



DEVİRLİ MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Makbule ÇİÇEK

Danışman
Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2023

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DEVİRLİ MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ

Makbule ÇİÇEK

Danışman

Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2023

TEZ ONAY SAYFASI

Makbule ÇİÇEK tarafından hazırlanan “Devirli Möbius Dönüşümleri ” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca/...../..... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL

Başkan : Doç. Dr. Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

10/07/2023

Makbule ÇİÇEK

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

DEVİRLİ MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ

Makbule ÇİÇEK
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, Möbius dönüşümlerinin temel tanım ve teoremleri ele alınmıştır. Dördüncü bölümde, 2-devirli Möbius dönüşümlerinin temel tanım ve teoremleri ele alınmıştır. Beşinci bölümde, n -devirli Möbius dönüşümlerinin verilen teoremlerle geometrik yorumu yapıp n -devirlinin tanımı ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca, 2-devirli ve 3-devirli invaryant çemberlerin oluşumu ele alınmış, $n \geq 4$ için n -devirliler altında invaryant çemberlerin yapısı incelenmiştir.

2023, vi + 54 sayfa

Anahtar Kelimeler: Möbius dönüşümleri, Sabit nokta, 2 Devir, Konform dönüşümler, Yörünge, Kompleks dinamikler.

ABSTRACT
M. Sc. Thesis

MÖBIUS TRANSFORMATIONS WITH CYCLES

Makbule ÇİÇEK

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Oğuzhan DEMİREL



This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction section. In the second chapter, the basic required concepts for our study are given. In the third chapter, the basic definitions and theorems of Möbius transformations are considered. In the fourth chapter, basic definitions and theorems of 2-cycle Möbius transformations are discussed. In the fifth chapter, geometric interpretation of n -cycle Möbius transformations with the given theorems and definition and properties of n -cycle are given. In addition, the formation of 2-cycle and 3-cycle invariant circles is discussed, and the structure of invariant circles under n -cycles for $n \geq 4$ is investigated.

2023, vi + 54 pages

Key Words: Möbius transformation, Fixed point, 2-cycle, Conformal mapping, Orbit, Complex dynamics.

TEŐEKKÖR

Bu alışmamın her aşamasında araştırmalarımı y nlendiren,  neri ve yardımlarını esirgemeyen, değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan danışman hocam Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL' e, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma, arkadaşlarıma ve aileme teőekk r ederim.

Makbule ÇİÇEK
Afyonkarahisar 2023

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
3. MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ	18
4. 2-DEVİRLİ MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ	26
5. n -DEVİRLİ MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ.....	36
5.1 2-Devirli İnvaryant Çemberlerin Oluşturulması	40
5.2 3-Devirli Möbius Dönüşümler Altında İnvaryant Kalan Çemberlerin ve Doğruların Oluşturulması	45
5.3 $n \geq 4$ İçin n -Devirli Möbius Dönüşümleri Oluşturulması	48
6. KAYNAKLAR.....	52
ÖZGEÇMİŞ.....	54

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}^+$	Genişletilmiş Kompleks Düzlem
$\mathbb{R}^*$	Sıfırdan Farklı Reel Sayılar Kümesi
$SL(2, \mathbb{C})$	Özel Lineer Grup
$PSL(2, \mathbb{C})$	Projektif Özel Lineer Grup
$\mathbb{M}$	Möbius Dönüşümleri Grubu
$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Genişletilmiş Kompleks Düzlem
$e^{i\theta}$	Üstel Fonksiyon
$\mathbb{D}$	Kompleks Birim Disk
$\ , \ $	Norm Fonksiyonu
$ $	Modül

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1 L_1 doğrusu ve L_2 doğrusunun z_0 noktasında kesişimi.....	7
Şekil 2.2 (a) Ötelemeler ve (b) döndürmeler, yansımaların bileşkesidir.....	9
Şekil 2.3 Q çemberine göre invers noktalar	10
Şekil 2.4 P ve P_1 noktalarından geçen Q çemberine dik olan Q' çemberi	11
Şekil 2.5 p noktasının C çemberine göre kuvveti.....	14
Şekil 2.6 C çemberi ve D çemberi ortogonaldır.....	16
Şekil 3.1 $z_1 \rightarrow w_1, z_2 \rightarrow w_2, z_3 \rightarrow w_3$ eşleyen bir Möbius dönüşümü	23
Şekil 3.2 $i = 1, 2, 3$ için $z_i \rightarrow w_i$ eşleyen bir Möbius dönüşümü	25
Şekil 4.1 w ile $f(w)$ noktaları L_1 doğrusuna göre simetriktir	29
Şekil 4.2 S, γ_1 ve γ_2 sabit noktalarından geçen çember	31
Şekil 4.3 C ve K çemberleri ortogonaldır	33
Şekil 5.1 O, C çemberini kesen doğru	42
Şekil 5.2 C_2, L_1' e göre simetrik ve C' ye dik bir çember.....	44
Şekil 5.3 3-devrilinin iki sabit noktası	46
Şekil 5.4 3-devirli invaryant çemberler	48
Şekil 5.5 $g^{-1}(C), (a, b)$ doğrusunu z ve w 'de keser.....	49
Şekil 5.6 $C_1, (0, c)$ doğrusunu $g(z)$ ve $-g(z)'$ de keser.....	51

1. GİRİŞ

Genişletilmiş kompleks düzlemde kendisi üzerine tanımlı bir $f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Möbius dönüşümü (kesirli lineer dönüşüm)

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

biçiminde tanımlıdır. Möbius dönüşümleri hem kompleks analizde hem de hiperbolik geometride oldukça önemli bir yere sahip olup bu dönüşümler birçok önemli özelliğe sahiptir.  rnek verilecek olursa Möbius dönüşümleri açıları,  ifte oranı ve çemberleri ( klidyen çemberler ve genişletilmiş doğruları) korur ve Möbius dönüşümleri bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Hiperbolik geometride ise izometrilere (hiperbolik uzaklıkları koruyan dönüşümler) Möbius dönüşümleri yardımıyla tanımlıdır. Orjin etrafında dönme fonksiyonu, öteleme fonksiyonu ve inversiyonlar bilinen en meşhur Möbius dönüşümleridir. Birim dönüşüm olmayan bir Möbius dönüşümü en fazla iki noktayı sabit bırakabilir. Tariq A. Al-Fadhel “Möbius Transformation With A 2-Cycle- Arab J. Math. Sc. Volume I4, Number 2, December 2008 pp I3-23” adlı makalesinde en az 2 devirli bir Möbius dönüşümünün

$$f(z) = \frac{az+b}{z-a}, \quad a^2 + b \neq 0 \quad (*)$$

biçiminde yazılabildi ini gösterdi. Ayrıca yazar bu çalışmada (*) deki Möbius dönüşümünün sabit iki noktasından geçen çemberleri kendisine g t rd   sonucuna ulaşmıştır. Daha sonra Tariq A. Al-Fadhel ve Mongi Blel, n-devirli Möbius dönüşümleri üzerine çalışarak yukarıda bahsedilen makalenin bir genellemesini elde etmişlerdir. Ayrıca yazarlar n-devirli Möbius dönüşümleri altında invaryant kalan çemberleri geometrik argümanlarla karakterize ettiler. Bu tezin amacı n-devirli Möbius dönüşümlerini ele alıp, bu dönüşümlerin bazı geometrik özelliklerini ele almak olacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Aşağıdaki tanımlar ve teoremler için temel kaynaklarımız; Başkan (1996), Beardon (2005), Hitchman (2018), Al-Fadhel (2008), Olsen (2010), Sabuncuoğlu (2003), Sabuncuoğlu (2008) olacaktır.

Tanım 2.1 f fonksiyonu bir z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, f fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilir denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $f'(z_0)$ sayısına f nin z_0 daki türevi denir. Yani $f'(z_0)$ değeri,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2 Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, z_0 da analitiktir denir. Eğer bir f karmaşık fonksiyonu bir S kümesinin bütün noktalarında analitikse, f, S üzerinde analitiktir denir. Bir f fonksiyonu C nin tüm noktalarında analitikse, f ye tam fonksiyon denir. Bir B bölgesinde birebir ve analitik olan f fonksiyonuna bu bölgede ünivalenttir denir.

Tanım 2.3 B, C de bir bölge olmak üzere $f: B \rightarrow C$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1, γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ görüntü eğrileri de w_0 da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı oluşturuyorsa f fonksiyonuna z_0 da bir konform dönüşümdür denir. Eğer her $z_0 \in B$ noktasında f konform ise f, B de konformdur denir.

Tanım 2.4 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ ve $T: \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$ olmak üzere $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ biçiminde tanımlanmış fonksiyona, kesirli doğrusal dönüşüm ya da Möbius dönüşümü denir. $T\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty, T(\infty) = \frac{a}{c}$ biçimindedir. $ad - bc$ karmaşık sayısına T Möbius dönüşümünün determinanı denir ve $\text{Det}(T)$ olarak gösterilir.

Teorem 2.5 Her $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius dönüşümü birebir, örten bir konform dönüşümdür.

Teorem 2.6 $M = \left\{ T: \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+ \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d}; a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$ kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur.

$I(z) = z$ birim dönüşümü için; $a = d \neq 0$ ve $b = c = 0$ olmak üzere;

$$I(z) = z = \frac{az+0}{0z+d}$$

yazılabileceğinden birim dönüşüm de bir Möbius dönüşümdür.

Ayrıca bir T Möbius dönüşümünün tersi;

$$T^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$$

şeklindedir ve T^{-1} dönüşümünün de bir Möbius dönüşümü olduğu açıktır.

Tanım 2.7 $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^+$ için bu dört noktanın çapraz oranı (çifte oranı)

$$[z, z_1, z_2, z_3] = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

biçimindedir.

Tanım 2.8 $T_t(z) = z + t$, $t \in \mathbb{C}$ şeklindeki dönüşümlere öteleme (kayma) dönüşümü denir. Bu dönüşümler birer Möbius dönüşümüdür ve $T(\infty) = \infty$ dir.

Tanım 2.9 $R_\theta(z)=e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$ şeklindeki dönüşümlere orijin etrafında dönme dönüşümü denir. Bu dönüşümler birer Möbius dönüşümü olup $R_\theta(0) = 0, R_\theta(\infty) = \infty$ ’dur. Eğer $\theta > 0$ ise pozitif yönde dönme , $\theta < 0$ ise negatif yönde dönme olur.

Tanım 2.10 $J(z) = \frac{1}{z}$ şeklindeki dönüşüme inversiyon (tersinme) dönüşümü denir. Bu dönüşüm bir Möbius dönüşümüdür.

Tanım 2.11 $S_r(z) = rz$, $r \neq 0, r \in \mathbb{R}$ şeklindeki dönüşümlere germe dönüşümü denir. Bu dönüşümler birer Möbius dönüşümüdür.

$S_r(z) = rz$ dönüşümü 0 ve ∞ noktalarını sabit bırakır.

Tanım 2.12 $a, b \in \mathbb{C}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $T(z) = az + b$ biçimindeki dönüşümlere genel lineer dönüşüm denir. Bu dönüşümler birer Möbius dönüşümüdür.

Teorem 2.13 T bir genel lineer dönüşüm olmak üzere

a) T doğruları doğrulara eşler. Yani $L, \mathbb{C}$ ’ de bir doğruysa, $T(L)$ de bir doğrudur.

b) T çemberleri çemberlere eşler.

İspat.

İspata başlamadan önce z kompleks düzleminde $z = x + iy$ değişkenine göre çemberin ve doğrunun denklemini elde edelim.

$\mathbb{R}^2$ uzayında bir doğrunun denklemi x, y koordinat fonksiyonlarına göre

$$ax + by + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

biçimindedir. Bu doğru $z = x + iy$ kompleks değişkenine göre $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ olmak üzere

$$a\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + b\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + c = 0$$

yani

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2i}\right)z + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2i}\right)\bar{z} + c = 0$$

biçiminde ifade edilebilir. $\frac{a}{2} + \frac{b}{2i} = \beta$ alınırsa son denklem

$$\beta z + \bar{\beta} \bar{z} + c = 0$$

biçimindedir. Benzer şekilde $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $d \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + d = 0$$

denklemi kompleks düzlemde bir doğru belirtir. Kompleks düzlemde bir doğru

$$|z - \gamma| = |z - \delta|$$

biçiminde de bir denklem belirtir. Burada $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$ olup bu doğru üstündeki her nokta γ, δ noktalarına eşit uzaklıktadır.

$\mathbb{R}^2$ uzayında $M(a, b)$ merkezli r yarıçaplı çemberin denklemi x, y koordinat fonksiyonlarına göre

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (a, b, r \in \mathbb{R})$$

biçimindedir. $z = x + iy$ kompleks değişkenine göre bu denklem yukarıdaki doğru denkleminde olduğu gibi

$$\left(\frac{z + \bar{z}}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} - b\right)^2 = r^2$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklem düzenlenirse $-4a + 4bi = \beta$ ve $4a^2 + 4b^2 - 4r^2 = \gamma$ için

$$4z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$$

denklemini elde edilir. Genel olarak z kompleks düzleminde bir çember $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}$ için

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$$

biçimindedir.

a) $\alpha \in \mathbb{C}, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + d = 0$ denklemleri L doğrusu seçilsin. $T(z) = az + b$ ($a \neq 0$) lineer dönüşümü altında $T(L)$ 'nin bir doğru olduğunu göstermeliyiz. $T(z) = w$ eşitliğinden

$$\alpha \frac{w - b}{a} + \bar{\alpha} \frac{\overline{w - b}}{\bar{a}} + d = 0$$

$$\frac{\alpha}{a}w + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{a}}\bar{w} + d - \frac{\alpha b}{a} - \frac{\bar{\alpha}\bar{b}}{\bar{a}} = 0$$

elde edilir.

Herhangi bir β kompleks sayısı için $\beta + \bar{\beta}$ reel bir sayıdır, dolayısıyla yukarıdaki ifadede $d - \left(\frac{\alpha b}{a} + \frac{\bar{\alpha}\bar{b}}{\bar{a}}\right)$ bir reel sayıdır. Bu nedenle, $T(L)$ 'deki tüm w 'ler bir doğru denklemini sağlar. Yani, $T(L)$ bir doğrudur.

b) Bir önceki önermenin ispatına benzer olarak yapılır.

Tanım 2.14 z_0 noktasında kesişen her r_1, r_2 düzgün eğrisi için

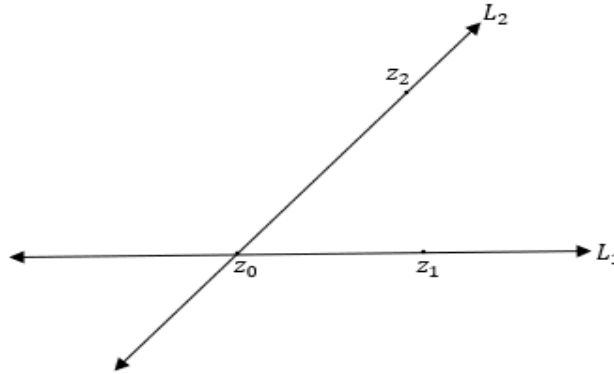
$$\angle(r_1, r_2) = \angle(T(r_1), T(r_2))$$

oluyorsa T' ye z_0 noktasında açılar korur denir. Eğer T dönüşümü tüm z_0 noktalarında açılar koruyorsa T' ye açılar korur denir. Eğer kesişen her r_1, r_2 düzgün eğrisi için $\angle(r_1, r_2) = -\angle(T(r_1), T(r_2))$ oluyorsa T' ye açılarının büyüklüklerini koruyor denir.

Teorem 2.15 Genel lineer dönüşüm açılar korur.

İspat.

$a \neq 0$ olmak üzere $T(z) = az + b$ olduğunu varsayalım. Eğriler arasındaki açı, teğet doğrular arasındaki açı olarak tanımlandığından, iki doğru arasındaki açının korunduğunun gösterilmesi yeterlidir. L_1 ve L_2 'nin z_0 'da kesiştiğini ve aşağıdaki şekilde olduğu gibi $i = 1, 2$ için z_i 'nin L_i üzerinde olduğunu varsayalım.



Şekil 2.1 L_1 doğrusu ve L_2 doğrusunun z_0 noktasında kesişimi.

Bu durumda, $\angle(L_1, L_2) = \arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right)$ olur.

Genel lineer dönüşüm doğruları koruduğundan, $i = 1, 2$ için $T(L_i)$, $T(z_0)$ ve $T(z_i)$ 'den geçen doğrudur ve böylece

$$\angle(T(L_1), T(L_2)) = \arg\left(\frac{T(z_2) - T(z_0)}{T(z_1) - T(z_0)}\right) = \arg\left(\frac{az_2 + b - az_0 - b}{az_1 + b - az_0 - b}\right) = \arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) = \angle(L_1, L_2)$$

elde edilir. O halde T açıları korur.

Tanım 2.16 $\mathbb{C}$ 'deki Öklid uzaklıklarını koruyan dönüşümlere yani $\forall z, w \in \mathbb{C}$ için $|T(z) - T(w)| = |z - w|$ koşulunu sağlayan T dönüşümlerine $\mathbb{C}$ 'de bir Öklid izometrisi denir. Düzlemdeki her noktayı aynı yönde aynı büyüklükte hareket ettiren ötelemelerin izometri olduğu açıktır. Dönemler de birer izometridir. Aslında, genel lineer dönüşüm $T(z) = az + b$, $|a| = 1$ olduğu sürece bir Öklid izometrisidir. Gerçekten

$$|T(z) - T(w)| = |az + b - (aw + b)|$$

$$= |a(z - w)|$$

$$= |a||z - w|$$

$$|T(z) - T(w)| = |z - w| \Leftrightarrow |a| = 1.$$

Teorem 2.17 $\mathbb{C}$ 'nin bir ötelemesi, iki paralel doğrunun yansımalarının bileşkesidir. $\mathbb{C}$ 'nin bir z_0 noktası etrafındaki dönüşü, z_0 'da kesişen iki doğrunun yansımalarının bileşkesidir.

İspat.

$T_b(z) = z + b$ ötelemesi verildiğinde, L_1 'in Şekil 2.2 (a)'da gösterildiği gibi Ob doğru parçasına dik olan orijinden geçen doğru olsun. L_2 , Ob doğru parçasının orta noktasından geçen L_1 'e paralel doğru olsun. Ayrıca $i = 1, 2$ için r_i, L_i doğrusu etrafındaki yansımayı gösterebiliriz.

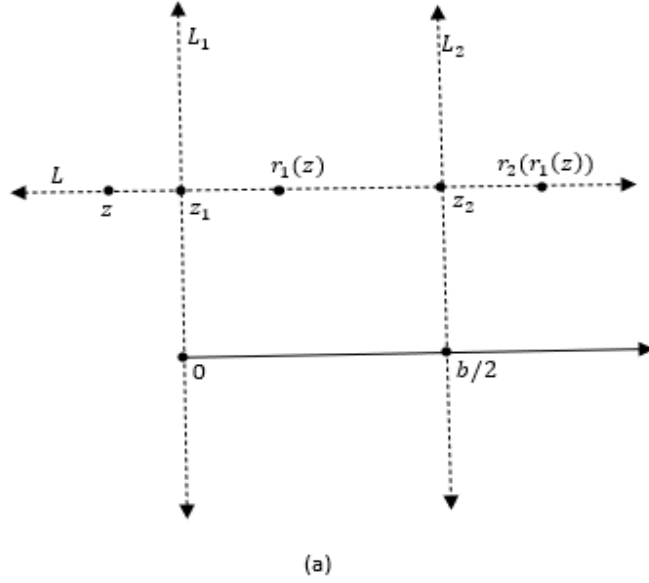
Şimdi, $\mathbb{C}$ 'deki herhangi bir z verildiğinde, L, b vektörüne paralel (ve dolayısıyla L_1 ve L_2 'ye dik) z 'den geçen doğru olsun. z 'nin $r_2 \circ r_1$ bileşkesi altındaki görüntüsü bu doğru üstünde olacaktır. Bu noktayı bulmak için z_1, L_1 ve L' nin kesişim noktası ve z_2 ise L_2 ve L' nin kesişim noktası olsun. z' yi L_1 'e göre yansıtmak için, $z_1 - z$ vektörü ile L boyunca iki kez ötelememiz gerekir. Böylece $r_1(z) = z + 2(z_1 - z) = 2z_1 - z$ elde edilir.

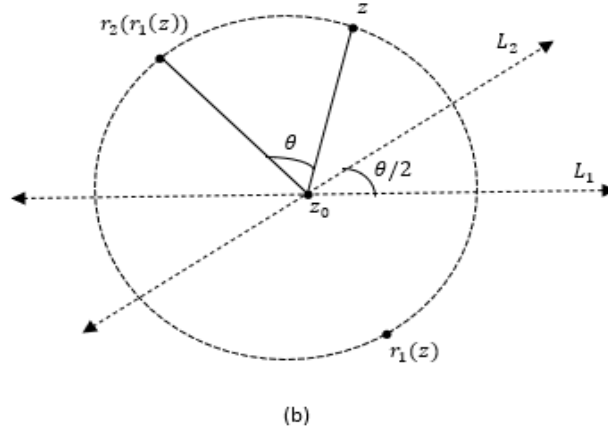
Daha sonra, $r_1(z)$ 'yi L_2 'ye yansıtmak için, $z_2 - r_1(z)$ vektörü ile L boyunca iki kez ötelemek gerekir. Böylece,

$$r_2(r_1(z)) = r_1(z) + 2(z_2 - r_1(z)) = 2z_2 - r_1(z) = 2z_2 - 2z_1 + z$$

elde edilir. Şekil 2.2 (a)' dan $z_2 - z_1 = b/2$ olup, buradan $r_2(r_1(z)) = z + b$ elde edilir.

z_0 noktası etrafında θ açısı ile dönme fonksiyonu, iki yansımanın bileşkesi olarak elde edilebilir. İlk yansıma, Şekil 2.2 (b)' de olduğu gibi, z_0 noktasından geçen reel eksene paralel olan L_1 doğrusuna göre ve ikinci yansıma ise L_1 doğrusunu z_0 noktasında $\theta/2$ açısıyla kesen L_2 doğrusuna göre dir.



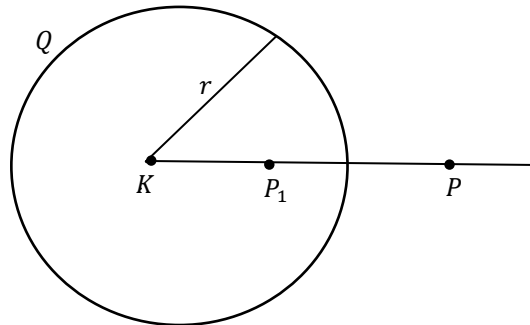


Şekil 2.2 (a) Ötelemeler ve (b) döndürmeler, yansımaların bileşkesidir.

Teorem 2.18 Bir doğru boyunca yansıma bir Öklid izometrisidir. Ayrıca, herhangi bir yansıma doğruları doğrulara, çemberleri çemberlere eşler ve açı büyüklüklerini korur.

Teorem 2.19 Herhangi bir Öklid izometrisi, en fazla üç yansımanın bileşkesidir.

Tanım 2.20 K merkezli r yarıçaplı herhangi bir Q çemberi alalım. P düzlemde herhangi bir nokta olsun. P_1 , KP yarı doğrusu üzerinde bulunan ve $|KP_1| \cdot |KP| = r^2$ eşitliğini gerçekleyen bir nokta ise, P_1 e P nin Q çemberine göre tersi (invers) denir. P ve P_1 noktalarına Q çemberine göre invers noktalar denir. (Şekil 2.3)



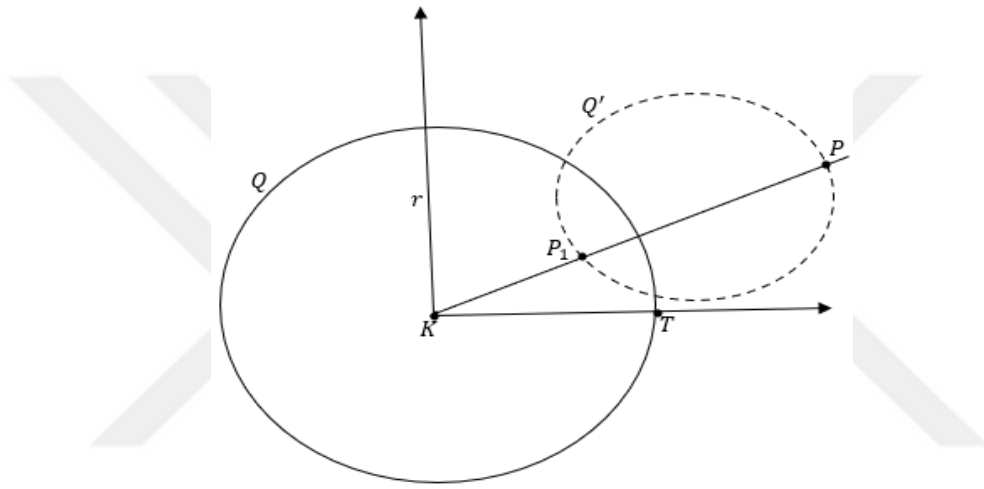
Şekil 2.3 Q çemberine göre invers noktalar.

Özel olarak Q bir doğru ise, P_1 ' e P ' nin Q ' ya göre yansıması denir.

Teorem 2.21 P ve P_1, Q ya göre invers noktalar ise P ve P_1 den geçen her çember Q ya diktir.

İspat.

$Q'P$ ve P_1 ' den geçen herhangi bir çember olsun ve Q' ye KT teğetini çizelim. KTP_1 ve KTP üçgenlerinin benzerliğinden ve Tanım 2.20' den $KT^2 = KP_1 \cdot KP = r^2$



Şekil 2.4 P ve P_1 noktalarından geçen Q çemberine dik olan Q' çemberi.

yazılabilir. O halde T, Q' nun üzerine düşer. Böylece görülüyor ki T ' den geçen yarıçaplar dik ve dolayısıyla Q ve Q' dik çemberlerdir.

Örnek 2.22 $\mathbb{C}$ 'de $z_0 = 0$ ve yarıçapı $r = 1$ olan birim çember $\mathbb{S}^1$ ile gösterilsin. $z \in \mathbb{C} (z \neq 0)$ için $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = r^2$ denklemi $z_0 = 0$ ve $r = 1$ için düzenlenirse $|z| \cdot |z^*| = 1$ elde edilir. Ayrıca z^* , orjinden geçen aynı ışın üzerinde olduğundan, $z^* = kz (k \in \mathbb{R}^+)$ biçimindedir. Her iki tarafın mutlak değerini alınırsa $k = |z^*|/|z|$ olur. $|z^*| = 1/|z|$ olduğundan $k = 1/|z|^2$ elde edilir. Ayrıca, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ eşitliğinden $\mathbb{S}^1$ birim çemberindeki inversiyon $i_{\mathbb{S}^1}(z) = 1/\bar{z}$ olarak bulunur.

r yarıçaplı z_0 merkezli C çemberinde inversiyon

$$i_C(z) = \frac{r^2}{(\bar{z} - \bar{z}_0)} + z_0$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.23 Genişletilmiş kompleks düzlemdeki Öklid çemberlerine ve genişletilmiş doğrulara ç doğru denir.

Teorem 2.24 $\mathbb{C}$ ' deki üç farklı noktadan geçen bir tek ç doğrusu vardır.

Teorem 2.25 Bir çember içindeki inversiyon, ç doğrularını ç doğrularına eşler. Özellikle eğer bir ç doğrusu inversiyon çemberinin merkezinden geçerse, görüntüsü bir doğru olacaktır; aksi taktirde bir ç doğrusunun görüntüsü bir çember olacaktır.

İspat.

İspatı orijin merkezli r yarıçaplı çembere göre yapmak yeterli olacaktır. Çünkü genel bir çember inversiyonu orijin merkezli r yarıçaplı bir çemberle ötelemenin bileşkesi olarak yazılabilir.

$$cz\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + d = 0$$

denklemleri ç doğru seçilsin. $|z - 0| = r$ denklemleri çembere göre yukarıdaki denklemlerle verilen ç doğrunun görüntüsü $w = \frac{r^2}{\bar{z}}$ eşitliğini sağlayan noktalardan oluşur. $w = \frac{r^2}{\bar{z}}$ eşitliğini sağlayan noktaların bir ç doğru üstünde olduğu gösterilmelidir.

$$cz\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + d = 0$$

denkleminde her iki taraf $\frac{r^4}{z\bar{z}}$ ile çarpılırsa ($z \neq 0$ için)

$$cr^4 + \alpha r^2 \cdot \frac{r^2}{\bar{z}} + \bar{\alpha} r^2 \cdot \frac{r^2}{z} + d \frac{r^2}{z} \frac{r^2}{\bar{z}} = 0$$

elde edilir. $w = \frac{r^2}{z}$, $\bar{w} = \frac{r^2}{\bar{z}}$ olduğundan son denklem

$$cr^4 + \alpha r^2 \cdot w + \bar{\alpha} r^2 \cdot \bar{w} + dw\bar{w} = 0$$

ya da

$$dw\bar{w} + \alpha r^2 \cdot w + \bar{\alpha} r^2 \cdot \bar{w} + cr^4 = 0$$

biçimine dönüşür. Bu denklemin bir $\mathbb{C}$ doğru olduğu açıktır.

$d = 0$ ise bu $\mathbb{C}$ doğru orijinden geçer ve bir doğrudur.

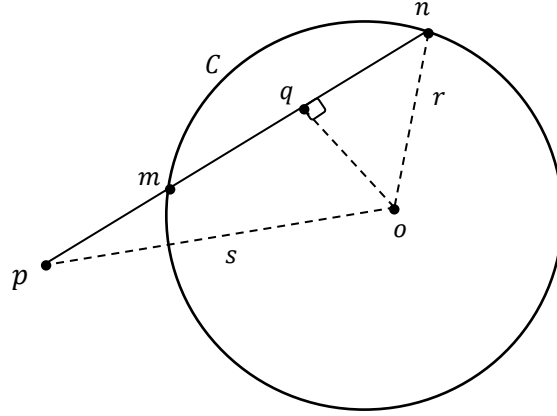
$d \neq 0$ ise bu $\mathbb{C}$ doğru orijinden geçmeyen bir çemberdir.

Tanım 2.26 Düzlemde M merkezli, r yarıçaplı bir çember ve bir Q noktası verilsin. $|QM| = d$ olmak üzere $d^2 - r^2$ sayısına, Q noktasının bu çembere göre kuvveti denir.

Teorem 2.27 C , o merkezli r yarıçaplı çember ve p, C' nin dışında bir nokta ve $s = |p - o|$ olsun. Eğer p' den geçen bir doğru C ile m ve n noktalarında kesişiyorsa $|p - m| \cdot |p - n| = s^2 - r^2$ dir.

İspat.

p noktasından geçen doğrunun C çemberinin merkezinden geçmediğini varsayalım. q, mn doğru parçasının orta noktası ve $d = |q - o|$ olsun. q ve o noktasından geçen doğru mn doğru parçasının orta dikmesi olsun. Böylece $|m - q| = |q - n|$ dir.



Şekil 2.5 p noktasının C çemberine göre kuvveti.

Pisagor teoreminden

$$|p - q|^2 + d^2 = s^2 \quad (2.1)$$

ve

$$|q - n|^2 + d^2 = r^2 \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.2) denklemi (2.1) denkleminden çıkarılırsa

$$|p - q|^2 - |q - n|^2 = s^2 - r^2$$

$$(|p - q| - |q - n|)(|p - q| + |q - n|) = s^2 - r^2$$

olup, buradan

$$|p - q| - |q - n| = |p - m|$$

ve

$$|p - q| + |q - n| = |p - n|$$

eşitliklerinden

$$|p - m|. |p - n| = s^2 - r^2$$

sonucu elde edilir.

p den geçen doğru çemberin merkezinden geçsin. Bu durumda $|p - m| = s - r$ ve $|p - n| = s + r$ olup $|p - m|. |p - n| = s^2 - r^2$ eşitliği elde edilir.

Teorem 2.28 z_0 merkezli bir C çemberi ve bu çember üzerinde olmayan z_0 'dan farklı bir z noktası verilsin. z ' den geçen bir $\mathcal{C}$ doğrusunun C ' ye dik olması için gerek ve yeter koşul bu $\mathcal{C}$ doğrusunun z^* noktasından geçmesidir. (Burada z ve z^* ; C ' ye göre invers noktaldır)

İspat.

C, z_0 merkezli r yarıçaplı bir çember ve D bu çember üzerinde olmayan z_0 dan farklı bir z noktasından geçen bir $\mathcal{C}$ doğru olsun. $D; z$ noktasından geçen bir doğru olsun. D doğrusunun z^* noktasından geçmesi için gerek ve yeter koşul C çemberinin merkezinden geçmesidir. Bu durum ise sadece D ' nin C ' ye dik olmasında sağlanır. Böylece, z 'den geçen D doğrusunun z^* noktasından geçmesi için gerek ve yeter koşul D 'nin C ' ye dik olmasıdır.

$D; z$ noktasından geçen bir çember olsun. o ve k sırasıyla D 'nin merkezini ve yarıçapını göstereyin. $s = |z_0 - o|$ ve t noktası C ve D çemberlerinin kesişme noktası olsun.

Tanım 2.31 $A, n \times n$ biçiminde bir matris olsun. $Ax = \lambda x$ olacak biçimde $\mathbb{K}_1^n$ uzayının sıfırdan farklı en az bir x vektörü varsa λ sayısına A matrisinin bir öz değeri (veya karakteristik değeri) denir. λ sayısı, A matrisinin bir öz değeri olmak üzere $Ax = \lambda x$ eşitliğini doğrulayan her x vektörüne A matrisinin λ öz değerine karşılık gelen bir öz vektörü (veya karakteristik vektörü) denir.

Burada $\mathbb{K}_1^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n \right\}$ biçiminde tanımlı matris uzayı olup, $\mathbb{K}$ bir cisimdir.

Tanım 2.32 A ve A' kare matrisler olmak üzere $P^{-1}.A.P = A'$ olacak biçimde tersinir bir P matrisi varsa A matrisi A' matrisine benzerdir, denir.

Tanım 2.33 A, n inci basamaktan bir kare matris olmak üzere $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine köşegen matris denir.

Tanım 2.34 $A \in \mathbb{K}_n^n$ olmak üzere A matrisi bir köşegen matrise benzer ise A matrisine köşegenleştirilebilir matris denir.

Sonuç 2.35 $A \in \mathbb{K}_n^n$ olmak üzere A matrisinin birbirinden farklı n tane $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ öz değerleri varsa A matrisi köşegenleştirilebilir.

Sonuç 2.36 $A \in \mathbb{R}_n^n$ ve A simetrik bir matris ise $P^T A P$ matrisi köşegen matris olacak biçimde bir P ortogonal matrisi vardır. (Tersi transpozuna eşit olan matrislere ortogonal matris denir)

3. MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ

Teorem 3.1 $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ fonksiyonunun bir dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul $ad - bc \neq 0$ olmasıdır. (Hitchman 2018)

İspat.

$(\Leftarrow)$ T 'nin birebir ve örten olduğu gösterilmelidir. $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ ve $ad - bc \neq 0$ olsun. T 'nin bir dönüşüm olduğunu göstermeliyiz. T 'nin birebir olduğunu göstermek için $T(z_1) = T(z_2)$ olduğu kabul edilsin. Buradan

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}$$

$$(az_1 + b) \cdot (cz_2 + d) = (az_2 + b) \cdot (cz_1 + d)$$

$$caz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd = acz_1z_2 + adz_2 + bcz_1 + bd$$

$$(ad - bc)z_1 = (ad - bc)z_2$$

$ad - bc \neq 0$ olduğundan $z_1 = z_2$ 'dir yani T birebirdir.

$w \in \mathbb{C}^+$ için $T(z) = w$ olacak biçimde $z \in \mathbb{C}^+$ olduğu gösterilmelidir. $w = \infty$ ise $z = -d/c$ 'dir. Eğer $c = 0$ ise $z = \infty$ dir. $w \neq \infty$ olsun. Bu durumda $\frac{az+b}{cz+d} = w$ eşitliğinden $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$ elde edilir. T örten olup böylece T bir dönüşümdür.

$(\Rightarrow)$ $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ bir dönüşüm olsun ve $ad - bc = 0$ olsun.

1. Durum: $ad = 0$. Bu durumda $bc = 0$, yani a veya d sıfırdır ve b veya c sıfırdır. Dört durumun tümünde T 'nin $\mathbb{C}^+$ 'nin bir dönüşümü olmadığı kolayca görülür.

2. Durum: $ad \neq 0$. Bu durumda, dört sabitin tümü birden sıfır değildir ve $a/c = b/d$ dir. $T(0) = b/d$ ve $T(\infty) = a/c$ olduğundan, T birebir değildir ve dolayısıyla T bir dönüşüm değildir.

Önceki ispatta T Möbius dönüşümünün tersinin bulunduğu açıktır. Bu ters dönüşümün determinantı sıfır olmadığı için bir Möbius dönüşümüdür. T ve T^{-1} Möbius dönüşümlerinin determinantları eşittir. İki Möbius dönüşümünün bileşkesi de bir Möbius dönüşümüdür. Düzlemin ötelemeleri ve döndürmeleri doğrular boyunca yansılardan elde edilebildiği gibi, Möbius dönüşümleri de $\mathbb{C}$ doğrulara göre inversiyonlardan elde edilebilir.

Teorem 3.2 $\mathbb{C}^+$ 'nın bir f dönüşümünün Möbius dönüşümü olması için gerek ve yeter koşul çift sayıda inversiyonun bileşkesi olarak yazılmasıdır. (Hitchman 2018)

İspat.

($\Rightarrow$) $T(z) = \frac{(az+b)}{(cz+d)}$ Möbius dönüşümü verilsin. Eğer $c = 0$ ise $T, T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ bir genel lineer dönüşümdür. Bir genel lineer dönüşüm ise çift sayıda inversiyonun bileşkesidir. Gerçekten $S(z) = az + b$ biçimindeki bir lineer dönüşüm bir germe ya da dönme ile ötelemenin bileşkesidir. $c \neq 0$ olsun. Buradan

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{(bc - ad)/c}{cz + d}$$

biçiminde olup, düzenleme yapılırsa $T_1(z) = cz + d$, $T_2(z) = \frac{1}{z}$ ve $T_3(z) = \frac{bc-ad}{c}z + \frac{a}{c}$ olmak üzere $T(z) = (T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z)$ elde edilir. T_1 ve T_3 birer genel lineer dönüşümdür.

$$T_2(z) = \frac{1}{z} = \overline{\left[\frac{1}{\bar{z}} \right]}$$

ise birim çemberde inversiyon ve ardından reel eksene göre yansımanın bileşkesidir. Böylece her T_i , çift sayıda inversiyonun bileşkesidir ve böylece T de çift sayıda inversiyonun bileşkesidir.

($\Leftarrow$) T iki inversiyonun bileşkesi olsun.

1. Durum: T iki çember inversiyonun bileşkesi olsun, yani $T = i_{C_1} \circ i_{C_2}$ biçiminde yazılsın. i_{C_1}, i_{C_2} sırasıyla C_1 ve C_2 çemberlerine göre inversiyonlar olsun. C_1 ve C_2 çemberleri sırasıyla $|z - z_1| = r_1$ ve $|z - z_2| = r_2$ denklemleriyle gösterilsin. $i = 1, 2$ için inversiyonlar

$$i_{C_i}(z) = \frac{r_i^2}{\bar{z} - \bar{z}_i} + z_i$$

şeklindedir. Bu iki inversiyonun bileşkesi $\frac{z(r_1^2 + z_1 z_2 - z_1^2) + (r_2^2 z_1 - r_1^2 z_2 - z_1 z_2^2 + z_1^2 z_2)}{z(z_2 - z_1) + (z_1 z_2 + r_2^2 - z_2^2)}$ biçiminde olup, bu Möbius dönüşümünün determinanı $r_1^2 r_2^2$ dir.

2. Durum: T bir çember inversiyonuyla bir doğru yansımasının bileşkesi olsun. Doğruya göre yansıma $r_L(z) = e^{i\theta} \bar{z} + b$ biçiminde ve C çemberindeki inversiyon $i_C = \frac{r^2}{\bar{z} - z_0} + z_0$ ile tanımlansın. Bileşke alındığında elde edilen dönüşüm $\frac{ze^{i\theta}(z_0 + b) + (e^{i\theta} r^2 - e^{i\theta} z_0^2 - b e^{i\theta} z_0)}{ze^{i\theta} - z_0 e^{i\theta}}$ biçiminde olup, bu Möbius dönüşümünün determinanı $-e^{i\theta} r^2$ (sıfır olmayan) dir. $i_C \circ r_L$ bileşimi de bir Möbius dönüşümüdür.

3. Durum: T iki yansımanın bileşkesi olsun. Bu durumda eğer iki doğru birbirine paralel ise bir öteleme, doğrular kesişiyorsa bir dönme fonksiyonu elde edilir. Her iki durumda da sonuç olarak bir Möbius dönüşümü elde edilmiş olur. Möbius dönüşümleri inversiyonların bileşkesi olduğundan, inversiyonların özelliklerini taşır. Örneğin; inversiyon ç doğruları koruduğu için, Möbius dönüşümleri de ç doğruları korur ve inversiyon açı büyüklüklerini koruduğundan, Möbius dönüşümleri açıları korur. (Çift sayıda inversiyonun bileşkesi olduğu için)

Teorem 3.3 $T: \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+, T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ve $ad - bc \neq 0$ ise T dönüşümü öteleme, tersinme ve germe dönüşümlerinin bileşkesidir.

İspat.

Eğer $c = 0$ ise;

$$T(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, a, d \neq 0 \text{ 'dır.}$$

$M_1(z) = \frac{a}{d}z, M_2(z) = z + \frac{b}{d}$ olmak üzere $T = M_2 \circ M_1$ şeklinde yazılabilir. Gerçekten,

$$(M_2 \circ M_1)(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \frac{az+b}{d} = T(z)$$

elde edilir.

Eğer $c \neq 0$ ise;

$$N_1(z) = z + \frac{a}{c}, N_2(z) = z + \frac{d}{c}, N_3(z) = \frac{1}{z}, N_4(z) = \frac{bc-ad}{c^2} \cdot z \text{ olmak üzere } z \neq -\frac{d}{c} \text{ için}$$

$T = N_1 \circ N_4 \circ N_3 \circ N_2$ şeklinde yazılabilir. Gerçekten,

$$T(z) = (N_1 \circ N_4 \circ N_3 \circ N_2)(z) = (N_1 \circ N_4 \circ N_3)\left(z + \frac{d}{c}\right)$$

$$T(z) = (N_1 \circ N_4)\left(\frac{1}{z + \frac{d}{c}}\right) = (N_1)\left(\frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}\right)$$

$$T(z) = \frac{bc - ad + acz + ad}{c \cdot (cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d}$$

elde edilir.

$z = -\frac{d}{c}$ alınırsa, $T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ olur. Bileşkede yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
T\left(-\frac{d}{c}\right) &= (N_1 \circ N_4 \circ N_3 \circ N_2)\left(-\frac{d}{c}\right) \\
&= (N_1 \circ N_4 \circ N_3)(0) \\
&= (N_1 \circ N_4)(\infty) \\
&= (N_1)(\infty) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

olur. Yani, $z \in \mathbb{C}^+$ için, $T = N_1 \circ N_4 \circ N_3 \circ N_2$ ’ dir.

Teorem 2.25 den aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir.

Teorem 3.4 Möbius dönüşümleri $\mathbb{C}$ doğruları $\mathbb{C}$ doğrularına eşler ve açıları korur. (Olsen 2010)

Teorem 3.5 Herhangi bir Möbius dönüşümü $T: \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}^+$ ’nın ya bir noktasını, ya iki noktasını ya da tüm noktalarını sabit bırakır. (Hitchman 2018, Kaya 2010)

İspat.

$T(z) = (az + b)/(cz + d)$ nin sabit noktalarını bulmak için, $\frac{az+b}{cz+d} = z$ eşitliğinden ikinci dereceden

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0 \quad (3.1)$$

denklemini elde edilir.

Eğer $c \neq 0$ ise (3.1) denkleminin bir veya iki çözümü olmalıdır ve bu durumda bir veya iki sabit nokta vardır. Bu sabit noktalar

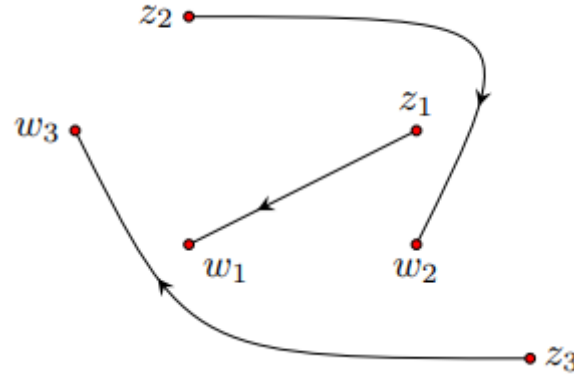
$$z_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2c}$$

dir.

Eğer $c = 0$ ve $a \neq d$ ise dönüşüm ∞ 'u sabitleyen $T(z) = (az + b)/d$ biçimindedir. (5) denkleminde, $z = b/(d - a) \neq \infty$ da sabit bir noktadır. Yani bu durumda iki sabit nokta vardır.

Eğer $c = 0$ ve $a = d$ ise, o zaman (5) denklemi $0 = -b$ yani $b = 0$ olur ve dönüşüm $T(z) = \frac{az+0}{0z+a} = z$ birim dönüşümdür. Bu dönüşüm her noktayı sabit bırakır.

Bu teorem yardımıyla Möbius Dönüşümlerinin Temel Teoremi verilebilir.



Şekil 3.1 $z_1 \rightarrow w_1, z_2 \rightarrow w_2, z_3 \rightarrow w_3$ eşleyen bir Möbius dönüşümü.

Teorem 3.6 (Möbius Dönüşümlerinin Temel Teoremi) $\mathbb{C}^+$ ’nın herhangi üç farklı noktasını $\mathbb{C}^+$ ’nin herhangi üç farklı noktasına eşleyen tek bir Möbius dönüşümü vardır. (Hitchman 2018)

İspat.

$\mathbb{C}$ ' de birbirinden farklı z_1, z_2, z_3 noktalarını ve yine birbirinden farklı w_1, w_2, w_3 noktalarını seçelim. $i = 1, 2, 3$ için $z_i \rightarrow w_i$ olacak biçimde bir tek Möbius dönüşümünün olduğu gösterilmelidir.

$$M(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{(z_2 - z_3)z - z_1(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)z - z_3(z_2 - z_1)}$$

biçiminde tanımlı M fonksiyonu $M(z_1) = 0, M(z_2) = 1, M(z_3) = \infty$ olup bir Möbius dönüşümüdür. Benzer biçimde

$$N(w) = \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{(w_2 - w_3)w - w_1(w_2 - w_3)}{(w_2 - w_1)w - w_3(w_2 - w_1)}$$

biçiminde tanımlı N fonksiyonu da $N(w_1) = 0, N(w_2) = 1, N(w_3) = \infty$ biçiminde bir Möbius dönüşümüdür. Buradan

$$(N^{-1} \circ M)(z_i) = w_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

olup istenen Möbius dönüşümü elde edilir.

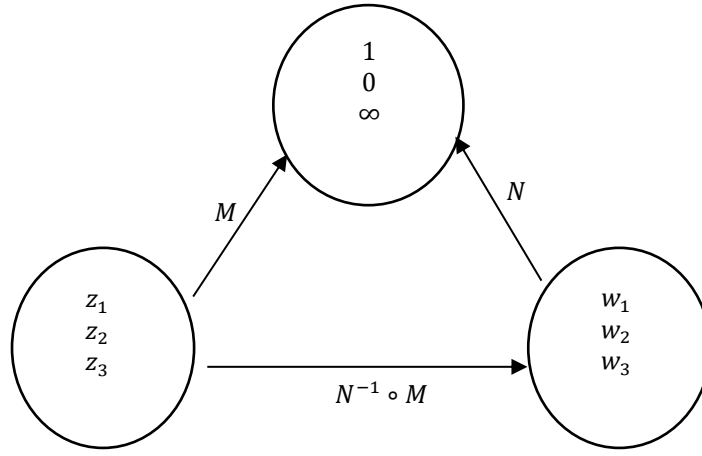
$N^{-1} \circ M = T$ olsun. Şimdi T ' nin tek olduğu gösterilmelidir.

$$G(z_i) = w_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

olacak biçimde G Möbius dönüşümünün de olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$(T^{-1} \circ G)(z_i) = z_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

olup $T^{-1} \circ G$ Möbius dönüşümü üç noktayı sabit bırakır. Teorem 3.5' den $T^{-1} \circ G = I$ olmak zorunda olup, böylece $T = G$ dir.



Şekil 3.2 $i = 1,2,3$ için $z_i \rightarrow w_i$ eşleyen bir Möbius dönüşümü.

4. 2-DEVİRLİ MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ

$a \in \mathbb{C}$ olmak üzere $i = 1, \dots, k-1$ için $f^i(a) \neq a$ ve $f^k(a) = a$ ise a noktasına f 'nin k -devirli noktasıdır denir. $\{a, f(a), f^2(a), \dots, f^{k-1}(a)\}$ kümesine a 'nın yörüngesi denir. Bu kısımda $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius dönüşümü için, $c \neq 0$ olduğu kabul edilecektir. Daha açık ifadeyle f 'nin lineer olmadığı yani $f(z) = a'z + b'$ biçiminde yazılmadığı kabul edilecektir.

$f(z) = \frac{1}{z}$ inversiyon dönüşümü birim çemberi birim çembere eşlerken birim çemberin içini dışına ve birim çemberin dışını içine eşler. Aynı zamanda reel eksen ve sanal eksen $f(z) = \frac{1}{z}$ dönüşümü altında kendilerine dönüşür. Üstelik bu iki doğrudan başka $f(z) = \frac{1}{z}$ altında kendisine dönüşen başka doğru yoktur.

$f(z) = \frac{1}{z}$ dönüşümü altında sabit kalan noktalar 1 ve -1 dir. 1 ve -1 noktalarından geçen $0 = f(\infty)$ merkezli birim çember $f(z) = \frac{1}{z}$ inversiyonu altında sabit kalan tek Öklidyen çemberdir. Ayrıca dikkat edilecek olursa her $z \in \mathbb{C}^+ \setminus \{1, -1\}$ için z noktası 2-devirlidir. Aynı zamanda 1 ve -1 noktalarından geçen tek doğru reel eksen olup, sanal eksen bu doğruya orijinde ortogonaldır.

Merkezi $\frac{3i}{4}$ noktası olan, yarıçapı $\frac{5}{4}$ olan $\left|z - \frac{3i}{4}\right| = \frac{5}{4}$ denklemlili çember $f(z) = \frac{1}{z}$ altında kendisine dönüşür. Dikkat edilecek olursa $\left|z - \frac{3i}{4}\right| = \frac{5}{4}$ denklemlili çemberin $f(z) = \frac{1}{z}$ dönüşümünün sabit noktalarından geçtiği görülür. Yani $f(z) = \frac{1}{z}$ dönüşümü altında sabit kalan tek çember birim çember değildir.

Önerme 4.1 $f(z)$ 2-devirli bir Möbius dönüşümü ise

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z - \alpha} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

biçiminde olup her $z \in \mathbb{C}^+$ için $f^2(z) = z$ 'dir. (Al-Fadhel, 2008)

İspat.

1. Durum: $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ olsun. $a = -d$ ve $c = 1$ olduğu gösterilmelidir. $f(\alpha) = \infty$ olsun. f , fonksiyonu 2-devirli olduğu için $f^2(\alpha) = \alpha$ dır. Bu durumda α noktasının yörüngesi $\{\alpha, \infty\}$ ' dir. $f(\alpha) = \infty$ olduğundan $f(z) = \frac{az+b}{z-\alpha}$ biçiminde ve $f(\infty) = \alpha$ olduğundan $f(\infty) = a = \alpha$ biçimindedir. Böylece $f(z) = \frac{az+\beta}{z-\alpha}$ dır.

2. Durum: $f(\alpha_1) \neq \infty$ olacak biçimde ∞ ' dan farklı α_1 noktası seçelim. $f(\alpha_1) = \alpha_2$ olsun. α_1 noktasının yörüngesi $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ ' dir. $f(\alpha) = \infty$ olsun. Bu durumda $f(z) = \frac{az+b}{z-\alpha}$ biçiminde olup $-a\alpha - b \neq 0$ ' dır.

$$f(\alpha_1) = \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1\alpha_2 - a\alpha_2 = a\alpha_1 + b \Rightarrow \alpha_1\alpha_2 - b = a\alpha_2 + a\alpha_1$$

ve

$$f(\alpha_2) = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2\alpha_1 - a\alpha_1 = a\alpha_2 + b \Rightarrow \alpha_1\alpha_2 - b = a\alpha_1 + a\alpha_2$$

elde edilir. Buradan

$$a\alpha_2 + a\alpha_1 = a\alpha_1 + a\alpha_2 \Rightarrow a\alpha_2 - a\alpha_1 + a\alpha_1 - a\alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow a(\alpha_2 - \alpha_1) - a(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \Rightarrow (\alpha_2 - \alpha_1)(a - a) = 0$$

olup $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olduğundan $a = \alpha$ ' dır.

Böylece f Möbius dönüşümünün $f(z) = \frac{az+\beta}{z-\alpha}$ biçiminde yazıldığı görülür. Şimdi her $z \in \mathbb{C}^+$ için $f^2(z) = z$ olduğu gösterilmelidir. $f^2(\alpha) = f(f(\alpha)) = f(\infty) = \alpha$ ve $f^2(\infty) = f(f(\infty)) = f(\alpha) = \infty$ olduğu açıktır. $w \in \mathbb{C}^+$ için

$$f^2(w) = f\left(\frac{aw+\beta}{w-\alpha}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha \left(\frac{\alpha w + \beta}{w - \alpha} \right) + \beta}{\left(\frac{\alpha w + \beta}{w - \alpha} \right) - \alpha} \\
&= \frac{\alpha(\alpha w + \beta) + \beta w - \beta \alpha}{\alpha w + \beta - \alpha w + \alpha^2} \\
&= \frac{\alpha^2 w + \beta w}{\alpha^2 + \beta} \\
&= \frac{w(\alpha^2 + \beta)}{\alpha^2 + \beta} \\
&= w
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $z \in \mathbb{C}^+$ için $f^2(z) = z$ dir.

$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z - \alpha}$ dönüşümünün sabit noktaları $f(z) = z$ eşitliğinden $\gamma_1 = \alpha + (\alpha^2 + \beta)^{\frac{1}{2}}$ ve $\gamma_2 = \alpha - (\alpha^2 + \beta)^{\frac{1}{2}}$ dir. w ; $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z - \alpha}$ dönüşümünün sabit noktası değilse önerme 4.1' den $f^2(w) = w$ dır.

Dikkat edilecek olursa $\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \alpha$ dır. Yani α, γ_1 ve γ_2 ' nin orta noktasıdır.

α, γ_1 ve γ_2 noktalarından geçen doğru L_1 ile gösterilsin. $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z - \alpha}$ dönüşümü altında L_1 doğrusu kendisine dönüşür. Şimdi merkezi α ve yarıçapı $R = \left| (\alpha^2 + \beta)^{\frac{1}{2}} \right|$ olan çemberi C ile gösterelim. C çemberinin γ_1 ve γ_2 noktalarından geçtiği açıktır.

Önerme 4.2 $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z - \alpha}$, C çemberini kendisine dönüştürür ve içindeki noktaları dışındaki noktalara eşler. (Al-Fadhel, 2008)

İspat.

C çemberi üstünde w noktası seçelim.

$$|f(w) - \alpha| = \left| \frac{w\alpha + \beta}{w - \alpha} - \alpha \right| = \left| \frac{w\alpha - w\alpha + \beta + \alpha^2}{w - \alpha} \right| = \frac{|\alpha^2 + \beta|}{|w - \alpha|} = \frac{R^2}{R} = R$$

Böylece C üstünde alınan her noktanın görüntüsünün α ' ya olan uzaklığı R olup C üstündeki noktalar C üstündeki noktalara dönüşür.

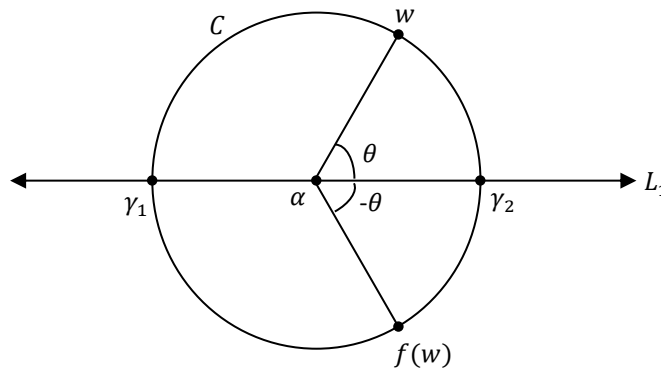
u , çember içinde bir nokta olsun. $|u - \alpha| < R$ ' dir.

$$|f(u) - \alpha| = \frac{|\alpha^2 + \beta|}{|u - \alpha|} = \frac{R^2}{|u - \alpha|} > \frac{R^2}{R} = R$$

Böylece C çemberi içindeki noktaların görüntüsü C çemberinin dışındadır. Çemberin dışındaki noktalarının görüntülerinin çemberin içindeki noktalar olduğu benzer şekilde gösterilir.

Önerme 4.3 $w; \mathbb{C}^{+}$ de $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z - \alpha}$ dönüşümünün sabit noktası olmayan C çemberi üzerinde bir nokta olsun. Bu durumda w ile $f(w)$ noktaları L_1 doğrusuna göre simetriktir. (Al-Fadhel, 2008)

İspat.



Şekil 4.1 w ile $f(w)$ noktaları L_1 doğrusuna göre simetriktir.

w noktasını kutupsal koordinatlarla $w = \alpha + Re^{i\theta}$ biçiminde gösterilsin.

$$(R = \sqrt{\alpha^2 + \beta})$$

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{w\alpha + \beta}{w - \alpha} \\ &= \frac{(\alpha + Re^{i\theta})\alpha + \beta}{Re^{i\theta}} \\ &= \frac{\alpha^2 + \alpha(\sqrt{\alpha^2 + \beta})e^{i\theta} + \beta}{(\sqrt{\alpha^2 + \beta})e^{i\theta}} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta}{(\sqrt{\alpha^2 + \beta})e^{i\theta}} + \alpha \\ &= \alpha + (\sqrt{\alpha^2 + \beta})e^{-i\theta} \\ &= \alpha + Re^{-i\theta} \end{aligned}$$

eşitliğinden $f(w)$ noktası aslında w noktasının L_1 doğrusuna göre simetriği olduğu görülür.

Sonuç 4.4 α noktasından geçen L_1 doğrusuna dik olan doğru L_2 olmak üzere $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z - \alpha}$ dönüşümü L_2 doğrusunu kendisine eşler. (Al-Fadhel, 2008)

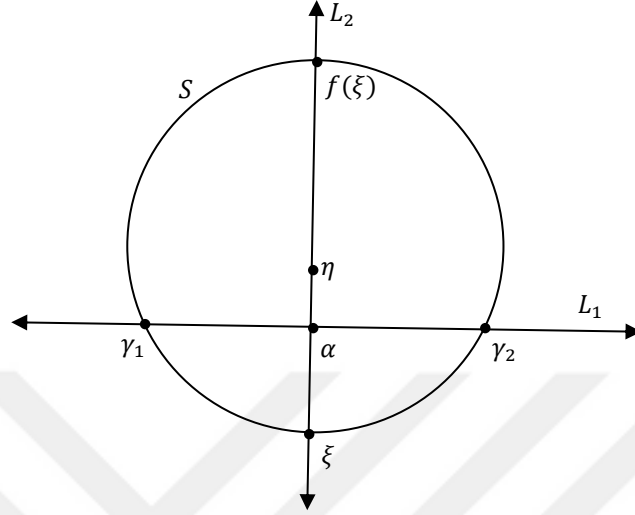
İspat.

ς_1 ve ς_2 , L_2 ve C üstünde olan iki nokta olsun. Önerme 4.3'den $f(\varsigma_1) = \varsigma_2$ ve $f(\varsigma_2) = \varsigma_1$ olup $f(L_2) = L_2$ dir.

Böylece, $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z - \alpha}$ Möbius dönüşümü için $f(L_1) = L_1$, $f(L_2) = L_2$ ve $f(C) = C$ dir.

Önerme 4.5 $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z - \alpha}$, γ_1 ve γ_2 ’den geçen her çemberi kendisine eşler. (Al-Fadhel, 2008)

İspat.



Şekil 4.2 S, γ_1 ve γ_2 sabit noktalarından geçen bir çember.

S, γ_1 ve γ_2 sabit noktalarından geçen herhangi bir çember olsun. S çemberi L_2 'yi α noktasından farklı bir ξ noktasında kessin. Böylece

$\xi \in L_2$ olduğundan $\xi = \alpha + i\lambda(\alpha^2 + \beta)^{\frac{1}{2}}$ olacak biçimde $\lambda \in \mathbb{R}^*$ vardır. Böylece

$$f(\xi) = \frac{\alpha \left(\alpha + i\lambda(\alpha^2 + \beta)^{\frac{1}{2}} \right) + \beta}{i\lambda(\alpha^2 + \beta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \alpha + \frac{\alpha^2 + \beta}{i\lambda(\alpha^2 + \beta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \alpha + \frac{1}{i\lambda} (\alpha^2 + \beta)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \alpha + i \left(\frac{-1}{\lambda} \right) (\alpha^2 + \beta)^{\frac{1}{2}}$$

$\eta = \frac{\xi + f(\xi)}{2}$ olmak üzere

$$\eta = \alpha + \frac{i}{2} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) (\alpha^2 + \beta)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

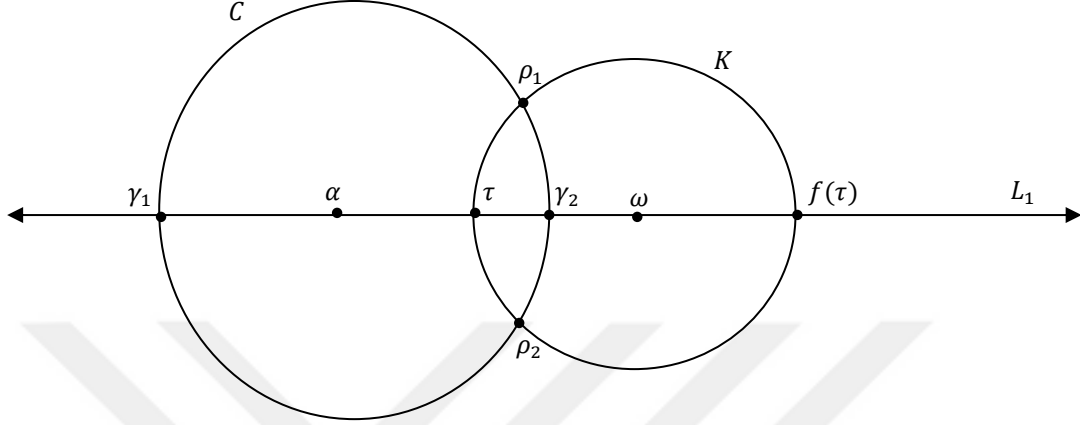
S çemberinin aslında η merkezli ve yarıçapı $|\xi - \eta|$ olduğu gösterilmelidir.

$$|\xi - \eta| = |f(\xi) - \eta| = \left| \frac{i}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) (\alpha^2 + \beta)^{\frac{1}{2}} \right| = \frac{1}{2} \left| \lambda + \frac{1}{\lambda} \right| |\alpha^2 + \beta|^{\frac{1}{2}}$$

L_2 doğrusu $[\gamma_1, \gamma_2]$ doğru parçasının orta dikmesi olduğundan $|\gamma_1 - \eta| = |\gamma_2 - \eta|$ eşitliği sağlanır. O halde $|\gamma_1 - \eta| = \frac{1}{2} \left| \lambda + \frac{1}{\lambda} \right| |\alpha^2 + \beta|^{\frac{1}{2}}$ olduğu gösterilirse yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned} |\gamma_1 - \eta| &= \left| 1 - \frac{i}{2} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \right| |\alpha^2 + \beta|^{\frac{1}{2}} \\ &= \left| 1 + i \left(\frac{1}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2} \right) \right| |\alpha^2 + \beta|^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\lambda^2} - 2 + \lambda^2 \right)} |\alpha^2 + \beta|^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\lambda^2} + 2 + \lambda^2 \right)} |\alpha^2 + \beta|^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right)^2} |\alpha^2 + \beta|^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left| \lambda + \frac{1}{\lambda} \right| |\alpha^2 + \beta|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Buradan $\xi, f(\xi), \gamma_1$ ve γ_2, S çemberi üzerindedir ve $\alpha \notin S$ 'dir. Böylece $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z - \alpha}$, S çemberini kendisine dönüştürür.



Şekil 4.3 C ve K çemberleri ortogonaldır.

L_1 üstünde α noktasından farklı ve f altında sabit kalmayan bir τ noktası seçilsin. $f(L_1) = L_1$ olduğundan $f(\tau), L_1$ üstünde bir noktadır. τ ve $f(\tau)$ noktalarının orta noktası ω olmak üzere ω merkezli olan τ ve $f(\tau)$ noktalarından geçen çember K olsun. K çemberi L_1 doğrusuna göre simetrik olup, C çemberini ρ_1 ve ρ_2 noktalarında kessin. Bu noktalar L_1 doğrusuna göre simetrik olup $f(\rho_1) = \rho_2$ ve $f(\rho_2) = \rho_1$ dir. Böylece $f(z)$ dönüşümü K çemberini kendisine dönüştürür. Sonuç olarak 2-devirli $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z - \alpha}$ Möbius dönüşümü merkezi L_1 üstünde olan ve C çemberini iki noktada kesen çemberleri kendilerine eşler.

Ayrıca $\gamma_1, \gamma_2, \tau, f(\tau)$ noktaları için

$$\frac{f(\tau) - \gamma_1}{f(\tau) - \gamma_2} = \frac{\frac{\alpha\tau + \beta}{\tau - \alpha} - \gamma_1}{\frac{\alpha\tau + \beta}{\tau - \alpha} - \gamma_2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\alpha\tau + \beta - \gamma_1\tau + \alpha\gamma_1}{\tau - \alpha}}{\frac{\alpha\tau + \beta - \gamma_2\tau + \alpha\gamma_2}{\tau - \alpha}} \\
&= \frac{\gamma_1(\gamma_1 - \alpha) + \tau(\alpha - \gamma_1)}{\gamma_2(\gamma_2 - \alpha) + \tau(\alpha - \gamma_2)} \\
&= (-1) \frac{(\alpha - \gamma_1)(\tau - \gamma_1)}{(\alpha - \gamma_2)(\tau - \gamma_2)} \\
&= -\frac{\tau - \gamma_1}{\tau - \gamma_2}
\end{aligned}$$

olup, böylece bu noktalar harmonik oranlıdır, yani C ve K çemberleri ortogonaldır.

Teorem 4.6 Her Möbius dönüşümü 2-devirli Möbius dönüşümlerinin bileşkesi olarak yazılabilir.

İspat.

1.Durum: $c \neq 0$ iken $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius dönüşümünü inceleyelim.

- $f_1(z) = az$ Möbius dönüşümü, $h_1(z) = \frac{1}{z}$, $h_2(z) = \frac{1/a}{z}$ olsun.

$$(h_1 \circ h_2)(z) = h_1(h_2(z)) = h_1\left(\frac{1}{az}\right) = az = f_1(z)$$

elde edilir.

- İnversiyon zaten 2-devirlidir.

- $f_2(z) = z + u$ dönüşümünü ele alalım. $u = \frac{-1}{\alpha^2}$, $K_1(z) = \frac{-1/\alpha}{z}$, $K_2(z) = \frac{1/\alpha}{z}$, $T(z) = \frac{\alpha z}{z-\alpha}$ olsun.

$$f_2(z) = (K_1 \circ T \circ K_2)(z) = (K_1 \circ T)\left(\frac{1}{\frac{i}{\sqrt{u}}z}\right)$$

$$= (K_1 \circ T)\left(\frac{\sqrt{u}}{iz}\right)$$

$$= K_1\left(\frac{\frac{1}{\frac{z}{u+z}}}{\frac{\sqrt{u}iz}{u+z}}\right)$$

$$= \frac{-1}{\left(\frac{i}{\sqrt{u}}\right) \frac{\sqrt{u}i}{u+z}}$$

$$= \frac{-1}{\frac{i^2}{u+z}}$$

$$= u + z = f_2(z)$$

elde edilir.

2. Durum: $c = 0$ için $f(z) = \frac{az+b}{d}$ dönüşümünün 2-devirli Möbius dönüşümlerinin bileşkesi olarak yazıldığını gösterelim. $M_{\frac{a}{d}}(z) = \frac{a}{d}z$, $T_{\frac{b}{a}}(z) = z + \frac{b}{a}$ olsun.

$$\left(M_{\frac{a}{d}} \circ T_{\frac{b}{a}}\right)(z) = M_{\frac{a}{d}}\left(z + \frac{b}{a}\right) = \frac{a}{d}\left(z + \frac{b}{a}\right) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = f(z)$$

olup böylece Teorem 3.3 den dolayı ispat tamamlanır.

5. n -DEVİRLİ MÖBIUS DÖNÜŞÜMLERİ

Möbius dönüşümlerinin grubu $\mathbb{M}$ olsun. $f \in \mathbb{M}$ olmak üzere f 'nin ürettiği devirli alt grup $\langle f \rangle_{\mathbb{M}} = \{f^n; n \in \mathbb{Z}\}$ olsun. Eğer $\langle f \rangle_{\mathbb{M}} = \{f^n; n \in \mathbb{Z}\}$ sonlu mertebeden ise, örneğin mertebe n ise, bu durumda f 'ye n -devirlidir denir.

Önerme 5.1

(1) $n \geq 2$ olmak üzere bir Möbius dönüşümünün n -devirli olması için gerek ve yeter koşul $1 \leq m \leq n-1$ için $f^m(a) \neq a$ ve $f^n(a) = a$ olacak biçimde bir $a \in \mathbb{C}^+$ elemanının bulunmasıdır, yani $\mathcal{O}f(a)$ kümesinin kardinalitesinin n olmasıdır. Burada

$$\mathcal{O}f(a) = \{a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a)\}$$

biçiminde tanımlıdır.

$n \geq 3$ olduğunda herhangi bir n -devirli f Möbius dönüşümü için $f^n = Id$ ve $f^m \neq Id$ ($1 \leq m \leq n-1$) olmalıdır.

Eğer a, f altında invaryant kalmayan bir nokta ve f n -devirli ise, $\mathcal{O}f(a)$ 'nın kardinalitesi n 'ye eşittir.

(2) $n \geq 3$ için f n -devirli ve ∞ noktası f 'nin sabit bir noktası olmasın. $\mathcal{F}, f$ altında invaryant kalan bir çember ise $\mathcal{F}, f$ 'nin sabit noktalarını kapsamaz. Eğer C_1 ve C_2 f altında invaryant kalan iki çember ise, $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ dir ve f altında invaryant kalan tek bir doğru vardır. Bu doğru ∞ ' un yörüngesini kapsar. (Al-Fadhel, Blel (2013))

İspat.

(1) a ve b ; f 'nin iki sabit noktası olsun ve bu iki noktadan farklı bir w noktası seçilsin. w noktasının kardinalitesinin p olduğunu ve $2 \leq p \leq n-1$ olduğunu kabul edelim. w noktasının yörüngesi $\{w, f(w), \dots, f^{p-1}(w)\}$ olup $f^p(w) = w$ dir. Buradan her $1 \leq$

$j \leq p - 1$ için $f^j(w)$ noktası f^p 'nin sabit bir noktasıdır. Bu durumda $f^p = Id$ olup çelişki elde edilir. Böylece $p = n$ olmak zorundadır. Kabul edelim ki a noktasının yörüngesinin kardinalitesi p olsun ve $2 \leq p \leq n - 1$ olsun. $1 \leq j \leq p - 1$ için $f^j(a) = f^{j+1}(a)$ ise $f(a) = a$ olup bu kabulümüzle çelişir. Buradan a noktasının yörüngesi $\{a, f(a), \dots, f^{p-1}(a)\}$ olup $f^p(a) = a$ olacağından yörüngenin her elemanı f^p 'nin sabit noktası olup $f^p = Id$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

(2) $\mathcal{F} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ kümesi n tane bağlantılı kümeden oluşur. $\mathcal{F}, f$ altında invaryant kaldığından ve f ünivalent olduğundan, ünivalent fonksiyonların özelliği gereği $\mathcal{F} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ kümesinin bağlantılı bileşenlerinin görüntüleri de bağlantılı bileşenlerdir. Böylece f 'nin $\mathcal{F}$ üzerinde invaryant bir noktası yoktur.

Önerme 5.2 f bir Möbius dönüşümü ve A, f 'nin matrisi olsun. $z \in \mathbb{C}^+$ ve $z, f(z), f^2(z)$ ve $f^3(z)$ farklıysa, çapraz oran $[z, f(z), f^2(z), f^3(z)]$ sabittir ve aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) A 'nın iki farklı özdeğeri varsa, bu durumda

$$[z, f(z), f^2(z), f^3(z)] = 1 + \frac{\det A}{(\text{İz } A)^2 - \det A}$$

(2) Eğer A 'nın sadece bir özdeğeri varsa, bu durumda

$$[z, f(z), f^2(z), f^3(z)] = -\frac{1}{3}$$

elde edilir. (Al-Fadhel, Blel (2013)). (Burada $\text{tr}(A)$ ile A matrisinin izi gösterilmektedir)

İspat.

(1) A matrisinin özdeğerleri α, β olsun. Bu durumda $h(z) = \frac{\alpha}{\beta}z$ olmak üzere $f = g^{-1} \circ h \circ g$ olacak biçimde bir g Möbius dönüşümü vardır. Möbius dönüşümleri altında çapraz oran invaryant kalacağından $w = g(z)$ olmak üzere

$$[z, f(z), f^2(z), f^3(z)] = [z, g^{-1} \circ h \circ g(z), g^{-1} \circ h^2 \circ g(z), g^{-1} \circ h^3 \circ g(z)]$$

$$= [g(z), h \circ g(z), h^2 \circ g(z), h^3 \circ g(z)]$$

$$= [w, h(w), h^2(w), h^3(w)]$$

$$= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^3 - \alpha^3} \cdot \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha}$$

$$= 1 + \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta}$$

$$= 1 + \frac{\det A}{(\|z A\|^2 - \det A)}$$

(2) A matrisinin tek bir özdeğeri olsun ve α ile gösterilsin. Bu durumda

$h(z) = z + \frac{\beta}{\alpha}$ ($\beta \neq 0$) olmak üzere $f = g^{-1} \circ h \circ g$ olacak biçimde g Möbius dönüşümü vardır. Bu durumda

$$[z, f(z), f^2(z), f^3(z)] = [w, h(w), h^2(w), h^3(w)]$$

$$= \left[w, w + \frac{\beta}{\alpha}, w + \frac{2\beta}{\alpha}, w + \frac{3\beta}{\alpha} \right]$$

$$= -\frac{1}{3}$$

Sonuç 5.3 f ve g matrisleri denk olan iki Möbius dönüşümü olsun. Bu durumda $z, f(z), f^2(z), f^3(z)$ farklı olacak biçimdeki her $z \in \mathbb{C}^+$ için $[z, f(z), f^2(z), f^3(z)] = [z, g(z), g^2(z), g^3(z)]$ 'dir. (Al-Fadhel, Blel (2013))

Teorem 5.4 $n \geq 3$ olmak üzere n -devirli bir f Möbius dönüşümü ve $z \in \mathbb{C}^+$ için $\mathcal{O}f(z) = \{f^n(z) : n \in \mathbb{Z}\}$ kümesi üzerindeki noktalar $\infty \in \mathcal{O}f(z)$ iken aynı doğru üstünde $\infty \notin \mathcal{O}f(z)$ iken aynı çember üzerindedir. Herhangi bir $z \in \mathbb{C}^+$ için $n \geq 4$ ise, $[z, f(z), f^2(z), f^3(z)]$ çapraz oranı tüm n -devirli f Möbius fonksiyonları için f 'den bağımsız olarak n 'ye bağlıdır. (Al-Fadhel, Blel (2013))

İspat.

$n = 3$ ise sonuç açıktır. $n \geq 4$ olsun. Sonucu kanıtlamak için $[z, f(z), f^2(z), f^3(z)]$ 'nin reel sayı olduğunu kanıtlamak yeterlidir. f matrisi $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ ile $A^n = Id$ olacak şekilde ilişkilendirilsin. O halde A köşegenleştirilebilir. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, A = P^{-1}DP$ ve $w^n = \frac{\alpha^n}{\beta^n} = 1$ olacak şekilde $P, D \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ vardır. O halde Önerme 5.2'den

$$\begin{aligned} [z, f(z), f^2(z), f^3(z)] &= \frac{(1+w)^2}{1+w+w^2} \\ &= 1 + \frac{w}{1+w+w^2} \\ &= 1 + \frac{1}{1+w+\bar{w}} \\ &= 1 + \frac{1}{1+2\cos(\frac{2\pi}{n})} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

olup, elde edilen bu sonuç n 'ye bağlı fakat f 'den bağımsızdır. $n = 4$ için $[z, f(z), f^2(z), f^3(z)] = 2$ elde edilir.

Önerme 5.5 f bir n -devirli Möbius dönüşümü ve $n \geq 3$ olsun. $f(\infty) \neq \infty$ olsun. f 'nin sabit noktaları a ve b , ∞ noktasının yörüngesi $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \infty\}$, α_k merkezli a, b sabit noktalarından geçen çember C_k , $0 \leq k \leq n-1$ olmak üzere C_k çemberine göre simetri S_k olsun. Bu durumda

(1) $f = S_{k+1} \circ S_k$ dir.

(2) f altında invaryant kalan herhangi bir çember, iç kısmında f 'nin sabit bir noktasını içerir. (Eğer F , ∞ yörüngesini içeren çember ise, o zaman α_k merkezli ve sabit a noktasından geçen C_k çemberi sabit b noktasından geçer çünkü a ve b noktaları F 'ye göre simetrikler. Gerçekten F ye göre simetri S olmak üzere $S \circ f \circ S = f$ dir. (Al-Fadhel, Blel (2013))

İspat.

(1) $S_{k+1} \circ S_k$ bir Möbius dönüşümüdür ve a, b sabit noktalardır. Ayrıca

$$S_{k+1} \circ S_k(\alpha_k) = S_{k+1}(\infty) = \alpha_{k+1} = f(\alpha_k) \text{ olup } f = S_{k+1} \circ S_k$$

elde edilir.

(2) C, f altında invaryant bir çember olsun. ∞ noktasının yörüngesini içeren doğru C 'yi kesmediğinden, C sınırına sahip kapalı D diski bir konveks kompakt alt kümedir ve $f: D \rightarrow D$ süreklidir. Cebirsel topolojide Brouwer teoremine göre Öklid uzayında kapalı birim yuvardan kendisine tanımlı sürekli bir fonksiyon bir noktayı sabit bırakır. O halde Brouwer teoreminden f, D 'de sabit bir noktaya sahiptir. Böylece sabit nokta C üzerinde olamaz ve bu sabit nokta D 'nin bir iç noktasıdır.

5.1 2-Devirli İnvaryant Çemberlerin Oluşturulması

Önerme 5.1.1 S_1, L_1 doğrusuna göre simetri, S_2, L_2 doğrusuna göre simetri ve $b = S_2(a)$ olsun. Merkezi α olan ve a 'dan geçen çember C ile C' ye göre simetri S ile gösterilsin. Bu durumda

(1) b, f 'nin sabit bir noktasıdır.

(2) C çemberi f altında invaryanttır.

(3) $f = S \circ S_1 = S_1 \circ S$ dir. (Al-Fadhel, Blel (2013))

İspat.

(1) f bir Möbius dönüşümü olduğundan $f(b) = f(S_2(a)) = S_2(f(a)) = S_2(a) = b$ elde edilir.

(2) C çemberinin f altında görüntüsü a ve b 'den geçer ve L_2 'ye diktir. Böylece C, f altında invaryanttır.

(3) $S \circ S_1$ ve $S_1 \circ S$ birer Möbius dönüşümüdür, çünkü çift sayıda simetrisinin bileşkesi Möbius dönüşümüdür. a ve b bu iki dönüşüm için sabit noktalardır. Möbius dönüşümlerinin temel teoremine göre üç farklı noktanın görüntüsü bir f Möbius dönüşümü altında belli olduğundan f 'nin kuralı bulunabilir. Böylece $S \circ S_1(\alpha) = S_1 \circ S(\alpha) = \infty = f(\alpha)$ olduğundan ve $f(a) = a, f(b) = b$ olduğundan $f = S \circ S_1 = S_1 \circ S$ bulunur.

Teorem 5.1.2 $\mathbb{O}, f$ altında invaryant kalan ve C, L_1 ve L_2 'den farklı bir çember olsun.

(1) $\mathbb{O}$ bir çember ve $\mathbb{O} \cap C \neq \emptyset$ 'dir.

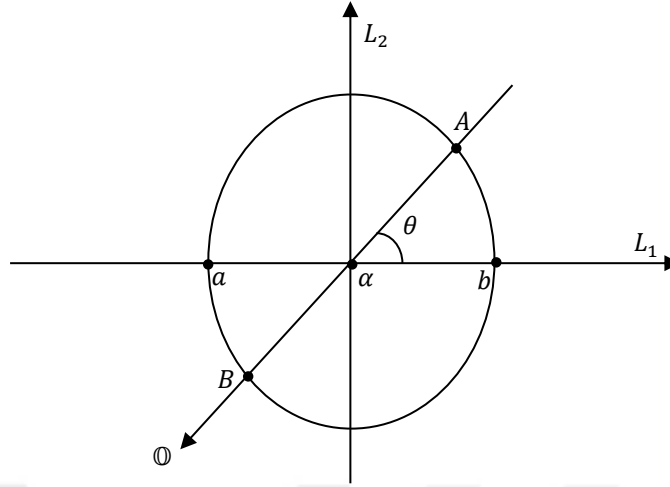
(2) $\mathbb{O}, a$ ve b 'den geçen bir çember ya da merkezi L_1 üstünde olan bir çemberdir.

(3) $\mathbb{O}$ çemberinin merkezi L_1 üzerindeyse $\mathbb{O}$ çemberi C 'ye diktir. (Al-Fadhel, Blel (2013))

İspat.

Merkezi α olan, yarıçapı $|\alpha - a|$ olan disk $D = D(\alpha, |\alpha - a|)$ şeklinde gösterilsin.

(1) $\mathbb{O}$ bir doğru ise $\alpha \in \mathbb{O}$ olup $\mathbb{O}$ çemberi C çemberini A ve B noktalarında keser.



Şekil 5.1 $\mathbb{O}$, C çemberini kesen doğru.

$f(C) = C$ olduğundan $f(A) = A, f(B) = B$ ya da $f(A) = B, f(B) = A$ olmak zorundadır. $f(A) = A, f(B) = B$ olursa $f(a) = a, f(b) = b$ olduğundan $\mathbb{O} = L_1$ olup çelişki elde edilir. Böylece $f(B) = A, f(A) = B$ olmak zorundadır. $[\alpha, A]$ ve $[\alpha, b]$ yarı doğruları arasındaki yönlendirilmiş açı θ olsun. Möbius dönüşümleri açıları koruduğundan ve $[\alpha, b]$ yarı doğrusu f altında invaryant kaldığından $[\alpha, f(a))$ ve $[\alpha, b]$ yarı doğruları arasındaki açı θ 'dır. Dolayısıyla A ve B noktalarının görüntüleri L_1 eksenine göre simetrleri olmalıdır. Bu ise ancak $\mathbb{O} = L_2$ olduğunda mümkündür. Böylece yeni bir çelişki elde edilir. $\mathbb{O}$ bir çember olmak zorundadır. $f(\alpha) = \infty$ olduğunda ve C, f altında invaryant kaldığından $\mathbb{O} \subset D$ olduğunda $f(\mathbb{O}) \subset \bar{D}^c$ ve $\mathbb{O} \subset \bar{D}^c$ olduğunda $f(\mathbb{O}) \subset D$ olmalıdır. Bu ise mümkün değildir, çünkü $f(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$ 'dur. O halde $\mathbb{O}, C$ çemberi ile kesişmek zorundadır. Yani $\mathbb{O} \cap C \neq \emptyset$ elde edilir.

(2) $\mathbb{O}$ çemberi C 'yi z_1, z_2 noktalarında kessin $f = S \circ S_1 = S_1 \circ S$ olduğundan z_1 ve z_2 noktaları ya f 'nin sabit noktalarıdır ya da $z_1 = S_1(z_2)$ 'dir. Eğer $z_1 = S_1(z_2)$ ise $\mathbb{O}$ çemberinin merkezi L_1 üstündedir ve $\mathbb{O}$ çemberi L_1 doğrusuna göre simetriktir.

(3) $\mathbb{O}$ 'nun merkezi L_1 üstünde olsun ve $\mathbb{O}$ çemberi a, b noktalarından geçmesin. $\mathbb{O}$ çemberi L_1 doğrusunu z ve w noktalarında kessin. $f(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$ ve $f(L_1) = L_1$ olduğundan

$f(z) = w$ 'dur. α noktasının $\mathbb{O}$ çemberine göre kuvveti $p(\alpha, \mathbb{O}) = |z - \alpha||\alpha - w|$ 'dir. Üstelik $f = S \circ S_1$ olduğundan w ve z noktaları C çemberine göre simetriktir. Bu durumda $|z - \alpha||\alpha - w| = |\alpha - a|^2$. Böylece $\mathbb{O}$ ve C çemberleri dik kesişir.

Sonuç 5.1.3 f altında invaryant kalan doğrular sadece L_1 ve L_2 'dir. f altında invaryant kalan çemberler sadece şunlardır:

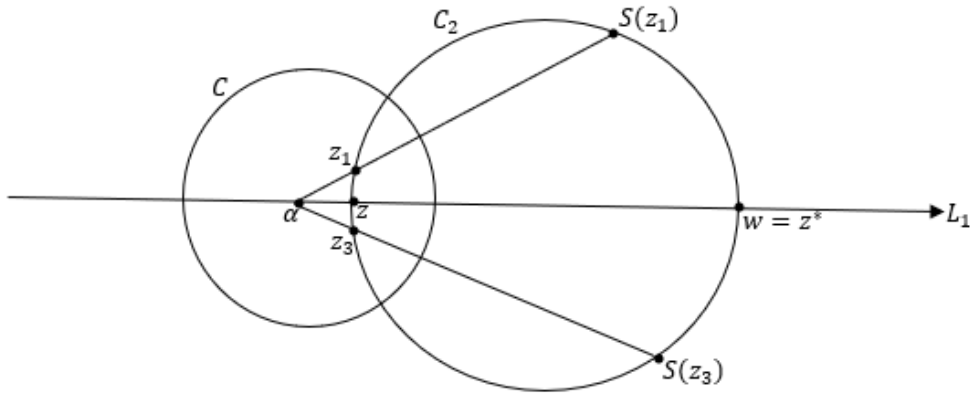
(1) a ve b ' den geçen çemberler.

(2) L_1 ' e göre simetrik ve C ' ye dik olan çemberler. (Al-Fadhel, Blel (2013))

İspat.

(1) C_1, a ve b ' den geçen bir çember ise, çemberin merkezi L_2 üzerindedir. Bu çemberin f altında invaryant olduğunu kanıtlamak için, C_1 üzerindeki tüm z 'ler için $w = S \circ S_1(z)$ ' nin C_1 üzerinde olduğunu kanıtlamak yeterlidir. (Çünkü $f = S \circ S_1 = S_1 \circ S$) Bu durumda L_1, C ve C_1 çemberlerinin radikal eksenini olup, $p(\alpha, C) = p(\alpha, C_1)$ ' dir. ($p(\alpha, C)$ ve $p(\alpha, C_1)$ sırasıyla α noktasının C ve C_1 çemberine göre kuvvetlerini göstermektedir.) z_1, L_1 doğrusuna göre z ' nin simetrisi, z_2 ise L_2 doğrusuna göre z ' nin simetrisi olsun. $w = S \circ S_1(z)$ olduğundan, $\overline{(\alpha - z_1)}(\alpha - w) = |\alpha - a|^2$ elde edilir. Fakat $(\alpha - z_1) = -(\alpha - z_2)$ olduğundan $\overline{(\alpha - z_2)}(\alpha - w) = -|\alpha - a|^2 = p(\alpha, C) = p(\alpha, C_1)$ olup buradan $w \in C_1$ ' dir ve böylece C_1, f altında invaryant kalır.

(2) C_2, L_1 ' e göre simetrik ve C ' ye dik bir çember ve $\{z, w\} = L_1 \cap C_2$ olsun. Bu durumda $C_2, [z, w]$ çaplı çemberdir, çünkü C ve C_2 ortogonaldir. Böylece $w = S(z)$ olup, buradan $w \in C_2$ ' dir. C_2 çemberinin f altında invaryant olduğunu kanıtlamak için, bu çemberdeki tüm z_1 noktaları için $z_2 = S(z_1) \in C_2$ olduğunu göstermek yeterlidir. Üstelik C ve C_2 ortogonal olduğundan $p(\alpha, C_2) = |\alpha - z_1|. |\alpha - z_2| = |\alpha - a|^2$ olup $z_2 \in C_2$ elde edilir. Merkezi L_1 üstünde olan f altında invaryant kalan C_3 çemberi seçilsin. $\{z, w\} = L_1 \cap C_2$ olsun. Benzer düşünce ile $C_3, [z, w]$ çaplı bir çember olup $f(z) = w$ bulunur. Buradan $f(z) = w = S(z)$ olup C ile C_3 ortogonaldir.



Şekil 5.2 C_2, L_1 ' e göre simetrik ve C ' ye dik bir çember.

∞, f 'nin sabit bir noktası olmayacak şekilde f , 4 devirli bir Möbius dönüşümü olsun ve $\mathbb{C}$ 'de α, β, γ

$$f(\alpha) = \beta, \quad f(\beta) = \gamma, \quad f(\gamma) = \infty, \quad f(\infty) = \alpha$$

biçiminde seçilsin. L_2 ; L_1 ' e ortogonal ve β ' dan geçen bir doğru ve C ; $[\alpha, \gamma]$ çaplı bir çember olsun.

Önerme 5.1.4

(1) $\beta, [\alpha, \gamma]$ ya da $[\gamma, \alpha]$ doğru parçalarının orta noktasıdır.

(2) $C \cap L_2$ kümesinin elemanları f ' nin sabit noktalarıdır.

(3) C çemberine göre simetri S ve f ' nin a, b sabit noktalarından geçen α merkezli C_1 çemberine göre simetri S_1 olmak üzere $f = S \circ S_1$ ' dir. (Al-Fadhel, Blel (2013))

İspat.

(1) Çapraz oran herhangi bir Möbius dönüşümü altında invaryant kaldığından, $[\alpha, \beta, \gamma, \infty] = [\beta, \gamma, \infty, \alpha]$ olup, buradan $\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}$ elde edilir. Böylece $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ olup $\beta; [\alpha, \gamma]$ ya da $[\gamma, \alpha]$ doğru parçalarının orta noktasıdır.

(2) $f(L_1) = L_1, f(C) = L_2$ ve $f(L_2) = C$ olduğundan $C \cap L_2$ kümesinin a, b noktaları f 'nin sabit noktalarıdır.

(3) a ve $b; f$ 'nin sabit noktaları olduğundan $S \circ S_1(\alpha) = \beta = f(\alpha)$ eşitliğinden ve $S \circ S_1$ Möbius dönüşümü olduğundan $f = S \circ S_1$ ' dir.

5.2 3-Devirli Möbius Dönüşümler Altında İnvaryant Kalan Çemberlerin ve Doğruların Oluşturulması

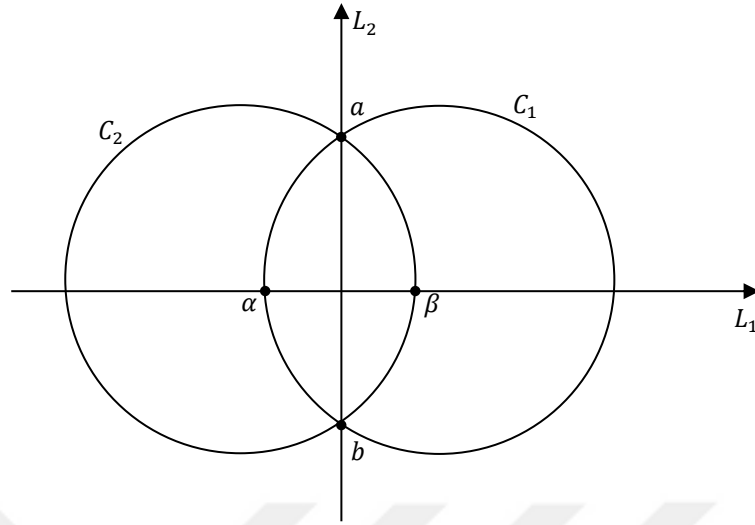
∞ sabit bir nokta olmayacak şekilde f bir 3-devirli Möbius dönüşümü olsun. ∞ noktasının yörüngesini içeren doğru L olmak üzere

$$f(\alpha) = \beta, \quad f(\beta) = \infty, \quad f(\infty) = \alpha$$

olacak biçimde iki farklı α, β noktası vardır. Böylece

$$L = (\alpha, \beta) \text{ ve } f(z) = \frac{\alpha z - (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)}{z - \beta} \text{ dir.}$$

C_1, β merkezli α ' dan geçen çember, C_2, α merkezli β ' dan geçen çember olsun. C_1 ve C_2 ' nin kesiştiği noktalar a ve $b, (\alpha, \beta)$ doğrusu L_1 iken a ve b den geçen doğru L_2 olsun.



Şekil 5.3 3-devirlinin iki sabit noktası.

Önerme 5.2.1

(1) $f(L_1) = L_1$ dir.

(2) $f(C_1) = C_2, f(C_2) = L_2$ ve $f(L_2) = C_1$ dir.

(3) a, b noktaları f altında sabit kalır. (Al-Fadhel, Blel (2013))

İspat.

(1) $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \infty$ ve $f(\infty) = \alpha$ olduğundan $f(L_1) = L_1$ ' dir.

(2) $f(C_1), \beta$ ' dan geçen bir çemberdir. β ve ∞, C_1 ' e göre simetriktir, dolayısıyla $f(\beta) = \infty$ ve $f(\infty) = \alpha$ noktaları $f(C_1)$ ' e göre simetriktir. Bu durumda $f(C_1) = C_2$ ' dir. C_2, L_1 ' e ortogonal bir çemberdir ve $f(C_2)$ bir doğrudur, yani $f(C_2) L_1$ ' e ortogonal bir doğrudur. α ve ∞C_2 ' ye göre simetrik olup $f(\alpha) = \beta$ ve $f(\infty) = \alpha$ noktaları $f(C_2)$ ' ye göre simetriktir. Böylece $f(C_2) = L_2$ ' dir. $L_2, [\alpha, \beta]$ ' nın açıortayı olup ve a ve b noktalarından geçer. f ' nin kutbu L_2 üzerinde değildir. O halde $f(L_2)$ bir çemberdir.

α ve β, L_2 ' ye göre simetrik olduğundan $f(\alpha) = \beta$ ve $f(\beta) = \infty, f(C_2)$ ' ye göre simetriktir, dolayısıyla $f(L_2) = C_1$ 'dir.

(3) a ve b, L_1 ' e göre simetriktir ve $\{a, b\} = C_1 \cap C_2 \cap L_2$, dolayısıyla $f(a) = a$ veya $f(b) = b$ dir. Fakat $f^3 = \text{Id}$ olduğundan $f(a) = a$ ve $f(b) = b$ 'dir. Bundan dolayı a ve b, f ' nin iki sabit noktasıdır.

Teorem 5.2.2 f, ∞ sabit bir nokta olmayacak şekilde 3-devirli bir Möbius dönüşümü olsun. Bu durumda L_1 ' den farklı f ' nin invaryant çemberler kümesi, bir eş eksenli çember demeti oluşturur. L_1 , bu çemberlerin her ikisinin radikal eksenidir. (Al-Fadhel, Blel (2013))

İspat.

C_1 çemberine göre simetri S_1 ile C_2 çemberine göre simetri S_2 ile gösterilsin. $[\alpha, \beta]$ ' nin orta noktası c olsun ve c noktasının C_2 'ye göre simetrisi d olsun. Bu durumda $f(c) = d$ ve $f = S_1 \circ S_2$ dir.

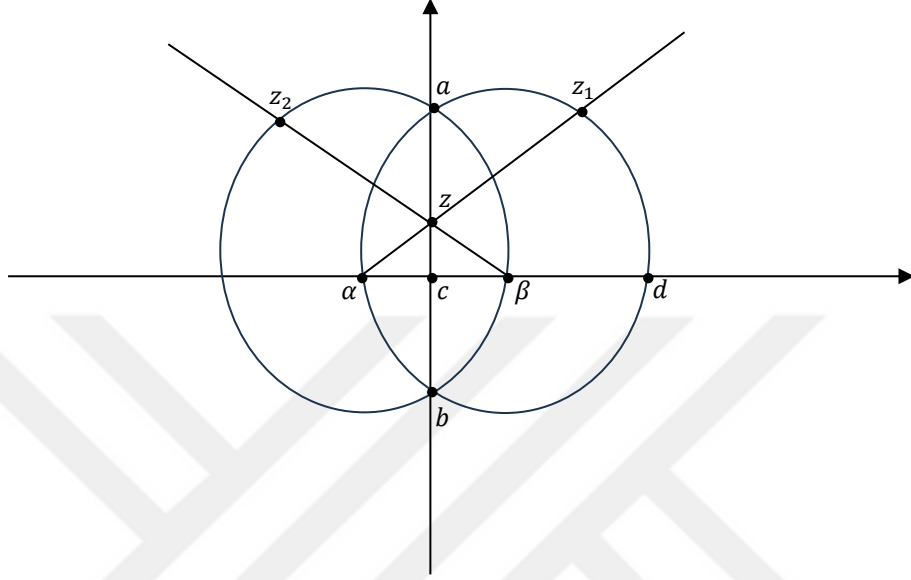
z, L_2 üzerinde a, b ve c ' den farklı herhangi bir nokta olsun. L_2, C_1 ve C_2 'nin radikal eksenini olduğundan, z 'nin C_1 'e göre kuvveti $R = |\alpha - \beta|$ olmak üzere

$$p(z, C_1) = (z - \alpha)\overline{(z - \alpha)} = (z - \beta)\overline{(z - \beta)} = |z - \alpha|^2 - R^2,$$

dir. Buradan $(z - \alpha)\overline{(z_1 - \alpha)} = R^2$ olup z_1, z ' nin C_2 ' ye göre simetrisidir ve z_2, z ' nin C_1 ' e göre simetrisidir. Üstelik $f = S_1 \circ S_2$ olup $f(z) = z_1$ ve $f(z_1) = S_1 \circ S_2(z_1) = S_1(z) = z_2$ ' dir.

z, z_1, z_2 noktalarından geçen çember C olmak üzere $[w, z, f(z), f^2(z)]$ çapraz oranı reeldir. Herhangi bir Möbius dönüşümü altında çapraz oran invaryant olduğundan, $[w, z, f(z), f^2(z)] = [f(w), f(z), f^2(z), z]$ olup buradan $f(w) \in C$ 'dir. O halde C, f altında invaryant kalır ve z 'nin yörüngesini içerir. α ' nın C çemberine göre kuvveti $|z - \alpha||z_1 - \alpha| = R^2$ dir. Ayrıca β ' nın C çemberine göre kuvveti de R^2 'ye eşittir.

L_2 doğrusu, f 'nin invaryant çemberlerinin radikal aksenidir. C ve C' altında invaryant ise $C = C'$ veya $C \cap C' = \emptyset$ olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanır.



Şekil 5.4 3-devirli invaryant çemberler.

5.3 $n \geq 4$ İçin n -Devirli Möbius Dönüşümleri Oluşturulması

Önerme 5.3.1 f bir n -devirli Möbius dönüşümü olsun. $f = g^{-1} \circ h \circ g$ olacak biçimde bir g Möbius dönüşümü ve bir h dönme fonksiyonu vardır. (Al-Fadhel, Blel (2013))

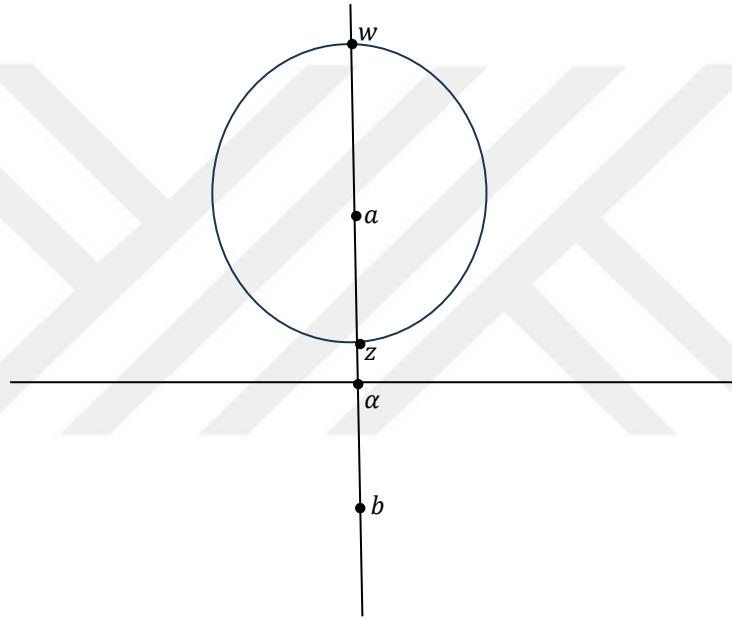
İspat.

f fonksiyonuna $SL(2, \mathbb{C})$ nin bir A matrisi ($A^n = Id$ olacak biçimde) karşılık getirilebilir.

Bu durumda A köşegenleştirilebilir. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, A = P^{-1}DP$ ve $\alpha^n = \beta^n =$

1 olacak şekilde $P, D \in GL(2, \mathbb{C})$ vardır. P ye karşılık bir g Möbius dönüşümü, D ye karşılık ise $h(z) = \frac{\alpha}{\beta} z$ biçiminde h dönme fonksiyonu tanımlansın.

Teorem 5.3.2 f, ∞ sabit nokta olmayacak şekilde bir n -devirli Möbius dönüşümü olsun ve L, ∞ noktasının yörüngesini içeren bir doğru olsun. Bu durumda f altında L' den farklı invaryant kalan çemberler, eş eksenli çemberlerden oluşur ve L bunların radikal eksenidir. (Yani bu çemberlerin her ikisinin de radikal eksen L dir) Eğer f bir n -devirli Möbius dönüşümü ve ∞ sabit nokta ise, bu durumda $f(z) = wz + a$ ($w \neq 1$) ve w bir n -kökü birdir. Bu durumda f 'nin yalnızca bir sabit noktası vardır ve α merkezli çemberler f 'nin tek sabit çemberleridir. (Al-Fadhel, Blel (2013))



Şekil 5.5 $g^{-1}(C), (a, b)$ doğrusunu z ve w 'de keser.

İspat.

g ve h Önerme 5.3.1'deki gibi olsun. h altındaki invaryant çemberler, 0 merkezli çemberlerdir.

$g(a) = \infty, g(b) = 0$ ve $g(\infty) = c$ olacak biçimde a, b, c noktaları seçilsin. c noktasından geçen 0 merkezli çember C olsun. $g^{-1}(C)$ doğrusu L ile ve bu doğrunun (a, b) doğrusu ile arakesiti α ile gösterilsin. 0 ve ∞, h altında sabit kaldığından a ve b noktaları da f altında sabit kalır. 0 ve ∞ noktaları C ye göre simetrik olup, a ve b noktaları

L' ye göre simetriktir. C ile $(0, c)$ nin arakesiti $-c$ olup, $L = g^{-1}(C)$ nin arakesiti de α olur. Ayrıca $(a, b) = g^{-1}(0, c)$ doğru olduğundan $\alpha = g^{-1}(-c)$ 'dir.

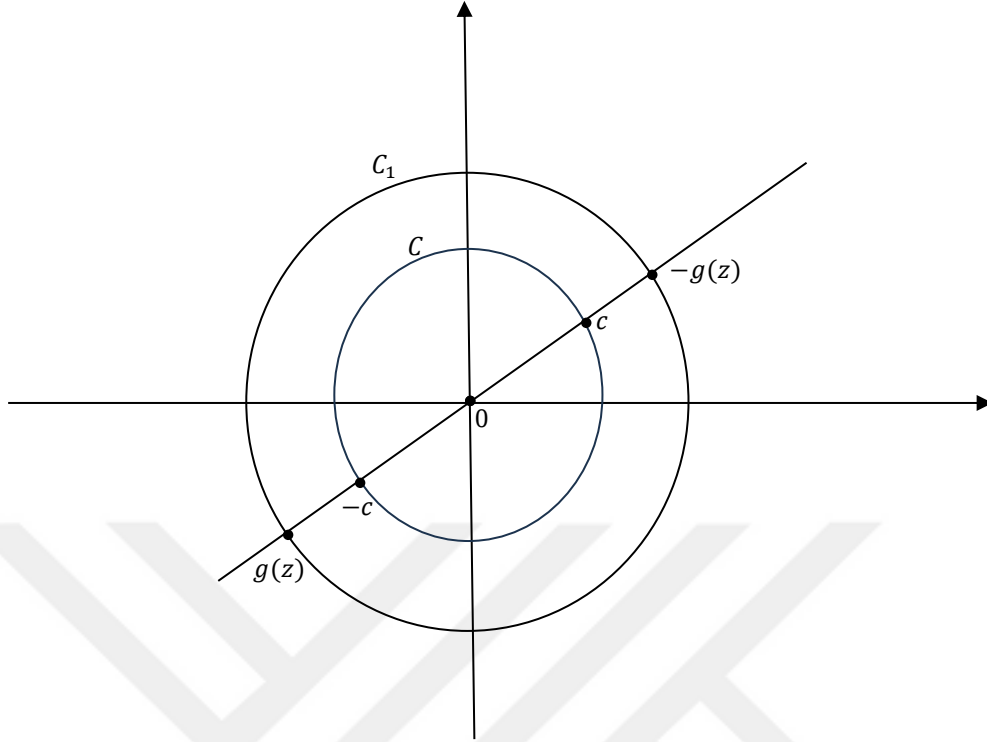
f altındaki invaryant çemberler, g^{-1} altındaki 0 merkezli çemberlerdir. L çemberi haricindeki bu çemberlerin merkezleri (a, b) doğrusu üzerindedir ve ayrıktır. L' den farklı bu çemberler eş eksenli çemberlerden oluşur. C_1, h' nin yörüngesi olsun, $(C_1, 0$ merkezli ve r yarıçaplı bir çemberdir) $g^{-1}(C_1)$ ile (a, b) doğrusunun kesişimini z ve w ile gösteriyoruz. O halde $g(z)$ ve $-g(z), C_1$ 'in $(0, c)$ doğrusu ile kesişimidir. (Bakınız Şekil 5.5 ve Şekil 5.6)

Teoremi kanıtlamak için α 'nın $g^{-1}(C_1)$ 'e göre kuvvetinin C_1 'den bağımsız olduğunu kanıtlamak yeterlidir, bu da $(\alpha - z)\overline{(\alpha - w)}$ ' nin z ve w ' den bağımsız olduğunu kanıtlamaya eş değerdir. Çapraz oran Möbius dönüşümü altında invaryant olduğundan

$$\frac{\alpha - z}{\alpha - w} = (\alpha, a, z, \infty) = (g(\alpha), g(a), g(z), g(\infty)) = (-c, \infty, g(z), c) = \frac{g(z) + c}{2c}$$

$$\frac{\alpha - z}{\alpha - b} = (a, \infty, z, b) = (g(a), g(\infty), g(z), g(b)) = (\infty, c, g(z), 0) = \frac{c}{c - g(z)}$$

$$\frac{\alpha - w}{\alpha - b} = \frac{c - g(c)}{2c}, \quad \frac{\alpha - w}{\alpha - b} = \frac{c}{c + g(z)}$$



Şekil 5.6 C_1 , $(0, c)$ doğrusunu $g(z)$ ve $-g(z)$ ' de keser.

Buradan

$$(\alpha - z)\overline{(\alpha - w)} = \frac{(a - b)c(g(z) + c)\overline{(a - b)}\bar{c}(\bar{c} - \overline{g(z)})}{4c\bar{c}(c - g(z))(\bar{c} + \overline{g(z)})} = \frac{|a - b|^2}{4}$$

elde edilir. Bu ispatı tamamlar.

6. KAYNAKLAR

- Al-Fadhel T. A., 2008, Möbius Transformations with a 2-cycle, Arab Journal of Mathematical Sciences 14 (2), 13–23, Saudi Arabia.
- Al-Fadhel T. A., Mongi B., 2013, Möbius Transformations with n-cycles Geometric Viewpoint , Arab Journal of Mathematical Sciences, 19(1), 21–34 , Saudi Arabia.
- Başkan, T., 1996, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Uludağ Üniversitesi, 2. Baskı, Bursa.
- Beardon A.F., 2005, Algebra and Geometry, Cambridge University Press, 336.
- Beardon A.F., 1991 Iteration of Rational Functions Complex Analytic Dynamical Systems Graduate Texts in Mathematics, 132, Springer-Verlag, New York.
- Beardon A.F., 1983, The Geometry of Discrete Groups, 483, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
- Beardon A.F., 1978, Finite Groups Groups Wallpaper Patterns and Non-Euclidean Geometry, Math Gazette, 422(62), 267–278.
- Beardon A.F., Minda D., 2002, Sphere-Preserving Maps in Inversive Geometry, Proceedings of American Mathematical Society, 130(4), 987–998.
- Carathe'dory C., 1937, The Most General Transformations of Plane Regions Which Transform Circles Into Circles, Bulletin of the American Mathematical Society, 43, 573–579.
- Dennis G. Zill, Patrick Shanahan, 2008, A First Course in Complex Analysis with Applications, 405, London.
- Eljoseph N., 1968, On the Iteration of Linear Fractional Transformations, American Mathematical Monthly, 75 (4), 362–366.
- Haruki H., Rassias T.M., 1996, A New Characteristic of Möbius Transformations by use of Apollonius Points of Triangles, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 197, 14–22.
- Jones G.A., Singerman D., 1987, Complex Functions. An Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, 360, Cambridge.

- Magnus W., 1974, Non-Euclidean Tessellations and Their Groups, Academic Press, 207, New-York.
- Nehari Z., 1952, Conformal Mapping, MvGraw – Hill Book Company, 155-164 , New York.
- Hacısalıhoğlu H. H., 1980, Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere. İnönü Üniv. Yayınları Mat. 1 , Malatya, Turkey.
- Hitchman M.P., 2018, Geometry with an Introduction to Cosmic Topology, Department of Mathematics Linfield College, 238, McMinnville, OR 97128.
- Olsen J., 2010, The Geometry of Möbius Transformations, University Rochester, 37, USA.
- Sabuncuoğlu A., 2003, Analitik Geometri, Nobel Akademi Yayıncılık, 2. Baskı, Ankara.
- Sabuncuoğlu, A., 2008, Lineer Cebir, Nobel Akademi Yayıncılık, 2. Baskı, Ankara.