

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS

BİR ÖZFONKSİYON AÇILIMININ TÜREVLENMESİ

Esen TAŞDEMİR

Danışman: Prof. Dr. Murat ŞAT

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2024
Her Hakkı Saklıdır.

Kabul ve Onay Sayfası

Prof. Dr. Murat Şat danışmanlığında, Esen Taşdemir tarafından hazırlanan bu çalışma 09/02/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul oybirliği/oy çokluğu (.../...) ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ

İmza:

Üye : Prof. Dr. Murat ŞAT

İmza:

Üye : Doç. Dr. Tufan ÖZDİN

İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun / / 20.... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç.Dr. Kemal Volkan ÖZDOKUR
Enstitü Müdür V.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etięe Uygunluk Sayfası

“Bir Öz fonksiyon Açılımının Türevlenmesi” isimli “Yüksek Lisans” tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim. Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiğı gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 09/02/2024

(İmza)

Esen TAŞDEMİR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİR ÖZFONKSİYON AÇILIMININ TÜREVLENMESİ

Esen TAŞDEMİR

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat ŞAT

Bu çalışma üç bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde giriş kısmı verilmiştir. İkinci bölümde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Bir özfonksiyon açılımının türevlenmesi, Spektral fonksiyonun türevlerine yönelik ön tahminler, Spektral fonksiyon türevlerinin asimptotik davranışı, Türevi alınmış öz fonksiyon açılımlarının eş-toplanabilirliği, Farklılaştırılmış bayağı ve genelleştirilmiş Fourier integral açılımlarının toplamı, Diferansiyel bir özfonksiyon açılımının yakınsaması açıklanmıştır.

2023, 38 Sayfa

Anahtar Kelimeler: İntegral denklem, özdeğer, özfonksiyon, sturm-liouville operatörü

ABSTRACT

MSc Thesis

DIFFERENTIATION OF AN EIGENFUNCTION EXPANSION

Esen TAŞDEMİR

Erzincan Binali Yildirim University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Murat ŞAT

This study consists of three parts. In the first chapter, the introduction is given. In the second chapter, the basic definitions and theorems used are given. In the third chapter, differentiation of an eigenfunction expansion, Preliminary predictions for the derivatives of a spectral function, Asymptotic behavior of spectral function derivatives, Co-additivity of differentiated eigenfunction expansions, Sum of differentiated ordinary and generalized Fourier integral expansions, Convergence of a differential eigenfunction expansion are explained.

2024, 38 Pages

Keywords: Eigenfunction, eigenvalue, integral equation, sturm-liouville operator

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkânları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve imkânlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Murat ŞAT hocama, aileme ve eşime şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Esen TAŞDEMİR

Şubat, 2024

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	4
3. BİR ÖZFONKSİYON AÇILIMININ TÜREVLENMESİ	7
3.1. Spektral Fonksiyonun Türevlerine Yönelik Ön Tahminler	7
3.2. Spektral Fonksiyon Türevlerinin Asimptotik Davranışı.....	15
3.3. Türevi Alınmış Özfonsiyon Açılımlarının Eş-Toplanabilirliği.....	19
3.4. Farklılaştırılmış Bayağı Ve Genelleştirilmiş Fourier İntegral Açılımlarının Toplamı.....	27
3.5. Diferansiye Bir Özfonsiyon Açılımının Yakınsaması.....	33
KAYNAKLAR	37

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

C^2	Karesi Reel Değerli ve Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
H	Hilbert Uzayı
$\theta(x, s, \mu)$	Spektral fonksiyon
L	Lineer Operatör
λ	Özdeğer
$o(1)$	Sonsuz Küçük Değerler
$O(1)$	Sınırlı değerler
$y(x, \lambda)$	Öz fonksiyon
I	Birim operatör
y'	y fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
y''	y fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
$\int_a^b$	Belirli integral
$\sum$	Toplam Sembolü
$\lim$	Doğal Limit Fonksiyonu

1. GİRİŞ

Lineer operatörlerin spektral teorisi, asıl başlangıç noktasını bir taraftan lineer cebir ikinci dereceden formların kareler toplamına indirgenmesine ilişkin daha kesin teoremler- ve diğer taraftan da salınım (titreşimli tel, membranlar. vb.) teorisindeki problemlerden alır.

Görünen o ki lineer cebir problemleri ile salınım teorisi arasındaki paralellik, uzun zaman önce fark edilmişti. Fakat, integral denklemler teorisi hakkındaki önemli çalışmasında bu paralellikten sistematik olarak faydalanmaya başlayan sadece D. Hilbert oldu. Bu çalışmanın bir sonucu, Hilbert uzayı l_2 ve daha sonra da genel Hilbert uzayının ortaya çıkmasıydı.

l_2 uzayının ve soyut Hilbert uzayının matematiğine girişi, Hilbert uzayında lineer kendine eş operatörler spektral teorisinin yoğun şekilde gelişimine neden oldu. Son yıllarda, bir çok matematikçinin çabalarıyla, bu teori önemli gelişmeler kat etmiştir.

Başlangıçta, soyut spektral teorisinin çeşitli özel durumları tamamen kapsadığı ve prensipte tüm problemlere cevap verdiği ortaya konuldu. Fakat, yavaş yavaş bunun durumdan uzak olduğu anlaşıldı. Soyut spektral teorisinin ya hiç cevap vermediği ya da çok yetersiz cevaplar verdiği birçok çok önemli soru vardır. Örneğin, özdeğerlerin ve özfonksiyonların ve diğer spektral niceliklerin asimptotik davranışına dair sorularla ilgili durum tam da böyledir. Üstelik, tüm teorisinin esas teoremlerinden biri olan operatörün spektral ayrışımına ilişkin teorem, bu ayrışımı özdeşliğin sözde çözümünü yoluyla soyut terimlerle tanımlar. Somut operatörler açısından (diferansiyel veya sonlu farklar operatörleri), spektral ayrışım genellikle uygun bir denklemin çözümü olarak tanımlanabilir. Özdeşliğin çözümünün özel tanımıyla ilgili sorularda, genel spektral kuramın katkısı sunuldu. Bu, muhtemelen, kendine eş operatörlerin soyut spektral teorisinin fiilen tamamlanmasından birkaç yıl sonra, [çeşitli ülkelerde] kendine eş diferansiyel operatörlere dair spektral teorisi üzerine yoğun çalışmaların başlaması hakkındaki paradoksal gerçeğini açıklamaktadır. Bu çalışma, özellikle kısmi diferansiyel operatörler üzerinde günümüze kadar devam etmiştir.

Translations of Mathematical Monographs kitabı, kendine eş adi diferansiyel denklemlerin modern spektral teorideki bir dizi temel konunun, özellikle de bir ikinci

dereceden denklemin ve iki birinci dereceden denklem sisteminin (Dirac olarak adlandırılan sistemler özel bir durumdur) sistematik açıklamasına yöneliktir. İkinci dereceden operatörlere göre çok daha az ayrıntılı olsa da n 'inci dereceden diferansiyel operatörlere dair spektral teorideki bazı konuları da ele almaktayız. Bu nedenle, bu kitabın n 'inci derece operatörlerle ilgili bölümleri, şu anda zaten çok geniş kapsamlı hale gelmiş olan bu alana basit bir giriş işlevi görebilir.

Birisi regüler/normal ve tekil diferansiyel operatörler arasında ayırım yapmaya neden olur. Değişken tanım alanı sonlu ve katsayıları sürekli olan bir diferansiyel operatörün regüler olduğu söylenir. Eğer tanım alanı sonsuz veya katsayılar (tümü veya bir kısmı) toplanır (veya her ikisi) değilse, bu durumda diferansiyel operatörün tekil olduğu söylenir.

Regüler ikinci dereceden operatörlerin temel spektral teorisi, çalışmaları bu soruların derinlemesine incelenmesini başlatan iki önemli matematikçinin onuruna adlandırılan Sturm-Liouville teorisini kapsamaktadır. İki ve birinci dereceden denklemlere dair regüler sistemler, ciddi anlamda daha sonra incelenmeye başlandı.

Bu kitapta regüler problemlere oldukça fazla yer verilmesine rağmen, bu problemler, tekil operatörlerin spektral teorisi olan temel içeriği oluşturmazlar. Bu teoremin temelleri H. Weyl tarafından Literatüre sunulmuştur. Bu çalışmalar, klasik moment problemine ek olarak, F. Riesz, J. von Neumann ve diğer matematikçilerin çabalarıyla, simetrik ve kendine eş operatörlere dair genel spektral teoremin kurulmasında olağanüstü bir rol oynadı. Weyl'in limit çemberi ve limit noktası üzerine önemli teoreminin, simetrik bir ve ikinci dereceden diferansiyel operatör açısından, kendine eş tüm uzantıların tam bir tanımını verdiğini göz önünde bulunduruyoruz. Simetrik bir operatörün tüm kendine eş uzantılarını tanımlamaya yönelik genel problem, daha sonra von Neumann tarafından büyük ölçüde çözülmüştür.

Matematikçilerin dikkatini diferansiyel operatörler spektral teorisine çekme konusundaki büyük rol, E. C. Titchmarsh'ın [1,2] tekil ikinci dereceden operatörler teorisine yeni bir yaklaşım kazandırdığı ve yeni problemlerin tüm serisini çözdüğü ve (kısmen kuantum mekaniğindeki problemlerden etkilenerek) ifade ettiği monografilerine (tek konu üzerine yazılan metin) aitti.

Bu ülkede yayınlanan bir monografide, tekil ikinci dereceden operatörler için spektral teoriye yönelik ilk tartışma, bu teoriyi oluşturmak için yeni bir yöntem sunan yazarlardan biri (B. M. Levitan [1]) tarafından sunuldu. Bu yöntemin arkasındaki fikir çok basittir ve tekil bir operatör açısından temel spektral ilişkilerin, normal durumda karşılık gelen ilişkilerden limite geçiş yoluyla elde edilmesini kapsamaktadır. Bu yöntem ve daha önce bahsedilen monografin sonuçları bu kitapta yaygın olarak kullanılmaktadır. Fakat bu kitap hiçbir şekilde diğerinin revizyonu olarak değerlendirilemez. Değişiklikler ve eklemeler o kadar büyük çaptadır ki bu, kesinlikle yeni bir kitaptır.

Bu kitapta, 1950 monografisinde bulunmayan iki birinci dereceden denklemin tekil sistemlerine de çok yer verilmiştir. Bu sonuçların nispeten yeni olduğunu ve her halükârda, 1950'den sonra elde edildiğini belirtmek istiyoruz. Genel spektral teori açısından, bu kitaptaki birçok temel teorem, bazı çok genel teoremlere yönelik özel durumlarıdır.

Soyut spektral teoriye aşina olmayan okuyucuya kolaylık sağlayabilmek için, bu teoriyi kısa ve öz bir şekilde ve ispatsız olarak tartıştığımız ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisi ile çeşitli bağlantıları gösterdiğimiz bir bölüm ekledik.

Yazarların talebi üzerine, V. A. Sadovnicii 1. Bölümün §17 Maddesini ve A. G. Kostjucenko ise 7. Bölümün §8 Maddesini ve 12. Bölümün §8 Maddesini yazdılar. A.G. Kostjucenko ve M.V. Fedorjuk tüm taslak metni dikkatlice okudular ve bize yararlandığımız çok değerli tavsiyeler verdiler.

Bu tez *Translations of Mathematical Monographs* 39 (B. M. Levitan, I. S. Sargsjan - *Introduction to Spectral Theory_ Selfadjoint Ordinary Differential Operators*-American Mathematical Society (1975) (1) kitabının *Spectral Theory* konusunu çevirisi yapılarak derleme bir tez oluşturulmuştur ve bilime bu şekilde katkıda bulunacağı düşünülmüştür.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Tanım 2.1. (Operatör) Tanım ve değer cümlesi vektörlerden oluşan dönüşüme operatör denir. (Musayev ve Alp, 2000)

Tanım 2.2. (Lineer Operatör) E_x ve E_Y herhangi iki vektör uzay olsun.

$A: E_x \rightarrow E_Y$ operatör dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa:

- i) $x_1, x_2 \in E_x, A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = Ax_1 + Ax_2$
- ii) $A(\lambda x) = \lambda Ax, \lambda \in R$

A operatörüne lineerdir denir. (Musayev ve Alp, 2000)

Tanım 2.3. (Süreklili Operatör) $A: S(x, \delta) \rightarrow S(Ax, \varepsilon)$ olsun

$|x - x_0| < \delta$ için $|Ax - Ax_0| < \varepsilon$ ise A operatörüne süreklidir denir. (Musayev ve Alp, 2000)

Tanım 2.4. L , D(L) tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri, y fonksiyonuna ise ona karşılık gelen bir özfonksiyon denir. (Kostyuchenko, 1979)

Tanım 2.5. (Parseval Eşitliği) H bir Hilbert uzayı $x \in H$ ve (e_k) ortonormal bir dizi olsun. Bu durumda Parseval eşitliği

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

Olarak tanımlanır. (Kreyszig, 1978)

Tanım 2.6. (Sturm-Liouville Operatörü) L herhangi elemanlar cümlesinde tanımlı lineer bir operatör olsun. $y \neq 0$ olmak üzere $Ly = \lambda y$ eşitliğini sağlayan y fonksiyonuna

L operatörünün özfonksiyonu λ ' ya ise özdeğeri denir. Operatörlerin spektral teorisinde sık göz önüne alınan Sturm-Liouville operatörü

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $q(x), [a, b]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyondur.

Tanım 2.6. (Fourier İntegral Teoremi) $f(x)$ parçalı sürekli, parçalı türevlenebilir ve mutlak integrallenebilir yani

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$$

olsun. Bu taktirde

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega (t - x) dt$$

eşitliği vardır. Ayrıca $\cos(\omega (t - x))$, ω 'nin çift fonksiyonu ve $\sin(\omega (t - x))$, ω 'nin tek fonksiyonu olduğunda

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega (t - x) dt$$

ve

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega (t - x) dt$$

sağlanır.(Weber J. H. Arfken G. B. 2005)

Tanım 2.7. (O ve o sembolleri). $a \in \mathbb{R}$ ve $X \subset \mathbb{R}$ kümesinin bir limit noktası ve $f(x)$ X kümesi üzerinde tanımlı olsun. Buna göre $x \in X, x \rightarrow a$ iken $f(x) = o(1)$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki $\forall x \in \cup_{\delta} (a) \cap X$ için $|f(x)| < \varepsilon$ kalır. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$

0 ise $f(x) = o(g(x))$ şeklinde yazılır. Eğer $\forall x \in U_\delta(a) \cap X$ için $|f(x)| \leq C|g(x)|$ olacak şekilde bir C sabiti varsa $x \in X, x \rightarrow a$ iken $f(x) = O(g(x))$ şeklinde yazılır.(. Şuhubi, E. S. 2001)

Tanım 2.8. (Cauchy dizisi) (x_n) bir reel terimli dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m \geq n_0$ olduğunda $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı mevcutsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.(Koçak M,2015)

Tanım 2.9. x_n bir Cauchy dizisi ise sınırlıdır. (Koçak M,2015)

Tanım 2.10. (x_n) bir reel terimli dizi olsun. (x_n) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart Cauchy dizisi olmasıdır. (Koçak M,2015)

Tanım 2.11. $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}, f: E \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu olsun. Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için en az bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı vardır öyleki $|x_1 - x_2| < \delta$ koşulunu sağlayan her, $x_1, x_2 \in E$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ sağlanıyorsa f Fonksiyonu E kümesin üzerinde düzgün süreklidir.

Tanım 2.12. (Adi diferansiyel denklemler) Adi diferansiyel denklem (ADD), yalnızca bir bağımsız değişken içeren bilinmeyen bir fonksiyonu türevleriyle ilişkilendiren matematiksel bir denklemdir. ADD'nin genel formu

$$F(t, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde ifade edilebilir, burada t bağımsız değişkeni, y bilinmeyen fonksiyonu, y' y fonksiyonunun t göre birinci türevi, y'' ikinci türevi temsil eder ve $y^{(n)}$ ise n . Türevi temsil eder.

ADD'ler, çeşitli fiziksel, biyolojik ve mühendislik olaylarını modellemek için yaygın olarak kullanılmaktadır. (Yerzhan Turarov, 2023)

3. BİR ÖZFONKSİYON AÇILIMININ TÜREVLENMESİ

3.1. Spektral fonksiyonun türevlerine yönelik ön tahminler

Bu bölümde, kendine eş ikinci dereceden diferansiyel operatörün öz fonksiyonları bakımından bir açılımın türevine yönelik çalışmalar yapılacaktır.

$$y'' + [\lambda - q(x)]y = 0 \quad (3.1.1)$$

denklemin başlangıçtaki koşullar ile yarı doğru $[0, \infty)$ üzerinde tanımlanır.

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \quad (3.1.2)$$

$q(x)$ ' yarı doğru $[0, \infty)$ üzerinde tanımlanan ve her sonlu aralıkta toplanabilen gerçekte bir fonksiyon olduğunu varsayıyoruz.

Bu çalışmada, (3.1.1)- (3.1.2) probleminin spektrumunun negatif olmadığını ya da negatif bir spektrum varsa da bunun aşağıdan sınırlı değer kümesine sahip olduğunu varsayacağız. İkinci durum kolayca birincisine indirgenebilir. Böylece, $\lambda = \mu^2 (\mu > 0)$ olarak bırakıp (3.1.1)- (3.1.2) probleminin çözümünü $\varphi(x, \mu)$ ile ifade ediyoruz.

Bilindiği gibi, her sonlu aralıkta sınırlanan monotonik (artan/azalan) bir $p(\mu)$ fonksiyonu vardır, öyle ki her $f(x) \in C^2(0, \infty)$ fonksiyonu için Parseval eşitliği vardır.

$$\int_0^\infty f^2(x) dx = \int_0^\infty F^2(\mu) d\rho(\mu), \quad (3.1.3)$$

bu denklemde

$$F(\mu) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(x) \varphi(s, \mu) ds.$$

Denklemin (3.1.1) spektral fonksiyonunu $\theta(x, s, \mu)$ ile gösterelim (başlangıç verileri (3.1.2) için), örneğin şöyle ekleyelim

$$\theta(x, s, \mu) = \begin{cases} \int_0^\mu \varphi(x, \gamma) \varphi(s, \gamma) d\rho(\gamma), & \mu > 0, \\ 0 & \mu = 0 \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Bu bölümde spektral fonksiyon $\theta(x, s, \mu)$ türevleri için çeşitli ön tahminler elde edeceğiz.

Önceki bölümde gördüğümüz gibi, keyfi gerçel/mutlak t için sahip olduğumuz durum

$$\varphi(x, \mu) \cos \mu t = \frac{1}{2} \{ \varphi(x + t, \mu) + \varphi(x - t, \mu) \} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \omega(x, t, s) \varphi(s, \mu) ds. \quad (3.1.5)$$

şeklinde tanımlanmaktaydı. (3.1.5)'i x 'e göre türev alarak ve s operatörü yerine integralin alt sınır değeri $(x - t)$ ve üst sınır değeri olan $(x + t)$ yazılarak şu durumu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, \mu) \cos \mu t &= \frac{1}{2} \{ \varphi'_x(x + t, \mu) + \varphi'_x(x - t, \mu) \} \\ &+ \frac{1}{2} \{ \omega(x, t, x + t) \varphi(x + t, \mu) - \omega(x, t, x - t) \varphi(x - t, \mu) \} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial \omega(x, t, s)}{\partial x} \varphi(s, \mu) ds. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

$g(t)$ fonksiyonunun belirtilen koşulları sağladığını varsayalım. (3.1.6)'nın her iki tarafını da $g(t)$ ile çarpıp ve sonra t için 0' dan ε 'ye göre integral alırsak, elde ettiğimiz denklem

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, \mu) \psi_\varepsilon(\mu) &= \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon \{ (\varphi'_x(x + t, \mu) + \varphi'_x(x - t, \mu)) \} g_\varepsilon(t) dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon \{ \omega(x, t, x + t) \varphi(x + t, \mu) - \omega(x, t, x - t) \varphi(x - t, \mu) \} g_\varepsilon(t) dt \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) \left\{ \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \varphi(s, \mu) ds \right\} dt \equiv I_1 + I_2 + I_3$$

şeklin de yazılır.(3.1.7)'nin sağ tarafını dönüştürelim. İlk terimi düşünüp. Parçalara göre integrasyon yaparsak, aşağıdaki integrali buluruz:

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \varphi'_x(x+t, \mu) g_\varepsilon(t) dt &= \int_0^\varepsilon \varphi'_t(x+t, \mu) g_\varepsilon(t) dt \\ &= -\varphi(x, \mu) g_\varepsilon(0) - \int_0^\varepsilon \varphi(x+t, \mu) g'_\varepsilon(t) dt, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \varphi'_x(x-t, \mu) g_\varepsilon(t) dt \\ &= -\int_0^\varepsilon \varphi'_t(x-t, \mu) g_\varepsilon(t) dt = \varphi(x, \mu) g_\varepsilon(0) \\ &+ \int_0^\varepsilon \varphi(x-t, \mu) g'_\varepsilon(t) dt. \end{aligned}$$

Sonuç olarak, t açısından $g(t)$ 'nin eşitliğini çift sayı olma durumunu kısmi integrasyon kullanarak:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int_0^\varepsilon \varphi(x+t, \mu) g'_\varepsilon(t) dt + \int_0^\varepsilon \varphi(x-t, \mu) g'_\varepsilon(t) dt \\ &= -\int_x^{x+\varepsilon} \varphi(s, \mu) \frac{\partial g_\varepsilon(s-x)}{\partial s} ds - \int_{x-\varepsilon}^x \varphi(s, \mu) \frac{\partial g_\varepsilon(s-x)}{\partial s} ds \quad (3.1.8) \\ &= -\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(s, \mu) \frac{\partial g_\varepsilon(s-x)}{\partial s} ds. \end{aligned}$$

denklemini elde etmiş oluruz. Şimdi (3.1.7)'nin ikinci terimini de kısmi integral olarak dönüştürelim:

$$\begin{aligned}
\int_0^\varepsilon \omega(x, t, x+t) \varphi(x+t, \mu) g_\varepsilon(t) dt &= -\frac{1}{2} \int_0^\varepsilon \varphi(x+t, \mu) g_\varepsilon(t) \left\{ \int_0^t q(x+\tau) d\tau \right\} dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_x^{x+\varepsilon} \varphi(s, \mu) g_\varepsilon(s-x) \left\{ \int_0^{s-x} q(x+\tau) d\tau \right\} ds \\
&= -\frac{1}{2} \int_x^{x+\varepsilon} \left\{ g_\varepsilon(s-x) \int_x^s q(\tau) d\tau \right\} \varphi(s, \mu) ds, \\
&\quad - \int_0^\varepsilon \omega(x, t, x-t) \varphi(x-t, \mu) g_\varepsilon(t) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon \varphi(x-t, \mu) g_\varepsilon(t) dt \left\{ \int_0^t q(x-\tau) d\tau \right\} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_x^{x-\varepsilon} \varphi(s, \mu) g_\varepsilon(x-s) \left\{ \int_0^{x-s} q(x-\tau) d\tau \right\} ds \\
&= -\frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^x \left\{ g_\varepsilon(s-x) \int_x^s q(\tau) d\tau \right\} \varphi(s, \mu) ds,
\end{aligned}$$

dönüşümünü elde etmiş oluruz ve sonuç olarak I_2 eşitliği,

$$I_2 = -\frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \left\{ g_\varepsilon(s-x) \int_x^s q(\tau) d\tau \right\} \varphi(s, \mu) ds, \quad (3.1.9)$$

şeklinde yazılır. Son olarak (3.1.7) de bulunan son integraldeki integral alma sırasını değiştirerek şunu elde etmiş oluruz:

$$I_3 = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(s, \mu) \lambda_\varepsilon(x, s) ds \quad (3.1.10)$$

Bu integralde $\lambda_\varepsilon(x, s)$ operatörü aşağıda ki integrale eşittir;

$$\lambda_\varepsilon(x, s) = \int_{|x-8|}^{\varepsilon} g_{\varepsilon(t)} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} dt. \quad (3.1.11)$$

(3.1.8),(3.1.9) ve (3.1.10) denklemleri ,(3.1.7) bağıntısında yazılır ise

$$\psi'_x(x, \mu) \psi_s(\mu) = -\frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \varphi(s, \mu) \frac{\partial g_\varepsilon(s-x)}{\partial s} ds$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \left\{ g_\varepsilon(s-x) \int_x^s q(\tau) d\tau \right\} \varphi(s, \mu) ds \\ & + \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \lambda_\varepsilon(x, s) \varphi(s, \mu) ds \\ & = \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \left\{ \lambda_\varepsilon(x, s) - \frac{\partial g_\varepsilon(s-x)}{\partial s} - \frac{1}{2} g_\varepsilon(s-x) \int_x^s q(\tau) d\tau \right\} \varphi(s, \mu) ds, \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

denklemini elde edilmiş olur. (3.1.2)'yi dikkate aldığımızda, sabit x değeri için $\varphi'_x(x, \mu) \psi_\varepsilon(\mu)$ fonksiyonu aşağıdaki duruma eşit olan Fonksiyonun genelleştirilmiş Fourier dönüşümü ($\varphi(x, \mu)$ özfonksiyonları açısından) olarak kabul edilir:

$$\bar{2} \left\{ \lambda_\varepsilon(x, s) - \frac{\partial g_\varepsilon(s-x)}{\partial s} - \frac{1}{2} g_\varepsilon(s-x) \int_x^8 q(\tau) d\tau \right\} = h_\varepsilon(x, s) \quad (3.1.13)$$

$s \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ aralığındadır ve bu aralığın dışında sıfıra eşittir. Bu nedenle (3.1.12)'den elde ettiğimiz Parseval eşitliği ile

$$\int_0^\infty F(\mu) \varphi'_x(x, \mu) \psi_\varepsilon(\mu) d\rho(\mu) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) h_\varepsilon(x, s) ds. \quad (3.1.13')$$

denklemleri yazılmış olur. Dolayısıyla, $f(s)$ 'nin keyfiliği ve (3.1.13) ile elde ettiğimiz denklem şu şekilde tanımlanır:

$$\int_0^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) \varphi(s, \mu) \varphi'_x(x, \mu) d\rho(\mu) = \begin{cases} \lambda_{\varepsilon}(x, s) - \frac{\partial g_{\varepsilon}(s-x)}{\partial s} - \frac{1}{2} g_{\varepsilon}(s-x) \int_x^8 q(\tau) d\tau, & |x-s| \leq \varepsilon \\ 0, & |x-s| \geq \varepsilon \end{cases} \quad (3.1.14)$$

Özdeşliği (3.1.14) s^1) ye göre türev alarak ve (3.1.11)'i kullanarak $x > s$ için elde ettiğimiz ifade;

1) burada $q(x)$ fonksiyonunun mutlak sürekli olduğunu varsayıyoruz.

$$\int_0^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) \varphi'_s(s, \mu) \varphi'_x(x, \mu) d\rho(\mu) = \begin{cases} g_{\varepsilon}(s-x) \frac{\partial \omega(x, t, s)}{\partial x} \Big|_{t=x-s} + \int_{x-\varepsilon}^8 g_{\varepsilon}(t) \frac{\partial^2 \omega(x, t, s)}{\partial x \partial s} dt - \frac{\partial^2 g_{\varepsilon}(s-x)}{\partial s^2} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\varepsilon}(s-x)}{\partial s} \int_x^8 q(\tau) d\tau - \frac{1}{2} g_{\varepsilon}(s-x) q(s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (3.1.15)$$

şeklinde yazılır. $\theta(x, s, \mu)$ Spektral fonksiyonu, örneğin (3.1.4), tanımıyla (3.1.15)

özdeşliği şu şekli alır:

$$\int_0^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d_{\mu} \frac{\partial^2 \theta(x, s, \mu)}{\partial x \partial s} \quad (3.1.15')$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} g_\varepsilon(s-x) \frac{\partial \omega(x, t, s)}{\partial x} \Big|_{t=x-s} + \int_{x-\varepsilon}^8 g_\varepsilon(t) \frac{\partial^2 \omega(x, t, s)}{\partial x \partial s} dt - \frac{\partial^2 g_\varepsilon(s-x)}{\partial s^2} \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial g_\varepsilon(s-x)}{\partial s} \int_x^8 q(\tau) d\tau - \frac{1}{2} g_\varepsilon(s-x) q(s), & |x-s| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x-s| \geq \varepsilon, \end{array} \right\}$$

Tek fonksiyon elde etmek için μ değişkeninde $\theta(x, s, \mu)$ fonksiyonunun açılımıyla, $s = x$ için (3.1.15)'ten elde ettiğimiz durum

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mu) d_\mu \frac{\partial^2 \theta(x, s, \mu)}{\partial x \partial s} \Big|_{s=x} &= g_\varepsilon(0) \frac{\partial \omega(x, t, s)}{\partial x} \Big|_{\substack{t=x-8 \\ s=x}} + \\ &\int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) \frac{\partial^2 \omega(x, t, s)}{\partial x \partial s} \Big|_{s=x} dt - \frac{\partial^2 g_\varepsilon(s-x)}{\partial s^2} \Big|_{s=x} - \frac{1}{2} g_\varepsilon(0) q(x), \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

şeklinde yazılmaktadır.

2. Şimdi özfonksiyonların türevlerinin davranışıyla ilgili bazı basit önermeleri kanıtlayacağız.

ÖNERME 3.1.1: Eğer $q(x)$ fonksiyonu her sonlu aralıkta mutlak sürekli ise, bu durumda $\alpha \rightarrow \infty$ olarak aşağıdaki tahmini yapabiliriz:

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^2 \theta(x, s, \mu)}{\partial x \partial s} \right\}_{s=x} = \int_a^{a+1} [\varphi'_x(x, \mu)]^2 dp(\mu) = O(a^2). \quad (3.1.17)$$

Bu tahmin, x herhangi bir sonlu aralıkta değişirken sabit kalır.

İSPAT: Öz fonksiyonlar için iyi bilinen asimptotik formüller arasında, x için sonlu bir aralıkta ve $\mu \rightarrow \infty$ için takip ettiği durum

$$\varphi'(x, \mu) = O(\mu) \text{ özdeşliği şeklindedir.} \quad (3.1.18)$$

Aşağıdaki önerme benzer şekilde ispatlanabilir.

ÖNERME 3.1.2: Eğer $q(x)$ fonksiyonunun her sonlu aralıkta toplanabilen $2k$ derecesinde bir türevi varsa, bu durumda her sabit x için $\alpha \rightarrow \infty$ alınarak salınım fonksiyonu,

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^{2k} \theta(x, s, \mu)}{\partial x^k \partial s^k} \right\}_{s=x} = \int_a^{a+1} \{ \varphi_x^{(k)}(x, \mu) \}^2 d\rho(\mu) = O(a^{2k}) \quad (3.1.19)$$

$(k = 1, 2, 3 \dots)$

şeklinde yazılır. Bu tahmin, x herhangi bir sonlu aralıkta değişirken sabit kalır.

Buradan önerme:3.1.1 ve Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinin devamı şu şekildedir:

ÖNERME 3.1.3: Eğer $q(x)$ 'in her sonlu aralıkta toplanabilen bir birinci türevi varsa, bu durumda her sabit x ve s kullanımında $\alpha \rightarrow \infty$ için

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^{2k} \theta(x, s, \mu)}{\partial x^i \partial s^j} \right\} = \int_a^{a+1} |\varphi(s, \mu)| \cdot |\varphi'_x(x, \mu)| d\rho(\mu) = O(a). \quad (3.1.20)$$

dir. Bu tahmin, x ve s herhangi bir sonlu aralıkta değiştiği için tahmini aynı şekilde geçerlidir. önerme 3.1.2 ve Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinden şu şekilde yararlanılır:

ÖNERME 3.1.4: Önerme 3.1.2 koşulları altında, yaptığımız tahmin $\dot{I}$ ve $\dot{J}$ inci mertebeden türevleri

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^{2k} \theta(x, s, u)}{\partial x^i \partial s^j} \right\} = \int_a^{a+1} |\varphi_x^{(i)}(x, \mu)| \cdot |\varphi_\epsilon^{(j)}(s, \mu)| d\rho(\mu) = O(a^{2k})$$

$(i + j = 2k) \quad (3.1.21)$

şeklindedir.

Bu tahmin, x ve s herhangi bir sonlu aralıkta değişirken sabit kalır.

$q(x) = 0$ için $\theta(x, s, \mu)$, (3.1.1)-(3.1.2) probleminin spektral fonksiyonunu gösterebilir,

$$\theta^*(x, s, \mu) = \frac{2}{\pi} \int_0^\mu \cos \gamma x \cdot \cos \gamma s d\gamma. \quad (3.1.22)$$

dir. $\theta^*(x, s, \mu)$ tanımından hemen şu durum ortaya çıkar:

ÖNERME 3.1.5: $a \rightarrow \infty$ olarak özdeşliğimiz

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial^n \theta^*(x, s, \mu)}{\partial x^k \partial s^j} \right\} = O(a^n) \quad (k + j = n = 0, 1, \dots). \quad (3.1.23)$$

salınım fonksiyonu şeklinde yazılır. Bu tahmin, tüm yarı doğru $(0, \infty)$ aralığı boyunca sabit kalır.

3.2. Spektral fonksiyon türevlerinin asimptotik davranışı

Formül (3.1.14), $\theta(x, s, \mu)$ spektral fonksiyon türevlerinin asimptotik davranışını incelememizi mümkün kılar. (3.1.1) ve (3.1.2) probleminin spektral fonksiyonunun türevlerinin asimptotik davranışını incelemek için, bunları daha basit bir problemin, örneğin aşağıdaki problemin, spektral fonksiyonunun türevleriyle karşılaştıracğıız.

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (\lambda > 0), \quad (3.2.1)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad (3.2.2)$$

eşitliklerini kullanarak (3.1.14)'ün sağ tarafını ele alalım. Elimizdeki durum

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) \varphi(s, \mu) \varphi'_x(x, \mu) d\rho(\mu) \\ &= \begin{cases} \lambda_{\varepsilon}(x, s) - \frac{1}{2} g_{\varepsilon}(s - x) \int_x^{\varepsilon} q(\tau) d\tau - \frac{\partial g_{\varepsilon}(s - x)}{\partial s}, & |x - s| \leq \varepsilon \\ 0, & |x - s| \geq \varepsilon \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

olmak üzere;

$\theta(x, s, \mu)$ spektral fonksiyonunu kullanarak (3.2.3)'e verebileceğimiz form

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d_{\mu} \frac{\partial \theta(x, s, \mu)}{\partial x} \\
&= \begin{cases} \lambda_{\varepsilon}(x, s) - \frac{1}{2} g_{\varepsilon}(s-x) \int_x^8 q(\tau) d\tau - \frac{\partial g_{\varepsilon}(s-x)}{\partial s}, & |x-s| \leq \varepsilon \\ 0, & |x-s| \geq \varepsilon \end{cases} \quad (3.2.3')
\end{aligned}$$

elde edilir. $\theta(x, s, \mu)$ fonksiyonu, yani (3.2.1) ve (3.2.2) probleminin spektral fonksiyonu için (3.2.3')'den yola çıkarak benzer bir formül yazıp aynı zamanda (3.2.1) ve (3.2.2) problemini göz önünde bulundurarak, $w(x, t, s) \equiv 0$ olduğunda elde ettiğimiz:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d_{\mu} \left\{ \frac{\partial \theta(x, s, \mu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s, \mu)}{\partial x} \right\} \\
&= \begin{cases} \lambda_{\varepsilon}(x, s) - \frac{1}{2} g_{\varepsilon}(s-x) \int_x^8 q(\tau) d\tau, & |x-s| \leq \varepsilon \\ 0, & |x-s| \geq \varepsilon \end{cases} \quad (3.2.4)
\end{aligned}$$

özdeşliği şeklindedir ki burada $\lambda_{\varepsilon}(x, s)$ operatörü

$$\lambda_{\varepsilon}(x, s) = \int_{|x-s|}^{\varepsilon} g_{\varepsilon}(t) \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} dt. \quad (3.2.5)$$

dir. Denkleme ekleyeceğimiz $a(x, s, \mu)$ operatörü

$$a(x, s, \mu) = \int_{|x-s|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \cos \mu t dt \quad (3.2.6)$$

şeklinde yazılır.

Sonrasında (3.1.6) ve (3.2.6)'dan sonra gelen bayağı Parseval integrali açısından Parseval eşitliği ile elde edilen integral;

$$\int_0^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) a(x, s, \mu) d\mu = \frac{\pi}{2} \int_{|x-8|}^{\varepsilon} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_{\varepsilon}(t) dt. \quad (3.2.7)$$

elde edilir. Ayrıca, (3.1.6)'da bulduğumuz inversiyon/tersine çevirme formülü sayesinde bulduğumuz formülü aşağıdaki şekilde,

$$\begin{aligned} g_{\varepsilon}(s-x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) \cos(s-x)\mu d\mu \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d\mu \frac{\sin(s-x)\mu}{(s-x)}. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

yazılır. Bu yüzden de $\psi(\mu)$ ve $\alpha(x, s, \mu)$ fonksiyonları μ 'ye göre çift olduğundan, (3.2.7) ve (3.2.8)'den yola çıkarak (3.2.4)'ün aşağıdaki biçimde yeniden yazılabileceği sonucu çıkar:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d\mu \left\{ \frac{\partial \theta(x, s, \mu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s, \mu)}{\partial x} \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} a(x, s, v) dv + \frac{1}{4\pi} \frac{\sin(s-x)\mu}{s-x} \int_{\frac{x}{8}}^8 g(\tau) d\tau \right\} = 0 \end{aligned}$$

Teorem 3.2.1 Eğer $q(x)$ her sonlu aralıkta mutlak sürekli ise, bu durumda her sabit x ve s için $\mu \rightarrow \infty$ elde ederiz

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2} \right) d_v \left[\frac{\partial \theta(x, s, v)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s, v)}{\partial x} \right] = O(1) \quad (3.2.10)$$

Bu asimptotik ilişki, x ve s herhangi bir sonlu aralıkta değişirken sabit kalır.

İspat: Salınım fonksiyonları aşağıdaki şekilde olduğu için

$$\bigvee_{\mu}^{\mu+1} \left\{ \int_0^{\mu} a(x, s, v) dv \right\} = o(\mu), \quad \bigvee_a^{\mu+1} \left\{ \int_0^{\mu} \cos v(s-x) dv \right\} = O(\mu),$$

bu durumda (3.1.20) ve (3.2.9) ile Tauber Teoremi uygulanabilir ki burada her sabit x ve s için fonksiyonun 1. derece Riesz durumu

$$\frac{\partial \theta(x, s, \mu)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s, \mu)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^\mu a(x, s, v) dv + \frac{1}{4\pi} \int_x^8 q(\tau) d\tau \int_0^\mu \cos v(s-x) dv$$

olmak üzere $\mu \rightarrow \infty$ olarak sınırlı kalır, yani elimizde bulunan durum

$$\int_0^\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) dv \left\{ \frac{\partial \theta(x, s, v)}{\partial x} - \frac{\partial \theta^*(x, s, v)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^v a(x, s, \sigma) d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_x^8 q(\tau) d\tau \int_0^v \cos \sigma(s-x) d\sigma \right\} = O(1) \quad (3.2.11)$$

denkleminin dönüşür. Teoremi kanıtlamak için parçalara ayırarak integralleri hesaplamamız gerekmektedir.

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) a(x, s, v) dv$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_x^8 q(\tau) d\tau \int_0^\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \cos v(s-x) dv.$$

İntegrallerinin ilkinin hesaplayalım. $\alpha(x, s, \mu)$ Fonksiyonunun tanımına göre, örneğin (3.2.6)'da elde ettiğimiz

$$\pi I_1 = \int_0^\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \left\{ \int_{|x-8|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \cos vt dt \right\} dv,$$

integralinin tümlev sırasını değiştirerek,

$$\pi I_1 = \int_{|x-8|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \left\{ \int_0^\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \cos vt dv \right\} dt, \quad (3.2.12)$$

integrali elde edilir. Ayrıca, iyi bilinen bir teoremle karşılaştırm (Titchmarsh [3], §7.1)

$$\int_0^\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \cos vt \, dv = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mu \frac{J_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}}. \quad (3.2.13)$$

Son iki formülden nihai olarak elde ettiğimiz

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mu \int_{|x-8|}^1 \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \frac{J_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}} dt. \quad (3.2.14)$$

olmak üzere (3.2.13) ile elde ettiğimiz ikinci integral için,

$$I_2 = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \mu \frac{J_{3/2}[\mu(s-x)]}{[\mu(s-x)]^{3/2}} \int_x^8 q(\tau) d\tau, \quad (3.2.15)$$

integrali elde edilir. Bu nedenle (3.2.14) ve (3.2.15) ile teorem (3.2.11)'den sonra gelir.

$\theta(x, s, \mu)$ spektral fonksiyonunun daha yüksek dereceli türevleri için benzer asimptotik formüller elde edilebilir. Ancak kendimizi ikinci türevler için bir teorem belirtmekle sınırlayarak bunu bu kısımda yapmayacağız.

Teorem 3.2.2 Eğer $q(x)$ her sonlu aralıkta mutlak sürekli bir birinci türeve sahipse, bu durumda her sabit x ve s için elde ettiğimiz asimptotik formül

$$\int_0^\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right)^2 d_v \left[\frac{\partial^2 \theta(x, s, v)}{\partial x \partial s} - \frac{\partial^2 \theta^*(x, s, v)}{\partial x \partial s} \right] = O(1). \quad (3.2.16)$$

şeklinde yazılır ve bu formül, x ve s herhangi bir sonlu aralıkta değişirken sabit kalır.

3.3. Türevi alınmış öz fonksiyon açılımlarının eş-toplanabilirliği

Bu bölümde, $\theta(x, s, \mu)$ spektral fonksiyonunun türevleri için §1'de elde edilen ön tahminleri kullanarak, bir Sturm-Liouville operatörünün özfonksiyonlarında ve $\mathcal{L}^2(0, \infty)$ 'deki fonksiyonların adi Fourier kosinüs integralinde türev açılımlarının eş-toplana bilirliliğine yönelik bir teoriyi kanıtlayacağız.

İlk olarak bazı önermeleri ispatlayacağız. (3.1.13') formülünden elde ettiğimiz integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) F(\mu) \varphi'_x(x, \mu) d\rho(\mu) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) h_{\varepsilon}(x, s) ds, \quad (3.3.1)$$

Şeklindedir ki burada $f(s) \in \mathcal{L}^2(0, \infty)$ ve

$$F(\mu) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(s) \varphi(s, \mu) ds, \quad (3.3.2)$$

fonksiyonun da s operatörüne göre integral alınır ve;

$$h_{\varepsilon}(x, s) = \int_{|x-8|}^{\varepsilon} \frac{\partial \omega(x, t, s)}{\partial x} g_{\varepsilon}(t) dt + \frac{\partial g_{\varepsilon}(s-x)}{\partial x} - \frac{1}{2} g_{\varepsilon}(s-x) \int_x^8 q(\tau) d\tau. \quad (3.3.3)$$

Şeklinde formülü tanıtmış oluruz. Bu formülde,

$$S(x, \mu) = \int_0^{\infty} f(s) \theta(x, s, \mu) ds = \int_0^{\mu} F(v) \varphi(x, v) d\rho(v), \quad (3.3.4)$$

ve

$$S^*(x, \mu) = \int_0^{\infty} f(s) \theta^*(x, s, \mu) ds, \quad (3.3.5)$$

şeklinde yazılır. $s(x, \mu)$ fonksiyonu tanımını ile (3.3.1) şu formu alır:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d_{\mu} \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} \\ &= \int_{x-8}^{x+8} f(s) \left\{ \int_{|x-8|}^8 \frac{\partial \omega(x, t, s)}{\partial x} g_{\varepsilon}(t) dt + \frac{\partial g_{\varepsilon}(s-x)}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} g_{\varepsilon}(s-x) \int_x^8 q(\tau) d\tau \right\} ds. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$S(x, \mu)$ fonksiyonu bir Sturm-Liouville operatörünün öz fonksiyonlarındaki açılımın bir parçası ve $S^*(x, \mu)$ ise $f(x) \in \mathcal{L}^2(0, \infty)$ fonksiyonunun sıradan bir Fourier kosinüs integralindeki açılımının bir parçasıdır.

$S^*(x, \mu)$ için (3.3.6)'ya benzer bir formül yazarak, bu durum için $q(x) \equiv 0, w(x, t, s) \equiv 0$ durumlarını dikkate alarak ve (3.3.6)'dan yola çıkarak, elde ettiğimiz formül

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\varepsilon(\mu) d_\mu \left\{ \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} - \frac{\partial S^*(x, \mu)}{\partial x} \right\} \\ = \int_{x-8}^{x+8} f(s) \left\{ \int_{|x-8|}^{\varepsilon} \frac{\partial \omega(x, t, s)}{\partial x} g_\varepsilon(t) dt - \frac{1}{2} g_\varepsilon(s-x) \int_x^8 q(\tau) d\tau \right\} ds, \quad (3.3.7)$$

şeklindedir.

Önerme 3.3.1: $f(x) \in \mathcal{L}^2(0, \infty)$ olarak düşünün. Eğer $q(x)$ her sonlu aralıkta mutlak sürekli ise, bu durumda her sabit x için $\mu \rightarrow \infty$ olarak tahminimiz

$$\bigvee_{\mu}^{\mu+1} \left\{ \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} \right\} = \int_{\mu}^{\mu+1} |\varphi'_x(x, \mu)| |F(\mu)| d\rho(\mu) = o(\mu). \quad (3.3.8)$$

olmak üzere bu tahmin x herhangi bir sonlu aralıkta değişirken sabit kalır.

İSPAT: $S(x, \mu)$ tanımı ve (3.3.4) ile elde ettiğimiz integral

$$\frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} = \int_0^{\mu} \varphi'_x(x, \mu) F(\mu) d\rho(\mu).$$

şeklinde yazılır bu nedenle, Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinden çıkan sonuç

$$\bigvee_{\mu}^{\mu+1} \left\{ \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} \right\} = |\varphi'_x(x, \mu) F(\mu)| d\rho(\mu)$$

$$\leq \left(\int_{\mu}^{\mu+1} [\varphi'_x(x, \mu)]^2 d\rho(\mu) \right)^{1/2} \left(\int_{\mu}^{\mu+1} F^2(\mu) d\rho(\mu) \right)^{1/2} \quad (3.3.9)$$

eşitsizliği şeklinde yazılır. Önerme 3.1.1 ile elde ettiğimiz

$$\int_{\mu}^{\mu+1} [\varphi'_x(x, \mu)]^2 d\rho(\mu) = O(\mu^2). \quad (3.3.10)$$

eşit olur dahası $\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\mu) d\rho(\mu) < \infty$ olduğu için, $\mu \rightarrow \infty$ olarak elderez

$$\int_{\mu}^{\mu+1} F^2(\mu) d\rho(\mu) = o(1). \quad (3.3.11)$$

Bu nedenle, (3.3.10) ve (3.3.11) tahminleri sayesinde önerme (3.3.9) eşitsizliği sonucu çıkar.

Benzer şekilde kanıtlanabilir olduğu üzere:

ÖNERME 3.3.2. $f(x) \in \mathcal{L}^2(0, \infty)$ olarak bırakalım. Eğer $q(x)$ 'in her sonlu aralıkta toplanabilen bir k 'inci türevi varsa, bu durumda her sabit x için $\mu \rightarrow \infty$ olarak tahminimiz

$$\bigvee_{\mu}^{\mu+1} \left\{ \frac{\partial^k S(x, \mu)}{\partial x^k} \right\} = o(\mu^k) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.3.12)$$

şeklindedir. Bu tahmin, x herhangi bir sonlu aralıkta değişirken sabit kalır.

$S^*(x, \mu)$ tanımından elde edilen sonuç şöyledir:

ÖNERME 3.3.3. $f(s) \in \mathcal{L}^2(0, \infty)$ olarak bırakalım. Bu durumda $\mu \rightarrow \infty$ olarak

$$\bigvee_{\mu}^{\mu+1} \left\{ \frac{\partial^k S^*(x, \mu)}{\partial x^k} \right\} = o(\mu^k) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (3.3.13)$$

yazılır. Bu tahmin, tüm yarı doğru $[0, \infty)$ aralığı boyunca sabit kalır.

TEOREM 3.3.1. $f(x) \in \mathcal{L}^2(0, \infty)$ olarak bırakalım. Eğer $q(x)$ her sonlu aralıkta mutlak sürekli ise, bu durumda her sonlu aralıkta değişmez olarak elde ettiğimiz bağıntı:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right) d_\nu \left\{ \frac{\partial S(x, \nu)}{\partial x} - \frac{\partial S^*(x, \nu)}{\partial x} \right\} = 0,$$

Şeklinde yazılır yani, bir Sturm-Liouville operatörünün öz fonksiyonlarında $f(x) \in \mathcal{L}^2(0, \infty)$ 'nin açılımının ilk türevlerinin birinci derecesinden Riesz ortalamaları ile sıradan bir Fourier kosinüs integralindeki $f(x)$ 'in açılımı arasındaki fark, her sonlu aralıkta değişmez şekilde sıfıra eğilimlidir.

İSPAT: Şöyle yaparız

$$h(x, t) = \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} f(s) ds. \quad (3.3.14)$$

olmak üzere

$$a(x, \mu) = \int_0^1 h(x, t) \cos \mu t dt, \quad (3.3.15)$$

ve

$$k(x, t) = f(x+t) \int_x^{x+t} q(\tau) d\tau, \quad (3.3.16)$$

olmak üzere

$$\beta(x, \mu) = \int_{-1}^{+1} f(x+t) \left\{ \int_x^{x+t} q(\tau) d\tau \right\} \cos \mu t dt = \int_{-1}^{+1} k(x, t) \cos \mu t dt, \quad (3.3.17)$$

şeklinde yazılır.

$$\psi_\varepsilon(\mu) = \frac{1}{2} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g_\varepsilon(t) \cos \mu t \, dt \quad (0 < \varepsilon \leq 1). \quad (3.3.18)$$

olmak üzere, Adi Fourier integralleri için Parseval eşitliği ile sırasıyla (3.3.15)-(3.3.16) ve (3.3.17)-(3.3.18)'den elde ettiğimiz

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\varepsilon(\mu) a(x, \mu) \, d\mu &= \pi \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) h(x, t) \, dt \\ &= \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) \left\{ \int_{x-t}^{x+t} \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} f(s) \, ds \right\} dt \\ &= \pi \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t) \left\{ \int_{|x-8|}^\varepsilon \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} g_\varepsilon(t) \, dt \right\} ds, \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

ve

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\varepsilon(\mu) \beta(x, \mu) \, d\mu &= \int_{-\varepsilon}^\varepsilon g_\varepsilon(t) k(x, t) \, dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g_\varepsilon(t) f(x+t) \left\{ \int_x^{x+t} q(\tau) \, d\tau \right\} dt \\ &= \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) g_\varepsilon(s-x) \left\{ \int_x^8 q(\tau) \, d\tau \right\} ds, \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

özdeşliği elde edilir. Bu nedenle, (3.3.19) ve (3.3.20) sayesinde özdeşlik (3.3.7) şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\varepsilon(\mu) d_\mu \left\{ \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} - \frac{\partial S^*(x, \mu)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^\mu a(x, \nu) \, d\nu + \frac{1}{\pi} \int_0^\mu \beta(x, \nu) \, d\nu \right\} = 0. \quad (3.3.21)$$

$\mu \rightarrow \infty$ açısından aşağıdaki tahminlerin geçerliliği aşıkardır:

$$\bigvee_{\mu}^{\mu+1} \left\{ \int_0^\mu a(x, \nu) \, d\nu \right\} = o(1), \quad \bigvee_{\mu}^{\mu+1} \left\{ \int_0^\mu \beta(x, \nu) \, d\nu \right\} = o(1). \quad (3.3.22)$$

Bu nedenle (3.3.8), (3.3.13), (3.3.22) ve (3.3.21) ile fonksiyonun birinci dereceden Riesz ortalamasına dayanarak Tauber Teoremi uygulanabilir,

$$\frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} - \frac{\partial S^*(x, \mu)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} \{a(x, v) - \beta(x, v)\} dv$$

özdeşliği elde edilir ki teorem her sonlu aralıkta değişmez şekilde sıfıra meyillidir, yani,

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) dv \left\{ \frac{\partial S(x, v)}{\partial x} - \frac{\partial S^*(x, v)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^v [a(x, v) - \beta(x, v)] dv \right\} = 0$$

ya da

$$\begin{aligned} & \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) dv \left\{ \frac{\partial S(x, v)}{\partial x} - \frac{\partial S^*(x, v)}{\partial x} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \{a(x, \mu) - \beta(x, v)\} dv. \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

eşittir.

Teoremi kanıtlamak için şu şekilde göstermek yeterlidir

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \{a(x, v) - \beta(x, v)\} dv = 0 \quad (3.3.24)$$

ki burada her sonlu aralıkta sabit kalır. $\alpha(x, \mu)$ fonksiyonunun tanımına göre, yani (3.3.15) ile, elde ettiğimiz

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) a(x, v) dv = \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \left[\int_0^1 h(x, t) \cos vt dt \right] dv.$$

İntegralinin sırasını değiştirerek aşağıdaki integrali

$$\int_0^\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) a(x, v) dv = \int_0^1 h(x, t) \left\{ \int_0^\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \cos vt dt \right\} dt \quad (3.3.25)$$

elde etmiş oluruz.

Hipoteze göre $q(x)$ her sonlu aralıkta mutlak sürekli olduğundan, her sonlu aralıkta sınırlıdır. Daha sonra Önerme 3.1.2, $\partial w(x, t, s)/\partial x$ fonksiyonunun her sonlu aralıkta sınırlı olduğu sonucu çıkar, ki bu durumda (3.3.14)'ten çıkardığımız sonuç:

$$|h(x, t)| < C \int_{x-t}^{x+t} |f(s)| ds,$$

şeklinde yazılır. Burada Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinden

$$|h(x, t)| < C \left(\int_{x-t}^{x+t} f^2(s) ds \right)^{1/2} \left(\int_{x-t}^{x+t} ds \right)^{1/2} \leq C' t^{1/2}, \quad (3.3.26)$$

elde edilir. Çünkü $f(s)$, integrallenebilen karedir. Sonra (3.3.25), (3.3.26) ve (3.2.14)'ten $\mu \rightarrow \infty$ yapılacak tahmin

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) a(x, v) dv \right| &< C \int_0^1 \mu t^{1/2} \frac{J_{3/2}(\mu t)}{\mu t^{3/2}} dt \\ &= \frac{C}{\mu^{1/2}} \int_0^\mu \frac{|J_{3/2}(u)|}{|u|} du = O(\mu^{-1/2}). \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

şeklindedir. Ayrıca, benzer şekilde bir iddia ile (3.3.15), (3.3.16) ve (3.2.14)'ten elde ettiğimiz

$$\int_0^\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \beta(x, v) dv$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mu \int_{-1}^{+1} f(x, t) \frac{J_{3/2}(\mu t)}{\mu t^{3/2}} \left\{ \int_x^{x+t} q(\tau) d\tau \right\} dt = O\left(\mu^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (3.3.28)$$

Denklemleri elde edilir.(3.3.27) ve (3.3.28) tahminleri (3.3.24)'ü ispatlar ve dolayısıyla teorem,

Önerme:3.3.2 ve Önerme:3.3.3 'ten başlayarak, tamamen benzer bir şekilde ispatlayabiliriz:

Teorem 3.3.2. $f(x) \in \mathcal{L}^2(0, \infty)$ olarak bırakalım. Eğer $q(x)$ her sonlu aralıkta mutlak sürekli olan $k-1$ derecesinden bir türeve sahipse, bu durumda her sonlu aralıkta sabit olarak elde ettiğimiz

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right)^k dv \left\{ \frac{\partial^k S(x, v)}{\partial x^k} - \frac{\partial^k S^*(x, v)}{\partial x^k} \right\} = 0,$$

yani, bir Sturm-Liouville operatörünün öz fonksiyonlarına göre $f(x)$ açılımının k 'nci türevlerinin k derecesindeki Riesz ortalamaları ile bayağı Fourier kosinüs integrali arasındaki fark, her sonlu aralıkta sabit bir şekilde sıfır olma eğilimindedir.

3.4. Farklılaştırılmış bayağı ve genelleştirilmiş fourier integral açılımlarının toplamı

Önceki bölümde kanıtlanmış olan, bir Sturm-Liouville operatörünün öz fonksiyonlarında diferansiyel bir açılımın ve sıradan bir Fourier kosinüs integrali olarak bir açılımın eşit toplanabilirliği hakkındaki teoremden, bir Sturm-Liouville operatörünün öz fonksiyonlarındaki diferansiyel açılımların, açılmış olan fonksiyona karşılık gelen türevlerinin değerlerine toplamına ilişkin teoremleri elde etmek, sıradan türevlerin toplamı için bu tür teoremlere sahip olduğunda, kolaydır. Bayağı Fourier serisinin birinci türevinin toplamı ile ilgili olarak, iyi bilinen Fejér-Lebesgue teoremi vardır (karşılaştırın, örneğin, Natanson [1]). Bu bölümde, kendi yöntemimizi kullanarak, Fejér-Lebesgue teoremine benzer bir teoremi ispatlayacağız.

Teorem 3.4.1. $F\{f(x)\}$ fonksiyonunun olağan Fourier serisini gösterebilir. $F\{f(x)\}$ serisi, x_0 noktasında aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa birinci dereceden Riesz yöntemiyle x_0 noktasında $f'(x_0)$ değerine toplanabilir.

1. $f(x)$, x_0 'ın bazı komşuluğunda mutlak süreklidir
2. $f'(x_0)$, x_0 'da süreklidir.

İspat: $f(x)$ 'in, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) aralığında mutlak sürekli olduğunu varsayalım. Ayrıca $f(x)$, $(0, 2\pi)$ Aralığında tanımlanan ve $\mathcal{L}^1(0, 2\pi)$ metriğinde $f(x)$ 'e yakınsayan bir düzgün fonksiyonlar dizisi $\{f_n(x)\}$ olsun. $f_n(x)$ 'in düzgünlüğü sayesinde elde ettiğimiz

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \{a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx\} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.4.1)$$

dizisine eşittir. Burada $a_k^{(n)}$ ve $b_k^{(n)}$ $f_n(x)$ 'in Fourier katsayılarıdır ve (3.4.1) serisi sabit bir şekilde hareket eder.

t , $|t| < \delta/2$ 'yi sağlayan keyfi bir gerçektek sayı olsun. (3.4.1)'den sonra aşağıdaki dizi oluşur.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{f_n(x+t) + (f_n(x-t))\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \{a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx\} \cos kt \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

(3.4.2)'nin her iki tarafını $g_\epsilon(t)$ ile çarparak ve 0'dan ϵ 'a t 'ye göre (3.3.18) ile integral alarak elde ettiğimiz durum

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\epsilon \{f_n(x+t) + (f_n(x-t))\} g_\epsilon(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \{a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx\} \psi_\epsilon(k) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

şeklinde yazılır.

Formülü başlatalım

$$S_n(x, \mu) = \sum_{k < \mu} \{a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

bu durumda (3.4.3),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d_{\mu} S_n(x, \mu) = \int_0^{\varepsilon} \{f_n(x+t) + f_n(x-t)\} g_{\varepsilon}(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.4.4)$$

formunu alır. $\{f_n(x)\}$ dizisinin $f(x)$ 'e yakınsaması (3.4.4)'ün sağ tarafındaki integral işareti altındaki limite geçmemizi sağlar ve (3.1.7) sınırı ise (3.4.4)'ün sol tarafında limiti geçmemizi mümkün kılar.

Sonuç olarak elde ettiğimiz durum

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d_{\mu} S(x, \mu) = \int_0^{\varepsilon} \{f(x+t) + f(x-t)\} g_{\varepsilon}(t) dt, \quad (3.4.5)$$

integrali şeklinde yazılır ki burada

$$S(x, \mu) = \sum_{k < \mu} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

fonksiyonunda a_k ve b_k $f(x)$ 'in Fourier katsayılarıdır.

$x \in (x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$ açısından x 'e göre (3.4.5) te türev aldığımızda,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) d_{\mu} \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} = \int_0^{\varepsilon} \{f'_x(x+t) + f'_x(x-t)\} g_{\varepsilon}(t) dt$$

integrali elde edilir ve eklenmesi gereken

$$a(x, \mu) = \int_0^{\varepsilon} \{f'_x(x+t) + f'_x(x-t)\} \cos \mu t dt. \quad (3.4.7)$$

olmak üzere, Bayağı Fourier integrali için Parseval eşitliğine göre, (3.4.6) ve (3.4.7)' den şu sonuç çıkar:

$$\int_0^{\varepsilon} \{f'_x(x+t) + f'_x(x-t)\} g_{\varepsilon}(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} a(x, \mu) \psi_{\varepsilon}(\mu) d\mu. \quad (3.4.8)$$

$\psi_\varepsilon(\mu)$ ve $a(x, \mu)$, μ 'ye göre çift olduğundan, (3.4.6) ve (3.4.8)' de yazılan integral eşitliklerinden

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\varepsilon(\mu) d\mu \left\{ \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^\mu a(x, v) dv \right\} = 0. \quad (3.4.9)$$

sonucuna ulaşmış oluruz. Ayrıca $S(x, \mu)$ ve $a(x, \mu)$ tanımından çıkan sonuca göre $\mu \rightarrow \infty$ için sahip olduğumuz tahminler

$$\bigvee_{\mu}^{\mu+1} \left\{ \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} \right\} = o(\mu), \quad \bigvee_{\mu}^{\mu+1} \left\{ \int_0^\mu a(x, v) dv \right\} = o(1), \quad (3.4.10)$$

şeklindedir

(3.4.9), (3.4.10) ve Tauber Teoremi 3.4.1' den çıkan sonuca göre, fonksiyonun birinci dereceden Riesz ortalaması

$$\frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^\mu a(x, v) dv$$

ise $(x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$ Aralığında sabit olarak sıfıra eğilimlidir, yani

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2} \right) dv \left\{ \frac{\partial S(x, v)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^\mu a(x, v) dv \right\} = 0, \quad (3.4.11)$$

eşittir. (3.4.11)'den, teoremi kanıtlamak için aşağıdaki eşitliğin geçerliliğini kanıtlamanın yeterli olduğu sonucu çıkar.

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} I \equiv \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2} \right) a(x_0, v) dv = f'(x_0). \quad (3.4.12)$$

$a(x, v)$ Fonksiyonun tanımından elde ettiğimiz

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \left\{ \int_0^{\varepsilon} [f'_x(x_0 + t) + f'_x(x_0 - t)] \cos vt \, dt \right\} dv,$$

denkleminin Tümler sırasını değiştirerek elde ettiğimiz durum

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} [f'_x(x_0 + t) + f'_x(x_0 - t)] \left\{ \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) \cos vt \, dv \right\} dt. \quad (3.4.13)$$

şeklinde yazılır. Buradan (3.2.14) ve (3.4.13)' ten çıkan sonuç

$$I = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu \int_0^{\varepsilon} [f'_x(x_0 + t) + f'_x(x_0 - t)] \frac{J_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}} dt. \quad (3.4.14)$$

dir. şimdi (3.4.14)'ün sağ tarafındaki integrali aşağıdaki gibi dñüřtörelim:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu \int_0^{\varepsilon} [f'_x(x_0 + t) + f'_x(x_0 - t) - 2f'(x_0)] \frac{J_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}} dt \\ &\quad + 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu f'(x_0) \int_0^{\varepsilon} \frac{J_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}} dt. \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

(3.4.15)'in sağ tarafındaki integrallerdeki t deęiřkenleri değiştirerek, řu forma dñüřtürebiliriz.

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\varepsilon \mu} \left[f'_x\left(x_0 + \frac{z}{\mu}\right) + f'_x\left(x_0 - \frac{z}{\mu}\right) - 2f'(x_0) \right] \frac{J_{3/2}(z)}{(z)^{3/2}} dz \\ &\quad + 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(x_0) \int_0^{\varepsilon \mu} \frac{J_{3/2}(z)}{(z)^{3/2}} dz \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

şimdi büyük μ için (3.4.16)'nın sağ tarafındaki ilk integrali tahmin etmek istiyoruz.

η rasgele bir pozitif sayı göstersin ve integralin üst sınırına eklenir ise

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\varepsilon\mu} \left[f'_x \left(x_0 + \frac{z}{\mu} \right) + f'_x \left(x_0 - \frac{z}{\mu} \right) - 2f'(x_0) \right] \frac{J_{3/2}(z)}{(z)^{3/2}} dz \\
&= \left\{ \int_0^{\eta} + \int_{\eta}^{\varepsilon\mu} \right\} \left[f'_x \left(x_0 + \frac{z}{\mu} \right) + f'_x \left(x_0 - \frac{z}{\mu} \right) - 2f'(x_0) \right] \times \frac{J_{3/2}(z)}{(z)^{3/2}} dz \\
&= I_1 + I_2, \tag{3.4.17}
\end{aligned}$$

elde edilir. $f'(x)$, x_0 'da sürekli olduğundan, herhangi bir $\delta > 0$ ve sabit η için μ_0' ı o kadar büyük seçebiliriz ki tüm $\mu > \mu_0$ için elde edeceğimiz

$$|I_1| < \delta/2 \tag{3.4.18}$$

olur. Öte yandan, η 'yi yeterince büyük seçerek,

$$|I_2| < \delta/2 \tag{3.4.19}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(3.4.17) sayesinde (3.4.18), (3.4.19)'dan δ 'ın rasgele olmasından elde ettiğimiz,

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon\mu} \left\{ f'_x \left(x_0 + \frac{z}{\mu} \right) + f'_x \left(x_0 - \frac{z}{\mu} \right) - 2f'(x_0) \right\} \frac{J_{3/2}(z)}{(z)^{3/2}} dz \tag{3.4.20}$$

denklem son olarak, (3.4.16)'deki limite geçerek, (3.4.20) ile elde ettiğimiz

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} I = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(x_0) \int_0^{\infty} \frac{J_{3/2}(z)}{(z)^{3/2}} dz. \tag{3.4.21}$$

limit değeri yazılır. Ayrıca, iyi bilinen bir formülle (bkz. Watson [1], §13.24)

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{3/2}(z)}{(z)^{3/2}} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Birlikte (3.4.21), (3.4.12)'yi ve dolayısıyla bu teoremi kanıtlar. Fejér-Lebesgue teoremi, birinci dereceden Cesàro ve Riesz toplama yöntemlerinin denkliğiyle az önce ispatlanan

teoremden çıkar. Önceki teoremin aynı varsayımlar altında bayağı Fourier integralleri için doğru olduğunu ispattan görmek zor değil, yani elde ettiğimiz:

Teorem 3.4.2 Aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

- 1) $f(x) \in \mathcal{L}^2(0, \infty)$
- 2) $f(x), x_0'$ in bazı komşuluklarında kesinlikle sürekli.
- 3) $f'(x), x_0'$ da sürekli.

Bu durumda, $f(x)$ açılımının bayağı Fourier integrali olarak birinci türevi, birinci dereceden Riesz yöntemiyle x_0 noktasında $f'(x_0)$ değerine toplanabilir.

Teorem 3.3.1 ve **Teorem 3.4.2**'den çıkan sonuç:

Teorem 3.4.3. $q(x)$ her sonlu aralıkta mutlak olarak sürekli olsun ve aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım.

- 1) $f(x) \in \mathcal{L}^2(0, \infty)$
- 2) $f(x), x_0'$ in bazı komşuluklarında kesinlikle sürekli.
- 3) $f(x), x_0'$ da sürekli.

Bu durumda

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) d_v \frac{\partial S(x, v)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = f'(x_0),$$

eşitliği yazılır.

Yani, $f(x)$ açılımının Sturm-Liouville operatörünün öz fonksiyonlarına göre birinci türevi, birinci dereceden Riesz yöntemiyle x_0 noktasında $f'(x_0)$ değerine toplanabilir.

Daha yüksek dereceden türevler için de benzer bir teorem geçerlidir.

3.5. Diferansiyel bir özfonksiyon açılımının yakınsaması

Teorem 3.5.1. $q(x)$ 'in her sonlu aralıkta toplanabilir olduğunu ve $f(x)$ 'in $x \geq 0$ için aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım:

- 1) $f(x)$ ve $\mathcal{L}\{f(x)\} = f''(x) - q(x)f(x)$ aittir $\mathcal{L}^2(0, \infty)$.
- 2) $f(0) \cos a + f'(0) \sin a = 0$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} W\{\varphi(x, \lambda), f(x)\} = 0$ Spektrumdaki her λ için

Bu durumda, $f(x)$ 'in özfonksiyon açılımı mutlak olarak yakınsar.

İspat: Teoremin hipotezlerinden ve Green özdeşliğinden çıkan sonuç

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) \varphi(x, \lambda) dx \\ &= -\frac{1}{\lambda} \int_0^b f(x) \mathcal{L}\{\varphi(x, \lambda)\} dx = -\frac{1}{\lambda} \mathcal{E}(\lambda), \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

burada

$$\mathcal{E}(\lambda) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \mathcal{L}\{f(x)\} \varphi(x, \lambda) dx.$$

Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinden şu sonuç çıkar:

$$\int_{-\infty}^0 |F(\lambda)| |\varphi(x, \lambda)| d\rho(\lambda) < \infty. \quad (3.5.2)$$

(3.5.2) deki integrali göz önünde bulunduralım

$$\int_0^{\infty} |F(\lambda)| |\varphi(x, \lambda)| d\rho(\lambda)$$

Eğer λ 'yi μ^2 ile yer değiştirirsek ve yerlerine

$$F(\lambda) = F_1(\mu), \quad \varphi(x, \lambda) = \varphi_1(x, \mu), \quad \mathcal{E}(\lambda) = \mathcal{E}_1(\mu), \quad \rho(\lambda) = \rho_1(\mu),$$

Eşitlikleri yazılırsa integral şu formu almış varsayılır

$$\int_0^{\infty} |F_1(\mu)| |\varphi_1(x, \mu)| d\rho_1(\mu)$$

$$= \int_0^1 |F_1(\mu)| |\varphi_1(x, \mu)| d\rho_1(\mu) + \sum_{a=1}^{\infty} \int_a^{a+1} |F_1(\mu)| |\varphi_1(x, \mu)| d\rho_1(\mu). \quad (3.5.3)$$

Ayrıca (3.5.1) ve Cauchy Bunjakovskii eşitsizliğinden çıkan sonuç:

$$\int_a^{a+1} |F_1(\mu)| |\varphi_1(x, \mu)| d\rho_1(\mu) \quad (3.5.4)$$

$$\leq \frac{1}{a^2} \left(\int_a^{a+1} \mathcal{E}_1^2(\mu) d\rho_1(\mu) \right) (\theta_1(x, x, a+1) - (\theta_1(x, x, a))) \leq \frac{C}{a^2}$$

Eşitsizliği şeklindedir. Burada sabit C , α 'ya bağlı değildir. Bu yüzden (3.5.3)'ten çıkan sonuç

$$\int_0^{\infty} |F_1(\mu)| |\varphi_1(x, \mu)| d\rho_1(\mu) < \int_0^1 |F_1(\mu)| |\varphi_1(x, \mu)| d\rho_1(\mu) + C \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} < \infty. \quad (3.5.5)$$

(3.5.2) ile teoremi ispatlar.

Bu bölümün amacı aşağıdaki teoremi ispatlamaktır.

Teorem 3.5.2. $f(x)$ 'in önceki teoremin koşullarını sağladığını ve ayrıca $g(x)=f''(x) - q(x)$ $f(x)$ fonksiyonunun $x_0 \geq 0$ ²⁾ noktasında $\varphi(x, \lambda)$ öz fonksiyonlarına göre genişletilebileceğini varsayalım. Bu durumda

$$f''(x_0) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\lambda} F(\lambda) \varphi_{xx}''(x_0, \lambda) d\rho(\lambda), \quad (3.5.6)$$

şeklinde yazılır.

İspat: Hipotezle

$$g(x_0) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\lambda} \mathcal{E}(\lambda) \varphi(x_0, \lambda) d\rho(\lambda) = - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\lambda} \lambda F(\lambda) \varphi(x_0, \lambda) d\rho(\lambda) \quad (3.5.7)$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\lambda} F(\lambda) \varphi''_{xx}(x_0, \lambda) d\rho(\lambda) - q(x_0) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\lambda} F(\lambda) \varphi(x_0, \lambda) d\rho(\lambda).$$

$g(x_0) = f''(x_0) - q(x_0)f(x_0)$ olduğu için ve

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\lambda} F(\lambda) \varphi(x_0, \lambda) d\rho(\lambda) = f(x_0), \quad (3.5.8)$$

(3.5.6) bağıntısından (3.5.7) sonucu çıkar.

$g(x)$ fonksiyonunun, trigonometrik bir Fourier serisinde genişletilebilir olması için yeterli olan herhangi bir yerel koşulu karşılaması yeterlidir. Hipotez gereği, $f(x)$ $x \geq 0$ için ikinci bir türev olduğundan, örneğin $f''(x)$ ve $q(x)$ 'in x_0 noktasının bir komşuluğunda sınırlı varyasyonda olması yeterlidir.

Bibliyografik referanslar

§1, 2, 3, 4. Bu bölümlerin sonuçları Sargsjan'a aittir [1-4].

§5. Teorem 3.5.2 yazarlara aittir ve ortak makalelerinde yayınlanmıştır [1-2]. Yazarlar tarafından ortak makalede [3] başka bir kanıt verilmiştir.

§6. Fourier'in yönteminin bir ispatı Levitan [17] tarafından makalesinde verilmiştir. bkz. ayrıca yazarların ortak makalesi [3].

KAYNAKLAR

- Bakar, A.H.A. (2021) “Fourier Dönüşümleri”, Yüksek Lisans Tezi, **Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Çankırı, 3-105.
- Davaz Ç. (2020) "Dalga Denklemi ve Başlangıç Değer Problemi", Yüksek Lisans Tezi, **Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Ankara, 39-74.
- Şen E. (2010) “Sınır Koşulunda Spektral Parametre Bulunan Geç Kalan Argümentli Sürekli Olmayan Sınır-Değer Probleminin Özdeğer ve Özfonksiyonlarının Asimptotik İf Adeleri”, Yüksek Lisans Tezi, **Namık Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Tekirdağ 1-26.
- Can F. N. (2012) “Fourier Seriler ve Fourier 0 İntegralleri” Yüksek Lisans Tezi, **Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Afyon, 3-51.
- Olğar H. (2015) “Geçiş Şartları İçeren Bir Sturm-Liouville Probleminin Genelleştirilmiş Özfonksiyonların Tamlık Özelliği”, Doktora Tezi, **Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Tokat, 18-64.
- Koçak, M. (2015) Genel Topolojiye Giriş ve Problem Çözümleri, **Nisan Kitabevi Yayınları**, Eskişehir.
- Kreyszig, E. (1978) Introductory to Functional Analysis with Applications, **John Wiley and Sons**, New York.
- Musayev, B. ve Alp, M.(2000) Fonksiyonel Analiz, **Balcı Yayınları**, Kütahya.
- Tuzkaya Ö. (2005) “Ağırlıklı Telin Titreşiminde Oluşan Sınır Değer Problemlerinin Özdeğer ve Öz fonksiyonları”, Yüksek Lisans Tezi, **Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Mersin 7-37.
- Türkmenoğlu Ö. (2019) “Yüksek Mertebeden Diferansiyel Operatörlerin Öz fonksiyonlarının Asimptotik Biçimleri”, **Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Mersin, 14-29.
- Kocabaş S. (2017) “Sonlu Fourier Sine, Fourier Cosine, Laplace Dönüşümlerinin Genelleştirilmesi ve Uygulamaları”, Yüksek Lisans Tezi, **Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, İstanbul, 1-81.
- Şuhubi, E.S. (2001) Fonksiyonel Analiz, **İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı**, İstanbul.
- Levitan, B.M. and Sargsjan I.S. (1975) Translations of Mathematical Monographs, **American Mathematical Society**, Rhode Island, USA.

- Weber J.H. And Arfken G.B. (2005) Mathematical Methods for Physicists, **Elsevier Academic Press**. Cambridge.
- Turarov Y. (2023) “İkinci Mertebeden Notral Gecikme Argumentli Diferansiyel Denklemlerin Salınımlığı”, Yüksek Lisans Tezi, **Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Kayseri14-71.
- Şaşmaz Z. (2006) “Bir Süreksiz Sturm-Liouville Probleminin Özdeğer ve Özfonksiyonlarının Bazı Özellikleri”, Yüksek Lisans Tezi, **Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Tokat, 5-56.

