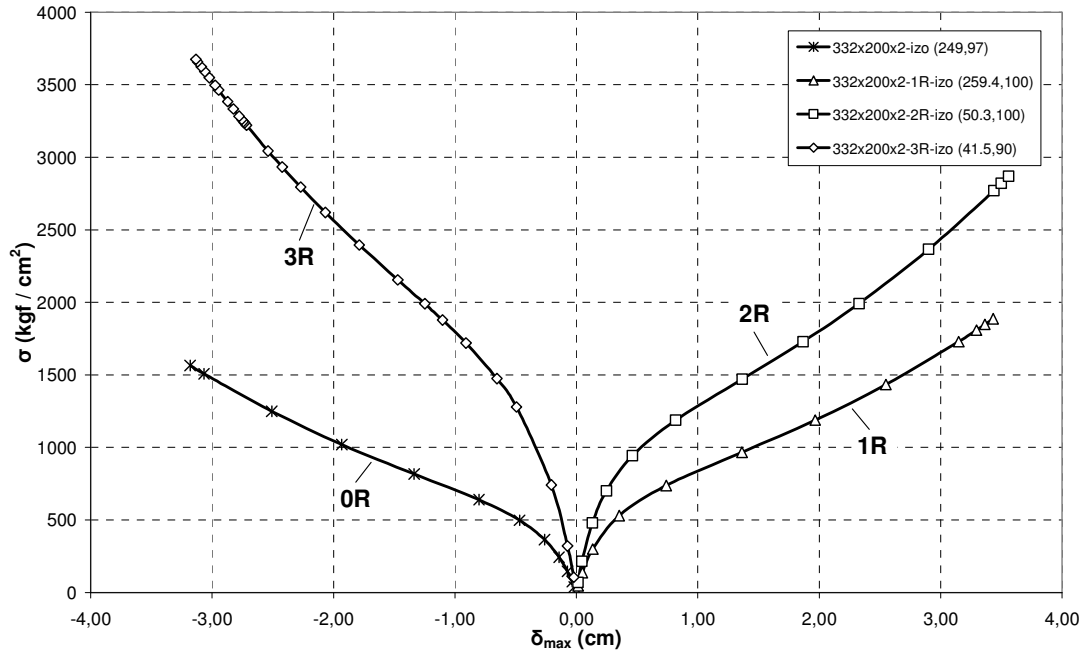
Şekil 6.12. 250x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



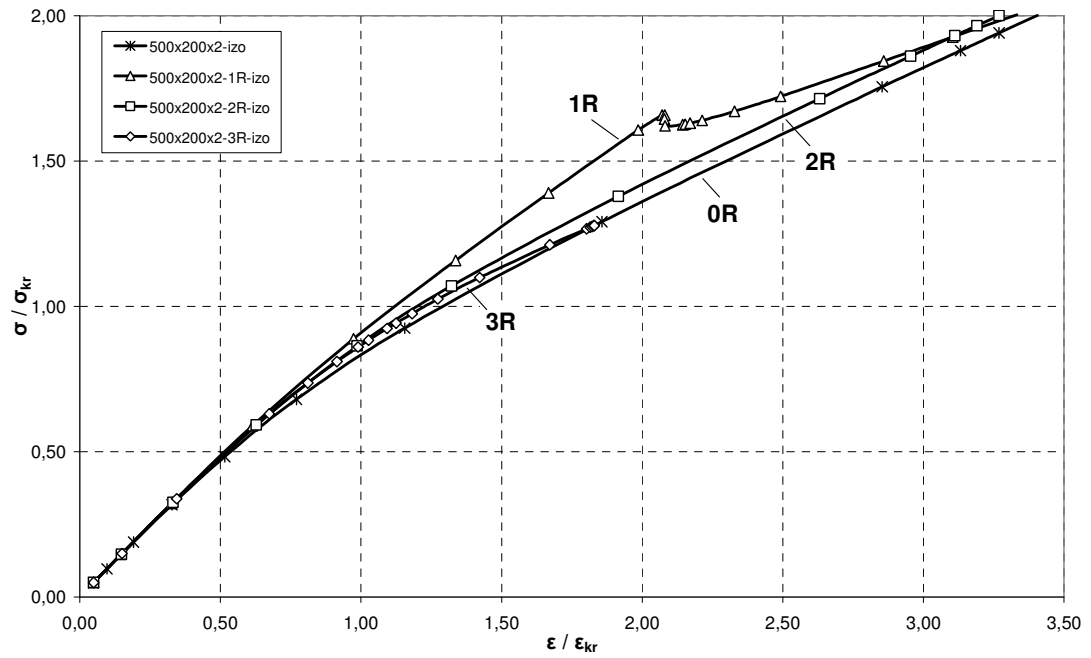
Şekil 6.13. 332x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri



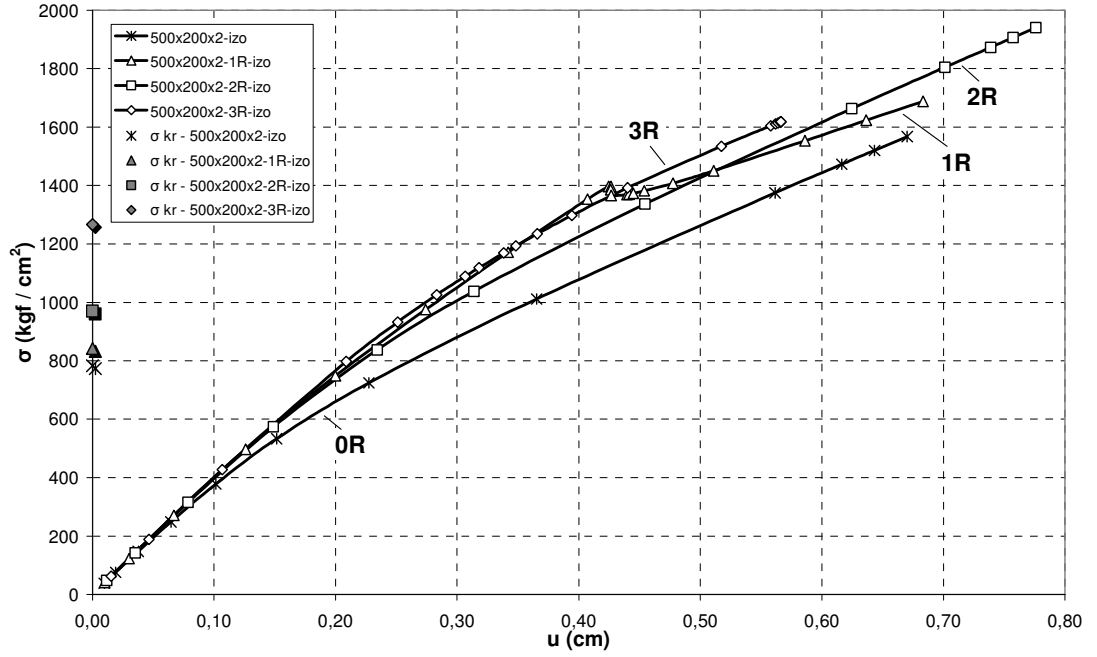
Şekil 6.14. 332x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



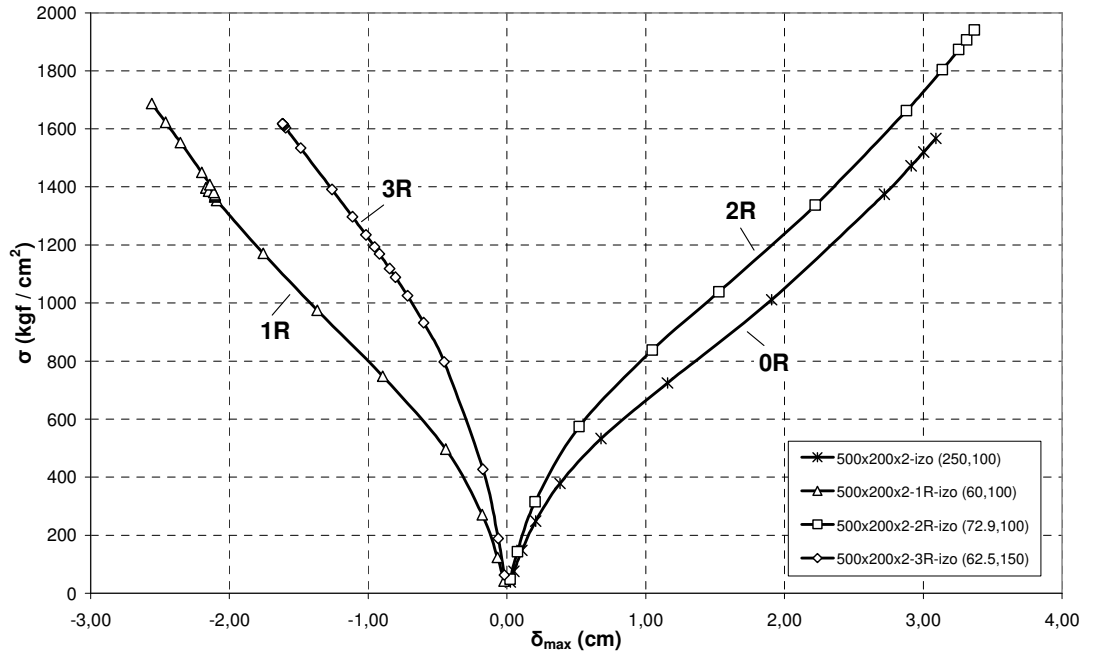
Şekil 6.15. 332x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



Şekil 6.16. 500x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda σ / σ_{kr} 'in ϵ / ϵ_{kr} 'e göre değişim grafikleri



Şekil 6.17. 500x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



Şekil 6.18. 500x200x2 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri

Genel olarak çelik plaklara ait tüm grafiklerde görülen eğriler, σ/σ_{kr} değerleri 0,0 - 2,0 aralığında değişecek şekilde çözümler yapılarak çizilmiştir. Grafiklerde burkulma olduktan sonra, belirli bir şekilde doğrusal eğrilerin parabolik eğrilere dönüştüğü görülmektedir. Birinci ve ikinci tür grafik olan $\sigma/\sigma_{kr} - \varepsilon/\varepsilon_{kr}$ ve $\sigma - u$ eğrilerinde önce lineer, sonra da eğimi azalan parabolik eğriler görülmektedir. Üçüncü tür grafik olan $\sigma - \delta_{max}$ eğrilerinde ise; önce lineer doğru daha sonra iç bükey parabolik eğri, en son olarak da dış bükey parabolik eğriler bir arada görülmektedir. Analizlerde kalıcı deformasyon dikkate alınmadığından dolayı, sürekli artışlar gösteren grafikler görülmektedir.

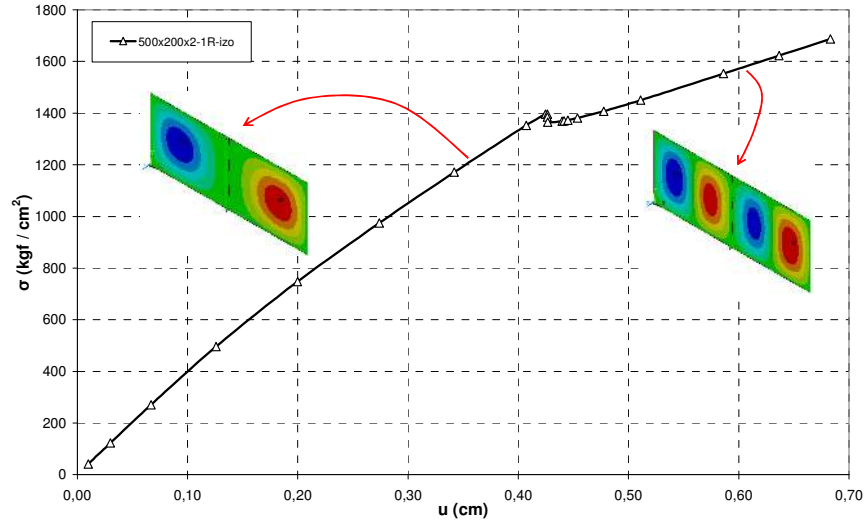
Çizelge 6.7. Plak boyutlarına göre desteksiz plakların mod değerleri (kgf/cm²)

Mod No.	200x200x2 ($\phi = 1,0$)	250x200x2 ($\phi = 1,25$)	332x200x2 ($\phi = 1,33$)	500x200x2 ($\phi = 2,5$)
I	758,10	796,43	782,10	783,35
II	1183,00	937,00	969,71	796,70
III	2101,30	1502,00	1051,96	937,55

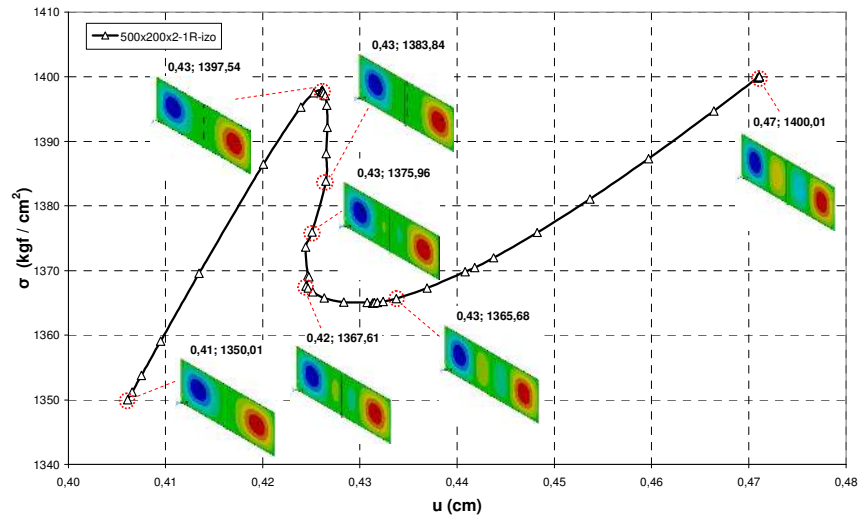
Çizelge 6.7’de görülmekte olan özdeğer problemin sonuçlarına göre ilk üç mod değerinden yalnızca I. mod’a ait olan değerler kullanılarak lineer olmayan çözümler yapılmıştır. Şekil 6.7, Şekil 6.10, Şekil 6.13 ve Şekil 6.16’da verilen grafikler, bu üç mod değerine karşılık gelen üç σ_{kr} değerlerini ilk bölgede içermekte ve I. mod değerini içeren lineer olmayan çözümler parabolik ikinci bölgede de devam etmektedir. Plâğın ϕ oranı küçülme sırasına göre kritik burkulma gerilmesi, destekli eleman sayısına göre sıra değiştirerek yükselmektedir. σ/σ_{kr} eksenindeki maksimum 2,0 değeri alınmıştır [19]. Plak boyutuna bağlı olarak $0,0 < \varepsilon/\varepsilon_{kr} < 5,5$ aralığında değişmektedir.

Şekil 6.8, Şekil 6.11, Şekil 6.14 ve Şekil 6.17'deki grafiklerde, σ plağa yanal yüzünden uygulanan basma gerilmesinin, u boyca kısalma göre değişimleri görülmektedir. Şekil 6.8'de 200x200x2 boyutlarındaki ve 1R, 2R, 3R (1, 2 ve 3 destekli) elemanlarıyla güçlendirilmiş plağın lineer olmayan analizlerinin sonuçları, $\sigma - u$ (eksenel basma - eksenel yönde kısalma) grafiği ile gösterilmiştir. Örneğin; analizi yapılan 200x200x2 boyutlarındaki çelik (izotropik) bir plağa, kritik burkulma yükünün iki katı bir yük uygulandığında, plak boyunda meydana gelen daralma 0,22 cm olarak hesaplanırken, aynı plağın tek takviye elemanla desteklenmiş halinde ise; plak boyundaki daralma 0,66 cm olarak hesaplanmıştır. Boyda meydana gelen daralma değerine bakılarak 0,22 cm daralma değerini veren plağın seçilmesi yanlış olur. Bunun nedeni; 0,22 cm daralmaya neden olan yüke karşılık gelen gerilme dağılımı 1516,55 kgf/cm² iken; 0,66 cm kısılmanın olduğu plakta ise; 3084,98 kgf/cm²'dir.

Şekil 6.17'de görülen $\phi = 2,5$ ve tek destek elemanla güçlendirilmiş çelik plakta $u = 0,426$ cm daralma ve $\sigma_{basma} = 1385,635$ kgf / cm² gerilme dağılımı neticesinde plağın kararlı durumundan, kararsız durumuna geçtiği, daha sonra da kararlı duruma tekrar döndüğü görülmektedir. Bu duruma örneklerden bir tanesi Şekil 6.19.a'da incelenmiştir. Bu ara bölgeyi daha detaylı bilgi elde etmek için lineer olmayan analizde 1350 kgf/cm² ile 1400 kgf/cm² değerleri arasında 55 ara adım uygulanarak bu kritik bölgenin analizi tekrar yapılmıştır. Değişik gerilme değerleri için, bu ara bölgenin mod değişim şekilleri detayları ile Şekil 6.19.b'de verilmiştir.



(a)



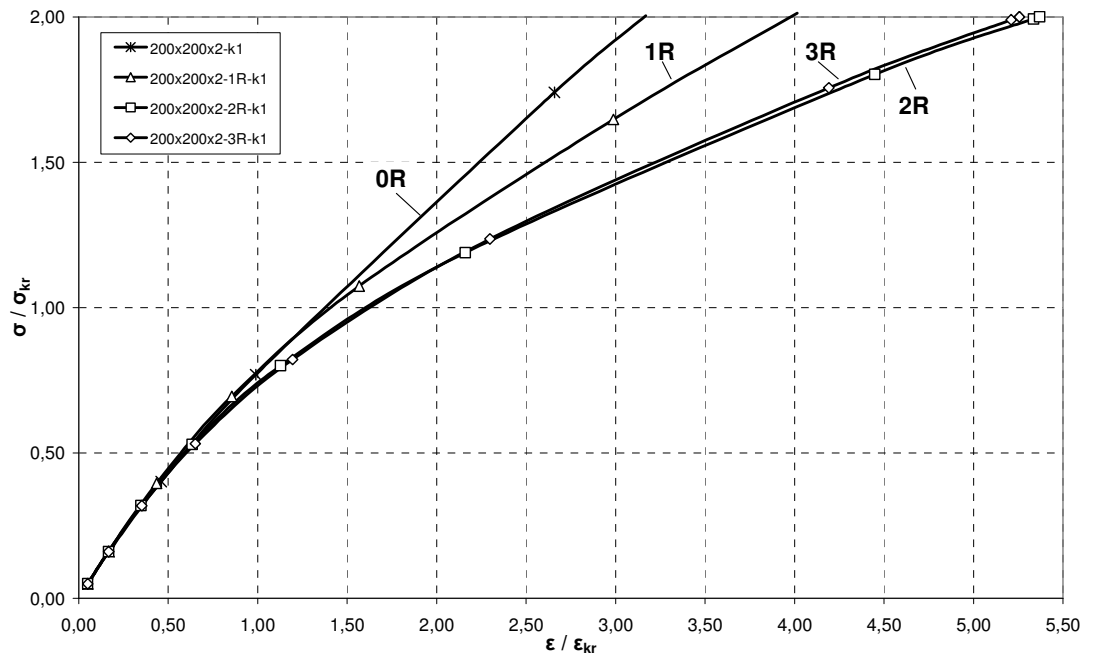
(b)

Şekil 6.19. 500x200x2-1R boyutlarındaki çelik plağa ait lineer olmayan çözümlemesi a) $\sigma - u$ değişim grafiği b) kararlı ve kararsız durumlardan geçişin 55 ara adım ile detaylı gösterimi

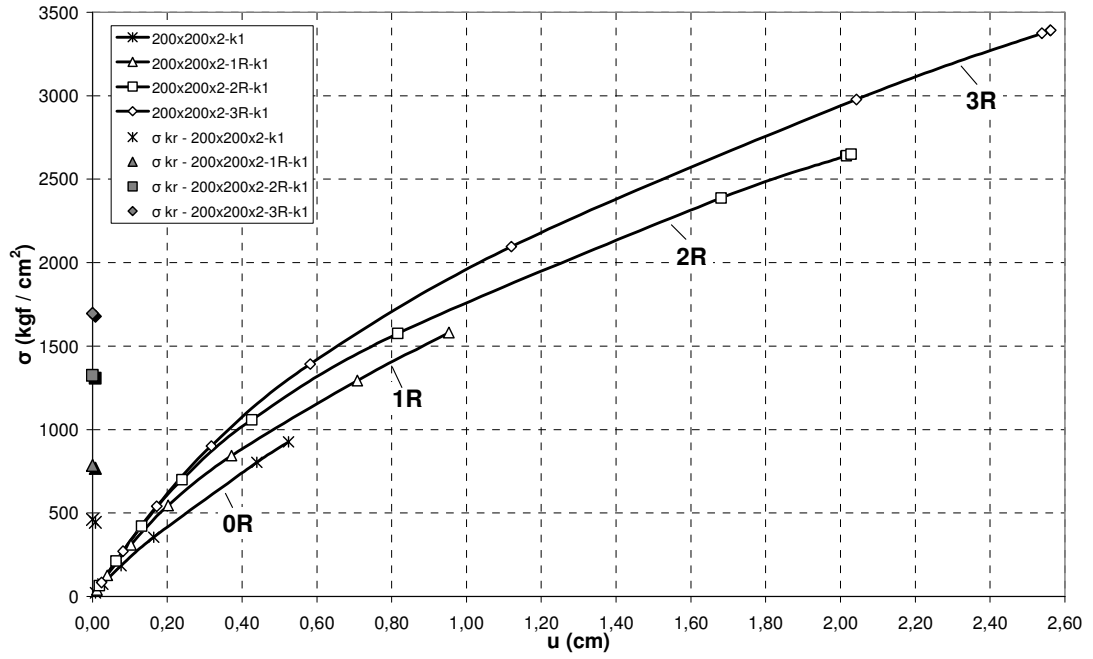
Şekil 6.9, Şekil 6.12, Şekil 6.15 ve Şekil 6.18 'de verilen grafiklerde negatif $\delta_{\max}$ değeri görülen eğrilerde plak yüzeyinde oluşan burkulma şekilleri dış, pozitif değerli olanlar ise iç büküldür. Burada; $\delta_{\max}$, z yönündeki mutlak büyüklüğü maksimum olan düğüm noktasının yer değişim değerini gösterir. Şekil 6.9 kare plağa ait $\sigma - \delta_{\max}$ eğrilerini vermektedir. Desteksiz ve tek destekli plağın burkulmasında düşük mukavemet değerleri görülürken, aynı

plağın iki ve üç destek elemanı ile güçlendirilmiş halinde yaklaşık olarak 2 kat daha büyük kritik gerilme değeri görülmektedir ($\sigma_{kr,3R} = 6114,20$ - $\sigma_{kr,1R} = 3084,98$ kgf/cm²). Şekil 6.12'de desteksiz, tek ve iki destek elemanlı ve ϕ değeri 1,25 olan plağın δ_{max} değerleri pozitif, yani plak yüzeyinde ve grafik açıklama kutusunda koordinat değerleri belirtilen noktada oluşan burkulma şekilleri iç bükeydir. Aynı plağın üç destek elemanı ile güçlendirilmiş halinde ise; yüksek mukavemet ile birlikte burkulma şeklinin dış bükey olduğu görülmüştür. Şekil 6.15'de tek ve iki destek elemanlı ve ϕ değeri 1,33 olan plağın δ_{max} değerleri iç bükey geometri gösterirken, desteksiz ve üç destek elemanlı plaklarda ise; burkulma şekli dış bükeydir. Şekil 6.18'de desteksiz ve iki destek elemanlı ve ϕ değeri 2,5 olan plağın δ_{max} değerleri iç bükey, bir ve üç destek elemanla güçlendirilmiş plaklarda ise; burkulma şekli dış bükeydir.

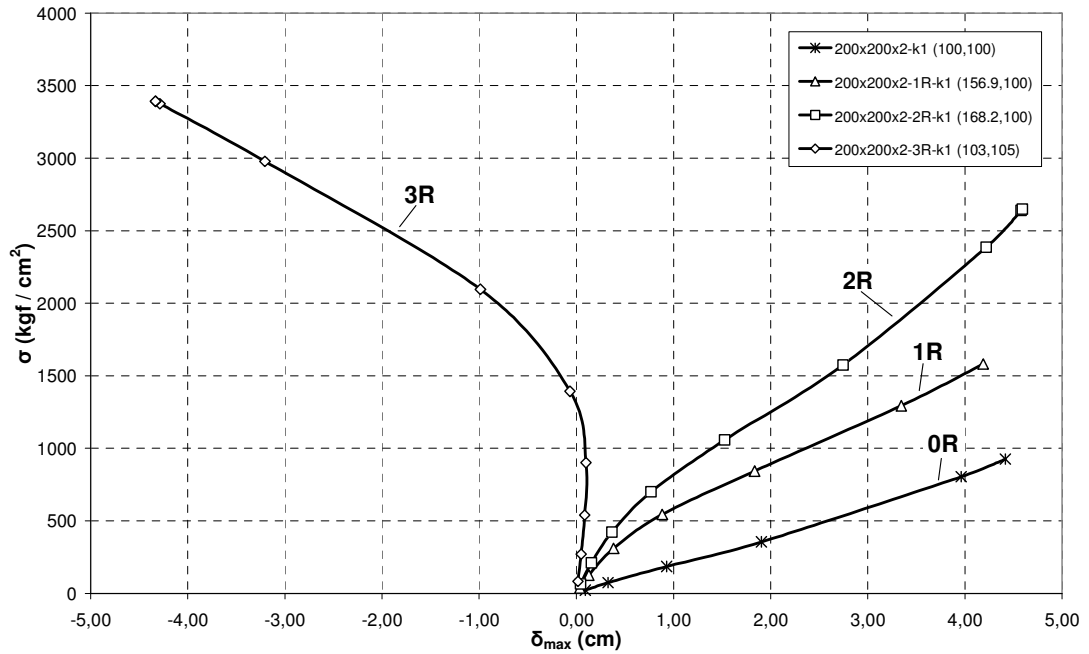
K1 - Bor-Al plakların lineer olmayan analiz sonuçları



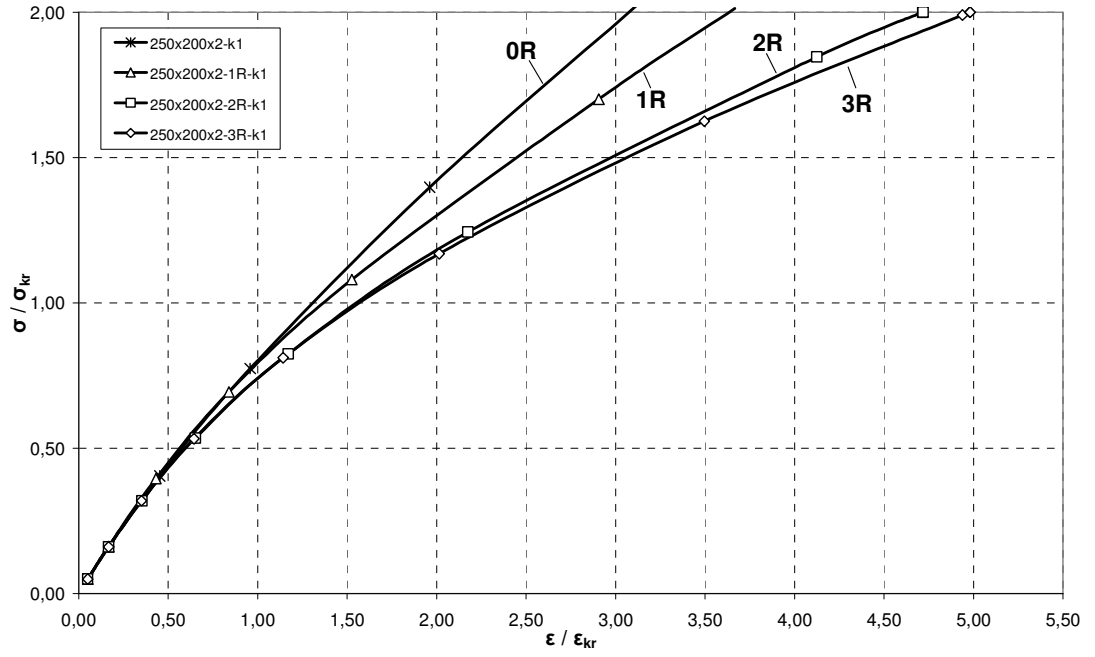
Şekil 6.20. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda σ / σ_{kr} 'in ϵ / ϵ_{kr} 'e göre değişim grafikleri



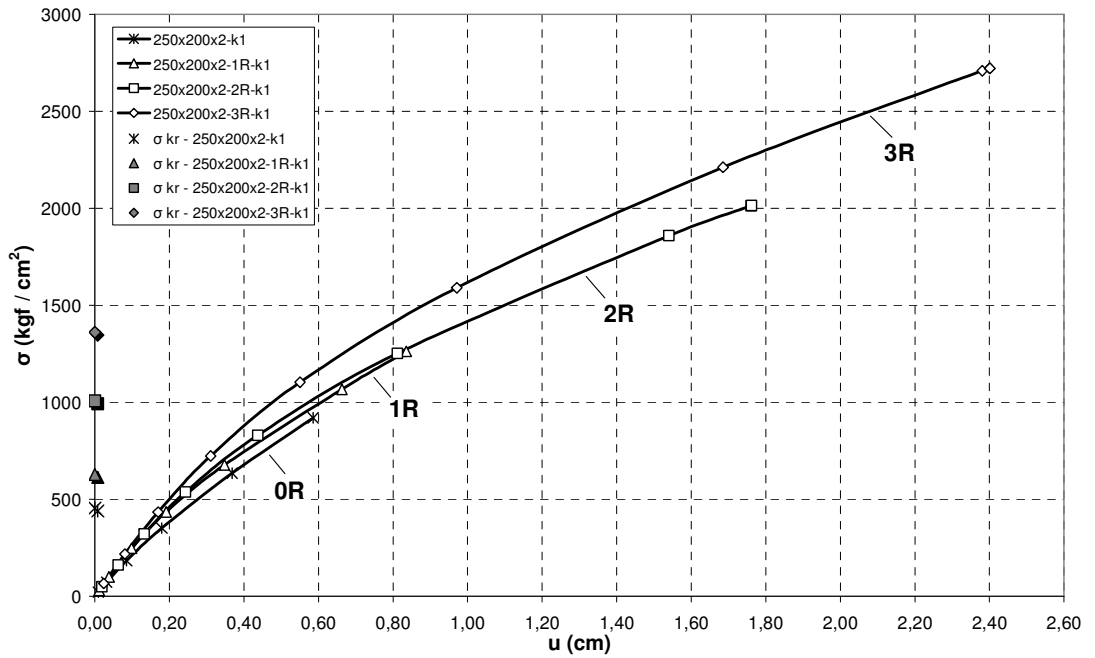
Şekil 6.21. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



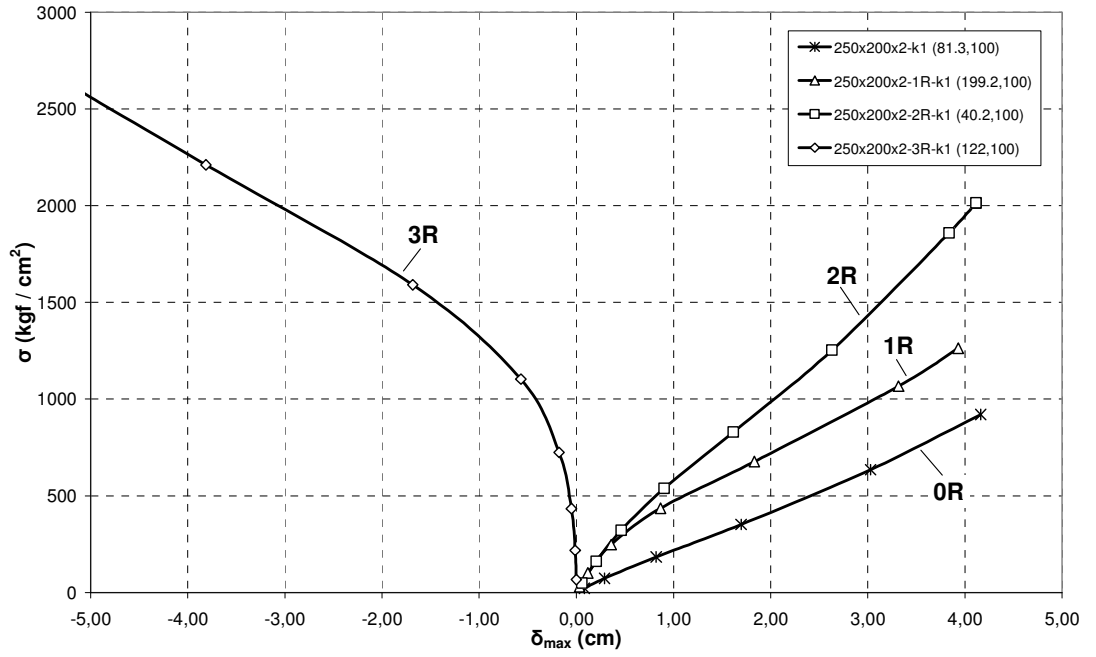
Şekil 6.22. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



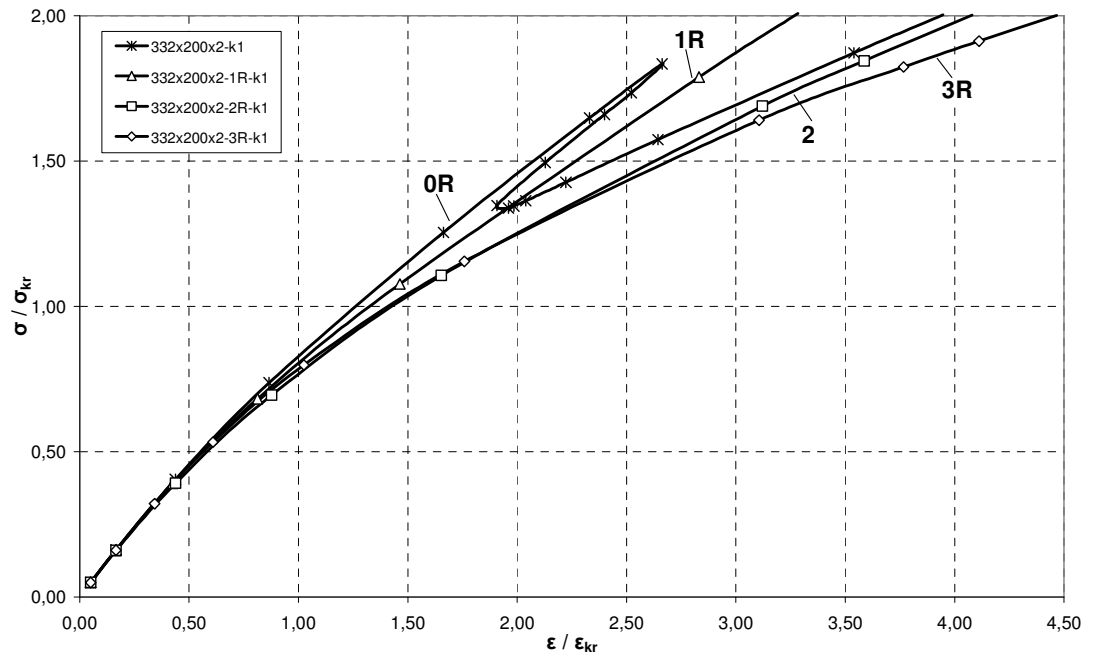
Şekil 6.23. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri



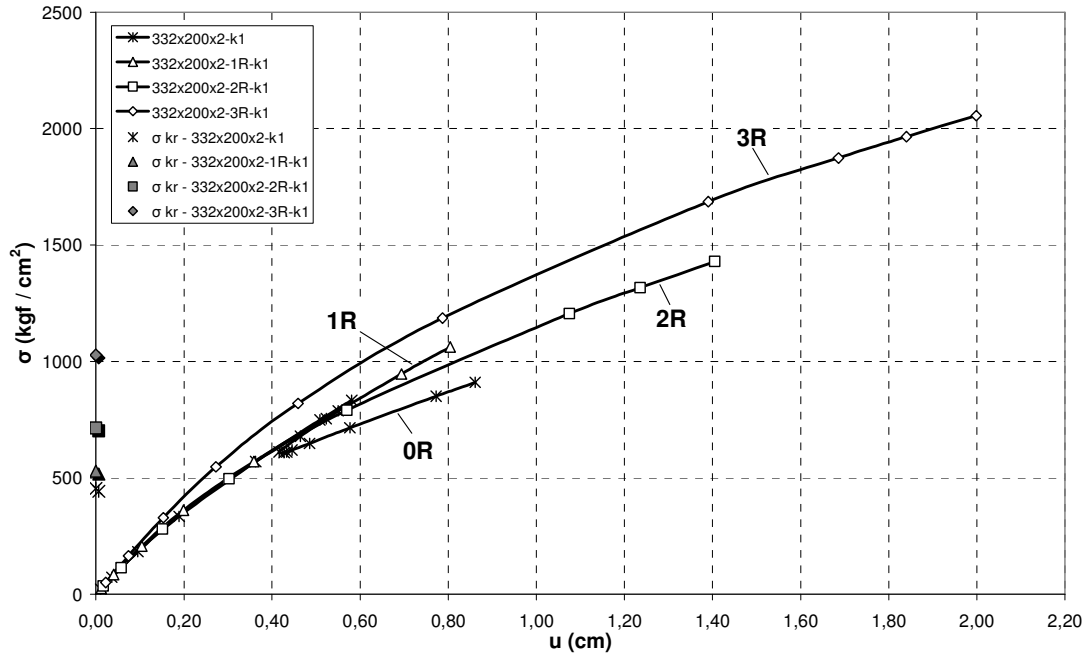
Şekil 6.24. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



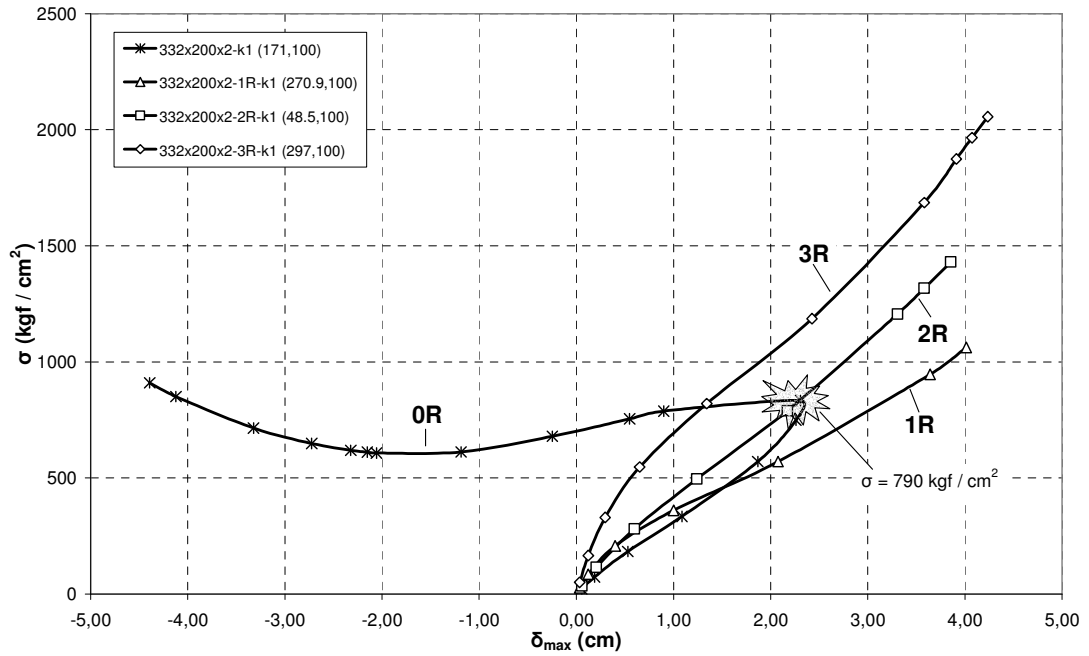
Şekil 6.25. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



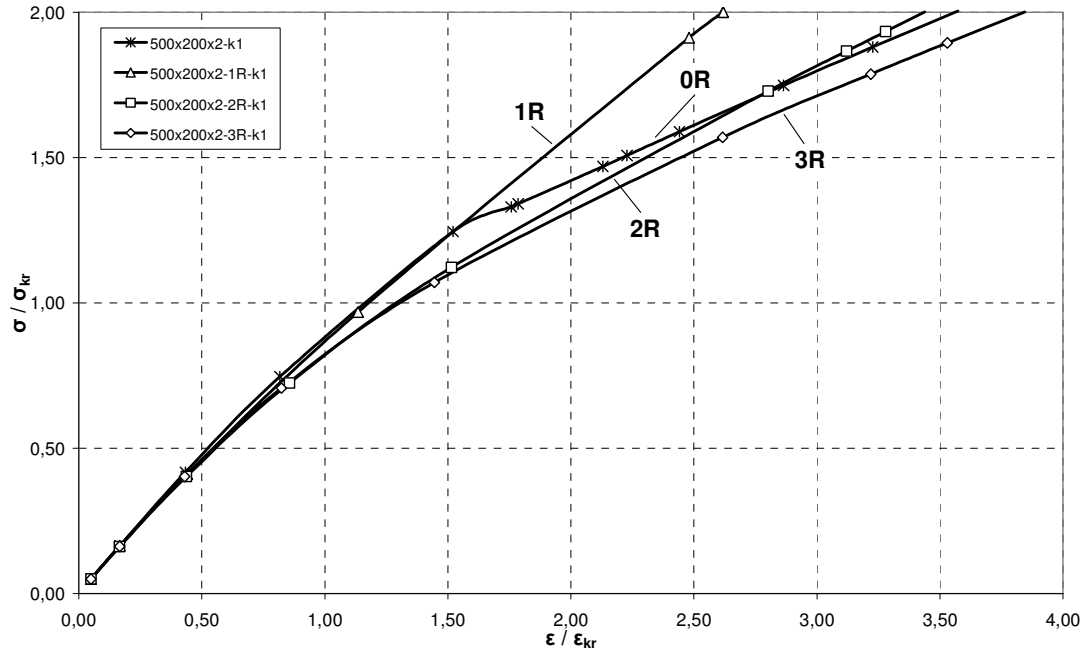
Şekil 6.26. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda σ / σ_{kr} 'in ϵ / ϵ_{kr} 'e göre değişim grafikleri



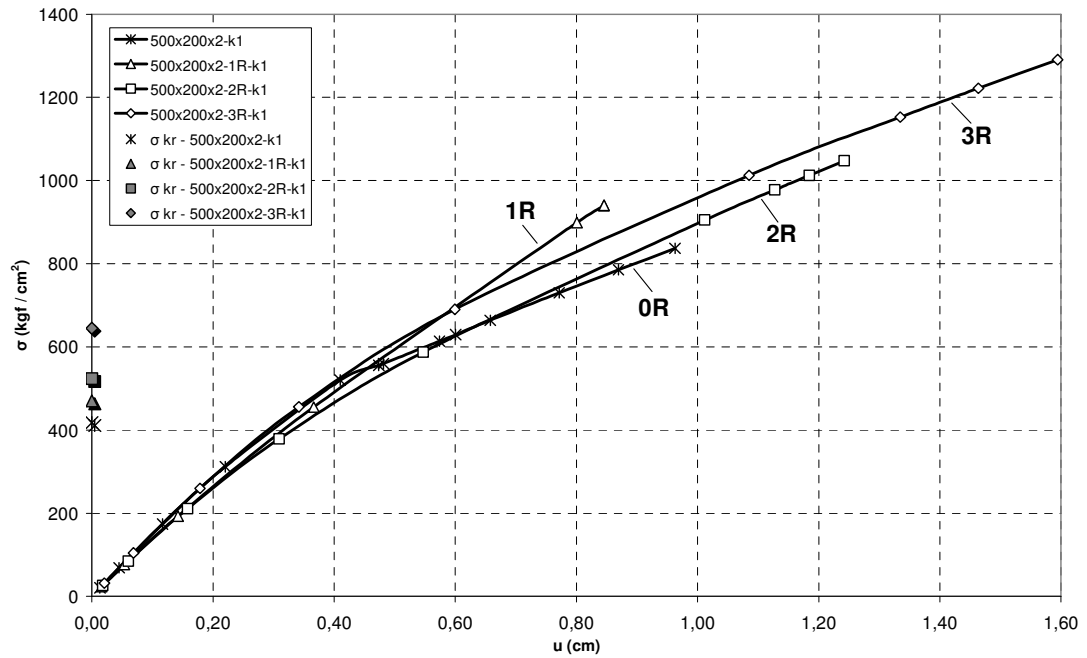
Şekil 6.27. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



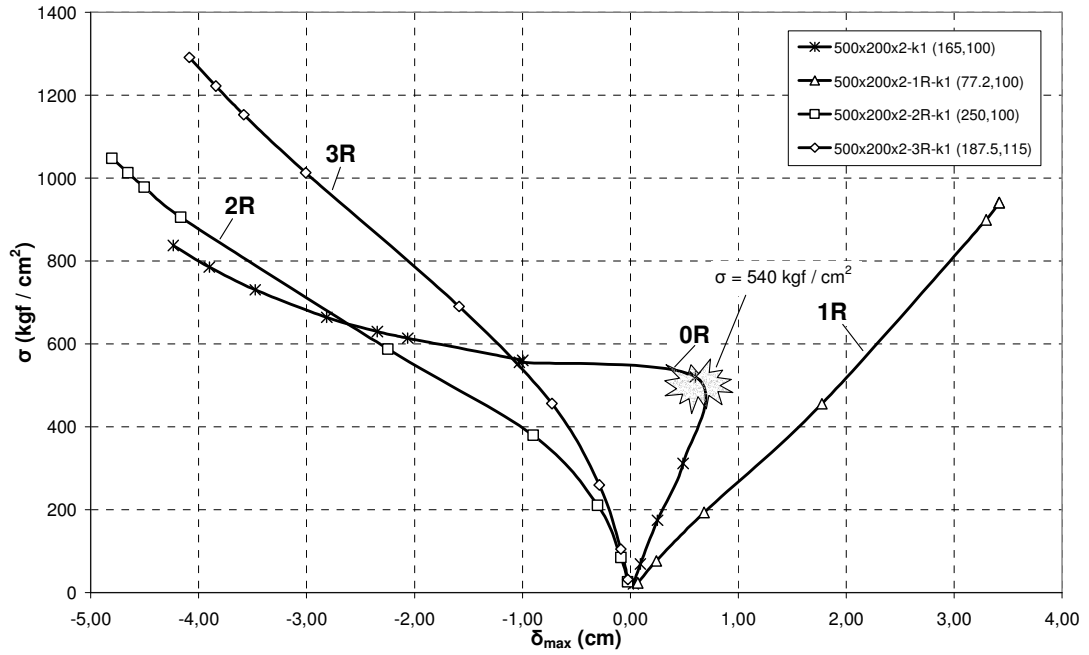
Şekil 6.28. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



Şekil 6.29. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda σ/σ_{kr} 'in $\varepsilon/\varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri

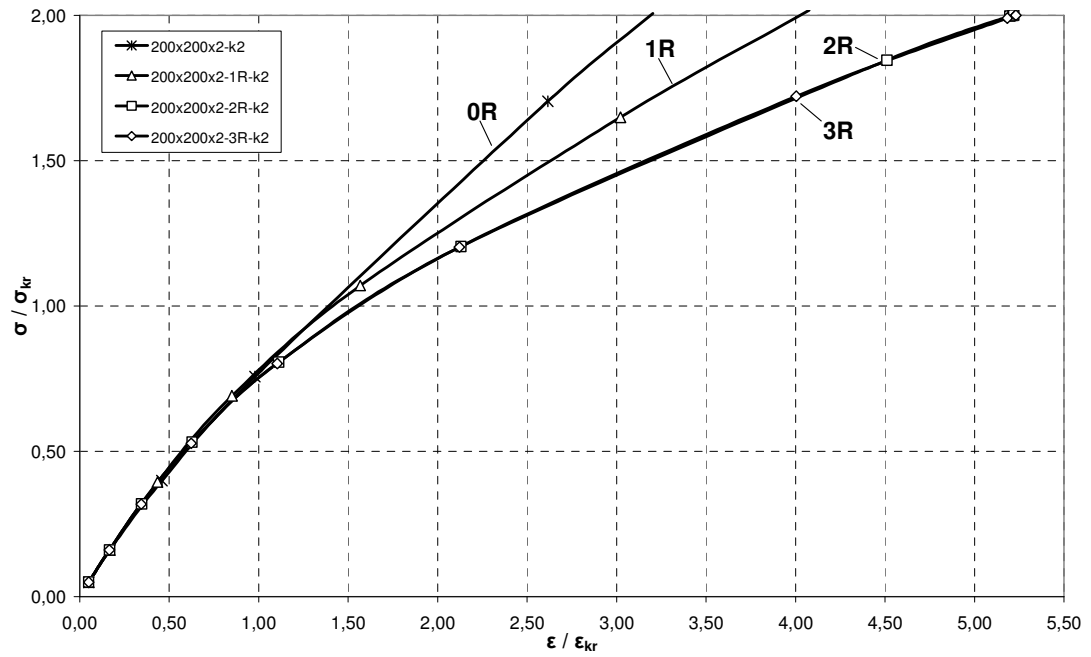


Şekil 6.30. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri

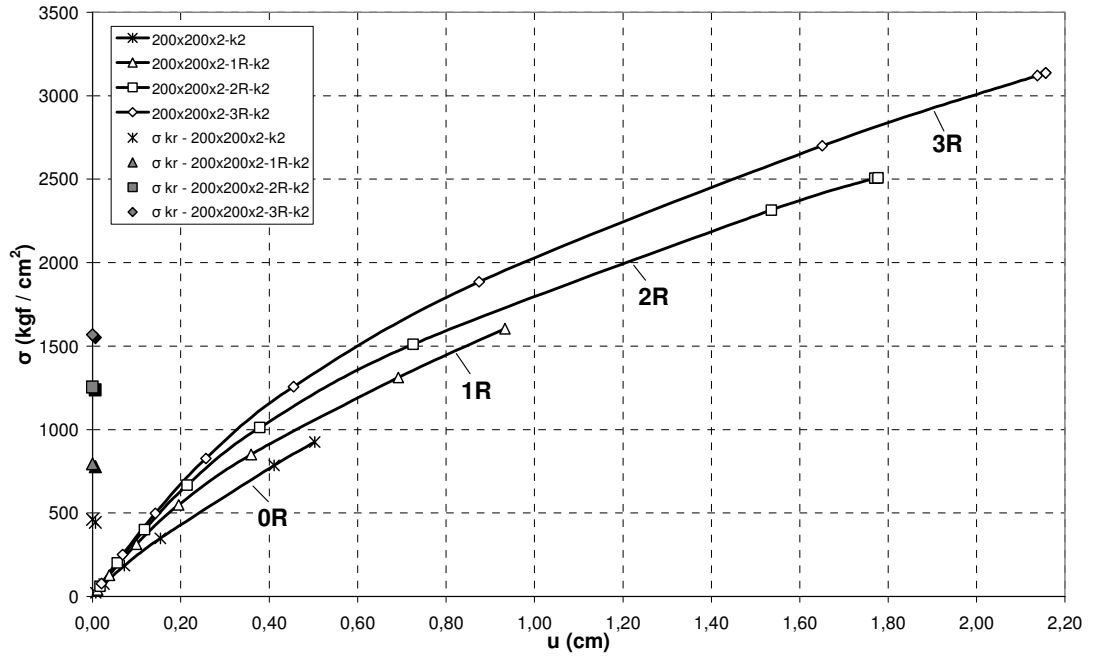


Şekil 6.31. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri

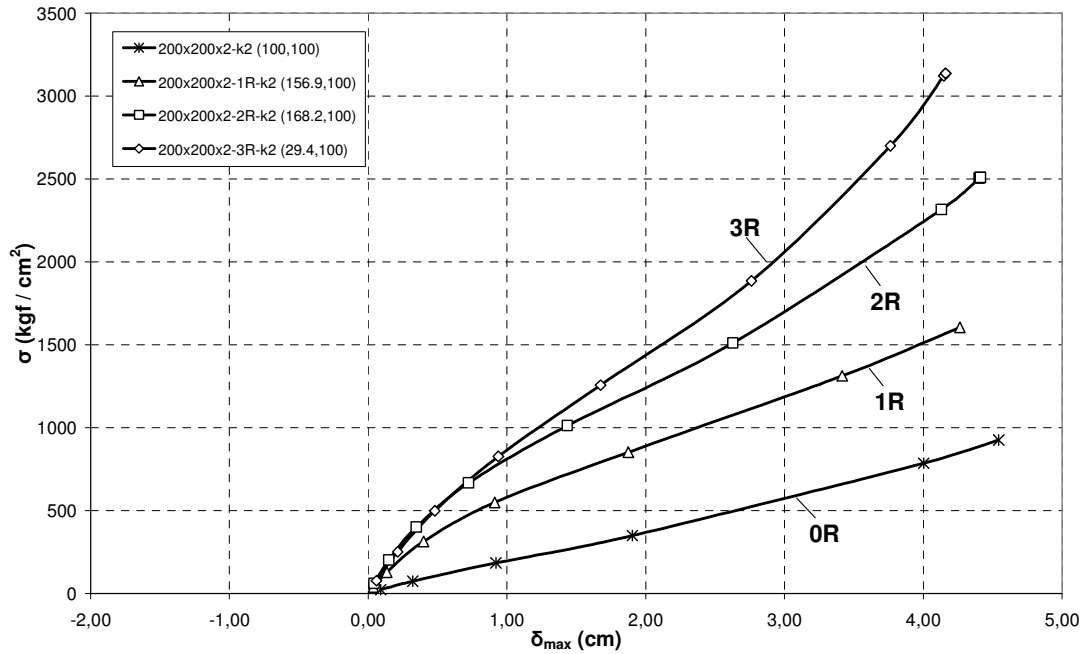
K2 - Bor-Al plakların lineer olmayan analiz sonuçları



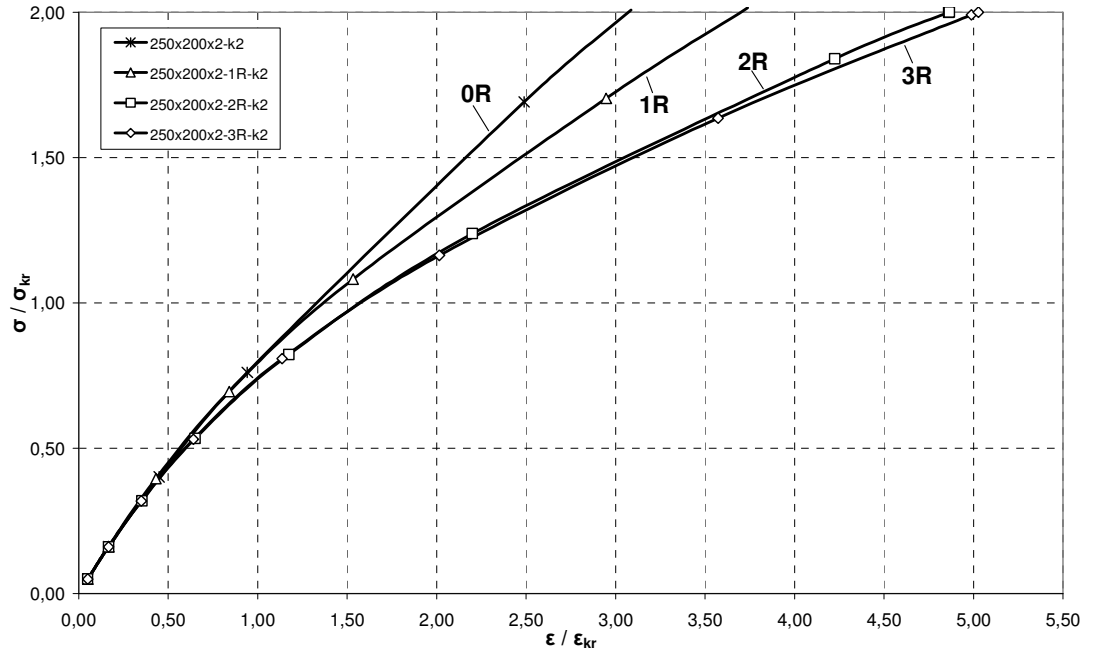
Şekil 6.32. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda σ/σ_{kr} 'in ϵ/ϵ_{kr} 'e göre değişim grafikleri



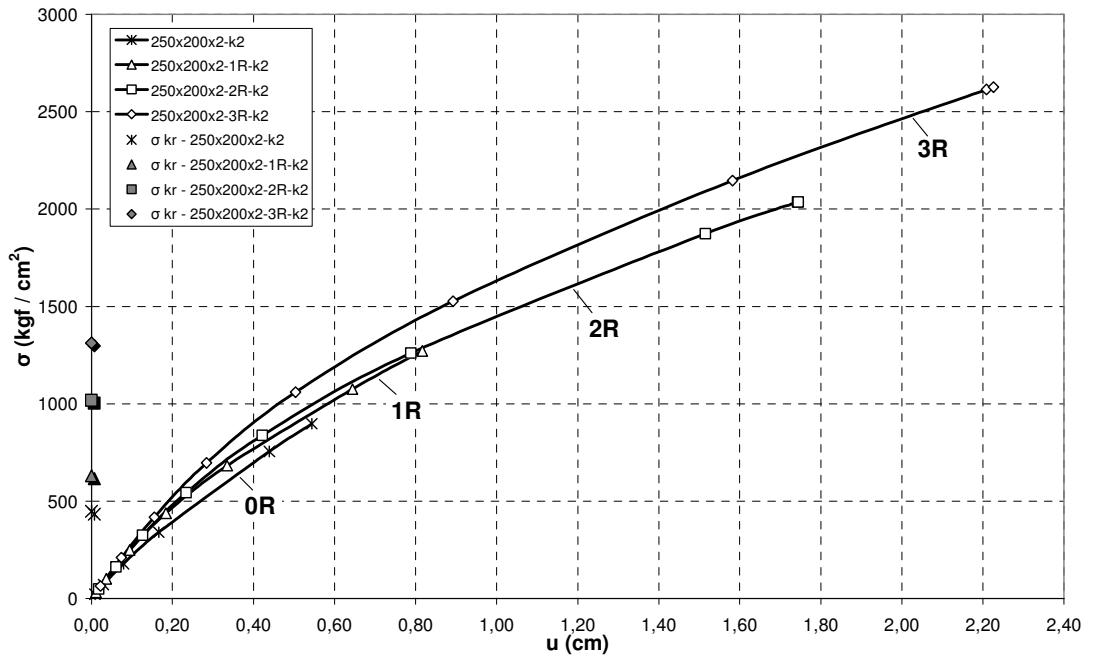
Şekil 6.33. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



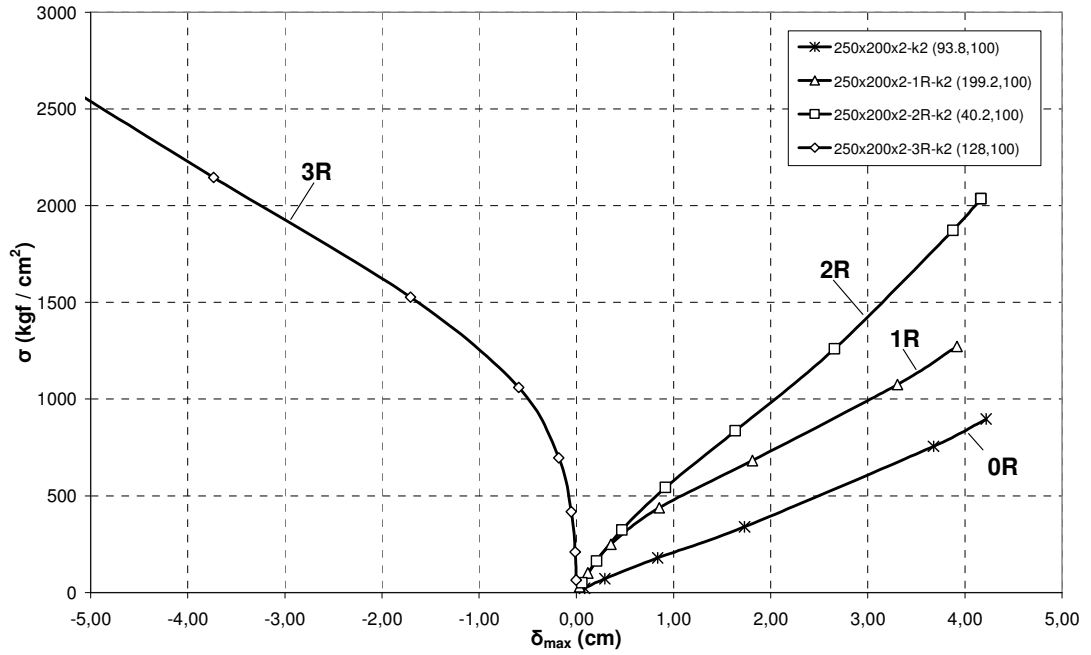
Şekil 6.34. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



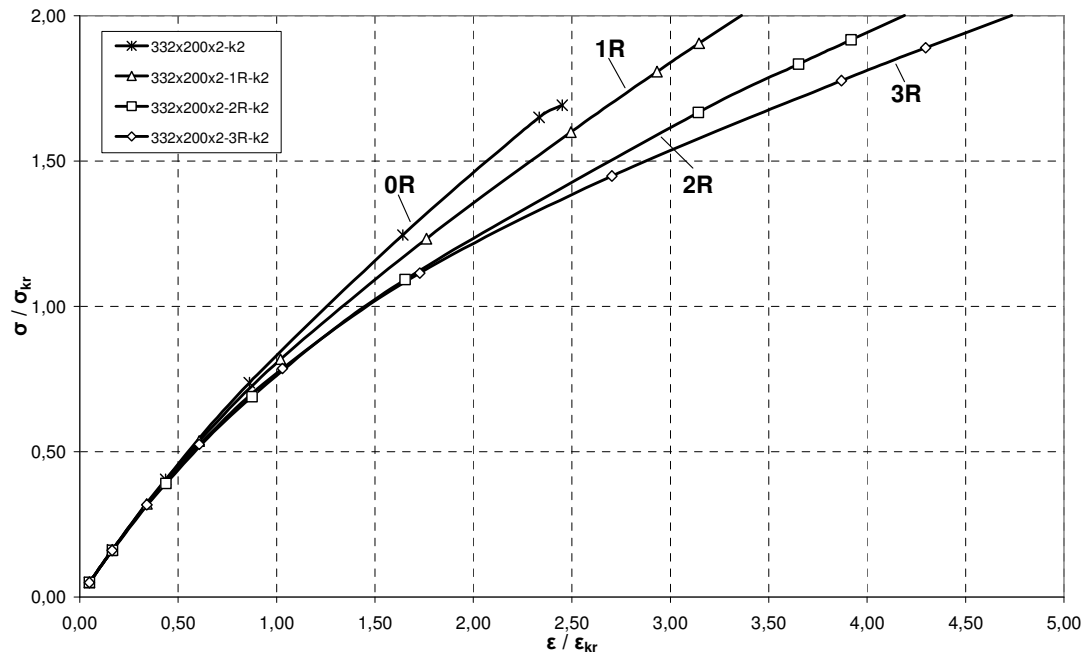
Şekil 6.35. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri



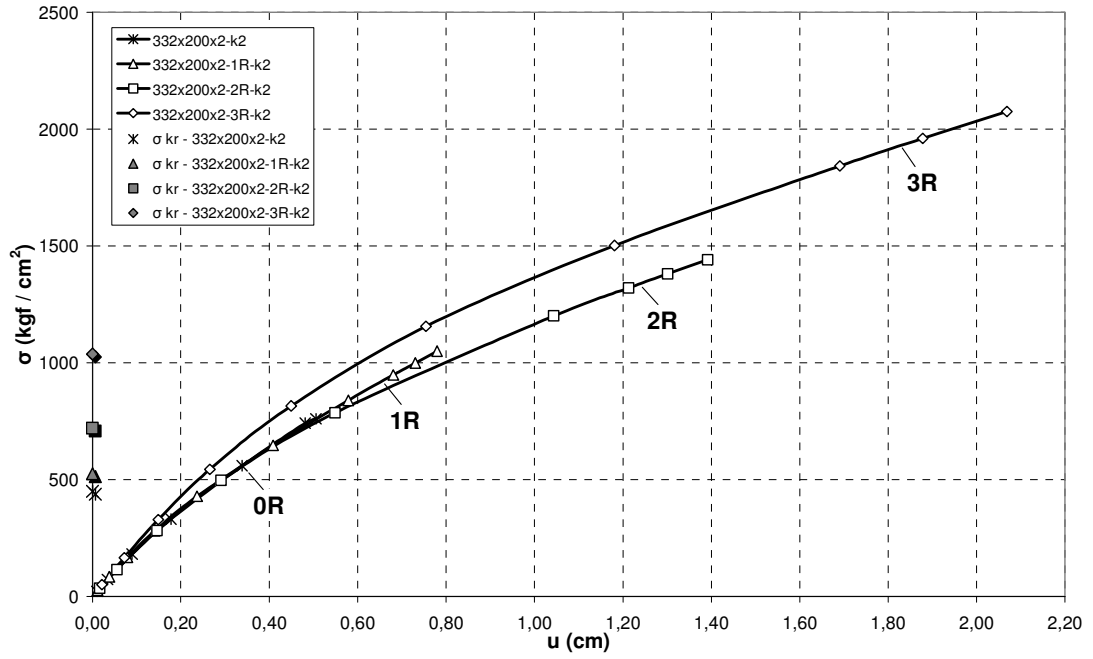
Şekil 6.36. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



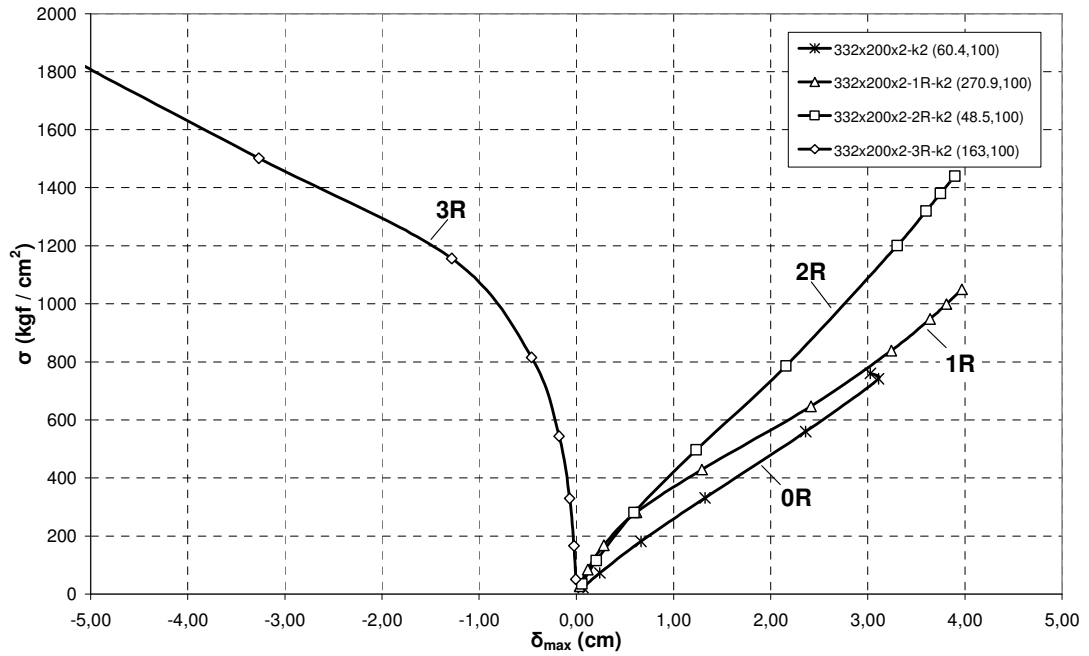
Şekil 6.37. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



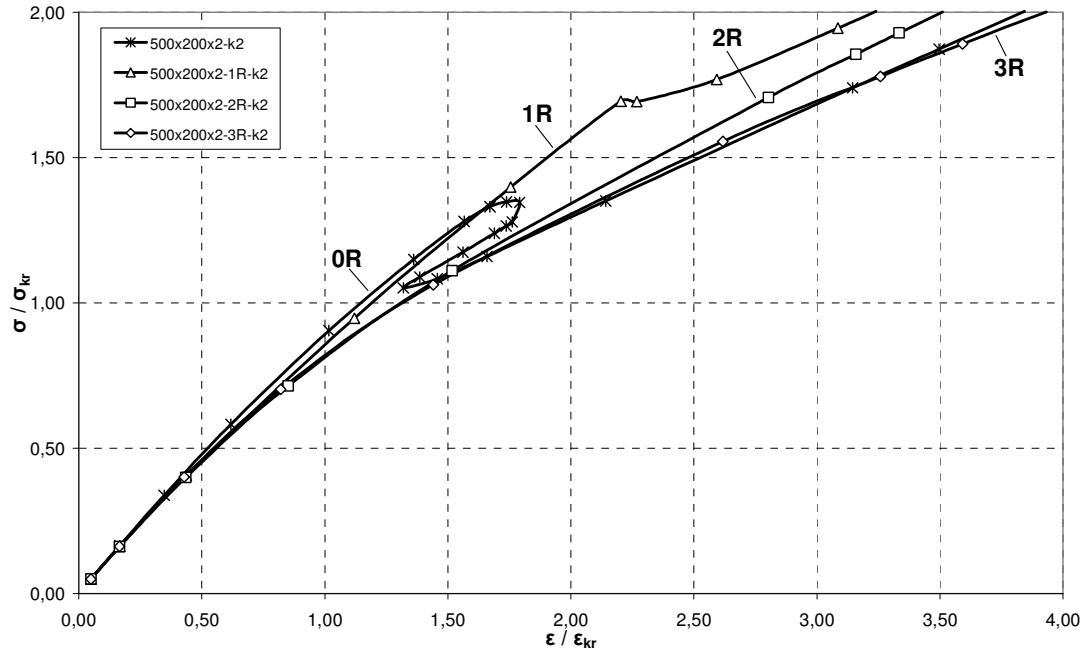
Şekil 6.38. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda σ/σ_{kr} 'in ϵ/ϵ_{kr} 'e göre değişim grafikleri



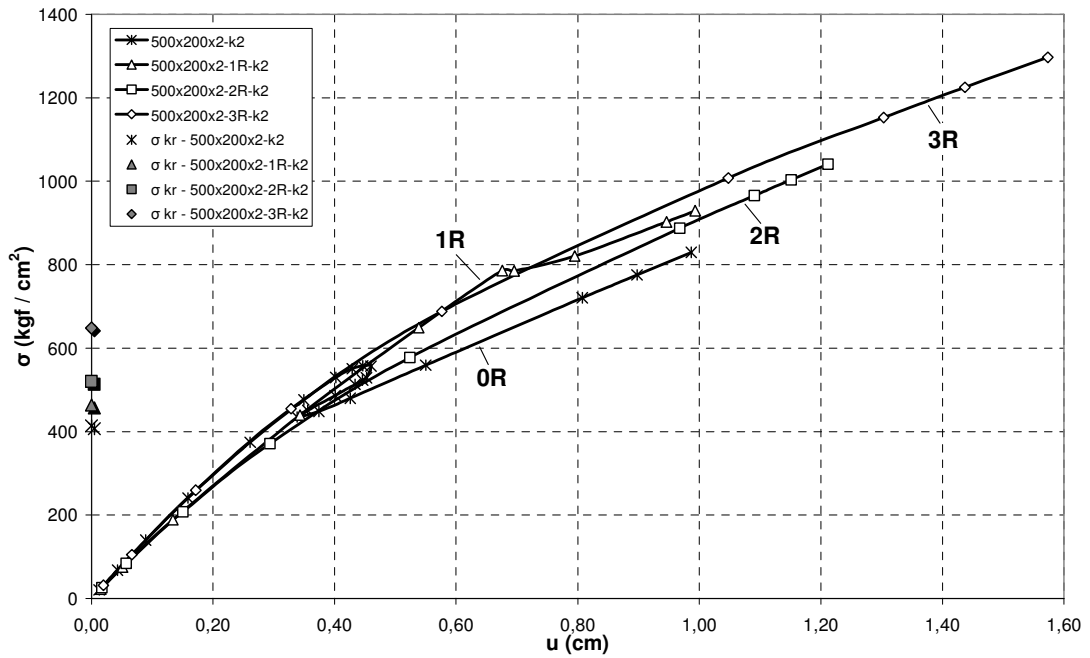
Şekil 6.39. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



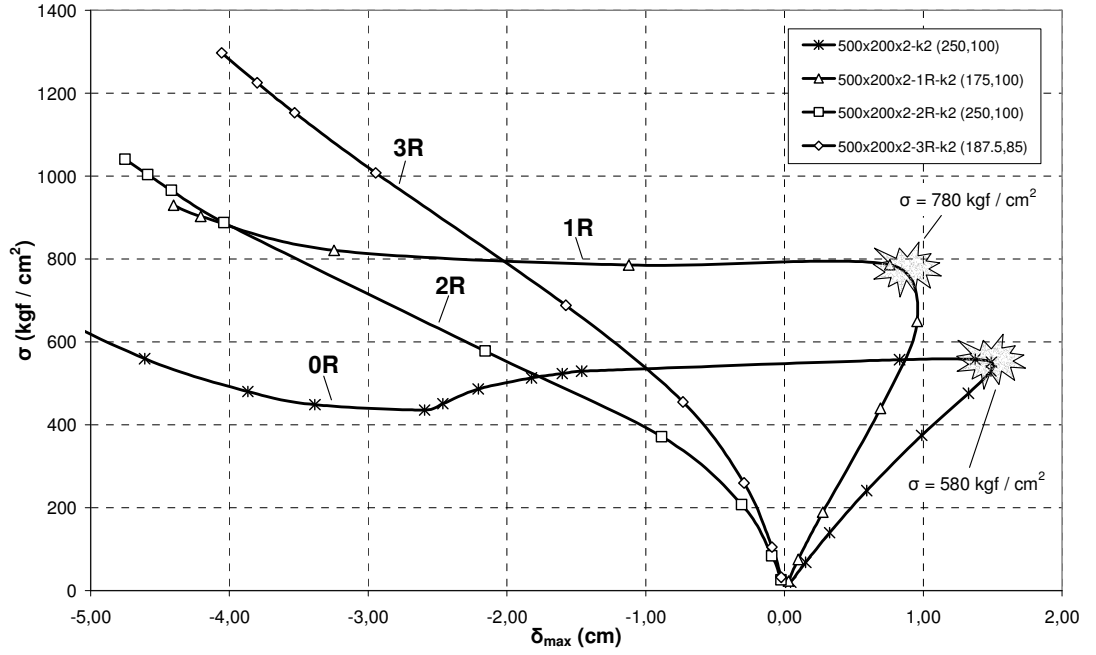
Şekil 6.40. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



Şekil 6.41. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri

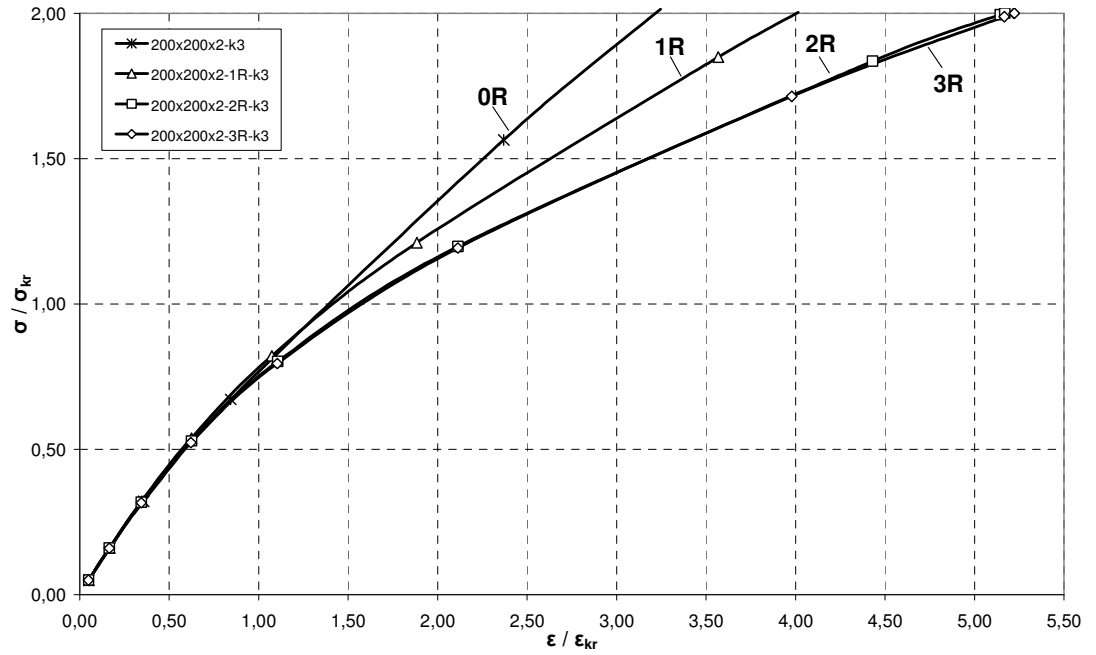


Şekil 6.42. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri

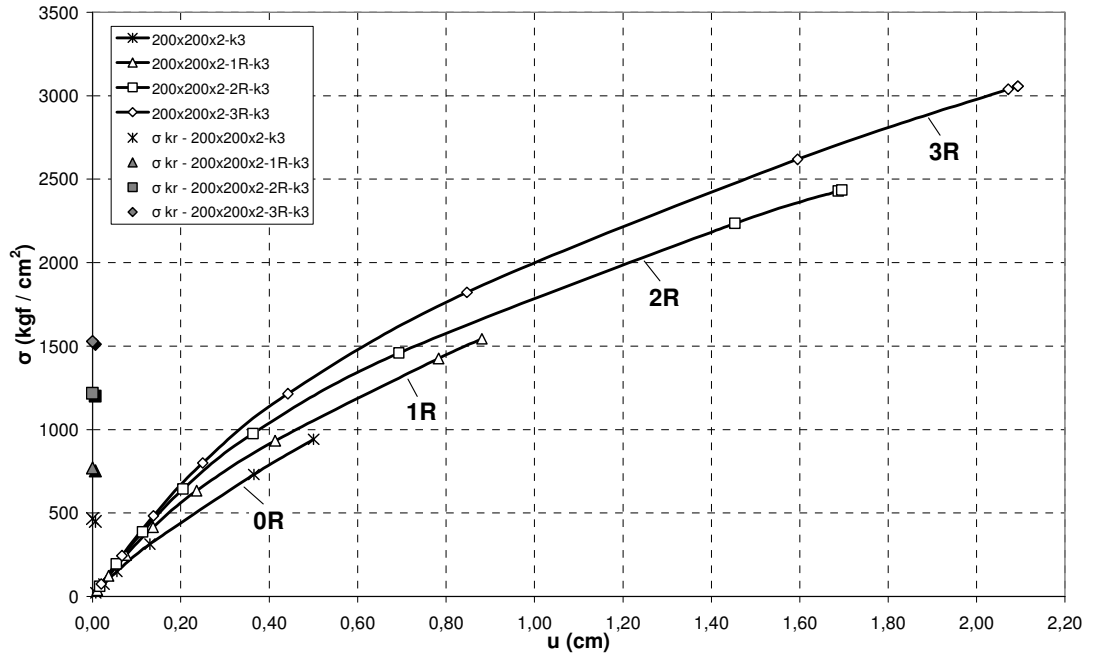


Şekil 6.43. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri

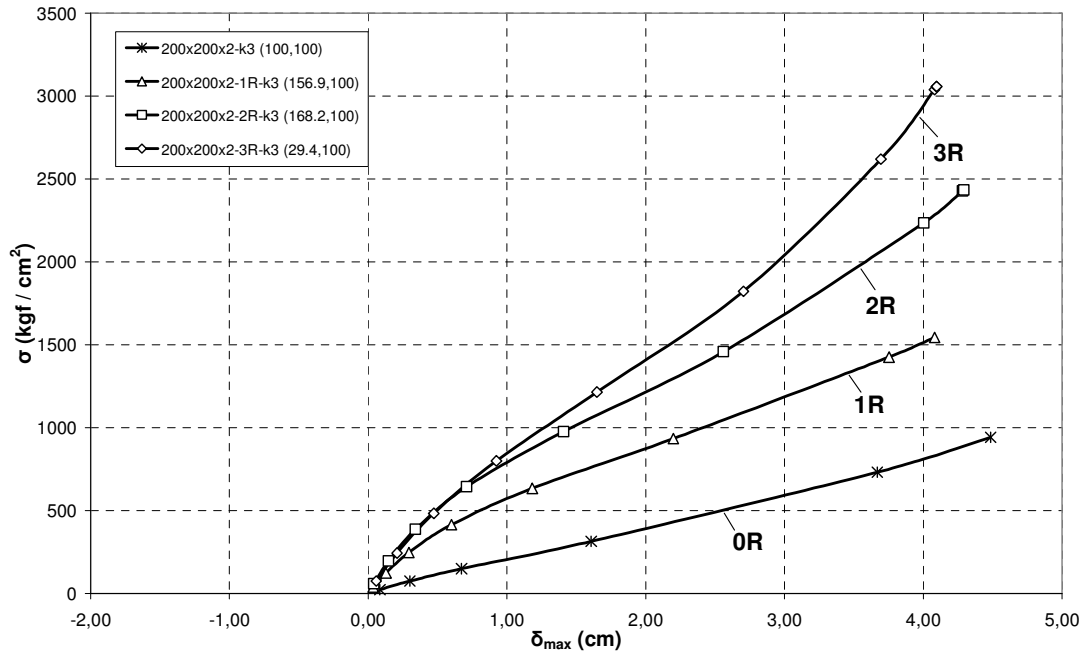
K3 - Bor-Al plakların lineer olmayan analiz sonuçları



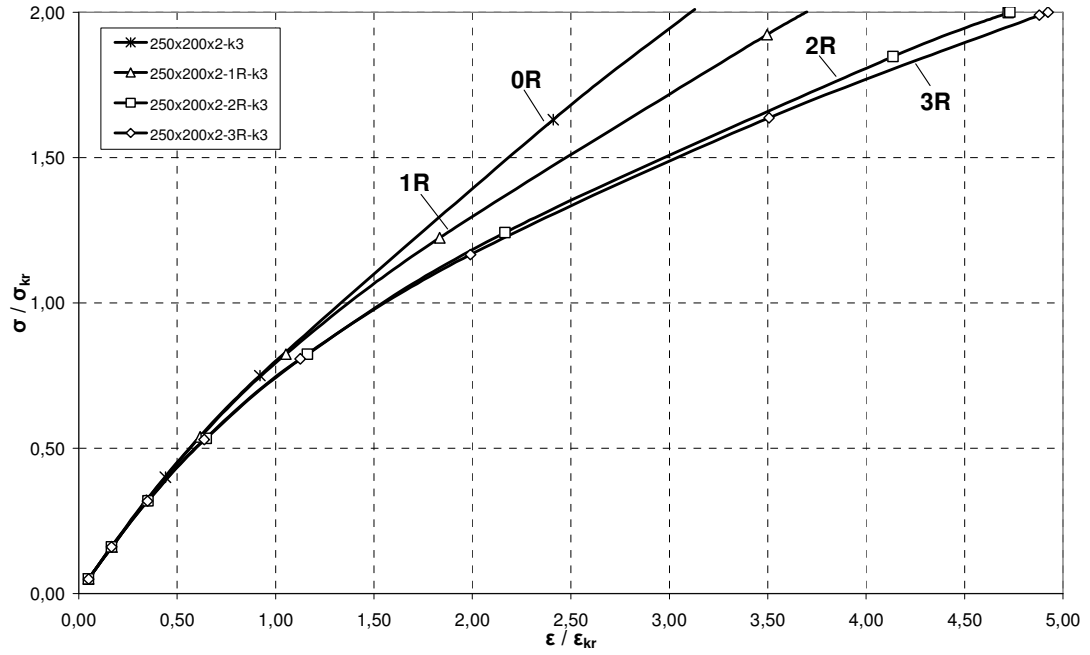
Şekil 6.44. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda σ/σ_{kr} 'in ϵ/ϵ_{kr} 'e göre değişim grafikleri



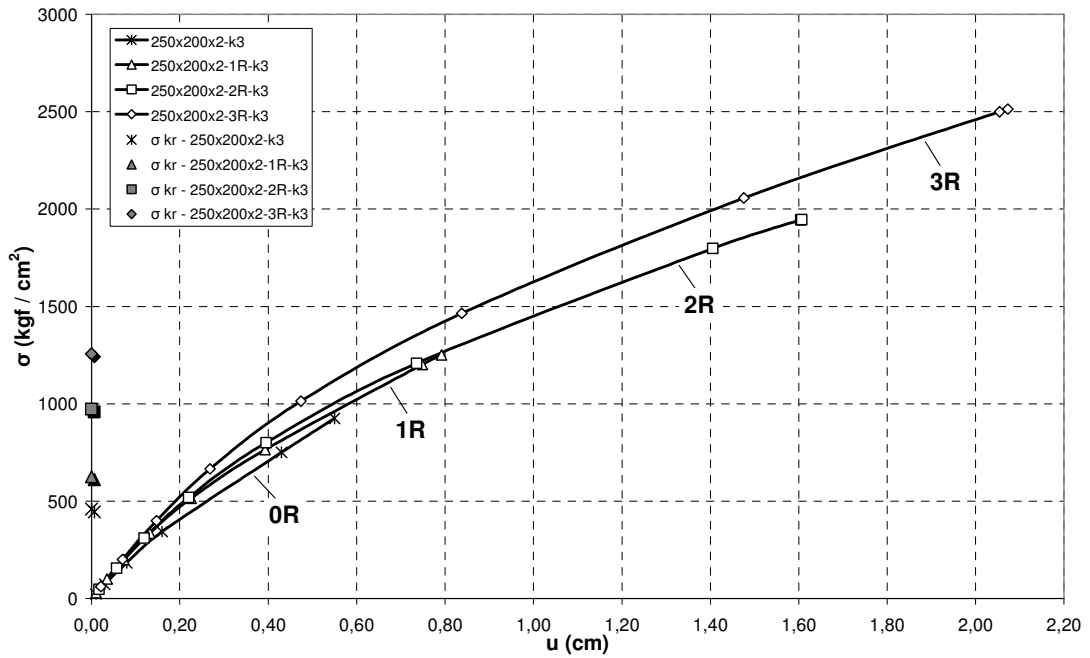
Şekil 6.45. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



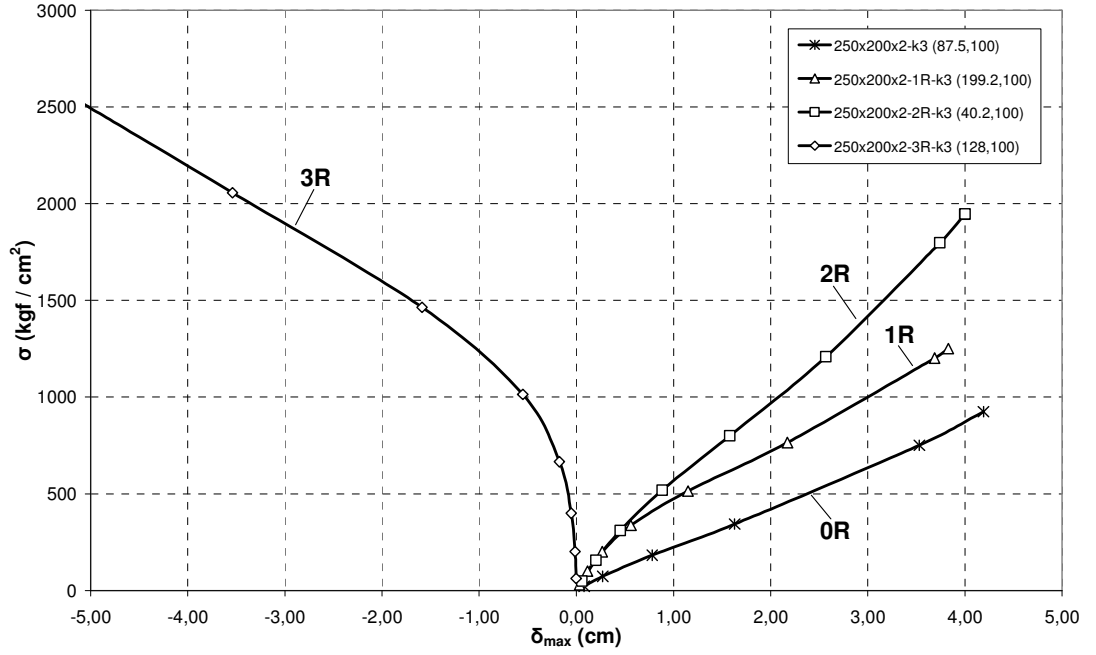
Şekil 6.46. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



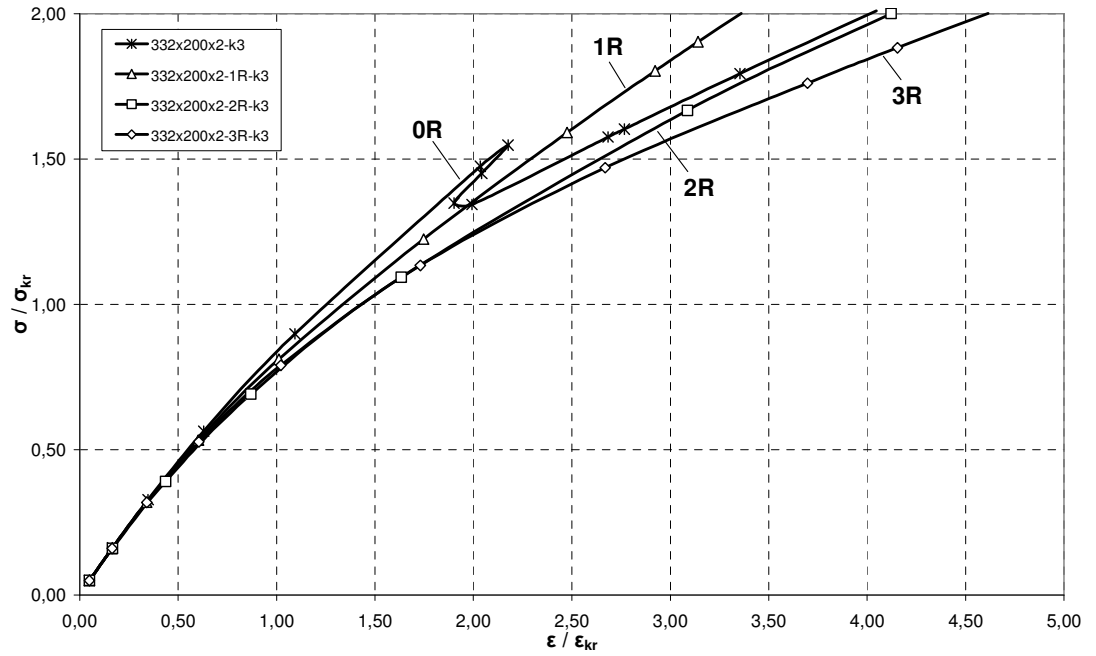
Şekil 6.47. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri



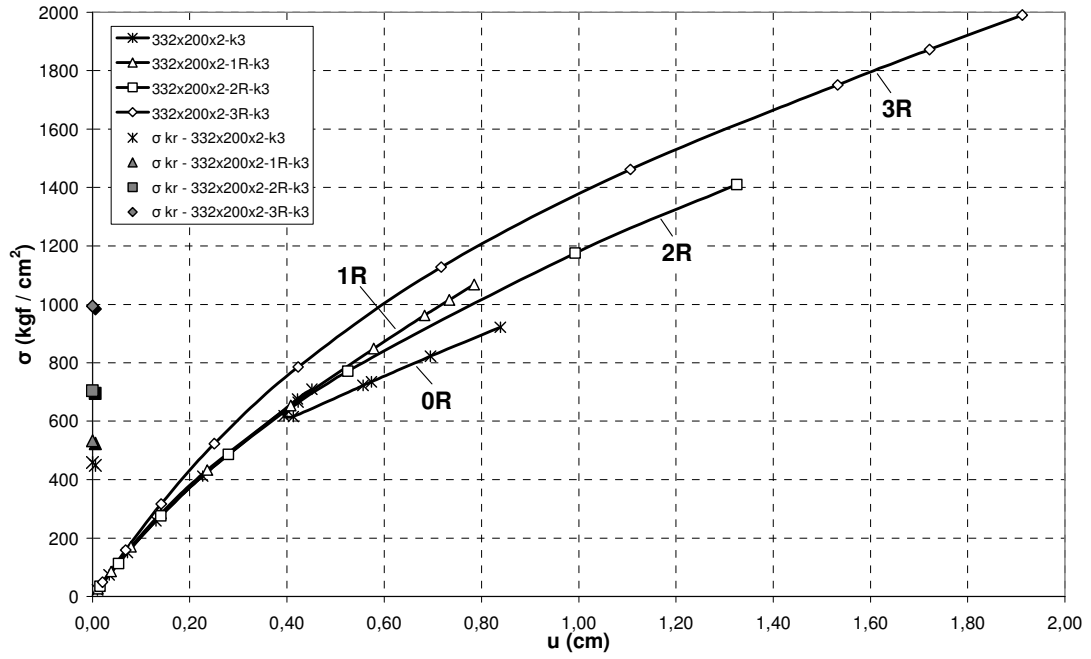
Şekil 6.48. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



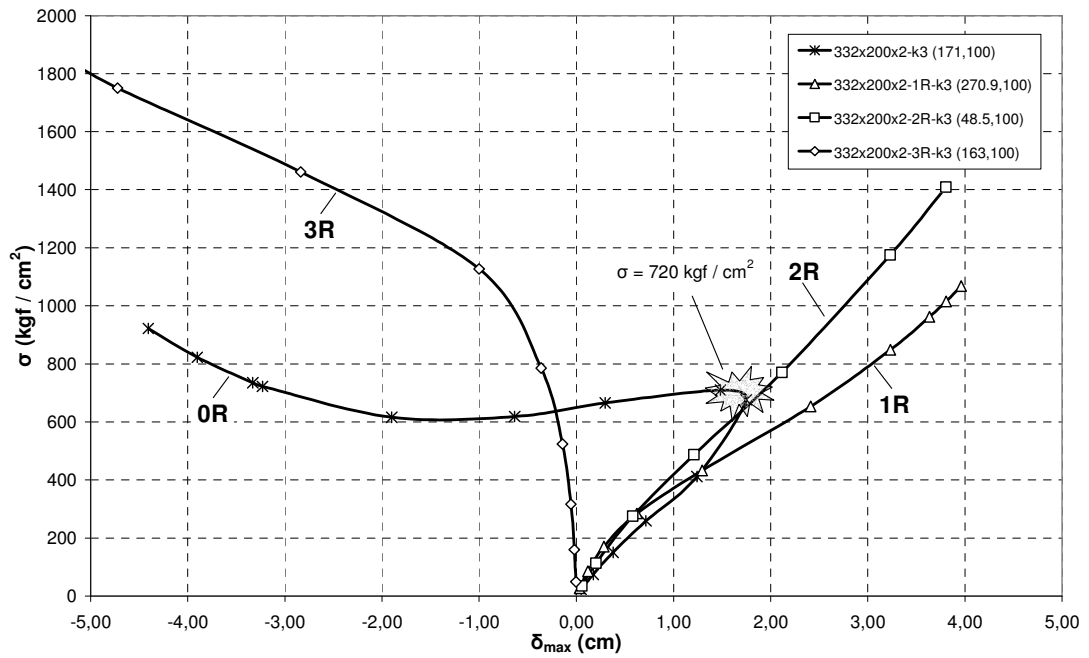
Şekil 6.49. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



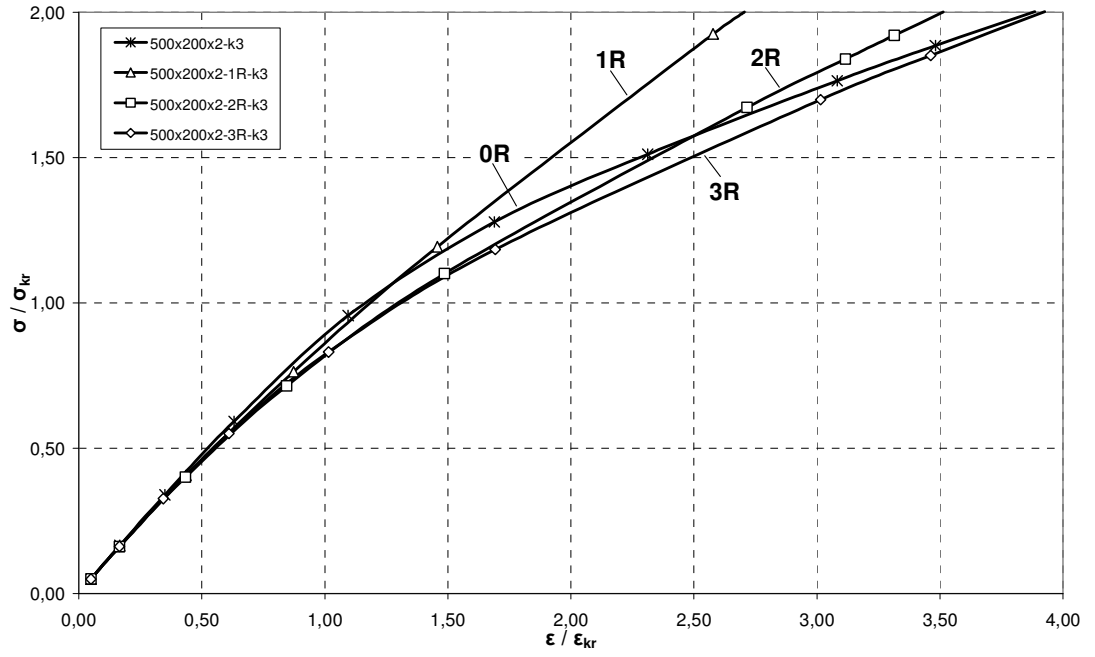
Şekil 6.50. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda σ / σ_{kr} 'in ϵ / ϵ_{kr} 'e göre değişim grafikleri



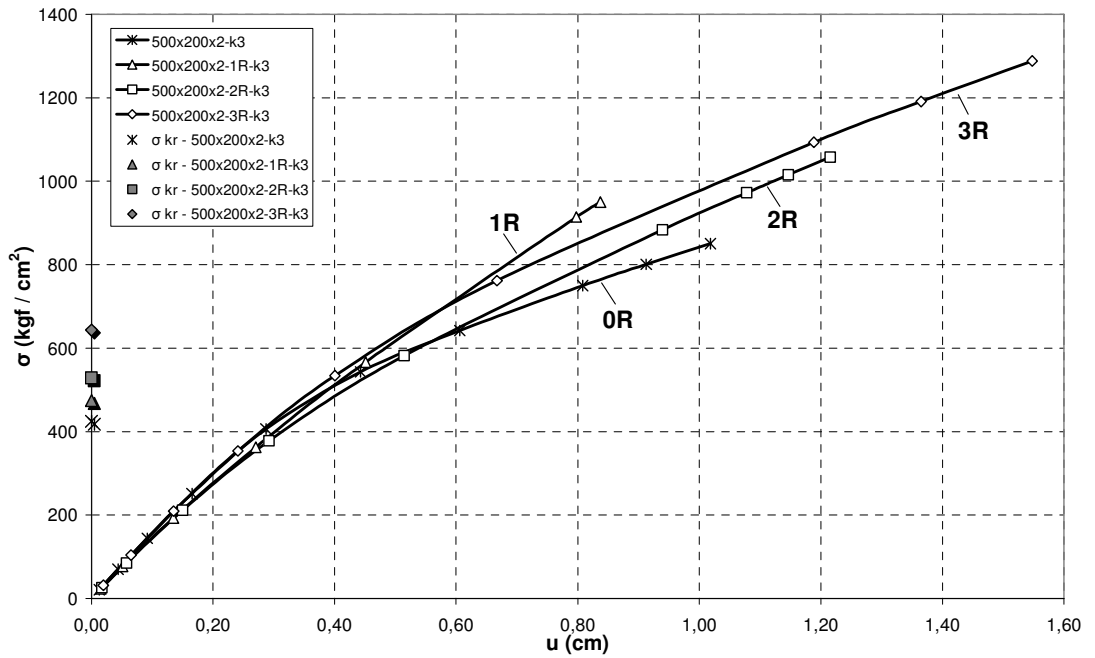
Şekil 6.51. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



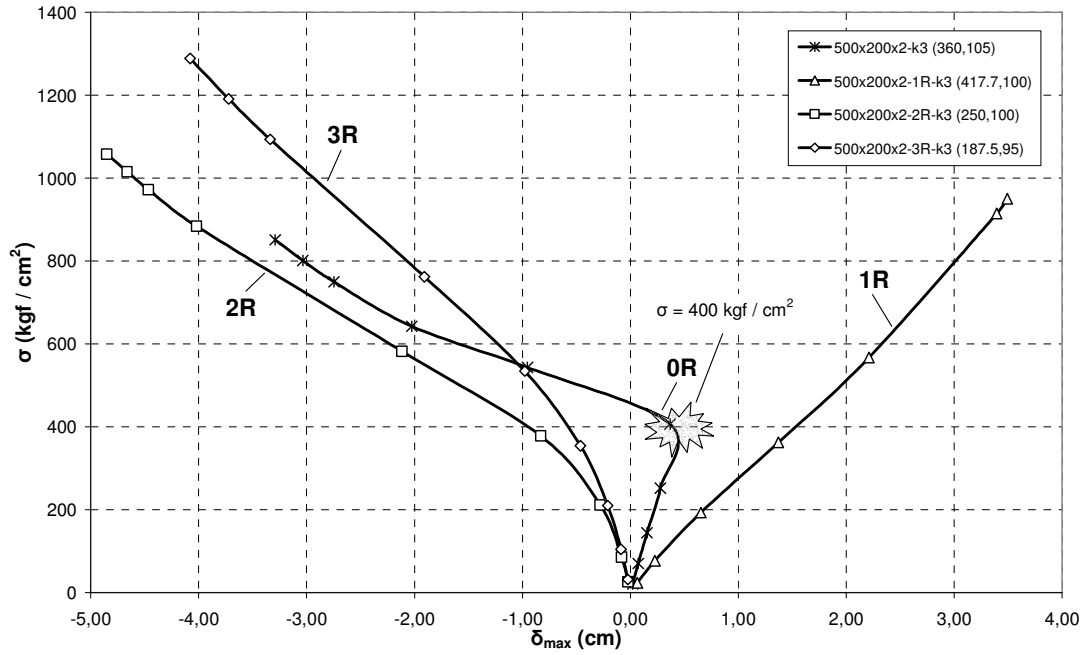
Şekil 6.52. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



Şekil 6.53. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri

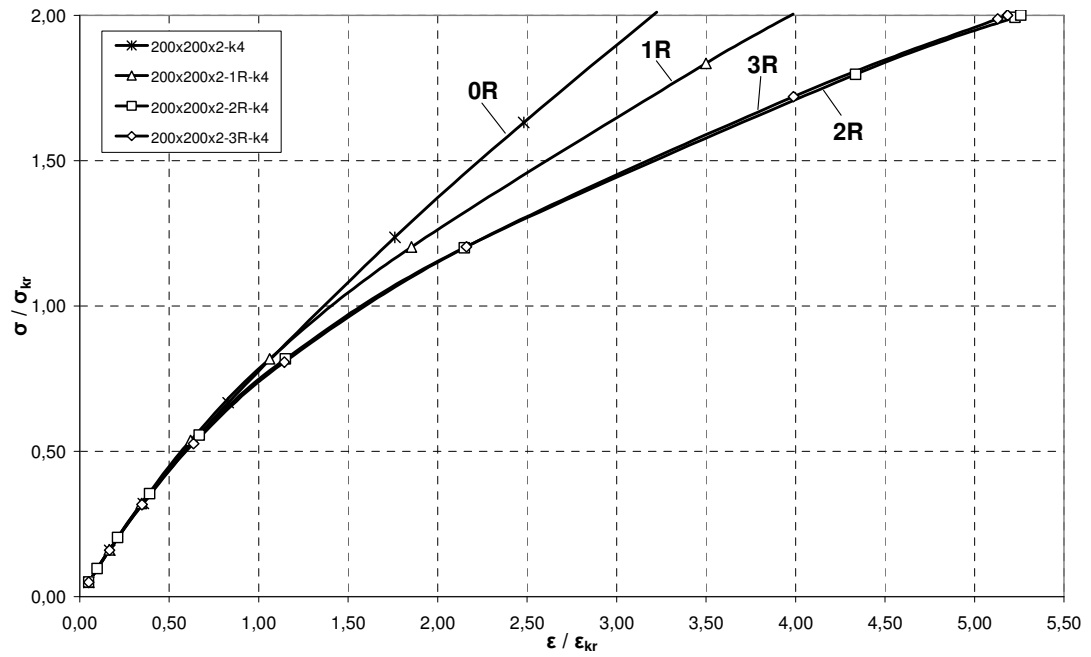


Şekil 6.54. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri

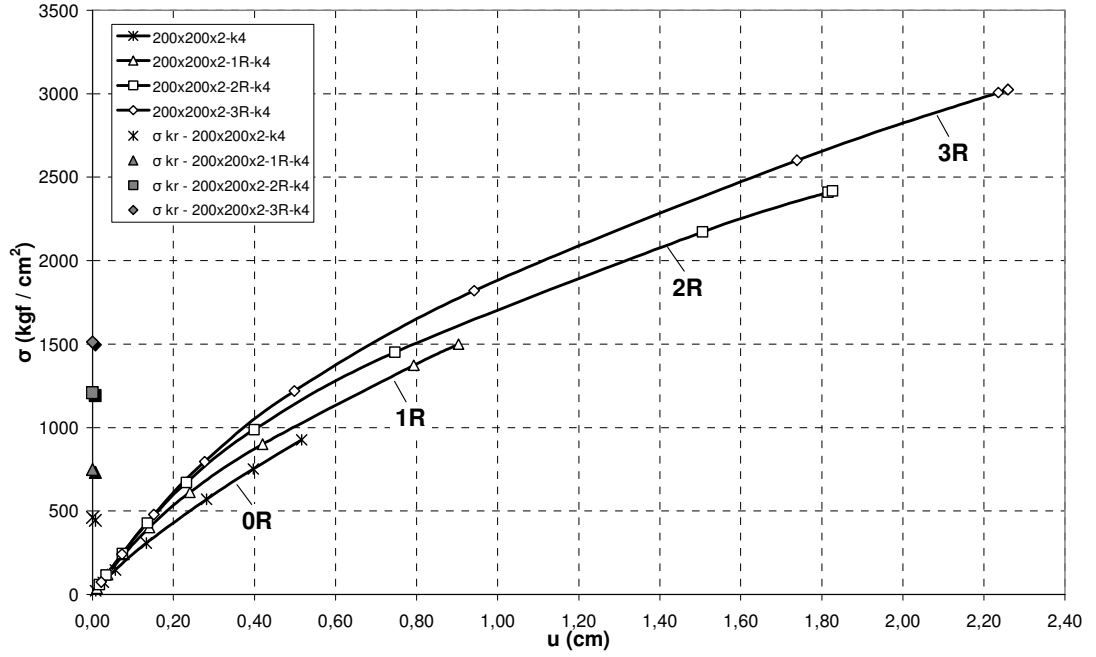


Şekil 6.55. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri

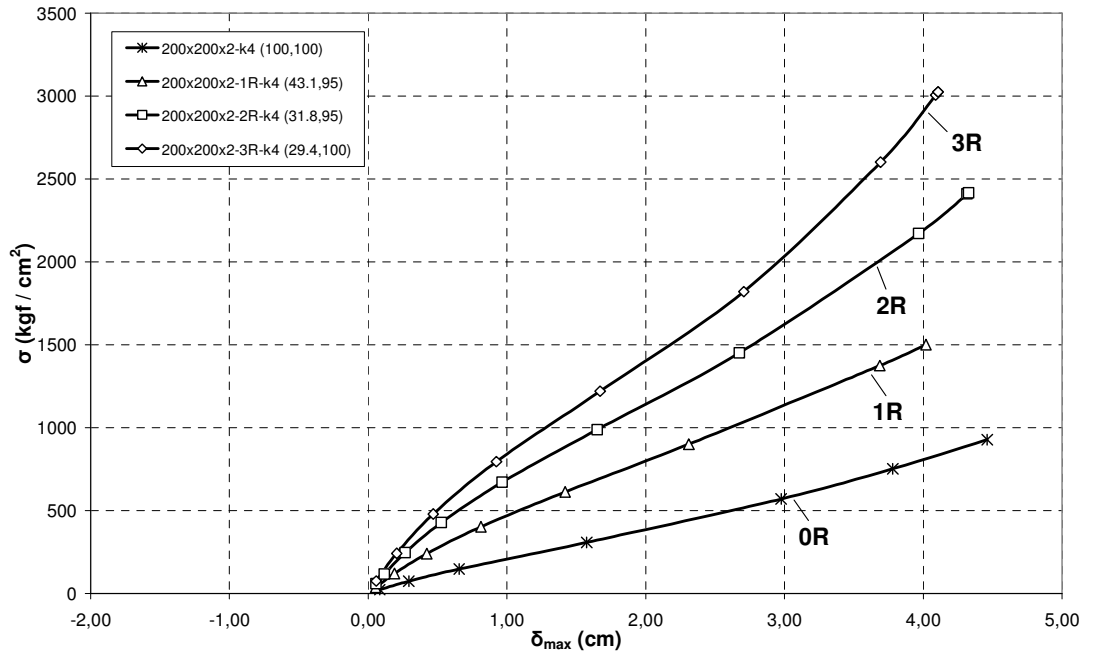
K4 - Bor-Al plakların lineer olmayan analiz sonuçları



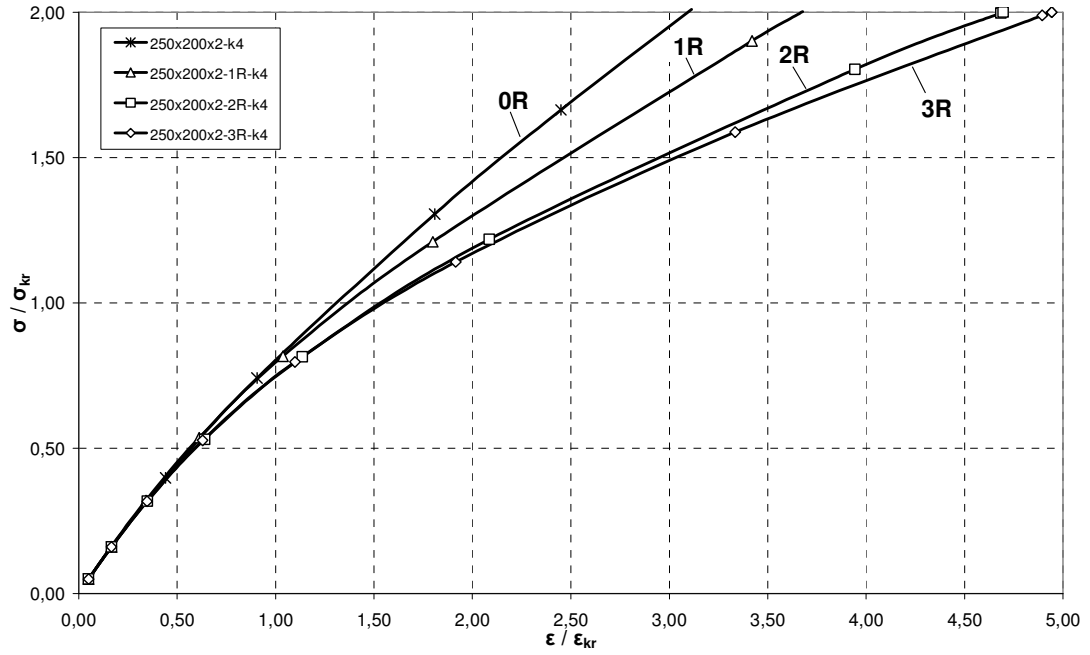
Şekil 6.56. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda σ/σ_{kr} 'in ϵ/ϵ_{kr} 'e göre değişim grafikleri



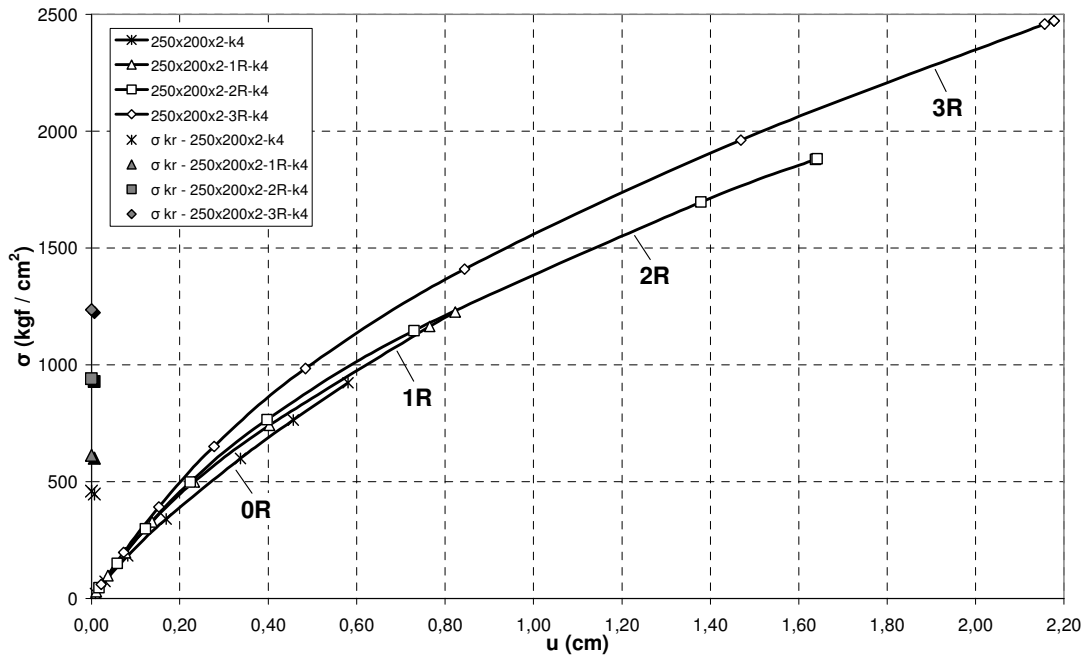
Şekil 6.57. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



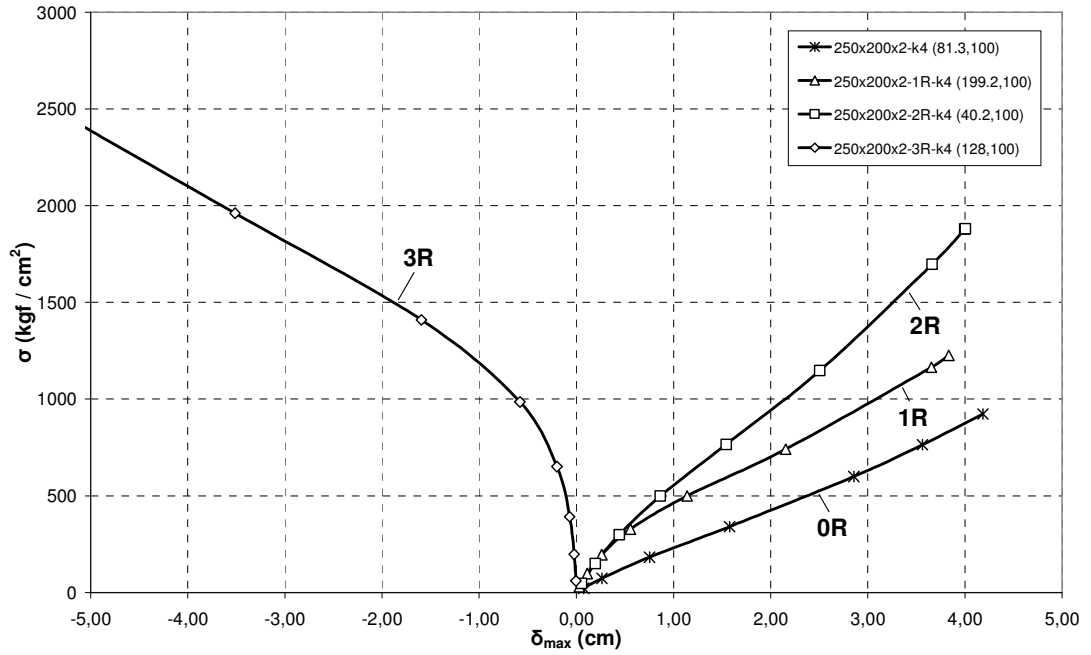
Şekil 6.58. 200x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



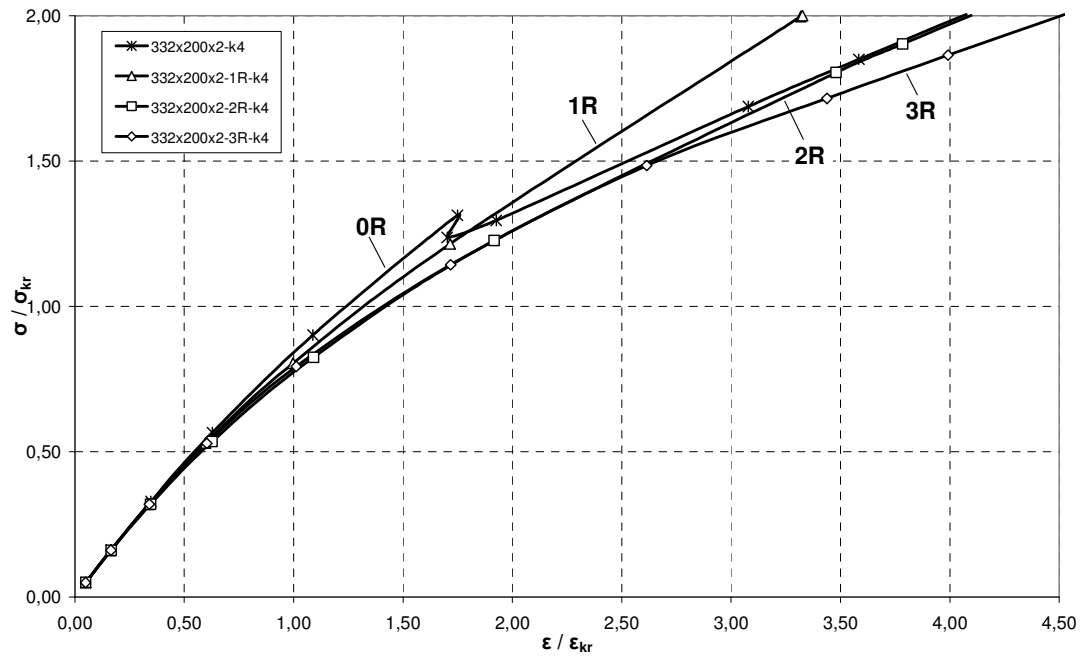
Şekil 6.59. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri



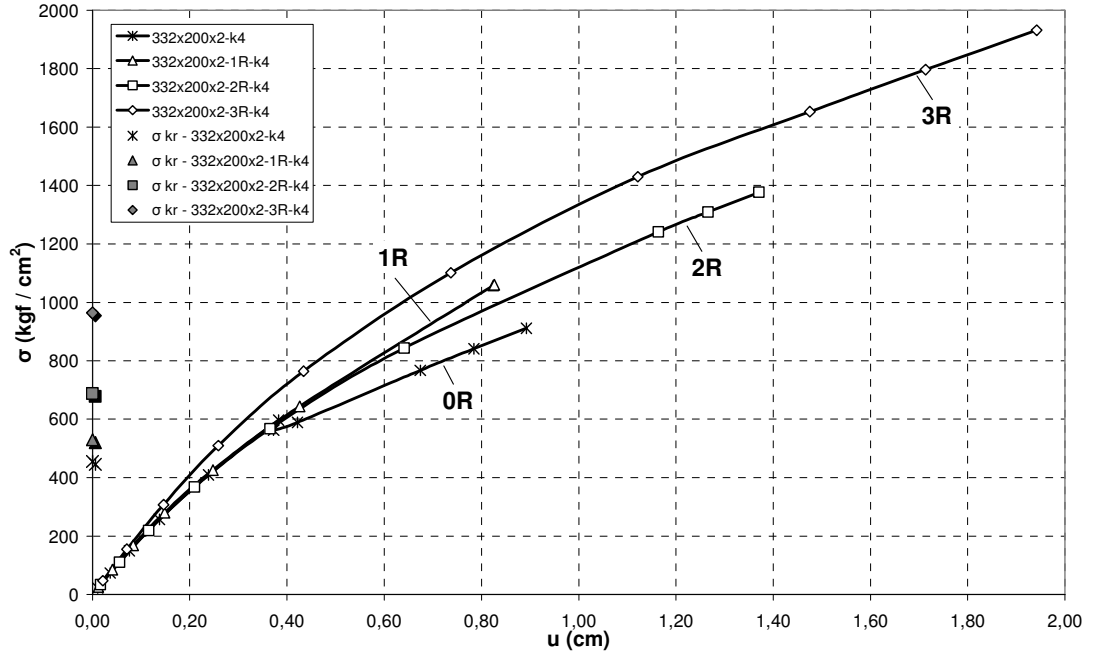
Şekil 6.60. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



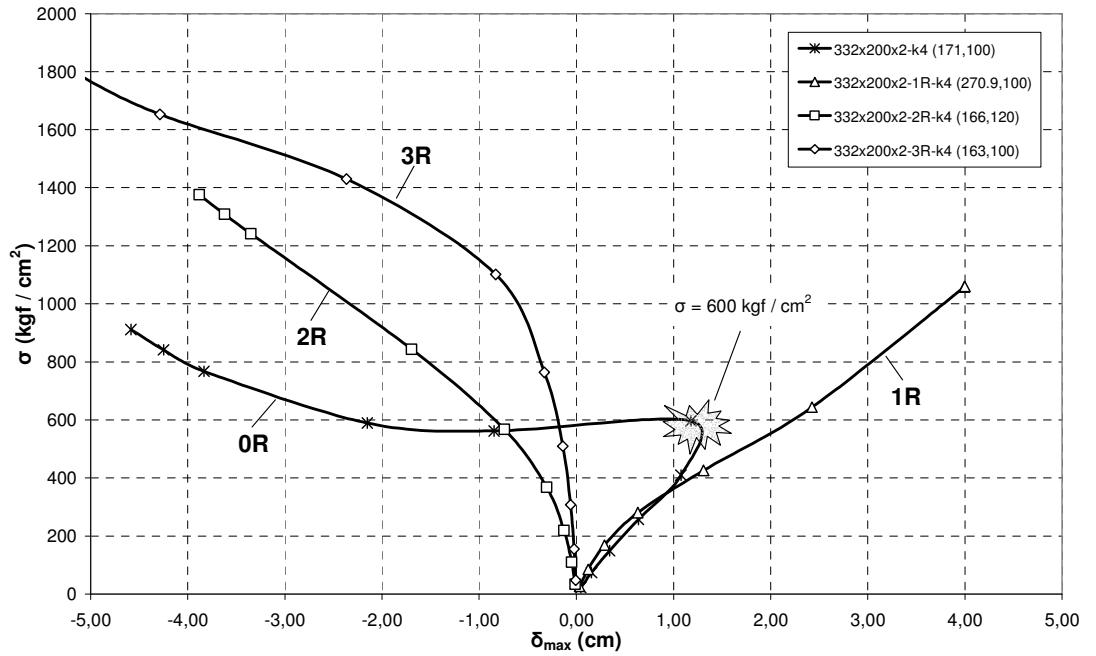
Şekil 6.61. 250x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



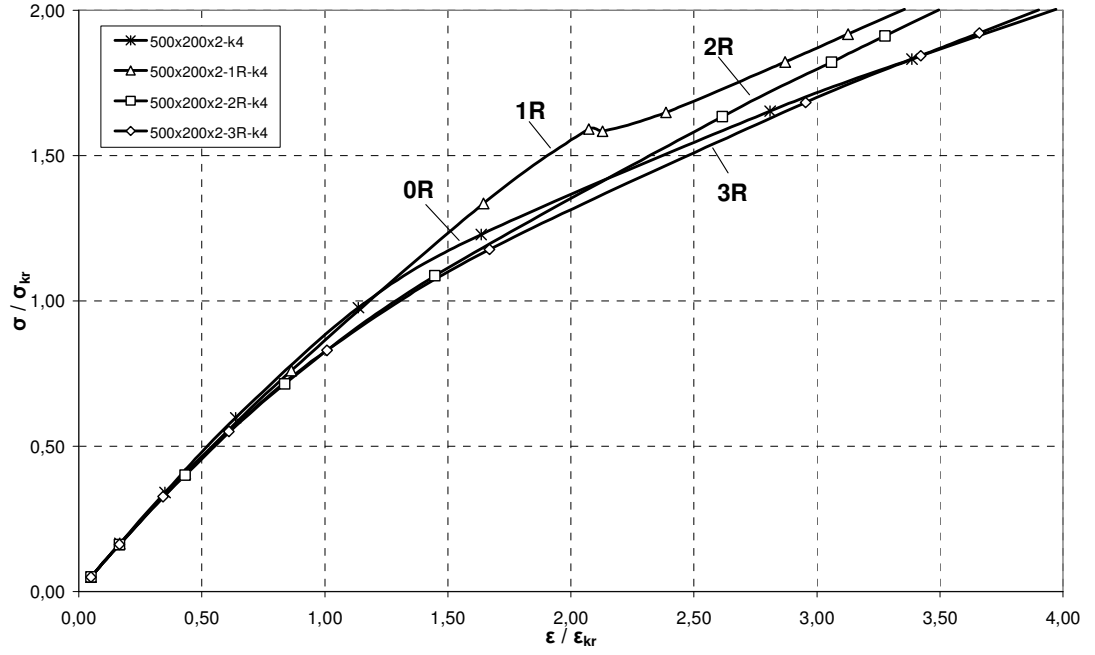
Şekil 6.62. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda σ / σ_{kr} 'in ϵ / ϵ_{kr} 'e göre değişim grafikleri



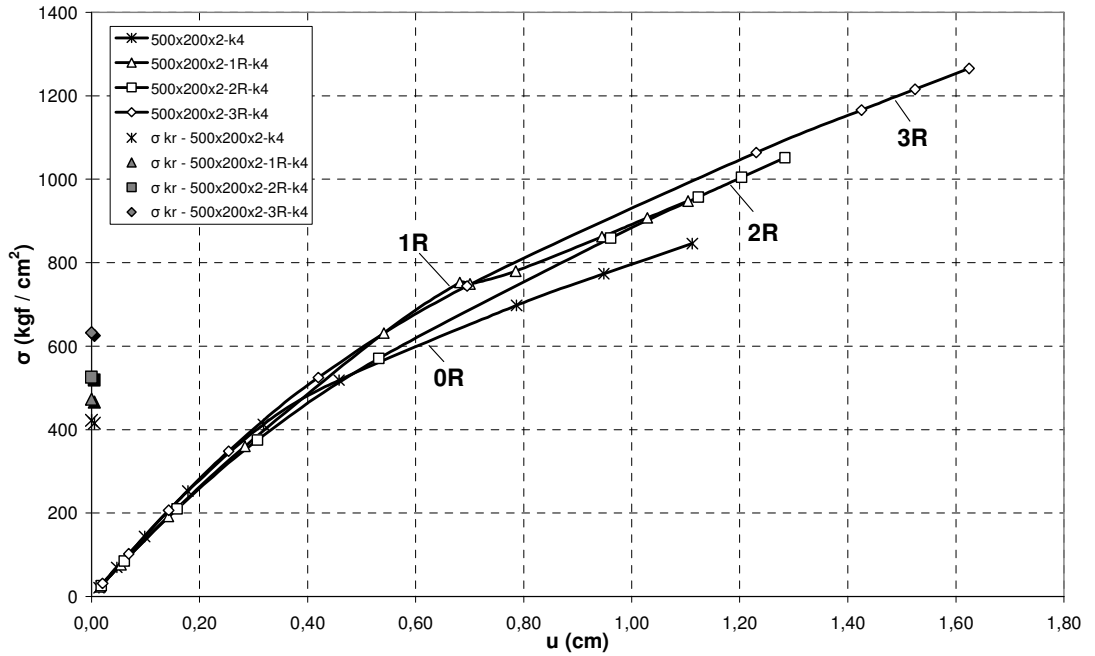
Şekil 6.63. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



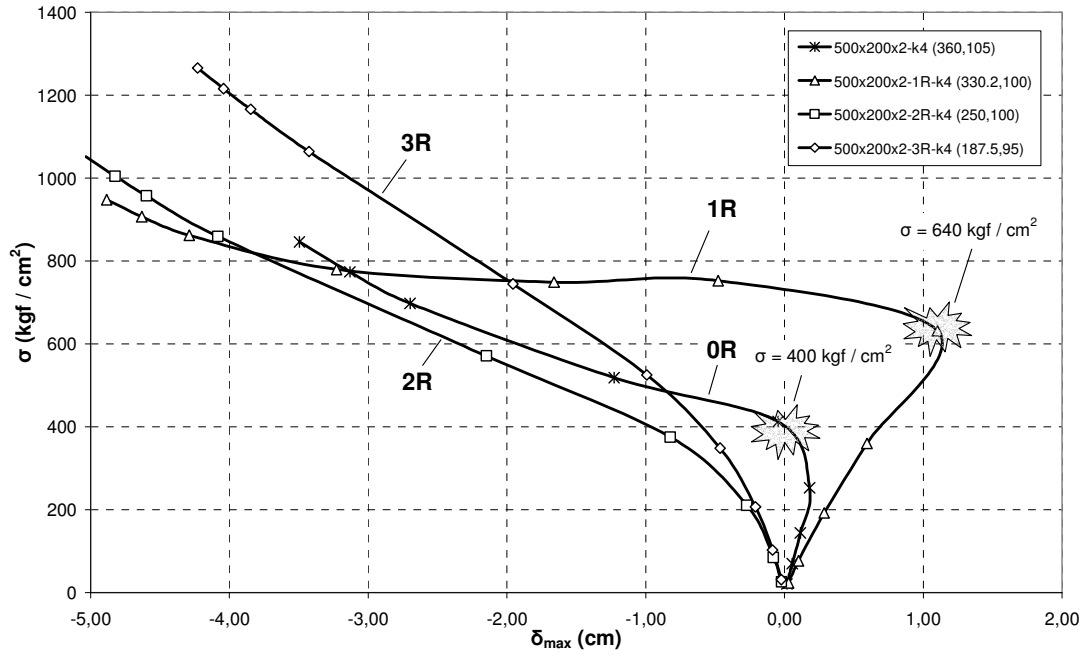
Şekil 6.64. 332x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



Şekil 6.65. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda σ/σ_{kr} 'in $\varepsilon/\varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri



Şekil 6.66. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



Şekil 6.67. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri

Seçilen Bor-Al fiber kompozit malzemeden yapılmış t/a oranları 0.004, 0.006, 0.008, 0.010 ince plakların eksenel basma yükü altında burkulma analizleri yapılarak sonuçlar Şekiller 6.20 - Şekil 6.67 arasında $\sigma/\sigma_{kr} - \varepsilon/\varepsilon_{kr}$, $\sigma - u$ ve $\sigma - \delta_{max}$ değişim grafikleri ayrı ayrı verilmektedir. Bu grafiklerin birbirlerine göre değişimleri boyutlandırma, malzeme ve destek eleman sayısı ile direkt bağlantılı olduğu için farklılıklar göstermektedir. Bu nedenle dört grup diziliş konfigürasyonlarının sırasıyla K1 : $[0/90/0]_{s}^{gövde} + [(0/90)_2]_{s}^{takviye}$ - K2 : $[0/45]_{s}^{gövde} + [(0/45)_2]_{s}^{takviye}$ - K3 : $[(0/45)_2]_{s}^{gövde} + [(0/45)_4]_{s}^{takviye}$ - K4 : $[(0/30/45/60)_2]_{s}^{gövde} + [(0/30/45/60)_2]_{s}^{takviye}$ olarak alınmasıyla elde edilen sonuç farklılıkları bu gruplar arasında kolaylıkla tartışılabilir. Grafiklerin karşılaştırılmaları sonucunda görülen farklılıklar ve nedenleri aşağıda anlatılmaktadır.

1 - Şekil 6.20 - Şekil 6.31 arasındaki grafiklerde K1 konfigürasyonuna ait dağılımlar görülmektedir. Buradaki $\sigma/\sigma_{kr} - \varepsilon/\varepsilon_{kr}$, $\sigma - u$ ve $\sigma - \delta_{max}$

dağılımlarında plak boyu $a = 200$ 'den 332 'ye çıktığı zaman; desteksiz düz plakların $\sigma = 790 \text{ kgf / cm}^2$ ve $a = 500$ boyutundaki düz plakların ise $\sigma = 540 \text{ kgf/cm}^2$ civarında çarpıldığı veya yerdeğiştirmelerin ($\delta_{\max}$) işaret değiştirdiği görülmektedir. Çelik plaklara ait Şekil 6.14 - Şekil 6.17'de ise yerdeğiştirmelerin ($\delta_{\max}$) yön değiştirmesi görülmemiştir. Bu bölgelerdeki davranış değişimlerinin nedeni boyut etkisinin yanısıra fiber diziliş açılarına bağlı olduğu görülmüştür. Ayrıca $500 \times 200 \times 2$ boyutlarındaki çelik plakların tek takviye ile desteklenmiş durumunda $\sigma = 1395 \text{ kgf/cm}^2$ için plak denge konumundan ayrılarak dengesiz duruma gelmekte sonra tekrar dengeye ulaşmaktadır. $t/a = 0,004$ oranına sahip aynı boyuttaki tek takviye ile desteklenmiş K1 kompozit plakta bu durum oluşmamaktadır ve aynı boyuttaki çelik plakta oluşan kararsız durumun, K1 ($[0/90/0]_{\text{gövde}}$) konfigürasyonun kullanılması ile kararlı duruma geldiği görülmüştür.

$\sigma - \delta_{\max}$ grafikleri verilmekte olan $t/a = 0,010$ ve $0,008$ geometrilerindeki K1 ($[0/90/0]_{\text{gövde}} + [(0/90)_2]_{\text{takviye}}$) konfigürasyonuna sahip plakların üç destek elemanlı olanlarında burkulma şekli dış bükey iken, tek ve çift destek elemanlı olanlarda iç bükey burkulma şekilleri görülmüştür. $t/a = 0,006$ geometrisine sahip tüm destekli plakların burkulma şekilleri iç bükey bir yüzey oluşturmuştur. $t/a = 0,004$ geometrisine sahip tek destekli plağın burkulma şekli iç bükey olurken iki ve üç destek elemanlı hallerinde ise dış bükey burkulma şekli görülmüştür. Grafiklerde özellikle $\delta_{\max}$ değerinin oluştuğu $x - y$ koordinat değerleri grafik açıklama kutularında ayrıca belirtilmiştir.

2 - K2 ($[0/45]_{\text{gövde}}$) fiber kompozit desteksiz plakların tümünde burkulma şekilleri iç bükey olurken, $t/a = 0,004$ grafiğinde önce iç bükey, $\sigma = 580 \text{ kgf/cm}^2$ 'den sonra ise dış bükey burkulma şeklini almaktadır.

K2 ($[0/45]_{\text{gövde}} + [(0/45)_2]_{\text{takviye}}$) fiber kompozit destek elemanlı plakların $t/a = 0,010$ olanında burkulma şekillerinin hepsi iç bükey olmaktadır. $t/a = 0,008$ ve

$t/a = 0,006$ oranlarındaki plakların üç takviye elemanlı olanlarında burkulma şekilleri dış bükey, diğerleri ise iç bükeydir. $t/a = 0,004$ olan iki ve üç destekli plaklarda dış bükey davranış, tek destekli olanlarda önce iç bükey sonrada dış bükey davranış belirlenmiştir.

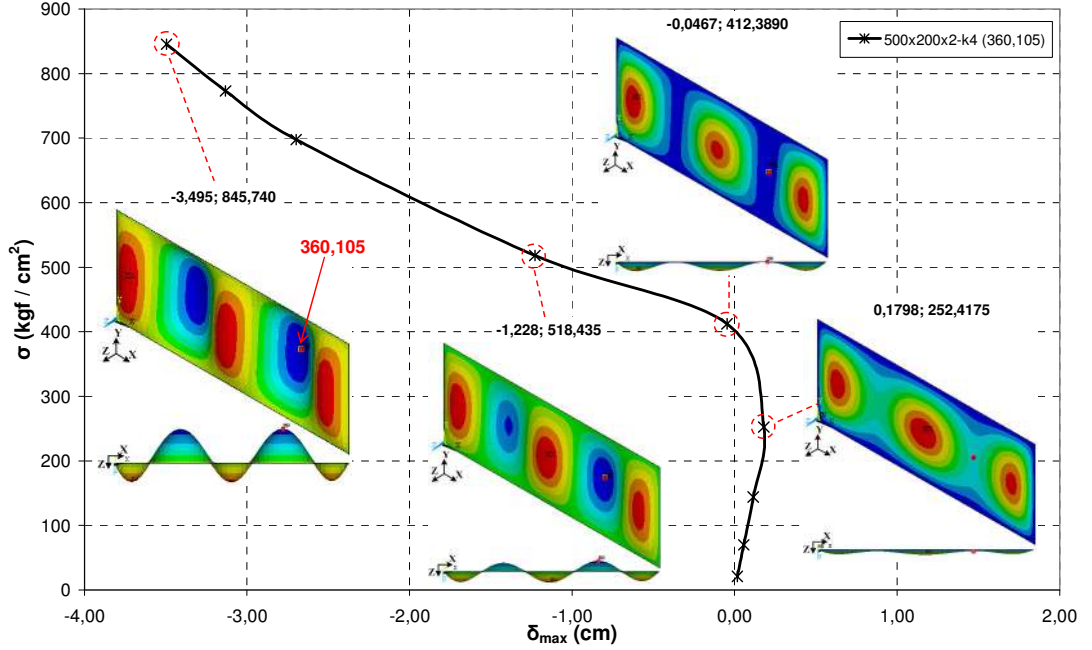
Sonuçlar itibariyle K1, K2 ile karşılaştırıldığında K2 konfigürasyonundan elde edilen sonuçların 0/45 dizilişinin özelliği itibariyle daha kararlı davranış gösterdiği gözlemlenmiştir. Buna rağmen t/a oranı en küçük olan 0,004 plağında desteksiz ve tek destekli plak kararsızlık göstermiştir.

3 - K3 $[(0/45)_2]^{gövde}$ fiber kompozit desteksiz plakların $t/a = 0,010$ ve $t/a = 0,008$ oranlarında burkulma şekilleri iç bükey olmaktadır. $t/a = 0,006$ ve $t/a = 0,004$ plakları ise, önce iç bükey daha sonra sırasıyla $\sigma = 720 \text{ kgf/cm}^2$ ve $\sigma = 400 \text{ kgf/cm}^2$ gerilme değerlerinde dış bükey burkulma şeklini almaktadır. Böylece, plağın burkulmadaki konum değişimleri, $\sigma / \sigma_{kr} - \varepsilon / \varepsilon_{kr}$, $\sigma - u$ ve $\sigma - \delta_{max}$ grafikleri sayesinde belirlenmiştir.

Sonuçlar itibariyle destek elemanlı plaklar açısından bakıldığında K3 konfigürasyonunun, K1 ve K2'den daha kararlı davranış gösterdiği görülmüştür.

4 - Desteksiz K4 $[(0/30/45/60)_2]^{gövde}$ konfigürasyonunda $t/a = 0,010$ ve $t/a = 0,008$ oranlı plakların burkulma şekilleri iç bükey olmaktadır. $t/a = 0,006$ ve $t/a = 0,004$ plakları ise, önce iç bükey daha sonra sırasıyla $\sigma = 600 \text{ kgf/cm}^2$ ve $\sigma = 400 \text{ kgf/cm}^2$ gerilme değerlerinde dış bükey burkulma şeklini almaktadır. Ayrıca tek destekli K4 $[(0/30/45/60)_2]^{gövde} + [(0/30/45/60)_2]^{takviye}$ konfigürasyonunda $t/a = 0,004$ oranlı plakların burkulma şekli önce iç bükey, daha sonra $\sigma = 640 \text{ kgf/cm}^2$ gerilme değerinde dış bükey burkulma şekli ortaya çıkmaktadır. Anlatılan burkulma şeklinin değişimine ilişkin bir örnek, Şekil 6.68'de detaylı olarak verilmiştir. K4 fiber dizilişi destek elemanlı plaklar

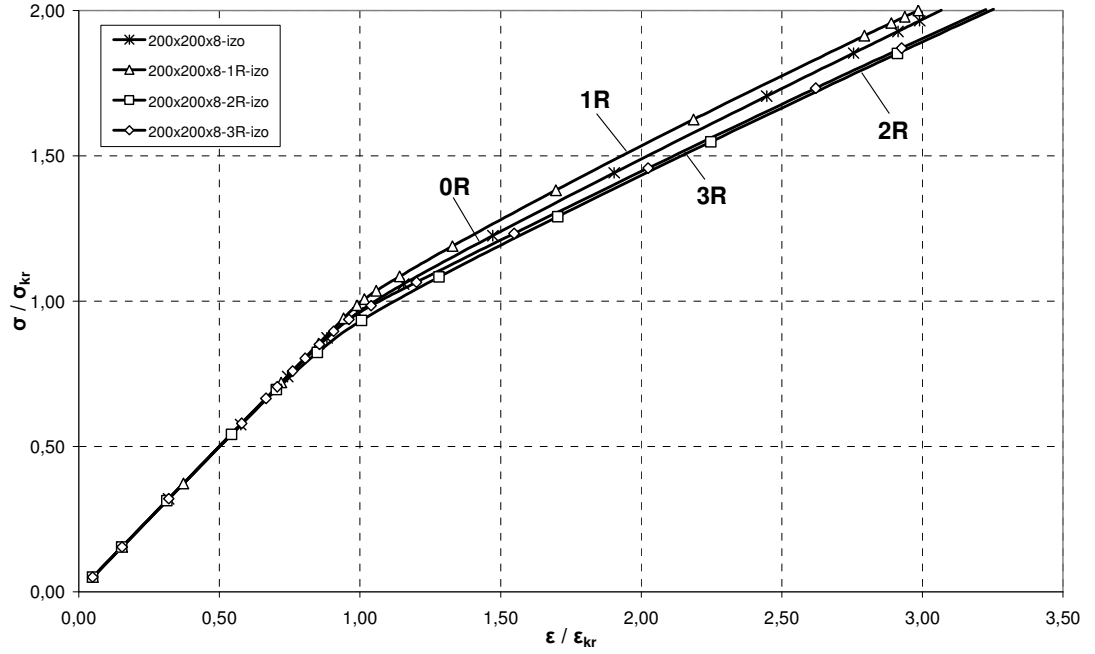
açısından bakıldığında diğer konfigürasyonlara göre (K3 hariç) daha kararlı gözükmetedir.



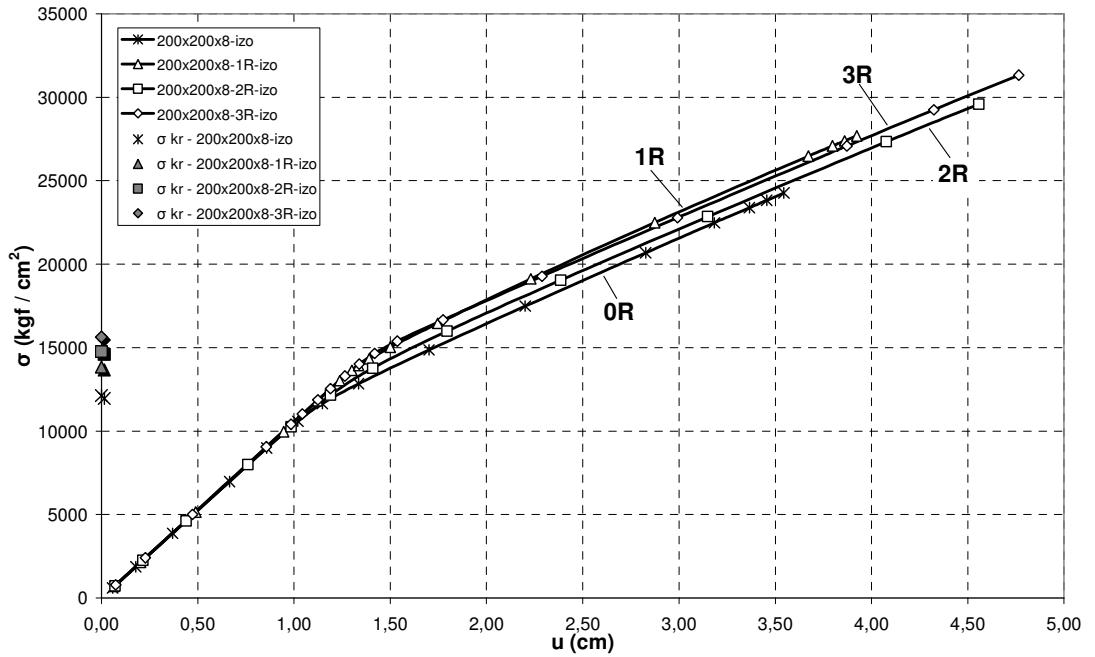
Şekil 6.68. 500x200x2 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren noktanın yer değişimine göre ayrıntılı grafiği

5 - Fiber kompozit plaklarda fiber diziliş konfigürasyonun, kritik burkulma gerilmesine olan etkilerini anlamak için; üç destekli 200x200x2 boyutundaki plaklar karşılaştırıldığında, özdeğer problemin çözümlerine göre kritik burkulma gerilmeleri $\sigma_{K1} = 1695 \text{ kgf/cm}^2 > \sigma_{K2} = 1568 \text{ kgf/cm}^2 > \sigma_{K3} = 1528 \text{ kgf/cm}^2 > \sigma_{K4} = 1512 \text{ kgf/cm}^2$ şeklinde sıralanmaktadır. Aynı plağın lineer olmayan analizlerinde sabit daralma ($u=1,0 \text{ cm}$) altındaki gerilmeleri dikkate alındığında $\sigma_{K2} = 2038 \text{ kgf/cm}^2 > \sigma_{K3} = 2000 \text{ kgf/cm}^2 > \sigma_{K1} = 1935 \text{ kgf/cm}^2 > \sigma_{K4} = 1895 \text{ kgf/cm}^2$ olduğu görülmektedir.

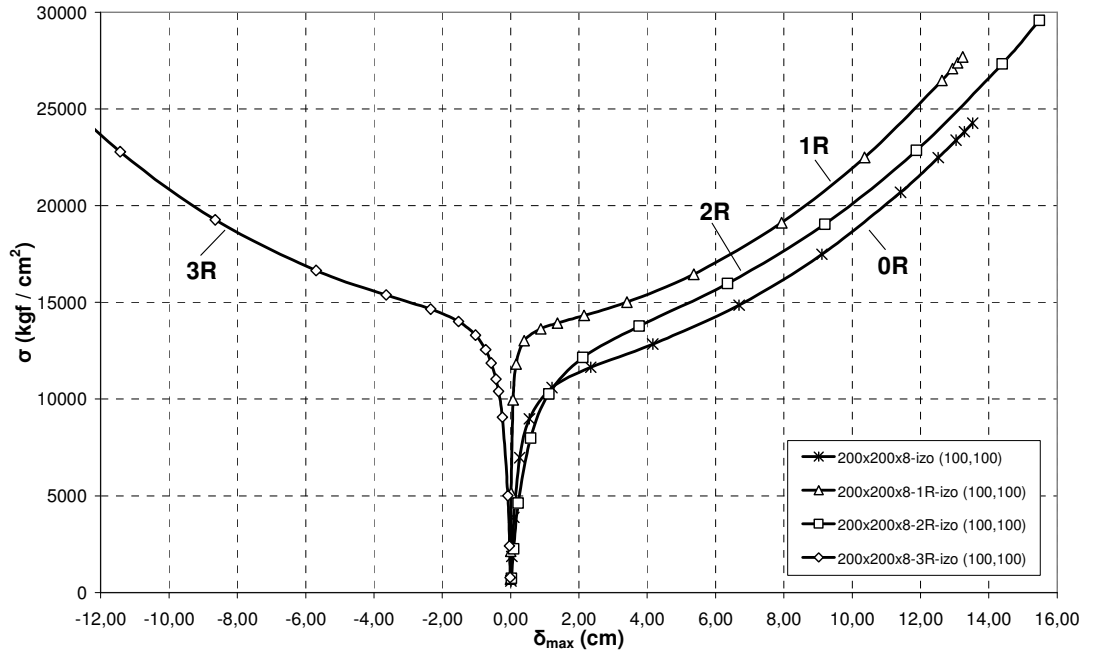
200x200x8 boyutlarındaki Çelik ve Bor-Al plakların lineer olmayan analiz sonuçları



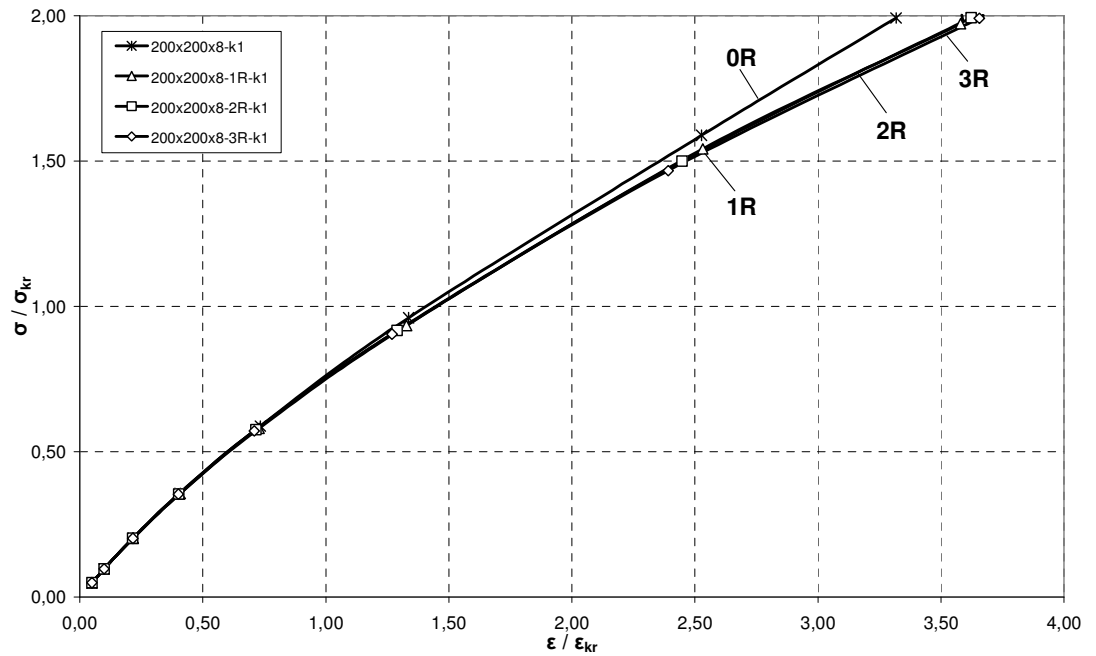
Şekil 6.69. 200x200x8 boyutlarındaki çelik plaklarda σ/σ_{kr} 'in $\varepsilon/\varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri



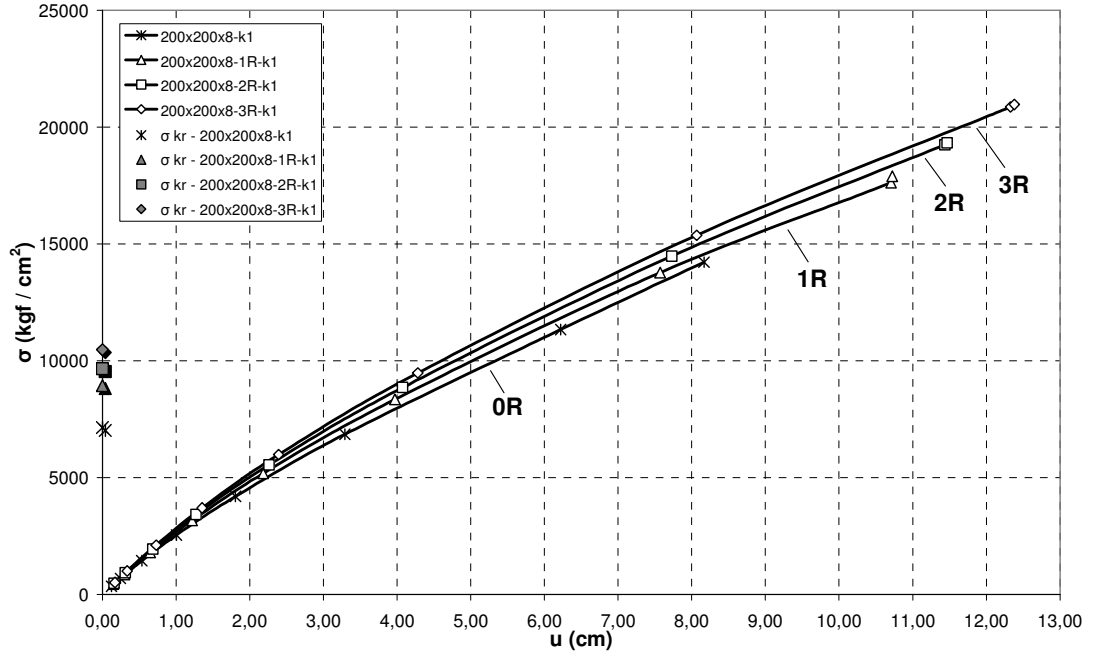
Şekil 6.70. 200x200x8 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



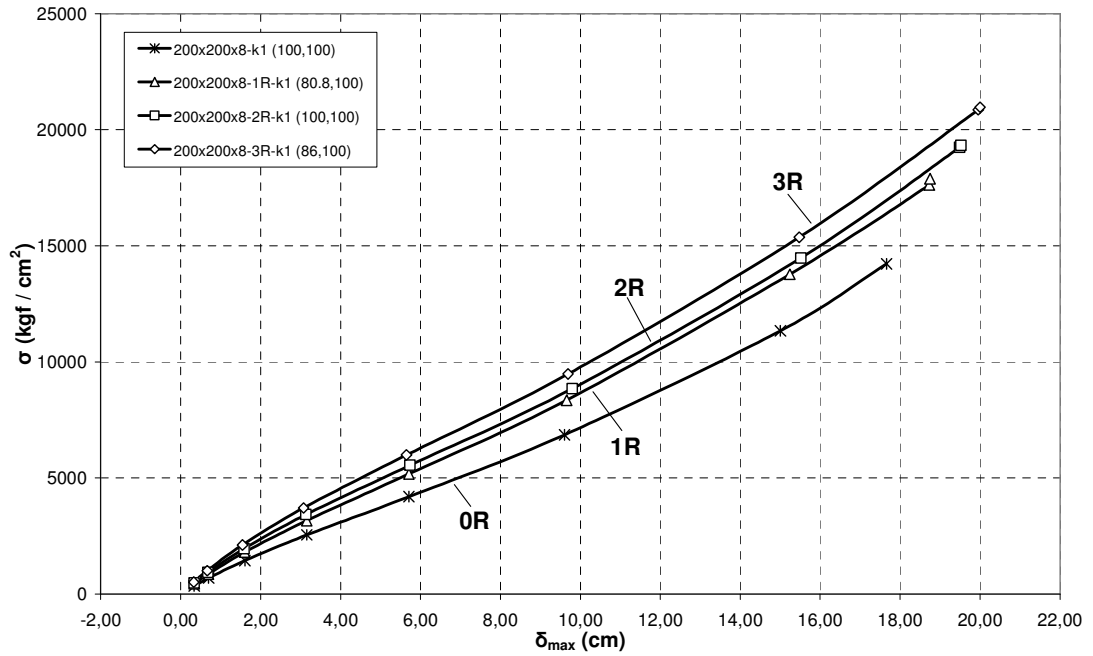
Şekil 6.71. 200x200x8 boyutlarındaki çelik plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



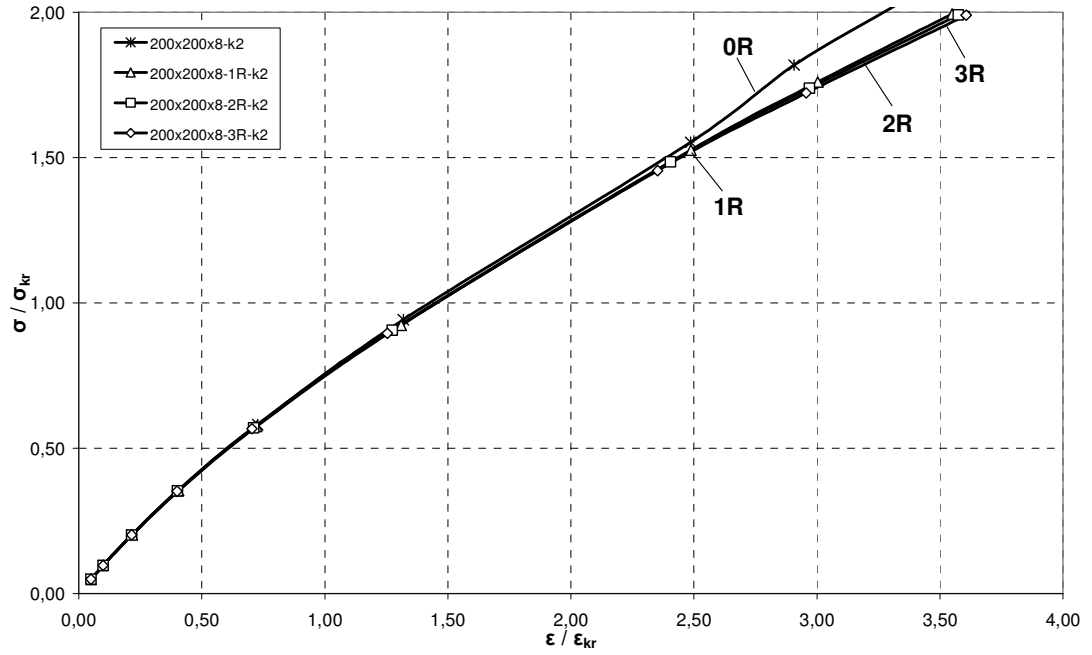
Şekil 6.72. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda σ / σ_{kr} 'in ϵ / ϵ_{kr} 'e göre değişim grafikleri



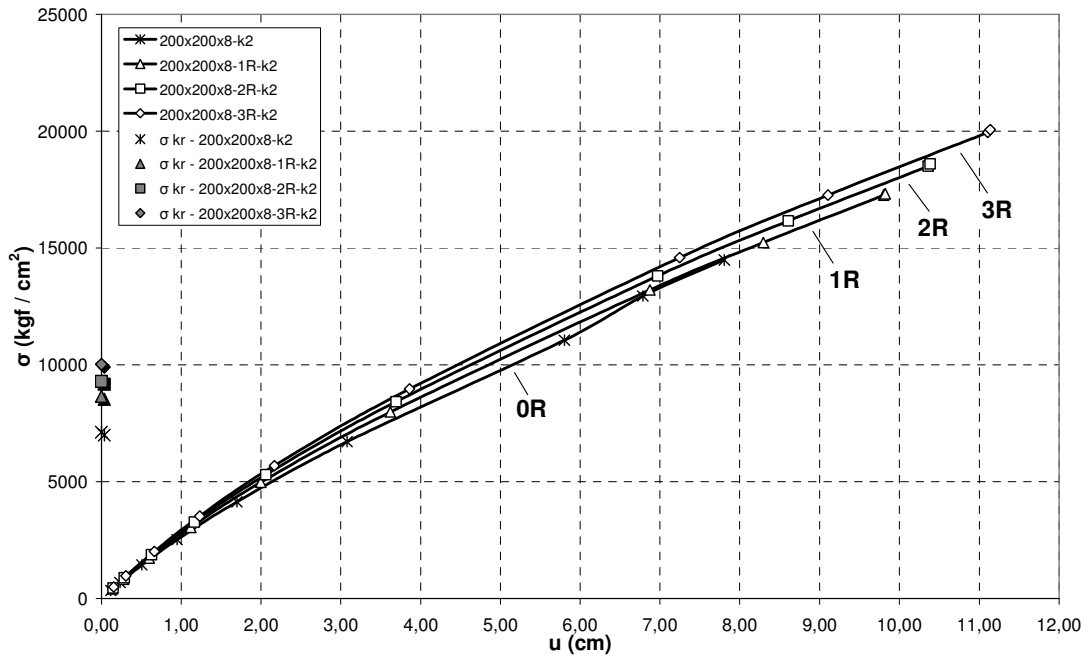
Şekil 6.73. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



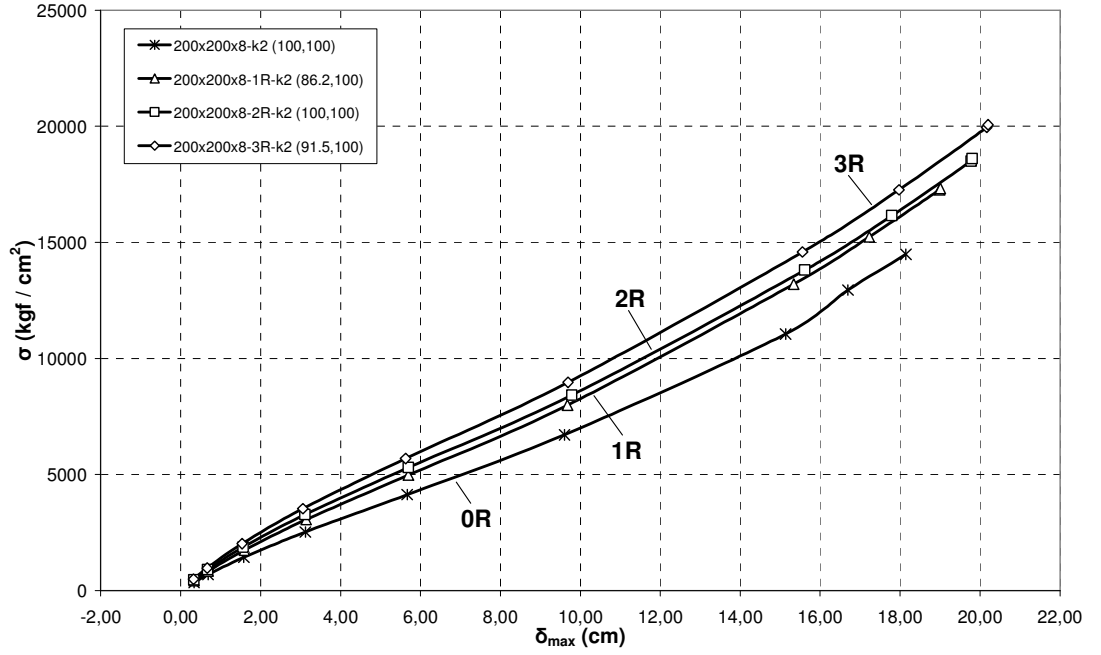
Şekil 6.74. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K1) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



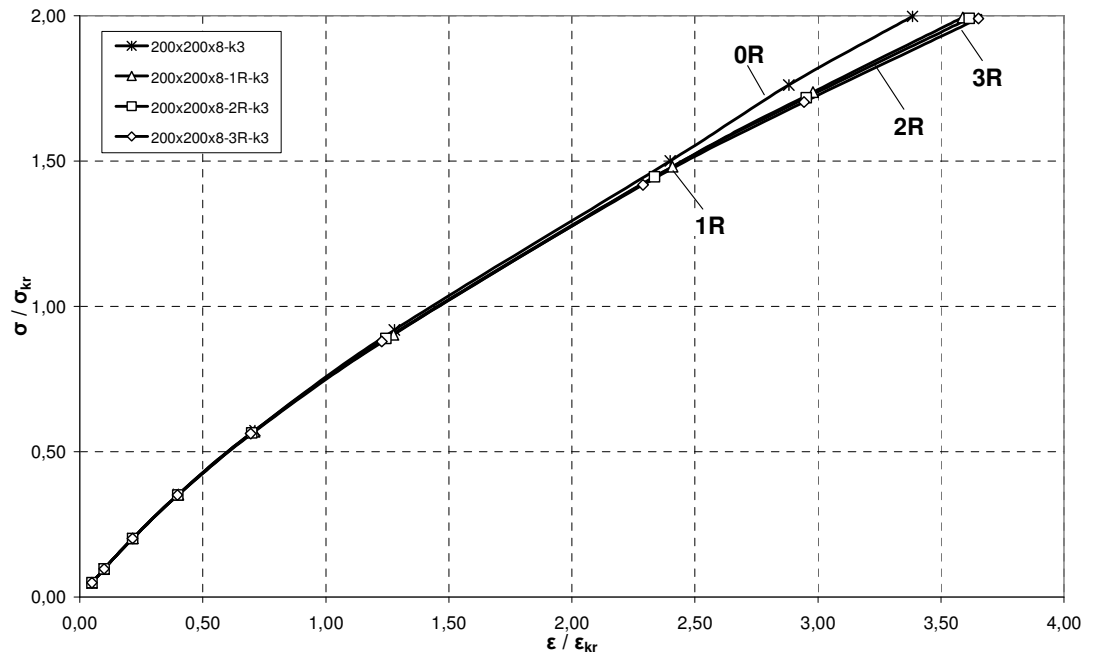
Şekil 6.75. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri



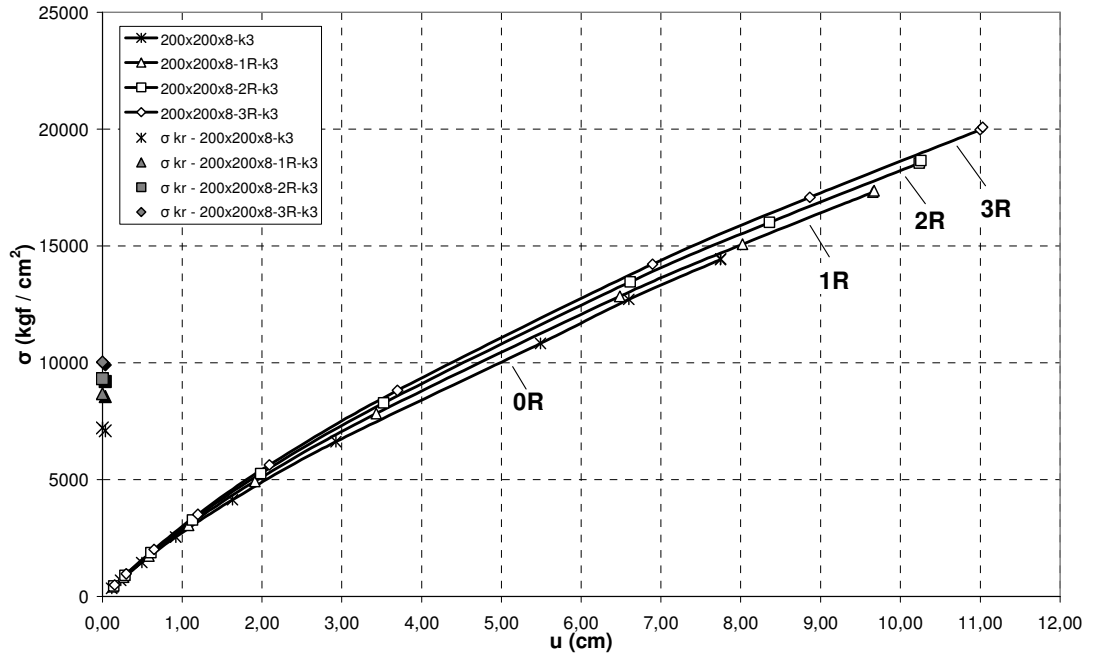
Şekil 6.76. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



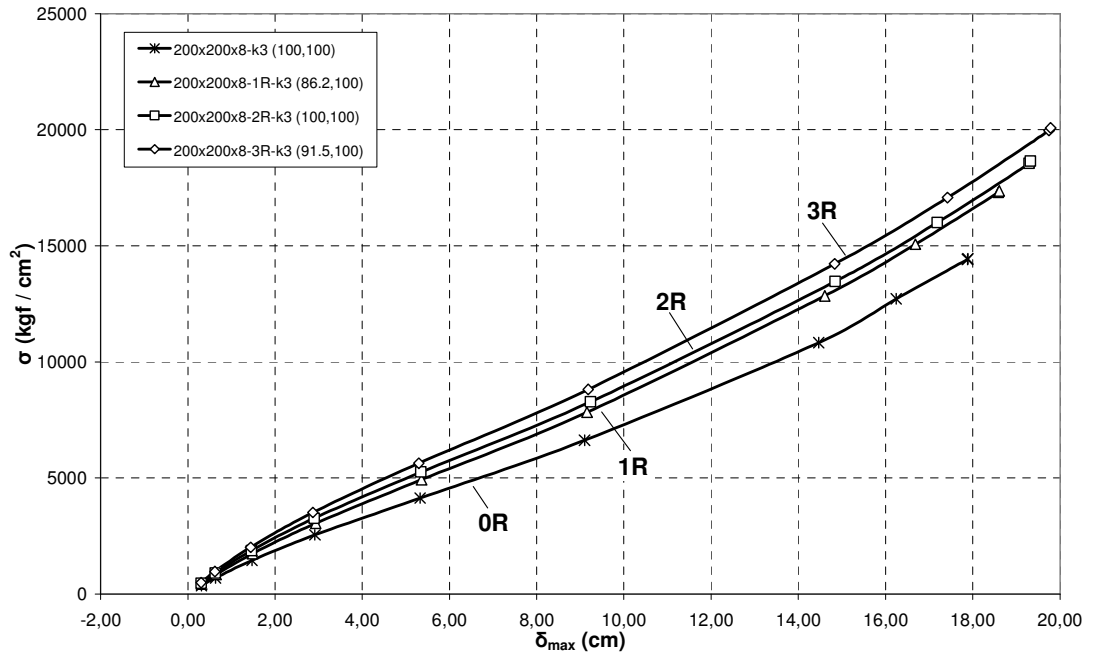
Şekil 6.77. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K2) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



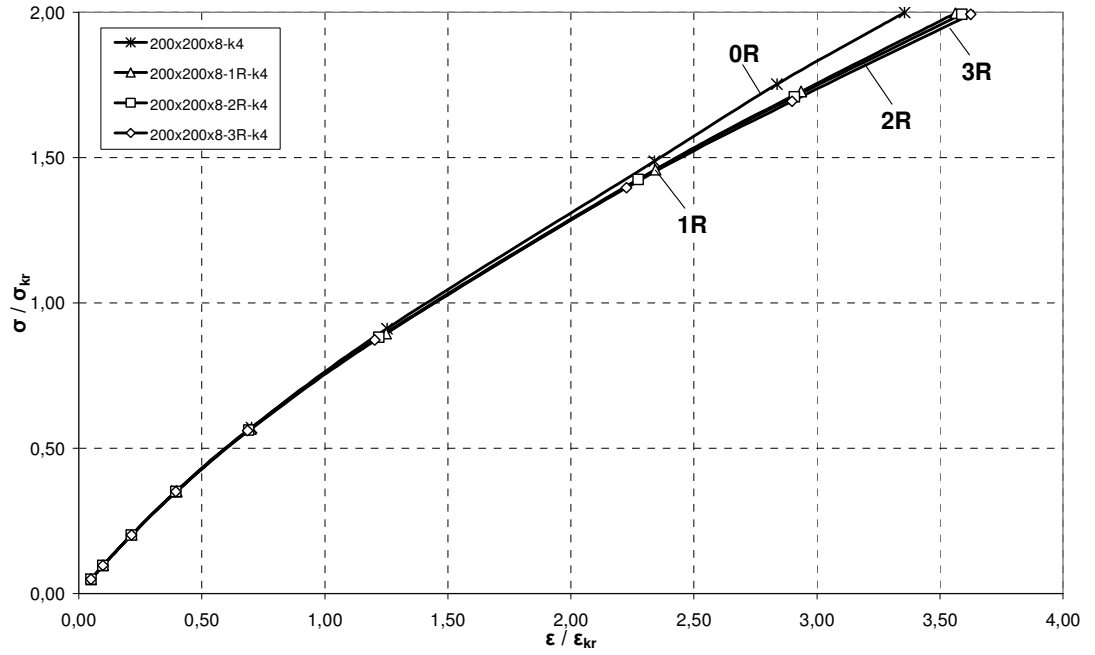
Şekil 6.78. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda σ / σ_{kr} 'in ϵ / ϵ_{kr} 'e göre değişim grafikleri



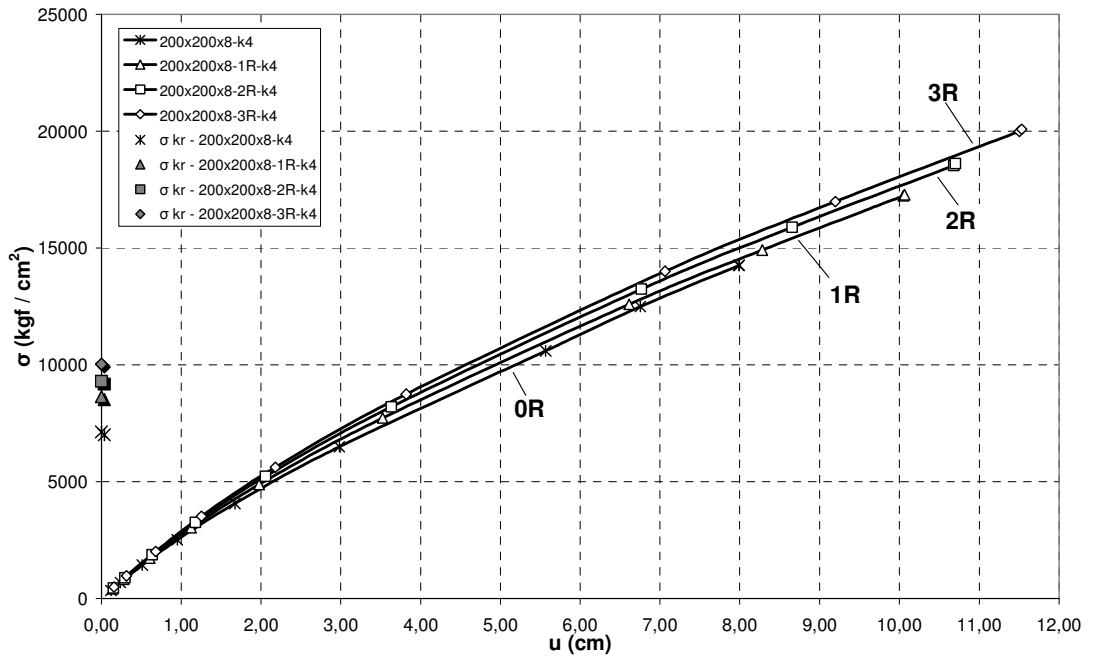
Şekil 6.79. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



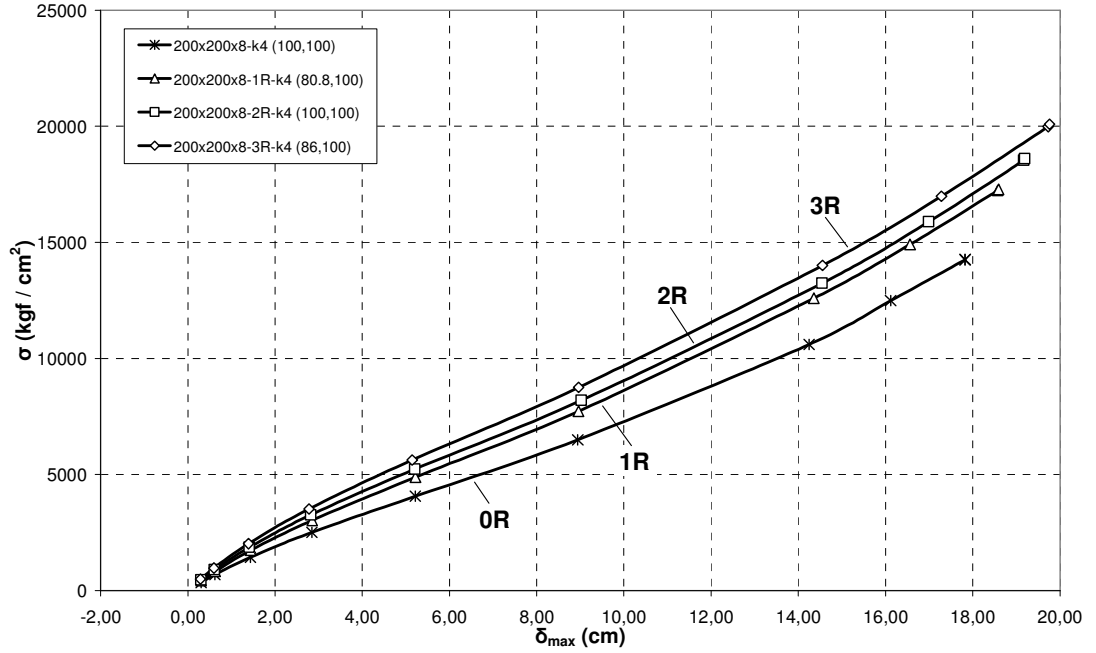
Şekil 6.80. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K3) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri



Şekil 6.81. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda σ / σ_{kr} 'in $\varepsilon / \varepsilon_{kr}$ 'e göre değişim grafikleri



Şekil 6.82. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, plağın boyunda meydana gelen daralmaya göre değişim grafikleri



Şekil 6.83. 200x200x8 boyutlarındaki Bor-Al (K4) plaklarda gerilmenin, z yönünde maksimum deplasman değeri veren ve (x,y) koordinatları belirtilen noktanın yer değişimine göre grafikleri

Şekil 6.69 - Şekil 6.83 arasında 200x200x8 ($t/a = 0,04$) boyutlarındaki çelik ve fiber kompozit plakların lineer olmayan analiz sonuçları $\sigma/\sigma_{kr} - \varepsilon/\varepsilon_{kr}$, $\sigma - u$ ve $\sigma - \delta_{max}$ değişim grafikleri ile ayrı ayrı verilmektedir. Birinci grup plak çözümlerine göre; 4 kat daha kalın olan bu plaklar daha mukavemetli ve kararlı burkulma davranışları göstermişlerdir. Ayrıca kalınlığını arttırdığımız plaklar diğer ince plaklara göre eğilme rijitlikleri (EI) ve kompozit malzemenin eşdeğer rijitlik matrisleri $[A]$, $[B]$ ve $[D]$ (Bkz. Bölüm 2) daha büyük değerler içermektedir. Bunun bir sonucu olarak plak genel burkulma hali göstermektedir. Grafiklerden en ilgi çekici olan Şekil 6.69'da verilen 200x200x8 çelik plağa ait $\sigma - \delta_{max}$ eğrileridir. Bu eğrilerden desteksiz ve iki destekli olan plaklar yaklaşık 10.000 kgf/cm²'ye kadar $\sim 1,0$ cm δ_{max} görülürken, aynı plak geometrisine sahip kompozit plaklarda $\sim 10,0$ cm δ_{max} değeri görülmüştür. Aynı grafikte tek ve üç destekli plaklarda 13.000 kgf/cm²'de $\sim 0,5$ cm δ_{max} değeri görülmüştür. Bu noktalardan sonra da plaklar belirgin bir şekilde kararsız bölgeye geçmektedir.

7. SONUÇLAR

İzotropik ince plakların son yıllarda burkulma analizi ile ilgili literatürde birçok çalışma örnekleri görülmektedir. Bu çalışmaların yanı sıra malzemenin fiber kompozit yapıda seçilerek destek elemanları ile güçlendirilmesini kapsayan konulara ait çözümlemeler daha az sayıda görülmektedir. Bunların yanı sıra, çözüm yöntemlerinden lineer olmayan sayısal metotlarla yapılan çalışmalara daha da zor ulaşılmaktadır. Bu nedenlerle daha önceden yapılan çalışmalara birebir ulaşılmadan yeni metodlar geliştirerek, çözümlemeler yapmak mümkün olamamaktadır. Bu çalışmada bu amaçlar altında literatürdeki çalışmaların çözümlemeleri yapılmış ve ayrıca fiber kompozit plakların lineer olmayan çözümlemeleri de yapılmıştır.

İnce plakların eksenel ve/veya kayma gerilmesi altında burkulma davranışlarının incelenmesi ayrıca destek elemanlarının ve kompozit malzemelerin de birarada kullanılarak çözüm yöntemlerinin detaylı olarak anlatıldığı Alinia (2006) ve Byklum'a (2004) ait araştırmaların çalışılmasıyla bu tez çalışması tamamlanmıştır. Bunların yanısıra Bulson ve Hu vd. analitik çözümlemeleri de incelenerek bütün sonuçlar birbirleriyle karşılaştırılmıştır.

Desteklenmemiş çelik plakların ANSYS® programı ile yapılan lineer çözümlemeleri, teorik çözümler ile karşılaştırıldığında ortalama hata oranının % 0,48 olduğu gözlemlenmiştir [26]. Lineer olmayan çözümlemelerde ise; Hu vd. ile karşılaştırıldığında $0,049 < (\%) \text{ relatif hata} < 3,205$ arasında olduğu görülmüştür [18].

Desteklenmiş çelik plakların ANSYS® programı ile yapılan lineer olmayan çözümlemeleri, Alinia'nın çalışmaları ile karşılaştırılmış ve hesaplanan hatanın ortalama % 0,545 olduğu görülmüştür [8]. Lineer olmayan çözümlemelerde ise; Byklum ile karşılaştırıldığında bölgesel burkulma için; $0,094 < (\%) \text{ relatif hata} < 25,788$, genel burkulmada ise; $0,144 < (\%) \text{ relatif hata} < 2,682$ aralığında olduğu görülmüştür [22-23].

ANSYS® programı ile yapılan özdeğer probleminin çözümünde eksenel yüklemeye karşı plağın sehiminin değişim grafikleri görülememekle beraber, lineer olmayan çözümlemelerde bu değerler elde edilebilmektedir. Lineer olmayan çözümlemelerde, küçük miktarlardaki yükün ara alt adımlarla geometriye eklenmesi ile geometri ve malzemenin burkulmaya olan etkileri daha detaylı görülebilmektedir.

Burkulma analizleri sonucunda, çelik ve fiber kompozit malzemeli plaklarda takviye eleman sayısının, kritik burkulma gerilmesine olan etkisinin parabolik eğrileri takip eden artışlarla ifade edildiği görülmüştür.

Takviye elemanlarının kullanılması ile plağın üzerindeki gerilme ve sehim dağılımlarının yönlendirilebildiğinden dolayı desteksiz plaklarda genel burkulma hali görülürken, takviye elemanları ile güçlendirildiğinde gerilme dağılımlarının bölgesel burkulma tipine dönüştüğü görülmüştür. Böylece; plakların üzerinde oluşan gerilme dağılımlarının aynı bölgede yoğunlaşmaması kontrollü bir şekilde sağlanmış olmaktadır.

Çelik ve fiber takviyeli kompozit plaklarda, takviye elemanının sayısı ile plağın kritik burkulma gerilme değerinin yükseldiği, fiber takviyeli kompozit plakların kritik burkulma gerilme değerlerinin, çelik plakların kritik burkulma gerilme değerlerinden ortalama %43 daha düşük çıktığı görülmüştür. Ancak fiber takviyeli kompozit plakların yoğunluk değerinin, çeliğin yoğunluk değerinden daha düşük olmasından dolayı fiber takviyeli kompozit plaklar tercih edileceği görülmüştür. Ayrıca fiber konfigürasyonların kritik burkulma gerilmesine olan etkisine bakıldığında özdeğer problemin çözümleri için K1 $([0/90/0]_{\text{gövde}} + [(0/90)_2]_{\text{takviye}})$, lineer olmayan analizlerde ise K2 $([0/45]_{\text{gövde}} + [(0/45)_2]_{\text{takviye}})$ dizilişinin diğer dizilişlere göre daha etkili olduğu tespit edilmiştir.

Analizi yapılan plaklar bir gemi ve/veya uçak gövdesinin bütününden çıkarıldığı için bu küçük parçaların tek parça halindeki analizlerini bütüne

göre modellemenin zorlukları bu çalışmalar sırasında görülmüştür. Böylece, plağa uygulanan gerilim dağılımları ile deplasmanlar arasındaki değişim grafikleri; plağın kullanılacağı yerinin seçimi konusunda yardımcı olacaktır. Örneğin; bir gemi gövdesinden alınan plağın boyuna göre % 1.0'lık bir deplasmanın önemi yok iken; bir uçak gövdesinde bu deplasman değeri ile güvenli uçuş yapılamayacağı açıktır. Bu nedenle; tasarım kriterleri arasına; geometri, yükleme ve malzemeye bağlı parametreler alınırken, kullanım yerleri de dikkate alınmalıdır.

Lineer olmayan analiz kısımlarında çok küçük aralıklı kritik yüklerde plağın denge durumundan dengesiz duruma geçerek, belli bir yük artışından sonra tekrar dengeye ulaşıyor olması nedeniyle, bazen bu denge durumlarının plağın kendi burkulma şeklini değiştirmesiyle koruduğu da ortaya çıkmıştır.

Özdeğer problem çözümleri ve lineer olmayan analizlerin her birinin çözümleme süresi dikkate alındığında lineer olmayan analizlerin 30 ~ 40 kat kadar daha uzun sürdüğü görülmüştür. Burkulma analizinde EK - 2'de verilen Eş. 2.1'deki rijitlik matrislerinin determinantı özdeğerleri vermekte olup, bu değerlerin sayısı vektörlerdeki yerdeğiştirme δ_z bileşen sayısına eşittir. ANSYS® çözümlerinde yalnızca ilk üç özdeğer ve özvektör için hesaplamalar yapılmıştır.

Destek eleman malzeme özelliklerinin plaktan farklı olarak daha rijit, elastik veya plastik malzeme özellikleri taşıyacak şekilde kullanılması ile plak üzerindeki gerilme dağılımlarının yönlendirilmesi sağlanacaktır. Destek elemanlarının geometrik şekillerinin kritik burkulma gerilmesine olan etkilerinin lineer olmayan analizlerle incelenmesi ilerideki çalışmalarda yapılabilir. Ayrıca, plakta bazen oluşan burkulmaya ait kararsız bölgelerinde parametrik çözümleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Bryan, G. H., "On the Stability of a Plane Plate under Thrusts in its own Plane, with Applications to the Buckling of the Sides of a Ship", **Proc. London Math. Soc.**, 22 : 54 (1891).
2. Timoshenko, S. P., "Einige stabilitätsprobleme der elastizitätstheorie", **Z. Math. Physik**, 58 : 337-385 (1910).
3. Cox, H. L., and Riddell, J. R., "Buckling of a Longitudinally Stiffened Flat Panel", **Aeronautical Quarterly**, 1 : 225 (1949).
4. Seide, P., "The effect of longitudinal stiffeners located on one side of a plate", **N.A.C.A.**, Tech. Note No. 2873, (1953).
5. Kapur, K. K., and Hartz, B. J., "Stability of Plates Using The Finite Element Method", **Proc. A.S.C.E., E.M.2**, 7 : 177-195 (1966).
6. Zienkiewicz, O. C., "The Finite Element Method", **McGraw-Hill**, London, 413-425 (1967).
7. Bathe, K. J., "Finite Element Procedures", **Prentice Hall**, New Jersey, 754-765, 838-978 (1996).
8. Alinia, M. M., "A parametric investigation on stiffening axially loaded panels", **International Journal of Civil Engineering**, 2(4) : 246-256 (2005).
9. Alinia, M. M., "A study into optimization of stiffeners in plates subjected to shear loading", **Thin-Walled Structures**, 43 : 845-860 (2005).
10. Mallela, U. K., and Upadhyay, A., "Buckling of laminated composite stiffened panels subjected to in-plane shear: A parametric study", **Thin-Walled Structures**, 44 : 354-361 (2006).
11. Sanal, Ö., "Kayma Yüklemesi Altındaki Enine Desteklenmiş İzotropik ve Ortotropik Dikdörtgen İnce Plakların ANSYS Sonlu Elemanlar Programı ile Burkulma Analizi", Yüksek Lisans Tezi, **Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Ankara, 82-86, 89-94, 122-131 (2006).
12. Yıldız, Y. O. ve Günay, E. "Eksenel Yükleme Altında Kiriş Destekli Kompozit Plakların SEY ile Burkulma Analizi", **1. Ulusal Havacılık ve Uzay Konferansı**, UHUK-2006-037, Ankara, 1-17 (2006).
13. Paik, J. K., and Kim, B. J., "Ultimate strength formulations for stiffened panels under combined axial load, in-plane bending and lateral pressure.", **Thin Walled Structures**, 40(1) : 45-83 (2002).

14. Paik, J. K., and Thayamballi, A. K., "Ultimate limit state design of steel plated structures.", **John Wiley & Sons**, 43(3) : 375-410 (2003).
15. Satish Kumar, Y.V., and Mukhopadhyay, M., "A new finite element for buckling analysis of laminated stiffened plates", **Composite Structures**, 46 : 321-331 (1999).
16. Guo, M. W., Harik, I. E., and Ren, W. X., "Buckling behavior of stiffened laminated plates", **International Journal of Solids and Structures**, 39 : 3039-3055 (2002).
17. Von Kàrmàn, T., "Festigkeitsprobleme im maschinenbau", **In Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften**, 4 : 311-385 (1910).
18. Hu, P. C., Lundquist, E. E. and Batdorf, S. B., "Effect of small deviations from flatness on effective width and buckling of plates in compression", **N.A.C.A.**, Tech Note:1124, (1946).
19. Byklum, E. and Amdahl, J., "A simplified method for elastic large deflection analysis of plates and stiffened panels due to local buckling", **Thin-Walled Structures**, 40 : 925-953 (2002).
20. Byklum, E., Steen, E. and Amdahl, J., "A semi-analytical model for global buckling and postbuckling analysis of stiffened panels", **Thin-Walled Structures**, 42 : 701-717 (2004).
21. Szilard, R., "Theory and Analysis of Plates", **Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs**, New Jersey, 1-5, 374-377 (1974).
22. Strain, J., "Buckling and the Arc-Length Method", **The Focus**, 14 : 23 (2003).
23. "Help Files", **ANSYS® Inc.**, USA, (2005).
24. Ruggiero, E. J., "Modeling and Control of SPIDER Satellite Components", PhD Thesis, **Mechanical Engineering**, 87-90 (2005).
25. Ugural, A.C., "Stresses in Plates and Shells 2nd ed.", **McGraw-Hill**, New York, 71-84, 305-318 (1986).
26. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., " Theory of Elastic Stability", **McGraw-Hill**, New York, 319-429 (1988).
27. Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., " Theory of Plates and Shells", **McGraw-Hill**, London, 79-104, 396-425 (1959).

28. Bulson, P. S., "The Stability of Flat Plates", **American Elsevier Publishing Company, Inc.**, New York, 1-22, 187-192, 384-392 (1969).
29. Wilmer, A., "Analytic Expression Of The Buckling Loads for Stiffened Plates with Bulb-Flat Flanges", Ms. of Sci Thesis, **Naval Postgraduate School Monterey**, California, 37-50 (2003).
30. Byklum, E., "Ultimate strength analysis of stiffened steel and aluminium panels using semi-analytical methods", PhD Thesis, **Department of Marine Technology, Norwegian University of Science and Technology**, Norway, 56-67 (2002).
31. Steen, E., "Buckling of stiffened plates using a Shanley model approach", **University of Oslo, Mechanics Division**, Report No. 99-1, 8-12 (2001).
32. Jones, R. M., "Mechanics of Composite Materials", **Taylor&Francis, Inc.**, Philadelphia, USA, 55-87, 187-201 (1999).
33. Herakovich, C. T., "Mechanics of Fibrous Composites", **John Wiley & Sons, Inc.**, New York, 7-8 (1992).
34. Oakwood College/Dynamic Concepts, Inc., "NASA treetops final report", **NASA Technical Note**, NASA-CR-202063, 35-38 (1996).
35. Internet : Adams, V. and Askenazi, A., "Building Better Products with FEA" http://www.personal.psu.edu/dhj1/classes/lec2_350.html (2003).
36. Internet : Brown University, "Advanced Mechanics of Solids" http://www.engin.brown.edu/courses/en175/Notes/FEM_overview/FEM.htm (2006).
37. Mesbahi, A. and Nattero, I. C., "Effect of Localised Imperfections on the Collapse Strength of Rectangular Plate Elements", MARSTRUCT Network of Excellence in Marine Structures, 1 : 6-7 (2005).
38. Sun, H. and Wang, X., American Bureau of Shipping, "Buckling and Ultimate Strength Assessment of FPSO Structures", **ABS Technical Papers**, 1 : 153-176 (2005).
39. Ünsoy, A., "Buckling analysis of laminated composite stiffeners using finite element method", Yüksek Lisans Tezi, **Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Ankara, 102-107 (1998).
40. Mallick, P.K., "Fiber Reinforced Composites", **M. Dekker**, New York, 141-159 (1993).

EKLER

EK - 1 Fiber kompozit plakların ve takviye elemanların rijitlik matrisleri

Kritik burkulma gerilmesinin, fiber yönleriyle olan ilgisini açıklayabilmek için tabakalı plakların rijitlik matrislerinin incelenmesi gereklidir. 2. Bölüm'de formülasyonu verilen uzama rijitlik matrisi $[A]$, eğilme - uzama etkileşim rijitlik matrisi $[B]$ ve eğilme rijitlik matrisi $[D]$ 'nin elde edilebilmesi için önce sırasıyla indirgenmiş rijitliklerin $[Q]$, açıdan bağımsız rijitliklerin $[U]$ ve dönüştürülmüş indirgenmiş rijitlik matrisinin $[\bar{Q}]$ elde edilmesi gerekmektedir.

Bu aşamada 200cm x 200cm x 2 cm ölçülerindeki Bor-Al plakların 4 adet fiber konfigürasyonu için ilgili matrisler hesaplanmıştır. Örnek olarak; dizilişi $[0^\circ/45^\circ]_s$ için hesaplamalar ayrıntılı olarak anlatılmış, daha sonra bu 4 değişik fiber konfigürasyonu için elde edilen sonuçlar Eş. 1.2 - Eş. 1.9'da verilmiştir. Fiber kompozit olarak seçilen ve özellikleri Çizelge 5.3'de verilen Bor-Al için mühendislik sabitleri şöyledir.

$$E_{11} = 227 \text{ GPa}, E_{22} = 139 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0,24, \nu_{21} = 0,15, G_{12} = 57,6 \text{ GPa}$$

Q_{ij} indirgenmiş rijitlikler, mühendislik sabitleri cinsinden ise şu ifadelerden hesaplanır. Burada;

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \Rightarrow Q_{11} = \frac{227}{1 - 0,24 \times 0,15} \Rightarrow Q_{11} = 235,5 \text{ GPa}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \Rightarrow Q_{22} = \frac{139}{1 - 0,24 \times 0,15} \Rightarrow Q_{22} = 144,2 \text{ GPa}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \Rightarrow Q_{12} = \frac{0,15 \times 227}{1 - 0,24 \times 0,15} \Rightarrow Q_{12} = 35,32 \text{ GPa}$$

$$Q_{66} = G_{12} \Rightarrow Q_{66} = 57,6 \text{ GPa} \text{ olarak bulunur.}$$

EK - 1 (Devam) Fiber kompozit plakların ve takviye elemanların rijitlik matrisleri

Açıdan bağımsız rijitlikler [40]

$$U_1 = \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66})$$

$$U_1 = \frac{1}{8}(3 \times 235,5 + 3 \times 144,2 + 2 \times 35,32 + 4 \times 57,6) \Rightarrow U_1 = 180 \text{ GPa}$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}) \Rightarrow U_2 = \frac{1}{2}(235,5 - 144,2) \Rightarrow U_2 = 45,64 \text{ GPa}$$

$$U_3 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66})$$

$$U_3 = \frac{1}{8}(235,5 + 144,2 - 2 \times 35,32 - 4 \times 57,6) \Rightarrow U_3 = 9,828 \text{ GPa}$$

$$U_4 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66})$$

$$U_4 = \frac{1}{8}(235,5 + 144,2 + 6 \times 35,32 - 4 \times 57,6) \Rightarrow U_4 = 45,15 \text{ GPa}$$

$$U_5 = \frac{1}{2}(U_1 - U_4) \Rightarrow U_5 = \frac{1}{2}(180 - 45,15) \Rightarrow U_5 = 67,43 \text{ GPa}$$

Dönüştürülmüş indirgenmiş rijitlikler [40]

Dönüştürülmüş indirgenmiş rijitlikler açıdan bağımsız rijitlikler cinsinden sırasıyla 0° ve 45° için hesaplanır;

$$\bar{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta$$

$$(\bar{Q}_{11})_{0^\circ} = 180 + 45,64 \cos(2 \times 0) + 9,828 \cos(4 \times 0) \Rightarrow (\bar{Q}_{11})_{0^\circ} = 235,5 \text{ GPa}$$

EK - 1 (Devam) Fiber kompozit plakların ve takviye elemanların rijitlik matrisleri

$$(\bar{Q}_{12})_{0^0} = \bar{Q}_{21} = U_4 - U_3 \cos 4\theta$$

$$\bar{Q}_{12} = \bar{Q}_{21} = 45,15 - 9,828 \cos(4 \times 0) \Rightarrow (\bar{Q}_{12})_{0^0} = (\bar{Q}_{21})_{0^0} = 35,32 \text{ GPa}$$

$$\bar{Q}_{22} = U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta$$

$$(\bar{Q}_{22})_{0^0} = 180 - 45,64 \cos(2 \times 0) + 9,828 \cos(4 \times 0) \Rightarrow (\bar{Q}_{22})_{0^0} = 144,2 \text{ GPa}$$

$$\bar{Q}_{16} = \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta$$

$$(\bar{Q}_{16})_{0^0} = \frac{1}{2} 45,64 \sin(2 \times 0) + 9,828 \sin(4 \times 0) \Rightarrow (\bar{Q}_{16})_{0^0} = 0$$

$$\bar{Q}_{26} = \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta$$

$$(\bar{Q}_{26})_{0^0} = \frac{1}{2} 45,64 \sin(2 \times 0) - 9,828 \sin(4 \times 0) \Rightarrow (\bar{Q}_{26})_{0^0} = 0$$

$$\bar{Q}_{66} = U_5 - U_3 \cos 4\theta$$

$$(\bar{Q}_{66})_{0^0} = 67,43 - 9,828 \cos(4 \times 0) \Rightarrow (\bar{Q}_{66})_{0^0} = 57,6 \text{ GPa}$$

45° için de benzer mantıkla ;

$$(\bar{Q}_{11})_{45^0} = 170,2 \text{ GPa}, \quad (\bar{Q}_{12})_{45^0} = 54,98 \text{ GPa}, \quad (\bar{Q}_{22})_{45^0} = 170,2 \text{ GPa}$$

$$(\bar{Q}_{16})_{45^0} = 22,82 \text{ GPa}, \quad (\bar{Q}_{26})_{45^0} = 22,82 \text{ GPa}, \quad (\bar{Q}_{66})_{45^0} = 77,26 \text{ GPa}$$

olarak bulunur.

Bu plak için toplam kalınlık 2cm olup toplamda 4 kattan oluştuğundan her kat 0,5 cm yani 0,005 m olacaktır.

EK - 1 (Devam) Fiber kompozit plakların ve takviye elemanların rijitlik matrisleri

Simetrik konfigürasyonda ;

$$(\bar{Q}_{ij})_1 = (\bar{Q}_{ij})_4 = (\bar{Q}_{ij})_{0^\circ}$$

$$(\bar{Q}_{ij})_2 = (\bar{Q}_{ij})_3 = (\bar{Q}_{ij})_{45^\circ}$$

Uzama rijitlikleri [40]

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1})$$

$$A_{ij} = (\bar{Q}_{ij})_1 (z_1 - z_0) + (\bar{Q}_{ij})_2 (z_2 - z_1) + (\bar{Q}_{ij})_3 (z_3 - z_2) + (\bar{Q}_{ij})_4 (z_4 - z_3)$$

$$A_{ij} = (\bar{Q}_{ij})_{0^\circ} (z_1 - z_0) + (\bar{Q}_{ij})_{45^\circ} (z_2 - z_1) + (\bar{Q}_{ij})_{45^\circ} (z_3 - z_2) + (\bar{Q}_{ij})_{0^\circ} (z_4 - z_3)$$

$$A_{11} = 4,057 \text{ GPa} , A_{12} = 0,903 \text{ GPa} , A_{22} = 3,144 \text{ GPa}$$

$$A_{16} = 0,228 \text{ GPa} , A_{26} = 0,228 \text{ GPa} , A_{66} = 1,349 \text{ GPa}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \Rightarrow [A] = \begin{bmatrix} 4,057 & 0,903 & 0,228 \\ 0,903 & 3,144 & 0,228 \\ 0,228 & 0,228 & 1,349 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ N/m}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 4,057 & 0,903 & 0,228 \\ 0,903 & 3,144 & 0,228 \\ 0,228 & 0,228 & 1,349 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ kgf/cm}$$

Eğilme-uzama rijitlikleri [40]

Diziliş simetrik olduğundan eğilme-uzama rijitlik matrisinin elemanları sıfır çıkacaktır.

EK - 1 (Devam) Fiber kompozit plakların ve takviye elemanların rijitlik matrisleri

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} [(\bar{Q}_{ij})_1 (z_1^2 - z_0^2) + (\bar{Q}_{ij})_2 (z_2^2 - z_1^2) + (\bar{Q}_{ij})_3 (z_3^2 - z_2^2) + (\bar{Q}_{ij})_4 (z_4^2 - z_3^2)]$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} [(\bar{Q}_{ij})_{0^0} (z_1^2 - z_0^2) + (\bar{Q}_{ij})_{45^0} (z_2^2 - z_1^2) + (\bar{Q}_{ij})_{45^0} (z_3^2 - z_2^2) + (\bar{Q}_{ij})_{0^0} (z_4^2 - z_3^2)]$$

$$B_{11} = 0, B_{12} = 0, B_{22} = 0$$

$$B_{16} = 0, B_{26} = 0, B_{66} = 0$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \Rightarrow [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eğilme rijitlikleri [40]

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} [(\bar{Q}_{ij})_1 (z_1^3 - z_0^3) + (\bar{Q}_{ij})_2 (z_2^3 - z_1^3) + (\bar{Q}_{ij})_3 (z_3^3 - z_2^3) + (\bar{Q}_{ij})_4 (z_4^3 - z_3^3)]$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} [(\bar{Q}_{ij})_{0^0} (z_1^3 - z_0^3) + (\bar{Q}_{ij})_{45^0} (z_2^3 - z_1^3) + (\bar{Q}_{ij})_{45^0} (z_3^3 - z_2^3) + (\bar{Q}_{ij})_{0^0} (z_4^3 - z_3^3)]$$

EK - 1 (Devam) Fiber kompozit plakların ve takviye elemanların rijitlik matrisleri

$$D_{11} = 0,1515 \text{ MPa} , D_{12} = 0,02519 \text{ MPa} , D_{22} = 0,9829 \text{ MPa}$$

$$D_{16} = 0,001902 \text{ MPa} , D_{26} = 0,001902 \text{ MPa} , D_{66} = 0,04004 \text{ MPa}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \Rightarrow [D] = \begin{bmatrix} 1,515 & 0,252 & 0,019 \\ 0,252 & 0,983 & 0,019 \\ 0,019 & 0,019 & 0,4 \end{bmatrix} \times 10^5 \text{ Nm}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1,515 & 0,252 & 0,019 \\ 0,252 & 0,983 & 0,019 \\ 0,019 & 0,019 & 0,4 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ kgfcm} \text{ olarak elde edilir.}$$

Ortotropik plaklarda genel bünye denkleminin aşağıdaki gibi olduğu hatırlanırsa;

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

Bulunan tüm rijitlik matrisleri şu şekilde özetlenir.

EK - 1 (Devam) Fiber kompozit plakların ve takviye elemanların rijitlik matrisleri

$[0^\circ/45^\circ]_s$ dizilimi için ;

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,057 & 0,903 & 0,228 & 0 & 0 & 0 \\ 0,903 & 3,144 & 0,228 & 0 & 0 & 0 \\ 0,228 & 0,228 & 1,349 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,515 & 0,252 & 0,019 \\ 0 & 0 & 0 & 0,252 & 0,983 & 0,019 \\ 0 & 0 & 0 & 0,019 & 0,019 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (1.1)$$

Buna göre;

K1 konfigürasyonu

Plak $[0^\circ/90^\circ]_s$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,797 & 0,706 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,706 & 3,797 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,152 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,494 & 0,236 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,236 & 1,037 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,384 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (1.2)$$

Takviye eleman $[(0^\circ/90^\circ)_2]_s$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1519 & 282,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 282,6 & 1519 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 460,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 88,3 \times 10^6 & 15,07 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15,07 \times 10^6 & 73,69 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24,58 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (1.3)$$

EK - 1 (Devam) Fiber kompozit plakların ve takviye elemanların rijitlik matrisleri

K2 konfigürasyonu

Plak $[0^\circ/45^\circ]_s$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,057 & 0,903 & 0,228 & 0 & 0 & 0 \\ 0,903 & 3,144 & 0,228 & 0 & 0 & 0 \\ 0,228 & 0,228 & 1,349 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,515 & 0,252 & 0,019 \\ 0 & 0 & 0 & 0,252 & 0,983 & 0,019 \\ 0 & 0 & 0 & 0,019 & 0,019 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (1.4)$$

Takviye eleman $[(0^\circ/45^\circ)_2]_s$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1623 & 361,2 & 91,29 & 0 & 0 & 0 \\ 361,2 & 1257 & 91,29 & 0 & 0 & 0 \\ 91,29 & 91,29 & 539,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 91,76 \times 10^6 & 17,69 \times 10^6 & 3,043 \times 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & 17,69 \times 10^6 & 64,99 \times 10^6 & 3,043 \times 10^6 \\ 0 & 0 & 0 & 3,043 \times 10^6 & 3,043 \times 10^6 & 27,20 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (1.5)$$

K3 konfigürasyonu

Plak $[(0^\circ/45^\circ)_2]$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,057 & 0,903 & 0,228 & -0,163 & 0,049 & 0,057 \\ 0,903 & 3,144 & 0,228 & 0,049 & 0,065 & 0,057 \\ 0,228 & 0,228 & 1,349 & 0,057 & 0,057 & 0,049 \\ -0,163 & 0,049 & 0,057 & 1,352 & 0,301 & 0,076 \\ 0,049 & 0,065 & 0,057 & 0,301 & 1,048 & 0,076 \\ 0,057 & 0,057 & 0,049 & 0,076 & 0,076 & 0,450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (1.6)$$

EK - 1 (Devam) Fiber kompozit plakların ve takviye elemanların rijitlik matrisleri

Takviye eleman $[(0^\circ/45^\circ)_4]$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1623 & 361,2 & 91,29 & 13060 & -3931 & -4564 \\ 361,2 & 1257 & 91,29 & -3931 & -5197 & -4564 \\ 91,29 & 91,29 & 539,4 & -4564 & -4564 & -3931 \\ 13060 & -3931 & -4564 & 86,54 \times 10^6 & 19,26 \times 10^6 & 4,869 \times 10^6 \\ -3931 & -5197 & -4564 & 19,26 \times 10^6 & 67,07 \times 10^6 & 4,869 \times 10^6 \\ -4564 & -4564 & -3931 & 4,869 \times 10^6 & 4,869 \times 10^6 & 28,77 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (1.7)$$

K4 konfigürasyonu

Plak $[(60^\circ/45^\circ/30^\circ/0^\circ)_2]$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 377,9 & 95,21 & 31,17 & 1733 & -307,1 & -176,9 \\ 95,21 & 332,3 & 31,17 & -307,1 & -1119 & -602,5 \\ 31,17 & 31,17 & 139,8 & -176,9 & -602,5 & -307,1 \\ 1733 & -307,1 & -176,9 & 1,266 \times 10^6 & 0,311 \times 10^6 & 0,091 \times 10^6 \\ -307,1 & -1119 & -602,5 & 0,311 \times 10^6 & 1,114 \times 10^6 & 0,102 \times 10^6 \\ -176,9 & -602,5 & -307,1 & 0,091 \times 10^6 & 0,102 \times 10^6 & 0,460 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (1.8)$$

Takviye eleman $[(60^\circ/45^\circ/30^\circ/0^\circ)_2]$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1512 & 380,9 & 124,7 & 27740 & -4914 & -2830 \\ 380,9 & 1329 & 124,7 & -4914 & -17910 & -9640 \\ 124,7 & 124,7 & 559,1 & -2830 & -9640 & -4914 \\ 27740 & -4914 & -2830 & 81,02 \times 10^6 & 19,92 \times 10^6 & 5,854 \times 10^6 \\ -4914 & -17910 & -9640 & 19,92 \times 10^6 & 71,28 \times 10^6 & 6,535 \times 10^6 \\ -2830 & -9640 & -4914 & 5,854 \times 10^6 & 6,535 \times 10^6 & 29,42 \times 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (1.9)$$

Elde edilen bu rijitlik matrisleri incelendiğinde simetrik dizilişlerde eğilme-uzama rijitliklerinin sıfıra eşit olduğu görülmektedir $[B] = 0$. Ancak, antisimetrik dizilişlerde bu terimler sıfırdan farklı olmaktadır.

EK - 2 Özdeğer probleminin çözümleri için ANSYS® programının çalışma prensipleri

Ekte ANSYS® programının özdeğer probleminin çözümleri esnasında kullanılan yöntemler açıklanmıştır.

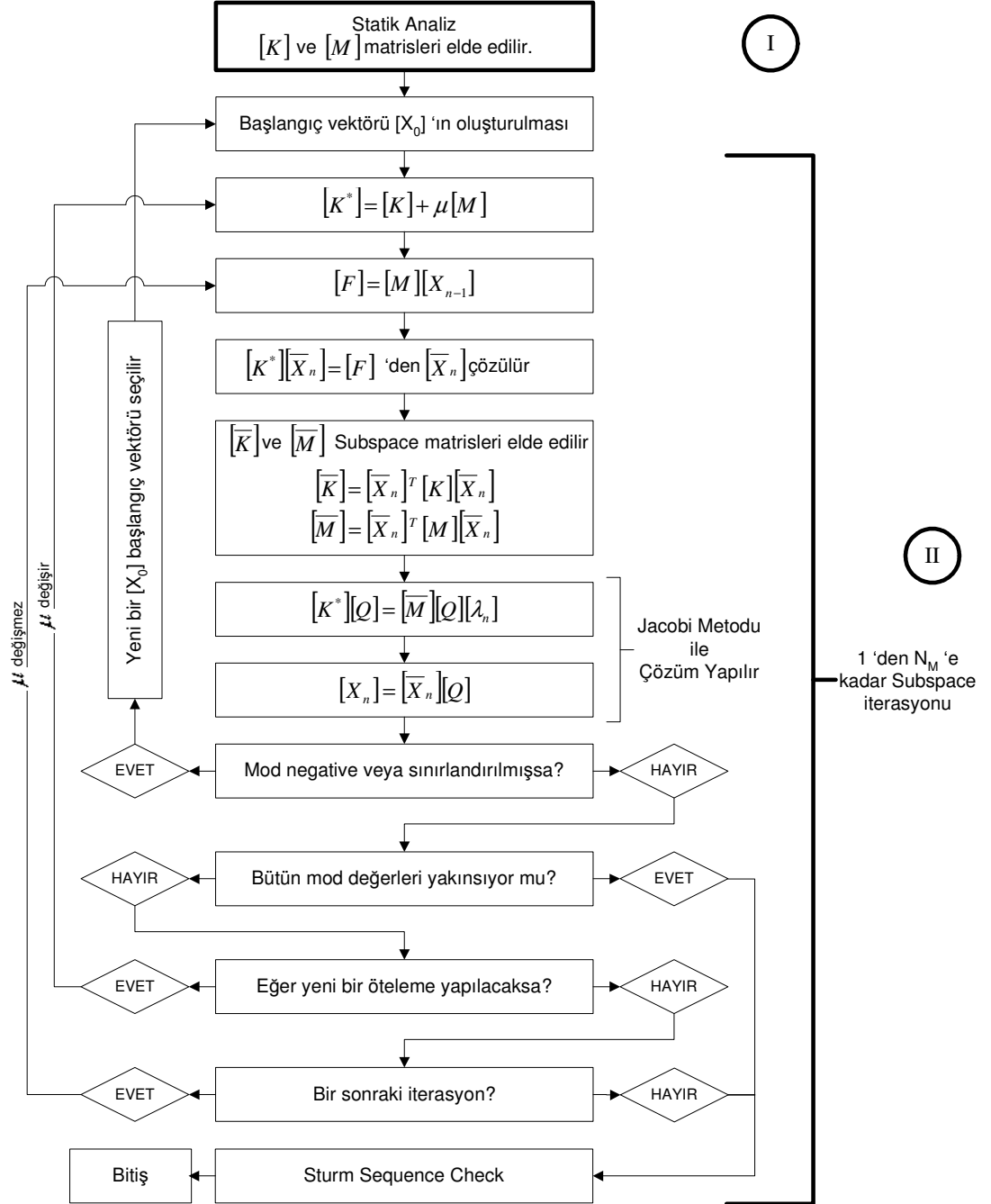
Özdeğer probleminin çözümü

Eş. 2.1'de yer alan özdeğer problemine, statik analiz sonucu elde edilen matrisler kullanılarak çözüm aranmaktadır. Çözüm sonucunda elde edilen özdeğer (λ_i), sisteme ait kritik burkulma gerilmesini verecektir.

$$[K]\{\phi_i\} = \lambda_i [M]\{\phi_i\} \quad (2.1)$$

Burada; $[K]$, $[M]$, $\{\phi_i\}$ ve λ_i , sırasıyla rijitlik matrisini, gerilme matrisini, öz vektörü ve özdeğeri göstermektedir. Bu özdeğer probleminin çözümü, alt bölge metodu kullanılarak yapılmaktadır. Bu metoda ilişkin akış şeması Şekil 2.1'de verilmektedir. Bu akış şemasında gösterilen metotlar sırasıyla anlatılarak konu hakkında bilgi verilecektir.

EK - 2 (Devam) Özdeğer probleminin çözümleri için ANSYS® programının çalışma prensipleri



Şekil 2.1. Özdeğer probleminin çözümünün akış şeması [7, 23]

EK - 2 (Devam) Özdeğer probleminin çözümleri için ANSYS® programının çalışma prensipleri

Başlangıç vektörü

Özdeğer probleminin çözümüne başlamadan önce alt bölge metodunda kullanılacak olan başlangıç vektörünün oluşturulması gerekmektedir. Oluşturulması gereken vektör sayısını Bathe,

$$q = \min \{2p, p + 8\} \quad (2.2)$$

olarak vermiştir [7]. ANSYS® sonlu elemanlar programında ise;

$$q = p + d \quad (2.3)$$

olarak hesaplanmakta ve bu sayıda başlangıç vektörünün oluşturulmaktadır. Burada; p ve d , sırasıyla istenen mod sayısını ve ekstra mod sayısını (varsayılan değeri 4) göstermektedir. Başlangıç vektör sayısının, istenen mod sayısından fazla olmasının nedeni; hesaplamada bazı vektörlerin yakınsamamasıdır. Başlangıç vektörlerinin oluşturulması sırasında statik analiz sonucu elde edilen sistem cevabından da yararlanılmaktadır.

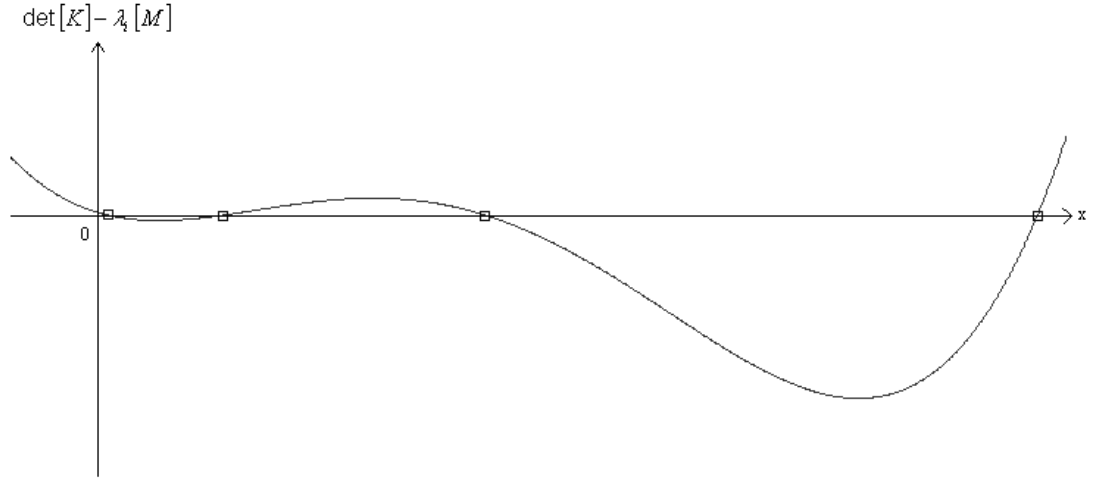
Öteleme

Başlangıç vektörünün oluşturulmasından sonra sistemin özdeğerlerini bulmamızı sağlayacak öteleme işlemine geçilir. Bu işlem her alt bölge iterasyonu sonucunda yapılarak köke yani özdeğere yaklaşmayı sağlar. Öteleme işleminin detayına inmek için Eş. 2.1'deki ifadeyi aşağıdaki gibi düzenleyelim.

$$([K] - \lambda_i [M])\{\phi_i\} = 0 \quad (2.4)$$

EK - 2 (Devam) Özdeğer probleminin çözümleri için ANSYS® programının çalışma prensipleri

ve bu denklemin λ_i köklerini bulmak için denklemin $[K] - \lambda_i [M]$ kısmının determinantını alarak sıfıra eşitleyelim. Sıfıra eşitlenen bu determinantın grafiğini herhangi bir $[K]$ ve $[M]$ matrisleri için çizelim (Bkz. Şekil 2.2).



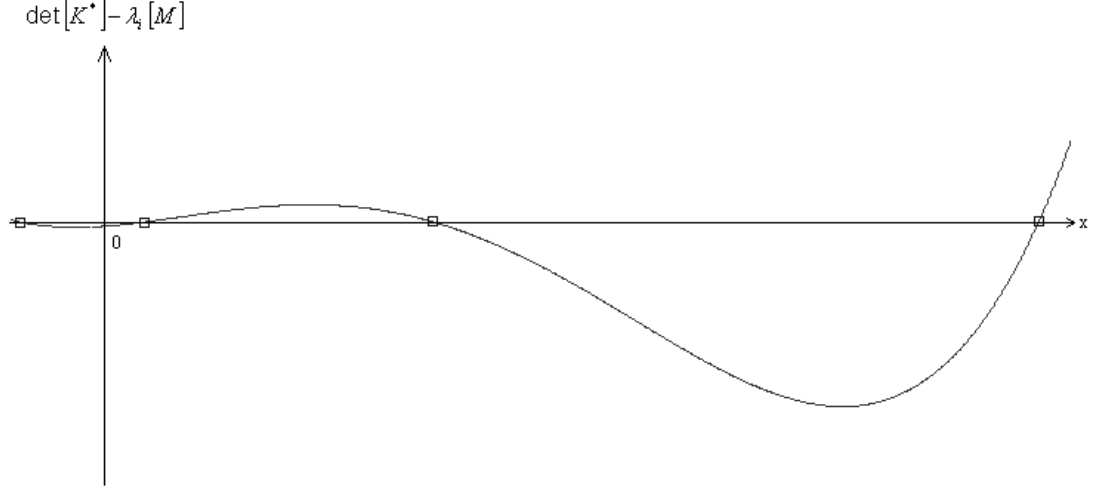
Şekil 2.2. $[K] - \lambda_i [M]$ determinantının grafiği

Y eksenini olan $\det[K] - \lambda_i [M]$ 'yi sağa doğru kaydırmak için Eş. 2.5 kullanılır.

$$[K^*] = [K] + \mu [M] \quad (2.5)$$

Burada, μ eksenini sağ tarafa ne kadar öteleneceğini belirten pozitif bir sayıdır. $[K^*]$ ise, ötelenmiş rijitlik matrisi diye adlandırılır. Ötelenmiş rijitlik matrisi, Eş. 2.4'deki rijitlik matrisi olan $[K]$ 'nın yerine konularak ifadenin determinantı tekrar alınarak grafiği tekrar çizilir (Bkz. Şekil 2.3).

EK - 2 (Devam) Özdeğer probleminin çözümleri için ANSYS® programının çalışma prensipleri



Şekil 2.3. $[K^*] - \lambda_i [M]$ determinantının grafiği

Burada, ötelemenin μ değerine eşit miktarda olduğu bilinmektedir. ANSYS® sonlu elemanlar programı, ötelemenin bu özelliğinden yararlanarak kökün değerini bulur. Bu işlemi yaparken μ 'nün değerini adım adım artırır. Her artırma sonucuna karşılık gelen kök değerlerini alt bölge iterasyon yöntemiyle bulur. μ adım adım artırma sonucunda öyle bir değere ulaşır ki; alt bölge iterasyon sonucunda bulunan köklerden biri sıfıra eşit olur. Bu anda ANSYS® programı y eksenin bir kökün üzerinde olduğunu anlar ve bu kökün değerini μ olarak kayıt eder. Bundan sonra μ değerini kaldığı yerden devam ettirerek bir sonraki köke ulaşmaya çalışır.

Alt bölge iterasyonu

Her bir öteleme sonucunda özdeğer ve öz vektörlere ulaşmak için alt bölge iterasyonu yapılır. Bu iterasyon işlemi şu şekilde gerçekleşmektedir [7].

$n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere;

EK - 2 (Devam) Özdeğer probleminin çözümleri için ANSYS® programının çalışma prensipleri

$$K \bar{X}_{n+1} = M X_n \quad (2.6)$$

Bu ifade Şekil 2.1'de iki kısma ayrılarak ve $[F]$ 'e eşitlenerek ele alınmıştır. Burada X_0 başlangıç vektörü Eş. 2.6'da X_n yerine konularak, $\bar{X}_{n+1}$ ifadesi elde edilir. Elde edilen $\bar{X}_{n+1}$ ifadesi aşağıdaki eşitliklerde yerine konulur.

$$K_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T K_k \bar{X}_{k+1} \quad (2.7)$$

$$M_{k+1} = \bar{X}_{k+1}^T M_k \bar{X}_{k+1} \quad (2.8)$$

Böylece alt bölge matrisleri olan K_{k+1} ve M_{k+1} matrisleri elde edilir. Daha sonra ana problemimiz olan Eş. 2.9'da ele alınır. Burada; Q_{k+1} ve Λ_{k+1} matrisleri için çözüm aranır. Bu çözüm jacobi metodu ile gerçekleştirilir.

$$K_{k+1} Q_{k+1} = M_{k+1} Q_{k+1} \Lambda_{k+1} \quad (2.9)$$

Jacobi metodu ile çözümün sonucunda Q_{k+1} öz vektörleri bulmamızı sağlayacak matris ile Λ_{k+1} özdeğerleri barındıran köşegen matris elde edilir. Q_{k+1} matrisi Eş. 2.10'da yerine konularak öz vektörleri barındıran X_{k+1} matrisi bulunur.

$$X_{k+1} = \bar{X}_{k+1} Q_{k+1} \quad (2.10)$$

Jacobi Metodu

Eş. 2.9'un çözümünde kullanılan jacobi metodunda Eş. 2.11 ve Eş. 2.13'de elde edilen alt bölge matrisleri kullanılır.

EK - 2 (Devam) Özdeğer probleminin çözümleri için ANSYS® programının çalışma prensipleri

$$\bar{k}_{ii}^{(k+1)} = \bar{k}_{ii}^{(k+1)} \bar{m}_{ij}^{(k+1)} - \bar{m}_{ii}^{(k+1)} \bar{k}_{ij}^{(k+1)} \quad (2.11)$$

$$\bar{k}_{jj}^{(k+1)} = \bar{k}_{jj}^{(k+1)} \bar{m}_{ij}^{(k+1)} - \bar{m}_{jj}^{(k+1)} \bar{k}_{ij}^{(k+1)} \quad (2.12)$$

$$\bar{k}^{(k+1)} = \bar{k}_{ii}^{(k+1)} \bar{m}_{jj}^{(k+1)} - \bar{k}_{jj}^{(k+1)} \bar{m}_{ii}^{(k+1)} \quad (2.13)$$

Burada; $\bar{k}_{ij}^{(k+1)}$, K_{k+1} matrisinin i 'nci satırı ve j 'nci kolonunu ve $\bar{m}_{ij}^{(k+1)}$ ise; M_{k+1} matrisinin i 'nci satırı ve j 'nci kolonunu gösterir. Buna göre;

$$x = \frac{\bar{k}^{(k+1)}}{2} + \text{sign}(\bar{k}^{(k+1)}) \sqrt{\left(\frac{\bar{k}^{(k+1)}}{2}\right)^2 + \bar{k}_{ii}^{(k+1)} \bar{k}_{jj}^{(k+1)}} \quad (2.14)$$

Burada sign (x) fonksiyonu bir parçalı fonksiyon olup;

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ +1 & , x > 0 \end{cases}$$

şeklindeir. Eş. 2.11, Eş. 2.12 ve Eş. 2.14'den yararlanarak;

$$\gamma = -\frac{\bar{k}_{ii}^{(k+1)}}{x} \quad (2.15)$$

$$\alpha = \frac{\bar{k}_{jj}^{(k+1)}}{x} \quad (2.16)$$

ifadelerini elde ederiz. P_i matrisini Eş. 2.15 ve Eş. 2.16'da elde edilen γ ve α ile oluşturulur.

EK - 2 (Devam) Özdeğer probleminin çözümleri için ANSYS® programının çalışma prensipleri

$$P_i = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \gamma & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

P_i matrisini bulduktan sonra Eş. 2.18 ve Eş. 2.19'da yerine yazılır.

$$P_i^T K_{k+1} P_i = K_r \quad (2.18)$$

$$P_i^T M_{k+1} P_i = M_r \quad (2.19)$$

Bu ifadeler Eş. 2.20 ve Eş. 2.21'de yazılarak özdeğerlerin bulunduğu köşegen Λ matrisi ve Eş. 2.10'da öz vektörlerin bulunmasında kullanılan köşegen Q matrisi elde edilir.

$$\Lambda = \text{diag} \left(\frac{K_r}{M_r} \right) \quad (2.20)$$

$$Q = P_1 P_2 \dots P_l \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{M_r}} \right) \quad (2.21)$$

Yakınsamanın ölçülmesi ve sturm sequence kontrolü

Yapılan çözümlerin sonucunda bulunan özdeğerin ne kadar yakınsadığı Eş. 2.22 ile ölçülür. Eğer yakınsamanın değeri bizim belirleyeceğimiz tolerans dışında ise iterasyon işlemi devam eder.

$$e_i = \frac{(\lambda_i)_n - (\lambda_i)_{n-1}}{B} < tol \quad (2.22)$$

EK - 2 (Devam) Özdeğer probleminin çözümleri için ANSYS® programının çalışma prensipleri

Burada; $(\lambda_i)_n$, n 'inci iterasyonda hesaplanan özdeğeri, $(\lambda_i)_{n-1}$, n-1 'inci iterasyonda hesaplanan özdeğeri gösterir. Ayrıca; $B = \begin{Bmatrix} 1,0 \\ (\lambda_i)_n \end{Bmatrix}$ hangisi büyük ise o seçilerek kullanır ve $\text{tol} = 1,0 \text{ E-5}$ olarak verilir.

İstenen yakınsama elde edildikten sonra özdeğer ve öz vektörlerin kontrolü için sturm sequence yöntemi kullanılır. Bu yöntem için bulduğumuz en büyük özdeğerin sağ tarafında yer alan yani elde edilen en büyük özdeğerden daha büyük bir öteleme değeri seçilir. Bu katsayı aşağıdaki eşitlikte yerine konulur.

$$\bar{K} = K - \mu M \quad (2.23)$$

Daha sonra $\bar{K}$ değeri Eş. 2.24'de yerine konularak D gauss faktörü elde edilir.

$$\bar{K} = L D L^T \quad (2.24)$$

Elde edilen $[D]$ matrisindeki negatif elemanların sayısı, seçtiğimiz öteleme katsayısından küçük olan özdeğerlerin sayısına eşit olmalıdır.

EK - 3 Lineer olmayan analiz için ANSYS® programının çalışma prensipleri

ANSYS® sonlu eleman programı, geometrisi doğrusal olmayan sistemlerin çözümünde Newton-Raphson ve Arc-Length yöntemlerini kullanır.

Newton-Raphson Metodu

Sonlu elemanlar yöntemi ile yapılan lineer olmayan analizlerde, Newton-Raphson metodu kullanılır. Bu metotta, plak üzerine uygulanan kuvvet $\{F_{i+1}^a\}$ ile elemanlar üzerindeki gerilmeyi oluşturan iç kuvvet $\{F_{i+1}^{nr}\}$ arasındaki fark bulunur (Eş. 3.1), bu fark denge dışında kalan yük vektörüdür.

$$\{F_{i+1}^a\} - \{F_{i+1}^{nr}\} = R \quad (3.1)$$

Burada; $\{F_{i+1}^a\} = \{F_i^a\} + \{\Delta F^a\}$, plak üzerine uygulanan kuvvet vektörünü ($\{\Delta F^a\}$: uygulanan yük artış vektörü) ve $\{F_{i+1}^{nr}\} = \{F_i^{nr}\} + \{\Delta F^{nr}\}$ ise; plak elemanları üzerindeki gerilmeyi oluşturan iç kuvvet vektörünü ($\{\Delta F^{nr}\}$: iç kuvvet artış vektörü) vermektedir.

Bir önceki adımda yakınsadığını varsaydığımız $\{u_i\}$ yer değiştirme vektörü ile rijitlik matrisi $[K_B]$ çarpımından plak üzerine uygulanan kuvvet vektörünü $\{F_i^a\}$ buluruz. Aynı yer değiştirme vektörü $\{u_i\}$ ile gerilme matrisi $[K_G]$ çarpılarak da iç kuvvet vektörü $\{F_i^{nr}\}$ hesaplanır.

Yük - yer değiştirme eğrisinde bir sonraki noktayı bulabilmek için; plak üzerine uygulanan kuvvet vektörüne $\{F_i^a\}$, $\{\Delta F^a\}$ kadar bir yük artışı eklenir. Elde edilen bu yeni yükleme değeri ile gerilme matrisinin tersi $[K_G]^{-1}$ çarpılarak, yer değiştirme vektörü $\{u_{i+1}\}$ hesaplanır.

EK - 3 (Devam) Lineer olmayan analiz için ANSYS® programının çalışma prensipleri

Bu yer değiştirme vektörü ile rijitlik matrisinin tersi $[K_B]^{-1}$ çarpılarak, $\{F_{i+1}^{nr}\}$ bulunur. Eş. 3.2'den de $\{\Delta u_i\}$ yer değiştirme artışı hesaplanır.

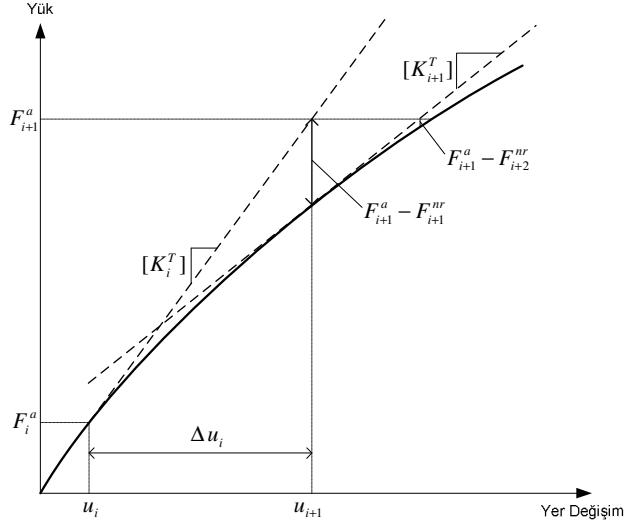
$$\{\Delta u_i\} = \{u_{i+1}\} - \{u_i\} \quad (3.2)$$

Bundan sonra denge dışında kalan yük vektörü ve tanjant matrisi Eş 3.3'deki denklemde yerine konularak, denklemdeki eşitliğin sağlanıp sağlanmadığına bakılır. Eğer konulan yakınsama koşulu sağlanmadıysa, denge dışı kalan kuvvet tekrar hesaplanır, tanjant matrisi bu sonuca göre güncellenir ve yeni bir çözüm yapılır. Çözüm yakınsayana kadar bu işlem devam eder.

$$[K_i^T] \{\Delta u_i\} = \{F_{i+1}^a\} - \{F_{i+1}^{nr}\} \quad (3.3)$$

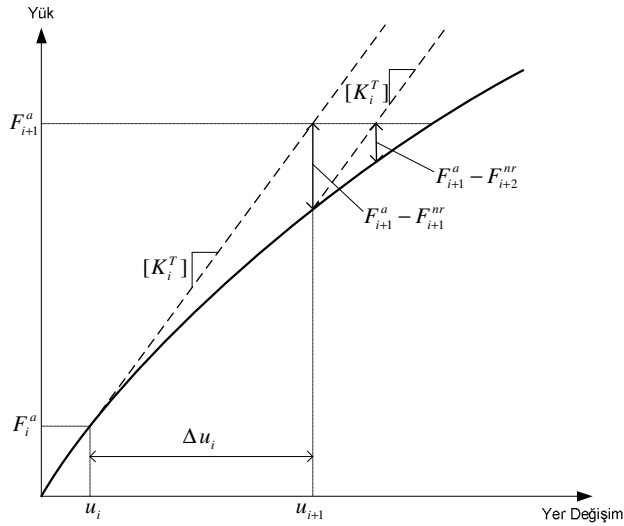
Burada; $[K_i^T]$ tanjant matrisi olup, rijitlik matrisi ve gerilme matrisinin toplamına eşittir. Her iterasyondan sonra, tanjant matrisi tekrar hesaplanarak güncellenebilir. Eğer güncelleme yapılacaksa, sonlu eleman modelinde meydana gelen deformasyonlar her seferinde hesaba katılır.

EK - 3 (Devam) Lineer olmayan analiz için ANSYS® programının çalışma prensipleri



Şekil 3.1. Tanjant matrisi güncellenen Newton-Raphson iterasyonu [7]

Her adımda güncellenen tanjant matrisine göre yapılan iterasyon, Şekil 3.1'de görülmektedir. Güncellenmeyen tanjant matrisine göre yapılan iterasyon da Şekil 3.2'de verilmiştir.



Şekil 3.2. Tanjant matrisi güncellenmeyen Newton-Raphson iterasyonu [7]

EK - 3 (Devam) Lineer olmayan analiz için ANSYS® programının çalışma prensipleri

$\{F_{i+1}^a\} - \{F_{i+1}^{nr}\}$ değeri, sıfıra yaklaşma oranına bağlı olarak sistemin yakınsaması ölçülür. Yakınsama istenen değere ulaştığında, yeni bir yük değeri için bu işlemler tekrar edilir.

Newton-Raphson metodu, rijitliğin sıfır veya eksi işaretli olan sistemlerde yetersiz kalmaktadır. Yay uzunluk metodu, bu gibi durumlarda da çözüm üretebilmektedir.

Yay uzunluk metodu

Yay uzunluk metodunda, yapıların sıfır ve/veya eksi rijitlik gösterdiği hallerde de analizleri yapılabilir. Bu metotta, Newton Raphson metoduna ilave olarak λ şeklinde bir sabit gelir.

$$[K_i^T] \{\Delta u_i\} = \lambda \{F^a\} - \{F_i^{nr}\} \quad (3.4)$$

Bu sabit $-1,0 \leq \lambda \leq 1,0$ arasında bir değerdir. n adım sayısını, i ise; iterasyon sayısını göstermektedir. Bu λ ifadesi Eş. 3.5'te açık şekli verilmektedir.

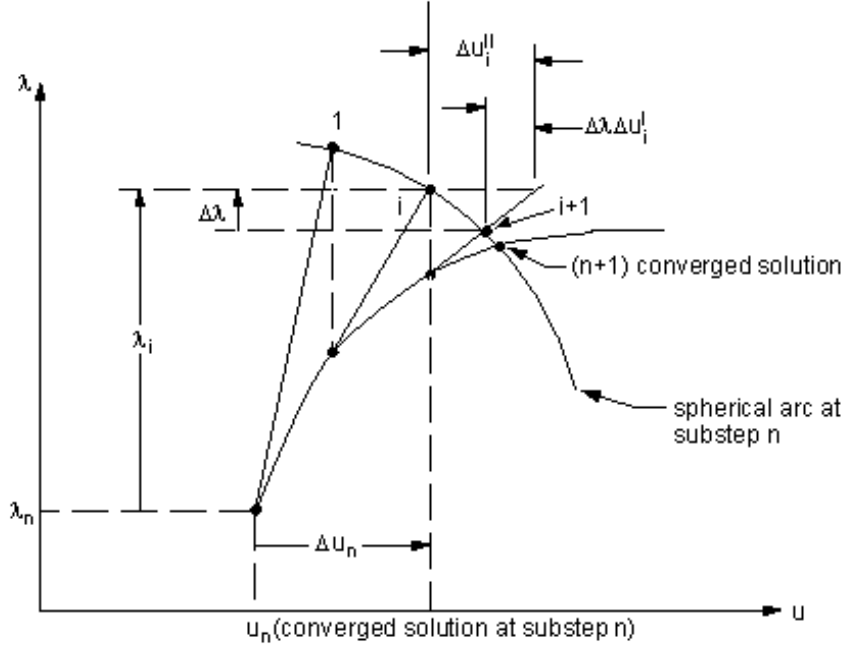
$$\lambda_{i+1} = \lambda_n + \lambda_i + \Delta\lambda \quad (3.5)$$

Eş. 3.4'teki ifade tekrar düzenlersek, aşağıda verilen Eş. 3.6 elde edilir.

$$[K_i^T] \{\Delta u_i\} - \Delta\lambda \{F^a\} = (\lambda_n + \lambda_i) \{F^a\} - \{F_i^{nr}\} = -\{R_i\} \quad (3.6)$$

Burada; $\Delta\lambda$ ve $\{\Delta u_i\}$ sırasıyla yük artış faktörünü ve yerdeğiştirim artışını göstermektedir.

EK - 3 (Devam) Lineer olmayan analiz için ANSYS® programının çalışma prensipleri



Şekil 3.3. Yay uzunluk metodu ile Newton-Raphson iterasyonu [23]

yer değişim artışı $\{\Delta u_i\}$, iki parça olarak tanımlanır.

$$\{\Delta u_i\} = \Delta \lambda \{\Delta u_i^I\} + \{\Delta u_i^{II}\} \quad (3.7)$$

Burada; $\{\Delta u_i^I\} = [K_i^T]^{-1} \{F^a\}$, bir birim yükleme sonucunda yer değiştirme faktörünü verirken, $\{\Delta u_i^{II}\} = -[K_i^T]^{-1} \{R_i\}$ ise; newton raphsondan gelen yerdeğiştirme artışını ifade eder. Her iterasyonda ihtiyaç duyulan $\{\Delta u_i^I\}$ ve $\{\Delta u_i^{II}\}$ bu formüller ile hesaplanır. Yay uzunluğu ise Eş. 3.8'den hesaplanır.

$$l_i^2 = \lambda_i^2 + \beta \{\Delta u_n\}^T \{\Delta u_n\} \quad (3.8)$$

EK - 3 (Devam) Lineer olmayan analiz için ANSYS® programının çalışma prensipleri

Burada; β ve $\{\Delta u_n\}$ sırasıyla büyüklük faktörünü ve bu iterasyondaki tüm yer değişim artışlarının toplamını göstermektedir. Arc- length'in yarıçapı l_i iterasyon sırasında değişken olup, ilk iterasyondaki yarıçap l_1 'dir.

$$l_i = l_{i-1} = \dots = l_1 \quad (3.9)$$

$\Delta\lambda$ yük artış faktörünü yaklaşık hesaplamamanın bir çok yolu vardır. Bunlardan biri Eş. 3.10'da verilen açık küresel iterasyon metodu ile dikliğin sağlaması kullanılabilir. İlk hesaplama sırasında r_i gibi bir skaler kalıntı gerekir.

$$\Delta\lambda = \frac{r_i - \{\Delta u_n\}^T \{\Delta u_i''\}}{\beta^2 \lambda_i + \{\Delta u_n\}^T \{\Delta u_i'\}} \quad (3.10)$$

Sonunda, çözüm vektörleri aşağıdaki gibi güncellenir.

$$\{u_{i+1}\} = \{u_n\} + \{\Delta u_n\} + \{\Delta u_i\} \quad (3.11)$$

$$\lambda_{i+1} = \lambda_n + \lambda_i + \Delta\lambda \quad (3.12)$$

Burada, n adım sayısı olmak üzere, Eş. 3.11 ve Eş. 3.12'de güncellenen bu ifadeler yerine konularak Newton-Raphson'da olduğu gibi yakınsama ölçülür. Uygun yakınsama değerine kadar bu işlem tekrar edilir.

EK - 4 Lineer olmayan analiz sonuçlarından bazıları

Çizelge 4.1. 200x200x2 boyutlu çelik plakların lineer olmayan analiz sonuçları (200x200x2-izo)

$\varepsilon / \varepsilon_{kr}$	σ / σ_{kr}	$\delta_{\max} / t$	$\sigma (kgf / cm^2)$	$u (cm)$	$\delta_{\max} (cm)$
0,05	0,05	0,01	37,13	0,00	0,01
0,14	0,14	0,02	109,31	0,01	0,03
0,28	0,28	0,04	208,72	0,02	0,07
0,44	0,43	0,07	329,13	0,03	0,15
0,61	0,60	0,14	452,83	0,04	0,27
0,78	0,75	0,24	566,79	0,06	0,48
0,97	0,89	0,41	677,40	0,07	0,82
1,17	1,03	0,60	777,65	0,09	1,19
1,41	1,16	0,78	877,95	0,10	1,57
1,67	1,30	0,97	986,95	0,12	1,94
1,98	1,46	1,15	1107,61	0,14	2,30
2,32	1,64	1,32	1240,88	0,17	2,65
2,71	1,83	1,50	1386,85	0,20	2,99
2,88	1,92	1,57	1452,68	0,21	3,14
2,97	1,96	1,60	1484,74	0,22	3,20
3,05	2,00	1,64	1516,55	0,22	3,27

Çizelge 4.2. 200x200x2 boyutlu ve tek takviye elemanla desteklenmiş çelik plakların lineer olmayan analiz sonuçları (200x200x2-1R-izo)

$\varepsilon / \varepsilon_{kr}$	σ / σ_{kr}	$\delta_{\max} / t$	$\sigma (kgf / cm^2)$	$u (cm)$	$\delta_{\max} (cm)$
0,05	0,05	0,00	76,21	0,01	0,01
0,15	0,15	0,01	228,75	0,02	0,02
0,33	0,33	0,03	510,65	0,05	0,06
0,61	0,59	0,10	913,82	0,09	0,20
0,79	0,74	0,19	1138,04	0,12	0,37
1,01	0,88	0,34	1356,39	0,15	0,68
1,17	0,96	0,46	1482,56	0,17	0,91
1,45	1,08	0,64	1668,49	0,21	1,28
1,93	1,26	0,89	1936,07	0,29	1,79
2,50	1,44	1,13	2220,81	0,37	2,26
3,18	1,64	1,36	2528,71	0,47	2,72
3,94	1,86	1,58	2863,03	0,58	3,16
4,21	1,93	1,65	2975,10	0,62	3,30
4,34	1,96	1,68	3030,16	0,64	3,37
4,47	2,00	1,72	3084,98	0,66	3,43

EK - 4 (Devam) Lineer olmayan analiz sonuçlarından bazıları

Çizelge 4.3. 200x200x2 boyutlu ve iki takviye elemanla desteklenmiş çelik plakların lineer olmayan analiz sonuçları
(200x200x2-2R-izo)

$\varepsilon / \varepsilon_{kr}$	σ / σ_{kr}	$\delta_{\max} / t$	$\sigma (kgf / cm^2)$	$u (cm)$	$\delta_{\max} (cm)$
0,05	0,05	-0,01	136,28	0,01	-0,02
0,15	0,15	-0,03	412,84	0,04	-0,06
0,35	0,34	-0,09	944,68	0,09	-0,17
0,60	0,58	-0,20	1606,47	0,16	-0,41
0,69	0,67	-0,27	1835,98	0,18	-0,54
0,75	0,72	-0,32	1982,31	0,20	-0,64
0,84	0,79	-0,40	2166,87	0,22	-0,81
0,96	0,87	-0,53	2386,84	0,25	-1,06
1,05	0,92	-0,63	2528,29	0,27	-1,26
1,19	0,99	-0,78	2726,55	0,31	-1,56
1,45	1,10	-1,01	3018,78	0,38	-2,03
1,95	1,27	-1,37	3482,43	0,51	-2,74
2,24	1,35	-1,54	3721,60	0,59	-3,09
2,56	1,44	-1,71	3968,27	0,67	-3,42
2,72	1,49	-1,80	4094,77	0,71	-3,59
2,86	1,53	-1,86	4197,63	0,75	-3,72
3,09	1,59	-1,97	4365,35	0,81	-3,93
3,28	1,64	-2,05	4502,39	0,86	-4,10
3,32	1,65	-2,07	4530,12	0,87	-4,13
3,36	1,66	-2,08	4554,65	0,88	-4,16
3,42	1,67	-2,11	4598,23	0,89	-4,21
3,48	1,69	-2,13	4642,03	0,91	-4,26
3,55	1,71	-2,16	4688,01	0,93	-4,32
3,61	1,72	-2,18	4734,27	0,95	-4,37
3,73	1,75	-2,23	4816,62	0,98	-4,46
3,79	1,77	-2,25	4858,09	0,99	-4,51
3,82	1,78	-2,27	4878,90	1,00	-4,53

Çizelge 4.4. 200x200x2 boyutlu ve üç takviye elemanla desteklenmiş çelik plakların lineer olmayan analiz sonuçları
(200x200x2-3R-izo)

$\varepsilon / \varepsilon_{kr}$	σ / σ_{kr}	$\delta_{\max} / t$	$\sigma (kgf / cm^2)$	$u (cm)$	$\delta_{\max} (cm)$
0,05	0,05	-0,01	173,62	0,02	-0,02
0,15	0,15	-0,03	530,35	0,05	-0,07
0,36	0,36	-0,09	1242,62	0,12	-0,19
0,51	0,51	-0,15	1762,74	0,17	-0,30
0,72	0,69	-0,25	2422,52	0,24	-0,51
0,86	0,81	-0,36	2833,05	0,28	-0,72
0,95	0,87	-0,44	3039,22	0,31	-0,88
1,09	0,95	-0,56	3297,60	0,36	-1,12
1,32	1,05	-0,76	3650,05	0,44	-1,52

EK - 4 (Devam) Lineer olmayan analiz sonuçlarından bazıları

Çizelge 4.4. (Devam) 200x200x2 boyutlu ve üç takviye elemanla desteklenmiş çelik plakların lineer olmayan analiz sonuçları (200x200x2-3R-izo)

$\varepsilon / \varepsilon_{kr}$	σ / σ_{kr}	$\delta_{\max} / t$	$\sigma (kgf / cm^2)$	$u (cm)$	$\delta_{\max} (cm)$
1,53	1,12	-0,92	3920,70	0,51	-1,84
1,72	1,19	-1,05	4137,40	0,57	-2,10
2,06	1,29	-1,26	4486,74	0,68	-2,51
2,43	1,39	-1,46	4839,07	0,81	-2,91
2,64	1,44	-1,55	5016,30	0,87	-3,11
2,80	1,48	-1,63	5158,70	0,93	-3,26
3,08	1,54	-1,75	5387,80	1,02	-3,51
3,38	1,61	-1,87	5618,70	1,12	-3,75
3,53	1,64	-1,93	5734,90	1,17	-3,87
3,65	1,67	-1,98	5828,25	1,21	-3,96
3,76	1,69	-2,02	5903,20	1,24	-4,03
3,84	1,71	-2,05	5963,30	1,27	-4,09
3,92	1,73	-2,08	6023,55	1,30	-4,15
4,00	1,74	-2,11	6083,95	1,32	-4,21
4,05	1,75	-2,12	6114,20	1,34	-4,24

Çizelge 4.5. 200x200x2 boyutlu Bor-Al (K1) plakların lineer olmayan analiz sonuçları (200x200x2-K1)

$\varepsilon / \varepsilon_{kr}$	σ / σ_{kr}	$\delta_{\max} / t$	$\sigma (kgf / cm^2)$	$u (cm)$	$\delta_{\max} (cm)$
0,05	0,05	0,05	22,70	0,01	0,09
0,17	0,16	0,16	74,05	0,03	0,33
0,46	0,40	0,46	185,40	0,08	0,93
0,99	0,77	0,95	355,32	0,16	1,90
2,66	1,74	1,98	804,12	0,44	3,96
3,17	2,00	2,21	926,09	0,52	4,42

Çizelge 4.6. 200x200x2 boyutlu ve tek takviye elemanla desteklenmiş Bor-Al (K1) plakların lineer olmayan analiz sonuçları (200x200x2-1R-K1)

$\varepsilon / \varepsilon_{kr}$	σ / σ_{kr}	$\delta_{\max} / t$	$\sigma (kgf / cm^2)$	$u (cm)$	$\delta_{\max} (cm)$
0,05	0,05	0,02	38,68	0,01	0,04
0,17	0,16	0,06	126,44	0,04	0,13
0,44	0,40	0,19	310,32	0,10	0,38
0,85	0,69	0,44	545,11	0,20	0,88
1,57	1,07	0,92	843,43	0,37	1,83
2,99	1,65	1,67	1293,18	0,71	3,34
4,02	2,01	2,09	1580,68	0,95	4,19

EK - 4 (Devam) Lineer olmayan analiz sonuçlarından bazıları

Çizelge 4.7. 200x200x2 boyutlu ve iki takviye elemanla desteklenmiş Bor-Al (K1) plakların lineer olmayan analiz sonuçları (200x200x2-2R-K1)

$\varepsilon / \varepsilon_{kr}$	σ / σ_{kr}	$\delta_{\max} / t$	$\sigma (kgf / cm^2)$	$u (cm)$	$\delta_{\max} (cm)$
0,05	0,05	0,02	65,15	0,02	0,04
0,17	0,16	0,08	212,29	0,06	0,16
0,35	0,32	0,18	421,96	0,13	0,36
0,63	0,53	0,38	700,75	0,24	0,77
1,13	0,80	0,76	1058,68	0,43	1,53
2,16	1,19	1,37	1574,88	0,82	2,74
4,45	1,80	2,11	2386,76	1,68	4,22
5,34	1,99	2,29	2639,41	2,02	4,58
5,37	2,00	2,30	2648,44	2,03	4,59

Çizelge 4.8. 200x200x2 boyutlu ve üç takviye elemanla desteklenmiş Bor-Al (K1) plakların lineer olmayan analiz sonuçları (200x200x2-3R-K1)

$\varepsilon / \varepsilon_{kr}$	σ / σ_{kr}	$\delta_{\max} / t$	$\sigma (kgf / cm^2)$	$u (cm)$	$\delta_{\max} (cm)$
0,05	0,05	0,01	83,40	0,02	0,02
0,17	0,16	0,02	271,49	0,08	0,05
0,35	0,32	0,04	539,61	0,17	0,09
0,65	0,53	0,05	901,77	0,32	0,10
1,20	0,82	-0,03	1392,75	0,58	-0,07
2,30	1,24	-0,49	2095,73	1,12	-0,99
4,19	1,76	-1,60	2977,37	2,04	-3,21
5,21	1,99	-2,14	3374,35	2,54	-4,29
5,26	2,00	-2,17	3391,41	2,56	-4,33
5,26	2,00	-2,17	3391,84	2,56	-4,33

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : YILDIZ, Yunus Onur
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 22.07.1981 ANKARA
Medeni hali : Bekar
Telefon : -
GSM : 0 (505) 335 54 38
e-mail : yunusonur@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Erciyes Üniv. / Mak. Müh. Böl.	2004
Lise	Etlik Lisesi	1999

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2006 - ..	Alize Yapı Denetim Ltd. Şti.	Makine Müh.
2005	Star Asansör Yürüyen Merd. İnş.Taah.Tic. ve San.Ltd.Şti.	Kalite Müdürü

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Yıldız, Y. O. ve Günay, E. "Eksenel Yükleme Altında Kiriş Destekli Kompozit Plakların Sey İle Burkulma Analizi", *I. Ulusal Havacılık ve Uzay Konferansı*, UHUK-2006-037, Ankara, Eylül 14-16, (2006).

Hobiler

Bilgisayar teknolojileri, Yüzme, Fotoğrafçılık.