

T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TOPOLOJİ BİLİM DALI

DEVİRLİ BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ

Seher KÖSE

Danışman
Doç. Dr. Simge ÖZTUNÇ



MANİSA-2024

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Seher KÖSE



İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
TEŞEKKÜR	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.0.1. Temel Tanım ve Teoremler	3
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER	6
3.0.1. Kutu (Box) Metrik İle İlgili Genel Kavramlar	6
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	9
4.0.1. Banach Devirli Büzülme Dönüşümü	9
4.0.2. Kannan Tipi Devirli Büzülme Dönüşümü	12
4.0.3. ϕ - Tip Orbital Meir-Keeler Devirli Büzülme Dönüşümü	18
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	31
KAYNAKLAR	32
ÖZGEÇMİŞ	34

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$dist(E, F)$	E ile F arasındaki uzaklık
S_b	Büzölme dönüşümü
$\tilde{m}$	Kutu (box) metrik fonksiyonu
$\{(e_n, t_n)\}$	Kutu (box) metrik uzayda dizi
R	Meir-Keeler tipi uzaklık dönüşümü
(X, d)	Metrik uzay
Φ	Orbital dönüşümlerin kümesi

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında bilgileri ve tecrübeleri ile yoluma ışık tutan, ilgilerini ve desteklerini her zaman hissettiğim, öğrencisi olmaktan ve kendileriyle çalışmaktan büyük onur ve mutluluk duyduğum değerli hocalarım Prof. Dr. Ali MUTLU, Prof. Dr. Cihangir ALACA ve danışmanım Doç. Dr. Simge ÖZTUNÇ’a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca yüksek lisansa başlamama vesile olan, hayatımın her anında sevgisini ve desteğini hissettiğim kıymetli hocam Hasan BARBOROS’a, sevgili dostlarım Gül Nur DEMİRCİ ve Berna KAYMAK’a, bugünlere gelmemde en büyük paya sahip olan başta annem, babam ve kardeşim olmak üzere tüm aileme ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Seher KÖSE
Manisa, 2024

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Devirli Büzülme Dönüşümleri

Seher KÖSE

Manisa Celal Bayar Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Simge ÖZTUNÇ

Bu tez çalışmasında bir metrik kullanılarak tanımlanmış kutu (box) metrik uzay göz önüne alınmıştır. Kutu (box) metrik uzaylar için büzülme dönüşümü ve devirli büzülme dönüşümleri tanımlanarak, Banach büzülme prensibi kutu (box) metrik uzaylarda devirli büzölmeler için ispat edilmiştir. Daha sonra Kannan tipi devirli büzölme dönüşümü tanımlanmış ve çeşitli sabit nokta teoremleri ispat edilmiştir. Son olarak ϕ - tip orbital Meir-Keeler devirli büzölme dönüşümleri göz önüne alınarak bazı sabit nokta sonuçları elde edilmiş ve uygulama niteliğinde bir örnek sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Kutu (box) Metrik, Büzölme Dönüşümü, Devirli Büzölme Dönüşümü.

2024, 42 sayfa

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

Cyclic Contraction Mappings

Seher KÖSE

Manisa Celal Bayar University

The Graduate School

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Simge ÖZTUNÇ

In this thesis study, a box metric space defined by using a metric is considered. By defining the contraction mapping and cyclic contraction mapping for box metric spaces, Banach Contraction Principle is proven for cyclic contractions in box metric spaces. Then Kannan type cyclic contraction mapping is defined and various fixed point theorems are proven. Finally some fixed point results are obtained by considering ϕ – type orbital Meir Keeler cyclic contraction mappings and example is presented as an application.

Keywords: Box Metric, Contraction Mapping, Cyclic Contraction Mapping.

2024, 42 pages

1. GİRİŞ

Matematiğin ve topolojinin temel konularından birisi sabit nokta teorisidir. Sabit nokta teorisinin en önemli teoremlerinden birisi Banach [1] tarafından ispatlanan Banach sabit nokta teoremidir. Bahsedilen teoremin bu kadar önemli olmasının sebebi çok fazla uygulama alanına sahip olmasıdır. Bu sebeple uzun yıllardır Banach sabit nokta teoreminin farklı yönlerden genelleştirmeleri yapılmaktadır. Yapılan bu genelleştirmeler, temelinde, teoremdeki dönüşümün büzülme şartlarını zayıflatmayı hedeflemektedir.

Banach sabit nokta teoreminde kullanılan büzülme dönüşümünün tanım gereği sürekli olması gerekmektedir. Bu sebeple bilim insanları, süreklilik şartının olmadığı özel büzülme dönüşümlerinin tanımlanmasının ve tanımlanan bu büzülme dönüşümlerinin sabit noktalarının varlığının ve tekliğinin ispatlanmasının mümkünlüğü konusunda çalışmalar yapmışlardır.

2003 yılında Kirk ve arkadaşları [2] bu araştırmalara cevap olacak nitelikte bir çalışma yaparak devirli büzülme dönüşümlerini tanımlamış ve tam metrik uzaylar üzerinde tanımlanan devirli büzülme dönüşümünün sabit noktasının varlığını ve tekliğini ispatlamıştır. Karapınar ve Erhan [3] 2012 yılında devirli büzölmeler ile ilgili farklı çalışmalar yapmışlardır. Bununla birlikte, devirli büzölme dönüşümlerinin periyodik noktaları hakkındaki çalışmaları Petruşel [4] tarafından 2005 yılında yapılmıştır. 2010 yılında ise Pacurar ve Rus [5], metrik uzaylarda tanımlanan devirli ϕ - büzölme dönüşümleri için bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamışlardır. Daha sonra, metrik uzaylarda devirli zayıf ϕ - büzölme dönüşümlerinin sabit noktasının var ve tek olduğunu Karapınar [6], 2011 yılında göstermiştir. Ayrıca, S. Karpagam ve S. Agarwal [7], S. Rezapour, M. Derafshpour ve N. Shahzad [8]- [9], G. Sankara Raju Kosuru ve P. Veeramani [10] devirli büzölme dönüşümlerinin en iyi yaklaşım noktası ile ilgili önemli çalışmalar yapan yazarlardır. Bununla birlikte Karapınar ve Erhan [11] farklı tip büzölme dönüşümlerinin en iyi yaklaşım noktası ilgili çalışma yapmış ve Kannan tipi devirli zayıf ϕ tipi büzölmelerin en iyi yaklaşım noktası ile ilgili çalışmaları yine Karapınar [12] yapmıştır. Devirli büzölmeler ile

ilgili farklı özellikler Karapınar, Petruşel, Taş [13], Kumari, Panti [14], Rus [15], Balpetek [16] tarafından yayımlanan çalışmalarda görülebilir. Ayrıca en iyi yaklaşım noktası ile ilgili ayrıntılar Al- Thafai [17], Aydi [18], Samet [19] tarafından yayımlanan çalışmalarda incelenebilir.

Diğer taraftan Kannan tipi büzülme dönüşümleri [20], [21], [22] ve Meir-Keeler tipi büzülme dönüşümleri [23], [24] sabit nokta alanında çalışanlar için yeni sabit nokta sonuçları elde etmeye yönelik farklı bir araç olarak görülmüş, bu büzülmeler ile ilgili çalışmalar da hızlı bir şekilde devam etmiştir. Literatürde yer alan bu çalışmaların yanında Ciric [25] tarafından verilen büzülme dönüşümlerinin özelliklerini içeren çalışma ve Granas, Dugundji [26], Rus, A. Petruşel, G. Petruşel [27] tarafından yazılan sabit nokta teorisi ile ilgili kitaplar araştırmacılara ışık tutmaktadır.

E. Deza ve M. Deza [29] tarafından yazılan metriklerle ilgili ansiklopedi niteliğinde olan kaynaktan karşılaştığımız kutu (box) metrik bir veri noktası kümesindeki elemanların uzaklıklarını ölçen bir metriktir. Bu metrik, elemanları içeren en küçük dikdörtgen kutunun boyutlarını kullanarak hesaplanır. Özellikle çok boyutlu veri kümelerinin analizinde, kümeleme (clustering), sınıflandırma (classification) ve veri madenciliği alanlarında kullanılır. Kutu (box) metriği literatürde çok fazla çalışılmayan bir metrik olması yönüyle ilgimizi çekmiş olduğu için devirli büzülmeleri bu metrik uzayda incelemeyi amaçladık. Banach büzülme prensibi devirli büzülmeler kullanılarak kutu(box) metrik uzaylarda ispat edilmiştir. Bununla birlikte Kannan tipi devirli büzülme dönüşümleri kutu (box) metrik uzaylarda incelenmiş, teoremleri destekleyen bir örnek sunulmuştur. Daha sonra ϕ - tip orbital Meir-Keeler devirli büzülme dönüşümlerine odaklanılmış, bu tip büzülmeler ile ilgili kutu (box) metrik uzaylarda yeni sonuçlar elde edilmiş ve uygulama niteliğinde bir örnek sunulmuştur.

2. GENEL BİLGİLER

2.0.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.0.1. [28] X boştan farklı bir küme olmak üzere $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$M(1) \quad \forall \quad e, f \in X, \quad d(e, f) \geq 0$$

$$M(2) \quad \forall \quad e, f \in X, \quad d(e, f) = 0 \Leftrightarrow e = f$$

$$M(3) \quad \forall \quad e, f \in X, \quad d(e, f) = d(f, e)$$

$$M(4) \quad \forall \quad e, f, g \in X, \quad d(e, g) \leq d(e, f) + d(f, g)$$

özelliklerini sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

Tanım 2.0.2. [26] $X \neq \emptyset$ ve $x \in X$ olsun. $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu için $f(e) = e$ ise $e \in X$ 'e f 'in sabit noktası denir.

Tanım 2.0.3. [26] (X, d) metrik uzay ve $S_b : X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer her $e, f \in X$ için

$$d(S_b(e), S_b(f)) \leq \lambda d(e, f)$$

şartını sağlayan bir $\lambda \geq 0$ sabiti varsa S_b 'ye Lipschitz dönüşümü (Lipschitz mapping) denir. Burada $0 \leq \lambda < 1$ ise S_b 'ye büzülme veya daralma (contraction) dönüşümü ve $\lambda = 1$ ise S_b 'ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir. Eğer her $e, f \in X$ için ($e \neq f$)

$$d(S_b(e), S_b(f)) \leq \lambda d(e, f)$$

şartı sağlanıyorsa S_b 'ye büzülebilir (contractive) dönüşüm denir. Bu durumda aşağıdaki gerektirmenin doğruluğu kolayca görülebilir.

Büzülme dönüşümü $\Rightarrow$ Büzülebilir dönüşüm $\Rightarrow$ Genişlemeyen dönüşüm $\Rightarrow$ Lipschitz şartını sağlar.

Teorem 2.0.4. [1] (Banach Büzülme Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve

$S_b : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere her $e, f \in X$ için

$$d(S_b(e), S_b(f)) \leq \lambda d(e, f)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in (0, 1)$ sabiti bulunabiliyorsa S_b 'nin X 'de bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.0.5. [20] (Kannan Büzölme Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve $S_b : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere eğer her $e, f \in X$ için

$$d(S_b(e), S_b(f)) \leq \lambda(d(e, S_b(e)) + d(f, S_b(f)))$$

olacak şekilde bir $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ sabiti bulunabiliyorsa S_b 'nin X 'de bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.0.6. [23] (Meir-Keeler Büzölme Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve S_b bu metrik uzayda bir dönüşüm olsun. Bu taktirde her $e, f \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon \leq d(e, f) < \varepsilon + \delta$$

ise

$$d(S_b(e), S_b(f)) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Böylece S_b bir tek sabit noktaya sahiptir.

Tanım 2.0.7. [11] E ve F , (X, d) metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri ve $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ olsun. Eğer $S_b(E) \subseteq F$ ve $S_b(F) \subseteq E$ ise S_b 'ye devirli (cyclic) dönüşüm denir.

Tanım 2.0.8. [11] E ve F , (X, d) metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri ve $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ devirli dönüşüm olmak üzere her $e \in E, f \in F$ için

$$d(S_b(e), S_b(f)) \leq \lambda d(e, f)$$

olacak şekilde $\lambda \in (0, 1)$ varsa S_b 'ye devirli (cyclic) büzölme dönüşümü denir.

Tanım 2.0.9. [16] X bir metrik uzay ve $E \subseteq X$ ve $F \subseteq X$ olsun. $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa devirli büzölme dönüşümü olarak adlandırılır.

- i. $S_b(E) \subseteq F$ ve $S_b(F) \subseteq E$
- ii. $\forall e \in E, \forall f \in F$ ve $\exists k \in (0, 1)$ için

$$d(S_b(e), S_b(f)) \leq k \cdot d(e, f) + (1 - k) \cdot \text{dist}(E, F)$$

Tanım 2.0.10. [14] E ve F , (X, d) metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri olsun. Bir $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ devirli dönüşümü her $e \in E, f \in F$ ve $\lambda \in (0, 1)$ için

$$d(S_b(e), S_b(f)) \leq \lambda d(e, f)$$

koşulu sağlanıyorsa S_b dönüşümü bir devirli Banach büzölme dönüşümü olarak adlandırılır.

Tanım 2.0.11. [18] E ve F , (X, d) metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri ve $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ devirli dönüşüm olmak üzere her $e \in E$, $f \in F$ ve $k \in (0, \frac{1}{2})$ için

$$d(S_b(e), S_b(f)) \leq k[d(e, S_b(e)) + d(f, S_b(f))]$$

koşulu sağlanıyorsa S_b dönüşümü bir devirli Kannan tipi büzülme dönüşümü olarak adlandırılır.

Tanım 2.0.12. [19] E ve F bir (X, d) metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri olsun. Bir $u \in X$ noktası

$$d(u, S_b(u)) = d(E, F)$$

koşulunu sağlıyorsa self olmayan bir $S_b : E \rightarrow F$ dönüşümünün en iyi yaklaşım noktası olarak adlandırılır.

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.0.1. Kutu (Box) Metrik İle İlgili Genel Kavramlar

Bu bölümde kutu (box) metrik uzayın tanımı verilmiş ve kutu (box) metrik uzayda dizi, yakınsak dizi, Cauchy dizisi, tamlık ve süreklilik tanımları ifade edilmiştir. Daha sonra kutu (box) metrik uzay kullanılarak devirli büzülme dönüşümü, devirli Banach büzülme dönüşümü, devirli Kannan tipi büzülme dönüşümü, devirli ϕ - tip orbital Meir-Keeler büzülme dönüşümü tanımları sunulmuştur.

Tanım 3.0.1. [29] (Kutu (Box) Metrik Uzay) (X, d) bir metrik uzay ve $I, \mathbb{R}$ 'nin birim aralığı olsun. $X \times I$ üzerinde üretilen, $\tilde{m} : (X \times I) \times (X \times I) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü $\forall e, f, g \in X, \forall t_1, t_2, t_3 \in I$ için

$$B(1) \quad \tilde{m}((e, t_1), (f, t_2)) \geq 0$$

$$B(2) \quad \tilde{m}((e, t_1), (f, t_2)) = 0 \Leftrightarrow (e, t_1) = (f, t_2)$$

$$B(3) \quad \tilde{m}((e, t_1), (f, t_2)) = \tilde{m}((e, t_2), (f, t_1))$$

$$B(4) \quad \tilde{m}((e, t_1), (f, t_2)) \leq \tilde{m}((e, t_1), (g, t_3)) + \tilde{m}((g, t_3), (f, t_2))$$

şartlarını sağlıyorsa

$$\tilde{m}((e, t_1), (f, t_2)) = \max(d(e, f), |t_1 - t_2|)$$

olarak tanımlanan metrik, kutu (box) metrik olarak adlandırılır. $(X \times I, \tilde{m})$ ikilisine de kutu (box) metrik uzay denir.

Tanım 3.0.2. $(X \times I, \tilde{m})$ boş olmayan kümesi için $f : \mathbb{N} \rightarrow X \times I$ fonksiyonu kutu (box) metrik uzayda bir dizi olarak tanımlanır. Yani f 'nin değerler kümesi, her $f(n) = (e_n, t_n)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{(e_n, t_n) \in X \times I : n \in \mathbb{N}, f(n) = (e_n, t_n)\} \subset X \times I$ kümesidir.

Tanım 3.0.3. $(X \times I, \tilde{m})$ bir kutu (box) metrik uzay ve $\{(e_n, t_n)\}$ terimleri $X \times I$ da olan bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n \geq 0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\tilde{m}((e_n, t_n), (e, t)) < \varepsilon$$

olacak şekilde varsa $\{(e_n, t_n)\}$ dizisine $(e, t) \in X \times I$ noktasına yakınsıyor denir. Bu durumda (e, t) noktasına $\{(e_n, t_n)\}$ dizisinin limiti denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} (e_n, t_n)$ veya $(e_n, t_n) \rightarrow (e, t)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.0.4. $(X \times I, \tilde{m})$ bir kutu (box) metrik uzay ve $\{(e_n, t_n)\}$ dizisi, terimleri $X \times I$ da olan bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n, m \geq 0$ olduğunda

$$\tilde{m}((e_n, t_n), (e_m, t_m)) < \varepsilon$$

olacak şekilde varsa $\{(e_n, t_n)\}$ dizisine $(X \times I, \tilde{m})$ kutu (box) metrik uzayında bir Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.0.5. Bir kutu (box) metrik uzayda her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

İspat: $(X \times I, \tilde{m})$ bir kutu (box) metrik uzay ve $\{(e_n, t_n)\}$ dizisi $X \times I$ metrik uzayında yakınsak bir dizi olsun. Bu taktirde her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n > n_0$ iken,

$\tilde{m}((e_n, t_n), (p, t)) < \frac{1}{2}\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Üçgen eşitsizliğinden

$$\tilde{m}((e_n, t_n), (f_m, t_m)) \leq \tilde{m}((e_n, t_n), (p, t)) + \tilde{m}((f_m, t_m), (p, t)) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Şu halde $\{(e_n, t_n)\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. ■

Tanım 3.0.6. $(X \times I, \tilde{m})$ bir kutu (box) metrik uzayındaki ve $\{(e_n, t_n)\}$ Cauchy dizisi $(p, t) \in X \times I$ noktasına yakınsak ise kutu (box) metrik uzay tamdır.

Tanım 3.0.7. $(X \times I, \tilde{m})$ ve $(Y \times I, \tilde{n})$ kutu (box) metrik uzaylar ve $f : X \times I \rightarrow Y \times I$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun (e_0, t_0) 'da sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $\delta > 0$ reel sayısının

$$\tilde{m}((e, t), (e_0, t_0)) < \delta$$

özelliğini sağlayan her $(e, t) \in X \times I$ için

$$\tilde{m}(f(e, t), (e_0, t_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde bulunmasıdır.

Tanım 3.0.8. $(X \times I, \tilde{m})$ bir kutu (box) metrik uzay ve $E \subseteq X \times I, F \subseteq X \times I$ olsun. $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa devirli büzülme dönüşümü olarak adlandırılır. $\forall (e, t_1) \in E, \forall (f, t_2) \in F$ ve $\exists k \in (0, 1)$ için

$$\begin{aligned} i. \quad & S_b(E) \subseteq F \quad \text{ve} \quad S_b(F) \subseteq E \\ ii. \quad & \tilde{m}(S_b(e, t_1), S_b(f, t_2)) \leq k \cdot \tilde{m}((e, t_1), (f, t_2)) + (1 - k) \cdot \text{dist}(E, F) \\ & \leq k \cdot \max(d(e, f), |t_1 - t_2|) + (1 - k) \cdot \text{dist}(E, F) \end{aligned}$$

Tanım 3.0.9. E ve $F, X \times I$ kutu (box) metrik uzayın boştan farklı alt kümeleri olsun. Bir $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ devirli dönüşümü her $\lambda \in (0, 1)$ için

$$\tilde{m}(S_b(e, t_1), S_b(f, t_2)) \leq \lambda \tilde{m}((e, t_1), (f, t_2)) \quad (3.1)$$

koşulunu sağlıyorsa bir devirli Banach büzülme dönüşümü olarak adlandırılır.

Tanım 3.0.10. $(X \times I, \tilde{m})$ bir kutu (box) metrik uzay, E ve F kümeleri $X \times I$ 'nin boştan farklı alt kümeleri olsun. $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ dönüşümü aşağıdaki şartı her $k \in (0, \frac{1}{2})$ için sağlıyorsa devirli Kannan tipi büzülme dönüşümü olarak adlandırılır.

$$\begin{aligned} \tilde{m}(S_b(e, t_1), S_b(f, t_2)) &\leq k \cdot \left(\tilde{m}((e, t_1), S_b(e, t_1)) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{m}((f, t_2), S_b(f, t_2)) \right) + (1 - 2k) \cdot \tilde{m}(E, F) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Tanım 3.0.11. $(X \times I, \tilde{m})$ bir kutu (box) metrik uzay, E ve F kümeleri $X \times I$ 'nin boş olmayan alt kümeleri ve $\phi \in \Phi$ olsun. $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ dönüşümü bir devirli büzülme dönüşümü olsun. Bu takdirde, $(e, t_1) \in E$, $(f, t_2) \in F$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right)\right) < \phi\left(\tilde{m}(E, F)\right) + \varepsilon + \delta$$

ise

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b(f, t_2)\right)\right) < \phi\left(\tilde{m}(E, F)\right) + \varepsilon \quad (3.3)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ vardır. Burada

$$\begin{aligned} R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right) &= \frac{1}{3} \left[\tilde{m}\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{m}\left(T^{2n}(e, t_1), T^{2n-1}(f, t_2)\right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{m}\left(S_b(f, t_2), (f, t_2)\right) \right] \end{aligned}$$

eşitliği vardır. Böylece S_b dönüşümünün bir ϕ -tip orbital Meir Keeler devirli büzülme dönüşümü olduğu söylenir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.0.1. Banach Devirli Büzölme Dönüşümü

Teorem 4.0.1. $(X \times I, \tilde{m})$ bir kutu (box) metrik uzay ve bu kutu (box) metrik uzayın kapalı ve boştan farklı iki sınıfı $\{E_j\}_{j=1}^m$ ve $\{F_j\}_{j=1}^m$ olsun. $E = \cup_{j=1}^m E_j$ ve $F = \cup_{j=1}^m F_j$ olmak üzere $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ dönüşümü

$$\begin{aligned} S_b(E_j) &\subseteq E_{j+1} = F_j & j = 1, 2, \dots, m & \quad E_{m+1} = E_1 \\ S_b(F_j) &\subseteq F_{j+1} = E_j & j = 1, 2, \dots, m & \quad F_{m+1} = F_1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. Eğer her $(e, t) \in E_j$ ve her $(f, t) \in E_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, m$ elemanları ve $k \in (0, 1)$ için

$$\tilde{m}(S_b(e, t_1), S_b(f, t_2)) \leq k \cdot \tilde{m}((e, t_1), (f, t_2)) \quad (4.2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $G_j = E_j \cap F_j$ olmak üzere S_b dönüşümü $\cap_{j=1}^m G_j$ de bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teoremin ispatı için öncelikle varlık kısmına bakılacak olursa keyfi bir $(e_0, t_0) \in E \cup F$ elemanının $(e_0, t_0) \in E$ olduğu varsayımıyla $\{(e_n, t_n)\}$ dizisini

$$(e_n, t_n) = S_b(e_{n-1}, t_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

olarak tanımlayalım. S_b dönüşümü bir devirli dönüşüm olduğundan

$$(e_0, t_0) \in E_1, (e_1, t_1) = S_b(e_0, t_0) \in E_2, (e_2, t_2) = S_b(e_1, t_1) \in E_3, \dots$$

olur. Eğer her $n_0 \in \mathbb{N}$ için $(e_{n_0+1}, t_{n_0+1}) \in \mathbb{N}$ ise bu taktirde S_b dönüşümünün sabit noktasının (e_{n_0}, t_{n_0}) olduğu açıktır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(e_{n+1}, t_{n+1}) \neq (e, t)$ olduğunu varsayalım. (4.2) eşitsizliğinde $(e, t) = (e_{n-1}, t_{n-1})$ ve $(f, t) = (e_n, t_n)$ olarak alırsak

$$\begin{aligned} 0 &\leq \tilde{m}(S_b(e_{n-1}, t_{n-1}), S_b(e_n, t_n)) = \tilde{m}((e_n, t_n), (e_{n+1}, t_{n+1})) \\ &\leq k \cdot \tilde{m}((e_{n-1}, t_{n-1}), (e_n, t_n)) \\ &\leq k^2 \cdot \tilde{m}((e_{n-2}, t_{n-2}), (e_{n-1}, t_{n-1})) \\ &\vdots \\ &\leq k^n \cdot \tilde{m}((e_{n-1}, t_{n-1}), (e_n, t_n)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde edilir. Böylece

$$0 \leq \tilde{m}((e_n, t_n), (e_{n+1}, t_{n+1})) \leq k^n \cdot \tilde{m}((e_0, t_0), (e_1, t_1)) \quad (4.5)$$

olur ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{m}((e_n, t_n), (e_{n+1}, t_{n+1})) = 0 \quad (4.6)$$

elde edilir. Diğer yandan kutu (box) metriğin non-negatiflik ve simetri özellikleri gereğince

$$\begin{aligned} \tilde{m}((e, t), (f, t)) &= \tilde{m}((f, t), (e, t)) \\ &\leq \tilde{m}((e, t), (f, t)) + \tilde{m}((f, t), (e, t)) \\ &= 2\tilde{m}((f, t), (e, t)) \end{aligned} \quad (4.7)$$

olur. $(e, t) = (e, t)_n$ ve $(f, t) = (e, t)_{n-1}$ olmak üzere (4.7) eşitsizliği

$$\tilde{m}((e_n, t_n), (e_{n-1}, t_{n-1})) \leq 2\tilde{m}((e_{n-1}, t_{n-1}), (e_n, t_n)) \quad (4.8)$$

olur. (4.8) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ yakınsaması için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{m}((e_n, t_n), (e_{n-1}, t_{n-1})) = 0 \quad (4.9)$$

elde edilir.

Şimdi $\{(e_n, t_n)\}$ dizisinin $(X \times I, \tilde{m})$ kutu (box) metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. $n \geq m$ için

$$\begin{aligned} \tilde{m}((e_n, t_n), (e_m, t_m)) &\leq \tilde{m}((e_n, t_n), (e_{n-1}, t_{n-1})) \\ &\quad + \tilde{m}((e_{n-1}, t_{n-1}), (e_n, t_n)) \\ &\quad + \tilde{m}((e_{n-1}, t_{n-1}), (e_{n-2}, t_{n-2})) \\ &\quad + \tilde{m}((e_{n-2}, t_{n-2}), (e_{n-1}, t_{n-1})) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \tilde{m}((e_{m+1}, t_{m+1}), (e_m, t_m)) \\ &\quad + \tilde{m}((e_m, t_m), (e_{m+1}, t_{m+1})) \\ &= \sum_{i=m+1}^n [\tilde{m}((e_i, t_i), (e_{i-1}, t_{i-1})) \\ &\quad + \tilde{m}((e_{i-1}, t_{i-1}), (e_i, t_i))] \end{aligned} \quad (4.10)$$

olur. (4.4) ve (4.8) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{m}((e_n, t_n), (e_m, t_m)) &= \sum_{i=m+1}^n 3k^{i-1} \cdot \tilde{m}((e_0, t_0), (e_1, t_1)) \\ &\leq 2\tilde{m}((e_0, t_0), (e_1, t_1)) \left[\sum_{i=0}^n k^{i-1} - \sum_{i=0}^m k^{i-1} \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir. Böylece $n, m \rightarrow \infty$ için

$$\tilde{m}((e_n, t_n), (e_m, t_m)) \rightarrow 0 \quad (4.12)$$

olur. Yani $\{(e_n, t_n)\}$ dizisi $(X \times I, \tilde{m})$ kutu (box) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. $(X \times I, \tilde{m})$ kutu (box) metrik uzayı tam olduğundan $\{(e_n, t_n)\}$ dizisi $(u, t) \in X \times I$ noktasına yakınsar. Üstelik bu (u, t) noktası $\cap_{j=1}^m G_j$ kümesinin elemanıdır. Aslında, eğer $(e_0, t_0) \in E_1$ ise $\{(e_{s(n-1)}, t_{s(n-1)})\}_{n=1}^\infty$ dizisi E_1 in elemanıdır. Aynı şekilde $\{(e_{s(n-1)+1}, t_{s(n-1)+1})\}_{n=1}^\infty \in E_2$ ve bu şekilde devam ederse $\{(e_{sn+1}, t_{sn+1})\}_{n=1}^\infty \in E_s$ olur. Tüm s indisli diziler $(X \times I, \tilde{m})$ kutu(box) metrik uzayında yakınsaktır ve hepsinin yakınsadığı limit noktası aynı ve (u, t) noktasıdır. Ek olarak E_j kümeleri $(X \times I, \tilde{m})$ kutu (box) metrik uzayında kapalı oldukları için bu limit noktası $(u, t) \in \cap_{j=1}^m G_j$ dir.

Şimdi $(u, t) \in (X \times I, \tilde{m})$ noktasının S_b dönüşümünün bir sabit noktası yani $(u, t) = S_b(u, t)$ olduğunu göstereceğiz. Kutu (box) metrik tanımı ve (4.2) eşitsizliği ile birlikte $(e, t) = (e_n, t_n)$ ve $(f, t) = S_b(u, t)$ eşitliklerini göz önüne alalım. $(u, t) = S_b(u, t)$ ya da $\tilde{m}((u, t), S_b(u, t)) > 0$ olduğunu varsayalım. Böylece

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{m}((e_n, t_n), S_b(u, t)) &= \tilde{m}(S_b(e_{n-1}, t_{n-1}), S_b(u, t)) \\ &\quad + \tilde{m}(S_b(u, t), (e_{n-1}, t_{n-1})) \\ &\leq k \cdot [\tilde{m}(S_b(e_{n-1}, t_{n-1}), (u, t)) \\ &\quad + \tilde{m}((u, t), (e_{n-1}, t_{n-1}))] \end{aligned} \quad (4.13)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ yakınsamasını kullanırsak

$$0 \leq \tilde{m}((u, t), S_b(u, t)) \leq 0 \quad (4.14)$$

olur, bu ise bir çelişkidir. Yani $\tilde{m}((u, t), S_b(u, t)) > 0$ varsayımı ile çelişir. Sonuç olarak $(u, t) = S_b(u, t)$ elde edilir. Böylece (u, t) noktası S_b dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Sabit noktanın tekliğini ispatlamak için $(u, t) \neq (v, t)$ olacak şekilde başka bir (v, t) noktasının olduğunu varsayalım. $(u, t) \in \cap_{j=1}^m G_j$ ve $(v, t) \in \cap_{j=1}^m G_j$ olduğundan (4.2) eşitsizliğinde $(e, t) = (u, t)$ ve $(f, t) = (v, t)$ alabiliriz. Bu ise bize

$$\tilde{m}(S_b(u, t), S_b(v, t)) \leq k \cdot \tilde{m}((u, t), (v, t)) \quad (4.15)$$

olduğunu söyler. Fakat bu eşitsizlik sadece $k = 1$ için doğrudur. Bu ise $k \in (0, 1)$ olması ile çelişir. Böylece S_b nin sabit noktasının tek olduğu ispatlanmış olur. ■

4.0.2. Kannan Tipi Devirli Büzölme Dönüşümü

Teorem 4.0.2. $(X \times I, \tilde{m})$ bir tam kutu(box) metrik uzay ve $E, F \subset X \times I$ nın boştan farklı ve kapalı alt kümeleri olsun. $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ bir devirli Kannan tip bü zölme dönüşümü olmak üzere eğer $(e_0, t_0) \in E \cup F$ ve her $n \geq 0$ için iterasyon dizisi $(e_{n+1}, t_{1n+1}) = S_b(e_n, t_{1n})$ olarak tanımlanırsa $n \rightarrow \infty$ için

$$\tilde{m}\left((e_n, t_{1n}), (e_n, t_{1n})\right) \rightarrow \tilde{m}(E, F) \quad (4.16)$$

yakınsaması elde edilir.

$(e_0, t_0) \in E$ ve $\tilde{m}\left((u, t_4), (u, t_4)\right) = 0$ olacak şekilde $(u, t_4) \in E$ noktasına yakınsayan $\left\{(e_{2n_i}, t_{12n_i})\right\}$ alt dizisine sahip $\left\{(e_{2n}, t_{12n})\right\}$ dizisinin olduğunu varsayalım. Şu halde $(u, t_4) \in E$ noktası S_b 'nin en iyi yaklaşım noktasıdır. Böylece

$$\tilde{m}\left((u, t_4), S_b(u, t_4)\right) = \tilde{m}(E, F) \quad (4.17)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $(e_0, t_0) \in E \cup F$ olsun ve her $n \geq 0$ için $(e_{n+1}, t_{1n+1}) = S_b(e_n, t_{1n})$ olarak tanımlansın. Tanım 3.0.10' u kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} \tilde{m}\left((e_{n+2}, t_{1n+2}), (e_{n+1}, t_{1n+1})\right) &= \tilde{m}\left(S_b(e_{n+1}, t_{1n+1}), S_b(e_n, t_{1n})\right) \\ &\leq k \cdot \tilde{m}\left((e_{n+1}, t_{1n+1}), S_b(e_{n+1}, t_{1n+1})\right) \\ &\quad + \tilde{m}\left((e_n, t_{1n}), T(e_n, t_{1n})\right) \\ &\quad + (1 - 2k) \cdot \tilde{m}(E, F) \\ &= k \cdot \left(\tilde{m}\left((e_{n+1}, t_{1n+1}), (e_{n+2}, t_{1n+2})\right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{m}\left((e_n, t_{1n}), (e_{n+1}, t_{1n+1})\right)\right) \\ &\quad + (1 - 2k) \cdot \tilde{m}(E, F) \\ &\leq k \cdot \left(\tilde{m}\left((e_{n+1}, t_{1n+1}), (e_{n+2}, t_{1n+2})\right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{m}\left((e_n, t_{1n}), (e_{n+1}, t_{1n+1})\right)\right) \\ &\quad + (1 - 2k) \cdot \left(\tilde{m}\left((e_n, t_{1n}), (e_{n+1}, t_{1n+1})\right)\right) \\ &= k \cdot \left(\tilde{m}\left((e_{n+1}, t_{1n+1}), (e_{n+2}, t_{1n+2})\right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - 2k) \cdot \tilde{m}\left((e_n, t_{1n}), (e_{n+1}, t_{1n+1})\right)\right) \end{aligned}$$

Böylece her $n \geq 0$ için

$$\tilde{m}\left((e_{n+2}, t_{1n+2}), (e_{n+1}, t_{1n+1})\right) \leq \tilde{m}\left((e_{n+1}, t_{1n+1}), (e_n, t_{1n})\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ifade $\left\{ \tilde{m}((e, t_1)_{n+1}, (e, t_1)_n) \right\}$ dizisinin artmayan ve alttan sınırlı bir dizi olduğu anlamına gelir. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{m}((e_{n+1}, t_{1n+1}), (e_{n+1}, t_{1n+1})) = s.$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir $s \geq 0$ vardır.

$$\begin{aligned} \tilde{m}(E, F) \leq \tilde{m}((e_{n+2}, t_{1n+2}), (e_{n+1}, t_{1n+1})) &\leq k \cdot \left(\tilde{m}((e_{n+1}, t_{1n+1}), (e_{n+2}, t_{1n+2})) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{m}((e_n, t_{1n}), (e_{n+1}, t_{1n+1})) \right) \\ &\quad + (1 - 2k) \cdot \tilde{m}(E, F) \end{aligned}$$

olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $s = \tilde{m}(E, F)$ olduğu açıkça görülür. Şu halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{m}((e_{n+1}, t_{1n+1}), (e_n, t_{1n})) = \tilde{m}(E, F).$$

$(e_0, t_0) \in E$ olduğunu varsayalım. $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ bir devirli büzülme dönüşümü olduğundan her $n \geq 0$ için $\{(e_{2n}, t_{12n})\} \in E$ ve $\{(e_{2n+1}, t_{12n+1})\} \in F$ dizilerine sahip oluruz. Ek olarak $\{(e_{2n}, t_{12n})\}$ dizisinin $\tilde{m}((u, t_4), (u, t_4)) = 0$ olmak üzere $(u, t_4) \in E$ noktasına yakınsayan bir $\{(e_{2n_i}, t_{12n_i})\}$ şeklinde bir alt dizisi varsa bu taktirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{m}((e_{2n_i}, t_{12n_i}), (u, t_4)) = \tilde{m}((u, t_4), (u, t_4)) = 0.$$

yakınsaması elde edilir. Şu halde daha önce elde edilen eşitsizliklerin göz önüne alınmasıyla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \tilde{m}(E, F) \leq \tilde{m}((u, t_4), S_b(u, t_4)) &\leq \left(\tilde{m}((u, t_4), (e_{2n_i}, t_{12n_i})) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{m}((e_{2n_i}, t_{12n_i}), S_b(u, t_4)) \right) \\ &= \left(\tilde{m}((u, t_4), (e_{2n_i}, t_{12n_i})) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{m}(S_b(e_{2n_i-1}, t_{12n_i-1}), S_b(u, t_4)) \right) \\ &\leq \left(\tilde{m}((u, t_4), (e_{2n_i}, t_{12n_i})) \right) \\ &\quad + k \cdot \left(\tilde{m}((e_{2n_i}, t_{12n_i}), (e_{2n_i-1}, t_{12n_i-1})) \right) \\ &\quad + (u, t_4), S_b(u, t_4) + (1 - 2k) \cdot \tilde{m}(E, F). \end{aligned}$$

$i \rightarrow \infty$ için 4.16' de verilen yakınsama ve göz önüne alınırsa

$$\tilde{m}(E, F) \leq \tilde{m}((u, t_4), S_b(u, t_4)) \leq k \cdot \left(\tilde{m}((u, t_4), S_b(u, t_4)) \right) + (1 - k) \cdot \tilde{m}(E, F).$$

Böylece $\tilde{m}((u, t_4), S_b(u, t_4)) = \tilde{m}(E, F)$ elde edilir. Sonuç olarak $(u, t_4) \in E$ noktası S_b dönüşümünün en iyi yaklaşım noktasıdır. ■

Teorem 4.0.3. $(X \times I, \tilde{m})$ bir tam kutu (box) metrik uzay ve $E, F \subset X \times I$ nın boştan farklı ve kapalı alt kümeleri olsun. $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ bir devirli Kannan tip büzlme dönüşümü olmak üzere eğer $(e_0, t_0) \in E \cup F$ ve her $n \geq 0$ için iterasyon dizisi $(e_{n+1}, t_{1n+1}) = S_b(e_n, t_{1n})$ olarak tanımlanırsa $n \rightarrow \infty$ için

$$\tilde{m}\left((e_n, t_{1n}), (e_{n+1}, t_{1n+1})\right) \rightarrow \tilde{m}(E, F) \quad (4.18)$$

yakınsaması elde edilir.

$(e_0, t_0) \in F$ ve $\tilde{m}\left((v, t_5), (v, t_5)\right) = 0$ olacak şekilde $(v, t_5) \in F$ noktasına yakınsayan $\{(e_{2n_i}, t_{12n_i})\}$ alt dizisine sahip $\{(e_{2n}, t_{12n})\}$ dizisinin olduğunu varsayalım. Şu halde $(v, t_5) \in F$ noktası S_b 'nin en iyi yaklaşım noktasıdır. Böylece

$$\tilde{m}\left((v, t_5), S_b(v, t_5)\right) = \tilde{m}(E, F) \quad (4.19)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $(e_0, t_0) \in E \cup F$ olsun ve her $n \geq 0$ için $(e_{n+1}, t_{1n+1}) = S_b(e_n, t_{1n})$ olarak tanımlansın. Tanım 3.0.10'u kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} \tilde{m}\left((e_{n+2}, t_{1n+2}), (e_{n+1}, t_{1n+1})\right) &= \tilde{m}\left(S_b(e_{n+1}, t_{1n+1}), S_b(e_n, t_{1n})\right) \\ &\leq k \cdot \tilde{m}\left((e_{n+1}, t_{1n+1}), S_b(e_{n+1}, t_{1n+1})\right) \\ &\quad + \tilde{m}\left((e_n, t_{1n}), S_b(e_n, t_{1n})\right) \\ &\quad + (1 - 2k) \cdot \tilde{m}(E, F) \\ &= k \cdot \left(\tilde{m}\left((e_{n+1}, t_{1n+1}), (e_{n+2}, t_{1n+2})\right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{m}\left((e_n, t_{1n}), (e_{n+1}, t_{1n+1})\right) \right) \\ &\quad + (1 - 2k) \cdot \tilde{m}(E, F) \\ &\leq k \cdot \left(\tilde{m}\left((e_{n+1}, t_{1n+1}), (e_{n+2}, t_{1n+2})\right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{m}\left((e_n, t_{1n}), (e_{n+1}, t_{1n+1})\right) \right) \\ &\quad + (1 - 2k) \cdot \left(\tilde{m}\left((e_n, t_{1n}), (e_{n+1}, t_{1n+1})\right) \right) \\ &= k \cdot \left(\tilde{m}\left((e_{n+1}, t_{1n+1}), (e_{n+2}, t_{1n+2})\right) \right) \\ &\quad + (1 - 2k) \cdot \tilde{m}\left((e_n, t_{1n}), (e_{n+1}, t_{1n+1})\right) \end{aligned}$$

Böylece her $n \geq 0$ için

$$\tilde{m}\left((e_{n+2}, t_{1n+2}), (e_{n+1}, t_{1n+1})\right) \leq \tilde{m}\left((e_{n+1}, t_{1n+1}), (e_n, t_{1n})\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ifade $\left\{ \tilde{m}((e_{n+1}, t_{1n+1}), (e_n, t_{1n})) \right\}$ dizisinin artmayan ve alttan sınırlı bir dizi olduğu anlamına gelir. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{m}((e_{n+1}, t_{1n+1}), (e_n, t_{1n})) = s.$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir $s \geq 0$ vardır.

$$\begin{aligned} \tilde{m}(E, F) \leq \tilde{m}((e_{n+2}, t_{1n+2}), (e_{n+1}, t_{1n+1})) &\leq k \cdot \left(\tilde{m}((e_{n+1}, t_{1n+1}), (e_{n+2}, t_{1n+2})) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{m}((e_n, t_{1n}), (e_{n+1}, t_{1n+1})) \right) \\ &\quad + (1 - 2k) \cdot \tilde{m}(E, F), \end{aligned}$$

olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $s = \tilde{m}(E, F)$ olduğu açıkça görülür. Şu halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{m}((e, t_1)_{n+1}, (e, t_1)_n) = \tilde{m}(E, F).$$

$(e_0, t_0) \in F$ olduğunu varsayalım. $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ bir devirli büzülme dönüşümü olduğundan her $n \geq 0$ için $\{(e_{2n}, t_{12n})\} \in E$ ve $\{(e_{2n+1}, t_{12n+1})\} \in F$ dizilerine sahip oluruz. Ek olarak $\{(e_{2n}, t_{12n})\}$ dizisinin $\tilde{m}((v, t_5), (v, t_5)) = 0$ olmak üzere $(v, t_5) \in F$ noktasına yakınsayan bir $\{(e_{2n_i}, t_{12n_i})\}$ şeklinde bir alt dizisi varsa bu taktirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{m}((e_{2n_i}, t_{12n_i}), (v, t_5)) = \tilde{m}((v, t_5), (v, t_5)) = 0.$$

yakınsaması elde edilir. Şu halde daha önce elde edilen eşitsizliklerin göz önüne alınmasıyla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \tilde{m}(E, F) \leq \tilde{m}((v, t_5), S_b(v, t_5)) &\leq \left(\tilde{m}((v, t_5), (e, t_1)_{2n_i}) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{m}((e_{2n_i}, t_{12n_i}), S_b(v, t_5)) \right) \\ &= \left(\tilde{m}((v, t_5), (e, t_1)_{2n_i}) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{m}(S_b(e_{2n_i-1}, t_{12n_i-1}), S_b(v, t_5)) \right) \\ &\leq \left(\tilde{m}((v, t_5), (e_{2n_i}, t_{12n_i})) \right) \\ &\quad + k \cdot \left(\tilde{m}((e_{2n_i}, t_{12n_i}), (e_{2n_i-1}, t_{12n_i-1})) \right) \\ &\quad + (v, t_5), S_b(v, t_5)) + (1 - 2k) \cdot \tilde{m}(E, F). \end{aligned}$$

$i \rightarrow \infty$ için 4.18' de verilen yakınsama ve göz önüne alınırsa

$$\tilde{m}(E, F) \leq \tilde{m}((v, t_5), S_b(v, t_5)) \leq k \cdot \left(\tilde{m}((v, t_5), S_b(v, t_5)) \right) + (1 - k) \cdot \tilde{m}(E, F).$$

Böylece $\tilde{m}((v, t_5), S_b(v, t_5)) = \tilde{m}(E, F)$ elde edilir. Sonuç olarak $(v, t_5) \in F$ noktası S_b dönüşümünün en iyi yaklaşım noktasıdır. ■

Örnek 4.0.4. $X \times I = \mathbb{R} \times [0, 1]$ bir kutu (box) metrik uzay ve bu kutu (box) metrik uzayın iki alt kümesi $E = F = [0, 1] \times [0, 1]$ olsun. $S_b(e, t_1) = (e, t_1)$ şeklinde tanımlanan $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ dönüşümü verilsin. Öncelikle S_b dönüşümünün devirli Kannan tip büzülme dönüşümü şartlarını sağladığını gösterelim. Her $(e_1, t_1) \in E, (f_2, t_2) \in F$ için $S_b(e_1, t_1) \in E$ ve $S_b(f_2, t_2) \in F$ olduğu açıkça görülür. Yani $S_b(E) \subseteq F$ ve $S_b(F) \subseteq E$ şartı sağlanır. Böylece S_b dönüşümü bir devirli dönüşümdür.

$(e_1, t_1) = (f_2, t_2) = (0, 1) \in E \cup F$ noktası ve $k = \frac{1}{4} \in (0, \frac{1}{2})$ değeri için

$$\begin{aligned}
\tilde{m}(S_b(e_1, t_1), S_b(f_2, t_2)) &\leq k \cdot (\tilde{m}((e_1, t_1), S_b(e_1, t_1)) \\
&\quad + \tilde{m}((f_2, t_2), S_b(f_2, t_2))) \\
&\quad + (1 - 2k) \cdot \tilde{m}(E, F) \\
\tilde{m}((0, 1), (0, 1)) &\leq \frac{1}{4} \cdot (\tilde{m}((0, 1), (0, 1)) \\
&\quad + \tilde{m}((0, 1), (0, 1))) \\
&\quad + (1 - 2 \cdot \frac{1}{4}) \cdot \tilde{m}(E, F) \\
\max(d(0, 0), |1 - 1|) &\leq \frac{1}{4} \cdot (\max(d(0, 0), |1 - 1|) + \max(d(0, 0), |1 - 1|)) \\
&\quad + (1 - \frac{1}{2}) \cdot 0 \\
\max(|0 - 0|, |1 - 1|) &\leq \frac{1}{4} \cdot (\max(|0 - 0|, |1 - 1|) + \max(|0 - 0|, |1 - 1|)) \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot 0 \\
\max(0, 0) &\leq \frac{1}{4} (\max(0, 0), \max(0, 0)) + 0 \\
0 &\leq \frac{1}{4} \cdot (0 + 0) + 0 \\
0 &\leq 0 + 0 \\
0 &\leq 0
\end{aligned}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı görülür. Şu halde S_b dönüşümü bir devirli Kannan tip devirli büzülme dönüşümüdür. $(e_0, t_0) = (0, 1) \in E \cup F$ noktasını göz önüne aldığımızda her $n \geq 0$ için $(0_{n+1}, 1_{n+1}) = S_b(0_n, 1_n)$ olur. Eğer $(0, 1) \in E$ ise her $n \geq 0$ için $(0_{2n}, 1_{2n}) = (0, 1)$ ve $(0_{2n+1}, 1_{2n+1}) = (0, 1)$ olur. Eğer $(0, 1) \in B$ ise her $n \geq 1$ için $(0_{2n}, 1_{2n}) = (0, 1)_n$ ve her $(0, 1) \in E$ için $(0_{2n+1}, 1_{2n+1}) = (0, 1)$ olur. Böylece $n \geq 1$

için

$$\begin{aligned}\tilde{m}((0_n, 1_n), (0_{n+1}, 1_{n+1})) &= \tilde{m}((0, 1), (0, 1)) \\ &= \max(d(0, 0), |1 - 1|) \\ &= \max(|0 - 0|, |1 - 1|) \\ &= \max(0, 0) \\ &= 0 \\ &= \tilde{m}(E, F)\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

$(0, 1) \in E$ olması durumunda $(0_{2n}, 1_{2n}) = (0, 1)$ olur ve $\{(0_{2n_i}, 1_{2n_i})\}$ dizisi $(u, t_4) = (0, 1)$ noktasına yakınsar. Burada $\tilde{m}((u, t_4), (u, t_4)) = 0$ ve böylece $(u, t_4) = (0, 1)$ noktası S_b dönüşümünün en iyi yaklaşım noktasıdır. Yani

$$\tilde{m}((0, 1), (0, 1)) = 0 = \tilde{m}(E, F)$$

Diğer taraftan $(0, 1) \in F$ olması durumunda $(0_{2n-1}, 1_{2n-1}) = (0, 1)$ olur ve $\{(0_{2n_i-1}, 1_{2n_i-1})\}$ dizisi $(v, t_5) = (0, 1)$ noktasına yakınsar.

Burada $\tilde{m}((v, t_5), (v, t_5)) = 0$ ve böylece $(v, t_5) = (0, 1)$ noktası S_b dönüşümünün en iyi yaklaşım noktasıdır. Yani

$$\tilde{m}((0, 1), (0, 1)) = 0 = \tilde{m}(E, F)$$

4.0.3. ϕ - Tip Orbital Meir-Keeler Devirli Büzülme Dönüşümü

Önerme 4.0.5. E ve F kümeleri bir $(X \times I, \tilde{m})$ kutu (box) metrik uzayının boş olmayan ve kapalı alt kümeleri ve $S_b : E \cup F \longrightarrow E \cup F$ bir ϕ - tip orbital Meir-Keeler devirli büzülme dönüşümü olsun. Eğer $\forall (e, t_1) \in E$ ve $n \longrightarrow \infty$ için (3.3) koşulu sağlanıyorsa

$$\tilde{m}(S_b^{n+1}(e, t_1), S_b^n(e, t_1)) \longrightarrow \tilde{m}(E, F)$$

yakınsaması elde edilir.

İspat: $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ dönüşümünün bir ϕ -tip orbital Meir-Keeler devirli büzülme dönüşümü olduğunu varsayalım. (3.3) eşitsizliğini sağlayan $\forall (e, t_1) \in E$ alalım. n veya $n + 1$ çift olduğundan $\forall (e, t_1) \in E$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \left[\tilde{m}(S_b^n(e, t_1), S_b^{n-1}(e, t_1)) \right. \\ & \quad + \tilde{m}(S_b^{n+1}(e, t_1), S_b^n(e, t_1)) \\ & \quad \left. + \tilde{m}(S_b^n(e, t_1), S_b^{n-1}(e, t_1)) \right] \\ & \geq \tilde{m}(E, F) \end{aligned}$$

eşitsizliğiniz elde ederiz.

$$\begin{aligned} R(S_b^n(e, t_1), S_b^{n-1}(e, t_1)) &= \frac{1}{3} \left[\tilde{m}(S_b^n(e, t_1), S_b^{n-1}(e, t_1)) \right. \\ & \quad + \tilde{m}(S_b^{n+1}(e, t_1), S_b^n(e, t_1)) \\ & \quad \left. + \tilde{m}(S_b^n(e, t_1), S_b^{n-1}(e, t_1)) \right] \\ &= \tilde{m}(E, F) \end{aligned}$$

olduğunu varsayalım. Böylece

$$\phi(R(S_b^n(e, t_1), S_b^{n-1}(e, t_1))) = \phi(\tilde{m}(E, F))$$

olur.

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{m}(S_b^n(e, t_1), S_b^{n-1}(e, t_1))) &= \phi\left(\frac{1}{3} \left[\tilde{m}(S_b^n(e, t_1), S_b^{n-1}(e, t_1)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \tilde{m}(S_b^{n+1}(e, t_1), S_b^n(e, t_1)) \right] \right) \quad (4.20) \\ &= \tilde{m}(E, F) \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{m}_n = \tilde{m}(S_b^n(e, t_1), S_b^{n-1}(e, t_1))$ olarak alalım. Buradan (4.20) eşitliği

$$\phi(\tilde{m}_{n+1}) = \phi\left(\frac{1}{3}[2\tilde{m}_n + \tilde{m}_{n+1}]\right)$$

eşitliğine dönüşür. ϕ artan bir fonksiyon olduğundan $\tilde{m}_n = \tilde{m}_{n+1}$ olur. Böylece

$$\alpha_{n+1} = \phi(\tilde{m}_{n+1}) = \phi(\tilde{m}_n) = \alpha_n$$

elde edilir. Şimdi

$$R(S_b^n(e, t_1), S_b^{n-1}(e, t_1)) = \frac{1}{3}[2\tilde{m}_n + \tilde{m}_{n+1}] > \tilde{m}(E, F)$$

olduğunu varsayalım. Bu takdirde, ϕ artan bir fonksiyon olduğundan

$$\phi\left(R(S_b^n(e, t_1), S_b^{n-1}(e, t_1))\right) = \phi\left(\frac{1}{3}[2\tilde{m}_n + \tilde{m}_{n+1}]\right) > \tilde{m}(E, F)$$

elde edilir. $\varepsilon_1 = \phi\left(\frac{1}{3}[2\tilde{m}_n + \tilde{m}_{n+1}]\right) - \phi(\tilde{m}(E, F)) > 0$ olarak alalım. (3.3) eşitsizliğinden dolayı bu ε_1 için

$$\phi(\tilde{m}_{n+1}) = \phi\left(\tilde{m}(S_b^{n+1}(e, t_1), S_b^n(e, t_1))\right) < (\tilde{m}(E, F)) + \varepsilon_1 = \phi\left(\frac{1}{3}[2\tilde{m}_n + \tilde{m}_{n+1}]\right)$$

olacak şekilde bir δ vardır. Böylece, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\phi(\tilde{m}_{n+1}) < \phi\left(\frac{1}{3}[2\tilde{m}_n + \tilde{m}_{n+1}]\right)$$

olur. ϕ artan bir fonksiyon olduğundan $\tilde{m}_{n+1} < \tilde{m}_n$ elde edilir. Böylece $\{\tilde{m}_n\}$ dizisi, $\tilde{m}(E, F)$ ile sınırlanan artmayan bir dizidir. O halde $\tilde{m} \geq \tilde{m}(E, F)$ olduğundan $\{\tilde{m}_n\}$ dizisi bir $\tilde{m}$ ye yakınsar. $\tilde{m} = \tilde{m}(E, F)$ olduğunu iddia ediyoruz. $\tilde{m} > \tilde{m}(E, F)$ dola-yısıyla $\phi(\tilde{m}) > \phi(\tilde{m}(E, F))$ olduğunu varsayalım, $\varepsilon = \phi(\tilde{m}) - \phi(\tilde{m}(E, F)) > 0$ olacak şekilde alalım. Böylece, (3.3) eşitsizliğini sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $\{\tilde{m}(S_b^{n+1}(e, t_1), S_b^n(e, t_1))\} \rightarrow \tilde{m}$ yakınsamasını göz önünde bulundurarak $\forall n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{m}) &\leq \phi\left(\frac{1}{3}\left[\tilde{m}(S_b^n(e, t_1), S_b^{n-1}(e, t_1))\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \tilde{m}(S_b^{n+2}(e, t_1), S_b^{n+1}(e, t_1))\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \tilde{m}(S_b^{n+1}(e, t_1), S_b^n(e, t_1))\right]\right) \\ &< \phi(\tilde{m}) + \delta = \varepsilon + \phi(\tilde{m}(E, F)) + \delta \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece, $\forall n \geq n_0$ için

$$\phi\left(\tilde{m}(S_b^{n+2}(e, t_1), S_b^{n+1}(e, t_1))\right) < \phi(\tilde{m}(E, F)) + \varepsilon = \phi(\tilde{m})$$

olur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $\tilde{m} = \tilde{m}(E, F)$ olur. ■

Önerme 4.0.6. E ve F kümeleri bir $(X \times I, \tilde{m})$ kutu (box) metrik uzayının boş olmayan ve kapalı alt kümeleri, $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ bir ϕ -tip orbital Meir-Keeler devirli büzülme dönüşümü olsun. $\tilde{m}(E, F) = 0$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $p, q \geq n_1$ olmak üzere p ve q karşılıklı noktaları ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\phi\left(\tilde{m}(S_b^p(e, t_1), S_b^q(e, t_1))\right) < \varepsilon + \delta$$

ise

$$\phi\left(\tilde{m}(S_b^{p+1}(e, t_1), S_b^{q+1}(e, t_1))\right) < \varepsilon \quad (4.21)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat: (3.3) eşitsizliğini sağlayan $(e, t_1) \in X \times I$ elemanını alalım. S_b dönüşümü bir ϕ -tip orbital Meir-Keeler devirli büzülme dönüşümü olduğundan, verilen $\varepsilon > 0$ için (3.3) eşitsizliğini sağlayan bir $\delta > 0$ vardır. Yani $n \in \mathbb{N}$ ve $(f, t_2) \in E$ için

$$\begin{aligned} & \phi\left(\frac{1}{3}\left[\tilde{m}\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b^{2n-1}(e, t_1)\right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \tilde{m}\left(S_b(f, t_2), (f, t_2)\right)\right]\right) \\ & < \varepsilon + \delta \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir bu ise

$$\phi\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b(f, t_2)\right) < \varepsilon \quad (4.22)$$

anlamına gelir. Genelliği kaybetmeden

$$\delta < \varepsilon \quad (4.23)$$

seçebiliriz. $\tilde{m}(E, F) = 0$ olmasını, ϕ 'nin artan olmasını ve önerme 4.0.5'i gözönüne alarak $n_1 \in \mathbb{N}$ doğal sayısını, $\forall n \geq n_1$ için

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^n(e, t_1), S_b^{n+1}(e, t_1)\right)\right) < \frac{\delta}{2} \quad (4.24)$$

olacak şekilde seçebiliriz.

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^p(e, t_1), S_b^q(e, t_1)\right)\right) < \varepsilon + \delta$$

eşitsizliğinin

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{p+1}(e, t_1), S_b^{q+1}(e, t_1)\right)\right) < \varepsilon$$

eşitsizliğini gerektirdiğini iddia ediyoruz. $n \geq n_1$ ve $p, q \geq n_1$ olmak üzere karşılıklı çift olan $p, q \in \mathbb{N}$ doğal sayılarını alalım.

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^p(e, t_1), S_b^q(e, t_1)\right)\right) < \varepsilon + \delta$$

olduğunu varsayalım. Genelliği kaybetmeden $p = 2n$, $q = 2m - 1$ olmak üzere $S_b^p(e, t_1) \in E$ ve $S_b^q(e, t_1) \in F$ olduğunu varsayalım. Aksi takdirde sırasıyla endeksleri revize etmeliyiz. Şu halde, $\forall m \geq n$ için

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^n(e, t_1), S_b^{n+1}(e, t_1)\right)\right) = \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b^{2m-1}(e, t_1)\right)\right) < \varepsilon + \delta$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Bu takdirde (3.5) eşitsizliğini gözönünde bulundurarak

$$\begin{aligned} \phi\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b^{2m-1}(e, t_1)\right) &\leq \phi\left(\frac{1}{3}\left[\tilde{m}\left(S_b^{2m-1}(e, t_1), S_b^{2n}(e, t_1)\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{m}\left(S_b^{2m}(e, t_1), S_b^{2m-1}(e, t_1)\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{m}\left(S_b^{2n+1}(e, t_1), S_b^{2n}(e, t_1)\right)\right]\right) \\ &\leq \frac{1}{3}\left[\varepsilon + \delta + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}\right] \\ &\leq \varepsilon + \delta \end{aligned} \quad (4.25)$$

elde ederiz. $(f, t_2) = S_b^{2n}(e, t_1)$ varsayımı altında (4.22) eşitsizliğini gözönüne alırsak (4.25) eşitsizliği

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n+1}(e, t_1), S_b^{2m}(e, t_1)\right)\right) = \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{p+1}(e, t_1), S_b^{q+1}(e, t_1)\right)\right) < \varepsilon$$

ifadesini verir. Şu halde verilen bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ ve $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $p, q \geq n_1$ olan karşılıklı çiftleri p ve q için

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^p(e, t_1), S_b^q(e, t_1)\right)\right) < \varepsilon + \delta$$

eşitsizliği

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{p+1}(e, t_1), S_b^{q+1}(e, t_1)\right)\right) < \varepsilon \quad (4.26)$$

eşitsizliğini gerektirir. ■

Lemma 4.0.7. $(X \times I, \tilde{m})$ bir tam kutu (box) metrik uzay ve $X \times I$ tam box metrik uzayının boş olmayan ve kapalı alt kümeleri E ve F olsun. $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ dönüşümünün bir ϕ -tip orbital Meir-Keeler devirli büzülme dönüşümü ve $\tilde{m}(E, F) = 0$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde, eğer $S_b^{2n-1}(e, t_1) \neq (f, t_2)$ ise

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b(f, t_2)\right)\right) < \phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right)\right) \quad (4.27)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: (4.27) eşitsizliğini elde etmek için (3.3) eşitsizliğinin aşağıdaki koşula denk olduğunu göstermek yeterlidir. $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $n \in \mathbb{N}$ ve $(f, t_2) \in E$ için

$$\varepsilon \leq \phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right)\right) < \varepsilon + \delta$$

eşitsizliği

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b(f, t_2)\right)\right) < \varepsilon \quad (4.28)$$

eşitsizliğini gerektirir. Burada,

$$\begin{aligned} R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right) &= \frac{1}{3} \left[\tilde{m}\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b^{2n-1}(e, t_1)\right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{m}\left(S_b(e, t_2), (f, t_1)\right) \right] \end{aligned}$$

ve

$$\tilde{m}(E, F) = 0$$

eşitliklerinin olduğunu hatırlayalım. (3.3) eşitsizliğinin (4.28) eşitsizliği anlamına geldiği açıktır. (4.28) eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. $S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2) \in E \cup F$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer

$$\phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right)\right) < \varepsilon$$

ise, (4.28) eşitsizliğinden

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b(f, t_2)\right)\right) \leq \phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right)\right)$$

olur ve sonuç olarak

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b(f, t_2)\right)\right) < \varepsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eğer

$$\phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right)\right) \geq \varepsilon$$

ise bu takdirde (3.3) eşitsizliği sağlanır. Böylece (4.28) ve (3.3) eşitsizlikleri $\tilde{m}(E, F) = 0$ koşuluna denk olur. Eğer (4.28) eşitsizliği sağlanırsa

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b(f, t_2)\right)\right) \leq \phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right)\right)$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Eğer

$$\phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right)\right) = 0$$

ise bu takdirde $S_b^{2n-1}(e, t_1) = (f, t_2)$ olur. Böylece

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b(f, t_2)\right)\right) \leq \phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right)\right)$$

olur. $\phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right)\right) \neq 0$ ve $\varepsilon < \phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right)\right)$ olduğunu varsayalım. (3.9) eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\delta > 0$ seçelim. Eğer

$$\phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right)\right) \leq \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b(f, t_2)\right)\right)$$

ise (4.28) eşitsizliğinden bir çelişki elde edileceğine dikkat edelim. ■

Teorem 4.0.8. $(X \times I, \tilde{m})$ bir tam kutu (box) metrik uzay ve $(X \times I, \tilde{m})$ box metrik uzayının boş olmayan ve kapalı alt kümeleri E ve F olsun. $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ dönüşümünün bir ϕ -tip orbital Meir-Keeler devirli büzülme dönüşümü olduğunu varsayalım. Bu takdirde $\forall (e, t_1) \in E$ için (3.3) eşitsizliğini sağlayan ve (z, t_3) noktasına yakınsayacak şekilde bir $\{S_b^{2n}(e, t_1)\}$ dizisinin $(z, t_3) \in E \cap F$ sabit noktası vardır.

İspat: $(e, t_1) \in E$ alalım. $\{S_b^n(e, t_1)\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. $\{S_b^n(e, t_1)\}$ dizisinin Cauchy dizisi olmadığını varsayalım. Bu takdirde bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $\{S_b^n(e, t_1)\}$ dizisinin

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^{n(i)+1}(e, t_1)\right)\right) > 2\varepsilon \quad (4.29)$$

eşitsizliğini sağlayan $\{S_b^{n(i)}\}$ alt dizisi vardır. Bu $\varepsilon > 0$ için

$$\phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right)\right) < \varepsilon + \delta$$

eşitsizliğinin

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b(f, t_2)\right)\right) < \varepsilon \quad (4.30)$$

eşitsizliğini gerektirecek şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur. Burada

$$\begin{aligned} \phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right)\right) &= \phi\left(\frac{1}{3}\left[\tilde{m}\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+\tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b^{2n-1}(e, t_1)\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+\tilde{m}\left(S_b(f, t_2), (f, t_2)\right)\right]\right) \end{aligned}$$

eşitliği vardır. $r = \min\{\varepsilon, \delta\}$ ve $\tilde{m}_m = \tilde{m}\left(S_b^m(e, t_1), S_b^{m+1}(e, t_1)\right)$ olacak şekilde alalım.

Önerme 4.0.1'den $m \geq n_0$ için

$$\phi\left(\tilde{m}_m\right) = \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^m(e, t_1), S_b^{m+1}(e, t_1)\right)\right) < \frac{r}{4} \quad (4.31)$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ seçilebilir. $n(i) \geq N$ olsun.

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^{n(i)+1}(e, t_1)\right)\right) < \frac{r}{2}$$

olduğunu varsayalım. Bu takdirde, üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^{n(i+1)}(e, t_1)\right)\right) &\leq \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^{n(i)-1}(e, t_1)\right)\right) \\ &\quad + \tilde{m}\left(S_b^{n(i)-1}(e, t_1), S_b^{n(i+1)}(e, t_1)\right) \\ &= \varepsilon + \frac{r}{2} + \tilde{m}_{n(i+1)-1} < 2\varepsilon \end{aligned} \quad (4.32)$$

olduğunu elde ederiz. Bu (4.31) varsayımı ile çelişir. Böylece

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^k(e, t_1)\right)\right) > \varepsilon + \frac{r}{2}$$

olacak şekilde $n(i) \leq k \leq n(i+1)$ olan k değerleri vardır.

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^{n(i)+1}(e, t_1)\right)\right) \geq \varepsilon + \frac{r}{2}$$

olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$\phi\left(\tilde{m}_{n(i)}\right) = \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^{n(i)+1}(e, t_1)\right)\right) \geq \varepsilon + \frac{r}{2} > r + \frac{r}{2} > \frac{r}{4}$$

olur. Bu ise (4.31) eşitsizliğinden dolayı bir çelişkidir. Böylece karşılıklı çift olan k ve $n(i)$ için

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^k(e, t_1)\right)\right) < \varepsilon + \frac{r}{2}$$

olacak şekilde $n(i) \leq k \leq n(i+1)$ olan k değerleri vardır.

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^k(e, t_1)\right)\right) \geq \varepsilon + \frac{r}{2}$$

olacak şekilde $k \geq n(i)$ olan en küçük k tamsayısını seçelim. Bundan dolayı

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^{k-1}(e, t_1)\right)\right) < \varepsilon + \frac{r}{2} \quad (4.33)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^{k-1}(e, t_1)\right)\right) &\leq \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^{k-1}(e, t_1)\right)\right) \\ &\quad + \tilde{m}\left(S_b^{k-1}(e, t_1), S_b^k(e, t_1)\right) \\ &< \varepsilon + \frac{r}{2} + \frac{r}{4} = \varepsilon + \frac{3r}{4} \end{aligned} \quad (4.34)$$

olur. Bu takdirde $n(i) \leq k \leq n(i+1)$ ifadesini sağlayan

$$\varepsilon + \frac{r}{2} \leq \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^k(e, t_1)\right)\right) < \varepsilon + \frac{3r}{4} \quad (4.35)$$

olacak şekilde bir k tamsayısı vardır. Sahip olduğumuz eşitsizlikleri göz önünde bulundurarak

$$\begin{aligned}\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^k(e, t_1)\right)\right) &< \varepsilon + \frac{3r}{4} < \varepsilon + r \\ \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^{n(i)+1}(e, t_1)\right)\right) &= \phi\left(\tilde{m}_{n(i)}\right) < \frac{r}{4} < \varepsilon + r \\ \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^k, S_b^{k+1}(e, t_1)\right)\right) &= \phi\left(\tilde{m}_k\right) < \frac{r}{4} < \varepsilon + r\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\begin{aligned}\phi\left(R\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^k(e, t_1)\right)\right) &= \phi\left(\frac{1}{3}\left[\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^k(e, t_1)\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^{n(i)+1}(e, t_1)\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+\tilde{m}\left(S_b^{k+1}(e, t_1), S_b^k(e, t_1)\right)\right]\right) \\ &\leq \frac{1}{3}\left[\varepsilon + r + \varepsilon + r + \varepsilon + r\right] \\ &= \varepsilon + r\end{aligned}\tag{4.36}$$

elde ederiz. Bu ifade

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)+1}(e, t_1), S_b^{k+1}(e, t_1)\right)\right) < \phi(\varepsilon)$$

olduğunu ifade eder. Fakat

$$\begin{aligned}\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)+1}(e, t_1), S_b^{k+1}(e, t_1)\right)\right) &\geq \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^k(e, t_1)\right)\right. \\ &\quad \left.-\tilde{m}\left(S_b^{n(i)}(e, t_1), S_b^{n(i)+1}(e, t_1)\right)\right. \\ &\quad \left.-\tilde{m}\left(S_b^k(e, t_1), S_b^{k+1}(e, t_1)\right)\right) \\ &> \varepsilon + \frac{r}{2} - \frac{r}{4} - \frac{r}{4} = \varepsilon\end{aligned}$$

ifadesi bir önceki eşitsizlik ile çelişir. Böylece $\{S_b^n(e, t_1)\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Şu halde $\{S_b^n(e, t_1)\}$ bir $(z, t_3) \in E$ noktasına yakınsar. Şimdi

$$\begin{aligned}0 \leq \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (z, t_3)\right)\right) &\leq \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), S_b^{2n}(e, t_1)\right)\right. \\ &\quad \left.+\tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), (z, t_3)\right)\right)\end{aligned}\tag{4.37}$$

ifadesinin sıfıra yakınsadığını göz önüne alalım. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (z, t_3)\right)\right) = 0\tag{4.38}$$

olur. $\{S_b^{2n-1}(e, t_1)\}$ dizisi F alt kümesinde bir dizi olduğundan bu dizi (z, t_3) 'e yakınsar. Hem E alt kümesinin hem F alt kümesinin kapalı olduğunu dikkate alarak $(z, t_3) \in E \cap F$ elde ederiz. Şimdi

$$S_b(z, t_3) = (z, t_3)$$

olduğunu gösterelim. Lemma (4.0.7)'yi dikkate alarak

$$\begin{aligned}\phi\left(\tilde{m}\left(S_b(z, t_3), (z, t_3)\right)\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b(z, t_3)\right)\right) \\ &< \phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (z, t_3)\right)\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \phi\left(\frac{1}{3}\left[\tilde{m}\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (z, t_3)\right) + \tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b^{2n-1}(e, t_1)\right) \right.\right. \\ \left.\left.+ \tilde{m}\left(S_b(z, t_3), (z, t_3)\right)\right]\right)\end{aligned}$$

ifadesi

$$\phi\left(\tilde{m}\left(S_b(z, t_3), (z, t_3)\right)\right) < \frac{1}{3}\phi\left(\tilde{m}\left(S_b(z, t_3), (z, t_3)\right)\right)$$

olmasını gerektirir. Bu bir çelişkidir. Böylece $S_b(z, t_3) = (z, t_3)$ olur. Son olarak (z, t_3) noktasının S_b dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğunu gösterelim. Farz edelim ki $(z, t_3) \neq (w, t_4)$ ve $S_b(w, t_4) = (w, t_4)$ olacak şekilde bir $(w, t_4) \in E \cap F$ sabit noktası var olsun.

$$\begin{aligned}\phi\left(\tilde{m}\left((w, t_4), (z, t_3)\right)\right) &= \phi\left(\tilde{m}\left(S_b(w, t_4), (z, t_3)\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b(w, t_4)\right)\right) \\ &< \lim_{n \rightarrow \infty} \phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (w, t_4)\right)\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi\left(\frac{1}{3}\left[\tilde{m}\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (w, t_4)\right) \right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b^{2n-1}(e, t_1)\right) \right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \tilde{m}\left(S_b(w, t_4), (w, t_4)\right)\right]\right) \\ &\leq \phi\left(\frac{1}{3}\left[\tilde{m}\left((z, t_3), (w, t_4)\right) \right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \tilde{m}\left((z, t_3), (z, t_3)\right) \right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \tilde{m}\left(S_b(w, t_4), (w, t_4)\right)\right]\right) \\ &= \frac{1}{3}\phi\left(\tilde{m}\left((z, t_3), (w, t_4)\right)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $(z, t_3) = (w, t_4)$ olduğu elde edilir. ■

Örnek 4.0.9. $X \times I = \mathbb{R} \times [0, 1]$ bir kutu (box) metrik uzay ve bu kutu (box) metrik uzayın iki alt kümesi $E = [-1, 0] \times [0, 1]$, $F = [0, 1] \times [0, 1]$ olsun. $S_b(e, t_1) = (-e, t_1)$ şeklinde tanımlanan $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ dönüşümü ve $\phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ olarak tanımlanan ϕ dönüşümü $\phi(e) = e^2$ şeklinde verilsin. İlk olarak her $(e, t_1) \in E$ için $S_b(e, t_1) \in F$ ve her $(e, t_1) \in E$ için $S_b(e, t_1) \in F$ olduğu açıkça görülür. böylece S_b

dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir devirli dönüşümdür, yani $S_b(E) \subseteq F$ ve $S_b(F) \subseteq E$ sağlanır.

Bununla birlikte $(0, 0) \in E \cap F$ ve $k \in (0, 1)$ için aşağıdaki eşitsizlikler yazılır.

$$\begin{aligned}
\tilde{m}(S_b(e, t_1), S_b(f, t_2)) &\leq k \cdot \tilde{m}((e, t_1), (f, t_2)) + (1 - k) \cdot \text{dist}(E, F) \\
\tilde{m}(S_b(0, 0), S_b(0, 0)) &\leq k \cdot \max(d(e, f), |t_1 - t_2|) + (1 - k) \cdot \text{dist}(E, F) \\
\tilde{m}((0, 0), (0, 0)) &\leq k \cdot \max(d(0, 0), |0 - 0|) + (1 - k) \cdot \text{dist}(E, F) \\
\max(d(0, 0), |0 - 0|) &\leq k \cdot \max(|0 - 0|, |0 - 0|) + (1 - k) \cdot \text{dist}(E, F) \\
\max(|0 - 0|, |0 - 0|) &\leq k \cdot \max(0, 0) + (1 - k) \cdot \text{dist}(E, F) \\
\max(0, 0) &\leq k \cdot 0 + (1 - k) \cdot 0 \\
0 &\leq 0
\end{aligned}$$

Böylece, S_b 'nin bir devirli büzülme dönüşümü olduğunu söyleyebiliriz. Daha sonra

$n \in \mathbb{N}, \varepsilon = \frac{1}{2}$ ve $\delta = \frac{1}{3} > 0$ için $S_b(0, 0) = (0, 0)$, $S_b^{2n-1}(0, 0) = (0, 0)$, $S_b^{2n}(0, 0) = (0, 0)$ ve

$$\begin{aligned}
R(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)) &= \frac{1}{3} \left[\tilde{m}(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{m}(S_b^{2n}(e, t_1), S_b^{2n-1}(f, t_2)) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{m}(S_b(e, t_2), (f, t_2)) \right] \\
R(S_b^{2n-1}(0, 0), (0, 0)) &= \frac{1}{3} \left[\tilde{m}(S_b^{2n-1}(0, 0), (0, 0)) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{m}(S_b^{2n}(0, 0), S_b^{2n-1}(0, 0)) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{m}(S_b(0, 0), (0, 0)) \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[\tilde{m}((0, 0), (0, 0)) + \tilde{m}((0, 0), (0, 0)) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{m}((0, 0), (0, 0)) \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[\max(d(0, 0), |0 - 0|) + \max(d(0, 0), |0 - 0|) \right. \\
&\quad \left. + \max(d(0, 0), |0 - 0|) \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[\max(|0 - 0|, |0 - 0|) + \max(|0 - 0|, |0 - 0|) \right. \\
&\quad \left. + \max(|0 - 0|, |0 - 0|) \right] \\
&= \frac{1}{3} [0 + 0 + 0] = 0
\end{aligned}$$

eşitliklerinin doğru olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned}
\phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(e, t_1), (f, t_2)\right)\right) &< \phi\left(\tilde{m}(E, F)\right) + \varepsilon + \delta \\
\phi\left(R\left(S_b^{2n-1}(0, 0), (0, 0)\right)\right) &< \phi\left(\tilde{m}(E, F)\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
\phi(0) &< \phi(0) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
0 &< 0 + \frac{5}{6} \\
0 &< \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise

$$\begin{aligned}
\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n}(e, t_1), S_b(f, t_2)\right)\right) &< \phi\left(\tilde{m}(E, F)\right) + \varepsilon \\
\phi\left(\tilde{m}\left(S_b^{2n}(0, 0), S_b(0, 0)\right)\right) &< \phi(0) + \frac{1}{2} \\
\phi\left(\tilde{m}\left((0, 0), (0, 0)\right)\right) &< \phi(0) + \frac{1}{2} \\
\phi\left(\max(d(0, 0), |0 - 0|)\right) &< \phi(0) + \frac{1}{2} \\
\phi\left(\max(|0 - 0|, |0 - 0|)\right) &< \phi(0) + \frac{1}{2} \\
\phi\left(\max(0, 0)\right) &< \phi(0) + \frac{1}{2} \\
\phi(0) &< \phi(0) + \frac{1}{2} \\
0 &< 0 + \frac{1}{2} \\
0 &< \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

olduğunu ifade eder. Böylece S_b dönüşümünün bir ϕ -type orbital Meir Keeler devirli büzülme dönüşümü olduğu söylenir. Sonuç olarak, $(0, 0) \in E \cap F$ noktası S_b dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Teorem 4.0.10. $(X \times I, \tilde{m})$ bir kutu (box) metrik uzay ve $E \subseteq X \times I$, $F \subseteq X \times I$ olsun. $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ bir devirli büzülme dönüşümü olsun. Bu takdirde $(e_{n+1}, t_{n+1}) = S_b(e_n, t_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere herhangi bir $(e_0, t_0) \in E \cup F$ elemanı ile başlayarak $\tilde{m}((e_n, t_n), S_b(e_n, t_n)) \rightarrow \text{dist}(E, F)$ yakınsamasını elde ederiz.

İspat:

$$\begin{aligned}
\tilde{m}((e_n, t_n), (e_{n+1}, t_{n+1})) &\leq k \cdot \tilde{m}((e_{n-1}, t_{n-1}), (e_n, t_n)) \\
&\quad + (1 - k) \text{dist}(E, F) \\
\max(d(e_n, e_{n+1}), |t_n - t_{n+1}|) &\leq k \cdot \max(d(e_{n-1}, e_n), |t_{n-1} - t_n|) \\
&\quad + (1 - k) \text{dist}(E, F) \\
&\leq k \cdot (k \cdot \tilde{m}((e_{n-1}, t_{n-1}), (e_{n-2}, t_{n-2}))) \\
&\quad + (1 - k) \text{dist}(E, F) \\
&\leq k \cdot (k \cdot \max(d(e_{n-1}, e_{n-2}), |t_{n-1} - t_{n-2}|)) \\
&\quad + (1 - k) \text{dist}(E, F) \\
&\leq k^2 \cdot \tilde{m}((e_{n-1}, t_{n-1}), (e_{n-2}, t_{n-2})) \\
&\quad + (1 - k^2) \text{dist}(E, F) \\
&\leq k^2 \cdot \max(d(e_{n-1}, e_{n-2}), |t_{n-1} - t_{n-2}|) \\
&\quad + (1 - k^2) \text{dist}(E, F)
\end{aligned}$$

n üzerinden indüksiyonla

$$\max(d(e_n, e_{n+1}), |t_n - t_{n+1}|) \leq k^n \cdot \tilde{m}((e, t_1), (e_0, t_0)) + (1 - k^n) \text{dist}(E, F)$$

elde edilir. $0 < k < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $k^n \rightarrow 0$ olup

$$\tilde{m}((e_n, t_n), (e_{n+1}, t_{n+1})) \rightarrow \text{dist}(E, F)$$

yakınsaması elde edilir. ■

Teorem 4.0.11. $(X \times I, \tilde{m})$ bir kutu (box) metrik uzay ve $E \subseteq X \times I$, $F \subseteq X \times I$ olsun. $S_b : E \cup F \rightarrow E \cup F$ bir devirli büzülme dönüşümü ve $(e_0, t_0) \in E$ olsun. $(e_{n+1}, t_{n+1}) = S_b(e_n, t_n)$ olarak tanımlansın. (e_{n+1}, t_{n+1}) dizisinin E 'de yakınsak bir alt diziye sahip olduğunu varsayalım. Bu takdirde $\tilde{m}((e_n, t_n), S_b(e_n, t_n)) = \text{dist}(E, F)$ olacak şekilde E 'de $\exists(e, t_1)$ elemanı vardır.

İspat: $\{(e_{2n_k}, t_{2n_k})\}$, E 'de (e, t_1) ye yakınsak bir $\{(e_{2n}, t_{2n})\}$ dizisinin bir alt dizisi olsun.

İki küme arasındaki uzaklık ve üçgen eşitsizliği gereğince

$$\begin{aligned}
\text{dist}(E, F) &\leq \tilde{m}((e, t_1), (e_{2n_k-1}, t_{2n_k-1})) \leq \tilde{m}((e, t_1), (e_{2n_k}, t_{2n_k})) \\
&\quad + \tilde{m}((e_{2n_k}, t_{2n_k}), (e_{2n_k-1}, t_{2n_k-1})) \\
&\leq \tilde{m}((e, t_1), (e_{2n_k}, t_{2n_k})) + \tilde{m}((e_{2n_k}, t_{2n_k}), S_b(e_{2n_k}, t_{2n_k}))
\end{aligned}$$

burada

$$\tilde{m}((e, t_1), (e_{2n_k}, t_{2n_k})) \rightarrow 0$$

ve

$$\tilde{m}((e_{2n_k}, t_{2n_k}), S_b(e_{2n_k}, t_{2n_k})) \rightarrow \text{dist}(E, F)$$

olduğundan

$$\lim \text{dist}(E, F) \leq \lim \tilde{m}((e, t_1), (e_{2n_k-1}, t_{2n_k-1})) \leq 0 + \text{dist}(E, F)$$

olur. Böylece

$$\tilde{m}((e, t_1), (e_{2n_k-1}, t_{2n_k-1})) \rightarrow \text{dist}(E, F)$$

elde edilir. ■



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, kutu(box) metrik uzaylar ile ilgili bilgiler verilmiştir ve bazı sabit nokta teoremlerini ifade ve ispat etmek amacıyla kutu (box) metrik uzaylarda dizi, yakınsak dizi, Cauchy dizisi, tamlık ve büzülebilirlik kavramları kutu (box) metrik uzaylar kullanılarak yeniden tanımlanmıştır.

Literatürde yer alan devirli büzülme dönüşümleri ile ilgili bazı teoremlerin yanında devirli Banach büzülme dönüşümü, devirli Kannan tipi devirli büzülme dönüşümü ve ϕ - tip orbital Meir-Keeler devirli büzülme dönüşümü kutu (box) metrik uzaylar kullanılarak ispat edilmiştir. Bu teoremlerin ispatlarına yönelik yardımcı olması bakımından bazı tanım, teorem ve lemmalar yine kutu (box) metrik uzaylar kullanılarak verilmiştir. Ayrıca okuyucular için teoremlerin daha anlaşılır olması amacıyla bazı örnekler de sunulmuştur.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların dışında literatürde yer alan Ciric, Chatterja, Suzuki, Brouwer tipi büzülme dönüşümleri ve yine Ciric, Chatterja, Suzuki, Brouwer tipi devirli büzülme dönüşümleri kutu (box) metrik uzaylar kullanılarak ifade ve ispat edilebilir. Ayrıca kutu (box) metriği tanımlarken kullandığımız $d(e, f)$ metrik fonksiyonunun yerine ayrık, norm, bulanık, esnek metrik gibi farklı metrikler kullanılarak kutu (box) metrik uzaylar için farklı çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Banach, S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales. Fundam. Math. 1922, 3, 133-181.
- [2] Kirk, WA., Srinivasan, S., Veeramani, P. Fixed points for mapping satisfying cyclic contractive conditions. Fixed Point Theory. 2003, 4, 79-89.
- [3] Karapinar, E., Erhan, I.M. Cyclic contractions and fixed point theorems. Filomat. 2012, 26(4), 777-782.
- [4] Petruşel, G. Cyclic representations on a periodic points. Studia Univ. Babes-Bolyai Math. 2005, 50, 107-112.
- [5] Pacurar, M., Rus, IA. Fixed point theory for ϕ -contractions. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2010, 72(3-4), 1181-1187.
- [6] Karapinar, E. Fixed point theory for cyclic weaker ϕ -contraction. Applied Mathematics Letters. 2011, 24, 822-825.
- [7] Karpagam, S., Agarwal, S. Best proximity points theorems for cyclic orbital Meir-Keeler contraction maps. Nonlinear Analysis. 2011, 74, 1040-1046.
- [8] Rezapour, S., Derafshpour, M., Shahzad, N. On the existence of best proximity point of cyclic contractions. Advances in Dynamical Systems and Applications. 2011, 6, 1, 33-40.
- [9] Rezapour, S., Derafshpour, M., Shahzad, N. Best proximity points theorems for cyclic φ -contractions in ordered metric spaces. Topological Methods in Non-linear Analysis. 2011, Vol 37, No.1, 193-197.
- [10] Sankara, Raju Kosuru G., Veeramani, P. A Note on Existence and Convergence of Best Proximity Points for Pointwise Cyclic contractions. Numerical Functional Analysis and Optimization. 2011, 32, 7, 821-830.
- [11] Karapinar, E., Erhan I.M. Best proximity point on different type contractions, Appl. Math. Inf. Sci. 2011, 3(3), 558-569.
- [12] Karapinar, E. Best Proximity Points of Kannan Type Cyclic Weak ϕ -contractions in ordered metric spaces. (submitted)
- [13] Karapinar, E., Petruşel, G., Taş, K. Best proximity point theorems for KT-types cyclic orbital contraction mappings. House Book Science. 2012.
- [14] Kumari, PS., Panthi, D. Cyclic Contractions and fixed point theorems on various generating spaces. 2015, 153.
- [15] Rus, I.A. Cyclic representations and fixed points. Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations. Approximation and Convexity. 2005, 3, 171-178.
- [16] Balpetek, G. Fixed Point Theorems For Cyclic Contraction Mappings, Çankaya University, The Graduate School Of Natural And Applied Sciences Mathematics And Computer Science, 2013, 44 pages, (Master Thesis)

- [17] Al-Thafai, M.A., Shazad, N. Convergence and existence for best proximity points. *Nonlinear Analysis*. 2009, 70, 3665-3671.
- [18] Aydi, H., Felhi, A. Best proximity points for cyclic Kannan-Chatterjea-Ciric type contractions metric-like spaces. *J. Nonlinear Sci. Appl.* 2016. 9, 5, 2458-2466.
- [19] Samet, B. Some Results on best proximity points. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2013, 159, 1, 281-291.
- [20] Kannan, R. Some results on fixed point. *Bull. Cal. Math. Soc.* 1968, 60, 71-76.
- [21] Kannan, R. Some results on fixed point II. *Amer. Math. Monthly*. 1969, 76, 405-408.
- [22] Kannan, R. Some results on fixed point III. *Fund. Math.* 1971, 70, 196-177.
- [23] Meir, A., Keeler, A. A theorem on contraction mappings. *J. Math. Anal. Appl.* 1969, 28, 326-329.
- [24] Petruşel, A., Petruşel, G. A note on multivalued Meir-Keeler type operators, *Stud. Univ. Babes-Bolyai Math.* 2006, 51, 181-188.
- [25] Ciric, L.B. On contraction type mapping. *Math. Balkanica*. 1971, 1, 52-57
- [26] Granas, A., Dugundji, J. *Fixed Point Theory*. Springer. 2002, 690.
- [27] Rus, I.A., Petruşel, A., Petruşel, G. *Fixed point theory*. Cluj University Press. 2008, 2, 2.
- [28] Kurepa, D. Tableaux ramifies d'ensembles, *Espaces pseudo-distancias*. *Comptes Rendus Mathematique*. 1934, 198, 1563-1565.
- [29] Deza, E., Deza M.M. *Encyclopedia of distances*, Springer, Berlin Heidelberg, 2009.