

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

DEVİRLİ TEMSİLLER VE DEVİRLİ OLARAK TEMSİL EDİLMİŞ
GRUPLAR

İnci GÜLTEKİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM

2002

Y.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Her Hakkı Saklıdır

121436

121436

Prof. Dr. Huseyin AYDIN.....danışmanlığında, İnci GÜLTEKİN tarafından hazırlanan bu çalışma 28...../03.../2002 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Abdurrahim Yılmaz İmza : 

Üye : Prof. Dr. Huseyin Aydın İmza : 

Üye : Doç. Dr. Ramazan Dilici İmza : 

Üye : Doç. Dr. Ekrem Kadiroğlu İmza : 

Üye : Y. Doç. Dr. Abdullah Kıpçaklı İmza : 

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(imza)


Enstitü Müdürü

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**DEVİRLİ TEMSİLLER VE DEVİRLİ OLARAK TEMSİL EDİLMİŞ
GRUPLAR**

İnci GÜLTEKİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM

2002

Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

DEVİRLİ TEMSİLLER VE DEVİRLİ OLARAK TEMSİL EDİLMİŞ GRUPLAR

İnci GÜLTEKİN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimler Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Hüseyin AYDIN

Bu çalışmada, Dunwoody'nin metodunu kullanarak $d = 2a + b + c$ olmak üzere d 'nin tek sayı ve çift sayı olması durumunda M özelliğine sahip olan (d, a, b, c, r, s) 6-lıları bulundu. Böylece bu 6-lılara bağlı olarak oluşturulan $\alpha\beta$ permütasyonunun ilk deviri ve s 'nin değeri kullanılarak devirli temsile karşılık gelen w kelimesi yazıldı. Daha sonra w kelimesine karşılık gelen polinom bulundu ve bu polinomun, bilinen düğümün Alexander polinomu olduğu görüldü.

2002, 65 sayfa

Anahtar kelimeler: Devirli temsillenen gruplar, düğümler, Aleksander polinomları, Heegaard diyagramları, manifolds

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

CYCLIC PRESENTATIONS AND CYCLICALLY PRESENTED GROUPS

İnci GÜLTEKİN

Atatürk University
Faculty of Arts and Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Hüseyin AYDIN

In this Thesis, the 6-tuples (d, a, b, c, r, s) that has property M are found by Dunwoody Methods where $d = 2a + b + c$ is odd and even. Thus the word w which corresponding to cyclic presentation is written by using the first cycle of $\alpha\beta$ which constitute as connected with this 6-tuples and the value of s . Moreover the corresponding polynomial to w was found, it is shown that the polynomial is same as the Alexander polynomial of known knot.

2002, 65 pages

Keywords : Cyclically presented groups, knots, Alexander polynomials, Heegaard diagrams, manifolds

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışmada, bana her türlü desteği sağlayan, derin bilgi ve ilgisinden faydalandığım çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN'a, Sayın Doç. Dr. Ekrem KADIOĞLU başta olmak üzere aralarında bulunmaktan gurur duyduğum tüm matematik bölümü elemanlarına teşekkür eder saygılarımı sunarım.

İnci Gültekin

Şubat 2002



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	4
2.1. Grup Kavramı	4
2.2. Bölüm Halkaları	10
2.3. Polinom Halkaları	12
2.4. Abelyenleştirilmiş Gruplar	15
2.5. Alexander Polinomu	17
3. MATERYAL ve YÖNTEM	22
3.1. Gerenler ve Bağıntılar	22
3.2. Devirli Temsiller	25
3.2.1. Devirli Simetri ile Manifoldlar	25
3.2.2. Grup Temsilleri	35
3.2.3. Devirli Simetri ile Heegaard Diyagramı	36
3.3. Dunwoody Manifoldları	38
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	49
5. SONUÇLAR	63
KAYNAKLAR	64

SİMGELER DİZİNİ

$\text{Im } \theta$	θ dönüşümünün görüntüsü
$F(r, n)$	Fibonacci grubu
$F(X)$	X kümesi üzerinde serbest grup
G_{ab}	G/G'
$G_n(w)$	Devirli temsillenen grup
$GL(n, r)$	genel lineer grup
$\text{Ker } \theta$	θ dönüşümünün çekirdeği
$M(a, b, c)$	Mennicke grupları
$\text{Mac}(a, b)$	Macdonald grupları
$\langle X \rangle$	X ile gerilen alt grup
$\langle X R \rangle$	Grup temsili
X^-	$\{x^{-1} \mid x \in X\}$
$X^\pm$	$X \cup X^-$
$[X, Y]$	$\{x^{-1}y^{-1}xy \mid x \in X, y \in Y\}$ komutatörlerinin kümesi
$\mathbb{Z}G$	Grup halkası
$\triangleleft$	Normal alt grup

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.4.1. Gruplar arasındaki ilişki.....	16
Şekil 3.2.1.1. Serbest grup.....	28
Şekil 3.2.3.1. Heegaard diyagramı.....	37
Şekil 3.3. 1. (a,b,c,n,r,s) 6-lısı ile tanımlanan grafik.....	39
Şekil 3.3. 2. $(1,1,2,n,3,3)$ 6-lısı ile tanımlanan grafik.....	41
Şekil 3.3. 3. $(1,0,1,n,2,2)$ 6-lısı ile tanımlanan grafik.....	44
Şekil 3.3.4. Quaternion grup için van Kampen diyagramı.....	48
Şekil 4.1. $(1,0,c,n,r,s)$ 6-lısı için Heegaard diyagramı.....	57



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.3.1 $Z_2[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$ bölüm halkasının toplam çizelgesi.....	14
Çizelge 2.3.2 $Z_2[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$ bölüm halkasının çarpım çizelgesi.....	14
Çizelge 4.1. (a, b, c, r, s) 5-lisine karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu.....	49
Çizelge 4.2. d tek ve $d \leq 19$ için karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu.....	54
Çizelge 4.3. Her $n > 0$ ve $d \leq 20$ için M özelliğine sahip olan $(1, 0, c, r, s)$ 5-lileri karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu.....	57
Çizelge 4.4. d tek ve $d \leq 20$ için M özelliğine sahip $(a, 0, c, 2, s)$ 5-lileri bunlara karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu.....	58
Çizelge 4.5. $d = 2a + b + c$ çift sayı ve $d \leq 10$ olması durumunda M özelliğine sahip (a, b, c, r, s) 5-lileri bunlara karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu..	60
Çizelge 4.6. $d = 2a + b + c = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ ve $d \leq 20$ için $(a, 0, c, r, s)$ 5-lileri bunlara karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu.....	61
Çizelge 4.7. $d \leq 27$ için $(1, 2, c, 4, s)$ 5-lileri bunlara karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu.....	62

1. GİRİŞ

19. yüzyıl başlarında başlayan Cebirde grup teorisi çalışmaları, cebirsel denklemler teorisinde, J. L. Lagrange tarafından bulunmuş ve sonlu kümelerin permütasyonlarının incelenmesiyle devam etmiştir. J. L. Lagrange (1736-1813) bir denklemin köklerinin değişik permütasyonları üzerine çalışma başlatmış ve bu çalışmayı bir denklemin köklerinin bulunması probleminde kullanmıştır. Daha sonra bu permütasyonların bir grup oluşturduğunu tespit etmiştir.

Esas olarak bir grup tanımı; herhangi iki permütasyonunun bileşkesi yine o kümeye ait bir permütasyon olan bir kümedir şeklinde verilmiştir. Daha sonra bu tanım, elemanları permütasyon olması gerekmeyen ve basit bir kural ile birleştirilen bir küme olarak tanımlanan grup kavramına genelleştirilmiştir. Temelde cebirsel denklemler teorisi, sayılar teorisi ve geometri olmak üzere grup teorisi üç kaynağa sahiptir. Bu alanların her birinde grup teorisinin kullanılmasına rağmen cebirsel denklemler teorisi daha yoğun kullanılmıştır.

Soyut grup teorisi yalnızca bu üç alanda sınırlı kalmayıp, günümüz matematik ve biliminin önemli bir parçasını oluşturur. Matematiğin tüm alt sahalarında, fizikte kristal teori ve kuantum mekaniğinde, kimyada, biyolojide ve diğer birçok bilim dalında uygulama alanı bulabilmektedir.

Devirli temsillenen gruplar, grup teorisinin bir çalışma konusudur. Son zamanlarda bazı matematikçiler devirli temsillerin, topoloji sahasında da önemli bir yer kapladığına dikkat çekmişlerdir. Devirli temsiller, düğümlerin devirli dallanan örtülerinin topolojisi ve linkler arasındaki ilişkiler (Cavicchioli et al. 1998, Cavicchioli et al. 1999, Helling et al. 1995, Helling et al. 1998, Kim ve Vesnin 1997, Kim ve Vesnin 1998, Mednykh ve Vesnin 1996, Ruini ve Spaggiari 1998) tarafından çalışılmıştır. Devirli temsillenen grupların, 3-manifoldun temel grubunu nasıl meydana getirdiğini belirlemek için güzel bir yaklaşım Dunwoody tarafından geliştirilmiştir. $a \geq 3$ ve $w = x_1^{-1}x_0x_1x_0^a$ olması

halinde $M(a, a, a) = G_3(x_2^{-1}x_1x_2x_1^{-a})$ Mennicke grubunun sonlu olduğu Mennicke (1959) tarafından gösterilmiştir. Eğer $w = x_0x_1x_2^{-1}$ ise bu durumda $G_n(w)$ devirli temsillenen gruplarının Fibonacci grupları olduğu görülür. Bu tür gruplara

$$Mac(a, a, a) = G_2(x_1^{[x_1, x_2]}x_1^{-a})$$

$$J(a, a, a) = G_3(x_1^{-1}x_2^{a-1}x_1^{-1}x_2^{a+1})$$

$$F(2, n) = G_n(x_1x_2x_3^{-1})$$

örnekleri verilir. $r \geq 2$ ile $r, n \in \mathbb{N}$ için alt indisler $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesinde mod n 'ye göre indirgenmiş olduğunda $F(r, n)$ Fibonacci grubu

$$F(r, n) = G_n(x_1x_2x_3 \dots x_r x_{r+1}^{-1})$$

devirli temsillenen grup olarak tanımlanır. Circulant matris, polinomları bileşenlerine ayırma ve birimin kompleks köklerini içeren elementer metodlar $G_n(w)_{ab}$ grupları hakkındaki bilgilerin önemli bir kısmını verir. Johnson (1990), ayrıntılara girmeden, yalnızca elde edilebilen sonuç tipinin örneklerini aşağıdaki gibi vermiştir.

- i. w ile eşlenen polinomun terimlerinde $|G_n(w)_{ab}|$ için bir formül vardır.
- ii. $G_n(w)$ için sonsuz ya da aşıkâr gibi kesin şartlar verilebilir.
- iii. $F(r, n)_{ab}$ daima sonlu gruptur.
- iv. Sabit r tamsayısı için n yeteri kadar büyük olduğunda

$$|F(r, n)_{ab}| < |F(r, n+1)_{ab}|$$

olur.

- v. Bir G grubu verilsin. $G \cong F(r, n)$ olacak şekilde sonlu bir çok (r, n) çifti vardır.

Devirli temsillerle eşlenen polinomların, karşılık gelen düğümlerin Alexander polinomları ile eşlendiği Johnson (1974) tarafından gösterilmiştir.

$1 \leq i \leq n$ için a_i , w da x_i lerin üstlerinin toplamı olduğunda $G_n(w)$ devirli temsiliyle eşlenen polinomun

$$f_w(t) = \sum_{i=1}^n a_i t^i$$

şeklinde olduğu Dunwoody (1995) tarafından gösterilmiştir. Eğer $|f_w(1)|=1$ ise bu durumda w kelimesine kabul edilebilir denir (Szczepanski ve Vesnin).



2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Grup Kavramı

Bu bölümde yarı grup ve monoidlerden kısaca bahsedilecek ve matematiğin hemen her dalında karşılaşılan grup kavramı hakkında temel bilgiler verilecektir. 1880 yılına kadar grup tanımı tam olarak verilememişti. Fakat Cayley, her soyut grubun bir permütasyon grubu olarak düşünülebileceğini göstermiştir. Böylece grup kavramının çok daha geniş olduğu fark edilmiş ve matematiğin bir çok dalında ortaya çıkmıştır.

Tanım 2.1.1: G boş olmayan bir küme ve $\circ : G \times G \rightarrow G$ bir dönüşüm olsun. $\circ$ işlemine G üzerinde bir ikili işlem denir.

G boş olmayan bir küme ve $\circ$, G üzerinde bir ikili işlem olsun. $(G, \circ)$ ikilisine bir cebirsel yapı denir.

Tanım 2.1. 2: $(G, \circ)$ bir cebirsel yapı olsun. Eğer her $a, b, c \in G$ için

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

ise $(G, \circ)$ cebirsel yapısına yarı grup denir.

$(G, \circ)$ bir yarı grup olsun. Her $a \in G$ için $a \circ e = e \circ a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa $(G, \circ)$ cebirsel yapısına monoid denir.

Tanım 2.1.3: G boş olmayan bir küme $\circ$ bu küme üzerinde bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $(G, \circ)$ cebirsel yapısına grup denir.

- i. Her $a, b, c \in G$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ dir.
- ii. Her $a \in G$ için $a \circ e = e \circ a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.

iii. Her $a \in G$ için $aoa^{-1} = a^{-1}oa = e$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in G$ vardır.

Cebirsel yapılar gibi gruplarda genellikle ikili işlemiyle birlikte (G, o) olarak gösterilirse de bir karışıklığa neden olmadığı sürece G ile de gösterilebilir.

Tanım 2.1.4: (G, o) bir grup olmak üzere her $a, b \in G$ için $ao b = bo a$ oluyorsa G grubuna değişmeli grup ya da Abelyen grup denir.

Tanım 2.1.5: G bir grup ve H , G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. H , G deki işleme göre bir grup ise H ye G nin alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

G ve $\{e\}$ gruplarına G nin aşıkâr veya trivial alt grupları denir. G nin aşıkâr alt gruplarının dışındaki diğer tüm alt gruplarına öz alt veya has alt grupları denir ve G nin bir has alt grubu $H < G$ ile gösterilir.

G bir grup ve $H < G$ olsun. G nin H yi ihtiva eden H ve G den başka hiç bir alt grubu yoksa H ye G nin maksimal alt grubu denir.

Tanım 2.1.6: G bir grup ve $a \in G$ olsun. $a^m = e$ (toplam notasyonunda $ma = e$) olacak şekilde bir pozitif m tam sayısı varsa a ya sonlu mertebeden bir eleman aksi halde sonsuz veya sıfır mertebededir denir. Şayet a sonlu mertebeli ise $a^m = e$ şartını sağlayan en küçük m tamsayısına a 'nın mertebesi denir ve $o(a)$ ile gösterilir.

G bir grup olmak üzere G kümesinin elemanlarının sayısı sonlu n pozitif tamsayısı ise G ye n . mertebeden sonlu grup denir ve $o(G) = n$ veya $|G| = n$ sembollerinden biriyle gösterilir. Eğer G grubu sonsuz eleman ihtiva ediyorsa G ye sonsuz mertebededir denir ve $o(G) = \infty$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7: G bir grup ve H , G nin bir alt grubu olsun.

$$Ha = \{ha : h \in H, a \in G\}$$

$$aH = \{ah : h \in H, a \in G\}$$

kümelerine sırasıyla H nin G deki sağ ve sol yan kümeleri denir.

Teorem 2.1.8: N , G grubunun bir alt grubu ise aşağıdaki önermeler denktir.

- i. Her $g \in G$ ve her $n \in N$ için $gng^{-1} \in N$ dir.
- ii. Her $g \in G$ için $gNg^{-1} \subset N$ dir.
- iii. Her $g \in G$ için $gNg^{-1} = N$ dir.
- iv. Her $g \in G$ için $gN = Ng$ dir.

Tanım 2.1.9: G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Yukarıdaki şartlardan biri sağlanıyorsa (toplam notasyonunda $N + g = g + N$) N alt grubuna G nin normal alt grubu denir ve $N \triangleleft G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.10: G bir grup ve $N \triangleleft G$ olsun. $G/N = \{Na : a \in G\}$ kümesi

$$(Na)(Nb) = Nab$$

şeklinde tanımlanan işleme göre bir gruptur. Bu gruba N nin belirttiği bölüm grubu veya faktör grubu denir.

Eğer bir grubun $\{1\}$ ve kendisinden başka normal alt grubu yoksa bu gruba basit grup denir.

Teorem 2.1.11: I bir indis kümesi, G bir grup ve H_i ler G nin alt grupları olsun. Bu takdirde $H = \bigcap_{i \in I} H_i$ G nin bir alt grubudur. Ayrıca her bir H_i , G de normal ise H , G de normaldir.

Tanım 2.1.12: G bir grup ve $a, b \in G$ olmak üzere $aba^{-1}b^{-1}$ elemanına a ve b 'nin komütatörleri denir ve $[a, b]$ ile gösterilir.

G grubuna ait bütün komütatörlerin sonlu çarpımlarından oluşan küme $[G, G]$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13: G bir grup ve $X \subseteq G$ olsun. G nin X 'i ihtiva eden bütün alt gruplarının arakesiti Teorem 2. 1. 11'e göre G nin bir alt grubudur. Bu alt gruba G nin X tarafından gerilen alt grubu denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. X kümesine $\langle X \rangle$ grubunun geren kümesi ve X 'in elemanlarına ise gerenler denir. X boş küme ise bu alt grup $\{e\}$ dir.

Bu tanıma göre, I bir indis kümesi olmak üzere

$$A = \{H_i : X \subseteq H_i, H_i \leq G, i \in I\}$$

ise $\langle X \rangle = \bigcap_{H_i \in A} H_i$ olur. Tanımdan hemen görüleceği gibi $H \leq G$ ve $X \subseteq H$ ise

$\langle X \rangle \leq H$ dır. Şu halde $\langle X \rangle$, G nin X 'i ihtiva eden en küçük alt grubudur. Eğer $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ yani X sonlu ise $\langle X \rangle$ in yerine $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$ alınabilir. Bu durumda

$$\langle X \rangle = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$$

ifadesine sonlu gerilen alt grup denir.

Tanım 2.1.14: Bir tek eleman tarafından gerilen gruba devirli grup denir.

G bir devirli grup ve a , G grubunun bir gereni ise $G = \langle a \rangle$ yazılır. Bu tanımdan da anlaşılacağı gibi devirli grup, sonlu gerilen grupların özel halidir.

Tanım 2.1.15: $(G, *)$ ve $(G', \circ)$ iki grup, $F: G \rightarrow G'$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in G$ için

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y)$$

ise f ye G den G' ne grup homomorfizmi denir. f homomorfizmi örten ise f ye epimorfizm, f homomorfizmi 1-1 ise f monomorfizm, f homomorfizmi hem 1-1 hem de örten ise f ye izomorfizm denir. Eğer G ve G' grubu izomorf ise bu $G \cong G'$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.16: G bir grup, $f: G \rightarrow G$ ye bir izomorfizm ise f ye otomorfizm denir.

Tanım 2.1.17: p asal sayı olsun $SL(2, p) = \{ (a_{ij})_{2 \times 2} : \det(a_{ij}) = 1, a_{ij} \in \mathbb{Z}_p \}$ kümesi matrislerdeki çarpma işlemine göre bir gruptur. Bu gruba $\mathbb{Z}_p$ üzerinde 2-boyutlu özel lineer grup denir.

$SL(2, p)$ grubunun mertebesini hesaplayalım. Bunun için

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p \text{ ve } ad - bc = 1)$$

matrisini alalım. Buna göre eğer $c = 0$ ise $ad - bc = 1$ olacak şekilde $a \neq 0$ olması hariç a, b keyfi ve d , a ile belirlendiğinde a, b, d için $p(p-1)$ seçim vardır. Eğer $c \neq 0$ ise $ad - bc = 1$ olacak şekilde a, b keyfi c , $\mathbb{Z}_p$ nin sıfırdan farklı herhangi elemanı olduğunda ve böylece b belirlendiğinde a, b, c, d için $p^2(p-1)$ seçim vardır. Buna göre,

$$|SL(2, p)| = p(p-1) + p^2(p-1) = p(p^2 - 1)$$

olur. Eğer $p = 2$ ise $SL(2, p)$ 6. mertebeye sahiptir ve S_3 'e izomorftur (James ve Liebeck 1993).

Tanım 2.1.18: I , 2×2 tipinde birim matrisi olduğunda $SL(2, p)$ nin merkezi,

$$Z = \{I, -I\}$$

olup, $SL(2, p)/Z$ bölüm grubuna 2 boyutlu projective özel lineer grup denir ve $PSL(2, p)$ ile gösterilir.

Buna göre $PSL(2, p) = SL(2, p)/\{I, -I\}$ 2 boyutlu projective özel lineer grubunun mertebesi,

$$|SL(2, p)| = p(p^2 - 1)$$

olduğu için,

$$|PSL(2, p)| = p(p^2 - 1) / 2$$

yazılır.

$PSL(2, 5)$ grubu ile A_5 alterne grubu izomorftur. Ayrıca $p \geq 5$ için $PSL(2, p)$ bir basit gruptur (Rotman 1984).

Tanım 2.1.19: X sonlu veya sonsuz herhangi bir küme, X^{-1} de X kümesi ile birebir eşlenen bir başka küme olsun. $X^\pm = X \cup X^{-1}$ diyelim. $y_i \in X^\pm$ ($i = 1, 2, \dots, t$) olmak üzere $y_1 y_2 \dots y_t$ ifadesine $X^\pm$ de bir kelime denir ve $R = (y_1, y_2, \dots, y_t)$ şeklinde gösterilir. t 'ye kelimenin uzunluğu denir.

Uzunluğu sıfır olan kelime e ile gösterilir. İki kelimenin eşit olması için gerek ve yeter şart bu kelimelerin aynı uzunlukta olmaları ve karşılıklı terimlerinin eşit olmasıdır. Yani $y_1 y_2 \dots y_t = x_1 x_2 \dots x_k$ olması için $y_i = x_i$ ve $t = k$ olmasıdır.

Tanım 2.1.20: Eğer $X^\pm$ deki elemanların bir kelimesinde $x_i x_i^{-1}$ veya $x_i^{-1} x_i$ sembol çifti yoksa bu kelimeye indirgenmiş kelime denir.

2.2 Bölüm Halkaları

Gruplar teorisinde normal alt grupların oynadığı rolü halkalar teorisinde idealler oynar. Burada ideal kavramı verilip bundan yararlanarak bölüm halkaları tanımlanacaktır.

Tanım 2.2.1: R boş olmayan bir küme ve R de toplama (+) ve çarpma (·) denilen iki tane ikili işlem verilmiş olsun. Bu $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa $(R, +, \cdot)$ ya halka denir.

i. $(R, +)$ değişmeli gruptur.

ii. $(R, +, \cdot)$ daki çarpma birleşme özelliğine sahiptir. Yani her $a, b, c \in R$ için

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

iii. $(R, +, \cdot)$ daki çarpma toplama üzerinde dağılma özelliğine sahiptir. Yani, her $a, b, c \in R$ için

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{ve} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

dir.

R halkasında çarpma işleminin özdeş elemanı varsa yani her $a \in R$ için $1_R a = a 1_R$ olacak şekilde R de 1_R ile gösterilen bir eleman varsa $(R, +, \cdot)$ 'ya birim elemanlı halka denir. Şayet bu $(R, +, \cdot)$ halkası çarpma işlemine göre değişmeli ise yani her $a, b, c \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa $(R, +, \cdot)$ 'ya değişmeli halka denir.

Tanım 2.2.2: R halkasının boş olmayan bir I alt kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa I kümesine R halkasının ideali denir.

i. Her $a, b \in I$ için $a - b \in I$ 'dir.

ii. Her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $ra \in I$ 'dir.

iii. Her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $ar \in I$ 'dir.

Eğer i ve ii şartları sağlanıyorsa I 'ya R halkasının sol ideali, i ve iii şartları sağlanıyorsa I 'ya R halkasının sağ ideali denir.

Tanım 2.2.3: R bir halka ve I , R halkasının bir ideali olsun. R/I kümesi

$$(a+I) + (b+I) = a+b+I$$

ve

$$(a+I) \cdot (b+I) = ab+I$$

işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya R nin I ya bölüm halkası denir.

Teorem 2.2.1: I , R halkasının bir ideali olsun. Bu durumda $(R/I, +)$ bölüm grubu

$$(a+I) \cdot (b+I) = ab+I$$

çarpma işlemine göre bir halkadır. Eğer R değişmeli ise R/I da değişmeli ve R birim elemanlı ise R/I da birim elemanlıdır.

Tanım 2.2.4: X , R halkasının bir alt kümesi ve R nin X i ihtiva eden ideallerinin ailesi de

$$B = \{I_i : X \subset I_i\}$$

olsun. Bu taktirde

$$\bigcap_{I_i \in B} I_i$$

idealine X tarafından gerilen ideal denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. X in elemanlarına $\langle X \rangle$ idealinin gerenleri denir. Eğer

$$X = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

yani X sonlu ise $\langle X \rangle$ ideali sonlu geriliyor denir ve

$$\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$$

ile gösterilir. Bir tek eleman tarafından gerilen ideale esas ideal denir.

2.3.Polinom Halkaları

Tanım 2.3.1: R bir halka olsun. Terimleri R nin elemanları ve sonlu bir basamaktan sonraki terimleri 0 olan

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots)$$

şeklindeki diziye R üzerinde polinom denir. R üzerinde polinomların halkası $R[x]$ ile gösterilir. Bu küme

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_m, 0, 0, \dots)$$

şeklinde tanımlanan toplama ve herhangi $k \geq 0$ için

$$d_k = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_1 b_{m-1} + a_0 b_m$$

şeklinde olduğunda,

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots) = (d_0, d_1, \dots, d_k, 0, 0, \dots)$$

ile tanımlanan çarpma işlemine göre bir halkadır. Bu halkaya polinom halkası denir.

$R[x]$ deki $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots)$ polinomu $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.2: $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in R[x]$ polinomunda a_0 'a sabit terim a_n 'ye baş katsayı ve $a_n \neq 0$ olmak üzere n 'ye polinomun derecesi denir ve $\deg(f(x)) = n$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.3: R birim elemanlı ve değişmeli bir halka ise $a \in R$ nin gerdiği ideal

$$\langle a \rangle = \{ar : r \in R\}$$

şeklindedir.

$\mathbb{Q}[x]$ de $x^2 - 2$ polinomunun gerdiği esas ideal

$$\langle x^2 - 2 \rangle = \{ (x^2 - 2)p(x) : p(x) \in \mathbb{Q}[x] \}$$

dir. Daha genel olarak F bir cisim olmak üzere $F[x]$ deki $I = \langle x \rangle$ ideali sabit terimi 0 olan polinomlardan ibarettir. Yani $\langle x \rangle = \{ x.p(x) : p(x) \in F[x] \}$ dir.

$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasında olduğu gibi bir çok halkada her ideal bir esas idealdir. Böyle halkalara esas ideal halkası denir.

Şayet F bir cisim ise $F[x]$ polinom halkasının bölüm halkaları, halkaların önemli bir sınıfını teşkil eder. Bu bölüm halkaları yeni cisimlerin inşasında kullanılacaktır. $F[x]$ esas ideal halkası olduğunda herhangi bir bölüm halkası $F[x]/\langle p(x) \rangle$ ($p(x) \in F[x]$) ile gösterilir ve $F[x]/\langle p(x) \rangle$ in elemanları;

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{\langle p(x) \rangle} \Leftrightarrow f(x) - g(x) \in \langle p(x) \rangle$$

ile tanımlanan denklik sınıflarıdır.

Teorem 2.3.4: F bir cisim $p(x) \in F[x]$ pozitif dereceli bir polinom ve $I = \langle p(x) \rangle$ olsun. Şayet *der* $p = n$ ise $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in F$ olmak üzere $F[x]/I$ nın elemanları

$$I + a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

şeklindedir.

Örnek 2.3.4.1: $I = \langle x^2 - 2 \rangle$ olmak üzere $\mathbb{Q}[x]/I = \{ I + a_0 + a_1x : a_0, a_1 \in \mathbb{Q}[x] \}$ bölüm halkasında $I + 3x + 4$ ve $I + 5x - 6$ elemanlarının toplamı;

$$(I + 3x + 4) + (I + 5x - 6) = I + (3x + 4) + (5x - 6) = I + 8x - 2$$

ve çarpımları ise;

$$15x^2 + 2x - 24 = 15(x^2 - 2) + 2x + 6$$

$$I + 15x^2 + 2x - 24 = I + 2x + 6$$

olduğundan dolayı

$$(I + 3x + 4)(I + 5x - 6) = I + (3x + 4)(5x - 6) = I + 15x^2 + 2x - 24$$

olur.

Örnek 2.3.4.2: $Z_2[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$ bölüm halkasının toplam ve çarpım çizelgesini bulalım. $I = \langle x^2 + x + 1 \rangle$ olsun. Bu durumda

$$Z_2[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle = \{I + a_0 + a_1x : a_0, a_1 \in Z_2\}$$

$$= \{I, I + 1, I + 1 + x\}$$

olup, toplam ve çarpım çizelgeleri

Çizelge 2.3.1 $Z_2[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$ bölüm halkasının toplam çizelgesi

+	I	$I + 1$	$I + x$	$I + x + 1$
I	I	$I + 1$	$I + x$	$I + x + 1$
$I + 1$	$I + 1$	I	$I + x + 1$	$I + x$
$I + x$	$I + x$	$I + x + 1$	I	$I + 1$
$I + x + 1$	$I + x + 1$	$I + x$	$I + 1$	I

Çizelge 2.3.2 $Z_2[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$ bölüm halkasının çarpım çizelgesi

.	I	$I + 1$	$I + x$	$I + x + 1$
I	I	I	I	I
$I + 1$	I	$I + 1$	$I + x$	$I + x + 1$
$I + x$	I	$I + x$	$I + x + 1$	$I + 1$
$I + x + 1$	I	$I + x + 1$	$I + 1$	$I + x$

şeklindedir.

$f(x)$ polinomu $p(x)$ polinomu ile bölündüğünde kalanın bulunması için bölme algoritmasından daha kolay metodlar vardır. der $p = n$ ve $I = \langle p(x) \rangle$ olsun. Bu durumda kalanın bulunması problemi $f(x) \equiv r(x) \pmod{\langle p(x) \rangle}$ olacak şekilde derecesi n den daha küçük olan $r(x)$ polinomunun bulunmasına indirgenir.

Örnek 2.3.4.1 de $I = \langle x^2 - 2 \rangle$ olduğundan $x^2 - 2 \equiv 0 \pmod{I}$ ve dolayısıyla $x^2 \equiv 2 \pmod{I}$ olur. Bu halde $q(x) \equiv k(x) \pmod{I}$ gibi bir ifadede x^2 nin yerine 2 yazılır. Örneğin,

$$15x^2 + 2x - 24 \equiv 15(2) + 2x - 24 \pmod{I} \equiv 2x + 6 \pmod{I}$$

ve

$$I + 15x^2 + 2x - 24 = I + 2x + 6$$

olur. Örnek 2.3.4.2. de ise $I = \langle x^2 + x + 1 \rangle$ olup

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{I} \quad \text{ve} \quad x^2 \equiv -x - 1 \pmod{I}$$

($\mathbb{Z}_2$ de $1 \equiv -1$ dir.) olur. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_2[x]/I$ da çarpma yaparken x^2 ile $x+1$ kendi aralarında yer değiştirebilir. Örneğin,

$$I + x^2 = I + x + 1$$

$$1 + x(x + 1) = 1 + x^2 + x = I + x + 1 = I + 1$$

olur.

2.4 Abelyenleştirilmiş Gruplar

Herhangi bir G grubu verilsin. G nin komütatör grubu G nin elemanlarının

$$\{g^{-1}h^{-1}gh \mid g, h \in G\}$$

bütün komütatörlerinin kümesiyle gerilen G' grubudur.

$$G' \triangleleft G \quad \text{ve} \quad G_{ab} = G/G' \quad (1)$$

abelyendir. Burada $G', (1)$ i sağlayan G nin en küçük normal alt grubudur. $N \triangleleft G$ verildiğinde G/N nin abelyen olması için gerek ve yeter şart $N \supseteq G'$ olmasıdır (Johnson 1990).

Tanım 2.4.1: $G = \langle X \mid R \rangle$ verilsin

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_r\} \quad C = \{[x_i, x_j] \mid 1 \leq i \leq j \leq r, r \in \mathbb{N}\}$$

olmak üzere

$$G' = \langle [x_i, x_j] \mid 1 \leq i \leq j \leq r \rangle$$

ve

$$G_{ab} = \langle X \mid R, C \rangle$$

olur. Burada G_{ab} ye abelyenleştirilmiş grup denir.

Örnek 2.4.1.1: $G = \langle x, y \mid x^4, x^2 = y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$ olsun.

$$G' = \langle [x, y] \rangle$$

$$G = \{e, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y\}$$

$$G_{ab} = \langle x, y \mid x^4, x^2 = y^2, y^{-1}xy = x^{-1}, [x, y] \rangle = \{e, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y, x^{-1}y^{-1}xy\}$$

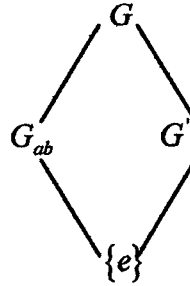
olur. $xy = yx$ ve $x^2 = y^2$ olduğu için

$$G_{ab} = \{e, x, y, xy\} \cong Z_2 \times Z_2$$

olur. Ayrıca

$$G' = \{e, x^2\} \text{ ve } G' \subset G$$

dır.



Şekil 2.4.1. Gruplar arasındaki ilişki

Örnek 2.4.1.2: G grubu,

$$G = \langle x, y, z, t \mid (xyz)^6 = e, t^2 = (xz)^2, (xy^3z^2)^2 = e, (xy^3zt^2)^2 = e, (yt^2)^2 = x^2z^3, (xyz)^4(yt)^2 = e \rangle$$

temsiliyle verilsin. Bu durumda

$$G_{ab} = \langle x, y, z, t \mid (xyz)^6 = e, t^2 = (xz)^2, (xy^3z^2)^2 = e, (xy^3zt^2)^2 = e, (yt^2)^2 = x^2z^3, (xyz)^4(yt)^2 = e, \quad [x, y] = [x, z] = [x, t] = [y, z] = [y, t] = [z, t] = e \rangle$$

temsiline sahiptir ve

$$G_{ab} = \langle x, y, z, t \mid x^6y^6z^6, x^2z^2t^{-2}, x^2y^6z^2t^4, x^{-2}y^2z^{-3}t^4, x^4y^6z^4t^2, [x, y], [x, z], [x, t], [y, z], [y, t], [z, t] \rangle$$

olur.

2.5 Alexander Polinomu

Tanım 2.5.1: G bir grup olsun. Katsayıları tam sayı olan G grubunun elemanlarının bütün sonlu lineer $\sum_g n_g g$ kombinasyonlarından ibaret olan küme

$$\left(\sum_g m_g g \right) + \left(\sum_g n_g g \right) = \sum_g (m_g + n_g) g$$

şeklinde tanımlanan toplama ve

$$\left(\sum_{g \in G} m_g g \right) \left(\sum_{h \in G} n_h h \right) = \sum_{g, h \in G} m_g n_h (gh)$$

çarpma işlemlerine göre birimli bir halkadır. Buna G nin $\mathbb{Z}$ üzerinde grup halkası denir ve $\mathbb{Z}G$ ile gösterilir.

$\mathbb{Z}G$ nin iki elemanının eşit olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen elemanlarının eşit olmasıdır. Yani,

$$\sum_g n_g g = \sum_g m_g g$$

olması için gerek ve yeter şart tüm g 'ler için $n_g = m_g$ olmasıdır. $\mathbb{Z}G$ grup halkasının değişmeli olması için gerek ve yeter şart G grubunun değişmeli olmasıdır.

Örnek 2.5.1.1: i. $\mathbb{Z}\langle e \rangle \cong \mathbb{Z}$

ii. $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ tam sayı katsayılarıyla t ve t^{-1} de polinomların halkası olduğunda

$$\mathbb{Z}\langle t: - \rangle \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

olur. $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ nin sıfırdan farklı her elemanı, α bir tamsayı ve t değişken olmak üzere $f(t)$ sıfırdan farklı ve katsayıları tam sayı olan bir polinom olduğunda

$$t^\alpha f(t)$$

şeklinde bir tek şekilde ifade edilir. α tamsayı olduğunda $\mathbb{Z}\langle t: - \rangle$ nin terslenebilir elemanları $\pm t^\alpha$ şeklindedir. $\mathbb{Z}G$ grup halkası

$$\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, t_3^{\pm 1}, \dots, t_k^{\pm 1}]$$

polinomlarının halkasına izomorftur. $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ tam sayı ve $t_1, t_2, t_3, \dots, t_k$ değişkenler olmak üzere $f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_k)$ sıfırdan farklı ve katsayıları tam sayı olan polinom olduğunda $\mathbb{Z}G$ nin sıfırdan farklı her elemanı

$$t_1^{m_1} t_2^{m_2} t_3^{m_3} \dots t_k^{m_k} f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_k)$$

formunda bir tek temsile sahiptir.

Tanım 2.5.2: G keyfi bir grup olsun ve ε ile $G \rightarrow \langle e \rangle$ aşıkâr homomorfizmi gösterilsin. ε ye karşılık gelen $\varepsilon : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$ halka homomorfizmi

$$\varepsilon \left(\sum_{g \in G} n_g g \right) = \sum_{g \in G} n_g$$

ile verilir. Bu homomorfizme augmentation homomorfizm denir.

Bu, türevin tanımında önemli bir rol oynar. ε halka homomorfizminin çekirdeği ΔG ile gösterilir ve buna augmentation ideal denir. ΔG nin her elemanı

$$\sum_{g \neq e} n_g (g - e)$$

formunda sonlu toplam olarak bir temsile sahiptir.

Tanım 2.5.3: $\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n : r_1, r_2, r_3, \dots, r_m \rangle$ bir G grubunun sonlu temsili olsun. θ ,

$$\theta : \mathbb{Z}F(\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}) \rightarrow \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n : r_1, r_2, r_3, \dots, r_m \rangle$$

doğal halka homomorfizmini ve $\underline{a}$ de

$$\mathbb{Z}\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n : r_1, r_2, r_3, \dots, r_m \rangle \rightarrow \mathbb{Z}(\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n : r_1, r_2, r_3, \dots, r_m \rangle / \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n : r_1, r_2, r_3, \dots, r_m \rangle')$$

doğal halka homomorfizmini gösterebilirsin. Bu durumda bu temsile karşılık gelen Alexander matrisi,

$$\left[\underline{a} \left(\theta \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right) \right]$$

şeklinde olur (Moran 1983).

Tanım 2.5.4: $F(\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, \dots, x_n\})$ serbest grubunun $\mathbb{Z}F(\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, \dots, x_n\})$ halkasında basit türevini oluşturacağız. Burada $F(\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, \dots, x_n\})$ serbest grubunu F ve $\mathbb{Z}F(\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, \dots, x_n\})$ grup halkasını da $\mathbb{Z}F$ ile göstereceğiz. $\varepsilon_s = \pm 1$ olduğunda,

$$\prod_{s=1}^k x_{i_s}^{\varepsilon_s}$$

F serbest grubunda keyfi bir kelime olsun. Her $j > 1$ için basit türev

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\prod_{s=1}^k x_{i_s}^{\varepsilon_s} \right) = \sum_{i_r=j} (-1)^{\frac{1}{2}(\varepsilon_r-1)} \prod_{s < r} x_{i_s}^{\varepsilon_s} x_{i_r}^{\frac{1}{2}(\varepsilon_r-1)}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\sum_{g \neq e} n_g (g - e)$$

formunda sonlu toplam olarak bir temsile sahiptir.

Tanım 2.5.3: $\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n : r_1, r_2, r_3, \dots, r_m \rangle$ bir G grubunun sonlu temsili olsun. θ ,

$$\theta : \mathbb{Z}F(\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}) \rightarrow \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n : r_1, r_2, r_3, \dots, r_m \rangle$$

doğal halka homomorfizmini ve a de

$$\mathbb{Z}\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n : r_1, r_2, r_3, \dots, r_m \rangle \rightarrow \mathbb{Z}(\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n : r_1, r_2, r_3, \dots, r_m \rangle / \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n : r_1, r_2, r_3, \dots, r_m \rangle')$$

doğal halka homomorfizmini gösterebilir. Bu durumda bu temsile karşılık gelen Alexander matrisi,

$$\left[\underline{a} \left(\theta \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right) \right]$$

şeklinde olur (Moran 1983).

Tanım 2.5.4: $F(\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, \dots, x_n\})$ serbest grubunun $\mathbb{Z}F(\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, \dots, x_n\})$

halkasında basit türevini oluşturacağız. Burada $F(\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, \dots, x_n\})$ serbest grubunu F ve $\mathbb{Z}F(\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_j, \dots, x_n\})$ grup halkasını da $\mathbb{Z}F$ ile göstereceğiz.

$\varepsilon_s = \pm 1$ olduğunda,

$$\prod_{s=1}^k x_{i_s}^{\varepsilon_s}$$

F serbest grubunda keyfi bir kelime olsun. Her $j > 1$ için basit türev

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\prod_{s=1}^k x_{i_s}^{\varepsilon_s} \right) = \sum_{i_r=j} (-1)^{\frac{1}{2}(\varepsilon_r-1)} \prod_{s \neq r} x_{i_s}^{\varepsilon_s} x_{i_r}^{\frac{1}{2}(\varepsilon_r-1)}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.5.4.1: $k > 1$ pozitif bir tam sayı ve $k = k_1 k_2$ olacak şekilde k_1 ve k_2 , 1'den büyük aralarında asal pozitif tam sayılar olsun. Bu durumda

$$\langle z : z^k \rangle \cong \langle x, y : x^{k_1}, x^{k_2}, x^{-1}y^{-1}xy \rangle = G$$

olur. $\langle z : z^k \rangle$ grup temsilinin Alexander matrisi, $\langle z : z^k \rangle$ nin elemanları $z^k - 1 = 0$ ile $\mathbb{Z} \langle z : z^k \rangle$ halkasına ait olduğunda

$$\begin{bmatrix} 1 + z + z^k + \dots + z^{k-1} \end{bmatrix}$$

tipinde 1×1 matrisidir.

İkinci grup temsilinin Alexander matrisi ise G grubunun elemanları, $\mathbb{Z} \langle z : z^k \rangle$ halkasına izomorf olan $\mathbb{Z}(G/G')$ halkasına ait olduğunda

$$\begin{pmatrix} 1 + x + x^2 + \dots + x^{k_1-1} & 0 \\ 0 & 1 + y + y^2 + \dots + y^{k_2-1} \\ -x^{-1} + x^{-1}y^{-1} & -x^{-1}y^{-1} + x^{-1}y^{-1}x \end{pmatrix}$$

3×2 tipinde matris olur. Burada G' , G nin türev grubudur.

Örnek 2.5.4.2: $\prod_1(S^3 - K) = \{ S_1, S_2, S_3 \mid S_1 S_2 S_3^{-1} S_2^{-1} = 1, S_2 S_3 S_1^{-1} S_3^{-1} = 1, S_3 S_1 S_2^{-1} S_1^{-1} = 1 \}$ esas grubuna karşılık gelen Alexander matrisini bulmak için,

$$D(S_1 S_2 S_3^{-1} S_2^{-1}) = D(S_1) + S_1 D(S_2) + (-S_3^{-1} D(S_3) - S_2^{-1} D(S_2) S_3^{-1}) S_1 S_2$$

$$= D(S_1) + D(S_2) [S_1 - S_2^{-1} S_3^{-1} S_1 S_2] - S_3^{-1} D(S_3) S_1 S_2$$

$$D(S_2 S_3 S_1^{-1} S_3^{-1}) = D(S_2) + S_2 D(S_3) + (-S_1^{-1} D(S_1) S_2 S_3 - S_3^{-1} D(S_3) S_1^{-1}) S_2 S_3$$

$$= -S_1^{-1} S_2 S_3 D(S_1) + D(S_2) + (S_2 - S_3^{-1} S_1^{-1} S_2 S_3) D(S_3)$$

$$D(S_3 S_1 S_2^{-1} S_1^{-1}) = D(S_3) + S_3 D(S_1) + (-S_2^{-1} D(S_2) - S_1^{-1} D(S_1) S_2^{-1}) S_3 S_1$$

$$= (S_3 - S_1^{-1} S_3 S_1 S_2^{-1}) D(S_1) - S_2^{-1} S_3 S_1 D(S_2) + D(S_3)$$

olup $S_1 = S_2 = S_3 = t$ alınırsa,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t-1 & -t \\ -t & 1 & t-1 \\ t-1 & -t & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Buna göre bu matrise karşılık gelen Alexander polinomu

$$1 + t^2 - t$$

şeklindedir.



3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Gerenler ve Bağıntılar

Tanım 3.1.1: $X = \{a, b, c, \dots\}$ bir küme, G bir grup ve

$$\alpha: X \rightarrow G, \quad \alpha(a) = g, \quad \alpha(b) = h, \quad \alpha(c) = k, \dots$$

şeklinde G içine bir dönüşüm olmak üzere, bu dönüşüm altında a, g yi; b, h yi; c, k yi, belirler denir. Eğer G grubunun her elemanı α dönüşümü altında $a, b, c, \dots$ deki kelimeler yardımıyla belirleniyorsa $a, b, c, \dots$ ye α dönüşümü altında G için geren sembolleri olarak adlandırılır. Buradaki $g, h, k, \dots$ ya ise G nin geren elemanları denir.

Tanım 3.1.2: G bir grup ve S de G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. G nin S yi ihtiva eden bütün normal alt gruplarının arakesatine S nin normal kapanışı denir ve $\bar{S}$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.3: G bir grup olmak üzere G de birim elemanı belirten $R(a, b, c, \dots)$ kelimesine bir bağıntı denir ve kısaca $P, Q, R, \dots$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4: Her bağıntı $P, Q, R, \dots$ bağıntılarından türetilmiş ise bu taktirde $P, Q, R, \dots$ ye G grubu için $a, b, c, \dots$ gerenleri üzerinde tanımlayıcı bağıntılarının bir kümesi denir. Eğer $P, Q, R, \dots, a, b, c, \dots$ gerenleri üzerinde G grubu için bağıntılarının bir kümesi ise,

$$\langle a, b, c, \dots \mid P(a, b, c, \dots), Q(a, b, c, \dots), R(a, b, c, \dots), \dots \rangle$$

ifadesine G grubu için bir temsil denir ve

$$G = \langle a, b, c, \dots \mid P, Q, R, \dots \rangle$$

olarak yazılır.

Eğer bir grubun temsilindeki geren sayısı sonlu ise bu gruba sonlu olarak gerilmiş grup denir.

Örneğin 8. mertebeden quaternion grubu için bir temsil

$$\langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = a^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

olarak yazılabilir.

$\langle X \mid \rangle$, $|X|$ rankından serbest grubun temsidir.

$\langle x, y \mid x^3, y^2, x^{-1}y^{-1}xy \rangle$ 6. mertebeden devirli grup için bir temsidir.

$\langle x, y \mid x^4, y^2, (xy)^2 \rangle$ 8. mertebeden dihedral grup için bir temsidir.

Tanımla her devirli grup $Z = \langle x \mid \rangle$ in homomorfik görüntüsüdür. Karşılık gelen çekirdek N , tekrar devirlidir ve böylece ya aşikar ya da $x^n, n \in N$ nin normal kapanışdır. Böylece devirli grubun tam bir listesi

$$Z = \langle x \mid \rangle, \quad Z_n = \langle x \mid x^n \rangle, \quad n \in N$$

olur.

Teorem 3.1.5: Her grup bir serbest grubun bölüm grubuna izomorfiktir (Johnson 1990).

Teorem 3.1.6: Her grup bir temsile sahiptir ve her sonlu grup sonlu olarak temsil edilir (Johnson 1990).

İspat: G herhangi bir grup ve $X \subseteq G$, G nin gerenlerinin bir kümesi (Örneğin $X = G$ alınırsa gerenler G nin kendisidir.) ve

$$\theta' : F(X) \rightarrow G$$

Teorem 3.1.5 deki homomorfizm olsun. Bu durumda

$$G = \langle X \mid \text{Ker} \theta' \rangle$$

olur. Eğer G grubu sonlu ise bu durumda G, X in kendisidir ($|X| = r$). Böylece $\text{Ker}\theta'$ Nielsen-Schrier teoremiyle kardinalitesi $(r-1)g+1$ olan bir B kümesiyle gerilir.

$$\langle B \rangle = \text{Ker}\theta' \triangleright F(X),$$

olduğundan $\langle B \rangle = \overline{B}$ ve buradan

$$G = \langle X | B \rangle$$

sonlu bir temsildir.

Teorem 3.1.7: F, G, H birer grup ve $\nu: F \rightarrow G, \alpha: F \rightarrow H$

i. $\text{Im } \nu = G$

ii. $\text{Ker } \nu \subseteq \text{Ker } \alpha$

olacak şekilde homomorfizmler olsun. Bu durumda $\nu\alpha' = \alpha$ olacak şekilde $\alpha': G \rightarrow H$ homomorfizmi vardır.

Teorem 3.1.8 (Von Dyck's Teoremi): $G = \langle X | R \rangle$ ve $H = \langle X | S \rangle, R \subseteq S \subseteq F(X)$

olacak şekilde iki temsil ise bu durumda $\text{Ker}\phi = \overline{S/R}$ olacak şekilde $\forall x \in X$ için $\phi: G \rightarrow H$ epimorfizmi vardır Tersine $G = \langle X | R \rangle$ nin her bölüm grubu $R \subseteq S$ olmak üzere $\langle X | S \rangle$ şeklinde bir temsile sahiptir.

İspat: Teorem 3.1.7 ile ν ve α doğal dönüşümlerini uygulayalım. ν üzerine ve $\text{Ker}\nu = \overline{R} \subseteq \overline{S} = \text{Ker}\alpha$ olduğundan α' mevcuttur. Bu durumda $\forall x \in X$ için $\phi = \alpha'$ olur (ν ve α dan dolayı). $\phi, \alpha = \nu\phi$ olduğundan dolayı üzerine ve

$$\text{Ker}\phi = (\text{Ker}\alpha)\nu = \overline{S}\nu = \overline{S/R}$$

Şeklindedir. Burada $R\nu = e$, G deki gibidir.

Tersine H, G nin bir bölüm grubu ve ϕ de

$$F(X) \rightarrow G \rightarrow H$$

şeklinde doğal dönüşümlerin bileşkesi olmak üzere

$$R \subseteq \text{Ker}\phi \quad \text{ve} \quad H = \langle X | \text{Ker}\phi \rangle$$

olur.

Gerenleri ve bağıntıların terimlerinde bir grubun temsili bir tek şekilde değildir. Örneğin aşikar grup

$$G = \langle a \mid a = 1 \rangle$$

veya

$$G = \langle a, b \mid ab^2 = ba, ba = a^2b \rangle$$

olarak temsil edilebilir.

3.2. Devirli Temsiller

3.2.1. Devirli Simetri İle Manifoldlar

Grupların temsilleri ve topoloji arasında bağlantılar vardır. Üstelik temsiller düğüm teorisinde de ortaya çıkmaktadır. Matematiksel olarak bir düğüm $\mathbb{R}^3$ de S^1 çemberinin bir gömülmesidir. Bu bölüm, devirli simetriye sahip olan grubu belirlemek için gerekli olan kavramlardan oluşacaktır.

Tanım 3.2.1.1: X herhangi bir küme ve $\tau = \{U\}$, X in aşağıdaki özellikleri sağlayan alt kümesi olsun:

- i. $\emptyset, X \in \tau$
- ii. τ daki kümelerin keyfi sayıdaki bileşimi τ dadır.
- iii. τ daki kümelerin herhangi sonlu sayıdaki arakesiti τ dadır.

Bu τ ailesine X üzerinde bir topoloji denir. X ile birlikte τ kümesine (X, τ) topolojik uzayı adı verilir.

Tanım 3.2.1.2: $U_\alpha \in \tau$ kümelerine (X, τ) topolojik uzayının açık kümeleri adı verilir. Açık kümelerin tümleyenlerine ise kapalı kümeler denir.

Tanım 3.2.1.3: X ve Y iki topolojik uzay, f de bunlar arasında bir dönüşüm olsun. $f: X \rightarrow Y$ dönüşümü sürekli 1-1 örten ve f^{-1} ters dönüşümü de sürekli ise f dönüşümüne bir homeomorfizm denir.

Tanım 3.2.1.4: (X, τ) topolojik uzayının her x, y noktalarının $(x \neq y)$ ayrık ve açık $U_x, U_y \in \tau$ komşulukları varsa (X, τ) topolojik uzayına Hausdorff uzay denir.

$$\forall x, y \in X \text{ için } U_x \cap U_y = \emptyset$$

Tanım 3.2.1.5: Eğer X topolojik uzayı aynı zamanda hem açık hem de kapalı $Y \subset X$ ($Y \neq \emptyset, Y \neq X$) kümesini ihtiva ederse X uzayına bağlantısız topolojik uzay denir.

Tanım 3.2.1.6: Eğer X topolojik uzayı boş olmayan ayrık ve açık kümelerin birleşimi olarak gösterilemezse X uzayına bağlantılı uzay denir.

Tanım 3.2.1.7: X hausdorff topolojik uzay olsun. Herhangi $U \subset X$ açık kümesinin $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine

$$\vartheta: U \rightarrow V$$

homeomorfizmine X de n boyutlu harita veya n boyutlu koordinat sistemi, U ya ise φ haritasının koordinat bölgesi denir ve (U, φ) ile gösterilir.

Eğer $x \in U$ ise

$$\vartheta(x) = (x^1, x^2, x^3, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

olur. Aslında x^i ler $i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\vartheta(x)^1, \vartheta(x)^2, \vartheta(x)^3, \dots, \vartheta(x)^n$$

şeklindedir. $x^1, x^2, x^3, \dots, x^n$ reel sayılarına $\mathcal{G}$ haritasında x noktasının koordinatları denir.

A indisler kümesi olduğunda, X Hausdorff uzayının n boyutlu $\mathcal{G}_\alpha$ haritalarının U_α koordinat bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

ise bu durumda X uzayına n boyutlu manifold denir (Salimov ve Mağden 1999).

Tanım 3.2.1.8: $n > 1$ olmak üzere bağlantılı manifoldlar; yönlendirilebilir ve yönlendirilemeyen manifoldlar olmak üzere iki grup altında toplanır. $n = 2$ olması halinde R^2 deki yönlendirme sağ el veya sol el yönlendirmeleri ile mümkündür R^2 deki herhangi bir bölgedeki yönlendirme ise bu bölgedeki bir kapalı eğri üzerindeki hareketli bir noktanın yönünün seçimine bağlıdır. Yani bu hareketli nokta başlangıç noktasındaki yön göz önüne alındıktan sonra bu noktanın uzak bir mesafesine gidip gelmesiyle yön değişmiyorsa bu kapalı eğri yönlendirmeyi koruyor denir. Eğer yön başlangıçtaki yöne ters ise kapalı eğri yönlendirmeyi korumaz denir. O halde bağlantılı 2 manifold yönlendirmeyi koruyan bir kapalı eğriye sahipse yönlendirilebilir denir. Yönlendirilebilen manifoldlara en güzel örnek S^2 küresidir.

Tanım 3.2.1.9: $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için

$$\text{Ker}(\alpha_{i+1}) = \text{Im}(\alpha_i)$$

ise

$$A_0 \xrightarrow{\alpha_0} A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} A_n \quad (1)$$

homomorfizm ve grupların yukarıdaki dizisine tam dizi denir (Bechtell 1971).

A_0 ve A_n her ikisi de aşıkâr ve $n=4$ olduğu zaman (1) dizisine grupların kısa tam dizisi denir. Aşıkâr grup E den ziyade 1 ile gösterildiği için kısa tam dizisi

$$1 \rightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_3 \rightarrow 1$$

formunda yazılır. A_1, A_2, A_3 gruplarında tamlığın şartları

$$\text{Ker}\alpha_1 = \text{Im}\alpha_0 = 1$$

$$\text{Ker}\alpha_2 = \text{Im}\alpha_1$$

$$\text{Ker}\alpha_3 = \text{Im}\alpha_2$$

dir. Grup genişlemelerinin notasyonları ile grupların kısa tam dizilerinin notasyonları aynıdır ve

$$1 \rightarrow A \xrightarrow{\iota} \overline{G} \xrightarrow{\nu} G \rightarrow 1$$

tam dizisi olarak bir genişleme düşünülebilir (Rolfsen 1976).

Tanım 3.2.1.10:

$$1 \rightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha} A_2 \xrightarrow{\beta} A_3 \rightarrow 1$$

kısa tam dizisi için

$$\tau\beta = \iota_{A_3}$$

olacak şekilde $\tau: A_3 \rightarrow A_2$ monomorfizmi varsa, A_3 grubuyla A_1 grubunun A_2 genişlemesine, split genişleme denir (Bechtell 1971).

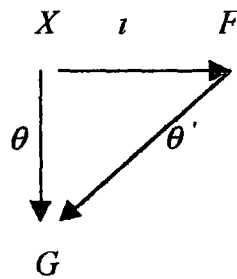
Tanım 3.2.1.11 (Serbest grup): G ve F iki grup $X \subseteq F$ ve $\theta: X \rightarrow G$ bir dönüşüm olsun. Eğer

$$\theta': F \rightarrow G$$

homomorfizmi θ nın bir genişlemesi ise F grubu X üzerinde serbesttir denir. Yani $\forall x \in X$ için

$$\theta'(x) = \theta(x)$$

özellği vardır. Ya da



Şekil 3.2.1.1. Serbest grup

olur. Burada ι ile içirme dönüşümü gösterilmiştir. Eğer F bir grup $X \subseteq F$ ise

$$\iota: X \rightarrow F$$

dönüşümüne içirme dönüşümü denir.

Tanım 3.2.1.12: F_n , $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ gerenli serbest grup ve indisler n modülüne göre alındığında $\theta: F_n \rightarrow F_n$ dönüşümü $\theta(x_i) = x_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-2$ $\theta(x_{n-1}) = x_0$) ile tanımlanan otomorfizm olsun. F_n de herhangi indirgenmiş w kelimesi için R ,

$$\{w, \theta(w), \theta^2(w), \dots, \theta^{n-1}(w)\}$$

kümesinin F_n normal kapanışı olduğunda

$$G_n(w) = F_n / R$$

bölüm grubu uygun n , w için

$$G \cong G_n(w)$$

ise G grubuna devirli simetriye sahiptir denir.

θ , $G_n(w)$ üzerinde

$$Z_n = \langle \theta : \theta^n = 1 \rangle$$

devirli grubunun hareketini belirleyen $G_n(w)$ devirli temsilinin bir otomorfizmini içerir. Z_n ile $G_n(w)$ devirli grubunun split genişleme grubu $H_n(v)$ ile gösterilir.

$H_n(v)$ split genişleme grubu

$$v(\theta, x) = w(x, \theta^{-1}x\theta, \theta^{-2}x\theta^2, \dots, \theta^{-(n-1)}x\theta^{n-1})$$

olduğunda

$$H_n(v) = \langle \theta, x : \theta^n = 1, v(\theta, x) = 1 \rangle$$

şeklindeki formda iki gerenli iki bağıntılı bir temsile sahiptir. Genelde $G_n(w) = 1$ olması için gerek ve yeter şart $H_n(v)$ n . mertebeden devirli ve $G_n(w)$ devirli temsilinin sonlu olması için gerek ve yeter şart $H_n(v)$ split genişleme grubunun sonlu

olmasıdır. Eğer $w = x_0 x_1 x_2^{-1}$ ise bu durumda $G_n(w)$ devirli temsillenen grubuna Fibonacci grubu denir (Johnson 1980). Eğer $a \geq 3$ ve $w = x_1^{-1} x_0 x_1 x_0^a$ ise bu durumda $M(a, a, a) := G_3(w)$ Mennicke grubu sonludur (Mennicke 1959). Böylece sonlu grubun devirli olarak indirgenmiş w kelimesiyle bir çok sonsuz devirli temsili vardır. $A_n(w)$, $G_n(w)$ devirli temsiliinin bölüm grubu olmak üzere $A_n(w) = G_n(w)^{ab}$ olsun. Bu durumda $G = G_n(w)$ devirli temsillenen grubuyla eşlenen polinom a_i , w da x_i lerin üstlerinin toplamı olmak üzere

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$$

olarak tanımlanır. $\mathbb{Z}[t]$, $\mathbb{Z}\langle t, t^n \rangle$ n. mertebeden devirli grubun integral grup halkası olmak üzere $\mathbb{Z}$ tam sayılar üzerinde polinom halkasını gösterir. Öyle ki ,

$$\mathbb{Z}\langle t \mid t^n \rangle \cong \mathbb{Z}[t]/(t^n - 1)$$

olur (Johnson 1975). Ayrıca,

$$|A_n(w)| = \prod_{\xi^n=1} f(\xi)$$

olduğu Dunwoody (1995) tarafından gösterilmiştir. $A_n(w)$ nin aşikar olması için gerek ve yeter şart $f(t)$ nin $\mathbb{Z}[t]/(t^n - 1)$ halkasında bir birim olmasıdır. Örneğin $1 - t - t^2$ polinomu $n = \pm 1 \pmod{6}$ ise $\mathbb{Z}[t]/(t^n - 1)$ halkasında bir birimdir. $n = 2, 3, 4$ veya 6 ise bu halkadaki tek birimler $\mp t^i$ formundaki elemanları ihtiva eden yan kümelerdir. Eğer w , x^i veya x^{-i} nin bir konjugati (conjugate) ise bu durumda $G_n(w)$ aşikardır. $n = \pm 1 \pmod{6}$ ise

$$G_n(w) \cong \langle a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^n \rangle$$

ve

$$G_5(w) \cong SL(2, 5)$$

olur (Kaufman 1987).

$n = 2$ veya 3 ve $w = x_0^{-1}x_1^{-1}x_0x_1^2$ olarak alındığında devirli olarak temsillenen $G_n(w)$ grubu aşıkardır. Gerçekten de $n = 2$ ve $w = x_0^{-1}x_1^{-1}x_0x_1^2$ için,

$$\theta(x_0) = x_1, \quad \theta(x_1) = x_0$$

olur. Buna göre

$$G_2(w) = \langle x_0, x_1 \mid x_0^{-1}x_1^{-1}x_0x_1^2, x_1^{-1}x_0^{-1}x_1x_0^2 \rangle$$

yazılır.

$$x_0^{-1}x_1^{-1}x_0x_1^2 = e \Rightarrow x_0x_1^2 = x_1x_0 \quad (1)$$

$$x_1^{-1}x_0^{-1}x_1x_0^2 = e \Rightarrow x_0 = x_1x_0^2x_1^{-1} \quad (2)$$

olur. (2) eşitliği (1) eşitliğinde kullanılırsa,

$$x_1x_0^2x_1^{-1}x_1^2 = x_1x_1x_0^2x_1^{-1}$$

$$x_0^2x_1^{-1}x_1^2 = x_1x_0^2x_1^{-1}$$

$$x_0^2x_1^1 = x_1x_0^2x_1^{-1}$$

$$x_0^2 = x_1x_0^2x_1^{-2}$$

$$x_0^2 = x_0x_1^{-1} \Rightarrow x_0 = x_1^{-1} \quad (3)$$

olur. (3) eşitliği (1) de kullanılırsa $x_1^{-1}x_1^2 = x_1x_1^{-1}$ ve buradan $x_1 = e$ bulunur. Dolayısıyla $G_n(w)$ grubunun aşıkâr olduğu görülür.

Tanım 3.2.1.13: İndisler n modülüne göre alındığında

$$\langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} : x_i x_{i+2} = x_{i+1} \rangle$$

devirli simetri ile tanımlanan gruplara Sieradski grupları denir ve S_n ile gösterilir.

Böylece

$$S_n = \langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} : x_i x_{i+2} = x_{i+1} \rangle$$

olur (Sieradski 1986).

Teorem 3.2.1.14: S_n ile temsillenen Sieradski grubunun sonsuz olması için gerek ve yeter şart $n \geq 6$ olmasıdır. Bunun da ötesinde $n \geq 7$ olduğunda S_n Sieradski grubu rankı 2 olan serbest gruba sahiptir (Cavicchioli et al. 1998).

Tanım 3.2.1.15: Herhangi iki pozitif r ve $n \geq 2$ tamsayısı için indisler n modülüne göre alındığında

$$S(r, n) = \langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_n : x_i x_{i+2} \dots x_{i+2r-2} = x_{i+1} \dots x_{i+2r-3} \rangle$$

ile tanımlanan gruplara abstract grup denir. $r = 2$ için bu gruplar Sieradski grubunu temsil eder (Cavicchioli et al. 1998).

Teorem 3.2.1.16: $r \geq 2$ için

$$S(r, n) = \langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_n : x_i x_{i+2} \dots x_{i+2r-2} = x_{i+1} \dots x_{i+2r-3} \rangle$$

ile devirli olarak temsil edilen grubun sonsuz olması için gerek ve yeter şart $n \geq (4r - 2)/(2r - 3)$ olmasıdır (Cavicchioli et al. 1998).

Örnek 3.2.1.17:

$$S_n = \langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} : x_i x_{i+2} = x_{i+1}, i \equiv 0 \pmod{n} \rangle$$

olup bu devirli temsile karşılık gelen w kelimesi $w = x_0 x_2 x_1^{-1}$ şeklindedir. Buna göre bu temsile karşılık gelen polinom

$$f_w(t) = 1 - t + t^2$$

olur. Böylece S_n Sieradski grubu için $H_n(v)$ split genişleme grubu

$$v(\theta, x) = w(x, \theta^{-1}x\theta, \theta^{-2}x\theta^2)$$

olduğunda

$$H_n(v) = \langle \theta, x : \theta^n = 1, v(\theta, x) = 1 \rangle$$

veya

$$H_n(v) = \langle \theta, x : \theta^n = 1, x\theta^{-2}x\theta^2(\theta^{-1}x\theta)^{-1} = 1 \rangle$$

$$= \langle \theta, x : \theta^n = 1, x\theta^{-2}x\theta^2\theta^{-1}x^{-1}\theta = 1 \rangle$$

$$= \langle \theta, x : \theta^n = 1, x\theta^{-2}x\theta x^{-1}\theta = 1 \rangle$$

olur. $x = \theta\lambda^{-1}$ alınırsa

$$H_n(v) = \langle \theta, \lambda : \theta^n = 1, \theta\lambda^{-1}\theta^{-2}\theta\lambda^{-1}\theta(\theta\lambda^{-1})^{-1}\theta = 1 \rangle$$

$$= \langle \theta, \lambda : \theta^n = 1, \theta\lambda^{-1}\theta^{-1}\lambda^{-1}\theta\lambda\theta^{-1}\theta = 1 \rangle$$

$$= \langle \theta, \lambda : \theta^n = 1, \theta\lambda^{-1}\theta^{-1}\lambda^{-1}\theta\lambda = 1 \rangle$$

$$= \langle \theta, \lambda : \theta^n = 1, \theta\lambda\theta = \lambda\theta\lambda \rangle$$

olur. λ, θ ile eşlenik olduğu için $\theta^n = 1$ eşitliğinin yerine $\lambda^n = 1$ eşitliği de yazılabilir.

Böylece

$$H_n(v) = \langle \theta, \lambda : \lambda^n = 1, \theta\lambda\theta = \lambda\theta\lambda \rangle$$

elde edilir.

Tanım 3.2.1.18: Gerenlerin alt indisleri n modülüne indirgendiğinde

$$\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n : x_1x_2x_3 \dots x_r = x_{r+1}, x_2x_3x_4 \dots x_r x_{r+1} = x_{r+2}, \dots, x_n x_1x_2x_3 \dots x_{r-1} = x_r \rangle$$

şeklinde tanımlanan gruba $F(r, n)$ Fibonacci grubu denir (Thomas 1990).

Örnek 3.2.1.19: $F(2, 2n) = \langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1} : x_i x_{i+1} x_{i+2}^{-1} = 1, i \equiv 0 \pmod{n} \rangle$

Sonlu temsillenen Fibonacci grubu için tanımlanan w kelimesi,

$$w = x_0 x_1 x_2^{-1}$$

ve karşılık gelen polinom,

$$f_w(t) = 1 + t - t^2$$

olur. $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için $y_i = x_{2i+1}$ olsun. Fibonacci bağıntısından

$$x_{2i-1}x_{2i}x_{2i+1}^{-1} = 1$$

veya

$$x_{2i} = x_{2i-1}^{-1}x_{2i+1}$$

olur. Böylece

$$y_i = x_{2i+1} \quad \text{ise} \quad x_{2i-1} = y_{\frac{(2i-1-1)}{2}} = y_{i-1}$$

olup

$$x_{2i} = y_{i-1}^{-1}y_i$$

elde edilir ve çift indisli gerenler çıkarılır. Şimdi

$$x_{2i}x_{2i+1}x_{2i+2}^{-1} = 1 \quad x_{2i+2} = y_{i+1-1}^{-1}y_{i+1}$$

Fibonacci bağıntıları,

$$\underbrace{y_{i-1}^{-1}y_i}_{x_{2i}} \underbrace{y_i}_{x_{2i+1}} \underbrace{\left(y_i^{-1}y_{i+1}\right)^{-1}}_{x_{2i+2}} = 1$$

$$y_{i-1}^{-1}y_i^2y_{i+1}^{-1}y_i = 1$$

olur. Böylece $F(2, 2n)$ için aynı zamanda

$$F(2, 2n) = \langle y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1} : y_{i-1}^{-1}y_i^2y_{i+1}^{-1}y_i = 1 \rangle$$

devirli temsili elde edilir. Yeni temsilin tanımlanan kelimesi

$$w = y_0^{-1}y_1^2y_2^{-1}y_1$$

ve karşılık gelen Alexander polinomu

$$f_w(t) = -1 + 3t - t^2$$

olur. Buna göre $F(2, 2n)$ Fibonacci grubu için split genişleme grubu

$$H_n(v) = \langle \theta, y : \theta^n = 1, v(\theta, y) = 1 \rangle$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
 v(\theta, y) &= w(y, \theta^{-1}y\theta, \theta^{-2}y\theta^2) \\
 &= y^{-1}(\theta^{-1}y\theta)^2(\theta^{-2}y\theta^2)^{-1}\theta^{-1}y\theta \\
 &= y^{-1}\theta^{-1}y\theta\theta^{-1}y\theta\theta^{-2}y^{-1}\theta^2\theta^{-1}y \\
 &= y^{-1}\theta^{-1}y^2\theta^{-1}y^{-1}\theta y\theta
 \end{aligned}$$

olur. $y = \theta\lambda$ alınırsa

$$\begin{aligned}
 H_n(v) &= \langle \theta, \lambda : \theta^n = 1, (\theta\lambda)^{-1}\theta^{-1}(\theta\lambda)^2\theta^{-1}(\theta\lambda)^{-1}\theta(\theta\lambda)\theta = 1 \rangle \\
 &= \langle \theta, \lambda : \theta^n = 1, \lambda^{-1}\theta^{-1}\theta^{-1}\theta\lambda\theta\lambda\theta^{-1}\lambda^{-1}\theta^{-1}\theta\theta\lambda\theta = 1 \rangle \\
 &= \langle \theta, \lambda : \theta^n = 1, \lambda^{-1}\theta^{-1}\lambda\theta\lambda\theta^{-1}\lambda^{-1}\theta\lambda\theta = 1 \rangle \\
 &= \langle \theta, \lambda : \theta^n = 1, [\lambda, \theta]\lambda = \theta^{-1}[\lambda, \theta] \rangle
 \end{aligned}$$

olur. Burada $[\lambda, \theta] = \lambda^{-1}\theta^{-1}\lambda\theta$ dir. θ^{-1} ile λ konjugate olduğu için $\lambda^n = 1$ elde edilir.

Böylece

$$H_n(v) = \langle \theta, \lambda : \theta^n = \lambda^n = 1, [\lambda, \theta]\lambda = \theta^{-1}[\lambda, \theta] \rangle$$

olur.

3.2.2. Grup Temsilleri

Bir temsil, G grubundan tersinir matrislerin grubuna bir homomorfizmdir.

G bir grup F de $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olsun. $GL(n, F)$ elemanları F de olan $n \times n$ tipinde tersinir matrislerin grubunu gösterir.

Tanım 3.2.2.1: Uygun n için G den $GL(n, F)$ 'ye bir ρ homomorfizmine F üzerinde G grubunun bir temsili denir. ρ 'nun derecesi n tamsayıdır. Böylece $\rho: G \rightarrow GL(n, F)$ bir fonksiyondur. Bu durumda ρ 'nun bir temsil olması için gerek ve yeter şart $g, h \in G$ olduğunda

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$$

olmasıdır (James ve Liebeck 1993).

Örneğin G Dihedral grup olduğunda bu grup için temsil

$$D_8 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

şeklindedir. A ve B matrisleri

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ile tanımlansın

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

olur. Buda $\rho: G \rightarrow GL(n, F)$ fonksiyonunun F üzerinde Dihedral grubun bir temsilidir.

3.2.3. Devirli Simetri İle Heegaard Diyagramı

Aşağıdaki özellikleri sağlayan τ grafiklerini göz önüne alalım.

i. τ bir düzlemsel grafiktir.

ii. τ , d kenara sahiptir.

iii. τ da her kenar 2 köşeye sahiptir. Bununla beraber aynı köşeye sahip birden fazla kenar olabilir.

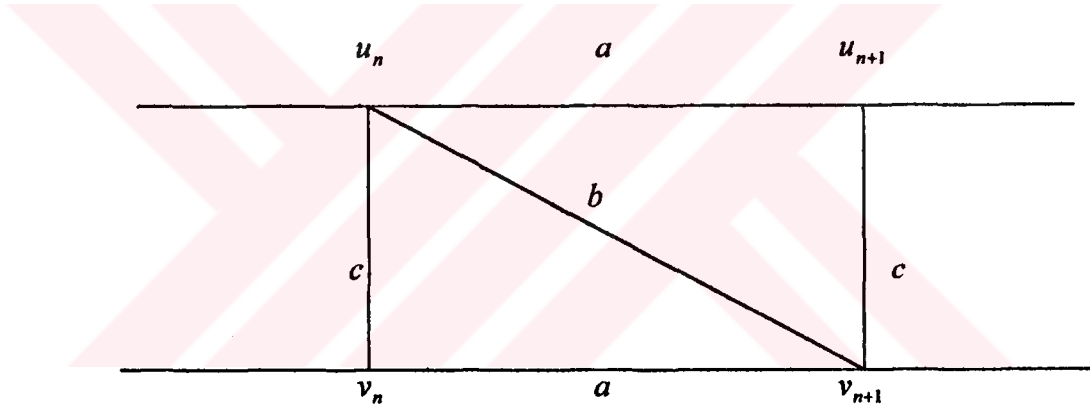
iv. τ , $2n$ köşeye sahiptir.

v. τ , τ nun hem kenarlarında hem de köşelerinde n . mertebeden düzgün permütasyon olarak hareket eden bir θ otomorfizmine sahiptir.

vi. θ nun aynı orbitinde iki farklı köşeye birleşen bir kenar vardır.

vii. θ nun iki farklı orbitinde iki farklı köşeye birleşen bir kenar vardır.

(a, b, c) , $ab \neq 0$ olacak şekilde negatif olmayan tamsayıların bir üçlüsü olsun. $\bar{\tau}$ şekil 3.2.3.1 de gösterilen grafik olsun.



Şekil 3.2.3.1. Heegaard diyagramı

Bu grafik $\theta(u_n) = u_{n+1}$ ve $\theta(v_n) = v_{n+1}$ olacak şekilde θ otomorfizmi ile bir sonsuz grafikdir. Sınıflandırma bir çift köşeye birleşen kenarların sayısını gösterir. Böylece u_1 ve u_2 ye birleşen a kenarları vardır. $\tau_n = \tau_n(a, b, c)$ θ^n nin her bir orbitindeki bütün kenar ve köşeleri özdeşleyerek $\bar{\tau}(a, b, c)$ den elde edilen grafiği gösterir. Böylece τ_n $2n$ köşeye sahiptir.

3.3. Dunwoody Manifolds

a, b, c, n , $n > 0$, $a, b, c \geq 0$ ve $a + b + c > 0$ olacak şekilde tamsayılar ve $\tau = \tau(a, b, c, n)$ şekil 3.3.1. de çizilen grafik olsun. τ her biri $d = 2a + b + c$ gerene sahip olan n tane üst,

$$C'_1, C'_2, C'_3, \dots, C'_n$$

ve n tane alt,

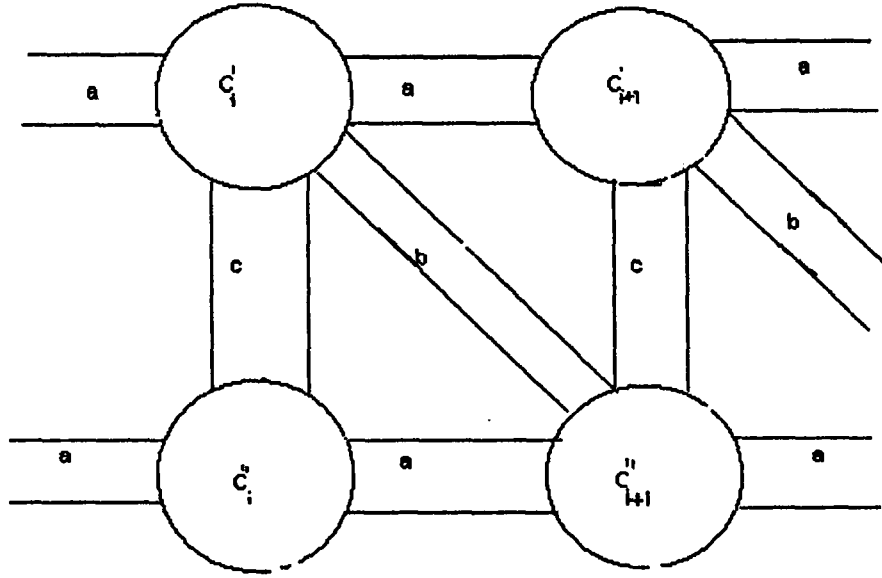
$$C''_1, C''_2, C''_3, \dots, C''_n$$

devirlerini ihtiva eder. Her bir $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için C'_i deviri C'_{i+1} devirine ve C''_i deviri C''_{i+1} devirine, a paralel yaylarıyla, C'_i deviri C''_i devirine, c paralel yayları ve C'_i deviri C''_{i+1} devirine, b paralel yaylarıyla bağlanır. ($n+1=1$ olduğu kabul edilir) Burada

$$C' = \{C'_1, C'_2, C'_3, \dots, C'_n\} \quad \text{ve} \quad C'' = \{C''_1, C''_2, C''_3, \dots, C''_n\}$$

olarak yazılır. C' nün bir devirine ait olan τ nun yaylarının kümesi A' ile C'' nün bir devirine ait olan τ nun yaylarının kümesi A'' ve grafiğin diğer yaylarının kümesi A ile gösterilsin. r, s iki yeni tamsayı olsun. C' devirine saat yönü ve C'' devirlerine saat yönünün ters yönünde bir yönlendirme verilsin. 1 den d ye kadar bu devirlerin gerene belirtilsin. Bu yönlendirmeye uygun olarak her bir C'_i nün 1 gerene C'_i devirini C'_{i+1} devirine bağlayan A nın ilk yayının uç noktası ve her bir C''_i nün $1-r \pmod{d}$ gerene C''_i devirini C''_{i+1} devirine bağlayan A nın ilk yayının uç noktasıdır.

Tanım 3.3.1: Eğer (a, b, c, n, r, s) 6-lısı kabul edilebilirse, tamsayıların 6-lısı ile tanımlanan grafik, belirlenen manifoldun esas grubunun temsili devirli olacak şekilde bir Heegaard diyagramı tanımlar. Bu şekilde temsil edilen manifolda Dunwoody manifoldu denir (Grasselli ve Mulazzani 2001).



Şekil 3.3. 1. (a, b, c, n, r, s) 6-lısı ile tanımlanan grafik

Tanım 3.3.2: (a, b, c, n, r, s) 6-lısı 3-lü manifoldun Heegaard diyagramına karşılık geliyorsa buna M özelliğine sahiptir denir.

M özelliğine sahip olan (a, b, c, n, r, s) 6-lısını belirlemek için aşağıdaki algoritma kullanılır. $d = 2a + b + c$ ve

$$X = \{-1, -2, -3, \dots, -d, 1, 2, 3, \dots, d\}$$

olsun. α, β

$$\alpha = (1, d)(2, d-1), \dots, (a, d-a-1)(a+1, -a-c-1)(a+2, -a-c-2), \dots, (a+b, -a-c-l$$

$$(a+b+1, -a-1)(a+b+2, -a-2)(a+b+c, -a-c)(-1, -d)$$

ve

$$\beta(j) = \begin{cases} -(j+r) & , \quad j > 0 \text{ ve } j+r \leq d \text{ veya } j < 0 \text{ ve } j+r < 0 \\ -(j+r-d) & , \quad j+r \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

yukarıdaki şekilde tanımlanan X in permütasyonları olsun. Buna göre 2-li devirler şeklinde olan α nın devirleri Heegaard diyagramında doğru parçasının uç noktalarına karşılık gelir. β nın her bir deviri ise S yüzeyini oluşturmada tayin edilen uç noktaların bir çiftine karşılık gelir. Genelde (a,b,c,n,r,s) 6-lısı M özelliğine sahipse bu durumda $\alpha\beta$, d uzunluğunda iki ayrı devirin çarpımıdır. $\alpha\beta$ nın bir deviri β ile belirlenen yönlendirilen basit kapalı eğride doğru parçalarının başlangıç noktalarını temsil eder. İki devir farklı yönlendirmeler ile aynı eğriyi temsil eder. Tersine a,b,c,r değerleri verilsin yukarıdaki şekilde tanımlanan α ve β permütasyonları yazılabilir ve böylece $\alpha\beta$ çarpımı hesaplanabilir. Eğer $\alpha\beta$ çarpımı hesaplandıktan sonra $d = 2a + b + c$ uzunluğunda iki ayrı devirin çarpımı olarak elde edilirse bu durumda M özelliğine sahip olan (a,b,c,n,r,s) 6-lısı için s ve n ile sağlanan basit lineer şartları belirlemek mümkündür. Burada r 'ye rotasyon faktörü ve s 'ye shift faktörü denir.

Devirli temsile karşılık gelen w kelimesini hesaplamak için $\alpha\beta$ 'nın ilk deviri ve s 'nin değeri kullanılabilir. $\alpha\beta$ 'nın ilk devirindeki girişler diyagramın her doğru parçasından bir geren ihtiva eder ve bu gerenler başlangıç noktası olarak gösterilir. p diyagramda yukarıdan aşağıya doğru işaret eden oklar için "+" aşağıdan yukarıya doğru işaret eden oklar için "-" alınarak ve q soldan sağa doğru işaret eden oklar için "+" sağdan sola doğru işaret eden oklar için "-" alınarak elde edilen okların sayısını gösterebilir. Bu durumda $ps + q = 0$ olacak şekilde bir s tamsayısı vardır. Böylece $\alpha\beta$ 'nın ilk deviri ve elde edilen s 'nin değeri kullanılarak $ps + q$ 'dan w kelimesinin alt indisleri belirlenir. w kelimesinin üst indisleri ise $\alpha\beta$ 'nın ilk devirindeki işaretler sırasıyla alınarak elde edilir.

Teorem 3.3.1: $d = 2a + b + c$ pozitif tek tamsayı olsun. (a, b, c, n, r, s) 6-lısının M özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart

- i. $\alpha\beta$, $d = 2a + b + c$ uzunluğunda iki ayrık devire sahip ve
 - ii. $ps + q = 0 \pmod{n}$
- olmasıdır (Dunwoody 1995).

Örnek 3.3.1.1: $a = 1, b = 1, c = 2$ olsun. Buna göre $d = 2a + b + c$ eşitliğinden $d = 5$ olur.

$$X = \{-1, -2, -3, -4, -5, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

için

$$\alpha = (1, 5)(2, -4)(3, -2)(4, -3)(-5, -1)$$

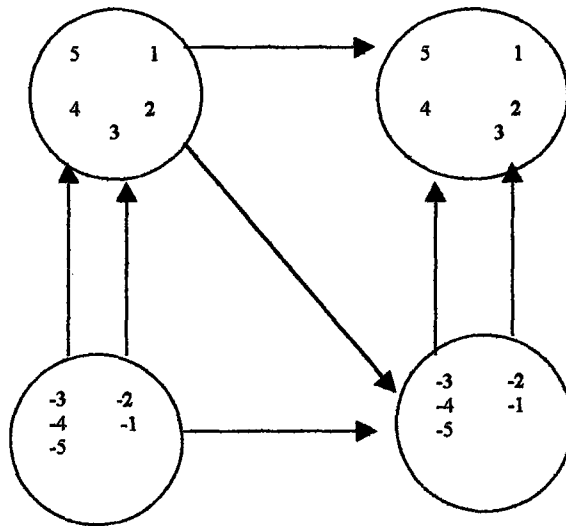
ve $r = 3$ için

$$\beta = (1, -4)(2, -5)(3, -1)(4, -2)(5, -3)$$

olur Bu durumda

$$\alpha\beta = (1, -3, -2, -1, 2)(3, 4, 5, -4, -5)$$

şeklindedir.



Şekil 3.3. 2. $(1, 1, 2, n, 3, 3)$ 6-lısı ile tanımlanan grafik

Burada soldan sağa doğru işaret eden okların sayısı 3 olduğu için $q = 3$ ve yukarıdan aşağı doğru işaret eden okların sayısı 1, aşağıdan yukarıya doğru işaret eden okların sayısı 2 olduğu için $p = -2 + 1 = -1$ olur. Böylece $ps + q = 0$ eşitliğinden $-s + 3 = 0$ olup $s = 3$ bulunur. Sırasıyla $\alpha\beta$ nın ilk devirindeki terimler alınır ve $ps + q$ kullanılırsa

$$0(3) + 1 = x_1^{-1}$$

$$-1(3) + 1 = x_{-2}^{-1}$$

$$(-2)(3) + 1 = x_{-5}^{-1}$$

$$(-2)(3) + 2 = x_{-4}$$

$$(-1)(3) + 3 = x_0$$

bulunur ve ikinci terimden başlayarak $\alpha\beta$ nın ilk devirindeki terimlerin işareti sırasıyla üst indis olarak yazılır. Böylece

$$w = x_1^{-1} x_{-2}^{-1} x_{-5}^{-1} x_{-4} x_0 \quad \text{veya} \quad w = x_6^{-1} x_3^{-1} x_0^{-1} x_1 x_5$$

olur. Buna göre

$$f(t) = -1 + t - t^3 + t^5 - t^6 = -\frac{(1-t^{12})(1-t)}{(1-t^3)(1-t^4)}$$

olup bu da $K_{3,4}$ tor düğümünün Alexander polinomudur.

Şimdi $G_n(w)$ için farklı bir temsil bulalım. $G_n(w)$ da

$$x_0 x_3 x_6 = x_1 x_5 \quad x_1 x_4 x_7 = x_2 x_9$$

olur ve bu şekilde devam edilirse

$$z = x_0 x_3 x_6 x_9 = x_1 x_5 x_9$$

$$\theta(z) = x_1 x_4 x_7 x_{10}$$

$$\theta^2(z) = x_2 x_5 x_8 x_{11}$$

$$\theta^3(z) = x_3 x_6 x_9 x_{12}$$

olur. Buradan $zx_{12} = x_0z$ ve genelde $x_i z = zx_{i+12}$ dir. Böylece z^n merkez ve $(n, 12) = 1$ ise $G_n(w)$, x_0 ve z ile gerilir. $n = 12k + 1$ olduğunu kabul edelim. $u = x_0 z^{3k}$ ve $v = x_0 z^{4k}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 u^4 &= x_0 z^{3k} x_0 z^{3k} x_0 z^{3k} x_0 z^{3k} \\
 &= x_0 z^{3k} x_0 z^{3k} x_0 z^{3k} z^{3k} x_{36k} \\
 &= x_0 z^{3k} x_0 z^{3k} x_0 z^{6k} x_{36k} \\
 &= x_0 z^{3k} x_0 z^{3k} z^{6k} x_{72k} x_{36k} \\
 &= x_0 z^{3k} x_0 z^{9k} x_{72k} x_{36k} \\
 &= x_0 z^{3k} z^{9k} x_{108k} x_{72k} x_{36k} \\
 &= x_0 z^{12k} x_{108k} x_{72k} x_{36k} \\
 &= z^{12k} x_{144k} x_{108k} x_{72k} x_{36k}
 \end{aligned}$$

olur. Fakat $n = 13$ için $36k \equiv -3 \pmod{n}$ olduğu için

$$u^4 = z^{12k} x_{-12} x_{-9} x_{-6} x_{-3} = z^{12k+1} = z^n$$

olur. Benzer şekilde $v^3 = z^n$ olduğu gösterilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
 v^3 &= x_0 z^{4k} x_0 z^{4k} x_0 z^{4k} \\
 &= x_0 z^{4k} x_0 z^{4k} z^{4k} x_{48k} \\
 &= x_0 z^{4k} x_0 z^{8k} x_{48k} \\
 &= x_0 z^{4k} z^{8k} x_{96k} x_{48k} \\
 &= z^{12k} x_{144k} x_{96k} x_{48k} \\
 &= z^{12k} z \\
 &= z^{12k+1} = z^n
 \end{aligned}$$

bulunur. Aslında $G_n(w)$

$$\begin{aligned}
 G_{12k+1}(w) &= \langle x, z \mid (xz^{3k})^4 = (xz^{4k})^3 = z^{12k+1} \rangle \\
 &= \langle u, z \mid u^4 = (uz^k)^3 = z^{12k+1} \rangle
 \end{aligned}$$

olur. Böylece bu grup sonsuz mükemmel gruptur.

Örnek 3.3.1.2: $n \geq 1$, $k \geq 1$ için $(1, 0, 2k-1, 2, 2, n)$ 6-lısı M özelliğine sahiptir. Temel grup

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$$

gerenleri ve

$$x_{i+1}x_{i+3} \dots x_{i+2k+3}x_{i+2k-1} = x_i x_{i+2} \dots x_{i+2k-2}x_{i+2k}, \quad i \equiv 0 \pmod{n}$$

bağıntıları ile bir temsile sahiptir. Bu devirli temsile eşlenen polinom,

$$\sum_{j=0}^{2k} (-1)^j t^j$$

$K(2k+1, 2)$ Alexander polinomudur. Buna göre $k=1$ için $(1, 0, 1, 2, 2, n)$ olup

$a=1$, $b=0$, $c=1$ için $d=2a+b+c$ eşitliğinden $d=3$ olur. Yani M özelliğine sahip olan 6-lı $(3, 1, 0, 1, 2, 2)$ şeklindedir.

$$\alpha = (1, 3)(2, -2)(-1, -3)$$

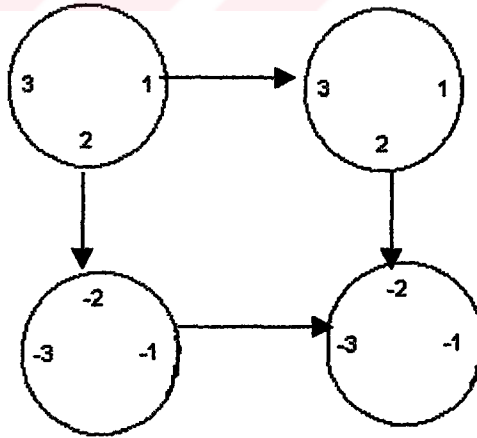
ve $j=1, 2, 3$; $r=2$ için

$$\beta = (1, -3)(2, -1)(3, -2)$$

ve buradan

$$\alpha\beta = (1, -2, -1)(2, 3, -3)$$

olur.



Şekil 3.3. 3. $(1, 0, 1, n, 2, 2)$ 6-lısı ile tanımlanan grafik

$$p = -1, \quad q = 2, \quad ps + q = 0 \Rightarrow -s + 2 = 0 \Rightarrow s = 2$$

$$2 \cdot 0 + 1 = x_1^{-1}$$

$$2(-1) + 1 = x_{-1}^{-1}$$

$$2(-1) + 2 = x_0$$

olup, $w = x_1^{-1}x_{-1}^{-1}x_0$ veya $w = x_2^{-1}x_0^{-1}x_1$ olur. Buna göre

$$G_3(w) = G_3(x_2^{-1}x_0^{-1}x_1) = \langle x_0, x_1, x_2 \mid x_1 = x_2x_0, x_2 = x_0x_1, x_0 = x_1x_2 \rangle$$

$$= \langle x_1, x_2 \mid x_1 = x_2x_1x_2, x_2 = x_1x_2x_1 \rangle$$

$$= F(3, 2)$$

olur. Bu grup

$$S_n = \langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \mid x_i x_{i+2} = x_{i+1}, i \equiv 0 \pmod{n} \rangle$$

Sieradski grubuna karşılık gelir. $w = x_2^{-1}x_0^{-1}x_1$ kelimesine karşılık gelen split genişleme grubu

$$v(\theta, x) = w(x, \theta^{-1}x\theta, \theta^{-2}x\theta^2, \dots, \theta^{-2k}x\theta^{2k}) = (\theta^{-2}x\theta^2)(x)^{-1}(\theta^{-1}x\theta)$$

$$= \theta^{-2}x^{-1}\theta^2x^{-1}\theta^{-1}x\theta$$

olup,

$$H_n(v) = \langle x, \theta \mid \theta^n = 1, \theta^{-2}x^{-1}\theta^2x^{-1}\theta^{-1}x\theta \rangle$$

ve $x = \theta\lambda^{-1}$ alınırsa

$$H_n(v) = \langle \theta, \lambda \mid \theta^n = 1, \theta^{-2}(\theta\lambda^{-1})^{-1}\theta^2(\theta\lambda^{-1})^{-1}\theta^{-1}(\theta\lambda^{-1})\theta = 1 \rangle$$

$$= \langle \theta, \lambda \mid \theta^n = 1, \theta^{-2} \lambda \theta^{-1} \theta^2 \lambda \theta^{-1} \theta^{-1} \theta \lambda^{-1} \theta = 1 \rangle$$

$$= \langle \theta, \lambda \mid \theta^n = 1, \theta^{-2} \lambda \theta \lambda \theta^{-1} \lambda^{-1} \theta = 1 \rangle$$

$$= \langle \theta, \lambda \mid \theta^n = 1, \lambda \theta \lambda \theta^{-1} \lambda^{-1} = \theta \rangle$$

$$= \langle \theta, \lambda \mid \theta^n = 1, \lambda \theta \lambda = \theta \lambda \theta \rangle$$

yeni temsili elde edilir. İkinci bağıntı soldan $\lambda\theta$ ile çarpılırsa

$$(\lambda\theta)^2 \lambda = (\lambda\theta) \theta (\lambda\theta)$$

olur. Burada her iki yan sağdan θ ile çarpılırsa

$$(\lambda\theta)^2 \lambda \theta = [(\lambda\theta) \theta (\lambda\theta)] \theta$$

$$(\lambda\theta)^3 = [(\lambda\theta) \theta]^2$$

bulunur. $\lambda\theta = y$ ve $(\lambda\theta)\theta = z$ denirse θ ve λ , y cinsinden ifade edilebilir. Aslında

$\lambda = y\theta^{-1}$ yazılırsa $\lambda = yz^{-1}y$ elde edilir. Böylece $H_n(v)$ split genişleme grubu için

$$H_n(v) = \langle y, z \mid (y^{-1}z)^n = 1, y^3 = z^2 \rangle$$

sonlu temsili elde edilir.

$$F(r, n) = G_n(w) = G_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_r, x_{r+1}^{-1})$$

olup

$$F(2, 3) = G_3(x_1 x_2 x_0^{-1})$$

olur.

$(3,1,0,1,1,-2)$ M özelliğine sahip 6-lısı için karşılık gelen w kelimesi $w = x_1^{-1}x_2x_0$ şeklindedir. Buna göre

$$\begin{aligned} G_3(w) &= G_3(x_1^{-1}x_2x_0) = \langle x_0, x_1, x_2 \mid w, \theta(w), \theta^2(w) \rangle \\ &= \langle x_0, x_1, x_2 \mid x_1 = x_2x_0, x_2 = x_0x_1, x_0 = x_1x_2 \rangle = F(2,3) \\ &= \langle x_1, x_2 \mid x_1 = x_2x_1x_2, x_2 = x_1x_2x_1 \rangle = F(3,2) \end{aligned}$$

yazılır. $x_2 = x_1x_2x_1$ eşitliği sağdan x_2 ile çarpılırsa

$$x_1 \underbrace{x_2x_1x_2}_{x_1} = x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$$

elde edilir.

$$x_1x_2x_1 = x_2 \Rightarrow x_1x_2 = x_2x_1^{-1}$$

ve

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2x_1x_2x_2x_1x_2 \\ &= x_2x_1x_2^3x_1x_2 \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitliğin her iki yanını sağdan x^2 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} 1 &= \underbrace{x_2x_1x_2}_{x_1} x_2^2x_1 \\ &= x_1x_2^2x_1 \end{aligned}$$

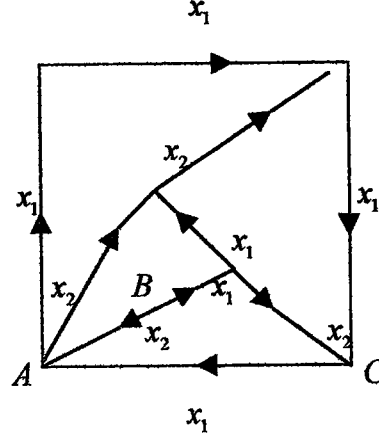
elde edilir. $x_1^2 = x_2^2$ eşitliği kullanılırsa

$$x_1^4 = 1 \quad \text{ve} \quad x_1^3 = x_1^{-1}$$

olur. Buna göre

$$G_3(w) = G_3(x_1^{-1}x_2x_0) = F(3,2) = \langle x_1, x_2 \mid x_1^4 = 1, x_1^2 = x_2^2, x_1x_2 = x_2x_1^3 \rangle$$

yazılır. Bu da 8. mertebeden Quaternion gruptur. $r = x_1^4$, $s = x_1^2 x_2^{-2}$, $t = x_2^{-1} x_1 x_2 = x_1^{-1}$ alınır;



Şekil 3.3.4. Quaternion grup için van Kampen diyagramı

A noktasından saat yönünde bir okuma yapılırsa $s = x_1^2 x_2^{-2}$ elde edilir. Ayrıca B yi ihtiva eden üst tabanda saat yönünde bir okuma yapılırsa yine $s = x_1^2 x_2^{-2}$, B yi ihtiva eden alt yüzeyde A dan saat yönünde bir okuma yapılırsa $t = x_2^{-1} x_1 x_2 x_1$, C den saat yönünde bir okuma yapılırsa $t = x_2^{-1} x_1 x_2 x_1$ ve diyagramın kendi sınırlarında A dan saat yönünde bir okuma yapılırsa $r = x_1^4$ elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

$d = 2a + b + c$ nin tek sayı, $d < 10$ ve $0 \leq r \leq d$ olması halinde M özelliğinin ilk şartının sağlanması için gerekli olan α ve β permütasyonlarını belirlemede kullanılan (a, b, c, r) 4-lüleri Dunwoody(1995) tarafından bulunmuştur. $p = \pm 1$ olması durumunda özel bir durumun söz konusu olduğu gösterilmiştir (Song ve Kim 2000). Eğer $s = -pq$ yazılırsa bu durumda (a, b, c, r, s, n) 6-lısı her $n > 0$ değeri için M özelliğine sahip olur ve (a, b, c, r, s, n) 6-lısı her $n > 0$ değeri için M özelliğine sahip ise bu 6-lı kapalı yönlendirilebilen 3-manifoldun Heegaard diyagramını temsil eder (Cavicchioli et al. 2001). (a, b, c, r, s) 5-lileri bunlara karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu çizelge 4.1. de verilmiştir. Her durumda $f(t)$ 'nin bir düğümün Alexander polinomu olduğu görülebilir. Çünkü t 'nin uygun bir kuvvetiyle çarptıktan sonra $f(t)$ $2m$ dereceye sahip ve eğer $f(t) = \sum_{i=0}^{2m} a_i t^i$ ise, bu durumda $f(1) = \pm 1$ ve $a_{2m-i} = a_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ olur. Bu özelliklere sahip olan herhangi bir polinom, bir düğümün Alexander polinomudur (Burde ve Zieschang 1985).

Çizelge 4.1. (a, b, c, r, s) 5-lisine karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu

(a, b, c, r, s)	w	$f(t)$
$(1, 0, 1, 1, -2)$	$x_1^{-1} x_2 x_0$	$1 - t + t^2$
$(1, 0, 1, 2, 2)$	$x_2^{-1} x_0^{-1} x_1$	$-1 + t - t^2$
$(1, 0, 3, 2, 2)$	$x_4^{-1} x_2^{-1} x_0^{-1} x_1 x_3$	$-1 + t - t^2 + t^3 - t^4$
$(1, 0, 3, 3, -2)$	$x_1^{-1} x_3^{-1} x_4 x_2 x_0$	$1 - t + t^2 - t^3 + t^4$
$(1, 1, 2, 3, 3)$	$x_6^{-1} x_3^{-1} x_0^{-1} x_1 x_5$	$-1 + t - t^3 + t^5 - t^6$
$(2, 0, 1, 1, 0)$	$x_1^{-1} x_2 x_1^{-2} x_0$	$1 - 3t + t^2$

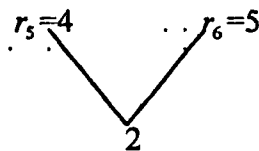
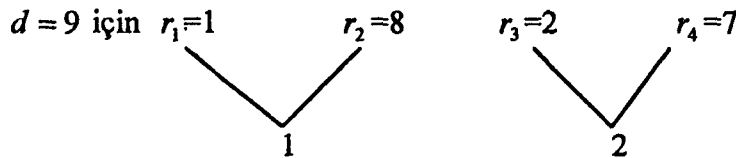
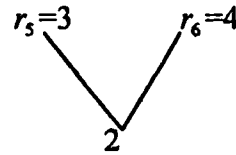
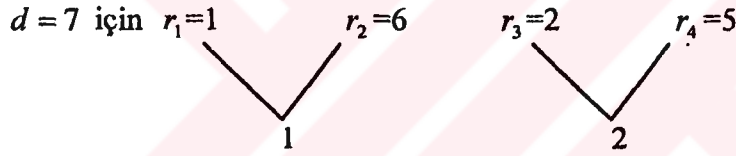
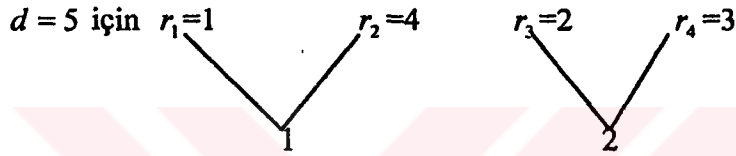
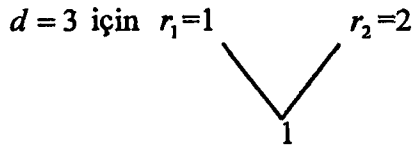
Çizelge 4.1. (devam)

(a,b,c,r,s)	w	$f(t)$
$(2,0,1,2,-4)$	$x_1^{-1}x_2x_3^{-1}x_4x_0$	$1-t+t^2-t^3+t^4$
$(2,0,1,3,4)$	$x_4^{-1}x_0^{-1}x_1x_2^{-1}x_3$	$-1+t-t^2+t^3-t^4$
$(2,0,1,4,0)$	$x_2^{-1}x_1^2x_0^{-1}x_1$	$-1+3t-t^2$
$(1,0,5,2,2)$	$x_6^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3x_5$	$-1+t-t^2+t^3-t^4+t^5-t^6$
$(1,0,5,5,-2)$	$x_1^{-1}x_3^{-1}x_5^{-1}x_6x_4x_2x_0$	$1-t+t^2-t^3+t^4-t^5+t^6$
$(1,1,4,2,-3)$	$x_1^{-1}x_4^{-1}x_7^{-1}x_8x_5x_3x_0$	$1-t+t^3-t^4+t^5-t^7+t^8$
$(1,2,3,4,4)$	$x_{12}^{-1}x_8^{-1}x_4^{-1}x_0^{-1}x_1x_6x_{11}$	$-1+t-t^4+t^6-t^8+t^{11}-t^{12}$
$(2,0,3,3,0)$	$x_2^{-2}x_1x_0^{-2}x_1^2$	$-2+3t-2t^2$
$(2,0,3,4,0)$	$x_1^{-2}x_2^2x_1^{-1}x_0^2$	$2-3t+2t^2$
$(2,1,2,4,5)$	$x_8^{-1}x_3^{-1}x_4x_5^{-1}x_0^{-1}x_1x_7$	$-1+t-t^3+t^4-t^5+t^7-t^8$
$(3,0,1,1,-2)$	$x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2x_0x_1^{-1}x_0$	$2-3t+2t^2$
$(3,0,1,2,-2)$	$x_1^{-1}x_2x_0x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_0$	$2-3t+2t^2$
$(3,0,1,3,-6)$	$x_1^{-1}x_2x_3^{-1}x_4x_5^{-1}x_6x_0$	$1-t+t^2-t^3+t^4-t^5+t^6$
$(3,0,1,4,6)$	$x_6^{-1}x_0^{-1}x_1x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_5$	$-1+t-t^2+t^3-t^4+t^5-t^6$
$(3,0,1,5,2)$	$x_2^{-1}x_1x_0^{-1}x_1x_2^{-1}x_0^{-1}x_1$	$-2+3t-2t^2$
$(3,0,1,6,2)$	$x_2^{-1}x_1x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_0^{-1}x_1$	$-2+3t-2t^2$
$(1,0,7,2,2)$	$x_8^{-1}x_6^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3x_5x_7$	$-1+t-t^2+t^3-t^4+t^5-t^6+t^7-t^8$
$(1,0,7,7,-2)$	$x_1^{-1}x_3^{-1}x_5^{-1}x_7^{-1}x_8x_6x_4x_2x_0$	$1-t+t^2-t^3+t^4-t^5+t^6-t^7+t^8$
$(1,1,6,3,3)$	$x_{12}^{-1}x_9^{-1}x_6^{-1}x_3^{-1}x_0^{-1}x_1x_4x_8x_1$	$-1+t-t^3+t^4-t^6+t^8-t^9+t^{11}-t^{12}$

Çizelge 4.1. (devam)

(a, b, c, r, s)	w	$f(t)$
$(1, 3, 4, 2, -3)$	$x_1^{-1} x_4^{-1} x_6^{-1} x_9^{-1} x_{10} x_7 x_5 x_3 x_0$	$1 - t + t^3 - t^4 + t^5 - t^6 + t^7 - t^9 + t^{10}$
$(1, 3, 4, 5, 5)$	$x_{20}^{-1} x_{15}^{-1} x_{10}^{-1} x_5^{-1} x_0^{-1} x_1 x_7 x_{13} x_{19}$	$-1 + t - t^5 + t^7 - t^{10} + t^{13} - t^{15} + t^{19} - t^{20}$
$(2, 1, 4, 3, 3)$	$x_{10}^{-1} x_7^{-1} x_3^{-1} x_0^{-1} x_1 x_4 x_5^{-1} x_6 x_9$	$-1 + t - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 - t^7 + t^9 - t^{10}$
$(2, 1, 4, 5, -5)$	$x_1^{-1} x_6^{-1} x_7 x_3 x_4^{-1} x_9^{-1} x_{10} x_5 x_0$	$1 - t + t^3 - t^4 + t^5 - t^6 + t^7 - t^9 + t^{10}$
$(2, 2, 3, 4, -2)$	$x_1^{-1} x_3^{-1} x_4 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_2 x_0$	$1 - 2t + t^2 - 2t^3 + t^4$
$(2, 2, 3, 5, 6)$	$x_{12}^{-1} x_6^{-1} x_0^{-1} x_1 x_8 x_9^{-1} x_3^{-1} x_4 x_{11}$	$-1 + t - t^3 + t^4 - t^6 + t^8 - t^9 + t^{11} - t^{12}$
$(3, 0, 3, 2, -2)$	$x_3^{-1} x_4 x_2 x_0 x_1^{-1} x_2 x_1^{-1} x_3^{-1} x_2$	$1 - 2t + 3t^2 - 2t^3 + t^4$
$(3, 0, 3, 4, -2)$	$x_2^{-1} x_{41}^{-1} x_3 x_2^{-1} x_1 x_0^{-1} x_2^{-1} x_3 x_1$	$-1 + 2t - 3t^2 + 2t^3 - t^4$
$(3, 0, 3, 5, 2)$	$x_3^{-1} x_1^{-1} x_2 x_4 x_3^{-1} x_2 x_1^{-1} x_0 x_2$	$1 - 2t + 3t^2 - 2t^3 + t^4$
$(3, 0, 3, 7, 2)$	$x_2^{-1} x_1 x_3 x_2^{-1} x_3 x_4^{-1} x_2^{-1} x_0^{-1} x_1$	$1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 - t^7 + t^8$
$(3, 1, 2, 5, 7)$	$x_{10}^{-1} x_3^{-1} x_4 x_5^{-1} x_6 x_7^{-1} x_0^{-1} x_1 x_9$	$-1 + t - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 - t^7 + t^9 - t^{10}$
$(3, 1, 2, 7, -1)$	$x_4^{-1} x_3 x_2 x_1 x_0^{-1} x_1 x_2^{-2} x_3$	$-1 + 2t - t^2 + 2t^3 - t^4$
$(4, 0, 1, 1, 0)$	$x_1^{-1} x_2 x_1^{-1} x_2 x_1^{-2} x_0 x_1^{-1} x_0$	$2 - 5t + 2t^2$
$(4, 0, 1, 2, 0)$	$x_1^{-1} x_2 x_1^{-1} x_0 x_1^{-1} x_2 x_1^{-2} x_0$	$2 - 5t + 2t^2$
$(4, 0, 1, 4, -8)$	$x_1^{-1} x_2 x_3^{-1} x_4 x_5^{-1} x_6 x_7^{-1} x_8 x_0$	$1 - t + t^2 - t^3 - t^4 - t^5 + t^6 - t^7 + t^8$
$(4, 0, 1, 5, 8)$	$x_8^{-1} x_0^{-1} x_1 x_2^{-1} x_3 x_4^{-1} x_5 x_6^{-1} x_7$	$-1 + t - t^2 + t^3 - t^4 + t^5 - t^6 + t^7 - t^8$
$(4, 0, 1, 7, 0)$	$x_2^{-1} x_1^2 x_0^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1 x_0^{-1} x_1$	$-2 + 5t - 2t^2$
$(4, 0, 1, 8, 0)$	$x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1^2 x_0^{-1} x_1 x_0^{-1} x_1$	$-2 + 5t - 2t^2$

Yukarıdaki çizelgeden şöyle bir sonuç çıkarabiliriz. d tek sayı ve $b=0$ olması durumunda her $n>0$ değeri için eğer (a,b,c,r,s,n) 6-lısı M özelliğini sağlıyorsa $(a,b,c,d-r,s,n)$ 6-lısı da aynı şekilde M özelliğini sağlar. Ayrıca eğer bu 6-lı r 'nin m tane farklı değeri için M özelliğini sağlıyorsa, $d-r$ nin de m tane farklı değeri için M özelliğini sağlar. Buna göre,



Teorem 4. 1 : α bir tamsayısı olmak üzere p ve q , $p = 1 + \alpha q$ olacak şekilde aralarında asal iki pozitif tamsayı olsun. Bu durumda $G(n, p, q)$,

$$G(n, p, q) = \langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} : x_{i+(q-1)\alpha q} x_{i+(q-1)\alpha q - q} \dots x_{i+q} x_i = x_{i+(q-1)\alpha q - 1} \dots x_{i+1}, i \equiv 0 \pmod{n} \rangle$$

$K(p, q)$ tor düğümü üzerinde dallanan S^3 küresinin n -fold devirli örtü uzayına karşılık gelir.

$p = 3$ ve $q = 2$ için $\alpha = 1$ olduğunda $G(n, p, q)$ grubu

$$S_n = \langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} : x_{i+2} x_i = x_{i+1}, i \equiv 0 \pmod{n} \rangle$$

Sieradski grubuna karşılık gelir.

$G(n, p, q)$ grubuna karşılık gelen polinom,

$$f_{p,q}(t) = 1 - t + t^q - \dots - t^{(q-1)\alpha q - 1} + t^{(q-1)\alpha q}$$

şeklindedir. Diğer taraftan $p > q \geq 2$ için $K(p, q)$ tor düğümünün Alexander polinomu,

$$\Delta_{p,q}(t) = \frac{(1-t^{pq})(1-t)}{(1-t^p)(1-t^q)} = 1 - t + t^q - \dots - t^{pq-p-q} + t^{pq+1-p-q}$$

olur (Kaufman 1987, Rolfsen 1976).

Teorem 4.2: $G(n, p, q)$, $p \equiv 1 \pmod{q}$ olacak şekilde $K(p, q)$ tor düğümü üzerinde dallanan 3-lü kürenin devirli örtü uzayı ile çakışan devirli temsil olsun. Bu durumda $G(n, p, q)$ ile eşlenen $f_{p,q}(t)$ polinomu $K(p, q)$ tor düğümünün $\Delta_{p,q}(t)$ Alexander polinomuna eşittir. Bu durumda $\Delta_{p,q}(t)$ nin $\mathbb{Z}[t]/(t^n - 1)$ halkasında birim olması için gerek ve yeter şart $(n, p) = (n, q) = 1$ olmasıdır (Cavicchioli et al. 1999).

Teorem 4.3: c tek ve d, r aralarında asal olduğunda $(a, b, c, n, r, s) = (1, 0, c, n, r, s)$ 6-lısı M özelliğine sahiptir ve bu durumda elde edilen polinom $d = c + 2$ için $K(d, r)$ tor düğümüne karşılık gelir.

Çizelge 4.2. d tek ve $d \leq 19$ için karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu

(d, a, b, c, r, s)	w	$K(d, r)$	
$(5, 1, 0, 3, 2, 2)$	$x_4^{-1} x_2^{-1} x_0^{-1} x_1 x_3$	$K(2, 5)$	$S(3, 5)$
$(7, 1, 0, 5, 2, 2)$	$x_6^{-1} x_4^{-1} x_2^{-1} x_0^{-1} x_1 x_3 x_5$	$K(2, 7)$	$S(4, 7)$
$(9, 1, 0, 7, 2, 2)$	$x_8^{-1} x_6^{-1} x_4^{-1} x_2^{-1} x_0^{-1} x_1 x_3 x_5 x_7$	$K(2, 9)$	$S(5, 9)$
$(11, 1, 0, 9, 2, 2)$	$x_{10}^{-1} x_8^{-1} x_6^{-1} x_4^{-1} x_2^{-1} x_0^{-1} x_1 x_3 x_5 x_7 x_9$	$K(2, 11)$	$S(6, 11)$
$(13, 1, 0, 11, 2, 2)$	$x_{12}^{-1} x_{10}^{-1} \dots x_0^{-1} x_1 x_3 x_5 x_7 x_9 x_{11}$	$K(2, 13)$	$S(7, 13)$
$(15, 1, 0, 13, 2, 2)$	$x_{14}^{-1} x_{12}^{-1} \dots x_0^{-1} x_1 x_3 x_5 x_7 x_9 x_{11} x_{13}$	$K(2, 15)$	$S(8, 15)$
$(17, 1, 0, 15, 2, 2)$	$x_{16}^{-1} x_{14}^{-1} \dots x_0^{-1} x_1 x_3 x_5 x_7 x_9 x_{11} x_{13} x_{15}$	$K(2, 17)$	$S(9, 17)$
$(19, 1, 0, 17, 2, 2)$	$x_{18}^{-1} x_{16}^{-1} \dots x_0^{-1} x_1 x_3 x_5 x_7 x_9 x_{11} x_{13} x_{15} x_{17}$	$K(2, 19)$	$S(10, 19)$

Farklı 6-lılar aynı düğüme tekabül edebilir. Örneğin,

$$\begin{array}{ll}
 (5, 1, 0, 3, 2, 2) & x_4^{-1} x_2^{-1} x_0^{-1} x_1 x_3 \\
 (5, 2, 0, 1, 3, 4) & x_4^{-1} x_1 x_0^{-1} x_2^{-1} x_3
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} (5, 1, 0, 3, 2, 2) \\ (5, 2, 0, 1, 3, 4) \end{array}} \right\} K(2, 5)$$

$$\begin{array}{ll}
 (5, 1, 0, 3, 3, -2) & x_1^{-1} x_3^{-1} x_4 x_2 x_0 \\
 (5, 2, 0, 1, 2, -4) & x_1^{-1} x_2 x_3^{-1} x_4 x_0
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} (5, 1, 0, 3, 3, -2) \\ (5, 2, 0, 1, 2, -4) \end{array}} \right\} K(5, 2)$$

$$\begin{array}{ll}
 (7, 1, 0, 5, 2, 2) & x_6^{-1} x_4^{-1} x_2^{-1} x_0^{-1} x_1 x_3 x_5 \\
 (7, 3, 0, 1, 4, 6) & x_6^{-1} x_0^{-1} x_1 x_2^{-1} x_3 x_4^{-1} x_5
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} (7, 1, 0, 5, 2, 2) \\ (7, 3, 0, 1, 4, 6) \end{array}} \right\} K(2, 7)$$

$$\begin{array}{ll}
(7,1,0,5,5,-2) & x_1^{-1}x_3^{-1}x_5^{-1}x_6x_4x_2x_0 \\
(7,3,0,1,4,6) & x_1^{-1}x_2x_3^{-1}x_4x_5^{-1}x_6x_0
\end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} (7,1,0,5,5,-2) \\ (7,3,0,1,4,6) \end{array}} \right\} K(7,2)$$

$$\begin{array}{ll}
(9,1,0,7,2,2) & x_8^{-1}x_6^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3x_5x_7 \\
(9,4,0,1,5,8) & x_8^{-1}x_0^{-1}x_1x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_5x_6^{-1}x_7
\end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} (9,1,0,7,2,2) \\ (9,4,0,1,5,8) \end{array}} \right\} K(2,9)$$

$$\begin{array}{ll}
(9,1,0,7,7,-2) & x_1^{-1}x_3^{-1}x_5^{-1}x_7^{-1}x_8x_6x_4x_2x_0 \\
(9,4,0,1,4,-8) & x_1^{-1}x_2x_3^{-1}x_4x_5^{-1}x_6x_7^{-1}x_8x_0
\end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} (9,1,0,7,7,-2) \\ (9,4,0,1,4,-8) \end{array}} \right\} K(9,2)$$

olur.

İndisler n modülüne göre alındığında,

$$S(r,n) = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n : x_i x_{i+2} \dots x_{i+2r-2} = x_{i+1} \dots x_{i+2r-3} \rangle$$

devirli temsiliyle tanımlanan grupları göz önüne alalım. $r = 2$ için $S(r,n)$ devirli temsiliyle tanımlanan grup Sieradski grubuna karşılık gelir.

Teorem 4.4: $d > 3$ ve $d = 2a + b + c$ tek sayı olsun. Her $n > 0$ sayısı için $(1,0,c,n,r,s)$ 6-lısının M özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart $(1,0,c,n,d-r,-s)$ 6-lısının M özelliğine sahip olmasıdır. Eğer $(1,0,c,n,r,s)$ 6-lısı için karşılık gelen polinom $f(t)$ ise $(1,0,c,n,d-r,s)$ 6-lısı için karşılık gelen polinom da $-f(t)$ şeklinde olur.

İspat : Eğer $(1,0,c,n,r,s)$ 6-lısı M özelliğine sahip ise teorem 2 (Dunwoody 1995) nin sağlandığını görmek kolaydır. Aslında bu durumda $2a$ yatay ve c dikey yay vardır. Şekil 4.1 den daima $p = -1$ ve $q = 2$ değerleri elde edilir. Böylece $(1,0,c,n,r,s)$ 6-lısı için $\alpha\beta$ nın ilk devirindeki terimler

$$(1, -2, -4, \dots, -d+1, -1, c, c-2, c-4, \dots, 3)$$

şeklindedir. $(1,0,c,n,r,s)$ 6-lısı için daima $p = -1$ ve $q = 2$ değerlerini aldığından dolayı $ps + q = 0$ eşitliğinden s daima 2 olur. Böylece s 'nin değeri ve $\alpha\beta$ 'nın ilk devirindeki terimler kullanılarak hesaplanan $(1,0,c,n,r,s)$ 6-lısına karşılık gelen w kelimesi,

$$w = x_{d-1}^{-1} x_{d-3}^{-1} x_{d-5}^{-1} \dots x_{d-c}^{-1} x_0^{-1} x_1 x_3 x_5 \dots x_c$$

ve tanımlanan kelimeye karşılık gelen polinom

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} a_{2i} t^{2i} \quad ; \quad i \equiv 0 \pmod{n}$$

şeklindedir. Ayrıca $(1,0,c,n,r,s)$ 6-lısına karşılık gelen polinom için $|f_w(1)| = 1$ olduğu için bu 6-lının M özelliğine sahip olduğu görülür.

Tersine, $(1,0,c,n,d-r,-s)$ 6-lısı için daima $p = 1$ ve $q = 2$ değerini alır. Böylece $(1,0,c,n,d-r,-s)$ 6-lısı için ayrık iki devirin çarpımı şeklinde olan $\alpha\beta$ 'nın ilk devirindeki terimler

$$(1, -c, -c+2, -c+4, \dots, -1, 2, 4, \dots, d-1)$$

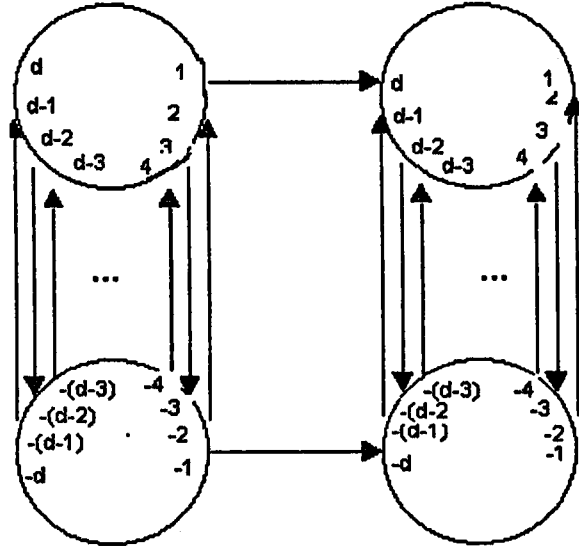
şeklindedir. $(1,0,c,n,d-r,-s)$ 6-lısı için daima $p = 1$ ve $q = 2$ değerlerini aldığından dolayı $ps + q = 0$ eşitliğinden s daima -2 olur. Böylece s 'nin değeri ve $\alpha\beta$ 'nın ilk devirindeki terimler kullanılarak hesaplanan $(1,0,c,n,d-r,-s)$ 6-lısına karşılık gelen w kelimesi,

$$w = x_1^{-1} x_3^{-1} x_5^{-1} \dots x_c^{-1} x_{d-1} x_{d-3} x_{d-5} \dots x_{d-c} x_0$$

ve tanımlanan kelimeye karşılık gelen polinom

$$f(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} a_{2i} t^{2i} \quad ; \quad i \equiv 0 \pmod{n}$$

şeklindedir. Ayrıca $(1,0,c,n,d-r,-s)$ 6-lısına karşılık gelen polinom için $|f_w(1)| = 1$ olduğundan dolayı $(1,0,c,n,d-r,-s)$ 6-lının M özelliğine sahip olduğu görülür.



Şekil 4.1. $(1,0,c,n,r,s)$ 6-lısı için Heegaard diyagramı

Çizelge 4.3. Her $n > 0$ ve $d \leq 20$ için M özelliğine sahip olan $(1,0,c,r,s)$ 5-lileri karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu

(a,b,c,r,s)	w	$f(t)$
$(1,0,3,2,2)$	$x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3$	$-1+t-t^2+t^3-t^4$
$(1,0,5,2,2)$	$x_6^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3x_5$	$-1+t-t^2+\dots+t^5-t^6$
$(1,0,7,2,2)$	$x_8^{-1}x_6^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3x_5x_7$	$-1+t-t^2+\dots+t^7-t^8$
$(1,0,9,2,2)$	$x_8^{-1}x_6^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3x_5x_7$	$-1+t-t^2+\dots+t^9-t^{10}$
$(1,0,11,2,2)$	$x_8^{-1}x_6^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3x_5x_7$	$-1+t-t^2+\dots+t^{11}-t^{12}$
$(1,0,13,2,2)$	$x_{14}^{-1}x_{12}^{-1}\dots x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3x_5\dots x_{11}x_{13}$	$-1+t-t^2+\dots+t^{13}-t^{14}$
$(1,0,15,2,2)$	$x_{16}^{-1}x_{14}^{-1}\dots x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3x_5\dots x_{13}x_{15}$	$-1+t-t^2+\dots+t^{15}-t^{16}$
$(1,0,17,2,2)$	$x_{18}^{-1}x_{16}^{-1}\dots x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3x_5\dots x_{15}x_{17}$	$-1+t-t^2+\dots+t^{17}-t^{18}$

Teorem 4. 5 : a ve c tek sayı olduğunda $(a,b,c,r,s) = (a,0,c,2,s)$ M özelliğine sahiptir.

Çizelge 4.4. d tek ve $d \leq 20$ için M özelliğine sahip $(a,b,c,r,s) = (a,0,c,2,s)$ 5-lileri bunlara karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu

(a,b,c,r,s)	w	$f(t)$
$(1,0,1,2,2)$	$x_2^{-1}x_0^{-1}x_1$	$-1+t-t^2$
$(1,0,3,2,2)$	$x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3$	$-1+t-t^2+t^3-t^4$
$(1,0,5,2,2)$	$x_6^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3x_5$	$-1+t-t^2+t^3-t^4+t^5-t^6$
$(3,0,1,2,-2)$	$x_1^{-1}x_2x_0x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_0$	$2-3t+2t^2$
$(1,0,7,2,2)$	$x_8^{-1}x_6^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3x_5x_7$	$-1+t-t^2+t^3-t^4+t^5-t^6+t^7-t^8$
$(3,0,3,2,-2)$	$x_3^{-1}x_4x_2x_0x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_3^{-1}x_2$	$1-2t+3t^2+2t^3+t^4$
$(1,0,9,2,2)$	$x_9x_{10}^{-1}x_8^{-1}x_6^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3x_5x_7$	$-1+t-t^2+t^3-t^4+t^5-t^6+t^7$ $t^8+t^9-t^{10}$
$(3,0,5,2,-2)$	$x_5^{-1}x_6x_4x_2x_0x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_3^{-1}x_5^{-1}x_4$	$1-2t+2t^2-t^3+2t^4-2t^5+t^6$
$(5,0,1,2,-2)$	$x_3^{-1}x_4x_3^{-1}x_1^{-1}x_0x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2x_3^{-1}x_2$	$1-3t+3t^2-3t^3+t^4$
$(3,0,7,2,-2)$	$x_7^{-1}x_8x_6x_4x_2x_0x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_3^{-1}x_5^{-1}x_7^{-1}x_6$	$1-2t+2t^2-t^3+t^4-t^5+2t^6$ $-2t^7+t^8$
$(5,0,3,2,2)$	$x_5^{-1}x_6x_5^{-1}x_4^{-1}x_1^{-1}x_0x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2x_4$	$1-3t+2t^2-2t^5+t^6$
$(1,0,13,2,2)$	$x_{14}^{-1}x_{12}^{-1}x_{10}^{-1}x_8^{-1}x_6^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3x_5x_7$ $x_9x_{11}x_{13}$	$-1+t-t^2+t^3-t^4+t^5-t^6+t^7$ $-t^8+t^9-t^{10}+t^{11}-t^{12}+t^{13}-t^{14}$
$(3,0,9,2,-2)$	$x_9^{-1}x_{10}x_8x_6x_4x_2x_0x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_3^{-1}x_5^{-1}$ $x_7^{-1}x_9^{-1}x_8$	$1-2t-t^3+t^4-t^5+t^6$

Çizelge 4.4. (devam)

(a,b,c,r,s)	w	$f(t)$
$(5,0,5,2,2)$	$x_7^{-1}x_8x_7^{-1}x_5^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}x_0x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$ $x_4x_6x_7^{-1}x_6$	$1-3t-t^3+t^4-t^5+2t^6-3t^7+t^8$
$(7,0,1,2,-2)$	$x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2x_0x_1^{-1}x_0x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_0$ $x_1^{-1}x_0$	$4-7t+4t^2$
$(1,0,15,2,2)$	$x_{16}^{-1}x_{14}^{-1}x_{12}^{-1}x_{10}^{-1}x_8^{-1}x_6^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_3x_5$ $x_7x_9x_{11}x_{13}x_{15}$	$-1+t-t^2+t^3-t^4+t^5-t^6+t^7-t^8$ $t^9-t^{10}+t^{11}-t^{12}+t^{13}-t^{14}+t^{15}-t^{16}$
$(3,0,11,2,-2)$	$x_{10}x_{11}^{-1}x_{12}x_{10}x_8x_6x_4x_2x_0x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_3^{-1}$ $x_5^{-1}x_7^{-1}x_9^{-1}x_{11}$	$1-2t+2t^2-t^3+t^4-t^5+t^6-t^7$ $+t^8-t^9+2t^{10}+t^{12}$
$(5,0,7,2,2)$	$x_9^{-1}x_{10}x_9^{-1}x_7^{-1}x_5^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}x_0x_1^{-1}x_2x_4x_6$ $x_8x_9^{-1}x_8$	$1-3t+2t^2-t^3+t^4-t^5+t^6$ $-t^7+2t^8-3t^9$
$(7,0,3,2,-2)$	$x_3^{-1}x_4x_3^{-1}x_4x_2x_0x_1^{-1}x_0x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2x_1^{-1}$ $x_3^{-1}x_2$	$2-4t+4t^2-4t^3$
$(1,0,17,2,2)$	$x_{18}^{-1}x_{16}^{-1}x_{14}^{-1}x_{12}^{-1}x_{10}^{-1}x_8^{-1}x_6^{-1}x_4^{-1}x_2^{-1}x_0^{-1}x_1$ $x_3x_5x_7x_9x_{11}x_{13}x_{15}x_{17}$	$-1+t-t^2+t^3-t^4+t^5-t^6+t^7-t^8+$ $t^9-t^{10}+t^{11}-t^{12}+t^{13}-t^{14}+t^{15}-t^{16}$
$(3,0,13,2,-2)$	$x_{13}^{-1}x_{14}x_{12}x_{10}x_8x_6x_4x_2x_0x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_3^{-1}$ $x_5^{-1}x_7^{-1}x_9^{-1}x_{11}^{-1}x_{13}^{-1}x_{12}$	$1-2t+2t^2-t^3+t^4-t^5+t^6-t^7$ $t^8-t^9+t^{10}-t^{11}+2t^{12}-2t^{13}+t^{14}$
$(5,0,9,2,-2)$	$x_1^{-1}x_{12}x_{11}^{-1}x_9^{-1}x_7^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}x_0x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2$ $x_4x_6x_8x_{10}x_{11}^{-1}x_{10}$	$1-4t+2t^2-t^3+t^4-t^7+t^8$ $-t^9+2t^{10}-2t^{11}+t^{12}$
$(7,0,5,2,2)$	$x_5^{-1}x_6x_5^{-1}x_6x_4x_2x_0x_1^{-1}x_0x_1^{-1}x_2x_1^{-1}$ $x_2x_1^{-1}x_3^{-1}x_5^{-1}x_4x_5x_4$	$2-4t+3t^2-t^3+3t^4-2t^5+2t^6$
$(9,0,1,2,2)$	$x_3^{-1}x_4x_3^{-1}x_4x_3^{-1}x_1^{-1}x_0x_1^{-1}x_0x_1x_2x_1^{-1}$ $x_2x_1^{-1}x_2x_3^{-1}x_2x_3^{-1}x_2$	$2-3t+5t^2-5t^3$

d çift sayı olduğunda teorem 2 (Dunwoody 1995) doğrudur. Buna göre $d = 2a + b + c$ çift sayı ve $d \leq 10$ olması durumunda M özelliğine sahip (a,b,c,r,s) 5-lileri bunlara karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu çizelge 4.5. de verilmiştir.

Çizelge 4.5. $d = 2a + b + c$ çift sayı ve $d \leq 10$ olması durumunda M özelliğine sahip (a, b, c, r, s) 5-lileri bunlara karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu

(a, b, c, r, s)	w	$f(t)$
$(1, 0, 2, 1, -1)$	$x_0 x_1^{-1} x_2 x_1$	$1 + t^2$
$(1, 0, 2, 3, 1)$	$x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_0$	$-1 - t^2$
$(1, 2, 2, 1, -1)$	$x_1^{-1} x_2 x_1 x_1 x_0$	$1 + 2t + t^2$
$(1, 0, 6, 3, 1)$	$x_3 x_4^{-1} x_3^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_0 x_1 x_2$	$-1 - t^4$
$(1, 0, 6, 5, -1)$	$x_0 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_4 x_3 x_2 x_1$	$1 + t^4$
$(1, 4, 2, 1, -1)$	$x_0 x_1^{-1} x_2 x_1^5$	$1 + 4t + t^2$
$(3, 0, 2, 3, -3)$	$x_0 x_1^{-1} x_2 x_3^{-1} x_4 x_1 x_2^{-1} x_3$	$1 + t^4$
$(3, 0, 2, 5, 3)$	$x_4^{-1} x_1^{-1} x_2 x_3^{-1} x_0^{-1} x_1 x_2^{-1} x_3$	$-1 - t^4$
$(3, 0, 2, 7, 1)$	$x_0 x_1^{-1} x_0 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_4 x_3^{-1}$	$2 - 2t - t^2 - 2t^3 + t^4$
$(1, 2, 6, 7, 1)$	$x_6^{-1} x_5^{-1} x_4^{-1} x_3^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_0^{-1} x_1 x_3 x_5$	$-1 - t^2 - t^4 - t^6$
$(1, 6, 2, 1, -1)$	$x_1^{-1} x_2 x_1^7 x_0$	$1 + 6t + t^2$
$(1, 6, 2, 3, -2)$	$x_1^{-1} x_3^{-1} x_5^{-1} x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 x_0$	$1 + t^2 + t^4 + t^6$
$(1, 6, 2, 5, -1)$	$x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_0^2 x_1 x_2^3$	$2 - t + 3t^2$
$(2, 2, 4, 3, 1)$	$x_6^{-1} x_5^{-1} x_4^{-1} x_3^{-1} x_0^{-1} x_1 x_2 x_3^{-1} x_4 x_5$	$-1 + t^2 - 2t^3 + t^4 - t^6$
$(2, 2, 4, 5, -3)$	$x_1^{-1} x_4^{-1} x_5 x_3 x_1 x_2^{-1} x_5^{-1} x_6 x_3 x_0$	$1 + 2t^3 - t^4 + t^6$
$(2, 4, 2, 7, -2)$	$x_1^{-1} x_2^{-1} x_3 x_4^{-1} x_5^{-1} x_6 x_5 x_3 x_1 x_0$	$1 - t^2 + 2t^3 - t^4 + t^6$
$(3, 2, 2, 1, -1)$	$x_1^{-1} x_2 x_1^{-1} x_2 x_1^3 x_0 x_1^{-1} x_0$	$1 + 2t^2$
$(3, 2, 2, 3, -2)$	$x_1^{-1} x_2 x_1 x_0 x_1^{-1} x_2 x_0 x_1^{-1} x_2 x_0$	$-3 - 2t + 3t^2$
$(3, 2, 2, 7, 1)$	$x_2^{-2} x_0 x_2^{-1} x_0^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_0^{-1} x_1$	$-1 + t - 4t^2$

Çizelge 4.5. (devam)

(a,b,c,r,s)	w	$f(t)$
$(4,0,2,3,-2)$	$x_1^{-2}x_2x_0x_1^{-1}x_2x_0x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_0$	$3-4t+3t^2$
$(4,0,2,7,-2)$	$x_2^{-2}x_1x_0^{-1}x_1x_2^{-1}x_0^{-1}x_1x_2^{-1}x_0^{-1}x_1$	$-3+4t-3t^2$

Açık problem 4.1: $d = 2a + b + c = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ ve $r = c/2$ ise $(a,0,c,r,s)$ 5-lisi M özelliğine sahiptir. Bu durumda elde edilen polinom

$$f(t) = 1 + t^{d/2}$$

şeklinde olur.

Çizelge 4.6. $d = 2a + b + c = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ ve $d \leq 20$ için $(a,0,c,r,s)$ 5-lileri bunlara karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu

(a,b,c,r,s)	w	$f(t)$
$(1,0,2,1,-1)$	$x_0x_1^{-1}x_2x_1$	$1+t^2$
$(1,0,6,3,-1)$	$x_0x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}x_4x_3x_2x_1$	$1+t^4$
$(1,0,10,5,-1)$	$x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}x_4^{-1}x_5^{-1}x_6x_5x_4x_3x_2x_1$	$1+t^6$
$(1,0,14,7,-1)$	$x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}x_4^{-1}x_5^{-1}x_6^{-1}x_7^{-1}x_8x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1$	$1+t^8$
$(1,0,18,9,-1)$	$x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}x_4^{-1}x_5^{-1}x_6^{-1}x_7^{-1}x_8^{-1}x_9^{-1}x_{10}x_9x_8x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1$	$1+t^{10}$

Açık problem 4.2: c tek ve 3 ten büyük olması halinde $(1,2,c,4,s)$ 5-lileri M özelliğine sahiptir.

Çizelge 4.7. $d \leq 27$ için $(1,2,c,4,s)$ 5-lileri bunlara karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu

(a,b,c,r,s)	w	$f(t)$
$(1,2,5,4,-4)$	$x_5^{-1}x_9^{-1}x_{10}x_6x_{10}x_7x_4x_0x_4$	$1+2t^4-t^5+t^6+t^7-t^9+2t^{10}$
$(1,2,7,4,0)$	$x_2^{-2}x_1^{-5}x_0^{-2}x_1^{-2}$	$-2-7t-2t^2$
$(1,2,9,4,4)$	$x_{24}^{-1}x_{20}^{-1}x_{16}^{-1}x_{12}^{-1}x_{18}^{-1}x_4^{-1}x_0^{-1}x_1x_5x_{10}$ $x_{14}x_{19}x_{23}$	$-1+t-t^4+t^5+t^{10}-t^{12}+t^{14}$ $-t^{16}-t^{18}+t^{19}-t^{20}-t^{24}$
$(1,2,13,4,0)$	$x_2^{-3}x_1^{-8}x_0^{-3}x_1^{-3}$	$-3-11t-3t^2$
$(1,2,15,4,-4)$	$x_{31}^{-1}x_{35}^{-1}x_{39}^{-1}x_{43}^{-1}x_{47}^{-1}x_{51}^{-1}x_{55}^{-1}x_{59}^{-1}x_{63}^{-1}$ $x_{68}x_0x_4x_7x_{13}x_{17}x_{22}x_{26}x_{30}$	$1+t^4+t^7+t^{13}+t^{17}+t^{22}+t^{26}$ $+t^{30}+t^{68}-t^{31}-t^{35}-t^{39}-t^{43}$ $-t^{47}-t^{51}-t^{55}-t^{59}$
$(1,2,19,4,0)$	$x_2^{-4}x_1^{-11}x_0^{-4}x_1^{-4}$	$-4-15t-4t^2$
$(1,2,21,4,4)$	$x_{48}^{-1}x_{44}^{-1}x_{40}^{-1}x_{36}^{-1}x_{32}^{-1}x_{28}^{-1}x_{24}^{-1}x_{20}^{-1}x_{16}^{-1}$ $x_{12}^{-1}x_8^{-1}x_4^{-1}x_0^{-1}x_1x_5x_9x_{13}x_{18}x_{22}$ $x_{26}x_{30}x_{35}x_{39}x_{43}x_{47}$	$-1+t-t^4+t^5-t^8+t^9-t^{12}$ $+t^{13}-t^{16}+t^{18}-t^{20}+t^{22}-t^{24}$ $+t^{26}-t^{28}+t^{30}-t^{32}+t^{35}-t^{36}$ $+t^{39}-t^{40}+t^{43}+t^{47}-t^{48}$
$(1,2,25,4,0)$	$x_2^{-5}x_1^{-14}x_0^{-5}x_1^{-5}$	$-5-19t-5t^2$
$(1,2,27,4,4)$	$x_{60}^{-1}x_{56}^{-1}x_{52}^{-1}x_{48}^{-1}x_{44}^{-1}x_{40}^{-1}x_{36}^{-1}x_{32}^{-1}x_{28}^{-1}x_{24}^{-1}$ $x_{20}^{-1}x_{16}^{-1}x_{12}^{-1}x_8^{-1}x_4^{-1}x_0^{-1}x_1x_5x_9x_{13}x_{17}$ $x_{18}x_{22}x_{26}x_{31}x_{34}x_{33}x_{39}x_{43}x_{47}x_{49}$	$-1+t-t^4+t^5-t^8+t^9-t^{12}$ $+t^{13}-t^{16}+t^{17}+t^{18}-t^{20}+t^{22}$ $-t^{24}+t^{26}-t^{28}+t^{31}-t^{32}+t^{33}+t^{34}$

Açık problem 4.3: $k \geq 1$ ve $n \geq 1$ için $(1,2,6k+1,6k+5,4,0)$ 6-lısı M özelliğine sahiptir. Bu 6-lıya karşılık gelen kelime,

$$x_{i+2}^{-k-1}x_{i+1}^{-3k-2}x_i^{-k-1}x_{i+1}^{k+1}$$

şeklinde olup devirli temsille eşlenen polinom

$$(-k-1)t^2 + (-2k-1)t - k - 1$$

olur.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada temelde daha önce M.J.Dunwoody tarafından çalışılmış olan, $d = 2a + b + c$ 'nin tek ve 10 dan küçük olması durumundaki (a, b, c, r, s) 5-lileri, karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomunun bulunması ile ilgili çalışmaya ilave olarak d 'nin tek sayı ve 10 dan büyük değerler alması ayrıca çift sayı olması durumları incelendi.

“ $d > 3$ ve $d = 2a + b + c$ tek sayı olduğunda her $n > 0$ sayısı için $(1, 0, c, n, r, s)$ 6-lısının M özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart $(1, 0, c, n, d - r, -s)$ 6-lısının M özelliğine sahip olmasıdır” ifadesi teorem 4.4 de verildi, buna ilaveten devirli temsile karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu bulundu. Ayrıca $(1, 0, c, n, r, s)$ 6-lısı için karşılık gelen polinom $f(t)$ ise $(1, 0, c, n, d - r, s)$ 6-lısı için karşılık gelen polinomun da $-f(t)$ şeklinde olduğu gösterildi.

d 'nin farklı değerlerine karşılık (a, b, c, r, s) 5-lilerine karşılık gelen w kelimesi ve $f(t)$ polinomu çizelgeler halinde verildi. $f(t)$ polinomunun her durumda bilinen bir düğümün Alexander polinomu olduğu görüldü.

KAYNAKLAR

- Bechtell, H., 1971. The Theory of Groups. Addison-Wesley Publishing Company.
- Burde, G., Zieschang, H., 1985. Knots. Walter De Gruyter, Berlin, New York.
- Campell, C.M., 1983. Topics in the Theory of Groups. University of St Andrews.
- Cavicchioli, A., Hegenbarth, F., Kim, A.C., 1998. A Geometric study of Sieradski Groups, *Algebra Colloquim*, 5, 203-217.
- Cavicchioli, A., Hegenbarth, F., Kim, A.C., 1999. On Cyclic Branched Covering of Torus Knots. *J. Geom.*, 64, 55-66.
- Cavicchioli, A., Ruini, B., Spaggiari, F., 2001. On a Conjecture of M. J. Dunwoody. *Algebra colloq.* 8, 169-218.
- Dunwoody, M.J., 1995. Cyclic Presentations and 3-Manifolds. In *Proc. Inter Conf., Groups Korea'94*, Walter De Gruyter, Berlin, New York, 47-55.
- Grasselli, L., Mulazzani, M., 2001. Genus One 1-Bridge Knots and Dunwoody Manifolds. *Forum Math.* 13, 379-397.
- Helling, H., Kim, A.C., Mennicke, J., 1995. Some Honey-Combs in Hyperbolic 3-Space. *Commun. Algebra* 23, 5169-5206.
- Helling, H., Kim, A.C., Mennicke, J., 1998. A Geometric Study of Fibonacci Groups. *J. Lie Theory* 8, 1-23.
- James, G., Liebeck, M., 1993. Representations and Characters of Groups. Cambridge University Press.
- Johnson, D.L., 1974. A Note on the Fibonacci Groups. *Israel J. Math.*, 17, 277-282.
- Johnson, D.L., 1975. Some infinite Fibonacci Groups. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 19, 311-314.
- Johnson, D.L., 1980. Topics in the Theory of Group Presentations. *London Math. Soc. Lect. Note Ser.*, Cambridge University Press, Cambridge, 42.
- Johnson, D.L., 1990. Presentations of Groups. Cambridge University Press.
- Kauffman, L.H., 1987. On Knots. *Ann. of Math. Studies* 115, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.
- Kim, A.C., Vesnin, A., 1997. Cyclically Presented Groups and Takahashi Manifolds. In *Proceeding of Conference "Analysis of Discrete Groups"* held in RIMS, Kyoto

- University, Kyota, Japon, December 2-6,1996,"RIMS Kokyuroku", 200-212.
- Kim,A.C., Vesnin, A., 1998. The Fractional Fibonacci Groups and Manifolds. Siberian Math. J. 39,655-664.
- Kostrikin, A.I., 1982. Introduction to Algebra. Springer-Verlag, New York. Heidelberg Berlin.
- Mednykh, A.D., Vesnin, A., 1996. Fibonacci Manifolds As Two Fold Covering of The 3-Sphere and the Meyerhoff Neumann conjecture. Siberian Math.J.
- Mennicke, J., 1959. Einige Endlich Gruppen Mit drei Erzeugenden Und Drei Relationen. Arch. Math., 10, 409-418.
- Moran, S., 1983. The Mathematical Theory of Knots and Braids. University of Kent at Canterbury.
- Rolfen, D., 1976. Knots and Links. Math. Lecture Ser.7, Publish or Perish Inc., Berkeley, CA.
- Rotman, J.J., 1984. An Introduction to the Theory of Groups. (Third Edition) Allyn and Bacon.
- Ruini, B., Spaggiari, F., 1998.On the Structure of Takahashi Manifolds. Tsukuba Math. j. 22, 723-739.
- Salimov, A., Mağden, A., 1999. Diferensiyel Geometriye Giriş. Atatürk Üniversitesi Basımevi-Erzurum.
- Sieradski, A.J., 1986. Combinatorial Squashing 3-Manifolds and the Third Homotopy of Groups. Invent. Mat. 84, 121-139.
- Song, H.J., Kim, S.H., 2000. Dunwoody 3 Manifolds and (1,1)-Decomposable Knots. Proc. workshop Pure Math.,(Kim-Hom Ed.) Geometri and Topology vol 19, 193-211.
- Szczepanski, A., Vesnin, A., HNN Extension of Cyclically Presented Groups, to appear.
- Thomas, R.M., 1990. The Fibonacci Groups $F(4k+2,4)$. Communications In Algebra 18 (11), 3759-3763.

ÖZGEÇMİŞ

Erzurum’da 1972 yılında doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Erzurum’da tamamladı. 1989 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden 1993 yılında mezun oldu. 1994-1997 yılları arasında, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.

Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde 1995 yılından beri Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır. Evli ve bir çocuk annesidir.

